А. Д. Тевяшев , О. Г. Литвин

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЗАГАЛЬНИЙ КУРС

Збірник задач та вправ

Рекомендовано
Міністерством освіти України
як навчальний посібник
для студентів економічних спеціальностей
вищих навчальних закладів

Харків
"Рубікон"
1999

ББК 22.11я7
Т90
УДК 717(07)

Рецензенти:
зав. кафедрою вищої математики Харківського державного економічного університету, канд. фіз.-мат. наук, проф. *Я. П. Бузько* ;
зав. кафедрою вищої математики Харківської державної академії міського господарства, д-р фіз.-мат. наук, проф. *А. І. Колосов*

Тевяшев А. Д., Литвин О. Г.
Т90 Вища математика . Загальний курс : Збірник задач та вправ. 2–е вид. доп. і доопр. – Х .: Рубікон, 1999. – 320 с.
ISBN 5–7763–2649–4.

Навчальний посібник містить задачі до всіх розділів вищої математики відповідно до програми загального курсу вищої математики для студентів економічних спеціальностей. Наведено необхідний довідковий матеріал, розв'язання типових прикладів, набори задач для практичних занять, а також набори індивідуальних завдань із зразками їх виконання. Основні математичні поняття та методи застосовуються для розв'язування численних практичних задач з економіки та бізнесу, чому присвячена окрема глава. Дібрано 50 задач економічного змісту з розв'язками та 100 задач для самостійного розв'язання. Усі задачі мають відповіді. Наведено індивідуальне завдання з задачами економічного змісту і зразком його виконанння.

Для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, викладачів та економістів-практиків.

$\text{Т}\ \dfrac{1602010000 - 12}{98}$ **ББК 22.11я7**

ISBN 5-7763-2649-4

ПЕРЕДМОВА ДО ДРУГОГО ВИДАННЯ

При написанні другого видання автори прагнули сприяти підвищенню рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з підсиленням її прикладного економічного спрямування.

Глави 1 – 4 зазнали незначних змін, пов'язаних з включенням додаткових теоретичних відомостей, однак структура цих глав збереглася колишньою, кількість задач для практичних занять та їх нумерація, а також індивідуальні завдання залишилися незмінними, що забезпечує спадкоємність першого і другого видань.

Істотно розширена глава 5 "Деякі застосування математики в економіці", де значно збільшено кількість задач економічного змісту з розв'язками і для самостійного розв'язання (їх кількість відповідно 50 і 100). Усі задачі мають відповіді. Крім того, розроблено індивідуальне завдання з задачами економічного змісту, в якому міститься шість задач в 31 варіанті кожна. Наведено зразок виконання цього завдання.

Для більш зручного користування навчальним посібником наведено три додатки з основними формулами елементарної математики, диференціального та інтегрального числення. Також для зручності до змісту внесено не тільки номери сторінок, а й номери задач (в дужках), що на них розташовані.

ПЕРЕДМОВА ДО ПЕРШОГО ВИДАННЯ

Перехід до ринкових відносин привів до необхідності підготовки економістів, котрі б досконало володіли математичним апаратом економічних досліджень та вміли застосовувати його на практиці. Фундаментальну основу в математичній підготовці економістів складає курс "Вища математика. Загальний курс".

Мета навчального посібника – допомогти тим, хто вивчає дисципліну, осмислити основи математичної теорії й оволодіти навичками її застосування до розв'зування різноманітних прикладних задач в економіці, плануванні та управлінні виробництвом, у фінансовій і комерційній діяльності.

Особливістю цього навчального посібника є його точна відповідність програмі бакалаврської підготовки з курсу "Вища математика. Загальний курс", а добір матеріалу здійснено таким чином, щоб у найбільш доступній формі проілюструвати основні математичні ідеї та методи, котрі найбільш ефективно зарекомендували себе в економічних дослідженнях, і навчити студентів використовувати їх на практиці – при розв'язанні конкретних економічних задач.

До навчального посібника увійшли як методичні вказівки до практичних занять, так і індивідуальні завдання з загального курсу вищої математики.

Навчальний посібник містить п'ять глав.

Глави 1 – 4 присвячені відповідним розділам загального курсу вищої математики:

1. Векторна алгебра та аналітична геометрія.
2. Визначники і матриці. Системи лінійних рівнянь.
3. Диференціальне числення.
4. Інтеграли, диференціальні рівняння і ряди.

Ці глави мають наступну структуру: посилання на літературу, що дозволяє вивчити основний теоретичний матеріал; стислі теоретичні відомості і розв'язування типових прикладів; питання для самоперевірки; набори задач для практичних занять - як аудиторних, так і домашніх; індивідуальне завдання; зразок виконання індивідуального завдання.

Теоретичні відомості, що наводяться, носять лише довідковий характер; розв'язки типових прикладів ілюструють найбільш раціональні прийоми і методи розв'язання; в наборі задач для практичних занять є достатня їх кількість для розуміння і засвоєння курсу. Задачі в наборах нумеруються у межах глави, перша цифра відповідає номеру глави. В кінці роботи наведено відповіді до задач за главами. Індивідуальне завдання містить певну кількість задач, кожна з яких має 31 варіант. Номер варіанта для самостійного розв'явдання відповідає порядковому номеру студента в журналі групи. Наведений зразок виконання індивідуального завдання допомагає студенту при виконанні завдань та оформленні звіту.

Глава 5 має прикладний характер і присвячена застосуванням загального курсу вищої математики в економіці. Метою її є вироблення навичок математичного дослідження прикладних проблем в економіці, вміння перекласти змістовну постановку економічної задачі на математичну мову; використовуючи математичні методи отримати її роз'язок і дати йому економічну інтерпретацію.

Глава 5 містить такі розділи:

1. Економічні задачі, пов'язані з використанням лінійної функціональної залежності.
2. Економічні задачі, пов'язані з використанням рівнянь кривих другого порядку.
3. Економічні задачі, що зводяться до систем лінійних нерівностей.
4. Економічні задачі, в яких використовується теорія матриць.
5. Економічні задачі, що зводяться до систем лінійних рівнянь.
6. Економічні задачі, пов'язані з послідовністю та її границею (елементи математики фінансів).
7. Економічні задачі, в яких використовується поняття похідної.
8. Економічні задачі, в яких використовуються функції багатьох змінних та їх частинні похідні.
9. Економічні задачі, що зводяться до обчислення визначених інтегралів.
10. Економічні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь.

В означених розділах наведено необхідні теоретичні відомості, постановки економічних задач і запис їх в математичній формі, а також розв'язання задач економічного змісту розглянутими у главах 1 – 4 методами, що розвиває навички застосування математичних знань в практичних ситуаціях. Дібрано задачі для самостійного розв'язання. Всі задачі забезпечені відповідями для самоконтролю одержуваних розв'язків.

Слід відзначити, що у главі 5 наведена достатньо велика кількість прикладних задач, що вирішуються методами, викладеними в загальному курсі вищої математики.

З іншими численними застосуваннями студенти ознайомляться у спеціальних курсах вищої математики, що базуються на вивченому загальному курсі і використовують спеціальні методи розв'язання.

Таким чином, даний навчальний посібник може бути використаний як довідник, розв'язник і в той же час як задачник, що надто зручно для студентів і надає їм широкі можливості для активної самостійної роботи.

ПРОГРАМА КУРСУ

1. Векторна алгебра та аналітична геометрія.

Вектори. Лінійні операції над векторами. Розклад вектора за базисом. Лінійна залежність і лінійна незалежність векторів. Скалярний добуток векторів. Векторний добуток векторів. Мішаний добуток векторів.

Пряма лінія в R^2. Різні види рівнянь прямої. Відстань від точки до прямої.

Площина і пряма в R^3. Різні форми задання. Кути між площинами, прямими, прямою та площиною. Відстань між точками, прямими та площинами в R^3. Умови паралельності та перпендикулярності прямих, площин, прямої та площини. Основні задачі на пряму та площину.

Криві другого порядку. Поняття про поверхні другого порядку. Системи лінійних нерівностей.

2. Визначники і матриці. Системи лінійних рівнянь.

Визначники n-го порядку. Мінори й алгебраїчні доповнення. Властивості визначників. Матриці. Основні означення. Дії над матрицями. Многочлени від матриць. Транспонування матриць. Обернена матриця. Ранг матриці. Елементарні перетворення матриць.

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь. Основні означення. Квадратні системи. Матричний спосіб розв'язання. Правило Крамера. Загальні системи m рівнянь з n невідомими. Умова сумісності. Однорідні системи рівнянь. Критерій нетривіальної розв'язності. Фундаментальні системи розв'язків. Метод Гаусса розв'язання систем лінійних рівнянь.

Власні вектори і власні значення матриць. Квадратичні форми.

3. Диференціальне числення.

3.1. Збіжність в R^1.

Границя послідовності. Геометрична інтерпретація. Властивості границь. Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності.

3.2. Границя і неперервність функцій однієї змінної.

Поняття функції. Класифікація функцій. Границя функції в точці. Геометрична інтерпретація. Нескінченно малі і нескінченно великі функції. Порівняння нескінченно малих.

Неперервність. Означення. Властивості неперервних функцій. Важливі границі.

3.3. Диференціальне числення функції однієї змінної.

Похідна. Означення. Геометричний зміст. Правила обчислення похідних.

Таблиця похідних. Диференційовність функцій. Диференціал функції. Правила обчислення. Похідні вищих порядків. Теореми про диференційовні функції. Правило Лопиталя. Формула Тейлора. Екстремуми функцій. Дослідження функцій з допомогою похідних.

3.4. Збіжність в R^n.

Границя і неперервність в R^n. Збіжність послідовності в R^n. Внутрішні і граничні точки. Відкриті і замкнені множини.

Поняття функції багатьох змінних. Границя, неперервність функції багатьох змінних, властивості.

3.5. Диференціальне числення функцій багатьох змінних.

Частинні похідні. Повний диференціал. Частинні похідні та диференціали вищих порядків. Похідна за напрямом. Градієнт. Їх властивості. Екстремуми функцій багатьох змінних. Необхідна умова; достатні умови екстремуму.

Метод найменших квадратів. Умовний екстремум. Метод множників Лагранжа.

4. Інтеграли, диференціальні рівняння і ряди.

4.1. Інтеграли.

Невизначений інтеграл, його властивості, таблиця основних формул інтегрування. Заміна змінної та інтегрування частинами. Інтегрування деяких класів функцій.

Визначений інтеграл. Основні властивості. Формула Ньютона - Лейбніца. Обчислення визначеного інтеграла. Наближене обчислення визначеного інтеграла. Невласні інтеграли. Поняття про кратні інтеграли.

4.2. Диференціальні рівняння.

Поняття про диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння першого порядку і методи їх розв'язання. Диференціальні рівняння вищих порядків. Лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами. Задача Коші.

4.3. Ряди.

Числові ряди. Основні означення. Збіжність ряду. Властивості збіжних рядів. Гармонічний ряд. Ознаки збіжності рядів з додатними членами. Знакозмінні ряди. Абсолютна й умовна збіжність.

Степеневі ряди. Теорема Абеля. Область збіжності степеневого ряду. Ряд Тейлора.

ГЛАВА 1. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

[1, гл. 3, §. 3.1 - 3.44]

1.1. Векторна алгебра

Вектор $\overrightarrow{AB}$ – це направлений відрізок, довжина якого a називається модулем вектора; пишуть $a=\left|\vec{a}\right|=\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Два вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$ називаються протилежними, якщо для них справедлива рівність $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{BA}$.

Два колінеарні (паралельні) вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ відрізняються скалярним множником $\lambda : \vec{b}=\lambda\ \vec{a}$.

Розкладання вектора за координатними осями Ox, Oy, Oz записується у вигляді $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$, або $\vec{a}=(x,\ y,\ z)$, де x, y, z – проекції вектора $\vec{a}$ на осі Ox, Oy, Oz; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ – одиничні вектори (орти), що збігаються за напрямом з цими осями. Проекції x, y, z називаються координатами вектора.

Довжина вектора $\vec{a}$ визначається за формулою $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Якщо α, β, γ – кути між вектором $\vec{a}$ і осями Ox, Oy, Oz, то $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називаються напрямними косинусами вектора $\vec{a}$ і обчислюються за формулами $\cos\alpha=\dfrac{x}{\left|\vec{a}\right|}$; $\cos\beta=\dfrac{y}{\left|\vec{a}\right|}$; $\cos\gamma=\dfrac{z}{\left|\vec{a}\right|}$.

Якщо відомі координати точок $A(x_1, y_1, z_1)$ і $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$.

Приклад 1. Задано точки $A(2,-1,\ 3)$ і $B(1,\ 1,-2)$. Знайти $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

Розв'язання. $\overrightarrow{AB}=(1-2,\ 1-(-1),\ -2-3)=(-1,\ 2,\ -5)$;

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{1+4+25}=\sqrt{30}.$$

Якщо два вектори $\vec{a}=(x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b}=(x_2, y_2, z_2)$ колінеарні, то їх координати пропорційні, тобто

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Координати точки $M(x,\ y,\ z)$, що ділить направлений відрізок $\overrightarrow{AB}$ у даному відношенні λ, визначаються за формулами

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ;\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\ ;\ z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число, що дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}).$$

Якщо вектори задані своїми координатами, то

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

Проекція вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ та кут між ними визначаються за формулами

$$np_{\vec{b}}\,\vec{a}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|}\ ;\ \cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}.$$

Приклад 2. Знайти $\left(2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-3\vec{b}\right)$, якщо $\left|\vec{a}\right|=1$, $\left|\vec{b}\right|=2$, $(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})=\frac{\pi}{6}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості та означення скалярного добутку, маємо

$$(2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}-3\vec{b})=2(\vec{a},\ \vec{a})-6(\vec{a},\vec{b})+(\vec{b},\vec{a})-3(\vec{b},\ \vec{b})=$$

$$=2\left|\vec{a}\right|^2-5\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})-3\left|\vec{b}\right|^2=2-10\cos\frac{\pi}{6}-3\cdot4=-10-10\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=-10(1+\frac{\sqrt{3}}{2}).$$

Приклад 3. У трикутнику з вершинами $A(2,-1,3)$, $B(-2,2,5)$, $C(1,2,3)$ знайти косинус кута при вершині A.

Розв'язання. $\overrightarrow{AB}=(-4,3,2)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,3,0)$, тоді

$$\cos\varphi=\cos(\overrightarrow{AB}\,\hat{}\,,\overrightarrow{AC})=\frac{-4(-1)+3\cdot3+2\cdot0}{\sqrt{(-4)^2+3^2+2^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\frac{13}{\sqrt{29}\cdot\sqrt{10}}\approx0{,}763\ .$$

Векторним добутком $\vec{a}\times\vec{b}$ двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається третій вектор $\vec{c}$, що задовольняє наступним умовам:

1. $|\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\varphi$, $\varphi=(\vec{a}\,\hat{}\,,\vec{b})$.
2. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$.
3. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ утворюють праву трійку.

Якщо вектори задані своїми координатами $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ і $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$, векторний добуток знаходимо за допомогою визначника

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}.$$

Визначником другого порядку $\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}$ називається число, що дорівнює $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, тобто

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

де $a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ – деякі числа.

Визначником третього порядку називається число Δ, що обчислюється за правилом

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} (i – номер рядка, j – номер стовпця) визначника Δ називається добуток $(-1)^{i+j}$ на визначник другого порядку (мінор M_{ij} елемента a_{ij}), що одержується з Δ шляхом викреслення рядка і стовпця, на перетині яких знаходиться елемент.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Основна властивість визначників (розкладання визначника за елементами довільного ряду, тобто рядка або стовпця): визначник дорівнює сумі добутків елементів ряду на їх алгебраїчні доповнення.

Приклад 4. Обчислити визначник третього порядку

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & -3 \end{vmatrix}$$

шляхом розкладання за елементами першого рядка та безпосередньо.

Розв'язання. Розклавши визначник за елементами першого рядка, отримаємо

$$\Delta = 2(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + 3(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(2(-3)-5) -$$

$$-3((-2)(-3)-5) + (-2-2) = 2(-11) - 3 - 4 = -29.$$

Ту ж відповідь отримаємо безпосередньо:

$$\Delta = 2\cdot 2\cdot(-3) + (-2)1\cdot 1 + 3\cdot 5\cdot 1 - 1\cdot 2\cdot 1 - 5\cdot 1\cdot 2 - 3(-2)(-3) = -29.$$

Приклад 5. Обчислити площу трикутника ABC, де $A(2, -1, 3)$, $B(-2, 2, 5)$, $C(1, 2, 3)$.

Розв'язання. Врахуємо, що $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (-4, 3, 2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = (-1, 3, 0)$. Тоді

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = -6\vec{i} - 2\vec{j} - 9\vec{k},$$

звідки

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{36+4+81} = \sqrt{121} = 11; \quad S = \frac{1}{2}\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \frac{1}{2}11 = 5{,}5 \text{ (кв.од.)}.$$

Мішаним добутком трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ в означеному порядку називається скалярний добуток векторного добутку перших двох векторів на третій: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)$.

Якщо вектори задані своїми координатами $\vec{a}=(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\vec{b}=(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $\vec{c}=(x_3,\ y_3,\ z_3)$, мішаний добуток знаходиться за формулою

$$(\vec{a}\times\vec{b})\ \vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Модуль мішаного добутку трьох векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах як на сторонах, тобто $\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}\right|=V$. Об'єм піраміди $V=\frac{1}{6}\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

Умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ записується у вигляді

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0 \quad \text{або} \quad \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}=0.$$

Приклад 6. Задані вершини трикутної піраміди $A(3,2,1)$, $B(-2,1,-2)$, $C(-1,2,3)$, $D(1,-2,3)$. Знайти її об'єм.

Розв'язання.

$\vec{a}=\overrightarrow{AB}=(-5,-1,-3)$, $\vec{b}=\overrightarrow{AC}=(-4,0,2)$, $\vec{c}=\overrightarrow{AD}=(-2,-4,2)$.

$$(\vec{a}\times\vec{b})\vec{c}=\begin{vmatrix} -5 & -1 & -3 \\ -4 & 0 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{vmatrix}=-48+4-40-8=-92.$$

Отже, об'єм трикутної піраміди $V=\frac{1}{6}\cdot\left|-92\right|=\frac{46}{3}$ (куб. од.).

Впорядковану сукупність n дійсних чисел називають **n-вимірним вектором** $\vec{a}=\left(a_1,a_2,...,a_n\right)$, числа a_i $(i=\overline{1,n})$ – координати вектора.

Сукупність усіх n-вимірних векторів називається **n-вимірним векторним простором**. Позначення R^n.

Система векторів $\overrightarrow{x_1}$, $\overrightarrow{x_2}$, ..., $\overrightarrow{x_m}$ називається **лінійно залежною**, коли існують такі не всі рівні нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, що має місце співвідношення

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \overrightarrow{x_i} = 0 .$$

У протилежному випадку дана система векторів називається **лінійно незалежною**, тобто означена рівність можлива лише у випадку, коли всі $\alpha_i = 0$

Будь-які n лінійно незалежних векторів утворюють базис n-вимірного простору.

Базисом у просторі R^1 (на прямій) є будь-який ненульовий вектор; базисом у просторі R^2 (на площині) є два неколінеарних вектори; базисом у просторі R^3 є три некомпланарні вектори.

Нехай вектори $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, ..., $\overrightarrow{e_n}$ утворюють базис у R^n. Тоді будь-який вектор $\vec{a} \in R^n$ може бути розкладений за цим базисом, тобто

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \overrightarrow{e_i} ,$$

де a_i – деякі числа, координати вектора.

Приклад 7. Показати, що вектори

$$\overrightarrow{a_1} = (1,-1,2), \quad \overrightarrow{a_2} = (2,2,-1), \quad \overrightarrow{a_3} = (2,1,0).$$

утворюють базис в R^3.

Розв'язання. Враховуючи, що базисом в R^3 є три некомпланарні вектори, розв'язання зводиться до перевірки виконання умови компланарності трьох векторів:

$$\left(\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 + 2(2-4) = 1 + 2 - 4 = -1 \neq 0 .$$

Таким чином, вектори некомпланарні, утворюють базис в R^3.

1.2. Аналітична геометрія

Наведемо основні **види рівнянь прямої на площині :**

1) $Ax+By+C=0$ – загальне рівняння прямої ;

2) $y=kx+b$ – рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом ; $k=\operatorname{tg}\alpha$, де α - кут між прямою і додатним напрямом осі Ox ;

3) $y-y_0=k(x-x_0)$ – рівняння прямої, що проходить через задану точку (x_0, y_0) у заданому напрямі ;

4) $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M(x_0, y_0)$ перпендикулярно до вектора $\vec{n}=(A,B)$ (до нормального вектора) ;

5) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ – рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0,y_0)$ паралельно напрямному вектору $\vec{S}=(m,n)$ (канонічне рівняння);

6) $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – рівняння прямої у відрізках, a і b – величини напрямлених відрізків, що відтинаються прямою на координатних осях ;

7) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$.

Якщо задано загальне рівняння прямої, то її кутовий коефіцієнт визначається за формулою $k=-\dfrac{A}{B}$.

Якщо k_1 , k_2 – кутові коефіцієнти двох прямих, то кут Θ між ними визначається за формулою $\operatorname{tg}\Theta=\dfrac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ $(k_1\cdot k_2\neq -1)$.

Умова паралельності двох прямих : $k_1=k_2$.

Умова перпендикулярності двох прямих : $k_2=-\dfrac{1}{k_1}$.

Якщо задане рівняння прямої L : $Ax+By+C=0$ і точка $M_0(x_0, y_0)$, то відстань від цієї точки до даної прямої обчислюється за формулою

$$\rho(M_0, L) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Приклад 1. Задані вершини трикутника $A(-2,-3)$, $B(5,4)$, $C(-1,2)$. Скласти рівняння медіани AM.

Розв'язання. Точка M - середина сторони BC, тому

$$x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5-1}{2} = 2; \quad y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{4+2}{2} = 3; \quad M(2,3).$$

Використовуючи рівняння прямої, що проходить через точки A і M, знайдемо рівняння медіани AM: $\dfrac{x+2}{2+2} = \dfrac{y+3}{3+3}$, звідки $3x - 2y = 0$.

Приклад 2. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M(1,2)$:

а) та точку $N(3,5)$;

б) паралельно вектору $\vec{S} = (0,-1)$;

в) перпендикулярно до вектора $\vec{n} = (3,-5)$.

Розв'язання. Складаючи рівняння прямої, треба передусім вибрати той вигляд рівняння, який швидше приводить до мети.

а) Використаємо рівняння прямої, що проходить через дві точки

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

Маємо: $\dfrac{x-1}{3-1} = \dfrac{y-2}{5-2}$; $\quad \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{3}$; $\quad 3x - 2y + 1 = 0$.

б) Використаємо канонічне рівняння прямої $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$.

Маємо: $\dfrac{x-1}{0} = \dfrac{y-2}{-1}$; $\quad x - 1 = 0$.

в) Використаємо рівняння прямої, заданої точкою та нормальним вектором: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

Маємо $\quad 3(x-1) - 5(y-2) = 0$; $\quad 3x - 5y + 7 = 0$.

Приклад 3. Знайти відстань $\rho(L_1, L_2)$ між прямими

$$L_1 : \ 3x-4y+5=0 ,$$

$$L_2 : \ 6x-8y-13=0 .$$

Розв'язання. $L_1 \| L_2$, бо $\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8}\neq\frac{5}{-13}$.

Щоб знайти відстань між прямими, візьмемо на одній із прямих деяку точку і знайдемо відстань від неї до другої прямої. Поклавши, наприклад, у першому рівнянні $x=1$, отримаємо $y=2$. Таким чином, точка $M(1, 2)\in L_1$ Використовуючи формулу для визначення відстані від точки до прямої, одержуємо

$$\rho(L_1, L_2)=\frac{|6\cdot 1-8\cdot 2-13|}{\sqrt{36+64}}=\frac{23}{10}=2{,}3 .$$

Нехай задано загальне **рівняння другого степеня** зі змінними x і y, яке не містить добутку змінних : $Ax^2+By^2+Cx+Dy+E=0$.

Якщо цьому рівнянню відповідає лінія на площині, то це еліпс, або гіпербола, або парабола. Для побудови кривої за її рівнянням необхідно виділити повні квадрати відносно кожної зі змінних x і y, що містяться в рівнянні у другому степені.

Якщо при цьому вихідне рівняння перетворюється до вигляду $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, то це **еліпс** з центром у точці $O_1(x_0, y_0)$, півосями a, b, а осі симетрії паралельні осям Ox і Oy

Якщо вихідне рівняння перетворюється до вигляду $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=\pm 1$, то це **гіпербола** або спряжена їй з центром у точці $O_1(x_0, y_0)$ і характеристичним прямокутником зі сторонами $2a$ та $2b$. Діагоналі цього прямокутника є асимптотами гіперболи.

Якщо вихідне рівняння перетворюється до вигляду $(y-y_0)=2p(x-x_0)^2$ або $(x-x_0)=2q(y-y_0)^2$, то це **параболи** типу $y=\pm x^2$ або $x=\pm y^2$ з вершинами в точці $O_1(x_0, y_0)$, які симетричні відносно прямих відповідно $x=x_0$ та $y=y_0$.

Основні види рівнянь площини :

1) $Ax+By+Cz+D=0$ – загальне рівняння площини, вектор $\vec{n}=(A,B,C)$ – вектор, нормальний до цієї площини (перпендикулярний) ;

2) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ – рівняння площини у відрізках, де a, b, c – довжини напрямлених відрізків, що відтинаються площиною на координатних осях ;

3) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ – рівняння площини, що проходить через задану точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$ перпендикулярно до нормального вектора $\vec{n}=(A,B,C)$;

4) $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$ – рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$, $M_3(x_3,y_3,z_3)$.

Умова паралельності двох площин $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ і $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ має вигляд $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, а умовою перпендикулярності цих площин є рівність

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

Кут між двома заданими площинами визначається за формулою

$$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

Відстань $\rho(M_0,Q)$ від точки $M_0(x_0,y_0,z_0)$ до площини Q: $Ax+By+Cz+D=0$: $\rho(M_0,Q)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Приклад 4. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(2,3,-1)$ паралельно площині $5x-y+3z=5$.

Розв'язання. Скориставшись рівнянням площини, що проходить через задану точку, запишемо $A(x-2)+B(y-3)+C(z+1)=0$. З паралельності площин випливає, що нормальний вектор $\vec{n}=(A,\ B,C)=(5,-1,\ 3)$, тому рівняння цієї площини має вигляд

$$5(x-2)-(y-3)+3(z+1)=0 \quad \text{або} \quad 5x-y+3z-4=0\ .$$

Приклад 5. Написати рівняння площини P, що проходить через точки $M_1(1,1,1)$ і $M_2(0,2,1)$ паралельно вектору $\vec{a}=(2,0,1)$.

Розв'язання. Знайдемо $\overrightarrow{M_1M_2}$; $\overrightarrow{M_1M_2}=(-1,1,0)$. За нормальний вектор до площини візьмемо вектор $\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\vec{a}$:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}=(1,1,-2)\ .$$

Скористаємось далі рівнянням площини, заданої точкою $M_1(1,1,1)$ і нормальним вектором $\vec{n}\ (1,1,-2)$:

$$(x-1)+(y-1)-2(z-1)=0\ ; \qquad P:\ x+y-2z=0$$

Приклад 6. Задана площина $P:\ -2x+y-z-1=0$ і точка $M(1,1,1)$. Написати рівняння площини P', що проходить через точку M паралельно площині P

Розв'язання. Скористаємось рівнянням площини, що проходить через точку, перпендикулярно до нормального вектора. Через те , що $P' \| P$, їх нормальні вектори рівні: $\overrightarrow{n_p}=\overrightarrow{n_{p'}}=(-2,1,-1)$;

$$-2(x-1)+(y-1)-(z-1)=0\ ; \qquad P':\ -2x+y-z+2=0\ .$$

При розв'язанні задач **на пряму лінію в просторі** скористаємось наступними її рівняннями :

1) $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ – канонічні рівняння прямої, де (x_0,y_0,z_0) - задана точка, а вектор $\vec{s}=(m,n,p)$ – напрямний вектор прямої ;

2) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}=\dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$ – рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $M_1(x_1,y_1,z_1)$ і $M_2(x_2,y_2,z_2)$;

$$3)\begin{cases} x = x_0 + mt \ ; \\ y = y_0 + nt \ ; \\ z = z_0 + pt \end{cases}$$

- параметричні рівняння прямої в просторі, де $t \in R$ – деякий параметр ;

$$4)\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \ ; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

– загальні рівняння прямої, що визначена перетином двох площин

Кут між прямими $\dfrac{x-x_1}{m_1} = \dfrac{y-y_1}{n_1} = \dfrac{z-z_1}{p_1}$ і $\dfrac{x-x_2}{m_2} = \dfrac{y-y_2}{n_2} = \dfrac{z-z_2}{p_2}$ обчислюється за формулою

$$\cos\varphi = \frac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}\ \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$$

Умови паралельності та перпендикулярності цих прямих відповідно $\dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$ та $m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$.

Відстань $\rho(M_0, L)$ від точки M_0 до прямої L,

де $L: \dfrac{x-x_1}{m} = \dfrac{y-y_1}{n} = \dfrac{z-z_1}{p}$; точка $A(x_1, y_1, z_1) \in L$, $\vec{S} = (m, n, p)$, визначається за формулою $\rho(M_0, L) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM_0} \times \vec{S}\right|}{\left|\vec{S}\right|}$.

Щоб знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{n} = \dfrac{z-z_0}{p}$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$, слід розв'язати спільно ці три рівняння.

Приклад 7. Знайти точку перетину прямої $\dfrac{x-12}{4} = \dfrac{y-9}{3} = \dfrac{z-1}{1}$ і площини $3x + 5y - z - 2 = 0$.

Розв'язання. Приведем канонічні рівняння прямої до параметричного вигляду :

$$x = 4t + 12, \quad y = 3t + 9, \quad z = t + 1 \ .$$

Підставимо ці вирази в рівняння площини та отримаємо

$$3(4t+12)+5(3t+9)-t-1-2=0,$$

звідки $t=3$.

Задані пряма та площина перетинаються в точці з координатами $x=4\cdot3+12=24,\ \ y=3\cdot3+9=18,\ \ z=3+1=4$

Приклад 8. Пряма L задана загальними рівняннями:

$$\begin{cases} x+y-z=0; \\ 2x-y+2=0. \end{cases}$$

Написати канонічні рівняння цієї прямої.

Розв'язання. Канонічні рівняння прямої:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}.$$

Знайдемо точку $A(x_0,y_0,z_0)\in L$. З цією метою задаємо одну з координат, наприклад $x=0$, а дві інші отримаємо з системи рівнянь, що одержана з даної при $x=0$. Система набуває вигляду

$$\begin{cases} y-z=0\ ; \\ -y+2=0\ , \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=2; \\ y=2\ . \end{cases}$$

Маємо: $A(0,\,2,\,2)\in L$.

За напрямний вектор $\vec{S}$ візьмемо вектор $\vec{S}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$, де $\vec{n_1}=(1,\,1,\,-1)$, $\vec{n_2}=(2,-1,\,0)$ - нормальні вектори площин, лінією перетину яких є задана пряма.

Таким чином,

$$\vec{S}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix}=-\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}=(-1,-2,-3),$$

і канонічні рівняння прямої

$$\frac{x-0}{-1}=\frac{y-2}{-2}=\frac{z-2}{-3};\ L:\ \frac{x}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-2}{3}.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається скалярним добутком двох векторів?

2. Чому дорівнює скалярний добуток двох векторів: скаляру чи вектору?

3. Як обчислити скалярний добуток двох векторів, що задані своїми координатами?

4. За якою формулою можна знайти кут між двома векторами, заданими своїми координатами?

5 Дайте означення векторного добутку.

6. Як обчислити площу трикутника, в якого відомі координати вершин?

7. Що являє собою мішаний добуток трьох векторів з геометричної точки зору?

8. Як з'ясувати, чи належить точка даній прямій?

9. Що називається кутовим коефіцієнтом прямої на площині?

10. Наведіть канонічні рівняння еліпса, гіперболи і параболи.

11. Вкажіть геометричний зміст величин A, B і C в загальному рівнянні площини.

12. Що являє собою напрямний вектор прямої лінії в просторі?

1.3. Задачі для практичних занять

У задачах 1.1 – 1.6 обчислити визначники другого і третього порядків:

1.1. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$. **1.2.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$. **1.3.** $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

1.4. $\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. **1.5.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$. **1.6.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \end{vmatrix}$.

У задачах 1.7 – 1.9, використовуючи властивості визначників третього порядку, довести наступні тотожності.

1.7. $\begin{vmatrix} a_1+b_1x & a_1-b_1x & c_1 \\ a_2+b_2x & a_2-b_2x & c_2 \\ a_3+b_3x & a_3-b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

1.8. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x+b_1y+c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x+b_2y+c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x+b_3y+c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$.

1.9. $\begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

1.10. Задано вектори $\vec{a_1} = (4,-2,-4)$ і $\vec{a_2} = (6,-3,2)$. Обчислити :

а) $\vec{a_1} \cdot \vec{a_2}$; б) $(2\vec{a_1} - 3\vec{a_2})(\vec{a_1} + 2\vec{a_2})$; в) $(\vec{a_1} - \vec{a_2})^2$;

г) $\left|2\vec{a_1} - \vec{a_2}\right|$; д) $np_{\vec{a_1}}\vec{a_2}$, е) $np_{\vec{a_2}}\vec{a_1}$;

є) напрямні косинуси вектора $\vec{a_1}$;

ж) $np_{\vec{a_1}+\vec{a_2}}(\vec{a_1} - 2\vec{a_2})$; з) $\cos(\vec{a_1} \,\widehat{,}\, \vec{a_2})$.

1.11. Визначити значення α, за якого вектори $\vec{b} = \vec{a_1} + \alpha\vec{a_2}$ та $\vec{c} = \vec{a_1} - \alpha\vec{a_2}$ будуть перпендикулярні, якщо $\left|\vec{a_1}\right| = 3$, $\left|\vec{a_2}\right| = 5$.

1.12. Знайти вектор $\vec{a} = (x, y, z)$, якщо відомі дві його координати $y = 2$, $z = -3$ та довжина $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{38}$.

1.13. Знайти кут, утворений одиничними векторами $\vec{l_1}$ і $\vec{l_2}$, якщо відомо, що вектори $\vec{a} = \vec{l_1} + 2\vec{l_2}$ та $\vec{b} = 5\vec{l_1} - 4\vec{l_2}$ перпендикулярні.

1.14. Задані вектори $\vec{a} = (3,-5,8)$ і $\vec{b} = (-1,1,-4)$. Знайти $\left|\vec{a} + \vec{b}\right|$ і $\left|\vec{a} - \vec{b}\right|$.

1.15. Знайти кут між діагоналями паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = (2,1,0)$ і $\vec{b} = (0,-2,1)$.

1.16. Знайти вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}=(2, 1, -1)$ і такий, що задовольняє умові $\vec{a}\cdot\vec{b}=12$.

1.17. Задано вектори $\vec{a_1}=(3, -1, 2)$ і $\vec{a_2}=(1, 2, -1)$. Знайти координати векторів : а) $\vec{a_1}\times\vec{a_2}$; б) $(2\vec{a_1}+\vec{a_2})\times\vec{a_2}$.

1.18. Обчислити площу трикутника з вершинами $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 4)$, $C(4, 3, 2)$.

1.19. У трикутнику з вершинами $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$, $C(1, 3, -1)$ знайти висоту $h=\left|\overrightarrow{BD}\right|$.

1.20. Визначити значення α і β, за яких вектор $\alpha\vec{i}+3\vec{j}+\beta\vec{k}$ буде колінеарним вектору $\vec{a}\times\vec{b}$, якщо $\vec{a}=(3, -1, 1)$, $\vec{b}=(1, 2, 0)$.

1.21. Задано вектори $\vec{a_1}=(1, -1, 3)$, $\vec{a_2}=(-2, 2, 1)$, $\vec{a_3}=(3, -2, 5)$. Обчислити $(\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3})$.

1.22. Обчислити об'єм паралелепіпеда, побудованого на векторах :

а) $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$;

б) $\vec{a}=3\vec{i}+6\vec{j}-8\vec{k}$, $\vec{b}=-2\vec{i}+4\vec{j}-6\vec{k}$, $\vec{c}=5\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

1.23. Знайти висоту паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}=\vec{i}-5\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=4\vec{i}+2\vec{k}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}-\vec{k}$, якщо за основу взято паралелограм, побудований на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

1.24. Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках $A(2, -3, 5)$, $B(0, 2, 1)$, $C(-2, -2, 3)$, $D(3, 2, 4)$.

1.25. У тетраедрі з вершинами в точках $A(1, 1, 1)$, $B(2, 0, 2)$, $C(2, 2, 2)$, $D(3, 4, -3)$ обчислити висоту $h=\left|\overrightarrow{DE}\right|$.

1.26. Перевірити, чи компланарні задані вектори :

$\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{c}=14\vec{i}-13\vec{j}+7\vec{k}$.

1.27. Написати рівняння прямої, привести його до загального вигляду, до рівняння у відрізках та побудувати пряму, якщо :

а) пряма L задана точкою $M_0(-1, 2)\in L$ і нормальним вектором $\vec{n}=(2, 2)$;

б) пряма L задана точкою $M_0(-1, 2)$ та напрямним вектором $\vec{s} = (3, -1)$;

в) пряма L задана двома своїми точками : $M_1(1, 2)$ і $M_2(-1, 0)$.

1.28. Задана пряма $L: -2x + y - 1 = 0$ і точка $M(-1, 2)$.

Треба :

а) обчислити відстань $\rho(M, L)$ від точки M до прямої L;

б) написати рівняння прямої L', що проходить через точку M перпендикулярно до заданої прямої L ;

в) написати рівняння прямої L'', що проходить через точку M паралельно заданій прямій L .

1.29. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $A(1, -2)$ і точку перетину прямих $2x + 3y - 4 = 0$, $3x - 5y + 13 = 0$.

1.30. Написати рівняння прямої, що проходить через точку $M(1, 2)$ та відтинає на координатних осях відрізки рівної довжини .

1.31. Задано трикутник з вершинами $A(1, 2)$, $B(-2, 4)$, $C(4, 8)$. Написати рівняння сторін цього трикутника .

1.32. Задано сторони трикутника: $x + 3y - 8 = 0$ (AB), $y - x = 0$ (BC), $7x + 5y - 8 = 0$ (AC). Знайти рівняння висоти цього трикутника, проведеної з вершини B .

1.33. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M(1, 1, 1)$ паралельно векторам $\vec{a_1} = (0, 1, 2)$, $\vec{a_2} = (-1, 0, 1)$.

1.34. Написати рівняння площини, що проходить через точки $M_1(1, 2, 0)$ і $M_2(2, 1, 1)$ паралельно вектору $\vec{a} = (3,0,1)$.

1.35. Написати рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(1, 2, 0)$, $M_2(2, 1, 1)$, $M_3(3, 0, 1)$.

1.36. Знайти відстань $\rho(P_1, P_2)$ між двома паралельними площинами : $P_1: \ 2x - y + z - 1 = 0$; $P_2: \ -4x + 2y - 2z - 1 = 0$.

1.37. Обчислити об'єм піраміди, що обмежена площиною $P: \ 2x - 3y + 6z - 12 = 0$ і координатними площинами .

1.38. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(1, 7, -5)$ і відтинає від осей координат додатні та рівні відрізки.

1.39. Пряма L задана загальними рівняннями $L: \begin{cases} 2x - y + 2z - 3 = 0 ; \\ x + 2y - z - 1 = 0 . \end{cases}$

Написати для цієї прямої канонічні рівняння .

1.40. Написати рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(1,-2,1)$ $M_2(3,1,-1)$.

1.41. Задана площина $P: x+y-z+1=0$ і пряма $L: \dfrac{x-1}{0}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+1}{1}$.
Знайти точку перетину прямої і площини .

1.42. Знайти відстань між паралельними прямими :

$$L_1 : \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{4}=\frac{z}{2}, \qquad L_2 : \frac{x-7}{3}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-3}{2} .$$

1.43. Знайти відстань від точки $A(2,3,-1)$ до заданої прямої

$$L:\begin{cases} 2x-2y+z+3=0 ; \\ 3x-2y+2z+17=0 . \end{cases}$$

1.44. Встановити тип кривої другого порядку, привести задане рівняння до канонічного вигляду, зробити рисунок :

а) $4x^2+3y^2-8x+12y-32=0$;

б) $16x^2-9y^2-64x-18y+199=0$;

в) $2y^2-12y-x+14=0$.

1.4. Індивідуальне завдання 1

Задача 1. Задані вектори $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$.

Визначити :

1) довжину вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|$;

2) скалярний добуток $(\vec{a}, \vec{b})$;

3) косинус кута між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

4) векторний добуток $\vec{a}\times\vec{b}$; $|\vec{a}\times\vec{b}|$;

5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

6) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

7) чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Варіанти завдань

1. $\vec{a}=(2,3,1)$, $\vec{b}=(-1,0,-1)$, $\vec{c}=(2,2,2)$.
2. $\vec{a}=(2,3,1)$, $\vec{b}=(2,3,4)$, $\vec{c}=(3,1,-1)$.
3. $\vec{a}=(1,5,2)$, $\vec{b}=(-1,1,-1)$, $\vec{c}=(1,1,1)$.
4. $\vec{a}=(1,-1,-3)$, $\vec{b}=(2,3,1)$, $\vec{c}=(2,3,4)$
5. $\vec{a}=(3,3,1)$, $\vec{b}=(1,-2,1)$, $\vec{c}=(1,1,1)$.
6. $\vec{a}=(3,1,-1)$, $\vec{b}=(-2,-1,0)$, $\vec{c}=(5,2,-1)$.
7. $\vec{a}=(4,3,1)$, $\vec{b}=(1,-2,1)$, $\vec{c}=(2,2,2)$.
8. $\vec{a}=(4,3,1)$, $\vec{b}=(6,7,4)$, $\vec{c}=(2,0,-1)$.
9. $\vec{a}=(3,2,1)$, $\vec{b}=(1,-3,-7)$, $\vec{c}=(1,2,3)$
10. $\vec{a}=(3,7,2)$, $\vec{b}=(-2,0,-1)$, $\vec{c}=(2,2,1)$.
11. $\vec{a}=(1,-2,6)$. $\vec{b}=(1,0,1)$, $\vec{c}=(2,-6,7)$.
12. $\vec{a}=(6,3,4)$, $\vec{b}=(-1,-2,-1)$, $\vec{c}=(2,1,1)$.
13. $\vec{a}=(7,3,4)$, $\vec{b}=(-1,-2,-1)$, $\vec{c}=(4,2,4)$.
14. $\vec{a}=(2,3,2)$, $\vec{b}=(4,7,5)$, $\vec{c}=(1,-1,1)$.
15. $\vec{a}=(5,3,4)$, $\vec{b}=(-1,0,-1)$, $\vec{c}=(4,2,4)$.
16. $\vec{a}=(3,10,5)$, $\vec{b}=(-2,-2,-3)$, $\vec{c}=(2,4,3)$.
17. $\vec{a}=(-2,-4,-3)$, $\vec{b}=(4,3,1)$, $\vec{c}=(6,7,4)$.
18. $\vec{a}=(3,1,-1)$, $\vec{b}=(1,0,-1)$, $\vec{c}=(8,3,-2)$.
19. $\vec{a}=(1,2,3)$, $\vec{b}=(-2,3,0)$, $\vec{c}=(2,1,-6)$.
20. $\vec{a}=(3,-2,3)$, $\vec{b}=(-1,2,1)$, $\vec{c}=(4,2,0)$.
21. $\vec{a}=(2,3,2)$, $\vec{b}=(4,6,4)$, $\vec{c}=(2,-1,3)$.
22. $\vec{a}=(4,0,3)$, $\vec{b}=(1,-2,4)$, $\vec{c}=(1,-1,2)$.
23. $\vec{a}=(5,-3,2)$, $\vec{b}=(-4,1,5)$, $\vec{c}=(0,2,4)$.
24. $\vec{a}=(2,3,0)$, $\vec{b}=(2,-1,1)$, $\vec{c}=(-2,-2,1)$.
25. $\vec{a}=(1,1,-2)$, $\vec{b}=(-2,-5,3)$, $\vec{c}=(-1,0,2)$.

26. $\vec{a}=(-3, 1, 0)$, $\vec{b}=(1, 6, 5)$, $\vec{c}=(1, 1, 0)$.

27. $\vec{a}=(1, 3, 7)$, $\vec{b}=(-1, 3, 5)$, $\vec{c}=(-6, 0, 2)$.

28 $\vec{a}=(-4,-3, 0)$, $\vec{b}=(3, 2,-1)$, $\vec{c}=(-3, 2, 2)$.

29. $\vec{a}=(0, 6,-3)$, $\vec{b}=(-1, 6, 0)$, $\vec{c}=(4, 4, 2)$.

30. $\vec{a}=(0,-5, 4)$, $\vec{b}=(4,-1,-2)$, $\vec{c}=(5, 0, 4)$.

31. $\vec{a}=(-3, 3, 1)$, $\vec{b}=(1, 0,-3)$, $\vec{c}=(2, 1, 6)$.

Задача 2. Задано прямі l_1 та l_2 і точка M.

Знайти :

1) кутовий коефіцієнт прямої l_1 і відрізок, який відтинає ця пряма на ординат ;

2) рівняння прямих l_1 та l_2 у відрізках ;

3) точку N перетину прямих l_1 і l_2 ;

4) рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно прямій l_2 ; перпендикулярно до прямої l_2 ;

5) відстань від точки M до прямої l_2 : $\rho(M, l_2)$.

Усі результати ілюструвати графічно .

Варіанти завдань

1. l_1 : $5x+3y+8=0$, l_2 : $x-4y+20=0$; $M(7,-2)$.
2. l_1 : $3x+2y+2=0$, l_2 : $4x-3y+31=0$; $M(6, 0)$.
3. l_1 : $x-5y+9=0$, l_2 : $3x+2y+10=0$; $M(7, 3)$.
4. l_1 : $5x+2y+13=0$, l_2 : $2x-5y+11=0$; $M(6, 4)$.
5. l_1 : $4x+y+10=0$, l_2 : $3x+7y-5=0$; $M(5,-4)$.
6. l_1 : $5x+2y+17=0$, l_2 : $2x-3y+3=0$; $M(5, 2)$.
7. l_1 : $9x-5y+17=0$, l_2 : $4x+y+14=0$; $M(8, 4)$.
8. l_1 : $3x-2y-16=0$, l_2 : $x+7y+10=0$; $M(-10,3)$.
9. l_1 : $2x+3y-15=0$, l_2 : $3x-7y-11=0$; $M(-5,-4)$.
10. l_1 : $x-7y+8=0$, l_2 : $2x+5y-22=0$; $M(-4,-7)$.
11. l_1 : $3x-8y+6=0$, l_2 : $x+2y-12=0$; $M(-8,-3)$.
12. l_1 : $2x-3y+17=0$, l_2 : $4x-y+9=0$; $M(6,-2)$.
13. l_1 : $3x-y+10=0$, l_2 : $5x+2y+2=0$; $M(3, 10)$.

14. l_1 : $11x+6y+9=0$, l_2 : $3x-y+16=0$; $M(5,-4)$.
15. l_1 : $2x+3y-5=0$, l_2 : $3x+y-4=0$; $M(2,3)$.
16. l_1 : $3x-2y+7=0$, l_2 : $5x+y+3=0$; $M(1,4)$.
17. l_1 : $2x-3y+5=0$, l_2 : $2x+5y-12=0$; $M(3,-4)$.
18. l_1 : $4x-3y+5=0$, l_2 : $x+4y-13=0$; $M(-2,-3)$.
19. l_1 : $3x+y-7=0$, l_2 : $2x-3y-1=0$; $M(-5,-8)$.
20. l_1 : $2x+5y-14=0$, l_2 : $x-3y+4=0$; $M(-4,-4)$.
21. l_1 : $5x-2y+12=0$, l_2 : $4x+3y+5=0$; $M(-7,-8)$.
22. l_1 : $4x+y-13=0$, l_2 : $x-5y-8=0$; $M(-4,7)$.
23. l_1 : $3x-2y-13=0$, l_2 : $2x+7y+8=0$; $M(-1,9)$.
24. l_1 : $2x-3y+3=0$, l_2 : $3x+y-12=0$; $M(-5,-6)$.
25. l_1 : $4x+y+5=0$, l_2 : $5x-2y+16=0$; $M(4,-5)$.
26. l_1 : $5x+y-7=0$, l_2 : $3x-2y-12=0$; $M(-6,8)$.
27. l_1 : $2x-3y-5=0$, l_2 : $4x+y-17=0$; $M(-5,-2)$.
28. l_1 : $8x+3y-4=0$, l_2 : $2x+5y-18=0$, $M(8,3)$.
29. l_1 : $2x-3y+13=0$, l_2 : $2x+7y-8=0$; $M(7,4)$.
30. l_1 : $5x+y+7=0$, l_2 : $7x-2y+20=0$; $M(5,-6)$.
31. l_1 : $x+2y-3=0$, l_2 : $3x-4y+11=0$; $M(2,9)$.

Задача 3. Задано рівняння площини P_1, прямої L_1 і точка M. Знайти:

1) рівняння площини P_2, що проходить через точку M паралельно площині P_1;

2) рівняння площини P_3, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L_1;

3) рівняння прямої L_2, що проходить через точку M перпендикулярно до площини P_1;

4) рівняння прямої L_3, що проходить через точку M паралельно прямій L_1;

5) точку N перетину прямої L_1 і площини P_1;

6) відстань від точки M до площини P_1 : $\rho(M,P_1)$;

7) відстань від точки M до прямої L_1 : $\rho(M,L_1)$.

Варіанти завдань

1. $P_1: \quad 5x-3z+2=0$, $\quad L_1: \dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$, $\quad M(0,2,3)$.

2. $P_1: \quad x-3y+2z+4=0$, $L_1: \dfrac{x}{0}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+2}{-3}$, $\quad M(1,0,-3)$

3. $P_1: \quad 2x-3y+7z=0$, $\quad L_1: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{4}$, $\quad M(-4,5,0)$

4. $P_1: \quad 3x+y-2z=0$, $\quad L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+4}{1}$, $\quad M(2,-1,0)$.

5. $P_1: \quad 4x-2y+z=0$, $\quad L_1: \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z}{-3}$, $\quad M(3,0,-2)$.

6. $P_1: \quad 5x+3y-6=0$, $\quad L_1: \dfrac{x}{-3}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z}{5}$, $\quad M(-2,1,1)$.

7. $P_1: \quad x+3y-z=0$, $\quad L_1: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, $\quad M(0,0,4)$.

8. $P_1: \quad 2x-5z+3=0$, $\quad L_1: \dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z}{3}$, $\quad M(1,-1,0)$.

9. $P_1: \quad 3x-4y-4z=0$, $\quad L_1: \dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z-1}{1}$, $\quad M(0,5,5)$.

10. $P_1: \quad x+2y+2z-5=0$, $L_1: \dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{2}$, $\quad M(0,0,4)$.

11. $P_1: \quad 4x-3y+1=0$, $\quad L_1: \dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z}{1}$, $\quad M(1,-2,1)$.

12. $P_1: \quad x+2y-3z+4=0$, $L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z+4}{-1}$, $\quad M(-1,0,3)$.

13. $P_1: \quad 2x-y+2z-3=0$, $L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$, $\quad M(0,2,-1)$.

14. $P_1: \quad 4x-y+z+1=0$, $L_1: \dfrac{x+3}{4}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$, $\quad M(1,-1,2)$.

15. $P_1: \quad 5x+2z-3=0$, $\quad L_1: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{3}$, $\quad M(2,3,0)$.

16. $P_1: \quad 6x-5y+2=0$, $\quad L_1: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y-4}{1}=\dfrac{z-1}{2}$, $\quad M(2,5,1)$.

17. $P_1: \; 3y+5z-4=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x+5}{-2}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z}{1}, \quad M(0,-2,3)$.

18. $P_1: \; 3x-4y+5=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x+2}{3}=\dfrac{y}{4}=\dfrac{z-1}{-2}, \quad M(1,0,-4)$.

19. $P_1: \; x-3y+2z-1=0 \,, L_1: \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{4}, \quad M(1,2,3)$.

20. $P_1: \; 2x+y-3z=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z+1}{-3}, \quad M(0,3,4)$.

21. $P_1: \; 3x+2z-5=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y}{-5}=\dfrac{z+2}{4}, \quad M(-1,2,-1)$.

22. $P_1: \; 3x+2y-z=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{2}, \quad M(1,0,2)$.

23. $P_1: \; x-3y+2z-1=0 \,, L_1: \dfrac{x-2}{0}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z}{4}, \quad M(1,3,2)$.

24. $P_1: \; 4x-y-2z+3=0 \,, L_1: \dfrac{x+1}{-3}=\dfrac{y+2}{4}=\dfrac{z}{1}, \quad M(1,0,-1)$.

25. $P_1: \; 5x+3z-7=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}, \quad M(2,-3,0)$.

26. $P_1: \; 3x+2y-6=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x}{4}=\dfrac{y+3}{-1}=\dfrac{z-1}{5}, \quad M(3,0,-2)$.

27. $P_1: \; 5x-y+2z=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x-5}{0}=\dfrac{y}{3}=\dfrac{z}{1}, \quad M(1,2,-1)$.

28. $P_1: \; 2x-3y+z+1=0 \,, L_1: \dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-2}{-1}, \quad M(0,1,-2)$.

29. $P_1: \; x+2y-3z=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z}{3}, \quad M(2,0,1)$.

30. $P_1: \; 3x-4z+11=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-1}{1}, \quad M(2,9,0)$.

31. $P_1: \; 4x+3y-9=0 \,, \quad L_1: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+3}{-5}, \quad M(1,-2,1)$.

Задача 4. Знайти область розв'язків системи лінійних нерівностей .

Варіанти завдань

1. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \, ; \\ x_1 + 4x_2 \le 8 \, . \end{cases}$

2. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 4 \, ; \\ 2x_1 - x_2 \le 8 \, . \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 8 \, ; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 6 \, . \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le -13 \, ; \\ x_1 + x_2 \ge 6 \, ; \\ 4x_1 + x_2 \le 16 \, . \end{cases}$

5. $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 10 \, ; \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \, ; \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \, . \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le -13 \, ; \\ x_1 + x_2 \le 6 \, ; \\ 4x_1 - x_2 \ge 16 \, . \end{cases}$

7. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 \ge 8 \, ; \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \, ; \\ x_1 \ge 0, \, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 \ge -3 \, ; \\ 2x_1 - 3x_2 \le 6 \, ; \\ x_1 \ge 0, \, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

9. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \, ; \\ x_1 - x_2 \le -1 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1 \, ; \\ x_1 + 2x_2 \le 1 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1 \, ; \\ x_1 - x_2 \le 1 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \, ; \\ x_1 + x_2 \ge 1 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 2 \, ; \\ 3x_1 - x_2 \le 6 \, ; \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 0 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 6 \, ; \\ 3x_1 + x_2 \ge 8 \, ; \\ x_1 - x_2 \le 3 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 14 \, ; \\ -5x_1 + 3x_2 \le 15 \, ; \\ 4x_1 + 6x_2 \ge 24 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 12 \, ; \\ x_1 + x_2 \le 6 \, ; \\ x_1 + 3x_2 \ge 1 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

17. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 6 \, ; \\ x_1 + 3x_2 \le 6 \, ; \\ x_1 - 2x_2 \ge 8 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 10 \, ; \\ x_1 + 2x_2 \ge 2 \, ; \\ 2x_1 + x_2 \le 10 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

19. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \, ; \\ -x_1 - x_2 \le 1 \, ; \\ x_1 \ge 0, \, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

20. $\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \le 15 \, ; \\ 5x_1 + 2x_2 \le 10 \, ; \\ x_1 \ge 0, \, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12 \, ; \\ \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

22. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8 \, ; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 7 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

23. $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \le 14 \, ; \\ 6x_1 + 2x_2 \le 10 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

24. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 7 \, ; \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 4 \, ; \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \, . \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 8 \; ; \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 7 \; ; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \; . \end{cases}$ 26. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq -2 \; ; \\ 2x_1 + 3x_2 \leq \;\; 6 \; ; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \leq -2 \; ; \\ 3x_1 + 2x_2 \geq \;\; 5 \; ; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + x_2 \geq \;\; 5 \; ; \\ x_1 - x_2 \leq -1 \; ; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \; . \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 2 \; ; \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \; ; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \; . \end{cases}$ 30. $\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 2 \; ; \\ x_1 + \;\; x_2 \geq 6 \; ; \\ x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0 \; . \end{cases}$

31. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4 \; ; \\ 2x_1 + \;\; x_2 \leq 8 \; ; \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \; . \end{cases}$

Задача 5. Написати розклад вектора $\vec{x}$ за базисом $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

Варіанти завдань

1. $\vec{x} = (-2, 4, 7)$, $\vec{p} = (0, 1, 2)$, $\vec{q} = (1, 0, 1)$, $\vec{r} = (-1, 2, 4)$.
2. $\vec{x} = (6, 12, -1)$, $\vec{p} = (1, 3, 0)$, $\vec{q} = (2, -1, 1)$, $\vec{r} = (0, -1, 2)$.
3. $\vec{x} = (1, -4, 4)$, $\vec{p} = (2, 1, -1)$, $\vec{q} = (0, 3, 2)$, $\vec{r} = (1, -1, 1)$.
4. $\vec{x} = (-9, 5, 5)$, $\vec{p} = (4, 1, 1)$, $\vec{q} = (2, 0, 3)$, $\vec{r} = (-1, 2, 1)$.
5. $\vec{x} = (-5, -5, 5)$, $\vec{p} = (-2, 0, 1)$, $\vec{q} = (1, 3, -1)$, $\vec{r} = (0, 4, 1)$.
6. $\vec{x} = (13, 2, 7)$, $\vec{p} = (5, 1, 0)$, $\vec{q} = (2, -1, 3)$, $\vec{r} = (1, 0, -1)$.
7. $\vec{x} = (-19, -1, 7)$, $\vec{p} = (0, 1, 1)$, $\vec{q} = (-2, 0, 1)$, $\vec{r} = (3, 1, 0)$.
8. $\vec{x} = (3, -3, 4)$, $\vec{p} = (1, 0, 2)$, $\vec{q} = (0, 1, 1)$, $\vec{r} = (2, -1, 4)$.
9. $\vec{x} = (3, 3, -1)$, $\vec{p} = (3, 1, 0)$, $\vec{q} = (-1, 2, 1)$, $\vec{r} = (-1, 0, 2)$.
10. $\vec{x} = (-1, 7, -4)$, $\vec{p} = (-1, 2, 1)$, $\vec{q} = (2, 0, 3)$, $\vec{r} = (1, 1, -1)$.
11. $\vec{x} = (6, 5, -14)$, $\vec{p} = (1, 1, 4)$, $\vec{q} = (0, -3, 2)$, $\vec{r} = (2, 1, -1)$.
12. $\vec{x} = (6, -1, 7)$, $\vec{p} = (1, -2, 0)$, $\vec{q} = (-1, 1, 3)$, $\vec{r} = (1, 0, 4)$.
13. $\vec{x} = (5, 15, 0)$, $\vec{p} = (1, 0, 5)$, $\vec{q} = (-1, 3, 2)$, $\vec{r} = (0, -1, 1)$.

14. $\vec{x}=(2,-1,11)$, $\vec{p}=(1,1,0)$, $\vec{q}=(0,1,-2)$, $\vec{r}=(1,0,3)$.

15. $\vec{x}=(11,5,-3)$, $\vec{p}=(1,0,2)$, $\vec{q}=(-1,0,1)$, $\vec{r}=(2,5,-3)$.

16. $\vec{x}=(8,0,5)$, $\vec{p}=(2,0,1)$, $\vec{q}=(1,1,0)$, $\vec{r}=(4,1,2)$.

17. $\vec{x}=(3,1,8)$, $\vec{p}=(0,1,3)$, $\vec{q}=(1,2,-1)$, $\vec{r}=(2,0,-1)$.

18. $\vec{x}=(8,1,12)$, $\vec{p}=(1,2,-1)$, $\vec{q}=(3,0,2)$, $\vec{r}=(-1,1,1)$.

19. $\vec{x}=(-8,-9,-3)$, $\vec{p}=(1,4,1)$, $\vec{q}=(-3,2,0)$, $\vec{r}=(1,-1,2)$.

20. $\vec{x}=(-5,9,-13)$, $\vec{p}=(0,1,-2)$, $\vec{q}=(3,-1,1)$, $\vec{r}=(4,1,0)$.

21. $\vec{x}=(-15,5,6)$, $\vec{p}=(0,5,1)$, $\vec{q}=(3,2,-1)$, $\vec{r}=(-1,1,0)$.

22. $\vec{x}=(8,9,4)$, $\vec{p}=(1,0,1)$, $\vec{q}=(0,-2,1)$, $\vec{r}=(1,3,0)$.

23. $\vec{x}=(23,-14,-30)$, $\vec{p}=(2,1,0)$, $\vec{q}=(1,-1,0)$, $\vec{r}=(-3,2,5)$.

24. $\vec{x}=(3,1,3)$, $\vec{p}=(2,1,0)$, $\vec{q}=(1,0,1)$, $\vec{r}=(4,2,1)$.

25. $\vec{x}=(-1,7,0)$, $\vec{p}=(0,3,1)$, $\vec{q}=(1,-1,2)$, $\vec{r}=(2,-1,0)$.

26. $\vec{x}=(11,-1,4)$, $\vec{p}=(1,-1,2)$, $\vec{q}=(3,2,0)$, $\vec{r}=(-1,1,1)$.

27. $\vec{x}=(-13,2,18)$, $\vec{p}=(1,1,4)$, $\vec{q}=(-3,0,2)$, $\vec{r}=(1,2,-1)$.

28. $\vec{x}=(0,-8,9)$, $\vec{p}=(0,-2,1)$, $\vec{q}=(3,1,-1)$, $\vec{r}=(4,0,1)$.

29. $\vec{x}=(8,-7,-13)$, $\vec{p}=(0,1,5)$, $\vec{q}=(3,-1,2)$, $\vec{r}=(-1,0,1)$.

30. $\vec{x}=(2,7,5)$, $\vec{p}=(1,0,1)$, $\vec{q}=(1,-2,0)$, $\vec{r}=(0,3,1)$.

31. $\vec{x}=(15,-20,-1)$, $\vec{p}=(0,2,1)$, $\vec{q}=(0,1,-1)$, $\vec{r}=(5,-3,2)$.

1.5. Зразок виконання індивідуального завдання 1

Задача 1. Задано вектори $\vec{a}=(2,3,0)$, $\vec{b}=(1,-2,2)$, $\vec{c}=(3,2,1)$. Вимагається визначити :

1) $|\vec{a}|$;   2) $(\vec{a},\vec{b})$;   3) $\cos(\vec{a}\,\widehat{\,,}\,\vec{b})$;

4) $\vec{a}\times\vec{b}$; $|\vec{a}\times\vec{b}|$;

5) мішаний добуток векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$;

6) чи колінеарні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$;

7) чи компланарні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Розв'язання.

1. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{4+9+0} = \sqrt{13}$.

2. $(\vec{a}, \vec{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = 2 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 2 = -4$.

3. $\cos(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}) - \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \dfrac{-4}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{1+4+4}} = -\dfrac{4}{3\sqrt{13}}$.

4. $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} =$

$= 6\vec{i} - 4\vec{j} - 7\vec{k} = (6,-4,-7)$;

$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + (-7)^2} = \sqrt{36+16+49} = \sqrt{101}$.

5. $(\vec{a} \times \vec{b})\, \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -5 & -6 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -6 \end{vmatrix} = -12 + 15 = 3$.

6. Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a_2}{b_2} = \dfrac{a_3}{b_3}$;

$\dfrac{2}{1} \neq \dfrac{3}{-2} \neq \dfrac{0}{2} \Rightarrow$ $\vec{a}$ і $\vec{b}$ не колінеарні .

7. Умова компланарності векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$(\vec{a} \times \vec{b})\, \vec{c} = 0$;

$(\vec{a} \times \vec{b})\, \vec{c} = 3 \neq 0 \Rightarrow$ вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ не компланарні .

Задача 2. Задано прямі l_1 та l_2 і точка M;

$l_1: \ 4x+y-8=0$, $\qquad l_2: \ x-5y-2=0$; $\qquad M(-4, 7)$.

Знайти :

1) кутовий коефіцієнт прямої l_1 і відрізок, який відтинає ця пряма на осі ординат ;

2) рівняння прямих l_1 та l_2 у відрізках ;

3) точку N перетину прямих l_1 і l_2 ;

4) рівняння прямої, що проходить через точку M паралельно прямій l_2 перпендикулярно до прямої l_2 ;

5) відстань від точки M до прямої l_2 : $\rho(M, l_2)$;

Усі результати ілюструвати графічно .

Розв'язання.

1) Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом: $y = kx + b$, де k - кутовий коефіцієнт прямої, b – відрізок, що відтинається прямою на осі ординат (з точністю до знака) .

Приведемо рівняння прямої l_1 до означеного вигляду ;

$$l_1: \quad y=-4x+8 ; \qquad k=-4, \ b=8 .$$

2) Рівняння прямої у відрізках : $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$, де a і b з точністю до знака визначають довжини відрізків, що відтинаються на осях координат ;

$$l_1: \ 4x+y-8=0, \qquad l_2: \ x-5y-2=0,$$

$$4x+y=8, \qquad x-5y=2,$$

$$\frac{x}{8/4}+\frac{y}{8}=1, \qquad \frac{x}{2}+\frac{y}{-2/5}=1,$$

$$a=2; \quad b=8, \qquad a=2; \quad b=-0{,}4 .$$

$$A_1(2;0)\in l_1; \quad A_2(0;8)\in l_1 \qquad B_1(2;\ 0)\in l_2; \quad B_2(0;-0.4)\in l_2 .$$

3) Рівняння прямих l_1, l_2 утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Розв'язавши цю систему, знайдемо точку перетину l_1 і l_2 :

$$\begin{cases} 4x+\ \ y-8=0 ; \\ \ x-5y-2=0 . \end{cases}$$

Помноживши перше рівняння на 5 та склавши ліві і праві частини рівнянь, отримаємо :

$$21x-42=0 ,$$
$$x=2 .$$

Підставимо в перше рівняння

$$y = 2(-4) + 8 = 0 .$$

Точка $N(2, 0)$ – точка перетину прямих l_1 і l_2 .

4) $l_2: \ x - 5y - 2 = 0 ; \quad M(-4, 7)$.

а) шукана пряма l_3 ; $\quad l_3 \parallel l_2$.

Очевидно, що $\vec{n}_{l_3} = \vec{n}_{l_2}$, $\vec{n}_{l_3}$, $\vec{n}_{l_2}$ – нормальні вектори прямих l_3 , l_2 відповідно ; $\vec{n}_{l_3} = (1, -5)$.

Рівняння прямої, що задана точкою і нормальним вектором $\vec{n}(A, B)$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 ;$$

$$1(x + 4) - 5(y - 7) = 0 ;$$

$$l_3: \ x - 5y + 39 = 0 ; \quad K_1(0; 7{,}8) \in l_3 .$$

б) шукана пряма l_4 ; $\quad l_4 \perp l_2$.

Запишемо рівняння прямої l_2 як рівняння прямої, що проходить через дві точки $B_1(2, 0)$; $B_2(0; -0{,}4)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} ;$$

$$\frac{x - 2}{0 - 2} = \frac{y - 0}{-0{,}4 - 0} ;$$

$$l_2: \ \frac{x - 2}{1} = \frac{y}{0{,}2} .$$

$\vec{S}_{l_2} = (1; 0{,}2)$, $\vec{S}_{l_2}$ – напрямний вектор прямої l_2 , але $\vec{S}_{l_2} = \vec{n}_{l_4}$, $\vec{n}_{l_4}$ – нормальний вектор прямої l_4 . Запишемо рівняння l_4 як рівняння прямої, що задана точкою $M(-4, 7)$ і нормальним вектором $\vec{n}_{l_4} = (1; -0{,}2)$:

$$1(x + 4) + 0{,}2(y - 7) = 0 ;$$

$$x + 0{,}2y + 2{,}6 = 0 ;$$

$$10x + 2y + 26 = 0 ;$$

$$l_4: \quad 5x + y + 13 = 0 ;$$

$$K_2(-2{,}6 ; 0) \in l_4 .$$

5) Відстань від точки $M(x_0, y_0)$ до прямої l : $Ax+By+C=0$ визначається за формулою

$$\rho(M, l)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}};$$

$$M(-4,7); \quad l_2: \ x-5y-2=0;$$

$$\rho(M, l_2)=\frac{|1(-4)-5\cdot 7-2|}{\sqrt{1+25}}=\frac{41}{\sqrt{26}}.$$

Отриманий результат проілюстровано на рис. 1.1 :

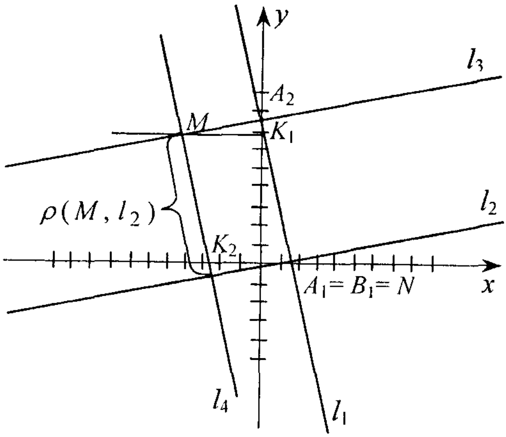

Рис 1.1

Задача 3. Задано рівняння площини P_1, прямої L_1 і точка M :

$$P_1: \quad 5x+3z-7=0, \qquad L_1: \ \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{3}, \qquad M(2,-3,0)$$

Знайти :

1) рівняння площини P_2, що проходить через точку M паралельно площині P_1 ;

2) рівняння площини P_3, що проходить через точку M перпендикулярно до прямої L_1 ;

3) рівняння прямої L_2, що проходить через точку M перпендикулярно до площини P_1 ;

4) рівняння прямої L_3, що проходить через точку M паралельно прямій L_1 ;

5) точку N перетину прямої L_1 і площини P_1 ;

6) відстань від точки M до площини P_1: $\rho(M, P_1)$;

7) відстань від точки M до прямої L_1: $\rho(M, L_1)$.

Розв'язання. Згідно з умовою $\vec{n}_{P_1} = (5, 0, 3)$, $\vec{S}_{L_1} = (1, 2, 3)$, $\vec{n}_{P_1}$, $\vec{S}_{L_1}$ – нормальний вектор площини P_1 і напрямний вектор прямої L_1 відповідно .

1) Враховуючи, що $P_2 \| P_1$, маємо $\vec{n}_{P_2} = \vec{n}_{P_1}$, $\vec{n}_{P_2} = (5, 0, 3)$, $M(2, -3, 0) \in P_2$.

Рівняння площини, що задана точкою $M(x_0, y_0, z_0)$ і нормальним вектором $\vec{n} = (A, B, C)$, має вигляд

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 .$$

Шукане рівняння : $5(x - 2) + 0(y + 3) + 3(z - 0) = 0$,

$$P_2 : 5x + 3z - 10 = 0 .$$

2) Враховуючи, що $P_3 \perp L_1$, отримуємо

$$\vec{n}_{P_3} = \vec{S}_{L_1}, \quad \vec{n}_{P_3} = (1, 2, 3), \quad M(2, -3, 0) \in P_3 ;$$

$1(x - 2) + 2(y + 3) + 3(z - 0) = 0$,

$P_3 : \quad x + 2y + 3z + 4 = 0$.

3) Враховуючи, що $P_1 \perp L_2$, отримуємо

$$\vec{n}_{P_1} = \vec{S}_{L_2}, \quad \vec{S}_{L_2} = (5, 0, 3), \quad M(2, -3, 0) \in L_2 .$$

Рівняння прямої, заданої точкою $M(x_0, y_0, z_0)$ і напрямним вектором $\vec{S} = (m, n, p)$, має вигляд

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p} ;$$

$$L_2 : \quad \frac{x - 2}{5} = \frac{y + 3}{0} = \frac{z - 0}{3} .$$

4) Завдяки тому що $L_3 \| L_1$, отримуємо

$$\vec{S}_{L_1}=\vec{S}_{L_3}\,; \qquad \vec{S}_{L_3}=(1,\,2,\,3)\,; \qquad M(2,-3,\,0)\in L_3\,;$$

$$L_3: \qquad \frac{x-2}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-0}{3}\ .$$

5) Рівняння площини P_1 і прямої L_1 утворюють систему, розв'язок якої дасть координати точки N перетину прямої і площини :

$$\begin{cases} 5x+3z-7=0\ ; \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}\ . \end{cases}$$

У рівнянні прямої перейдемо до параметричного задання :

$$\begin{cases} 5x+3z-7=0\ , \\ \dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{3}=t\ , \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+3z-7=0\ , \\ x=t\,, \\ y=2\cdot t+1\ , \\ z=3\cdot t-1\ ; \end{cases}$$

$$5\cdot t+3(3\cdot t-1)-7=0\ ,$$
$$5\cdot t+9\cdot t-3-7=0\ ,$$
$$14\cdot t=10\ ,$$
$$t=\frac{5}{7}\ ;$$

$$\begin{cases} x=\dfrac{5}{7}\ , \\ y=2\cdot\dfrac{5}{7}+1=\dfrac{17}{7}\ , \\ z=3\cdot\dfrac{5}{7}-1=\dfrac{8}{7}\ , \end{cases} \qquad N\left(\frac{5}{7},\ \frac{17}{7},\ \frac{8}{7}\right)\ .$$

6) $$\rho(M,P_1)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|5\cdot 2+0(-3)+3\cdot 0-7|}{\sqrt{5^2+0^2+3^2}}=\frac{3}{\sqrt{34}}\ .$$

7) $$\rho(M,\,L_1)=\frac{\left|\overrightarrow{AM}\times\vec{S}_{L_1}\right|}{\left|\vec{S}_{L_1}\right|}\ ,\ \text{де}\quad A(x_1,\,y_1,\,z_1)\in L_1\ .$$

З рівняння прямої L_1 випливає, що $A(0,\,1,-1)\in L_1$; $M(2,-3,\,0)$;

$$\overrightarrow{AM}=(2-0,\ -3-1,\ 0+1)=(2,\ -4,\ 1)\ ; \qquad \vec{S}_{L_1}=(1,\ 2,\ 3)\ ;$$

$$\overrightarrow{AM}\times\vec{S}_{L_1}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 1\\ 1 & 2 & 3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-4 & 1\\ 2 & 3\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}2 & -4\\ 1 & 2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=$$

$$=-14\vec{i}-5\vec{j}+8\vec{k}=(-14,-5,\ 8)\ ;$$

$$\left|\overrightarrow{AM}\times\vec{S}_{L_1}\right|=\sqrt{196+25+64}=\sqrt{285}\ ;$$

$$\left|\vec{S}_{L_1}\right|=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}\ ;$$

$$\rho(M,\ L_1)=\frac{\sqrt{285}}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{285}{14}}\ .$$

Задача 4. Побудувати область розв'язків системи лінійних нерівностей :

а) $\begin{cases} 2x_1-5x_2\geq -10\ , \\ x_1 \qquad\quad \leq \ 3\ , \\ 3x_1+2x_2\leq \ 12\ , \\ x_1+2x_2\geq -\ 2\ ; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x_1+\ \ x_2\leq 6\ , \\ 3x_1+5x_2\geq 15\ , \\ \qquad\quad x_2\geq \ 1\ ; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x_1-2x_2\leq -6\ , \\ -x_1+5x_2\leq \ 5\ , \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0\ . \end{cases}$

Розв'язання.

а) Будуємо граничні прямі, що відповідають даним нерівностям, за двома точками, що належать цим прямим :

$l_1:\ \ 2x_1-5x_2=-10\ ,\qquad A_1(0,2)\in l_1\ ,\qquad A_2(-5,0)\in l_1\ ;$

$l_2:\ \ x_1=3\ ,$

$l_3:\ \ 3x_1+2x_2=12\ ,\qquad B_1(0,6)\in l_3\ ,\qquad B_2(4,0)\in l_3\ ;$

$l_4:\ \ x_1+2x_2=-2\ ,\qquad C_1(0,-1)\in l_4\ ,\qquad C_2(-2,0)\in l_4\ .$

Кожна пряма ділить площину на дві півплощини. Та з них, що містить початок координат, і є областю розв'язків кожної з нерівностей (координати точки $O(0,0)$ задовольняють кожній нерівності). Стрілками позначені півплощини, які є областями розв'язків даних нерівностей.

Перетин відмічених півплощин – багатокутник $ABCD$ – є областю розв'язків даної системи (рис. 1.2).

б) Будуємо граничні прямі, що відповідають даним нерівностям :

$l_1: \quad -x_1 + x_2 = \quad 6 \ , \qquad A_1(0,6) \in l_1 \ , \qquad A_2(-6,0) \in l_1 \ ;$

$l_2: \quad 3x_1 + 5x_2 = 15 \ , \qquad B_1(0,3) \in l_2 \ , \qquad B_2(5,0) \in l_2 \ ;$

$l_3: \qquad x_2 = 1 \ .$

Область розв'язків першої нерівності містить початок координат, другої і третьої нерівностей – не містить початку координат (координати точки $O(0, 0)$ не задовольняють другій і третій нерівностям) .

Стрілками позначені півплощини, точки яких задовольняють нерівностям . Областю розв'язків є опукла многокутна необмежена область (рис. 1.3).

в) Будуємо граничні прямі :

$l_1: \quad 3x_1 - 2x_2 = -6 \ , \qquad A_1(0,3) \in l_1 \ , \qquad A_2(-2,0) \in l_1 \ ;$

$l_2: \quad -x_1 + 5x_2 = \quad 5 \ , \qquad B_1(0,1) \in l_2 \ , \qquad B_2(-5,0) \in l_2 \ ;$

$l_3: \quad x_1 = \qquad 0 \ ,$

$l_4: \qquad x_2 = 0 \ .$

Будуємо область розв'язків кожної нерівності.

Не існує жодної точки, загальної для всіх півплощин, що відповідають даним нерівностям (рис. 1.4) .

Отже, область розв'язків порожня . Система нерівностей несумісна .

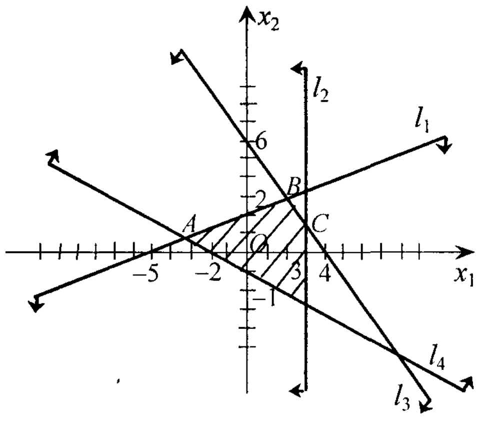

Рис. 1.2

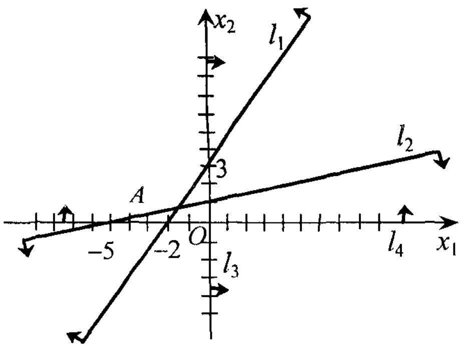

Рис. 1.3

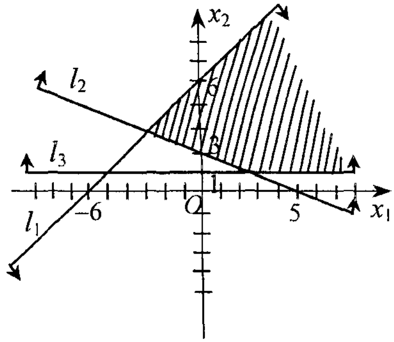

Рис. 1.4

Задача 5. Розкласти вектор $\vec{x}$ за базисом $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$:

$$\vec{x} = (2, 5, 0), \quad \vec{p} = (1, 2, -1), \quad \vec{q} = (3, 6, 1), \quad \vec{r} = (3, 9, 3).$$

Розв'язання. Знайдемо коефіцієнти розкладу $\vec{x} = \alpha_1 \vec{p} + \alpha_2 \vec{q} + \alpha_3 \vec{r}$. Підставимо координати векторів у цю рівність :

$$\alpha_1 (1, 2, -1) + \alpha_2 (3, 6, 1) + \alpha_3 (3, 9, 3) = (2, 5, 0).$$

Звідси одержуємо наступну систему рівнянь :

$$\begin{cases} \alpha_1 + 3\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2 ; \\ 2\alpha_1 + 6\alpha_2 + 9\alpha_3 = 5 ; \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 . \end{cases}$$

Розв'язавши систему , знайдемо : $\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = \frac{1}{3}$.

Зробивши перевірку, впевнюємось в правильності розв'язання системи.

Таким чином , шуканий розклад має наступний вигляд :

$$\vec{x} = 1 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} + \frac{1}{3} \vec{r} .$$

ГЛАВА 2. ***ВИЗНАЧНИКИ І МАТРИЦІ. СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ***

[І , гл . І, § І.І - І.20 ; гл . 2, §2.І - 2.7]

2.1. Визначники і матриці

Визначником n-го порядку називають число, що позначається

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

і дорівнює алгебраїчній сумі $n!$ членів. Кожний член визначника дорівнює добутку n елементів визначника, що взяті по одному з кожного рядка і кожного стовпця визначника. Знак члена рівний $(-1)^t$, де t – число інверсій в перестановці других індексів елементів, якщо перші індекси записані в натуральному порядку.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} визначника називається визначник $(n-1)$-го порядку, отриманий з даного визначника шляхом викреслення рядка і стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Алгебраїчним доповненням елемента a_{ij} визначника називається число $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Одним з основних методів обчислення визначників n-го порядку є метод пониження порядку, оснований на теоремі розкладання, що зводить обчислення визначника до обчислення визначників другого і третього порядків. При цьому використовуються й інші властивості визначників .

Теорема розкладання :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij} , \qquad i = \overline{1,n} ,$$

або

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} , \qquad j = \overline{1,n} .$$

Матрицею розміру $m \times n$ називається таблиця чисел a_{ij}, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Коротко: $A_{m \times n}$, $(a_{ij})_{m,n}$.

Сумою $A + B$ матриць $A = (a_{ij})_{m,n}$ і $B = (b_{ij})_{m,n}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m,n}$, така, що $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Добутком αA матриці $A = (a_{ij})_{m,n}$ на число α називається матриця $C = (c_{ij})_{m,n}$, така, що $c_{ij} = \alpha a_{ij}$.

Добутком AB матриці $A = (a_{ij})_{m,n}$ на $B = (b_{ij})_{n,l}$ називається матриця $C = (c_{ij})_{m,l}$, де

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \qquad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, l},$$

тобто елемент c_{ij} дорівнює сумі добутків відповідних елементів i-го рядка матриці A і j-го стовпця матриці B.

Степенем k матриці A називається матриця

$$C = A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k \text{ раз}},$$

де k - ціле додатне число; $A^0 = E$.

Многочленом від матриці A називається вираз, що має вигляд

$$P(A) = \alpha_0 A^k + \alpha_1 A^{k-1} + \alpha_2 A^{k-2} + \ldots + \alpha_{k-1} A + \alpha_k E,$$

де k – ціле додатне число, $A^0 = E$.

Оберненою до квадратної матриці A називається матриця A^{-1} така, що $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Формула для знаходження оберненої матриці:

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}=\frac{1}{\det A}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Рангом матриці називається найвищий з порядків її мінорів, відмінних від нуля. Позначення $\operatorname{Rg} A$. Відмінний від нуля мінор матриці A, порядок якого $r=\operatorname{Rg} A$, називається **базисним мінором**.

Елементарні перетворення матриць :

1) перестановка рядків (стовпців) ;

2) множення рядка (стовпця) на число , відмінне від нуля ;

3) додавання до елементів рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця) , помножених на деяке число .

Елементарні перетворення не змінюють рангу матриці . На цьому базується метод елементарних перетворень для знаходження рангу .

Приклад 1. Задані матриці :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\quad D=\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Чи можна додати матрицю A до матриці B? Матрицю A до матриці C? Знайти $A+C$; $2A-3C+D$.

Розв'язання. Матрицю A не можна додати до матриці B , бо матриця A має розміри 3×2 , матриця B - розміри 2×3 , а додавати можна матриці однакових розмірів . Матриці A і C мають однакові розміри , отже , їх можна додавати .

Враховуючи , що при додаванні матриць додаються відповідні елементи , маємо

$$A+C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 8 & 7 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Оскільки множення матриці на число є операція , яка полягає в тому , що кожний елемент матриці помножується на це число , то

$$2\,A=2\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & -1\\ 0 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & -2\\ 0 & 8\end{pmatrix}, \qquad -3\,C=(-3)\begin{pmatrix}-2 & 3\\ 5 & 8\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -9\\ -15 & -24\\ 3 & -9\end{pmatrix}.$$

Отже ,

$$2\,A-3\,C+D=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 6 & -2\\ 0 & 8\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}6 & -9\\ -15 & -24\\ 3 & -9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & 2\\ 1 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13 & -2\\ -10 & -24\\ 4 & -5\end{pmatrix}$$

Приклад 2. Задані матриці :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 0\\ 5 & 7 & 9 & -1\\ 3 & 4 & 5 & 15\end{pmatrix}.$$

Чи існує добуток : AB ; BA ?

Розв'язання. Оскільки матриця A має розміри 2×3 , а матриця B - розміри 3×4 , то число стовпців матриці A дорівнює числу рядків матриці B , отже , AB існує . Число стовпців матриці B не дорівнює числу рядків матриці A , отже , BA не існує .

Приклад 3. Задані матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 9 & -5\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}, \qquad C=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}.$$

Знайти AC ; AB .

Розв'язання. Використовуючи означення добутку матриць , знаходимо

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 9 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot 1+0\cdot 2+(-2)\cdot 3\\ 3\cdot 1+9\cdot 2+(-5)\cdot 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\ 6\end{pmatrix};$$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 3 & 9 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2 & 4\\ 5 & 6 & 7\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+0\cdot5+(-2)\cdot0 & 1\cdot2+0\cdot6+(-2)\cdot3 & 1\cdot4+0\cdot7+(-2)\cdot(-1)\\ 3\cdot(-1)+9\cdot5+(-5)\cdot0 & 3\cdot2+9\cdot6+(-5)\cdot3 & 3\cdot4+9\cdot7+(-5)\cdot(-1)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -4 & 6\\ 42 & 45 & 80\end{pmatrix}.$$

Приклад 4. Показати, що матриця $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}$ є коренем многочлена

$f(x)=x^2-3x+5$.

Розв'язання. Підставимо в даний многочлен замість x матрицю A, тоді отримаємо

$$f(A)=A^2-3A+5E=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}^2-3\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & -3\\ 9 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -9 & -3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, матриця A є коренем даного многочлена.

Приклад 5. З'ясувати, чи існує матриця, обернена матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -2\\ 1 & 1 & 4\end{pmatrix},$$

і якщо існує, знайти її. Виконати перевірку: $A\cdot A^{-1}=E$.

Розв'язання. Оскільки $\det A=12\neq0$, то існує обернена матриця A^{-1}, що може бути знайдена за формулою

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix},$$

де A_{ij} - алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}.

Оскільки

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -6, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,$$

то

$$A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність матриці A^{-1}:

$$A A^{-1} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 6 & 0 \\ -6 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Приклад 6. Використовуючи означення рангу матриці , знайти ранг матриці A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Серед мінорів першого порядку є відмінний від нуля , бо матриця A ненульова . Серед мінорів другого порядку є також відмінні від нуля , наприклад $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -5 \neq 0$. Всі мінори третього порядку дорівнюють нулю (перевірте) . Отже, $\operatorname{Rg} A = 2$.

Приклад 7. Використовуючи метод елементарних перетворень , знайти ранг матриці A :

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 1 & 7 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 10 & 1 & 10 & 6 & 6\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 1 & 7 & 2 & 1\\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 10 & 1 & 10 & 6 & 6\end{pmatrix}\xrightarrow[\substack{S_2+(-5)\,S_1\\ S_3+(-4)\,S_1\\ S_4+(-10)\,S_1}]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 6 & -3 & -13 & -19\\ 0 & 5 & -7 & -11 & -15\\ 0 & 11 & -10 & -24 & -36\end{pmatrix}\rightarrow$$

$$\xrightarrow[\substack{S_4+(-1)\,S_2+(-1)\cdot S_3\\ S_2+(-1)\cdot S_3}]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 4 & -2 & -4\\ 0 & 5 & -7 & -11 & -15\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow[S_3+(-5)\cdot S_2]{}\begin{pmatrix}1 & -1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 4 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -27 & -1 & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отримали трапецієподібну матрицю, ранг якої дорівнює 3. Звідси $\operatorname{Rg} A=3$.

2.2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Система лінійних алгебраїчних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1\ ;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\ ;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m\ ,\end{cases}$$

або в матричній формі :

$$AX=B\ ,$$

де

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Розширена матриця системи має вигляд

$$\overline{A}=(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Згідно з теоремою **Кронекера - Капеллі**, для того щоб система рівнянь була сумісна, необхідно і достатньо, щоб $\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,\overline{A}$.

При цьому, якщо $\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,\overline{A} = n$, n – число невідомих, то система має єдиний розв'язок; якщо $\mathrm{Rg}\,A = \mathrm{Rg}\,\overline{A} = r < n$, то система має безліч розв'язків; якщо $\mathrm{Rg}\,A \neq \mathrm{Rg}\,\overline{A}$, то система несумісна.

Розглянемо деякі методи розв'язування систем.

Матричний метод: $X = A^{-1}\cdot B$.

Реалізація методу полягає в знаходженні оберненої матриці і множенні її на стовпець вільних членів. Використовується для невироджених ($\det A \neq 0$) квадратних систем.

Формули Крамера: $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$, $i=\overline{1,n}$, де $\Delta = \det A \neq 0$ – визначник системи; Δ_i одержується з Δ шляхом заміни i-го стовпця стовпцем вільних членів. Також використовується для невироджених квадратних систем.

Метод Гаусса грунтується на наступній теоремі: елементарним перетворенням рядків розширеної матриці системи відповідає перетворення цієї системи в еквівалентну.

З допомогою елементарних перетворень рядків розширеної матриці, а також переміни місцями стовпців, що відповідає перепозначенню змінних, матриця $\overline{A}$ зводиться до східчастої (або трикутної) форми. Цій матриці ставиться у відповідність система, еквівалентна вихідній. Це прямий хід методу Гаусса. Розв'язання отриманої системи здійснюється знизу вверх зворотний хід методу Гаусса) .

Приклади розв'язання систем рівнянь матричним методом, за формулами Крамера і методом Гаусса наведено в зразку виконання індивідуального завдання 2 .

Система рівнянь називається **однорідною** , якщо $B=0$, тобто система має вигляд $AX=0$.

Однорідна система завжди сумісна, тобто має розв'язок $X=0$.

Однорідна система має нетривіальні розв'язки, якщо $\mathrm{Rg}\,A=r<n$, де n – число невідомих . У цьому випадку система має безліч розв'язків , які записуються у вигляді загального розв'язку. Розв'язання однорідної системи здійснюється методом Гаусса .

Фундаментальна система розв'язків однорідної системи рівнянь є системою лінійно незалежних розв'язків .

Фундаментальна система містить $(n-r)$ розв'язків і одержується з загального розв'язку , якщо вільним змінним надавати послідовно значення : $1, 0, 0, \ldots, 0$; $0, 1, 0, \ldots, 0$; ... ; $0, 0, 0, \ldots, 1$.

Приклад 1. Записати в матричному вигляді систему рівнянь :

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=1; \\ x_1+x_3-x_4=2; \\ 2x_1+2x_2+3x_3-x_4=5. \end{cases}$$

Розв'язання. Для даної системи

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Отже, в матричному вигляді система запишеться так :

$$AX=B$$

або

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Розв'язати однорідну систему, використовуючи метод Гаусса :

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \ \ = 0 \ ; \\ \ \ x_1 + x_2 + \ x_3 \ = 0 \ ; \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Розв'язання. Випишемо матрицю системи і будемо виконувати елементарні перетворення рядків матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Rg}\, A = r = 2 < n = 3$, n - число невідомих . Система має нетривіальні розв'язки . Базисний мінор $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Ставимо у відповідність матриці спрощену систему :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \ ; \\ \qquad 5x_2 + x_3 = 0 \ , \end{cases}$$

де x_1, x_2 - базисні змінні, x_3 - вільна змінна ;

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -x_3 \ ; \\ \quad 5x_2 = -x_3 \ , \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_3 + \dfrac{x_3}{5} = -\dfrac{4}{5}x_3 \ ; \\ x_2 = -\dfrac{x_3}{5} \ . \end{cases}$$

Загальний розв'язок : $x_1 = -\dfrac{4}{5}x_3$, $\quad x_2 = -\dfrac{x_3}{5}$, $\quad x_3 \in R$.

Якщо перепозначити вільну змінну $x_3 = C$, отримаємо загальний розв'язок у вигляді

$$x_1 = -\frac{4}{5}C; \quad x_2 = -\frac{C}{5} \qquad \forall C \in R \ .$$

Підставивши отриманий розв'язок у систему , переконаємось у правильності отриманого розв'язку .

Приклад 3. Знайти фундаментальну систему розв'язків однорідної системи рівнянь :

$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0\ ; \\ 3x_1+5x_2+6x_3-4x_4=0\ ; \\ 4x_1+5x_2-2x_3+3x_4=0\ ; \\ 3x_1+8x_2+24x_3-19x_4=0\ . \end{cases}$$

Розв'язання.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Rg}\, A=r=2<n=4$,система має нетривіальні розв'язки .

Базисний мінор $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$.

$$\begin{matrix} x_1+2x_2+4x_3-3x_4=0\ ; \\ -x_2-6x_3+5x_4=0\ , \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+2x_2=-4x_3+3x_4\ ; \\ x_2=-6x_3+5x_4\ , \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=-4x_3+3x_4-2(-6x_3+5x_4)=-4x_3+3x_4+12x_3-10x_4=8x_3-7x_4\ ; \\ x_2=-6x_3+5x_4\ , \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=8x_3-7x_4\ ; \\ x_2=-6x_3+5x_4\ . \end{cases}$$

Загальний розв'язок : $x_1=8x_3-7x_4$, $\quad x_2=-6x_3+5x_4$, $\quad x_3,x_4\in R$.

Перепозначимо змінні $x_3=C_1$, $x_4=C_2$.

Загальний розв'язок :

$x_1=8C_1-7C_2$, $\quad x_2=-6C_1+5C_2$, $\quad x_3=C_1$, $\quad x_4=C_2 \quad \forall C_1, C_2\in R$.

Поклавши $C_1=1$, $C_2=0$ та $C_1=0$, $C_2=1$, з загального розв'язку одержуємо фундаментальну систему розв'язків :

$$x_1=8,\quad x_2=-6,\quad x_3=1,\quad x_4=0\ ;$$

$$x_1=-7,\quad x_2=5,\quad x_3=0,\quad x_4=1\ .$$

Маємо фундаментальну систему розв'язків : $\{(8,-6,1,0),\ (-7,5,0,1)$

Зауважимо, що наведена **обчислювальна процедура гауссових виключень** може бути формалізована за допомогою простих правил .

Назвемо змінну, що виключалася , **розв'язувальною** , коефіцієнт при ній – розв'язувальним елементом, рядок і стовпець матриці, в яких розміщений розв'язувальний елемент – розв'язувальними .

Перерахування елементів розширеної матриці при виконанні елементарних перетворень виконується за наступними правилами :

1) елементи розв'язувального рядка і всіх вище розташованих рядків залишаються незмінними ;
2) елементи розв'язувального стовпця , що розташовані нижче розв'язувального елемента , обертаються в нулі ;
3) усі інші елементи матриці обчислюються за **правилом прямокутника** : перетворюваний елемент дорівнює різниці добутків елементів головної і побічної діагоналей (рис. 2.1) .

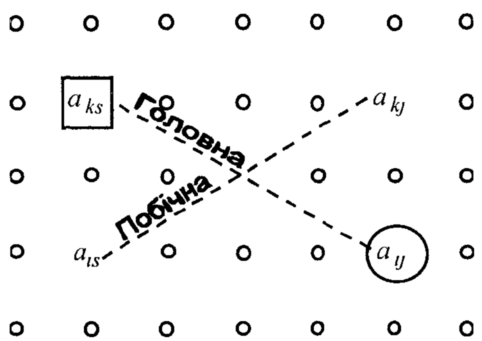

Рис . 2 .1

При розгляді прикладів 2, 3, а також задач 3 , 4 індивідуального завдання 2 використовувалася саме така процедура перетворення розширеної матриці. Дотримання означених правил полегшує процес обчислень і використання обчислювальних засобів для розв'язання задач .

Метод повного виключення (метод Жордана – Гаусса) полягає в тому, що в результаті перетворень розширеної матриці в ній виділяється діагональна підматриця і тоді розв'язок вихідної системи виписується просто

Метод повного виключення працює за наступними правилами:

1) призначається розв'язувальний елемент ; ним буде коефіцієнт при невідомій , що виключається ;
2) елементи розв'язувального рядка залишаються незмінними ;
3) усі елементи розв'язувального стовпця (окрім розв'язувального елемента) замінюються нулями і залишаються такими до кінця перетворень ;
4) усі інші елементи матриці перераховуються за правилом прямокутника .

Приклад 4. Розв'язати систему рівнянь методом повного виключення:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 1; \\ 5x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Розв'язання. Скористаємось алгоритмом методу повного виключення :

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 1 \\ \boxed{3} & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 5 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \boxed{2} & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & -13 & 5 & -3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} -4 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \\ 0 & 0 & 12 & -10 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & -5 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 6 & 0 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 12 & 0 & 14 & 2 \\ 0 & 0 & 6 & -5 & 1 \end{array}\right).$$

За виглядом останньої матриці, записуємо загальний розв'язок системи рівнянь : $x_1 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}x_4$, $x_2 = \frac{1}{6} - \frac{7}{6}x_4$, $x_3 = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}x_4$, де x_4 – будь-яке дійсне число .

Метод повного виключення може бути використаний для обернення матриць (відомий також під назвою **метод елементарних перетворень**) Для даної матриці A n-го порядку будується прямокутна матриця $(A\,|\,E)$ розміру $n\times 2n$, до якої застосовуються перетворення за алгоритмом повного виключення , в результаті чого матриця приводиться до вигляду $(E\ \ B)$, де $B=A^{-1}$. Це завжди можливо , якщо матриця A невироджена .

Приклад 5. Використовуючи метод повного виключення, знайти матрицю, обернену матриці A :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{2} & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 6 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -4 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -14 & 4 & -6 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-16} & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -32 & 0 & 0 & -92 & 40 & 28 \\ 0 & -16 & 0 & 28 & -8 & -12 \\ 0 & 0 & -16 & -2 & -4 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 92/32 & -40/32 & -28/32 \\ 0 & 1 & 0 & -28/16 & 8/16 & 12/16 \\ 0 & 0 & 1 & 2/16 & 4/16 & -2/16 \end{array}\right)$$

Праворуч від вертикальної риски отримали обернену матрицю. Отже .

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 23/8 & -10/8 & -7/8 \\ -14/8 & 4/8 & 6/8 \\ 1/8 & 2/8 & -1/8 \end{pmatrix}=-\frac{1}{8}\begin{pmatrix} -23 & 10 & 7 \\ 14 & -4 & -6 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можна перевірити, що $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$.

Уведемо поняття власного вектора і власного значення матриці A.

Будь-який ненульовий вектор $\vec{x}$ називається **власним вектором** квадратної матриці A, якщо знайдеться таке число λ, що буде виконуватися рівність

$$A\vec{x}=\lambda\vec{x}.$$

Число λ називається **власним значенням** матриці A, що відповідає власному вектору $\vec{x}$.

Наведену рівність можна записати у матричному вигляді

$$AX = \lambda X$$

або

$$(A - \lambda E) X = 0 \ .$$

Таким чином, власні вектори знаходяться з розв'язку однорідної системи рівнянь

$$(A - \lambda E) X = 0 \ ,$$

що можна записати в розгорнутому вигляді так :

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\, x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = 0 \ ; \\ a_{21} x_1 + (a_{22} - \lambda)\, x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = 0 \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda)\, x_n = 0 \ ; \end{cases}$$

Ненульові розв'язки цієї системи існують тоді і тільки тоді, коли $\det(A - \lambda E) = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Останнє рівняння називається **характеристичним рівнянням** .

Розв'язавши характеристичне рівняння, отримаємо власні значення матриці , а після цього із записаної системи рівнянь – її ненульові розв'язки, тобто власні вектори.

Приклад 6. Знайти власні значення і власні вектори матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

Розв'язання. Складаємо характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \ .$$

Розкривши визначник, отримаємо рівняння $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$.

Знаходимо власні значення $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$.

Запишемо систему рівнянь для визначення власних векторів $\vec{x}^{(1)}$ и $\vec{x}^{(2)}$:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 ; \\ 2x_1 + (1-\lambda)x_2 = 0 . \end{cases}$$

Вважаємо $\lambda_1 = 3$. Система приймає вигляд

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 ; \\ \ \ 2x_1 - 2x_2 = 0 , \end{cases} \Rightarrow \{-x_1 + x_2 = 0 , \Rightarrow \quad \{x_1 = x_2 .$$

Вважаючи $x_2 = 1$, одержуємо фундаментальну систему розв'язків однорідної системи: $E_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Звідси $\vec{x}^{(1)} = C(1, 1)$, $C \neq 0$.

Аналогічно, приймаючи $\lambda_2 = -1$, знаходимо

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 0 ; \\ 2x_1 + 2x_2 = 0 , \end{cases} \Rightarrow \{ x_1 + x_2 = 0 , \Rightarrow \quad \{ x_1 = -x_2 .$$

Приймаючи $x_2 = 1$, знаходимо $E_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{x}^{(2)} = C(-1, 1)$, $C \neq 0$.

Отже, маємо: $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$; $\vec{x}^{(1)} = C(1, 1)$, $\vec{x}^{(2)} = C(-1, 1)$ $C \neq 0$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Запишіть загальний вигляд системи m лінійних рівнянь з n невідомими.
2. Запишіть формули Крамера.
3. Що називається матрицею ?
4. Як помножити дві матриці ?
5. Дайте означення рангу матриці.
6. Дайте означення оберненої матриці.
7. Яка система лінійних алгебраїчних рівнянь називається сумісною
8. Сформулюйте теорему Кронекера - Капеллі.

2.3. Задачі для практичних занять

У задачах 2.1 – 2.3 обчислити визначники :

2.1. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -4 & 5 \\ 2 & 3 & 7 & 0 \end{vmatrix}$. 2.2. $\begin{vmatrix} -2 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. 2.3. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 8 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

2.4. Задані матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 5 \\ 0 & 7 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 4 \\ 5 & -7 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Знайти : а) $2A + 3B - C$; б) $A - B + 2C$.

У задачах 2.5 – 2.9 виконати вказані дії :

2.5. $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$. 2.6. $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

2.7. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 2.8. $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^3$. 2.9. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^3$.

У задачах 2.10 – 2.13 знайти матриці , обернені даним , якщо вони існують . Перевірити виконання рівності : $A A^{-1} = E$.

2.10. а) $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$, б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. 2.11. $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

2.12. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. 2.13. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

У задачах 2.14 – 2.16 знайти ранг матриці A методом елементарних перетворень :

2.14. $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 11 \\ 5 & 1 & 6 & 11 \end{pmatrix}$.

2.15. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

2.16. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

У задачах 2.17 – 2.19 розв'язати системи , використовуючи формули Крамера :

2.17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \ ; \\ 3x_1 + 4x_2 = 18 \ . \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5 \ ; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = -3 \ ; \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \ . \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \ ; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \ ; \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 2 \ . \end{cases}$

У задачах 2.20 – 2.22 розв'язати системи , використовуючи матричний спосіб :

2.20. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \ ; \\ 2x_1 - x_2 = 1 \ ; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \ . \end{cases}$

2.21. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \ ; \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -1 \ ; \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 5 \end{cases}$

2.22. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 \ ; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2 \ ; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 7 \ . \end{cases}$

У задачах 2.23 – 2.27 дослідити систему на сумісність і у випадку сумісності розв'язати її . Використати метод Гаусса (або метод повного виключення) .

2.23. $\begin{cases} x_1+3x_2-x_3=3\ ; \\ 2x_1+x_2+2x_3=5\ ; \\ x_1-x_2+3x_3=3\ ; \\ 3x_1+4x_2-7x_3=0\ . \end{cases}$ **2.24.** $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=-1\ ; \\ 2x_1+3x_2+5x_3=3\ ; \\ 3x_1+5x_2+6x_3=7\ . \end{cases}$

2.25. $\begin{cases} x_1-5x_2+3x_3-x_4=1\ ; \\ 2x_1-10x_2+3x_4=0\ ; \\ 4x_1-20x_2+6x_3+x_4=2\ . \end{cases}$ **2.26.** $\begin{cases} 2x_1+3x_2-x_3+x_4=2\ ; \\ x_1+2x_2+x_3-x_4=1\ ; \\ 3x_1+5x_2=3\ ; \\ x_1+x_2-2x_3+2x_4=1\ . \end{cases}$

2.27. $\begin{cases} x_1+x_2-3x_4-4x_5=0\ ; \\ x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=1\ ; \\ 2x_1+2x_2+x_3-x_4+3x_5=0\ . \end{cases}$

У задачах 2.28 – 2.30 розв'язати однорідні системи рівнянь . Використати метод Гаусса (або метод повного виключення) :

2.28. $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=0\ ; \\ x_1-x_2+x_3=0\ . \end{cases}$ **2.29.** $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3+x_4=0\ ; \\ 2x_1+4x_2-x_3-x_4=0\ ; \\ 3x_1+6x_2-4x_3=0\ . \end{cases}$

2.30. $\begin{cases} 2x_1+3x_2-4x_3=0\ ; \\ x_1-2x_2+3x_3=0\ ; \\ 3x_1+x_2-x_3=0\ ; \\ 5x_1+4x_2-5x_3=0\ . \end{cases}$

У задачах 2.31 – 2.32 знайти фундаментальну систему розв'язків :

2.31. $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3-2x_4+x_5=0\ ; \\ 3x_1+2x_2+3x_3-x_4+2x_5=0\ . \end{cases}$ **2.32.** $\begin{cases} 2x_1+x_2-4x_3=0\ ; \\ 3x_1+4x_2-x_3=0\ ; \\ x_1+3x_2+3x_3=0\ . \end{cases}$

У задачах 2.33 – 2.37 знайти власні вектори і власні значення матриці A:

2.33. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$. **2.34.** $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

2.35. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **2.36.** $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 4 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. **2.37.** $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

2.4. Індивідуальне завдання 2

Задача 1. Обчислити визначник четвертого порядку.

Варіанти завдань

1. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$. 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$. 3. $\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -3 & 3 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & -8 \end{vmatrix}$. 5. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 8 & 3 \\ -4 & 3 & -9 & 1 \\ 6 & 1 & 10 & 3 \end{vmatrix}$. 6 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. 8. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & -5 & 2 \\ 3 & 1 & -7 & 3 \end{vmatrix}$. 9. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 3 & -4 & 7 & -8 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & -6 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & -1 & 3 \\ 6 & 2 & 1 & 5 \\ 9 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 11. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 3 & 3 \end{vmatrix}$. 12. $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -3 & 12 \\ 3 & -7 & -5 & 15 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 3 \end{vmatrix}$. 14. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 7 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & -1 \end{vmatrix}$. 17. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. 18. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$.

19. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$. 20. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$. 21. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$.

22. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -7 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 23. $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$. 24. $\begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -4 \end{vmatrix}$. 26. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. 27. $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$.

28. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 7 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & 3 \end{vmatrix}$. 29. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 0 & 5 \\ 3 & -2 & 1 & -4 \\ 6 & -3 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. 30. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 4 \\ -3 & -10 & 2 & 11 \end{vmatrix}$.

31. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Задача 2. Знайти значення многочлена $f(x)$ при $x = A$, де A – задана матриця .

Варіанти завдань

1. $f(x) = x^2 + 4x + 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

3. $f(x) = 3x^2 - x - 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4. $f(x) = 2x^2 - x + 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. $f(x) = -2x^2 - 2x + 5$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. $f(x) = x^2 + 6x - 7$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

8. $f(x) = 3x^2 + 2x - 3$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

9. $f(x) = 5x^2 + x - 6$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \\ 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

10. $f(x) = -4x^2 - x + 5$,

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

. $f(x)=4x^2-5x+1$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

12. $f(x)=x^2-5x+3$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -5 & 2\end{pmatrix}.$$

13. $f(x)=2x^2+3x-1$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

14. $f(x)=x^2+2x-2$,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

15. $f(x)=3x^2-x+5$,

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 4\end{pmatrix}.$$

16. $f(x)=4x^2-x+3$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

17. $f(x)=x^2-4x+3$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -2\\ 0 & 3 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

18. $f(x)=-4x^2+2x-5$,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 3 & -1\end{pmatrix}.$$

19. $f(x)=x^2+5x-6$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 2 & -2\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}.$$

20. $f(x)=5x^2-4x+2$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}.$$

21. $f(x)=x^2+3x-4$,

$$A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 3 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

22. $f(x)=2x^2+3x-5$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 4 & 0 & -1\\ 3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

23. $f(x)=x^2+6x-4$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & 2 & -3\end{pmatrix}.$$

24. $f(x)=5x^2-2x+7$,

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & 0 & 4\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

25. $f(x)=6x^2-7x+2$,

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

26. $f(x)=-3x^2+x+2$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ -4 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

27. $f(x)=2x^2-3x+1$,

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -3\\ 0 & 2 & 4\\ 0 & -4 & 0\end{pmatrix}.$$

28. $f(x)=-4x^2+x+1$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 3 & -1\\ 0 & -4 & 2\end{pmatrix}.$$

29. $f(x)=2x^2-4x+5$,

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

30. $f(x)=5x^2-4x+1$,

$$A=\begin{pmatrix}2 & -4 & 1\\ 0 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{pmatrix}.$$

31. $f(x)=3x^2-5x+4$,

$$A=\begin{pmatrix}3 & 0 & 2\\ 5 & 3 & 1\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix}.$$

Задача 3. Розв'язати задану систему рівнянь трьома методами :
1) матричним методом ; 2) за формулами Крамера ; 3) методом Гаусса .

Варіанти завдань

1 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = -2\ ; \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 0\ ; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 2\ . \end{cases}$

2. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 5\ ; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 7\ , \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -4\ . \end{cases}$

3 $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 1\ ; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6\ ; \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = -3\ . \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x_1 - 4x_2 + x_3 = 7\ ; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1\ ; \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 = 2\ . \end{cases}$

5 $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1\ ; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1\ ; \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 4\ . \end{cases}$

6 . $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - 3x_3 = 5\ ; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0\ ; \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 10\ . \end{cases}$

7 $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1\ ; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 3\ ; \\ 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\ . \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3\ ; \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\ ; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 5\ . \end{cases}$

9. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 = 8\ ; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4\ ; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 4\ . \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6\ ; \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0\ ; \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1\ . \end{cases}$

1 $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 1\ ; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0\ ; \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = 9\ . \end{cases}$

12. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 1\ : \\ 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 2\ ; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = -8\ . \end{cases}$

3 $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -3\ ; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2\ ; \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 = 0\ . \end{cases}$

14. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -4\ ; \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 3\ ; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6\ . \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - x_3 = -1 ; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 ; \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 . \end{cases}$

16. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0 ; \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 2 ; \\ 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 8 . \end{cases}$

17. $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 ; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = -1 ; \\ 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 6 . \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6 ; \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 1 ; \\ 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 1 . \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 ; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 2 ; \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = -7 . \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 ; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 ; \\ 4x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 4 . \end{cases}$

21. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -1 ; \\ 4x_1 - 5x_2 - x_3 = 0 ; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 . \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = -1 ; \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 ; \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 = 0 . \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 ; \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -2 ; \\ 4x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 0 . \end{cases}$

24. $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 - x_3 = -2 ; \\ 3x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 ; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 6 . \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2 ; \\ 4x_1 + x_2 + x_3 = 2 ; \\ 5x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -2 . \end{cases}$

26. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 - x_3 = 2 ; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 1 ; \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 12 ; \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2 ; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 = 0 ; \\ 6x_1 - x_2 - 2x_3 = -2 . \end{cases}$

28. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 10 ; \\ 6x_1 - 3x_2 - x_3 = 3 ; \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 . \end{cases}$

29. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6 ; \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16 ; \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16 . \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 ; \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 8 ; \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 . \end{cases}$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 ; \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 13 ; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 . \end{cases}$$

Задача 4. Дослідити сумісність системи , і у випадку сумісності знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок системи . Виконати перевірку правильності частинного розв'язку .

Варіанти завдань

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 ; \\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 3 ; \\ 4x_1 - x_2 + 8x_3 - 4x_4 = -3 ; \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 3 . \end{cases}$$

2. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = -1 ; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = -4 ; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 ; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 = -1 ; \\ x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 4x_4 = -1 ; \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4 = -2 ; \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 + 3x_4 = -2 . \end{cases}$$

4. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = -4 , \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 4 ; \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2 ; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 2 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 1 ; \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 ; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_4 = 2 ; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 . \end{cases}$$

6. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 ; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = -3 ; \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 0 ; \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 6 . \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 6x_4 = 4 ; \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 = -8 ; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -4 ; \\ 2x_1 - 5x_2 - 6x_3 - 3x_4 = -10 . \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 ; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 ; \\ 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 2 ; \\ 3x_1 - x_3 - x_4 = 9 . \end{cases}$$

9. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 2; \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -10; \\ 3x_1 - 5x_2 + x_4 = 0; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -6. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_4 = 4; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - 3x_4 = 6; \\ x_1 - x_3 - x_4 = 2. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 0; \\ 3x_1 - 4x_3 - x_4 = -4; \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 0; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$

12. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -3; \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = -1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 = -1; \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 = 1; \\ 3x_1 - 5x_2 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - 6x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

14. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = -3; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

15. $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -2; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = -1; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 3; \\ 3x_1 - 2x_2 - x_4 = 9. \end{cases}$

16. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 = 1; \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -3; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6; \\ 2x_1 - x_3 - x_4 = -2; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = -1; \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 8; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 3; \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -1. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 1; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 2. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 - 22x_4 = -1; \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 4. \end{cases}$

21. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2; \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

22. $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4; \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3; \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1; \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

23. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + x_3 - 7x_4 = 3; \\ 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 1; \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$

24. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 5; \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 1; \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 12. \end{cases}$

25. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1; \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7; \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8; \\ x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1; \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3; \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

27. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -2; \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = -5; \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 2x_4 = -1; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 6x_4 = -10. \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 3; \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2; \\ 2x_1 + 5x_2 - x_4 = -1; \\ 3x_1 + 3x_2 - x_3 - 3x_4 = 1. \end{cases}$

29 $\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 2; \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4; \\ 4x_1 + 14x_2 + x_3 + 7x_4 = 4; \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - x_4 = 7. \end{cases}$

30. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -4; \\ 5x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -5; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 = 2; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$

31. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 5; \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 7; \\ 6x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 8x_4 = 9; \\ 8x_1 - 4x_2 + 9x_3 + 10x_4 = 11. \end{cases}$

Задача 5. Знайти власні значення і власні вектори матриці .

Варіанти завдань

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.   2. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.   3. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.   5. $\begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$.   6. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

7. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.   8. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.   9. $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

10. $\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.   11. $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.   12. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

13. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.   14. $\begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.   15. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

16. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.   17. $\begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.   18. $\begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.   20. $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.   21. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

22. $\begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 1 & -4 & 0 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$. 23. $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$. 24. $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

25. $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 26. $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$. . 27. $\begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$.

28. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$. 29. $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 4 & -4 \end{pmatrix}$. 30. $\begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

31. $\begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

2.5. Зразок виконання індивідуального завдання 2

Задача 1. Обчислити визначник четвертого порядку :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Використаємо метод пониження порядку , оснований на застосуванні теореми розкладання визначника за елементами деякого рядка (стовпця) . При цьому заздалегідь , використовуючи властивості визначника , обертаємо в нуль усі , окрім одного , елементи його деякого рядка (стовпця) .

Виконаємо , наприклад , наступні перетворення.

Другий рядок помножимо послідовно на (-1), (-2), 3 і додамо до першого, третього, четвертого рядків відповідно.

Отриманий визначник розкладемо за елементами другого стовпця

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&2&1\\2&1&0&-2\\-3&0&1&6\\4&0&1&4\end{vmatrix}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&2&1\\-3&1&6\\4&1&4\end{vmatrix}.$$

Далі знов обертаємо в нуль усі елементи першого стовпця, окрім елемента в лівому верхньому куті, і після цього обчислюємо визначник другого порядку або використовуємо для обчислення отриманого визначника третього порядку правило трикутників :

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&1\\0&7&9\\0&-7&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&9\\-7&0\end{vmatrix}=63\ .$$

Обчислення за правилом трикутників має такий вигляд :

$$\begin{vmatrix}1&2&1\\-3&1&6\\4&1&4\end{vmatrix}=4-3+48-4-6+24=63\ .$$

Відповідь : $\Delta=63$.

Задача 2. Знайти значення многочлена $f(x)$ при $x=A$, де A - задана матриця :

$$f(x)=2x^2+3x-5\ ,\quad A=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&0&-1\\3&2&0\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. $f(A)=2A^2+3A-5E$, де E – одинична матриця третього порядку :

$$f(A)=2\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&0&-1\\3&2&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&0&-1\\3&2&0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}1&-2&-3\\4&0&-1\\3&2&0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}-16 & -8 & -1\\ 1 & -10 & -12\\ 11 & -6 & -11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3 & -6 & -9\\ 12 & 0 & -3\\ 9 & 6 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-5 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -5\end{pmatrix}=$$

$$=2\begin{pmatrix}-16 & -8 & -1\\ 1 & -10 & -12\\ 11 & -6 & -11\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -6 & -9\\ 12 & -5 & -3\\ 9 & 6 & -5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-32 & -16 & -2\\ 2 & -20 & -24\\ 22 & -12 & -22\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2 & -6 & -9\\ 12 & -5 & -3\\ 9 & 6 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-34 & -22 & -11\\ 14 & -25 & -27\\ 31 & -6 & -27\end{pmatrix}.$$

Задача 3. Розв'язати задану систему трьома методами : 1) матричним методом ; 2) за формулами Крамера ; 3) методом Гаусса :

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-\ x_3=-3\ ; \\ 2x_1-\ x_2+2x_3=\ 11\ ; \\ -x_1+3x_2+\ x_3\ =\ 0\ . \end{cases}$$

1. Розв'язання системи матричним методом

Запишемо систему рівнянь у вигляді матричного рівняння $AX=B$, де

$$A=\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{pmatrix}, \qquad X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}, \qquad B=\begin{pmatrix}-3\\ 11\\ 0\end{pmatrix}.$$

Із матричного рівняння $AX=B \Rightarrow \ X=A^{-1}B$.

Розв'язок матричним методом можливий , якщо $\det A=\Delta\neq 0$, тобто якщо матриця A невироджена :

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 11 & 2\\ 0 & 5 & 4\\ -1 & 3 & 1\end{vmatrix}=(-1)\begin{vmatrix}11 & 2\\ 5 & 4\end{vmatrix}=-(44-10)=-34\neq 0,$$

тобто існує єдина обернена матриця , отже , і єдиний розв'язок системи .

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} :

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\tilde{A}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix},$$

де $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}$, $\quad 1\le i,\ j\le 3$.

Знайдемо алгебраїчні доповнення

$$A_{11}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-7,\qquad A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-4,\qquad A_{13}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=5;$$

$$A_{21}=-\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=-5,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=2,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}=-11.$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=3,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7,$$

$$A^{-1}=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність знаходження оберненої матриці шляхом перевірки виконання рівності $AA^{-1}=E$:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}\left(-\frac{1}{34}\right)\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}=$$

$$=-\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -34 & 0 & 0 \\ 0 & -34 & 0 \\ 0 & 0 & -34 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

Перевірка показує , що обернена матриця знайдена вірно :

$$X = A^{-1} \cdot B = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} -7 & -5 & 3 \\ -4 & 2 & -8 \\ 5 & -11 & -7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{34}\begin{pmatrix} 21-55+0 \\ 12+22+0 \\ -15-121+0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{34}\begin{pmatrix} -34 \\ 34 \\ -136 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

$x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 4$.

Перевірка правильності розв'язку .

Підставимо отриманий розв'язок у систему :

$$\begin{cases} 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 4 = -3 \ ; \\ 2 \cdot 1 - (-1) + 2 \cdot 4 = 11 \ ; \\ -1 + 3 \cdot (-1) + 4 = 0 \ . \end{cases}$$

Система розв'язана вірно .

Відповідь : $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$.

2. Розв'язання системи за формулами Крамера

$\det A = \Delta = -34 \neq 0 \Rightarrow$ існує єдиний розв'язок системи .

Формули Крамера мають вигляд :

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

де Δ_i , $i = \overline{1, 3}$ одержується із визначника Δ системи шляхом заміни i-го стовпця стовпцем вільних членів :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 11 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 & -1 \\ 11 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 11 & -7 \end{vmatrix} = 21 - 55 = -34 \ ;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&-3&-1\\2&11&2\\-1&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-3&2\\2&11&4\\-1&0&0\end{vmatrix}=(-1)\cdot\begin{vmatrix}-3&2\\11&4\end{vmatrix}=-(-12-22)=34\,.$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&2&-3\\2&-1&11\\-1&3&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&11&-3\\2&5&11\\-1&0&0\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}11&-3\\5&11\end{vmatrix}=-(121+15)=-136\,.$$

$$x_1=\frac{\Delta_1}{\Delta}=\frac{-34}{-34}=1\,,\qquad x_2=\frac{\Delta_2}{\Delta}=\frac{34}{-34}=-1\,,\qquad x_3=\frac{\Delta_3}{\Delta}=\frac{-136}{-34}=4\,.$$

3. Розв'язання системи методом Гаусса

Запишемо розширену матрицю системи і приведемо її до трикутного вигляду за допомогою елементарних перетворень матриці, які виконуються над рядками :

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-1&-3\\2&-1&2&11\\-1&3&1&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\2&-1&2&11\\3&2&-1&-3\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&5&4&11\\0&11&2&-3\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&5&4&11\\0&1&-6&-25\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&1&-6&-25\\0&5&4&11\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&1&-6&-25\\0&0&-34&-136\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1&3&1&0\\0&1&-6&-25\\0&0&1&4\end{array}\right).$$

$\mathrm{Rg}\ A=\mathrm{Rg}\ \overline{A}=3=n$, де n – число невідомих .

Система сумісна , має єдиний розв'язок .

Ставимо у відповідність розширеній матриці систему , еквівалентну вихідній , розв'язання якої здійснюємо знизу уверх :

$$\begin{aligned} -x_1+3x_2+\ x_3 &= \ \ 0\ ; \\ x_2-6x_3 &= -25\ ; \\ x_3 &= \ \ 4\ , \end{aligned} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3x_2+x_3=-3+4=1\ ; \\ x_2=-25+6x_3=-25+24\ =-1\ ; \\ x_3=4\ ; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1=\ \ 1\ ; \\ x_2=-1\ ; \\ x_3=\ \ 4\ . \end{cases}$$

Задача 4. Дослідити сумісність системи , і у випадку сумісності знайти загальний розв'язок та один частинний розв'язок системи . Виконати перевірку правильності частинного розв'язку :

$$\begin{cases} x_1+\ x_2-\ 7x_3-2x_4=-1\ ; \\ -x_1+2x_2-\ 5x_3-7x_4=-5\ ; \\ 2x_1+\ x_2-10x_3-\ x_4=\ 0\ ; \\ -3x_1+2x_2+\ x_3-9x_4=-7\ . \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо розширену матрицю системи і за допомогою елементарних перетворень , що виконуються над рядками матриці , приведемо її до східчастого вигляду :

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & -7 & -5 \\ 2 & 1 & -10 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -9 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -12 & -9 & -6 \\ 0 & -1 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -20 & -15 & -10 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -7 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Замітимо, що при приведенні до східчастого вигляду можлива також переміна місцями стовпців, що відповідає перепозначенню змінних .

Отримали :

$\mathrm{Rg}\ A=\mathrm{Rg}\ \overline{A}=r=2<4=n$, n – число змінних . Згідно з теоремою Кронекера - Капеллі система сумісна ; система має безліч ріозв'язків , бо $r<n$. Розв'язання здійснюємо методом Гаусса . Базисні змінні – x_1 , x_2 ; вільні змінні – x_3 , x_4 .

Ставимо у відповідність перетвореній розширеній матриці системи скорочену систему, яку розв'язуємо знизу уверх :

$$\begin{cases} x_1+x_2-7x_3-2x_4=-1\ ; \\ \qquad x_2-4x_3-3x_4=-2\ , \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1+x_2=7x_3+2x_4-1\ ; \\ \qquad x_2=4x_3+3x_4-2\ , \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=-x_2+7x_3+2x_4-1=-4x_3-3x_4+2+7x_3+2x_4-1\ ; \\ x_2=4x_3+3x_4-2\ , \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1=3x_3-x_4+1; \\ x_2=4x_3+3x_4-2, \quad x_3,x_4\in R. \end{cases}$$

Запишемо загальний розв'язок у вигляді

$$X(x_3,x_4)=\begin{pmatrix} 3x_3-\ x_4+1 \\ 4x_3+3x_4-2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix},$$

де $x_3,\ x_4\in R$.

Нехай , наприклад , $x_3=0$, $x_4=0$. Отримаємо частинний розв'язок

$$X(0,0)=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто $x_1=1,\quad x_2=-2,\quad x_3=0,\quad x_4=0$.

Перевірка. Підставимо отриманий частинний розв'язок у систему :

$$\begin{cases} 1-2-0-0=-1\ ; \\ -1-4-0-0=-5\ ; \\ 2-2-0-0=\ \ 0\ ; \\ -3-4+0-0=-7\ . \end{cases}$$

Система розв'язана вірно .

Задача 5. Знайти власні вектори і власні значення матриці A :

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Характеристичне рівняння

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & -1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Розкривши визначник, отримаємо

$$(1-\lambda)((2-\lambda)^2-1)=0 \ ;$$
$$(1-\lambda)\,(1-\lambda)\,(3-\lambda)=0 \ ;$$
$$(1-\lambda)^2\,(3-\lambda)=0 \ ;$$
$$\lambda_1=\lambda_2=1\,, \qquad \lambda_3=3\,.$$

Маємо : корінь $\lambda_1=1$ – кратний , показник кратності $r=2$, корінь $\lambda_3=3$ – простий , $r=1$.

Система рівнянь для визначення власних векторів має вигляд

$$\begin{cases} (2-\lambda)x_1 & & -x_3=0\,; \\ x_1 & +(1-\lambda)x_2 & -x_3=0\,; \\ -x_1 & & +(2-\lambda)x_3=0\,. \end{cases}$$

Підставимо послідовно λ_1 і λ_3 в записану систему .

1. $\lambda_1=1$, $r=2$:

$$\begin{cases} x_1-x_3=0\,; \\ x_1-x_3=0\,; \\ -x_1+x_3=0\,, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1-x_3=0\,, \\ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=x_3\,. \\ \end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків одержується, якщо вільним змінним x_2, x_3 послідовно надати значення $x_2=1$, $x_3=0$. $x_2=0$, $x_3=1$:

$$E_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix};\quad E_2=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Відповідні лінійно незалежні власні вектори

$$\vec{x}^{(1)}=(0,\,1,\,0),\qquad \vec{x}^{(2)}=(1,\,0,\,1).$$

Уся сукупність власних векторів, що відповідають власному значенню λ_1, має вигляд

$$\vec{x}^{(\lambda_1)}=C_1(0,1,0)+C_2(1,0,1),\quad C_1,C_2\in R,\quad |C_1|+|C_2|\neq 0.$$

2. $\lambda_3=3$, $r=1$:

$$\begin{cases}-x_1 \qquad\quad -x_3=0\,;\\ x_1-2x_2-x_3=0\,;\\ -x_1 \qquad\quad -x_3=0\,,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1 \qquad\quad +x_3=0\,;\\ x_1-2x_2-x_3=0\,,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1 \qquad\quad =-x_3\,;\\ x_1-2x_2=\ x_3\,.\end{cases}$$

Фундаментальна система розв'язків одержується, якщо покласти $x_3=1$:

$$\begin{cases}x_1 \qquad\quad =-1\,;\\ x_1-2x_2 \quad =\ 1\,;\\ \qquad\quad x_3=\ 1\,,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-1\,;\\ x_2=-1\,;\\ x_3=\ 1\,.\end{cases}$$

$$E_1=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

Відповідно власний вектор $\vec{x}^{(3)}=(-1,\,-1,\,1)$. Уся сукупність власних векторів, що відповідають власному значенню λ_3, має вигляд

$$\vec{x}^{(\lambda_3)}=C(-1,-1,\,1),\quad C\in R,\quad C\neq 0.$$

ГЛАВА 3. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

3.1. Границя і неперервність функції однієї змінної

[2, гл . 3, § 3.1 - 3.6, 3.8 - 3.10]

Число A називається **границею** функції $f(x)$ у точці a, коли для будь-якого $\varepsilon>0$ знайдеться таке число $\delta>0$, що для всіх x, для яких $0<|x-a|<\delta$, виконується нерівність $|f(x)-A|<\varepsilon$.

У цьому випадку пишуть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Для обчислення границь функцій використовуються наступні формули :

$$\lim_{x\to a} c=c,\quad c=\text{const};$$

$$\lim_{x\to a} cf(x)=c\lim_{x\to a} f(x);$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a}\varphi(x);$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)},\quad \lim_{x\to a}\varphi(x)\neq 0.$$

Означені формули мають місце, якщо $\exists$ скінченні границі $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)$.

Знаходження границь зводиться до застосування вказаних формул та підстановки в отриманий вираз граничного значення аргументу .

Приклад 1. Обчислити $\lim\limits_{x\to 2}(3-x+2x^2)$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to 2}(3-x+2x^2)=\lim_{x\to 2}3-\lim_{x\to 2}x+2\lim_{x\to 2}x^2=3-2+8=9.$$

Тут докладно розписані всі етапи. На практиці все зводиться до безпосередньої підстановки $x=2$ у вираз $(3-x+2x^2)$ і розв'язок має такий вигляд : $\lim\limits_{x\to 2}(3-x+2x^2)=3-2+8=9$.

Однак підстановка граничного значення аргументу часто призводить до невизначеностей вигляду

$$\left\{\frac{0}{0}\right\},\ \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\},\ \{0\cdot\infty\},\ \{\infty-\infty\},\ \{0^0\},\ \{\infty^0\},\ \{1^\infty\}\ .$$

Для розкриття невизначеності спочатку виконують перетворення , і після цього переходять до границі . Покажемо на прикладах деякі прийоми таких перетворень .

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+5x-6}$.

Розвз'язання. Тут не можна застосувати формулу про границю частки , бо границя знаменника дорівнює нулю. Підстановка числа $x=1$ під знак границі призводить до невизначеності типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Розкладемо чисельник і знаменник на множники і скоротимо на $(x-1)$, $(x\neq 1)$:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+5x-6}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+6)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x+6}=\frac{2}{7}\ .$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x}{5x^3+x^2+5}$.

Розв'язання . Тут невизначеність типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. У подібних випадках слід чисельник і знаменник поділити на найвищий степінь x , що входить в них

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x}{5x^3+x^2+5}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{3x}{x^3}}{\dfrac{5x^3}{x^3}+\dfrac{x^2}{x^3}+\dfrac{5}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{3}{x^2}}{5+\dfrac{1}{x}+\dfrac{5}{x^3}}=$$

$$=\frac{2+0}{5+0+0}=\frac{2}{5}\ .$$

Для обчислення границь часто використовують наступні границі , що називають відповідно **першою та другою важливими границями** :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 ,$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e ,$$

або

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e,$$

де e – ірраціональне число, $e=2,718282...$.

Перша важлива границя використовується при розкритті невизначеностей типу $\left\{\frac{0}{0}\right\}$, що містять тригонометричні функції , друга – при розкритті невизначеностей типу $\{1^{\infty}\}$.

Приклад 4. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{2x-1}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x+1}\right)^{2x-1}=\{1^{\infty}\}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x+1+1}{3x+1}\right)^{2x-1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{3x+1}\right)^{3x+1}\right]^{\frac{1}{3x+1}(2x-1)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x-1}{3x+1}}=e^{\frac{2}{3}} .$$

Функція $\alpha(x)$ називається **нескінченно малою** при $x\to a$, якщо $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$.

Нехай $\alpha(x),\beta(x)$ – нескінченно малі при $x\to a$. Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **нескінченно малими одного порядку** та пишуть $\alpha(x)=O(\beta(x))$ при $x\to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають **еквівалентними** і пишуть $\alpha(x)\sim\beta(x)$ при $x\to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, то $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою вищого порядку** відносно $\beta(x)$ та пишуть $\alpha(x)=o(\beta(x))$ при $x\to a$.

Якщо $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\alpha(x)}{(\beta(x))^n}=c\neq 0$, то $\alpha(x)$ називають **нескінченно малою n-го порядку** відносно $\beta(x)$.

Границя відношення двох нескінченно малих функцій не зміниться, якщо ці нескінченно малі замінити еквівалентними . Цей факт широко використовується при обчисленні границь .

Основні еквівалентності : якщо $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, то

$\alpha(x)\sim\sin\alpha(x)\sim \operatorname{tg}\,\alpha(x)\sim\arcsin\,\alpha(x)\sim \operatorname{arctg}\,\alpha(x)\sim\ln(1+\alpha(x))\sim(e^{\alpha(x)}-1)$

Прклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin^2 3x}{\cos 3x-\cos x}$.

Розв'язання. Згідно з відомою тригонометричною формулою $\cos 3x-\cos x=-2\sin 2x\sin x$. Оскільки при $x\to 0$ $\sin x\sim x$, $\sin 2x\sim 2x$ $\arcsin^2 3x\sim(3x)^2$,то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{\cos 3x-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{-2\sin 2x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{-2\cdot 2x\cdot x}=-\frac{9}{4} .$$

Функція називається **неперервною** в точці a , якщо вона визначена в деякому околі точки $x=a$ і $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. Якщо ця умова порушується то функція $f(x)$ називається **розривною** в точці a , а сама точка називається **точкою розриву** .

Якщо існують скінченні границі $f(a+0)$, $f(a-0)$, але $f(a+0)\neq f(a-0)$, точка $x=a$ – **точка розриву першого роду** .

Якщо $f(a+0)=f(a-0)\neq f(a)$, то точка $x=a$ – **точка усувного розриву** .

Якщо хоча б одне із значень $f(a+0)$, $f(a-0)$ нескінченне або не існує, то точка $x=a$ – **точка розриву другого роду**.

Приклад 6. Задана функція $f(x)=\dfrac{1}{5-4x-x^2}$. Дослідити її на неперервність у точках $x_1=-5$; $x_2=1$; $x_3=2$.

Розв'язання.

$$x_1=-5;\quad f(-5-0)=\lim_{x\to -5-0}\frac{1}{5-4x-x^2}=-\infty;$$

$$f(-5+0)=\lim_{x\to -5+0}\frac{1}{5-4x-x^2}=\infty.$$

У точці $x_1=-5$ функція $f(x)$ має розрив другого роду.

$$x_2=1;\quad f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{1}{5-4x-x^2}=\infty;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{1}{5-4x-x^2}=-\infty.$$

У точці $x_2=1$ функція $f(x)$ має розрив другого роду.

$$x_3=2;\quad f(2\pm 0)=\lim_{x\to 2\pm 0}\frac{1}{5-4x-x^2}=\left.\frac{1}{5-4x-x^2}\right|_{x=2}=-\frac{1}{7}.$$

Точка $x_3=2$ – точка неперервності, оскільки $f(2\pm 0)=f(2)$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Дайте означення функції. Що називається областю означення функції?
2. Яка функція називається парною, непарною? Наведіть приклади.
3. Яка функція називається періодичною? Наведіть приклади.
4. Яка функція називається складною? Наведіть приклади.
5. Яка функція називається елементарною? Наведіть приклади.
6. Дайте означення границі функції.
7. Яка функція називається нескінченно малою?
8. Яка функція називається нескінченно великою?
9. Покажіть, що нескінченно малі функції $\sin x$, $\arcsin x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{arctg} x$

еквівалентні при $x \to 0$.

10. Сформулюйте означення неперервності функції в точці і на відрізку. Які точки називаються точками розриву функції ?

11. Яка класифікація точок розриву функції ?

12. Сформулюйте основні властивості функцій , неперервних на відрізку , і дайте геометричне тлумачення цим властивостям .

3.2. Диференціальне числення функцій однієї змінної

[2, гл . 4, § 4.1 – 4.7, 4.9 – 4.14, 4.16]

Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, то ця границя називається **похідною** функції $y = f(x)$ в точці x і позначається $y'(x)$, y'_x , $\dfrac{dy}{dx}$, $f'(x)$.

Отже,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} .$$

Механічний зміст похідної : швидкість V прямолінійного руху точки в момент t є похідна від шляху S за часом t , тобто якщо $S = S(t)$, то $V = S'(t)$.

Геометричний зміст : похідна в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції в точці з абсцисою x_0

Рівняння дотичної до кривої $y = f(x)$ в точці (x_0, y_0) має вигляд $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$.

Рівняння нормалі (перпендикуляра до дотичної в точці дотику) має вигляд $y - y_0 = -\dfrac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Операція знаходження похідної називається **диференціюванням** .

Основні правила диференціювання :

1. $C' = 0$.
2. $(CU)' = CU'$.
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$.

4. $(U \cdot V)' = U'V + UV'$.

5. $$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2} \ .$$

6. $(f(U))'_x = f'_U \ U'_x$.

Тут C – стала, $U = U(x)$, $V = V(x)$.

Основні формули диференціювання :

1. $(U^{\alpha})' = \alpha U^{\alpha-1} \cdot U', \quad \alpha \in R$.

2. $$(\log_a U)' = \frac{U'}{U \ln a} \ .$$

3. $$(\ln U)' = \frac{U'}{U} \ .$$

4. $\left(a^U\right)' = a^U \ln a \cdot U'$.

5. $\left(e^U\right)' = e^U \ U'$.

6. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$.

7. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$.

8. $$(\mathrm{tg} U)' = \frac{1}{\cos^2 U} U' \ .$$

9. $$(\mathrm{ctg} U)' = -\frac{1}{\sin^2 U} U' \ .$$

10. $$(\arcsin U)' = \frac{1}{\sqrt{1-U^2}} U' \ .$$

11. $$(\arccos U)' = -\frac{1}{\sqrt{1-U^2}} U' \ .$$

12. $$(\mathrm{arctg} U)' = \frac{1}{1+U^2} U' \ .$$

13. $$(\mathrm{arcctg} U)' = -\frac{1}{1+U^2} U' \ .$$

14. $(\operatorname{sh} U)' = \operatorname{ch} U \cdot U'$.

15. $(\operatorname{ch} U)' = \operatorname{sh} U \cdot U'$.

16. $(\operatorname{th} U)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 U} U'$.

17. $(\operatorname{cth} U)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 U} U'$.

Тут $U = U(x)$. Якщо $U(x) = x$, то $U'(x) = x' = 1$.

Приклад 1. Знайти похідну функції $y = \cos^2 \ln \dfrac{1}{x}$.

Розв'язання.

$$y' = \left(\cos^2 \ln \frac{1}{x}\right)' = 2\cos \ln \frac{1}{x} \cdot \left(-\sin \ln \frac{1}{x}\right) \cdot x \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x} \sin 2\left(\ln \frac{1}{x}\right) .$$

Якщо функція $y = f(x)$ має обернену $x = \varphi(y)$, то справедлива формула $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$.

Щоб продиференціювати функцію, неявно задану виразом $F(x, y) = 0$, необхідно цей вираз продиференціювати за змінною x вважаючи y функцією від x, і з отриманої рівності знайти y'.

Приклад 2. Знайти y', якщо $x^2 - 3xy^2 + y^2 = 5$.

Розв'язання.

$$2x - 3y^2 - 3x \cdot 2yy' + 2yy' = 0 ; \qquad 2y'(y - 3xy) = 3y^2 - 2x ;$$

$$y' = \frac{3y^2 - 2x}{2y(1 - 3x)} .$$

Інколи, перш ніж диференціювати функцію, слід її прологарифмувати а після цього знайти похідну як від неявної функції.

Приклад 3. Знайти y', якщо $y = x^{\cos 3x}$.

Розв'язання. $\ln y = \cos 3x \ \ln x$; $\qquad \dfrac{y'}{y} = -3\sin 3x \ \ln x + \dfrac{\cos 3x}{x}$;

$$y' = y\left(\frac{\cos 3x}{x} - 3\sin 3x \ln x\right) = x^{\cos 3x}\left(\frac{\cos 3x}{x} - 3\sin 3x \ln x\right).$$

Якщо функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x, тобто має в цій точці скінченну похідну y', то $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = y' + \alpha$, де $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Звідси $\Delta y = y' \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Головна частина приросту функції Δy , лінійна відносно Δx, називається **диференціалом функції** і позначається dy :

$$dy = y' \cdot \Delta x ,$$

або

$$dy = y' dx .$$

Справедлива формула

$$\Delta y \approx dy ,$$

або

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x ,$$

яка застосовується в наближених обчисленнях.

Приклад 4. Знайти dy, якщо $y = x^2 \operatorname{tg} 2x$.

Розв'язання.

$$y' = 2x \operatorname{tg} 2x + \frac{2x^2}{\cos^2 2x} ; \qquad dy = 2\left(x \operatorname{tg} 2x + \frac{x^2}{\cos^2 2x}\right) dx .$$

Якщо функцію задано параметричними рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)\ dt}{x'(t)\ dt} = \frac{y'(t)}{x'(t)} .$$

Приклад 5. Знайти $\dfrac{dy}{dx}$, якщо $\begin{cases} x = 1 - t^2 ; \\ y = t - t^3 . \end{cases}$

Розв'язання. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y'_t}{x'_t} = \dfrac{1-3t^2}{-2t} = -\dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2}t$.

Нехай похідна від функції $f(x)$ є $f'(x)$. Похідна від цієї похідн. називається **похідною другого порядку** від функції $f(x)$ і позначаєтьс

$f''(x)$, або $\dfrac{d^2y}{dx^2}$. Аналогічно визначається **похідна третього порядку**

$f'''(x) = (f''(x))'$ і т. д.

Якщо функцію задано параметрично $\begin{cases} x = x(t) ; \\ y = y(t) , \end{cases}$ похідна другого порядку

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(\dfrac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t} .$$

Приклад 6. Знайти $\dfrac{d^2y}{dx^2}$, якщо $\begin{cases} x = 1 - t^2 ; \\ y = t - t^3 . \end{cases}$

Розв'язання. Використаємо знайдену у прикладі 5 першу похід- $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2}t$. Тоді похідна другого порядку має вигляд

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d\left(-\dfrac{1}{2t} + \dfrac{3}{2}t\right)}{d(1-t^2)} = \frac{\dfrac{1}{2t^2} + \dfrac{3}{2}}{-2t} = -\frac{1}{4t^3} - \frac{3}{4t} .$$

Викладемо метод розкриття невизначеностей за допомогою похідни **Метод** називається **правилом Лопиталя** і полягає в наступному: якщо функ. $f(x)$ і $g(x)$ нескінченно малі або нескінченно великі при $x \to$ диференційовні в околі точки $x = a$, $g'(x) \neq 0$ в околі цієї точки , існ

$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, то існує $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ і справедлива рівність

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Ця теорема справедлива і при $x\to\infty$ та дозволяє розкривати невизначеності типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ і $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Інші типи невизначеностей зводяться до значених , для яких застосовується правило Лопиталя .

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2\ln x}$.

Розв'язання. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2\ln x}=\left\{\dfrac{0}{0}\right\}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x}{2\cdot\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$.

Правило Лопиталя може застосовуватися повторно .

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x}{5x^3+x^2+5}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x}{5x^3+x^2+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{6x^2+3}{15x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{12x}{30x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{12}{30}=\frac{2}{5}.$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Дайте означення похідної . Наведіть її механічний та геометричний зміст .
2. Виведіть формули похідних суми , добутку і частки двох функцій .
3. Виведіть формули диференціювання тригонометричних функцій .
4. Виведіть формули диференціювання степеневої , показникової і складної показникової функцій .
5. Сформулюйте означення диференціала функції .

6. Сформулюйте означення похідної і диференціала вищих порядків
7. Як знаходять похідну функції, заданої неявно?
8. Сформулюйте теорему Ролля. Наведіть її геометричний зміст.
9. Сформулюйте теорему Лагранжа. Наведіть її геометричний зміс

3.3. Дослідження функцій за допомогою похідних

[2, гл. 4 § 4.17 - 4.20, 4.22]

Функція $f(x)$ називається **зростаючою** на інтервалі (a, b), як для $\forall x_1, x_2$ з цього інтервалу, таких, що $x_1 < x_2$, виконується умо.. $f(x_1) < f(x_2)$.

Якщо при $x_1 < x_2$ виконується умова $f(x_1) > f(x_2)$, функ називається **спадною**.

Якщо $f'(x) > 0$ на (a, b), то функція на цьому інтервалі зростає

Якщо $f'(x) < 0$ на (a, b), то функція на цьому інтервалі спадає.

Функція $y = f(x)$ має в точці x_0 екстремум (максимум або мінімум) якщо $f(x_0)$ є найбільшим або найменшим значенням функції в деякому околі цієї точки.

Функція $y = f(x)$ може мати екстремум тільки в точках, де $y' = 0$ нескінченності або не існує. Такі точки називаються критичними. В них дотична або горизонтальна, або вертикальна, або немає певної дотичної

Достатні умови екстремуму полягають у наступному:

Якщо $f(x)$ неперервна в околі критичної точки x_0 і диференційовна в усіх точках цього околу, окрім, можливо, точки x_0, і якщо при перехо x через x_0 похідна змінює знак з «+» на «-», то $f(x_0) = y_{max}$; якщо y' змінює знак з «-» на «+», то $f(x_0) = y_{min}$; якщо y' не змінює знака, екстремуму немає.

Якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого і найменшого значень. Для знаходження цих значень потрібно знайти всі критичні точки на $[a, b]$, обчислити значення $f(x)$ в цих точках і в точках $x = a$, $x = b$ та серед знайдених значень вибра найбільше і найменше.

Приклад 1. Знайти найбільше і найменше значення функції

$$y = x^3 - 9x^2 + 24x - 10, \quad 0 \le x \le 3 .$$

Розв'язання. Знаходимо критичні точки функції :

$$y' = 3x^2 - 18x + 24 = 0 \;; \qquad x_1 = 2 \,, \quad x_2 = 4 \;.$$

Із знайдених точок беремо точку $x = 2$, бо $2 \in [0, 3]$.

Обчислюємо $f(2) = 10,\ f(0) = -10,\ f(3) = 8$. Порівнюємо числа 10, -10, 8 . Знаходимо $\min\limits_{x \in [0,3]} y = f(0) = -10$; $\max\limits_{x \in [0,3]} y = f(2) = 10$.

Крива називається **опуклою (угнутою)** в точці $x = x_0$, якщо в деякому колі цієї точки вона розташована нижче (вище) дотичної в цій точці .

Якщо в точці $x = x_0$:

1) $y'' < 0$, то крива опукла ;

2) $y'' > 0$, то крива вгнута .

Точки , що відділяють опуклу частину графіка від угнутої , називаються **точками перегину** .

Необхідною умовою точки перегину є те, що в ній $y'' = 0$, нескінченна або не існує , а достатньою умовою є те , що y'' в околі цієї точки змінює знак .

Точки , в яких $y'' = 0$, нескінченності або не існує , назвемо **критичними точками другого роду** .

Асимптотою кривої називається пряма , до якої необмежено наближається точка кривої при її віддаленні по кривій в нескінченність .

Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, пряма $x = a$ є вертикальною асимптотою кривої $y = f(x)$.

Якщо $\exists$ скінченні границі $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ і $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (f(x) - kx) = b$, то пряма $y = kx + b$ є похила асимптота .

Якщо $k = 0$, $y = b$ - горизонтальна асимптота .

Для повного дослідження функції і побудови її графіка слід знайти :

1) область означення функції ;

2) точки розриву функції ;
3) симетрію графіка (парність, непарність функції) ;
4) періодичність ;
5) точки перетину графіка з осями координат ;
6) інтервали монотонності і екстремуми ;
7) інтервали опуклості, угнутості і точки перегину ;
8) асимптоти .

Приклад 2. Дослідити функцію $y=\sqrt[3]{6x^2-x^3}$ і побудувати її графі

Розв'язання.

1. Функція визначена для $\forall x$.
2. Функція неперервна на всій числовій осі .
3. Досліджуємо симетрію графіка

$$y(-x)=\sqrt[3]{6(-x)^2-(-x)^3}=\sqrt[3]{6x^2+x^3} \ .$$

Оскільки $y(-x)\neq y(x)$, $y(-x)\neq -y(x)$, функція не є ані парною , ані непарною .

4. Функція неперіодична .
5. Знаходимо точки перетину графіка з осями координат .

Якщо $y=0$, то $6x^2-x^3=0$; $x_1=0$, $x_2=6$. Якщо $x=0$, то $y=0$. Точ (0, 0) і (6, 0) – точки перетину графіка з віссю Ox ; (0, 0) – точка перетин графіка з віссю Oy .

6. Знаходимо y' і визначаємо критичні точки :

$$y'=\frac{12x-3x^2}{3\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}}=\frac{4x-x^2}{\sqrt[3]{(6x^2-x^3)^2}} \ ,$$

$$4x-x^2=0, \quad x(4-x)=0, \quad x_1=0, \quad x_2=4 \ ;$$

$$6x^2-x^3=0, \quad x^2(6-x)=0, \quad x_3=6 \ ,$$

x_1, x_2, x_3 – критичні точки .

Розбиваємо область визначення критичними точками на інтервали і за знаком похідної в цих інтервалах установлюємо інтервали монотонності та екстремуми :

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 4)$	4	$(4; 6)$	6	$(6; +\infty)$
y'	$-$	∞	$+$	0	$-$	∞	$-$
y	$\searrow$	0 min	$\nearrow$	$2\sqrt[3]{4}$ max	$\searrow$	немає екстремуму	$\searrow$

Отже, $y_{\min} = y(0) = 0, \quad y_{\max} = y(4) = 2\sqrt[3]{4}$.

7. Знаходимо y'' :

$$y'' = -\frac{8}{\sqrt[3]{x^4(6-x)^5}} \; ; \qquad y'' \neq 0 \; ;$$

$x^4(6-x)^5 = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 6$ – критичні точки другого роду .

Складаємо таблицю і досліджуємо знак y'' поблизу кожної з означених точок .

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; 6)$	6	$(6; +\infty)$
y''	$-$	∞	$-$	∞	$+$
y	$\cap$	немає точки перегину	$\cap$	точка перегину	$\cup$

Точка (6; 0) є точкою перегину .

8. Визначаємо асимптоти кривої :

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \sqrt[3]{\frac{6}{x} - 1} = -1 \; ;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} (\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x)(\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x^2)}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6x^2 - x^3 + x^3}{\sqrt[3]{(6x^2 - x^3)^2} - x\sqrt[3]{6x^2 - x^3} + x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6\dfrac{x^2}{x^2}}{\sqrt[3]{\dfrac{(6x^2 - x^3)^2}{x^6}} - \dfrac{x\sqrt[3]{6x^2 - x^3}}{x^2} + \dfrac{x^2}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{\dfrac{36x^4 - 12x^5 + x^6}{x^6}} - \sqrt[3]{\dfrac{6x^2}{x^3} - \dfrac{x^3}{x^3}} + 1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{6}{\sqrt[3]{\dfrac{36}{x^2} - \dfrac{12}{x} + 1} - \sqrt[3]{\dfrac{6}{x} - 1} + 1} = \frac{6}{3} = 2$$

Отже , $y = -x + 2$ – похила асимптота .

Будуємо графік (рис. 3.1) :

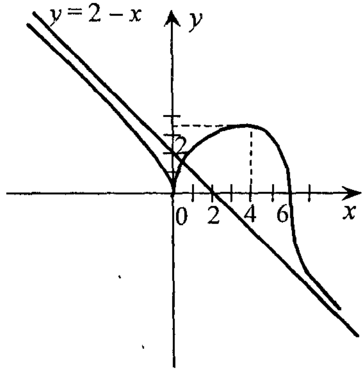

Рис. 3.1

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте означення зростаючої та спадної на інтервалі функції

2. Які точки називаються критичними ?

3. Сформулюйте достатню ознаку існування екстремуму в точці за допомогою першої похідної .

4. Як знаходять інтервали опуклості , точки перегину кривої ?

5. Як знаходять вертикальні та похилі асимптоти ?

6. Викладіть схему загального дослідження функції .

3.4. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

[2 , гл . 8 , § 8.1 - 8.9 , 8.13 , 8.16]

Якщо кожній парі значень $(x, y) \in D$ ставиться у відповідність за деяким законом число z, то кажуть, що на множині D задана функція $z = f(x, y)$.

Рівняння $z = f(x, y)$ геометрично зображує деяку поверхню .

Число A називається **границею функції** $z = f(P)$ при $P \to P_0$, якщо $f(P) - A$ є нескінченно мала величина при будь-якому способі прагнення P до P_0 .

Пишуть : $\lim\limits_{P \to P_0} f(P) = A$.

Якщо задана функція $z = f(x, y)$ і точка $P(x, y) \in D$, то частинні прирости за змінними x , y і повний приріст функції визначаються рівностями

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \quad ;$$

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad ;$$

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \quad .$$

Функція $z = f(x, y)$ називається **неперервною** в точці, якщо $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$.

Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то ця границя називається **частинною похідною** функції $z = f(x, y)$ за змінною x і позначається одним із символів :

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad f'_x(x, y), \quad \frac{\partial f}{\partial x} .$$

Аналогічно визначається частинна похідна за змінною y .

Частинна похідна знаходиться за правилами диференціювання функції однієї змінної , причому інші змінні вважаються в даному випадку сталими .

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції

$$u = x^2 y + 3y^3 z - 4z^3 + 2 \ .$$

Розв'язання. $\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy$; $\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 9y^2 z$; $\frac{\partial u}{\partial z} = 3y^3 - 12z^2$

Якщо функція $z = f(x, y)$ визначена в околі точки $P(x, y)$ і має неперервні частинні похідні z'_x, z'_y в цій точці, то приріст Δz можна записати у вигляді

$$\Delta z = z'_x(x, y)\Delta x + z'_y(x, y)\Delta y + \alpha \Delta x + \beta \Delta y \ ,$$

де $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$ при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Головна, лінійна відносно Δx та Δy частина повного приросту функції $z = f(x, y)$, називається **повним диференціалом** dz цієї функції у точці P :

$$dz = z'_x(x, y)\ \Delta x + z'_y(x, y)\ \Delta y$$

або, приймаючи $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$, маємо

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \ .$$

Функція, що має диференціал у кожній точці деякої області D називається диференційовною в цій області .

Приріст Δz диференційовної функції можна при малих значеннях $|\Delta x|$ і $|\Delta y|$ наближено замінити диференціалом $\Delta z \approx dz$, звідки

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial z}{\partial x}\ dx + \frac{\partial z}{\partial y}\ dy \ .$$

Остання формула застосовується в наближених обчисленнях .

Якщо $z = f(x, y)$ – диференційовна функція аргументів x та y , а $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, то частинні похідні складної функції $z = f(x(u, v),\ y(u, v))$ мають вигляд

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \ .$$

Аналогічно, якщо

$$u=f(x,y,z),\ x=x(t,s,\dots,v),\ y=y(t,s,\dots,v),\ z=z(t,s,\dots,v),$$
то

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial t}$$

і т. д.

Якщо $z=f(x,y),\ x=\varphi(t),\ y=\psi(t)$, то $\dfrac{dz}{dt}=\dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dt}$.

Якщо $z=f(x,y,u,v)$, $y=y(x)$, $u=u(x)$, $v=v(x)$, то

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{dv}{dx}.$$

Остання формула називається формулою **повної похідної**.

Якщо функція $y=f(x)$ задається неявно рівнянням $F(x,y)=0$, то

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{F'_x}{F'_y}.$$

Якщо функція $z=f(x,y)$ задається неявно рівнянням $F(x,y,z)=0$, то її частинні похідні знаходяться за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Приклад 2. Знайти z'_x, z'_y, якщо $z^3+zy^2-x^3=2$.

Розв'язання.

$F(x,y,z)=z^3+zy^2-x^3-2$; $F'_x=-3x^2$; $F'_y=2yz$; $F'_z=3z^2+y^2$.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{3x^2}{3z^2+y^2};\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-2yz}{3z^2+y^2}.$$

Якщо $F(x,y,z)=0$ – рівняння поверхні, то **рівняння дотичної площини** в точці $M(x_0,y_0,z_0)$ і **рівняння нормалі** мають вигляд

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C},$$

де $A=\left.\dfrac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0}$; $B=\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{M_0}$; $C=\left.\dfrac{\partial F}{\partial z}\right|_{M_0}$.

Частинними похідними другого порядку від функції називаються частинні похідні від її перших похідних :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) .$$

Аналогічно визначаються і позначаються похідні більш високих порядків. Похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$ називаються мішаними похідними

Мішані похідні , що відрізняються порядком диференціювання , рівні між собою за умови їх неперервності .

Диференціали вищих порядків визначаються за формулами

$$d^2z=d(dz)\,, \qquad d^3z=d(d^2z)$$

і т. д.

Похідна $\dfrac{\partial u}{\partial l}$ функції $u=u(x,\,y,\,z)$ **за напрямом** l , заданим вектором $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, обчислюється за формулою

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma ,$$

де $\cos\alpha=\dfrac{a_x}{|\vec{a}|}$; $\cos\beta=\dfrac{a_y}{|\vec{a}|}$; $\cos\gamma=\dfrac{a_z}{|\vec{a}|}$.

Величина $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_M$ визначає швидкість зміни функції в точці M , а її знак – зростання або спадання функції .

Градієнт функції $u=u(x,\,y,\,z)$ – це вектор , що визначається формулою

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k} \; .$$

Градієнт є вектором швидкості найскорішої зміни функції .

Приклад 3. Нехай

$$u = x^2 - \frac{3}{2}y^2 + 2z^2x \; ; \quad M(1,-1,\,2) \; ; \quad \vec{a} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k} \; .$$

Знайти : 1) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial l}\right|_M$; 2) $\operatorname{grad} u|_M$.

Розв'язання. 1) Знаходимо похідну за напрямом :

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M = 2x + 2z^2\Big|_M = 10 \; ; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M = -3y\,|_M = 3 \; ; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M = 4zx\,|_M = 8 \; :$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1} = 3; \quad \cos\alpha = \frac{2}{3}\,; \quad \cos\beta = -\frac{2}{3}\,; \quad \cos\gamma = \frac{1}{3};$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M = 10\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 8\cdot\frac{1}{3} = \frac{22}{3} \; .$$

2) Знаходимо градієнт функції в точці M :

$$\operatorname{grad} u\Big|_M = 10\vec{i} + 3\vec{j} + 8\vec{k} \; .$$

Функція $z = f(x,\,y)$ має в точці $M(x_0\,,\,y_0)$ **максимум (мінімум)**, якщо в околі цієї точки для всіх точок $M(x,\,y)$, відмінних від M_0, виконується умова $f(x,\,y) < f(x_0\,,\,y_0)$, $(f(x,y) > f(x_0\,,\,y_0))$.

Диференційовна функція $z = f(x,\,y)$ може мати екстремум у точках, де $f'_x(x,y) = 0$ і $f'_y(x,y) = 0$. Ці точки називаються **стаціонарними** . Кожна стаціонарна точка перевіряється на екстремум за допомогою наступних **достатніх умов** .

Нехай $M_0(x_0\,,\,y_0)$ - стаціонарна точка функції $z = f(x,\,y)$ і

$$A = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_0} ; \quad B = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_0} ; \quad C = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_0} .$$

Тоді, якщо $AC - B^2 > 0$, $A > 0$, то $f(x_0\,,\,y_0) = z_{\min}$;

якщо $AC - B^2 > 0$, $A < 0$, то $f(x_0, y_0) = z_{\max}$;

якщо $AC - B^2 < 0$, то екстремуму немає ;

якщо $AC - B^2 = 0$, то вимагається додаткове дослідження (екстремум може бути , а може його і не бути) .

Приклад 4. Дослідити на екстремум функцію $z = xy(x + y - 2)$.

Розв'язання. Знаходимо частинні похідні заданої функції :

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = y(x + y - 2) + xy = 2xy + y^2 - 2y, \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 2xy - 2x .$$

Прирівнюючи до нуля частинні похідні першого порядку , одержуємо систему рівнянь для визначення стаціонарних точок функції :

$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 2y = 0 ; \\ x^2 + 2xy - 2x = 0 , \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2x + y - 2) = 0 ; \\ x(x + 2y - 2) = 0 . \end{cases}$$

Розв'язуючи останню систему , одержуємо стаціонарні точки $M_1(0, 0)$, $M_2(2, 0)$, $M_3(0, 2)$, $M_4\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Перевіряємо ці точки на екстремум за допомогою достатніх умов . Для цього в кожній стаціонарній точці $M_i(x_i, y_i)$ обчислюємо $\Delta = AC - B^2$, де

$$A = \frac{\partial^2 z(x_i, y_i)}{\partial x^2} ; \quad B = \frac{\partial^2 z(x_i, y_i)}{\partial x \partial y} ; \quad C = \frac{\partial^2 z(x_i, y_i)}{\partial y^2} ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2x + 2y - 2 , \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = 2x .$$

Підставляючи координати точок M_1, M_2, M_3, M_4, обчислюємо для них Δ.

Для точки $M_1(0, 0)$, $A = 0$, $B = -2$, $C = 0$, $\Delta = -4 < 0$, екстремуму немає .

Для точки $M_2(2, 0)$, $A = 0$, $B = 2$, $C = 4$, $\Delta = -4 < 0$, екстремуму немає .

Для точки $M_3(0, 2)$, $A = 4$, $B = 2$, $C = 0$, $\Delta = -4 < 0$, екстремуму немає .

Для точки $M_4\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, $A=\frac{4}{3}$, $B=\frac{2}{3}$, $C=\frac{4}{3}$, $\Delta=\frac{16}{9}-\frac{4}{9}=\frac{4}{3}>0$;
оскільки $\Delta>0$, $A>0$, то маємо точку локального мінімуму функції, в якій

$$z_{\min}=z\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-2\right)=-\frac{8}{27}.$$

Умовним екстремумом функції $f(x,y)$ є екстремум цієї функції при заданому рівнянні зв'язку $\varphi(x,y)=0$.

Для знаходження умовного екстремуму вводиться функція Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y),$$

де λ – множник Лагранжа. Ця функція досліджується на безумовний екстремум.

Необхідні умови умовного екстремуму виражаються системою рівнянь:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial x}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=0;\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}+\lambda\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=0;\\[2mm] \dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=\varphi(x,y)=0,\end{cases}$$

з якої можуть бути знайдені невідомі x_0, y_0, λ_0, де x_0, y_0 – координати точки, в якій можливий умовний екстремум.

Достатні умови умовного екстремуму такі:

$d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)>0 \Rightarrow M_0(x_0,y_0)$ – точка умовного мінімуму;

$d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)<0 \Rightarrow M_0(x_0,y_0)$ – точка умовного максимуму.

Слід мати на увазі, що диференціали змінних dx і dy в $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ залежні і ця залежність диктується рівнянням зв'язку.

Крім того, оскільки λ не є звичайною змінною, то при визначенні знака $d^2L(x_0,y_0,\lambda_0)$ величина $d\lambda$ не враховується, тобто вважається

$$d^2L(x,y,\lambda)=\frac{\partial^2L}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2L}{\partial x\,\partial y}dx\,dy+\frac{\partial^2L}{\partial y^2}dy^2.$$

Приклад 5. Знайти екстремум функції

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

за умови $x+y-1=0$.

Розв'язання. Функція Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x+y-1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda=0 \ ; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda=0 \ ; \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x+y-1=0 \ . \end{cases}$$

Звідки $x=-\dfrac{\lambda}{2}$; $y=-\dfrac{\lambda}{2}$; $\lambda=-1$.

Отже, $x=\dfrac{1}{2}$, $y=\dfrac{1}{2}$, $\lambda=-1$.

Тоді

$$L(x,y,-1)=x^2+y^2-(x+y-1) \ .$$

Позначимо $M_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$. Дослідимо точку M_0 на умовний екстремум :

$$\left.\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}\right|_{M_0}=2 \ ; \qquad \left.\frac{\partial^2 L}{\partial x\,\partial y}\right|_{M_0}=0 \ ; \qquad \left.\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}\right|_{M_0}=2 \ .$$

З рівняння зв'язку маємо, що $dy=-dx$. Тоді

$$d^2L(x,y,-1)\big|_{M_0}=2dx^2+2dy^2=4dx^2>0 \ .$$

Точка $M_0\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ – точка мінімуму вихідної функції ; значення функції в точці мінімуму $f\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$.

Нехай потрібно встановити залежність між двома величинами x і y, якщо задані результати n вимірів x_i, y_i $(i=\overline{1,n})$.

Для розв'язання такої задачі використовується **метод найменших квадратів**. Припускається, що залежність y від x має вигляд

$$y = f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m),$$

де $a_1, a_2, \ldots, a_m$ – параметри, що підлягають визначенню.

За методом найменших квадратів ці значення параметрів $a_1, a_2, \ldots, a_m$ дають мінімум функції

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - f(x_i, a_1, a_2, \ldots, a_m))^2.$$

Якщо функція $f(x, a_1, a_2, \ldots, a_m)$ має неперервні частинні похідні за всіма своїми параметрами, то необхідна умова мінімуму функції S являє собою систему m рівнянь з m невідомими:

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0, \ \ldots, \ \frac{\partial S}{\partial a_m} = 0.$$

Ця система називається **нормальною системою** методу найменших квадратів.

Для функції $y = ax + b$ нормальна система має вигляд

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i; \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + b\cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, знайдемо a і b, а отже, і залежність між x і y у вигляді $y = ax + b$.

Приклад 6. Результати вимірів значення ознаки y при різних значеннях ознаки x наведено в наступній таблиці:

x	1	2	3	4	5
y	3,8	4,8	3,3	1,3	1,8

Припускаючи, що $y = ax + b$, знайти a і b за методом найменших квадратів.

Розв'язання. Складемо систему рівнянь відносно невідомих a і b

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0 ; \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - bn = 0 . \end{cases}$$

У даному випадку $n = 5$.

Обчислюємо суми :

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1\cdot 3{,}8 + 2\cdot 4{,}8 + 3\cdot 3{,}3 + 4\cdot 1{,}3 + 5\cdot 1{,}8 = 37{,}5 ,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1+2+3+4+5 = 15 ,$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 3{,}8 + 4{,}8 + 3{,}3 + 1{,}3 + 1{,}8 = 15 ,$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1+4+9+16+25 = 55 .$$

Підставивши значення в систему рівнянь, отримаємо

$$\begin{cases} 37{,}5 - 55a - 15b = 0 ; \\ 15 - 15a - 5b = 0 , \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11a + 3b = 7{,}5 ; \\ 3a + b = 3 . \end{cases}$$

Розв'язавши систему, знайдемо $a = -0{,}75$; $b = 5{,}25$. Після підстановки a і b в рівняння $y = ax + b$, отримаємо $y = -0{,}75x + 5{,}25$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Що називається функцією двох змінних та її областю визначення ? Який геометричний зміст цих понять ?

2. Що називається границею функції $z = f(x, y)$ в точці ?

3. Як визначається неперервність функції $z = f(x, y)$ в точці ?

4. Визначте частинні похідні функції $z = f(x, y)$.

5. Сформулюйте правило знаходження частинних похідних функції $u = f(x, y, z)$.

6. Дайте означення повного диференціала функції $z = f(x, y)$.

7. Сформулюйте правило диференціювання складної і неявно заданої функцій .

8. Визначіть і вкажіть правила знаходження похідних і диференціалів вищих порядків .

9. Як задається скалярне поле ? Що називається лінією рівня і поверхнею рівня даного поля ?

10. Побудуйте поверхню $z = x^2 + 4y^2$ та її лінії рівня .

11. Як визначається і знаходиться похідна за напрямом ?

12. Що називається градієнтом функції ? Сформулюйте властивості градієнтів . Як зв'язаний градієнт з похідною за напрямом ?

13. Сформулюйте необхідні умови екстремуму функції $z = f(x, y)$.

14. Сформулюйте достатні умови екстремуму функції двох змінних .

3.5. Задачі для практичних занять

У задачах 3.1 – 3.39 знайти границі :

3.1. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+5}{x^2-3}$.

3.2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{x^2-3x+1}{x-4}+1\right)$.

3.3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{1-x}$.

3.4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

3.5. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$.

3.6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(x-1)\sqrt{2-x}}{x^2-1}$.

3.7. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$.

3.8. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$.

3.9. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$.

3.10. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

3.11. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{x^2-1}{2x^2+1}$.

3.12. $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+x-3x^2}{1+x^2+3x^3}$.

3.13. $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

3.14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

3.15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

3.16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x^2}$.

3.17. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

3.18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$.

3.19. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$.

3.20. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

3.21. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

3.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} kx}{x}$

3.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$.

3.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

3.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

3.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

3.27. $\lim\limits_{\alpha\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\alpha^3}$.

3.28. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{1-\sin x}{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2}$.

3.29. $\lim\limits_{\alpha\to\pi}\dfrac{\sin\alpha}{1-\frac{\alpha^2}{\pi^2}}$.

3.30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

3.31. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

3.32. $\lim\limits_{t\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right)^t$.

3.33. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

3.34. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x-1}\right)^x$.

3.35. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x+1}{2x-1}\right)^x$.

3.36. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

3.37. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+kx)}{x}$.

3.38. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$.

3.39. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{e^{3x}-1}$.

3.40. Нехай $f(x)=\begin{cases} x+1\ , & x\le 1\ ; \\ 3-ax^2, & x>1\ . \end{cases}$

За умовою якого вибору числа a функція $f(x)$ буде неперервною? Побудувати її графік.

У задачах 3.41 – 3.44 дослідити, в яких точках і якого роду мають розрив дані функції:

3.41. $y=\dfrac{1}{(x+2)^2}$.

3.42. $y=\dfrac{\sin x}{x}$.

3.43. $y=\dfrac{\cos x}{x}$.

3.44. $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

3.45. Довести, що функції $\sqrt{4-x}-2$ і x є нескінченно малими одного порядку при $x\to 0$.

3.46. Довести еквівалентність нескінченно малих функцій $\ln(1+5x)$ і $e^{5x}-1$ при $x\to 0$.

3.47. Довести рівності при $x\to 0$:

$$x^3\arcsin^2 3x=o(x^3)\ ; \qquad 2x^2+x\,\mathrm{tg}\,2x=o(x)\ .$$

У задачах 3.48 - 3.81 продиференціювати дані функції:

3.48. $y=(x^2-3x+3)(x^2+2x+1)$.

3.49. $y=(x+1)^2(x-1)$.

3.50. $y=\dfrac{x+1}{x-1}$.

3.51. $y=\dfrac{x}{x^2+1}$

3.52. $y=(1-2x^{1/2})^4$.

3.53. $y=\sqrt{1-x^2}$.

3.54. $y=\cos^2 x$.

3.55. $y=3\sin^2 x-\sin^3 x$.

3.56. $y=\sin x^3$.

3.57. $y=\sin(\cos x^2)$.

3.58. $y=4\sin(3x+5)$.

3.59. $y=\sin\sqrt{1+x^2}$.

3.60. $y=(\arcsin x)^2$

3.61. $y=\mathrm{arctg}\, x^2$.

3.62. $y=\mathrm{arctg}^2\dfrac{1}{x}$.

3.63. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

3.64. $y=\ln^2 x$.

3.65. $y=\log_3(x^2-1)$.

3.66. $y=x^2\log_3 x$.

3.67. $y=x\cdot 10^x$.

3.68. $y=x\cdot e^x$.

3.69. $y=e^x\cos x$.

3.70. $y=a^{\sin^3 x}$.

3.71. $y=10^{2x-3}$

3.72. $y=x^3e^{\operatorname{tg}3x}$.

3.73. $y=\operatorname{sh}^3 x$.

3.74. $y=\ln\operatorname{ch}x$.

3.75. $y=e^{\operatorname{ch}^2 x}$.

3.76. $y=x^{x^2}$.

3.77. $y=(\ln x)^x$.

3.78. $y=(\sin x)^{\cos x}$.

3.79. $y=x^3e^{x^2}\sin 2x$.

3.80. $y=\sqrt{x+\sqrt{x}}$.

3.81. $y=\sin^2 x\sin x^3$

У задачах 3.82 - 3.85 знайти похідні від функції y, що задана неявно :

3.82. $x^3+y^3-3axy=0$.

3.83. $y^3-3y+2ax=0$.

3.84. $y=\cos(x+y)$.

3.85. $y=1+xe^y$.

У задачах 3.86 – 3.88 знайти похідні $\dfrac{dy}{dx}$ від функцій , що задані параметрично :

3.86. $\begin{cases} x=1+t^2 \; ; \\ y=t+t^3 \; . \end{cases}$

3.87. $\begin{cases} x=\ln\,(1+t^2) \; ; \\ y=t-\operatorname{arctg}t \; . \end{cases}$

3.88. $\begin{cases} x=\dfrac{3at}{1+t^3} \; ; \\ y=\dfrac{3at^2}{1+t^3} \; . \end{cases}$

У задачах 3.89 – 3.91 знайти диференціал функції :

3.89. $y=1+x-x^2$.

3.90. $y=\operatorname{tg}^2 x$.

3.91. $y=2^{1/\cos x}$.

3.92. $y=(x+10)^6$; $y''=?$

3.93. $f(x)=x^6-4x^3+4$; $f^{4}(1)=?$

3.94. $f(x)=e^{2x-1}$; $f''(0)=?$

3.95. $y=(1+x^2)\operatorname{arctg}x$; $y''=?$

3.96. $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; $\dfrac{d^2y}{dx^2}=?$

3.97. $y=\sin(x+y)$; $y''=?$

3.98. $\begin{cases} x = a\cos t \ ; \\ y = a\sin t \ , \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$ **3.99.** $\begin{cases} x = a\cos^2 t \ ; \\ y = a\sin^2 t \ , \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2} = ?$

3.100. $y = \sqrt[3]{x^2}$; $d^2y = ?$

У задачах 3.101 – 3.109 знайти границю функції, використовуючи правило Лопиталя :

3.101. $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{a}}{\sqrt{x} - \sqrt{a}}$.

3.102. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x}$.

3.103. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x}$.

3.104. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\sin 2x}{\ln\sin x}$.

3.105. $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$.

3.106. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

3.107. $\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{a}{x}$.

3.108. $\lim\limits_{x\to 1} \left[\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right]$.

3.109. $\lim\limits_{x\to 0} (e^x + x)^{\frac{1}{x}}$.

У задачах 3.110 – 3.114 провести повне дослідження функцій і накреслити графіки :

3.110. $y = \frac{x}{1+x^2}$. **3.111.** $y = \frac{1}{1-x^2}$. **3.112.** $y = \frac{x}{x^2 - 1}$.

3.113. $y = (x^2 - 1)^3$. **3.114.** $y = \frac{x}{e^x}$.

3.115. Знайти кутовий коефіцієнт дотичної, проведеної до параболи $y = x^2$: 1) на початку координат ; 2) у точці (3, 9) ; 3) у точці (-2, 4) ; 4) у точках перетину її з прямою $y = 3x - 2$.

3.116. Написати рівняння дотичної і нормалі, проведених до кривої $y = x^3$ у точці з абсцисою 2 .

У задачах 3.117 – 3.121 знайти частинні похідні даних функцій за кожною з незалежних змінних :

3.117. $z=(5x^2y-y^3+7)^3$.

3.118. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

3.119. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

3.120. $z=\ln(x^2+y^2)$.

3.121. $z=e^{-\frac{x}{y}}$.

У задачах 3.122 – 3.125 знайти повні диференціали даних функцій :

3.122. $z=x^2y^4$

3.123. $z=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

3.124. $z=\arcsin\dfrac{x}{y}$.

3.125. $z=\sin(xy)$.

3.126. $u=e^{x-2y}$, $x=\sin t$, $y=t^3$; $\dfrac{du}{dt}=?$

3.127. $u=x^2+y^2+zy$, $y=e^t$, $z=\sin t$; $\dfrac{du}{dt}=?$

3.128. $z=x^2\ln y$, $x=\dfrac{u}{v}$, $y=3u-2v$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

3.129. $z=x^2y-y^2x$, $x=u\cos v$, $y=u\sin v$; $\dfrac{\partial z}{\partial u}=?$ $\dfrac{\partial z}{\partial v}=?$

У задачах 3.130 – 3.133 знайти похідну $\dfrac{dy}{dx}$ від функцій , заданих неявно вказаними рівняннями :

3.130. $x^3y-y^3x=a^4$.

3.131. $x^2y^2-x^4-y^4=a^4$.

3.132. $ye^x+e^y=0$.

3.133. $xy-\ln y=a$.

У задачах 3.134 – 3.137 знайти $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ від даних функцій :

3.134. $z=\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}$.

3.135. $z=\sin^2(ax+by)$.

3.136. $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

3.137. $z=y^{\ln x}$.

У задачах 3.138 – 3.141 знайти точки екстремуму функцій :

3.138. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$.

3.139. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.

3.140. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$.

3.141. $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

У задачах 3.142 – 3.144 знайти умовні екстремуми функцій :

3.142. $z = xy$ при $x + y = 1$.

3.143. $z = x + 2y$ при $x^2 + y^2 = 5$.

3.144. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ при $x + y = 2$.

3.6. Индивідуальне завдання 3

Задача 1. Знайти границі функцій .

Варіанти завдань

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2x^3 - 3x + 1}{4 + 2x^2 - 3x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 5x + 6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x - 4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x^4 - x^2 + 4}{5x^4 + 4x^2 + 1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4x + 3}$;

в) $\lim\limits_{x\to -2} \frac{2 + x}{1 - \sqrt{x + 3}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(a + x) - \sin(a - x)}{x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{7}{x}\right)^{3x}$.

3. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^2 + 5x - 4}{3x^2 - 5x + 1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}$;

4. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^5 + 3x^2 + 5}{x^3 - 1}$,

б) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2 + 3x - 10}{3x^2 - 5x - 2}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x}{1+5x}\right)^{3x}$.

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 4x-1}{x\sin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+6}\right)^{2x}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+3x+6}{10x^3-5x^2+3}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{5x^2+12x+4}$;

в) $\lim\limits_{x\to16}\dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 4x+\sin 2x}{3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+8}{x+4}\right)^{4x}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+7}{3x^5+x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+4}-2}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}^2 7x}{16x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+7x)^{\frac{5}{x}}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{0.01x^3-4x^2+21}{x^4+56x-125}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x-3}{\sqrt{2x+10}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5x^2}{1-\cos 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x}\right)^{3+2x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{2x^5-x^3+4x}{3x^5+x^2+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^3}{x^2-6x+5}$;

в) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 6x+\sin 2x}{5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-7}{x}\right)^{2+5x}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3-5x^2+2x+3}{4x^3+1}$;

10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+5x-2}{x^2+2x+15}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{2-x}}{2x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^3 x}{5x^2\sin 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{3x}\right)^{x}$.

б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{7x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{2x}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4-3x+5}{-0{,}1x^4+2x-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^2-x-2}{x^3+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-2}{3x+1}\right)^{2x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-4x^3}{2+x+x^2+8x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sqrt{x+1}-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{16x^2-13x-3}{2x^2+3x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{3x}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$;

14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-3x^3+12}{2x^5+149}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3-7x}{1-5x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^3-3x^2+x}{x^2-4x+3}$;

в) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 10x}{\cos 2x-1}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5-x}{1-x}\right)^{3x-1}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+5}{7x^3+x^2+4}$;

б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x+6}{x^2-2x-15}$;

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+9}-3}{\sqrt{x^2+25}-5}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+2}{x^3-1}\right)^{2x-x^3}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-x^2-x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+6x)^{\frac{2}{3x}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x^3}{1+3x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$;

в) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x+5}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 9x+\sin 11x}{5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to0}(1+6x)^{\frac{5}{3x}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+4x^2+5x+1}{3x^3-3x+2}$;

б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-9}$;

в) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{x^2-6x+5}$;

г) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos 8x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2}\right)^{x^2+1}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+5}{2x^3-3x+21}$;

б) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{x^2-3x-10}{x^2-25}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$; в) $\lim\limits_{x\to 64}\dfrac{\sqrt{x}-8}{\sqrt[3]{x}-4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1-\operatorname{tg} x}}{\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-3}{x+2}\right)^{x}$. д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2+x}{3+x}\right)^{x}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+17}{24x^3+0{,}24x-17}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+2x}{x^2+5x+6}$;

в) $\lim\limits_{x\to 13}\dfrac{5-\sqrt{x+12}}{x^2-169}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+1}{7x}\right)^{3x+1}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-3x^3+1}{4x^5-x^2+x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-5x+4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{3x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-6}{x+1}\right)^{2x+3}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{0{,}1x^4-x^3+x^2}{2x^5-6x^4+5}$;

б) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$;

в) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg} x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x^2+3}{2x^2+1}\right)^{3x^2}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5+x^2+7}{17+3x^5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x-3}-1}{\sqrt{x+5}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{8x\sin x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x}{1+9x}\right)^{5x}$.

25. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^6-5x^3}{2+7x+8x^6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^3-3x-2}{x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{3x+3}-3}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{7}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x - \sin x}{x(1-\cos 2x)}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{2+x}{3+x}\right)^{6x+11}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2+3}{5x^4-6x+1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^2 4x}{19x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{-2x}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^5-4x^3+1}{0{,}1+6x^2-x^5}$;

б) $\lim\limits_{x\to 2{,}5} \dfrac{2x^2-9x+10}{2x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{5x^2+x^4}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{\cos x}-1}{8x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x+5}{x+7}\right)^{\frac{x}{6}+1}$.

28. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-6x^2+1}{6-7x-8x^3}$;

б) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{5x^2-24x-5}{x-5}$;

в) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{7x^2}{1-\cos 4x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2+5}{x^2-5}\right)^{x^2}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^4-3x^3+2x^2}{1+5x^2-4x^4}$;

б) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$;

в) $\lim\limits_{x\to 10} \dfrac{\sqrt{x-1}-3}{x-10}$;

30. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3-2x^2-1}{8x^2-1}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin x}-\operatorname{ctg}x\right)$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{2+x}\right)^{8x}$.

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^{x-2}$.

31. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x-x^3}{5x^3-6x^2+x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2+2x+1}{x^2+x}$;

в) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{\sqrt{x-2}-2}{x-6}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 10x}{5x^2}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+5}\right)^{\frac{x^2-1}{x}}$.

Задача 2. Продиференціювати задані функції.

У пунктах а), б), в), г), д) знайти похідні $y'=\frac{dy}{dx}$;

у пунктах е), є) знайти $y'=\frac{dy}{dx}$ і $y''=\frac{d^2y}{dx^2}$.

Варіанти завдань

1. а) $y=\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^3$;

б) $y=\frac{\arccos x}{\sqrt{1+2\sin x}}$;

в) $y=\ln(e^{2x}+1)-2\operatorname{arctg}(e^x)$;

г) $y=x^{\sin x}$;

д) $e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$;

е) $y=e^{x^2}$;

є) $\begin{cases} x=2t^2 ; \\ y=3t^3 . \end{cases}$

2. а) $y=(2+x)\sqrt{3-x}$;

б) $y=\ln(\arcsin 5x)$;

д) $xy=\operatorname{arctg}\frac{x}{y}$;

е) $y=(\arcsin x)^2$;

в) $y=\ln(x+\sqrt{4+x^2})$;

г) $y=(\mathrm{arctg}x)^x$;

є) $\begin{cases} x=3\cos t\ ; \\ y=3\sin t\ . \end{cases}$

3. а) $y=\dfrac{\sqrt{2x^2-2x+1}}{x}$;

д) $\ln x+e^{-\frac{y}{x}}=5$;

б) $y=3^{\mathrm{ctg}\frac{1}{x}}$;

е) $y=(1+x^2)\ \mathrm{arctg}\,x$;

в) $y=\arcsin(\ln x)$;

є) $\begin{cases} x=t-\sin t \\ y=1-\cos t \end{cases}$.

г) $y=x^{x^2}$;

4. а) $y=\sqrt[5]{x+\sqrt{x}}$;

д) $3^x+3^y=\sin y$;

б) $y=\arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$;

е) $y=\sqrt{1+x^2}$;

в) $y=\sqrt{\ln x+1}+\ln(\sqrt{x}+1)$;

є) $\begin{cases} x=t-\cos^2 t\ ; \\ y=\sin^2 t\ . \end{cases}$

г) $y=(\arccos x)^{x^3}$;

5. а) $y=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{x^8}{(1-x^2)^4}$;

д) $x=y+\mathrm{arctg}\ y$;

б) $y=\sqrt[4]{1+\cos^2 x}$;

е) $y=\mathrm{tg}\,x$;

в) $y=\ln\dfrac{1+\sqrt{x^2+1}}{x}$;

є) $\begin{cases} x=\ln t\ ; \\ y=t^2-1\ . \end{cases}$

г) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

6. а) $y=x\sqrt{x^2-1}$;

д) $x^3=\dfrac{x-y}{x+y}$;

б) $y=\sin^4 x+\cos^4 x$;

е) $y=x^3e^x$;

в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+2x}{1-2x}}$;

є) $\begin{cases} x=t^3 \; ; \\ y=\ln t^2 \; . \end{cases}$

г) $y=x^{\sqrt{x}}$;

7. а) $y=\left(\dfrac{1+x^2}{1-x}\right)^3$;

д) $e^x+e^y-2^{xy}-1=0$;

б) $y=\sin x\cdot\cos^3 x^2$;

е) $y=e^{-x^2}$;

в) $y=\ln\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$;

є) $\begin{cases} x=t\cos t \; ; \\ y=t\sin t \; . \end{cases}$

г) $y=x^{\frac{1}{\ln x}}$;

8. а) $y=\sqrt{x+2\sqrt{x}}$;

д) $x\sin y+y\sin x=0$;

б) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;

е) $y=\operatorname{ctg}\, x$;

в) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$;

є) $\begin{cases} x=\arcsin t \; ; \\ y=\sqrt{1-t^2} \; . \end{cases}$

г) $y=x^{\ln x}$;

9. а) $y=\dfrac{3}{\sqrt[3]{x}}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$;

д) $x^4+y^4=x^2y^2$;

б) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x^4-1}$;

е) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$;

в) $y=\ln\left(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x}\right)$;

є) $\begin{cases} x=\ln(1+t^2) \; ; \\ y=t^2 \; . \end{cases}$

г) $y=(\ln x)^{\frac{1}{x}}$;

10. а) $y=\left(1-2\sqrt{x}\right)^4$;

д) $3^x+3^y=\cos y$;

б) $y=\sin\sqrt{1+x^2}$;

е) $y=\arccos 2x$;

в) $y = \ln \arccos 2x$;

г) $y = (\sin x)^{\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x = e^{-3t} ; \\ y = e^{3t} . \end{cases}$

11. а) $y = \sqrt[3]{7 + 5x^3}$;

б) $y = \arcsin \dfrac{2}{x}$;

в) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$;

г) $y = (\sin 3x)^{x}$;

д) $y = 5x + \operatorname{arctg} y$;

е) $y = -\dfrac{5}{x+3}$;

є) $\begin{cases} x = \ln t ; \\ y = \dfrac{1}{1-t} . \end{cases}$

12. а) $y = \dfrac{x^3}{3\sqrt{1-x^4}}$;

б) $y = \arcsin \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$;

в) $y = \ln \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{3x}$;

г) $y = x^{\sin^2 x}$;

д) $\sin(xy) + \cos y = 0$;

е) $y = \sqrt{4 - x^2}$;

є) $\begin{cases} x = \operatorname{arctg} t ; \\ y = \dfrac{t^2}{2} . \end{cases}$

13. а) $y = \dfrac{2}{2x-1} - \dfrac{1}{x}$;

б) $y = \sqrt{\operatorname{arctg} x} - \arcsin x$,

в) $y = x^3 \ln x - \dfrac{x^3}{3}$;

г) $y = (2x+1)^{\frac{3}{x}}$;

д) $y^2 = x \sin y$;

е) $y = \sqrt{\operatorname{tg} 3x}$;

є) $\begin{cases} x = \cos 2t ; \\ y = \sin^2 t . \end{cases}$

14. а) $y=\sqrt[5]{\dfrac{x+2}{x-2}}$;

б) $y=\sin^2(x^3)$;

в) $y=\sqrt[3]{\ln^2 x+5}$;

г) $y=(x^2+4)^{\sin x}$;

д) $x\ln y+\dfrac{y^2}{x}=3$;

е) $y=e^{\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x=5t^4+t\ ; \\ y=\ln t\ . \end{cases}$

15. а) $y=\dfrac{1}{10x^5}-\dfrac{1}{4x^4}$;

б) $y=x\arccos x-\sqrt{1-x^2}$;

в) $y=\dfrac{1}{2}\ln \operatorname{tg} x+\ln\cos x$;

г) $y=\left(\dfrac{x}{x+5}\right)^x$;

д) $y\sin y-\cos(x-y)=0$.

е) $y=xe^{x^2}$;

є) $\begin{cases} x=\cos^3 t\ ; \\ y=\sin^3 t\ . \end{cases}$

16. а) $y=\dfrac{1}{x-\sqrt{4+x^2}}$;

б) $y=\operatorname{arctg}^2\dfrac{1}{x}$;

в) $y=\ln^7 \sin 2x$;

г) $y=(\cos x)^{\sin x}$;

д) $x+\sqrt{xy}+y=5$;

е) $y=\dfrac{1}{1+x^3}$;

є) $\begin{cases} x=a(t-\sin t)\ ; \\ y=a(1-\cos t)\ . \end{cases}$

17. а) $y=\dfrac{5}{(x^2-x+1)^4}$;

б) $y=\sin^3(\cos 4x)$;

в) $y=\dfrac{1}{\ln^5 x}$;

г) $y=x^{\sin(x+5)}$;

д) $x^2-2xy+y^3=1$;

е) $y=\dfrac{1}{7+\sqrt{x}}$;

є) $\begin{cases} x=\operatorname{arctg} t\ ; \\ y=\ln(1+t^2)\ . \end{cases}$

18. а) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+7}}{4x}$;

б) $y=\dfrac{\arcsin x}{\arccos x}$;

в) $y=\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x+1}$;

г) $y=(x^2+3)^{5x}$;

д) $x^2+3xy+y^3+1=0$;

е) $y=\sqrt{1-x^2}\arcsin x$;

є) $\begin{cases} x=\ln t\ ; \\ y=t^3\ . \end{cases}$

19. а) $y=\dfrac{3}{x^2(x-2)}$;

б) $y=x\ln\left(2x+\dfrac{1}{2}\right)$;

в) $y=(\arcsin x+2x^2)^7$;

г) $y=(x^2+7)^{\sin x}$;

д) $y^3-3y+10x=0$;

е) $y=\log_7 x$;

є) $\begin{cases} x=2\cos t\ ; \\ y=\sin t\ . \end{cases}$

20. а) $y=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{16}$;

б) $y=\dfrac{\cos x}{\ln\sin x}$;

в) $y=e^{-x^2}\cdot\ln x$;

г) $y=(\cos x)^{\ln x}$;

д) $y=\cos(x+y)$;

е) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$;

є) $\begin{cases} x=\ln t\ ; \\ y=\dfrac{1}{t}\ . \end{cases}$

21. а) $y=x^6\sqrt{4-x^2}$;

б) $y=\sin x\cdot e^{\cos x}$;

в) $y=\ln\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)$;

г) $y=x^{\frac{1}{x}}$;

д) $x-y+7\cos y=0$;

е) $y=e^{\arcsin x}$;

є) $\begin{cases} x=e^{2t}\ ; \\ y=e^{3t}\ . \end{cases}$

22. а) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+1}}$;

б) $y=\dfrac{\ln\sin x}{\ln\cos x}$;

в) $y=\dfrac{2\sin^2 x}{\cos 2x}$;

г) $y=(x^2+2)^{3\cos x}$;

д) $5^x+5^y=5^{x+y}$;

е) $y=\dfrac{x}{x^2-1}$;

є) $\begin{cases} x=e^{-t} ; \\ y=t^3 . \end{cases}$

23. а) $y=\dfrac{x}{7\sqrt{49+x^2}}$;

б) $y=\dfrac{3\cos x}{\sqrt{\cos 2x}}$;

в) $y=\ln\left(3+x+\sqrt{6x+x^2}\right)$;

г) $y=(\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}}$;

д) $xy^2-y\ln x=3$;

е) $y=\sqrt{2x-x^2}$;

є) $\begin{cases} x=\arccos\sqrt{t} ; \\ y=\sqrt{t-t^2} . \end{cases}$

24. а) $y=x^5\cdot\sqrt[3]{x^6-8}$;

б) $y=\sin x\cdot e^{\cos x}$;

в) $y=\ln\left(1+\dfrac{1}{\cos x}\right)$;

г) $y=x^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$;

д) $e^{2x}+e^{3y}=7xy$;

е) $y=\cos e^x+\sin e^x$;

є) $\begin{cases} x=2\cos t ; \\ y=\sin t . \end{cases}$

25. а) $y=\dfrac{5}{\sqrt[5]{x^3}}+\dfrac{\sqrt[3]{x^2}}{7}$;

б) $y=\sqrt{\sin\sqrt{x}}$;

д) $x+y+7\cos y=0$;

е) $y=e^{\arcsin x}$;

в) $y=\log_2(\ln x)$;

г) $y=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$;

є) $\begin{cases} x=e^{2t} ; \\ y=e^{3t} . \end{cases}$

26 а) $y=\dfrac{5+\sqrt{x}}{5-\sqrt{x}}$;

б) $y=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}$;

в) $y=\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+1}\right)$;

г) $y=(\sin x)^{\ln 5x}$;

д) $x+y+e^{y}\cdot\operatorname{arctg} x=0$;

е) $y=e^{\arccos x}$;

є) $\begin{cases} x=\cos 2t ; \\ y=\sin 3t . \end{cases}$

27. а) $y=\dfrac{x^5}{\sqrt{1-8x^4}}$;

б) $y=\sqrt[3]{1+\operatorname{tg}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$;

в) $y=2^{\sqrt{\sin x}}$;

г) $y=x^{\frac{1}{x^2}}$;

д) $(x+y)\cos x+\sin(xy)=0$;

е) $y=\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^8$.

є) $\begin{cases} x=(1+\cos t)t ; \\ y=(1-\cos t)t^2 . \end{cases}$

28. а) $y=\sqrt{x\sqrt{x}}$;

б) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$;

в) $y=\log_5\left(x+\sqrt{x^2+9}\right)$;

г) $y=(x^2+4)^x$;

д) $\sin(x+y)=\cos(x+y)$;

е) $y=\log_7 x$;

є) $\begin{cases} x=\dfrac{1+t^3}{1+t^4} ; \\ y=\dfrac{1-t^3}{1+t^4} . \end{cases}$

29. а) $y=\sqrt[5]{\dfrac{1}{\sqrt{x}+1}}$;

б) $y=\arccos\dfrac{2-x}{x\sqrt{2}}$;

в) $y=\ln\dfrac{x^2}{\sqrt{1-9x^4}}$;

г) $y=(\operatorname{tg}x)^x$;

д) $\operatorname{arctg} y = x + y$;

е) $y=\ln(5x+9)$;

є) $\begin{cases} x=t-\sin t \ ; \\ y=\cos t \ . \end{cases}$

30. а) $y=x\sqrt{1-x^4}$;

б) $y=\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$;

в) $y=\ln^5(1+\cos x)$;

г) $y=x^{\frac{1}{\sin x}}$;

д) $3y^2x=e^{\frac{y}{x}}$;

е) $y=\dfrac{x-3}{x+4}$;

є) $\begin{cases} x=\cos^5 t \ ; \\ y=\sin^5 t \ . \end{cases}$

31. а) $y=x^2\cdot\sqrt[3]{1+x}$;

б) $y=\cos^4(5x+2)$;

в) $y=\dfrac{x}{\sin(x^2+3)}$;

г) $y=(\sin x)^{\frac{1}{x}}$;

д) $5y^3x=\cos(xy)$,

е) $y=\ln(10x+1)$;

є) $\begin{cases} x=t+\sin t \ ; \\ y=-\cos t \ . \end{cases}$

Задача 3. Знайти границі, використовуючи правило Лопиталя .

Варіанти завдань

1. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-x}{x-\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\sin x}$.

2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{3}{4+\ln x}}$.

5 8 651

3. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arcsin x}{\sin^3 x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$.

4. а) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{4}\right)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

5. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\sin x-1}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

7. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\sin 3x}{\ln\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$.

8. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\operatorname{tg}7x}{\ln\operatorname{tg}2x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}$.

9. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg} x)^{2x-\pi}$.

10. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

11. а) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2e^{-x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg} x}$.

12. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$.

13. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-7^x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{1/x}$.

14. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{\operatorname{arctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$.

15. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

16. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

17. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{3x}-3x-1}{\sin^2 5x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 5x)^{\frac{4}{x^2}}$.

18. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{1+2\ln \sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$.

19. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin 7x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}}$.

20. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos ax}{1-\cos bx}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{7}{x-1}}$.

21. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\ln \sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{9}{x^2-1}}$.

22. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\pi-2\operatorname{arctg} x}{e^{3/x}-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

23. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg} \pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

24. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\cos\dfrac{7}{x}\right)^x$.

25. а) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$; б) $\lim\limits_{x\to +0} x^{\frac{6}{1+2\ln x}}$.

26. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$; б) $\lim\limits_{x\to +0} (\operatorname{ctg} 2x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

27. а) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} 3x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

5

28. а) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$; б) $\lim\limits_{x\to 0} (e^{2x}+x)^{1/x}$.

29. а) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x}{\sin \pi x}$; б) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (\pi-2x)^{\cos x}$.

30. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} (x+2^x)^{1/x}$.

31. а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{\operatorname{tg} x}-e^x}{\operatorname{tg} x - x}$; б) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2+5}\right)^x$.

Задача 4. Дослідити функції методами диференціального числення та побудувати їх графіки .

Варіанти завдань

1. а) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$; б) $y=e^{-1/x}$.

2 а) $y=\dfrac{x}{x^2-4}$; б) $y=x-\ln(x+1)$.

3. а) $y=\dfrac{6x^2-x^4}{9}$; б) $y=\ln(x^2+1)$.

4. а) $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$; б) $y=x\sin x$.

5. а) $y=\dfrac{1}{x^2+3}$; б) $y=\ln\sin x$.

6. а) $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$; б) $y=\dfrac{\ln x}{x}$.

7. а) $y=\dfrac{x^4-3}{x}$; б) $y=x^2e^{-x^2}$.

8. а) $y=\dfrac{8}{x^2-4}$; б) $y=x\cdot e^{-x}$.

9. а) $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$; б) $y=x+\dfrac{\ln x}{x}$.

10. а) $y=\dfrac{x}{5+x^2}$; б) $y=x^2e^{-x}$.

11. а) $y=x^2+\dfrac{1}{x^2}$; б) $y=x^3e^{-x}$.

12. а) $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$; б) $y=\dfrac{1}{e^x-1}$.

13. а) $y=(x^2-1)(x-2)$; б) $y=\ln\cos x$.

14. а) $y=\dfrac{1}{x}+4x^2$; б) $y=x+e^{-x}$.

15. а) $y=x+\dfrac{4}{x+2}$; б) $y=e^{\frac{1}{x}}+x$.

16. а) $y=\dfrac{x^4}{x^3-1}$; б) $y=e^{2x-x^2}$.

17. а) $y=\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^4}$; б) $y=\dfrac{x^2}{2\ln x}$.

18. а) $y=\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x^3}$; б) $y=\dfrac{1}{2}x^2-\ln x$.

19. а) $y=2+\dfrac{12}{x^2-4}$; б) $y=x\ln x$.

20. а) $y=(x^2-1)^3$; б) $y=x^2\ln x$.

21. а) $y=2x^4-x^2+1$; б) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

22. а) $y=x^5-x^3-2x$; б) $y=\dfrac{x}{(x-1)^2}$.

23. а) $y=x+\dfrac{x}{3x-1}$; б) $y=1+2x^2-x^4$.

24. а) $y=\dfrac{x+2}{x^3}$; б) $y=x^4-2x^2+3$.

25. а) $y=\dfrac{1-x^3}{x^2}$; б) $y=2x^3+3x^2-5$.

26. а) $y=\dfrac{4+x}{x^2}$; б) $y=2x^3+9x^2+12x$.

27. а) $y=\dfrac{2x^3}{x^2+1}$; б) $y=\dfrac{1}{4}x^4-2x^3+\dfrac{7}{4}$.

28. а) $y=\dfrac{(x+1)^2}{x-2}$; б) $y=\dfrac{2}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-1$.

29. а) $y=16x\,(x-1)^3$; б) $y=\dfrac{x^2}{x-1}$.

30. а) $y=x+\dfrac{4}{x+2}$; б) $y=2-3x^3+x^4$.

31. а) $y=\dfrac{16}{x^2(x-4)}$; б) $y=2x^3-3x^2+1$.

Задача 5. Задано функцію $z=f(x,\,y)$. Показати, що вона задовольняє даному рівнянню; перевірити справедливість рівності $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Варіанти завдань

1. $z=y\ln(x^2-y^2)$; $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$.

2. $z=\dfrac{x^2}{2y}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}$; $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3}{y}$.

3. $z=x\cdot\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z$.

4. $z=\ln(x^2+y^2)$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

5. $z=\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

6. $z=\ln(x^2+xy+y^2)$; $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$.

7. $z = xy + xe^{\frac{y}{x}}$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$.

8. $z = \ln(\sqrt{x} + \sqrt{y})$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}$.

9. $z = \sqrt{x} \cdot \sin\frac{y}{x}$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2}z$.

10. $z = e^{\frac{x}{y^2}}$; $2x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

11. $z = x^y$; $\frac{x}{y}\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{\ln x}\frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

12. $z = e^{\frac{x}{y}} \ln y$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{\ln y}$.

13. $z = \pi\sqrt{\frac{x}{y}}$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$.

14. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = 1$.

15. $z = \frac{xy}{x - y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2}{x - y}$.

16. $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$; $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 1$.

17. $z = e^x \cos y$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

18. $z = e^{xy}$; $x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

19. $z = x \cdot \ln\frac{y}{x}$; $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z$.

20. $z = \ln\frac{x}{y} + x^3 - y^3$; $z\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 3\ (x^3 - y^3)$.

21. $z = x^y$; $\qquad y\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (1 + y\ln x)\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

22. $z = e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{y}{2}\right)$; $\qquad \left(\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \dfrac{1}{2}e^x \sin^2\dfrac{y}{2}$.

23. $z = x^y \cdot y^x$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = (x + x + \ln z)\cdot z$.

24. $z = \dfrac{xy}{x+y}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

25. $z = e^{xy}$; $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2yx\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz = 0$.

26. $z = \dfrac{y}{x}$; $\qquad x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

27. $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$; $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2\dfrac{x+y}{x-y}$.

28. $z = \arcsin\dfrac{x}{x+y}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$.

29. $z = \left(x^2 + y^2\right)\,\mathrm{tg}\dfrac{x}{y}$; $\qquad x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

30. $z = \dfrac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$; $\qquad x^2\dfrac{\partial z}{\partial x} - xy\dfrac{\partial z}{\partial y} + y^2 = 0$.

31. $z = \mathrm{arctg}\dfrac{x+y}{1-xy}$; $\qquad \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

3.7. Зразок виконання індивідуального завдання 3

Задача 1. Знайти границі функцій :

1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3 - 2x + 1}{5 - 6x^2 - x^3}$; $\qquad$ г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x - \cos 4x}{x \cdot \sin x}$;

б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+4x}{x^2-4}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

в) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$;

Розв'язання.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{5-6x^2-x^3}=\left\{\frac{\infty}{\infty}\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{2}{x^3}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{5}{x^3}-\dfrac{6}{x}-1}=-4\ .$$

Маємо невизначеність типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$, бо чисельник і знаменник прагнуть до нескінченності , коли x прямує до нескінченності .

Ділимо чисельник і знаменник на вищий степінь x , одержуємо частку функцій , що мають скінченні границі при $x\to\infty$. Тому застосовуємо до них теореми про границі .

б) $$\lim_{x\to-2}\frac{2x^2+4x}{x^2-4}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to-2}\frac{2x(x+2)}{(x-2)(x+2)}=\lim_{x\to-2}\frac{2x}{(x-2)}=\frac{-4}{-4}=1\ .$$

Тут невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$ одержується за рахунок того , що в чисельнику і знаменнику многочлени обертаються в нуль при $x\to-2$. Розклавши чисельник і знаменник на найпростіші множники і скоротивши на множник $(x+2)$, одержуємо частку "без невизначеності" , до якої застосовуємо теорему про границю частки .

в) Спосіб 1 :

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}\ .$$

Вираз у знаменнику записали у вигляді :

$$(x-9)=(\sqrt{x})^2-3^2=(\sqrt{x}-3)\,(\sqrt{x}+3)\ .$$

Спосіб 2 :

$$\lim_{x\to 9}\frac{\sqrt{x}-3}{x-9}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 9}\frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{(x-9)(\sqrt{x}+3)}=\lim_{x\to 9}\frac{1}{\sqrt{x}+3}=\frac{1}{6}\ .$$

Тут чисельник і знаменник помножили на спряжений чисельнику вираз .

г) $$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x-\cos 4x}{x\sin x}=\left\{\frac{0}{0}\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin 3x\ \sin x}{x\sin x}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x}=2\lim_{x\to 0}\frac{3x}{x}=$$

$=2\cdot 3=6$.

Вираз у чисельнику перетворено відповідно до формул тригонометрії . Далі скористались тим , що $\sin 3x\approx 3x$ при $x\to 0$.

д) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2};$$

при $x\to\infty$ $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\to 1$; $x^2\to\infty$, отже маємо невизначеність типу $\{1^\infty\}$.

Перетворимо вираз, що розташований під знаком границі, так, щоб скористатися другою важливою границею : $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2+2+3}{x^2-2}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x^2-2}\right)^{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x^2-2}\right)^{\frac{x^2-2}{5}}\right]^{\frac{5}{x^2-2}\cdot x^2}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x^2-2}}=e^{5\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{x^2}}}=e^5 .$$

Помітимо , що вираз , який розташований в основі, можна було б перетворити таким чином :

$$\frac{x^2+3}{x^2-2}=1+\frac{x^2+3}{x^2-2}-1=1+\frac{5}{x^2-2}\ .$$

Задача 2. Продиференціювати задані функції . У пунктах а) , б) , в) , г) , д) знайти похідні $y' = \dfrac{dy}{dx}$; у пунктах е) , є) знайти $y' = \dfrac{dy}{dx}$ і $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$:

а) $y = \left(17 + \dfrac{3}{x^4}\right)^{12}$;

б) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

в) $y = 7^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}$;

г) $y = (5x)^{\,x^3}$;

д) $y^5 = \dfrac{x+y}{x-y}$;

е) $y = \ln^2(4x-3)$;

є) $\begin{cases} x = \sin t & ; \\ y = t - \cos t & . \end{cases}$

Розв'язання.

а) Застосовуючи правило диференціювання складної функції , степеневої функції та суми , одержуємо

$$y' = \left(\left(17 + \frac{3}{x^4}\right)^{12}\right)' = ((17+3x^{-4})^{12})' = 12\cdot(17+3x^{-4})^{11}(17+3x^{-4})' =$$

$$= 12\cdot\left(17 + \frac{3}{x^4}\right)^{11} 3\cdot(-4)\,x^{-5} = -\frac{144}{x^5}\cdot\left(17 + \frac{3}{x^4}\right)^{11}.$$

б) Застосовуючи правило диференціювання складної функції та частки , знаходимо

$$y' = \left(\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' = \frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)' =$$

$$= \frac{1+x^2}{1+x^2+x^2}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{1+x^2} - x\cdot\dfrac{1\cdot 2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = \frac{1}{1+2x^2}\cdot\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{(1+2x^2)\sqrt{1+x^2}}.$$

в) Застосовуючи правило диференціювання показникової та складної функцій , маємо

$$y' = \left(7^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}}\right)' = 7^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \ln 7\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}\right)' = 7^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \ln 7 \frac{1}{\cos^2\frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{7^{\operatorname{tg}\frac{1}{x}} \cdot \ln 7}{x^2 \cos^2\frac{1}{x}}.$$

г) Для диференціювання показниково-степеневої функції використовуємо логарифмічне диференціювання . Прологарифмуємо обидві частини вихідного виразу :

$$y = (5x)^{x^3},$$

$$\ln y = x^3 \ln 5x .$$

Беремо від обох частин похідну по x :

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 3x^2 \ln 5x + x^3 \frac{1}{5x} 5 \ ;$$

$$\frac{y'}{y} = 3x^2 \ln 5x + x^2 = x^2(3\ln 5x + 1) \ ;$$

$$y' = y \cdot x^2(3\ln 5x + 1) = (5x)^{x^3} \cdot x^2(3\ln 5x + 1) .$$

д) Для диференціювання функції , заданої неявно , беремо похідні від обох частин по змінній x , вважаючи , що y є функцією від x : $y = y(x)$.

$$y^5 = \frac{x+y}{x-y} \ ;$$

$$5y^4 \cdot y' = \frac{(1+y')(x-y) - (x+y)(1-y')}{(x-y)^2} \ ;$$

$$5y^4 \cdot y' = \frac{x - y + y'x - y'y - x + xy' - y + y'y}{(x-y)^2} \ ;$$

$$5y^4 \cdot y' = \frac{-2y + 2xy'}{(x-y)^2} \ ;$$

Звідси знаходимо

$$5y^4 \cdot y'(x-y)^2 = -2y + 2xy' \ ;$$

$$y'(5y^4(x-y)^2-2x)=-2y\ ;$$

$$y'=\frac{2y}{2x-5y^4(x-y)^2}\ .$$

е) $y'=(\ln^2(4x-3))'=2\ln(4x-3)\dfrac{4}{4x-3}=\dfrac{8\ln(4x-3)}{4x-3}\ .$

$$y''=(y')'=\left(\frac{8\ln(4x-3)}{4x-3}\right)'=8\frac{\frac{1}{4x-3}4(4x-3)-4\ln(4x-3)}{(4x-3)^2}=$$

$$=32\frac{1-\ln(4x-3)}{(4x-3)^2}\ .$$

є) Для функції, що задана параметрично :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y'_t dt}{x'_t dt}=\frac{y'_t}{x'_t}\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t dt}{x'_t dt}=\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)'_t}{x'_t}\ ;$$

$$\begin{cases} x=\sin t & ; \\ y=t-\cos t & ; \end{cases}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d(t-\cos t)}{d(\sin t)}=\frac{1+\sin t}{\cos t}\ ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d\left(\frac{1+\sin t}{\cos t}\right)}{d(\sin t)}=\frac{\frac{\cos t\cdot\cos t+\sin t(1+\sin t)}{\cos^2 t}}{\cos t}=\frac{\cos^2 t+\sin t+\sin^2 t}{\cos^3 t}=$$

$$=\frac{1+\sin t}{\cos^3 t}\ .$$

Задача 3. Знайти границі , використовуючи правило Лопиталя :

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x - x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}(e^x+2x)^{\frac{1}{3x}}$.

Розв'язання.

а) Маємо невизначеність типу $\left\{\dfrac{0}{0}\right\}$. Застосовуючи тричі правило Лопиталя , одержуємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^x}{\sin x - x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cos x-e^x}{\cos x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cos^2 x-e^{\sin x}\sin x-e^x}{-\sin x}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}\cos^3 x+e^{\sin x}2\cos x(-\sin x)-e^{\sin x}\cos x\sin x-e^{\sin x}\cos x-e^x}{-\cos x}=$$

$$=\frac{1+0-0-1-1}{-1}=1 .$$

б) Маємо невизначеність типу $\{\infty^0\}$. Перетворимо вираз, що стоїть під знаком границі , для чого скористаємось основною логарифмічною тотожністю $a^{\log_a b}=b$:

$$(e^x+2x)^{\frac{1}{3x}}=e^{\ln(e^x+2x)^{\frac{1}{3x}}}=e^{\frac{1}{3x}\ln(e^x+2x)} .$$

Отже ,

$$\lim_{x\to +\infty}(e^x+2x)^{\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(e^x+2x)}{3x}} .$$

У виразі $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(e^x+2x)}{3x}$ маємо невизначеність типу $\left\{\dfrac{\infty}{\infty}\right\}$. Застосовуємо правило Лопиталя :

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(e^x+2x)}{3x}=\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{e^x+2x}(e^x+2)}{3}=$$

$$=\frac{1}{3}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x+2}{e^x+2x}=\frac{1}{3}\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{e^x+2}=\frac{1}{3} .$$

Остаточно одержуємо :

$$\lim_{x\to+\infty}(e^x+2x)^{\frac{1}{3x}}=e^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{e}\ .$$

Задача 4. Дослідити задану функцію методами диференціального числення і побудувати її графік :

а) $y=x(x+1)^3$; б) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}$.

Розв'язання. а) Область визначення функції $y=x(x+1)^3$ – вся числова пряма Ox , тобто $x\in\mathrm{R}$.

Функція не є ані парною , ані непарною , тобто

$$y(-x)=-x(-x+1)^3\neq\begin{cases}y(x)\ ;\\-y(x)\ .\end{cases}$$

Для знаходження точок перетину графіка функції з осями координат покладемо $x=0\ \Rightarrow y=0$; $y=0\ \Rightarrow x=0$ і $x=-1$.

Функція неперіодична .

Знаходимо інтервали монотонності функції та екстремуми :

$$y'=(x+1)^3+3x(x+1)^2=(x+1)^2(x+1+3x)=(x+1)^2(4x+1)\ ,$$

$y'=0$ при $x=-1$ і $x=-\dfrac{1}{4}$. Подальше розв'язання можна оформити у вигляді таблиці :

x	$(-\infty;-1)$	-1	$\left(-1;-\frac{1}{4}\right)$	$-\frac{1}{4}$	$\left(-\frac{1}{4};\infty\right)$
y'	–	0	–	0	+
y	$\searrow$	0 екстремуму немає	$\searrow$	$-\frac{27}{256}$ min	$\nearrow$

Знаходимо інтервали вгнутості і опуклості та точки перегину графіка функції :

$$y'' = 2(x+1)(4x+1)+(x+1)^2 4 = 2(x+1)(4x+1+2x+2) = 6(x+1)(2x+1);$$

$y''=0$ при $x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{1}{2}$;

$y''>0$ при $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{2};\infty\right)$, графік функції вгнутий;

$y''<0$ при $x\in\left(-1;-\dfrac{1}{2}\right)$, графік функції опуклий;

точки $x_1=-1,\ x_2=-\dfrac{1}{2}$ є точками перегину.

Асимптоти графіка функції. Вертикальних асимптот немає, бо функція визначена для всіх $x\in\mathrm{R}$. Похилі асимптоти:

$$y=kx+b,\qquad k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x},\qquad b=\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx].$$

У нашому прикладі:

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(x+1)^3}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}(x+1)^3=\pm\infty.$$

Таким чином, похилих асимптот немає. Будуємо графік функції (рис. 3.2).

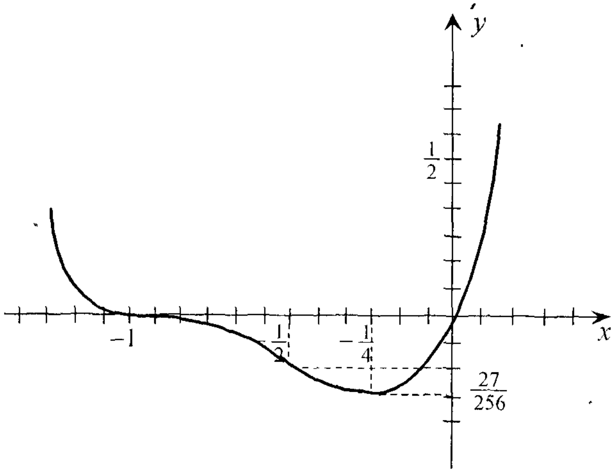

Рис 3.2

б) Область визначення функції $y=\frac{x^2}{\ln x}$: $x\in(0\,;1)\cup(1\,;\,\infty)$.

Функція не є ані парною , ані непарною .

Знаходимо точки перетину графіка функції з осями координат . З віссю Oy графік не перетинається , бо $x\neq0$; з віссю Ox він також не перетинається .

Функція неперіодична .

Знаходимо інтервали монотонності функції і екстремуми :

$$y'=\frac{2x\ln x-x^2\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\frac{2x\ln x-x}{(\ln x)^2}=\frac{x(2\ln x-1)}{(\ln x)^2}\ ;$$

$y'=0$ при $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$, враховуючи область визначення функції . Подальше розв'язання можна оформити у вигляді таблиці :

x	$(0;1)$	1	$(1\,;\sqrt{e})$	$\sqrt{e}$	$(\sqrt{e}\,;\infty)$
y'	$-$	не існує	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	не існує екстремуму немає	$\searrow$	$2e$ min	$\nearrow$

Знаходимо інтервали вгнутості і опуклості та точки перегину графіка функції :

$$y''=\frac{\left[2\left(1\cdot\ln x+x\frac{1}{x}\right)-1\right]\cdot(\ln x)^2-(2x\ln x-x)\,2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{(\ln x)^{4}}=$$

$$=\frac{2x(\ln x+1)(\ln x)^2-2(2x\ln x-x)\ln x}{x(\ln x)^4}=\frac{2\ln x\left[x(\ln x+1)\ln x-(2x\ln x-x)\right]}{x(\ln x)^{4}}=$$

$$=\frac{2\left[x(\ln x)^2+x\ln x-2x\ln x+x\right]}{x(\ln x)^3}=\frac{2x\left[(\ln x)^2-\ln x+1\right]}{x(\ln x)^3}=\frac{2(\ln^2 x-\ln x+1)}{\ln^3 x}\ ;$$

точок перегину немає, бо y'' не обертається в нуль ні за якого значення x: $y''>0$ при $x\in(1;\infty)$, графік функції вгнутий; $y''<0$ при $x\in(0;1)$, графік функції опуклий.

Знаходимо асимптоти графіка функції. Оскільки $\lim\limits_{x\to 1+0} y=+\infty$, $\lim\limits_{x\to 1-0} y=-\infty$, то $x=1$ – вертикальна асимптота. Знаходимо похилі асимптоти: $y=kx+b$, де $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)-kx]$.

Маємо

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty .$$

Таким чином, похилих асимптот немає.

Будуємо графік функції з урахуванням того, що $y\to 0$ при $x\to +0$ (рис.3.3).

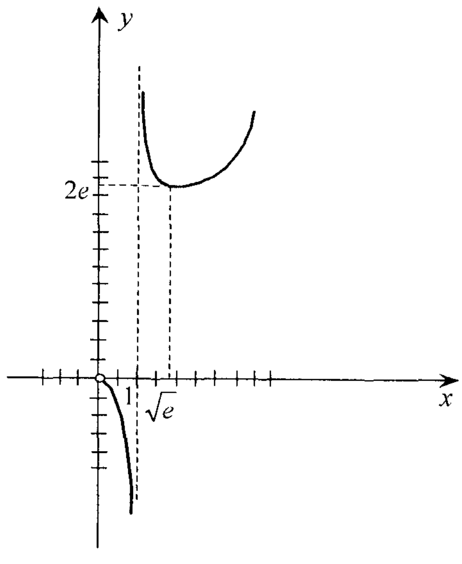

Рис. 3.3

Задача 5. Задано функцію $z=\sin^2(x-\alpha y)$. Показати, що вона задовольняє рівнянню $\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; перевірити справедливість рівності

$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$.

Розв'язання.

Знаходимо частинні похідні функції $z=\sin^2(x-\alpha y)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2\sin(x-\alpha y)\cos(x-\alpha y)=\sin(2x-2\alpha y)\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\cos(2x-2\alpha y)\cdot 2=2\cos(2x-2\alpha y)\ ;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2\sin(x-\alpha y)\cos(x-\alpha y)(-\alpha)=-\alpha\sin(2x-2\alpha y)\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\alpha\cos(2x-2\alpha y)(-2\alpha)=2\alpha^2\cos(2x-2\alpha y)\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\cos(2x-2\alpha y)(-2\alpha)=-2\alpha\cos(2x-2\alpha y)\ ;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\alpha\cos(2x-2\alpha y)\cdot 2=-2\alpha\cos(2x-2\alpha y)\ .$$

Звідси видно, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, а також, що $\alpha^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, тобто функція $z(x,y)$ дійсно задовольняє даному рівнянню.

4.1. Невизначений інтеграл

[2 , гл . 5 , § 5.1 – 5.17]

Функція $F(x)$ називається **первісною** функції $f(x)$ на інтервалі (a, b) , якщо $F'(x) = f(x)$, $x \in (a, b)$.

Якщо $f(x)$ має дві первісні , вони відрізняються на сталу . Іншими словами , якщо $F'(x) = f(x)$ і $\Phi'(x) = f(x)$, то $F(x) = \Phi(x) + C$, $C = \text{const}$. Звідси випливає , що існування однієї первісної $F(x)$ для $f(x)$ тягне за собою існування безлічі первісних для $f(x)$ вигляду $F(x) + C$.

Сукупність усіх первісних для функції $f(x)$ на інтервалі (a, b) називається **невизначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на цьому інтервалі і позначається $\int f(x)\, dx$.

Таким чином , $\int f(x)\, dx = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x\, dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$.

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$.

13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $a \neq 0$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

15. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

18. $\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln|\cos x| + C$.

19. $\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln|\sin x| + C$.

20. $\int \operatorname{sh} x \, dx = \operatorname{ch} x + C$.

21. $\int \operatorname{ch} x \, dx = \operatorname{sh} x + C$.

22. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

23. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Властивості невизначеного інтеграла :

1^0. $\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x)$.

2^0. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

3^0. $\int[\alpha f(x)+\beta g(x)]\,dx = \alpha\int f(x)\,dx + \beta\int g(x)\,dx$, $\alpha = \text{const}$ і $\beta = \text{const}$ (ця властивість називається властивістю лінійності інтеграла) .

4^0. Якщо $\int f(x)\,dx = F(x)+C$ та $u=\varphi(x)$, то

$$\int f(u)\,du = F(u)+C .$$

Властивість 4^0 означає , що вигляд формули інтегрування не залежить від того , чи є змінна інтегрування незалежною змінною , чи диференційовною функцією .

Обчислення невизначеного інтеграла за допомогою таблиці основних інтегралів та його властивостей називають **безпосереднім інтегруванням** .

Приклад 1. Знайти інтеграли :

а) $\int\frac{3x^3-\sqrt{x}+1}{x}\,dx$; б) $\int\frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}\,dx$; в) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx$.

Розв'язання .

а) $\int\frac{3x^3-\sqrt{x}+1}{x}\,dx = 3\int x^2\,dx - \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx + \int\frac{dx}{x} = x^3 - 2\sqrt{x} + \ln|x| + C$;

б) $\int\frac{(1+2x^2)}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int\frac{(1+x^2)+x^2}{x^2(1+x^2)}\,dx = \int\frac{dx}{x^2} + \int\frac{dx}{1+x^2} = -\frac{1}{x} + \operatorname{arctg} x + C$;

в) $\int\frac{1}{\sin^2 x\cos^2 x}\,dx = \int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}\,dx = \int\frac{1}{\cos^2 x}\,dx + \int\frac{1}{\sin^2 x}\,dx =$

$= \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C$.

Приклад 2. Знайти інтеграли, використовуючи властивість 4^0 про незалежність вигляду формули інтегрування від характеру змінної інтегрування (**метод підведення під знак диференціала**) :

а) $\int \cos(3x+2)\,dx$; б) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\,dx$; в) $\int \frac{x^3+x}{(x^4+2x^2+1)^2}\,dx$.

Розв'язання .

а) $\int \cos(3x+2)\,dx = \frac{1}{3}\int \cos(3x+2)\,d(3x+2) = \frac{1}{3}\sin(3x+2)+C$;

б) $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2}\,dx = \int (\operatorname{arctg} x)^2\,d(\operatorname{arctg} x) = \frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3}+C$;

в) $\int \frac{x^3+x}{(x^4+2x^2+1)^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{d(x^4+2x^2+1)}{(x^4+2x^2+1)^2} = -\frac{1}{4(x^4+2x^2+1)}+C$.

Основними методами інтегрування є інтегрування частинами і заміна змінної .

Метод інтегрування частинами полягає в наступному . Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – диференційовні функції , то має місце формула інтегрування частинами :

$$\int u\,dv = u\cdot v - \int v\,du .$$

Приклад 3. Знайти $I = \int x\sin x\,dx$.

Розв'язання .

$$I = \int x\sin x\,dx = \begin{vmatrix} u = x, & dv = \sin x\,dx \\ du = dx, & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x + \int \cos x\,dx =$$

$= -x\cos x + \sin x + C$.

Якщо підінтегральна функція має вигляд

$$P_n(x)\cos\alpha x, \quad P_n(x)\sin\alpha x, \quad P_n(x)\cdot e^{\alpha x},$$

то за u приймають многочлен $P_n(x)$.

Якщо підінтегральна функція є добутком логарифмічної або оберненої тригонометричної функції та многочлена , то за u приймають ці функції .

Метод заміни змінної полягає в тому , що якщо функція $f(x)$ неперервна , то вважаючи $x=\varphi(t)$, де $\varphi(t)$ та $\varphi'(t)$ неперервні , одержуємо

$$\int f(x)\,dx=\int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,.$$

Приклад 4. Знайти $I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

Розв'язання .

$$I=\int\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=\left|\begin{array}{l}x=t^2\\ dx=2t\cdot dt\end{array}\right|=\int\frac{2t\cdot dt}{(1+t^2)t}=$$

$$=2\int\frac{dt}{1+t^2}=2\,\mathrm{arctg}\,t+c=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{x}+C\,.$$

Похідні елементарних функцій легко обчислюються за допомогою деяких простих правил , тобто диференціювання виконується майже автоматично . Інакше з інтегруванням: тут зустрічаються з різноманітними , інколи штучними , прийомами , причому в багатьох випадках не відразу видно , який прийом приведе до мети . Крім того , важливим є той факт , що інтеграли , хоча вони й існують , далеко не для всіх елементарних функцій можуть бути виражені у вигляді скінченної комбінації елементарних функцій , наприклад :

$\int\frac{\sin x}{x}\,dx$, $\int\cos x^2\,dx$, $\int e^{-x^2}dx$ та інші . Такі інтеграли називаються неелементарними або спеціальними функціями . Тому для оволодіння технікою інтегрування важливо розрізняти класи елементарних функцій , первісні яких є також елементарні функції , а відповідний процес інтегрування виконується згідно зі стандартними правилами .

4.1.1. Інтегрування раціональних дробів

Функція $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ називається раціональним дробом , якщо $P_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени відповідно степенів m та n (з дійсними коефіцієнтами) . Якщо $m<n$, то дріб називається правильним , у протилежному випадку – неправильним .

Шляхом виділення цілої частини неправильного дробу задача інтегрування зводиться до знаходження первісної правильного дробу . Будь-який правильний раціональний дріб можна розкласти в суму найпростіших дробів вигляду

$$\frac{A}{x-a}\,,\quad \frac{A}{(x-a)^k}\,,\quad \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,,\quad \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}\,,$$

де $k=2,3,\ldots$; A, B, a, p, q – сталі , причому $p^2-4q<0$.

Це розкладання здійснюється слідуючим чином . Нехай знаменник

$$Q_n(x)=b_nx^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_1x+b_0$$

має дійсні корені a_1 , $a_2,\ldots,a_k$ кратностей $s_1, s_2,\ldots, s_k$ та комплексно-спряжені пари коренів $\beta_1, \overline{\beta_1},\ldots,\beta_\ell,\overline{\beta_\ell}$ кратностей $t_1, t_2,\ldots,t_\ell$.

Тоді $Q_n(x)$ має вигляд :

$$Q_n(x)=b_n(x-a_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(x-a_k)^{s_k}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}\cdot\ldots\cdot(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{t_\ell}\,,$$

де $s_1+s_2+\ldots+s_k+2(t_1+t_2+\ldots+t_\ell)=n$,

$$x^2+p_\gamma x+q_\gamma=(x-\beta_\gamma)(x-\overline{\beta_\gamma})\,,\quad \gamma=\overline{1,\ell}\,.$$

Тоді розкладання дробу $\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ на суму найпростіших дробів отримує вигляд :

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}=\frac{A_1}{(x-a_1)^{s_1}}+\frac{A_2}{(x-a_1)^{s_1-1}}+\ldots+\frac{A_{s_1}}{x-a_1}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+\frac{B_1}{(x-a_k)^{s_k}}+\frac{B_2}{(x-a_k)^{s_k-1}}+\ldots+\frac{B_{s_k}}{x-a_k}+$$

$$+\frac{C_1x+D_1}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1}}+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+p_1x+q_1)^{t_1-1}}+\ldots+\frac{C_{t_1}x+D_{t_1}}{x^2+p_1x+q_1}+$$

$$+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+$$

$$+\frac{M_1x+N_1}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{t_\ell}}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+p_\ell x+q_\ell)^{t_\ell-1}}+\ldots+\frac{M_{t_\ell}x+N_{t_\ell}}{x^2+p_\ell x+q_\ell}\,.$$

Коефіцієнти $A_l, ..., B_l,\ C_l,\ D_l, ..., M_l,\ N_l$ знаходяться таким чином. Після приведення до загального знаменника правої частини, отримуємо рівність двох многочленів. Із цієї рівності вказані коефіцієнти знаходять або прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах (**метод невизначених коефіцієнтів**); або надаючи x значення коренів знаменника, що особливо зручно у випадку дійсних та різних коренів (**метод задання частинних значень**); або використовуючи обидва методи.

Приклад 5. Обчислити $I = \int \frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} dx$.

Розв'язання. Підінтегральна функція – неправильний дріб, тому, поділивши чисельник на знаменник, запишемо функцію у вигляді (виділення цілої частини)

$$\frac{x^4 - 4x^3 + x^2 + 6x + 1}{x^3 - 5x^2 + 6x} = x + 1 + \frac{1}{x^3 - 5x^2 + 6x} .$$

Розкладемо знаменник на прості множники:

$$x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-2)(x-3).$$

Дріб $\frac{1}{x(x-2)(x-3)}$ розкладемо на найпростіші (у даному випадку корені знаменника дійсні і різні):

$$\frac{1}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} ,$$

де A, B, C – невизначені доки коефіцієнти.

Звідси $A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2) = 1$.

Використовуючи метод задання частинних значень для знаходження коефіцієнтів A, B, C, маємо:

$$\text{при } x = 0 \qquad 6A = 1 , \qquad A = \frac{1}{6} ;$$

$$\text{при } x = 2 \qquad -2B = 1 , \qquad B = -\frac{1}{2} ;$$

$$\text{при } x = 3 \qquad 3C = 1 , \qquad C = \frac{1}{3} .$$

Повертаючись до вихідного інтеграла , одержуємо

$$I=\int\left[x+1+\frac{1}{6x}-\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{3(x-3)}\right]dx=\frac{(x+1)^2}{2}+\frac{1}{6}\ln|x|-$$

$$-\frac{1}{2}\ln|x-2|+\frac{1}{3}\ln|x-3|+C\ .$$

Істотною є та обставина , що інтегрування широких класів тригонометричних та ірраціональних функцій , як правило , за допомогою спеціальних підстановок зводиться до інтегрування раціональних дробів ("раціоналізація" підінтегральної функції) .

4.1.2. Інтегрування тригонометричних функцій

Тут слід засвоїти прийоми інтегрування функцій вигляду $R(\sin x, \cos x)$, тобто розглянути інтеграли $\int R(\sin x, \cos x)\,dx$, де $R(u, v)$ – раціональна функція двох змінних . Такі інтеграли приводяться до інтегралів від раціональної функції нового аргументу t підстановкою , яку називають універсальною :

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=t,\ \text{тоді}\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt\ .$$

Однак саме внаслідок своєї універсальності ця підстановка часто призводить до складних викладок . Більш зручні , наприклад , наступні підстановки :

а) $t=\cos x$, якщо $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x, \cos x)$;

б) $t=\sin x$, якщо $R(\sin x, -\cos x)=-R(\sin x, \cos x)$;

в) $t=\operatorname{tg} x$, якщо $R(-\sin x, -\cos x)=R(\sin x, \cos x)$.

4.1.3. Інтегрування деяких ірраціональних функцій

1. Інтеграл вигляду

$$\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx \qquad \left(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}\right)$$

раціоналізується підстановкою $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

2. Інтеграл вигляду

$$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$$

виділенням повного квадрата в квадратному тричлені і заміною змінної $u = x + \dfrac{b}{2a}$ приводиться до одного з наступних типів :

а) $\int R\left(u\ ,\ \sqrt{\alpha^2-u^2}\right)du$;

б) $\int R\left(u,\ \sqrt{u^2-\alpha^2}\right)du$;

в) $\int R\left(u\ ,\ \sqrt{u^2+\alpha^2}\right)du$.

Для обчислення останніх інтегралів застосовують тригонометричні підстановки : а) $u = \alpha\sin t$; б) $u = \dfrac{\alpha}{\sin t}$; в) $u = \alpha\ \mathrm{tg}\ t$, що приводять інтеграли до вигляду $\int R(\sin t, \cos t)\,dt$.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Сформулюйте означення первісної функції і невизначеного інтеграла .
2. Напишіть таблицю основних інтегралів .
3. Доведіть основні властивості невизначеного інтеграла .
4. Обчислити $\int(5x+1)^2dx$ двома способами : 1) за допомогою властивості 4^0 інтеграла ; 2) за допомогою властивості 3^0 лінійності інтеграла . Покажіть , що результат один і той же .
5. Виведіть формулу інтегрування частинами в невизначеному інтегралі і вкажіть типи інтегралів , для яких доцільно застосування цієї формули .
6. Виведіть формулу заміни змінної в невизначеному інтегралі .
7. Виведіть формули інтегрування найпростіших дробів .
8. Викладіть способи обчислення інтегралів від тригонометричних функцій .
9. Викладіть способи обчислення інтегралів від деяких ірраціональних функцій .

4.2. Визначений інтеграл

[2 , гл . 6 , § 6.1 – 6.4 , 6.8 – 6.11.; гл . 7 , § 7.1 – 7.3 , 7.5 , 7.7 , 7.8]

Нехай функція $f(x)$ визначена на відрізку $[a, b]$ і нехай $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_i < x_{i+1} < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ - довільне розбиття цього відрізка на n частинних відрізків $[x_{i-1}, x_i]$, $i = \overline{1, n}$. Виберемо на кожному відрізку $[x_{i-1}, x_i]$ довільну точку ξ_i і складемо суму :

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i\,, \text{ де } \Delta x_i = x_i - x_{i-1}\,.$$

Число I_n називається **інтегральною сумою** функції $f(x)$, що відповідає даному розбиттю відрізка $[a, b]$ і вибору точок ξ_i . Позначимо $\lambda = \max \Delta x_i$, $i = \overline{1, n}$.

Означення . Якщо існує границя інтегральної суми I_n при $\lambda \to 0$, яка не залежить від способу розбиття відрізка $[a, b]$, та від вибору точок ξ_i , то ця границя називається **визначеним інтегралом** від функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$ і позначається $\int_a^b f(x)\,dx$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} I_n = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\,.$$

Число a називається нижньою , число b – верхньою межею інтегрування визначеного інтеграла . Якщо інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ існує , то кажуть , що функція $f(x)$ інтегровна на відрізку $[a, b]$. Можна показати , що неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $f(x)$ буде інтегровна .

Геометрична інтерпретація : якщо $f(x) \ge 0$ на проміжку $[a, b]$, то інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ $(a < b)$ являє собою площу криволінійної трапеції –

фігури, обмеженої лінією $y = f(x)$, прямими $x = a$ та $x = b$, віссю Oy.

У загальному випадку визначений інтеграл дорівнює алгебраїчній сумі площ фігур, обмежених лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$, причому площі, розташовані вище осі Ox, входять в цю суму зі знаком «+», а площі, розташовані нижче осі Ox, – зі знаком «–».

Основні властивості визначеного інтегралу:

1^0. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

2^0. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

3^0. Якщо $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[a, b]$, C_1 і C_2 – сталі, то

$$\int_a^b \left[C_1 f(x) + C_2\, g(x)\right] dx = C_1 \int_a^b f(x)\,dx + C_2 \int_a^b g(x)\,dx$$

(властивість лінійності інтеграла).

4^0. Якщо $f(x)$ інтегровна на $[a, c]$ і $[c, b]$, то вона інтегровна також на $[a, b]$, причому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

(властивість адитивності інтеграла).

Зауважимо, що точка c може бути довільно розміщена відносно точок a, b.

5^0. Якщо $m \le f(x) \le M$ на $[a, b]$, то

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

(оцінка визначеного інтеграла).

6^0. Якщо $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то існує така точка $c \in [a, b]$, що

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c)\,(b-a)$$

(теорема про середнє значення). Число $f(c)$ називається середнім значенням функції $f(x)$ на $[a, b]$.

Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$ на $[a, b]$, то має місце **формула Ньютона - Лейбніца** :

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\,.$$

Останню формулу інколи називають основною формулою диференціального та інтегрального числення. Різницю $F(b) - F(a)$ записують також у вигляді $F(x)\Big|_a^b$.

Приклад 1. Обчислити $I = \int_0^1 \frac{8x}{1+x^4}\,dx$.

Розв'язання. Маємо

$$I = 4\int_0^1 \frac{2x\,dx}{1+x^4} = 4\int_0^1 \frac{d(x^2)}{1+(x^2)^2} = 4\operatorname{arctg} x^2 \Big|_0^1 = 4(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = 4\cdot\frac{\pi}{4} = \pi\,.$$

Основними методами обчислення визначеного інтеграла є інтегрування частинами і заміна змінної.

Якщо $u(x)$ і $v(x)$ – неперервні диференційовні функції на відрізку $[a, b]$, справедлива **формула інтегрування частинами** :

$$\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du\,.$$

Заміна змінної у визначеному інтегралі :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt\,,$$

де $x = \varphi(t)$ («підстановка») – функція, неперервна разом зі своєю похідною $\varphi'(t)$ на відрізку $[\alpha, \beta]$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, а $f[\varphi(t)]$ неперервна на $[\alpha, \beta]$.

Істотною є та обставина, що, виконавши заміну змінної у визначеному інтегралі, згодом не повертаються до старої змінної, а знаходять нові межі інтегрування.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx$.

Розв'язання.

$$I = \int\limits_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+1}\, dx = \left| \begin{array}{l} e^x+1=t \\ e^x\, dx = dt \\ x=0, \quad t=2 \\ x=\ln 3, \; t=e^{\ln 3}+1=4 \end{array} \right| = \int\limits_2^4 \frac{dt}{t} = \ln t \,\Big|_2^4 =$$

$$= \ln 4 - \ln 2 = \ln 2 \cdot$$

Звідси можна зробити висновок , що для обчислення визначених інтегралів за допомогою первісних необхідно володіти методами обчислень невизначених інтегралів .

Невласні інтеграли бувають двох типів : а) з нескінченними межами ; б) від необмежених функцій .

Невласний інтеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx$ визначається за допомогою граничного переходу : $\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^{b} f(x)\, dx$. Якщо остання границя існує і є скінченною , невласний інтеграл називається збіжним , у протилежному випадку – розбіжним . Аналогічно визначаються інтеграли $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$.

Якщо $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на розглядуваному проміжку , то , наприклад ,

$$\int\limits_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} \int\limits_a^{b} f(x)\, dx = \lim\limits_{b\to\infty} [F(b)-F(a)] = F(x)\Big|_a^{\infty} .$$

Приклад 3. Обчислити $I = \int\limits_0^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$.

Розв'язання.

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx=\int_0^{\infty}\operatorname{arctg} x\;d(\operatorname{arctg}\,x)=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2 x\,\Big|_0^{\infty}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\lim_{x\to\infty}\operatorname{arctg}^2 x-\operatorname{arctg} 0\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{\pi^2}{8}\,.$$

Схема побудови інтегральних сум для визначеного інтеграла визначає велику різноманітність його застосувань у задачах геометрії та фізики . Наведемо стислий огляд деяких застосувань визначеного інтеграла .

1. Обчислення площ плоских фігур :

а) площу фігури, обмеженої кривими $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$ ($f_1(x)\le f_2(x)$) та прямими $x=a$ і $x=b$, знаходять за формулою

$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,dx\;;$$

б) площа криволінійного сектора , обмеженого кривою $\rho=\rho\,(\varphi)$ і полярними радіусами $\varphi=\alpha$, $\varphi=\beta$, визначається інтегралом

$$S=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta\rho^2\,d\varphi\;;$$

в) якщо крива задана параметричними рівняннями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$, то площа відповідної криволінійної трапеції обчислюється за формулою

$$S=\int_{t_1}^{t_2}y(t)\,x'(t)\,dt\;.$$

2. Довжина l плоскої кривої обчислюється за формулою :

а) в прямокутних координатах $l=\int_a^b ds$, де $ds=\sqrt{1+y'^2}\cdot dx$;

б) в полярних координатах $l=\int_\alpha^\beta ds$, де $ds=\sqrt{\rho^2+\rho_\varphi'^2}\cdot d\varphi$;

в) при параметричному заданні кривої $x=x(t)$, $y=y(t)$, $t_1\le t\le t_2$,

$$l=\int_{t_1}^{t_2} ds\ ,\quad \text{де}\quad ds=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t}\cdot dt\ .$$

3. Якщо дуга плоскої кривої обертається навколо осі абсцис , то площа поверхні обертання обчислюється за формулою

$$P=2\pi\int_a^b y\ ds\ ,$$

де межі інтегрування та диференціал дуги ds визначаються , як і у випадку обчислення довжини дуги .

4. Об'єм тіла , утворений обертанням криволінійної трапеції , обмеженої лініями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$ і $y=0$, навколо осі Ox, обчислюють за формулою

$$V=\pi\int_a^b y^2\ dx\ .$$

Приклад 4. Знайти довжину кардіоїди $\rho=a(1+\cos\varphi)$.

Розв'язання. З огляду на симетричність кривої відносно осі абсцис маємо

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\rho^2+\rho'^2_{\varphi}}\ d\varphi\ ;$$

$$ds=\sqrt{\rho^2+\rho'^2_{\varphi}}\ d\varphi=\sqrt{a^2(1+\cos\varphi)^2+a^2\sin^2\varphi}\ \ d\varphi=$$

$$=a\sqrt{2+2\cos\varphi}\ d\varphi=2a\cos\frac{\varphi}{2}\ d\varphi\ ;$$

$$l=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\varphi}{2}\ d\varphi=\ 8a\sin\frac{\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=8a\ .$$

.За допомогою визначеного інтеграла обчислюють статичні моменти і моменти інерції плоских дуг та фігур , їх координати центра тяжіння , роботу і тиск , шлях , пройдений тілом при заданій швидкості , та інше . При цьому використовують загальну схему побудови визначеного інтеграла і фізичний закон , який описує течію розглядуваного процесу . Наприклад , робота змінної сили $F = f(x)$, діючої в напрямку осі Ox на відрізку $[a, b]$, визначається за формулою $A = \int_a^b f(x)\, dx$; шлях, пройдений тілом за відрізок часу $[t_1, t_2]$ при заданій швидкості $v = v(t)$, буде дорівнювати $S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt$.

Застосування визначеного інтеграла в економіці описано в гл. 5.

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Наведіть задачі, що приводять до поняття визначеного інтеграла; сформулюйте його означення.
2. Сформулюйте і доведіть основні властивості визначеного інтеграла.
3. Доведіть, що коли $f(x)$ – непарна функція, то $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0$, де $f(x)$ – неперервна на відрізку $[-a, a]$.
4. Доведіть, що функція $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ є первісною для неперервної функції $f(x)$.
5. Виведіть формулу Ньютона – Лейбніца для обчислення визначеного інтеграла.
6. Виведіть формулу заміни змінної у визначеному інтегралі.
7. Сформулюйте означення невласного інтеграла з нескінченними межами і інтеграла від необмеженої функції.

4.3. Диференціальні рівняння

[3, гл. 1, §1.1 – 1.4, 1.11, 1.15 – 1.18]

Рівняння вигляду

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

називається **звичайним диференціальним рівнянням**, де F – відома функція; x – незалежна змінна; $y(x)$ – невідома (шукана) функція.

Найвищий порядок похідної функції $y(x)$, що входить у рівняння, називається **порядком диференціального рівняння**. Наприклад, $2y' - x^2 + y - 1 = 0$ – рівняння першого порядку.

Розв'язком диференціального рівняння n-го порядку називається n раз неперервно диференційовна на деякому інтервалі функція $y = \varphi(x)$, яка при підстановці в рівняння замість невідомої функції обертає його в тотожність. Наприклад, розв'язком рівняння $y = y'$ буде функція $y = y(C, x) = Ce^x$, де C – довільна стала, тобто воно має безліч розв'язків.

Загальним розв'язком диференціального рівняння першого порядку $y' = f(x, y)$ в області D називається така функція $y = \varphi(x, C)$, що:

а) вона є розв'язком рівняння для всіх значень сталої C з деякої множини;

б) для будь-якої початкової умови $y(x_0) = y_0$, такої, що точка $(x_0, y_0) \in D$, існує єдине значення $C = C_0$ при якому розв'язок $y = \varphi(x, C)$ задовольняє заданій початковій умові.

Розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$, отриманий з загального $y = \varphi(x, C)$ при $C = C_0$, називається частинним розв'язком.

Задача, в якій вимагається знайти частинний розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$ при початковій умові $y(x_0) = y_0$, називається **задачею Коші**.

Геометрично загальний розв'язок $y = \varphi(x, C)$ визначає на площині сім'ю кривих, що залежить від параметра C. Ці криві називаються **інтегральними**. Зміст задачі Коші полягає в тому, що слід знайти криву, яка проходить через задану точку (x_0, y_0).

Загальний розв'язок диференціального рівняння n-го порядку буде містити n довільних сталих, тобто має вигляд $y = \varphi(x, C_2, C_2, \dots, C_n)$, а для розв'язку задачі Коші враховується n початкових умов.

Наприклад, для рівняння третього порядку, розв'язаного відносно старшої похідної, задача Коші формулюється таким чином: знайти частинний розв'язок рівняння $y''' = f(x, y, y', y'')$, що задовольняє початковим умовам $y(x_0) = y_0 \quad y'(x_0) = y_0' \quad y''(x_0) = y_0''$.

Процес знаходження розв'язків диференціальних рівнянь називається **інтегруванням** диференціальних рівнянь.

Якщо цей процес зводиться до алгебраїчних операцій та обчислення скінченного числа інтегралів і похідних , то кажуть , що рівняння інтегрується в квадратурах або в скінченному вигляді . Класи таких рівнянь надзвичайно вузькі , тому зважаючи на те, що диференціальні рівняння є одним з основних математичних апаратів інженера , провідну роль тут відіграють наближені методи розв'язку диференціальних рівнянь , що інтенсивно розробляються нині .

1. Диференціальні рівняння з **відокремлюваними змінними** – це найпростіші диференціальні рівняння першого порядку , що мають вигляд

$$f_1(x)g_1(y)\,dx+f_2(x)g_2(y)\,dy=0.$$

Якщо жодна з функцій в лівій частині рівняння не дорівнює тотожньо нулю , то , поділивши ліву та праву частини рівняння на $g_1(y)f_2(x)$ і виконавши інтегрування , отримаємо розв'язок

$$\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\,dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}\,dy=0 \ .$$

Останнє співвідношення визначає загальний розв'язок вихідного рівняння .

Приклад 1. Знайти частинний розв'язок диференціального рівняння

$$xy'=\frac{y}{\ln x} \ ,$$

якщо $y(e)=1$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді

$$x\frac{dy}{dx}=\frac{y}{\ln x}$$

і розділимо змінні :

$$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{x\ln x} \ .$$

Проінтегрувавши , отримаємо загальний розв'язок рівняння :

$$\ln\left|\ln x\right|+\ln\left|C\right|=\ln\left|y\right| \ , \qquad y=C\ln x \ .$$

Використавши початкові умови , знайдемо значення сталої :

$$1=C\ln e \ , \qquad C=1 \ .$$

Підставивши C в загальний розв'язок , отримаємо частинний розв'язок

$$y=\ln x \ .$$

2. Однорідним відносно змінних диференціальним рівнянням першого порядку називається рівняння

$$y' = f(x, y) ,$$

де $f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y)$ для будь-якого λ . Поклавши $\lambda = \dfrac{1}{x}$, отримаємо , що $f(x, y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right)$, тому підстановкою

$$y = ux ,$$

де $u = u(x)$, $y' = u'x + u$, вихідне рівняння приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними .

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = x \sin \dfrac{y}{x} + y$.

Розв'язання. Поділивши обидві частини рівняння на x , отримаємо $y' = \sin \dfrac{y}{x} + \dfrac{y}{x}$ – однорідне відносно змінних диференціальне рівняння першого порядку . Після підстановки $y = ux$, $y' = u'x + u$ будемо мати

$$u'x + u = \sin u + u \quad ; \qquad x \frac{du}{dx} = \sin u \ .$$

Розділимо змінні : $\dfrac{du}{\sin u} = \dfrac{dx}{x}$.

Проінтегруємо : $\ln \left| \operatorname{tg} \dfrac{u}{2} \right| = \ln|x| + \ln|C| \Rightarrow \operatorname{tg} \dfrac{u}{2} = Cx$.

Повернемося до вихідної змінної , враховуючи , що $u = \dfrac{y}{x}$, і знайдемо загальний розв'язок : $\operatorname{tg} \dfrac{y}{2x} = Cx$, $y = 2x \operatorname{arctg} Cx$.

3. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та рівняння Бернуллі . Рівняння

$$y' + p(x)y = q(x)$$

називається **лінійним** . Одним із методів інтегрування лінійного рівняння є **метод Бернуллі** . Загальний розв'язок шукають у вигляді добутку двох невідомих функцій $u = u(x)$ і $v = v(x)$, тобто $y = uv$.

Звідси $y' = u'v + uv'$. Вихідне рівняння перетворюється до вигляду

$$u'v + uv' + p(x)uv = q(x) \quad \text{або} \quad u'v + u\,[v' + p(x)v] = q(x) \; .$$

За функцію v беруть будь-яку функцію , що анулює вираз у квадратних дужках , тобто розв'язують рівняння з відокремлюваними змінними :

$$v' + p\,(x)v = 0 \;\Rightarrow\; v = e^{-\int p(x)\,dx}$$

($C = 0$, бо v – будь-який частинний розв'язок останнього рівняння) . Вихідне рівняння приймає після цього вигляд

$$u'v = q(x)$$

або

$$u' = q(x)\,e^{\int p(x)\,dx} \,,$$

звідки $u = \int q(x)\,e^{\int p(x)\,dx}dx + C$.

Остаточно $y = u \cdot v = \left(\int q\,(x)\,e^{\int p(x)\,dx}dx + C \right) e^{-\int p(x)\,dx}$.

При інтегруванні конкретного рівняння останньою формулою, як правило , не користуються , а послідовно виконують усі операції за означеною схемою . За цією ж схемою інтегрують і **рівняння Бернуллі** :

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \qquad (m \neq 0\,,\;\; m \neq 1) \; .$$

4. Лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння

$$y'' + py' + qy = 0 \;,$$

де p , q – дійсні числа . Для його розв'язку складають характеристичне рівняння

$$k^2 + pk + q = 0$$

та знаходять його корені k_1 , k_2 . Загальний розв'язок $y = \varphi\,(x, C_1\,, C_2)$ рівняння має такий вигляд :

а) $y = C_1\,e^{k_1 x} + C_2\,e^{k_2 x}$, якщо корені дійсні та різні ($k_1 \neq k_2$) ;

б) $y = e^{kx}\,(C_1 + C_2\,x)$, якщо корені кратні ($k_1 = k_2 = k$) ;

в) $y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 \cos\beta x)$, якщо корені комплексні ($k_{1,2} = \alpha \pm \beta i$) .

5. Лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами називається рівняння

$$y'' + p\,y' + q\,y = f(x) \ ,$$

де $f(x)$ – задана функція .

Рівняння

$$y'' + p\,y' + q\,y = 0$$

називається відповідним йому однорідним рівнянням .

Структура загального розв'язку неоднорідного рівняння :

$$y = \overline{y} + y^* ,$$

де $\overline{y}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння ; y^* – будь-який частинний розв'язок вихідного неоднорідного рівняння .

Якщо права частина $f(x)$ рівняння має вигляд

$$f(x) = e^{\alpha x}[\,P(x)\cos\beta x + Q(x)\sin\beta x\,] \ ,$$

де α, β – сталі , $P(x)$ і $Q(x)$ - многочлени , найбільший степінь яких дорівнює n , частинний розв'язок y^* можна підібрати за виглядом правої частини .

У цьому випадку

$$y^* = x^r e^{\alpha x}\big[u_n\,(x)\,\cos\beta x + v_n\,(x)\,\sin\beta x\,\big] \ ,$$

де $u_n(x)$, $v_n(x)$ – многочлени степеня n з невизначеними коефіцієнтами ; r - показаник кратності кореня $\alpha \pm i\beta$ в характеристичному рів-нянні ($r = 0$, якщо $\alpha \pm i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння ; $r = 1$, якщо $\alpha \pm i\beta$ є коренем характеристичного рівняння) .

Зокрема , якщо

$$f(x) = P_n(x)e^{\alpha x} \ ,$$

то

$$y^* = x^r R_n\,(x)\,e^{\alpha x} \ ,$$

де $R_n(x)$ – многочлен степеня n з невизначеними поки коефіцієнтами ; r – показник кратності кореня α в характеристичному рівнянні (r може приймати значення 0 , 1 або 2) .

Якщо

$$f(x) = A\cos\beta x + B\sin\beta x \ ,$$

A, B – константи , то

$$y^* = x^r\,(C\cos\beta x + D\sin\beta x)\ ,$$

де C, D – невизначені коефіцієнти ; r – показник кратності кореня $\pm\, i\beta$ в характеристичному рівнянні .

Невизначені коефіцієнти знаходять з системи лінійних алгебраїчних рівнянь , яка отримується з умов рівності коефіцієнтів подібних членів у правій та лівій частинах неоднорідного рівняння після підстановки в нього y^* замість y .

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'' - 5y' + 6y = e^{2x}\,.$$

Розв'язання. Загальний розв'язок має вигляд $y = \bar{y} + y^*$ Знаходимо $\bar{y}$. Характеристичне рівняння $k^2 - 5k + 6 = 0$ має корені $k_1 = 2$, $k_2 = 3$, тоді $\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$.

Знаходимо y^* . Оскільки $f(x) = e^{2x}$ і $\alpha = 2$ збігається з одним із коренів характеристичного рівняння , то $y^* = Axe^{2x}$. Обчислюємо $y^{*\prime}$, $y^{*\prime\prime}$ та підставляємо у вихідне рівняння :

$$y^* = Axe^{2x}\ ;$$

$$y^{*\prime} = Ae^{2x}(1+2x)\ ; \qquad y^{*\prime\prime} = 4Ae^{2x}(1+x)\ ;$$

$$4Ae^{2x}(1+x) - 5Ae^{2x}(1+2x) + 6Axe^{2x} = e^{2x}\ ;$$

$$(-5A + 4A)e^{2x} = e^{2x}.$$

У правій частині коефіцієнт при e^{2x} дорівнює одиниці , у лівій дорівнює $-5A + 4A$, тому $-5A + 4A = 1$, звідки $A = -1$, тобто $y^* = -xe^{2x}$, тоді загальний розв'язок даного рівняння має вигляд

$$y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} - xe^{2x}\,.$$

Наведемо приклад розв'язання задачі геометрії за допомогою диференціальних рівнянь .

Приклад 4. Знайти криві , в яких точка перетину будь-якої дотичної з віссю абсцис має абсцису , що дорівнює $3/4$ абсциси точки дотику .

Розв'язання. Нехай $y = f(x)$ – рівняння шуканої кривої і точка $M(x, y)$ - довільна точка на кривій . Рівняння дотичної до лінії $y = f(x)$ у точці M, як відомо , має вигляд $Y - y = y'(X - x)$, де X, Y – поточні координати точок дотичної . Знаходимо точку перетину дотичної з віссю абсцис , тобто вважаємо $Y = 0$, тоді $X = x - \frac{y}{y'}$. За умовою $X = \frac{3}{4}x$, тому $x - \frac{y}{y'} = \frac{3}{4}x$ або $y' = \frac{4y}{x}$. Для визначення рівняння шуканих кривих отримали рівняння з відокремлюваними змінними . Інтегруючи його , маємо

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4y}{x}; \qquad \frac{dy}{y} = \frac{4dx}{x};$$

$$\ln|y| = 4\ln|x| + \ln|C|;$$

$$\ln|y| = \ln|Cx^4|;$$

$$y = Cx^4 .$$

Слід накреслити графіки кривих , вибравши декілька значень C .

Приклади розв'язання задач економіки за допомогою диференціальних рівнянь розглянуті в главі 5 .

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Наведіть означення загального розв'язку для диференціального рівняння першого порядку . Сформулюйте задачу Коші для цих рівнянь .
2. Сформулюйте теорему існування і єдиності розв'язку задачі Коші для рівнянь першого порядку .
3. Назвіть класи диференціальних рівнянь першого порядку , що інтегруються в квадратурах , і викладіть методи їх розв'язання.
4. Сормулюйте і доведіть основні властивості частинних розв'язків лінійних однорідних диференціальних рівнянь n-го порядку.
5. Виведіть формулу загального розв'язку однорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами для таких випадків : дійсних різних

коренів характеристичного рівняння ; дійсних кратних коренів характеристичного рівняння ; комплексних коренів характеристичного рівняння .

6. Викладіть правило знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами , якщо його права частина $f(x)$ має вигляд $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, де $P_n(x)$ – многочлен n-го степеня ; $f(x)=A\cos\beta x+B\sin\beta x$, де $A,\ B$ – сталі .

4.4. Ряди

[2 , гл . 9 , § 9.1 – 9.12 , 9.14 , гл . 4 , § 4.15 , 4.16]

Вираз $u_1+u_2+u_3+...+u_n+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ називається **числовим рядом** , а числа u_n – членами ряду . Ряд називається **збіжним** , якщо його частинна сума $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}u_i$ при $n\to\infty$ має скінченну границю $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=S$; при цьому величина S називається сумою ряду . Якщо границя $\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ не існує або нескінченна , то ряд називається **розбіжним** .

Необхідна ознака збіжності : якщо ряд збігається , то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

Н а с л і д о к: якщо $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$, то ряд розбігається .

При дослідженні збіжності рядів з додатними членами $(u_n>0)$ використовуються наступні ознаки .

Ознака порівняння : нехай задані два ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ (1) , $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ (2) і нехай кожний член ряду (1) не більше відповідного члена ряду (2) , тобто $u_n\le v_n$. Тоді : а) якщо збігається ряд (2) , то збігається і ряд (1) ; б) якщо розбігається ряд (1) , то розбігається і ряд (2) .

Гранична ознака порівняння: нехай задані два ряди :

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \ (1) \quad \text{і} \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n \ (2) \ , \qquad u_n > 0 \ , \quad v_n > 0 \ ;$$

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = A \qquad (A \neq 0 \ , \ A \neq \infty) \ ,$$

тоді ряди (1) , (2) обидва збігаються, або обидва розбігаються .

Щоб дослідити збіжність заданого ряду за допомогою одної з ознак порівняння , слід підібрати інший відомий ряд , з яким можна було б його порівняти . За відомий розбіжний ряд часто використовують гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. В ролі відомого збіжного ряду для порівняння можна використати нескінченно спадаючу геометричну прогресію – геометричний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a q^{n-1}$ $(a \neq 0, \ |q| < 1)$, або ряд обернених квадратів $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Ознака Даламбера : нехай для знакододатного ряду існує границя $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$. Тоді ряд збігається за умови $l < 1$ і розбігається , якщо $l > 1$. Якщо $l = 1$, питання про збіжність ряду необхідно вирішувати за допомогою інших ознак .

Радикальна ознака Коші : нехай для знакододатного ряду існує $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$. Тоді ряд збігається за умови $l < 1$ і розбігається , якщо $l > 1$; якщо $l = 1$, збіжність ряду встановлюється за допомогою інших ознак .

Інтегральна ознака Коші : якщо для знакододатного ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ функція $f(x) > 0$ неперервна і не зростає на $[1, \infty)$, то інтеграл $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$ та ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ водночас збігаються або розбігаються .

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ називається знакозмінним , якщо серед його членів є як додатні , так і від'ємні .

Достатня ознака збіжності знакозмінного ряду : якщо збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| u_n \right|$, складений із абсолютних величин членів вихідного ряду , то даний ряд також збігається і називається **абсолютно збіжним** .

Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ збігається , а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left| u_n \right|$ розбігається , то вихідний ряд називається **умовно збіжним** .

Частинним випадком знакозмінного ряду є **знакопереміжний ряд** , члени якого строго чергуються за знаком :

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots \qquad (u_n > 0) .$$

Ознака Лейбніца : якщо в знакопереміжному ряді абсолютні величини членів ряду спадають $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n \ \ldots$ та загальний член прагне до нуля $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, то ряд збігається .

Розглянемо приклади дослідження збіжності числових рядів .

Приклад 1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n-1}{2n}$.

Розв'язання. Перевіримо , чи виконується необхідна ознака збіжності :

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n} = 1 \neq 0 \ \Rightarrow$$

ряд розбігається згідно з наслідком з необхідної ознаки .

Приклад 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+10n}$.

Розв'язання. Порівнюючи даний ряд з гармонічним $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, за ознакою порівняння отримаємо $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{1+10n} = \dfrac{1}{10} \neq 0$. Отже , обидва ряди розбігаються .

Приклад 3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

Розв'язання. Запишемо $u_n = \frac{1}{n!}$ і $u_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$, застосуємо ознаку Даламбера :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1 \quad \Rightarrow \text{ряд збігається .}$$

Приклад 4. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$.

Розв'язання. Запишемо $u_n = \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$ і застосуємо радикальну ознаку Коші :

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n-1} = \frac{1}{2} < 1 \quad \Rightarrow \quad \text{ряд збігається .}$$

Приклад 5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4n+1}}$.

Розв'язання. Застосуємо інтегральну ознаку Коші :

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} = \frac{1}{4} \lim_{N\to\infty} \int_1^{N} (4x+1)^{-\frac{1}{2}} d(4x+1) =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{N\to\infty} 2\sqrt{4x+1}\,\Big|_1^N = \frac{1}{2} \lim_{N\to\infty} (\sqrt{4N+1} - \sqrt{5}) = \infty \quad \Rightarrow$$

невласний інтеграл розбігається , і тому вихідний ряд також розбігається .

Приклад 6. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$.

Розв'язання. Оскільки ряд знакопереміжний, то застосуємо ознаку Лейбніца :

а) $1 > \frac{1}{3} > \frac{1}{5} > \ldots > \frac{1}{2n-1} > \ldots$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2n-1} = 0 \quad \Rightarrow$ ряд збігається .

Встановимо тип збіжності, для чого розглянемо

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} ;$$

за ознакою порівняння, порівнюючи з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0 ,$$

отже , обидва ряди розбігаються .

Таким чином , ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$ збігається умовно .

Якщо членами ряду є функції незалежної змінної x , то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ називається **функціональним** . Множина значень змінної x , при яких цей ряд збігається, називається **областю збіжності ряду. Сумою ряду** називається функція $S(x)$, якщо $S(x) = \lim\limits_{n\to\infty} S_n(x)$, де $S_n(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i(x)$, а x належить області збіжності .

У деяких випадках для знаходження області збіжності ряду можна застосувати відомі ознаки збіжності числових рядів (ознака Даламбера або Коші) , вважаючи x фіксованою величиною .

Степеневим рядом називається ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n ,$$

де a, a_n – дійсні числа , a_n – коефіцієнти членів ряду . Зокрема , при $a = 0$ одержуємо степеневий ряд за степенями x :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n .$$

Областю збіжності степенового ряду є інтервал збіжності $|x-a|<R$ з центром у точці $x=a$, "в середині" якого ряд збігається абсолютно; при $|x-a|>R$ ряд розбігається. На кінцях інтервалу збіжності $x=a\pm R$ ряд може або збігатися, або розбігатися; при збіжності відповідна точка включається в область збіжності. Для різних степеневих рядів число R (радіус збіжності) може виявитися рівним нулю, скінченному числу або нескінченності і обчислюється за формулою

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \text{ або } \quad R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

де a_n, a_{n+1} – коефіцієнти при n-му і $(n+1)$-му членах ряду.

Розглянемо приклади на знаходження області збіжності степеневих рядів.

Приклад 7. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{n-1}x^{n-1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^n}{n}$.

Розв'язання. а) Запишемо $a_n=2^{n-1}$, $a_{n+1}=2^n$, тоді

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n}=\frac{1}{2},$$

отже, $|x|<\frac{1}{2}$, або $-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}$ – інтервал збіжності. Досліджуємо збіжність ряду на кінцях знайденого інтервалу збіжності. При $x=-\frac{1}{2}$ отримаємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$, що є розбіжним, а при $x=\frac{1}{2}$ отримаємо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}1$, що також розбігається. Таким чином, область збіжності степеневого ряду має вигляд

$$-\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2}, \quad \text{або} \quad x\in\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).$$

б) Запишемо $a_n = \frac{1}{n}$, $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}$, тоді

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1 ,$$

отже, $-1 < x-2 < 1$, або $1 < x < 3$ – інтервал збіжності . Збіжність ряду на кінцях інтервалу : за умови $x = 1$ отримаємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$, що збігається умовно (ознака Лейбніца) ; при $x = 3$ отримаємо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, що розбігається . Таким чином , область збіжності степеневого ряду , що досліджується , має вигляд

$$1 \le x < 3 \ , \quad \text{або} \quad x \in [1, 3) \ .$$

Степеневий ряд можна почленно диференціювати і інтегрувати всередині його інтервалу збіжності . При цьому степеневі ряди , що будуть отримані , мають той же інтервал збіжності , що і вихідний ряд .

Якщо функція $f(x)$ має похідні всіх порядків в околі точки $x = a$, то для неї формально можна записати розкладання у степеневий ряд (**ряд Тейлора**) :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}(x-a)^k .$$

Однак у кожному випадку необхідно досліджувати , за яких значень x ряд збігається і коли його сумою буде саме функція $f(x)$.

Якщо $a = 0$, одержимо частинний випадок ряду Тейлора , що називають **рядом Маклорена** :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k\,!} x^k .$$

Наведемо розкладання деяких важливих елементарних функцій у степеневі ряди з вказівкою областей збіжності :

1. $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, $\quad (-\infty < x < +\infty)$;

2. $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\,!}$ $\quad (-\infty < x < +\infty)$;

3. $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \qquad (-\infty < x < +\infty)$;

4. $(1+x)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} x^n \qquad (-1 < x < 1)$;

5. $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} \qquad (-1 < x \le 1)$.

Інколи при розкладанні потрібної функції в ряд використовують почленне диференціювання та інтегрування відомих рядів або геометричної прогресії .

Подання тієї або іншої функції у вигляді степеневого ряду часто використовується в наближених обчисленнях , а також при розв'язанні диференціальних рівнянь .

Приклад 8. Обчислити наближено інтеграл $\int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx$.

Розв'язання. Використовуючи розкладання для $\sin x$, одержуємо

$$\frac{\sin x}{x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} .$$

Ця рівність інтегрується в межах від 0 до α :

$$\int_0^{\alpha} \frac{\sin x}{x} dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!} ;$$

суму ряду легко обчислити з необхідною точністю при заданому α .

Приклад 9. Знайти наближений розв'язок диференціального рівняння $y' = xy^2 + 1$ при $y(1) = 0$.

Розв'язання. Цей розв'язок запишемо у вигляді ряду Тейлора за степенями $(x-1)$:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k(1)}{k!} (x-1)^k .$$

За умовою $y(1) = 0$. Поклавши в рівнянні $x = 1$, знайдемо $y'(1) = 1$.

Продиференціюємо вихідне рівняння та отримаємо $y'' = y^2 + 2xyy'$, звідси при $x = 1$ $y''(1) = 0$. Далі знову диференціюємо рівняння другого порядку і одержуємо $y''' = 2yy' + 2yy' + 2xy'^2 + 2xyy''$; при $x = 1$ $y^{(3)}(1) = 2$. Аналогічно $y^{(4)} = 6y'^2 + 6yy'' + 6xy'y'' + 2xyy'''$; при $x = 1$ отримуємо $y^{(4)}(1) = 6$ і т. д.

З урахуванням знайдених значень розв'язків y і його похідних у точці $x = 1$ матимемо

$$y(x) = (x-1) + \frac{2\,(x-1)^3}{3\,!} + \frac{6(x-1)^4}{4\,!} + \ \ldots\ ,$$

або

$$y(x) = (x-1) + \frac{1}{3}\,(x-1)^3 + \frac{1}{4}\,(x-1)^4 + \ \ldots\ .$$

ЗАПИТАННЯ І ЗАВДАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Дайте означення числового ряду , загального члена ряду , частинної суми ряду , суми ряду , збіжності і розбіжності рядів .
2. Дослідіть збіжність ряду , складеного з членів геометричної прогресії .
3. Сформулюйте і доведіть основні властивості числових рядів .
4. Сформулюйте і доведіть необхідну ознаку збіжності ряду і наслідок з цієї ознаки .
5. Сформулюйте і доведіть ознаки порівняння рядів з додатними членами .
6. Сформулюйте ознаки Даламбера і Коші (радикальну та інтегральну) збіжності рядів , наведіть приклади застосування цих ознак .
7. Дослідіть за допомогою інтегральної ознаки Коші збіжність узагальненого гармонічного ряду .
8. Дайте означення знакозмінного ряду .
9. Сформулюйте достатню ознаку збіжності знакозмінного ряду .
10. Дайте означення абсолютно і умовно збіжного знакозмінного ряду і сформулюйте основні властивості цих рядів .
11. Дайте означення знакопереміжного ряду .
12. Сформулюйте ознаку Лейбніца збіжності знакопереміжних рядів і наведіть приклади застосування цієї ознаки .

13. Дайте означення функціонального ряду, його області збіжності.

14. Дайте означення загального члена, частинної суми і залишку функціонального ряду, сформулюйте умову збіжності ряду.

15. Дайте означення степеневого ряду та інтервалу його збіжності.

16. Сформулюйте теорему Абеля про характер області збіжності степеневих рядів.

17. Виведіть формулу для обчислення радіуса збіжності степеневого ряду.

18. Запишіть ряд Тейлора для функції $f(x)$. Розкладіть функції $y = \sin x$, $y = \cos x$ у степеневий ряд.

19. На основі теореми про інтегрування степеневих рядів виконайте розкладання в ряд Маклорена функцій $y = \arcsin x$, $y = \operatorname{arctg} x$.

20. Викладіть метод наближеного обчислення визначених інтегралів за допомогою степеневих рядів.

21. Викладіть метод наближеного інтегрування диференціальних рівнянь за допомогою степеневих рядів.

4.5. Задачі для практичних занять

У задачах 4.1 – 4.51 знайти невизначені інтеграли:

4.1. $\int \frac{dx}{x^2}$. **4.2.** $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$. **4.3.** $\int \left(\frac{1-z}{z}\right)^2 dz$.

4.4. $\int \operatorname{tg}^2 x \, dx$. **4.5.** $\int 2\sin^2 \frac{x}{2} dx$. **4.6.** $\int (x+1)^{15} dx$.

4.7. $\int 2x \sqrt{x^2+1} \cdot dx$. **4.8.** $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{4+x^5}}$. **4.9.** $\int \sin^3 x \cos x \, dx$.

4.10. $\int \frac{(\operatorname{arctg} x)^2}{1+x^2} dx$. **4.11.** $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^3 \sqrt{1-x^2}}$. **4.12.** $\int \frac{dx}{x \ln x}$.

4.13. $\int \frac{x}{x+4} dx$. **4.14.** $\int \frac{(1+x)^2}{x^2+1} dx$. **4.15.** $\int \frac{dx}{x(x-1)}$.

4.16. $\int \frac{dx}{(x+1)(2x-3)}$. **4.17.** $\int \frac{dx}{x^2+3x-10}$. **4.18.** $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$.

4.19. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}$. 4.20. $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}$. 4.21. $\int \cos^2 x\, dx$.

4.22. $\int \sin^2 x\, dx$. 4.23. $\int x \sin 2x\, dx$. 4.24. $\int x \cos x\, dx$.

4.25. $\int x \operatorname{arctg} x\, dx$. 4.26. $\int e^x \sin x\, dx$. 4.27. $\int x^2 e^{-x}\, dx$.

4.28. $\int \ln(x^2+1)\, dx$. 4.29. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$. 4.30. $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\, dx$.

4.31. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. 4.32. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}\, dx$. 4.33. $\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\, dx$.

4.34. $\int \frac{x\, dx}{(x+1)(2x+1)}$. 4.35. $\int \frac{x\, dx}{2x^2-3x-2}$. 4.36. $\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)}\, dx$.

4.37. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}\, dx$. 4.38. $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$. 4.39. $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$.

4.40. $\int \frac{dx}{1+x^3}$. 4.41. $\int \frac{x\, dx}{x^3-1}$. 4.42. $\int \frac{dx}{x(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2})}$.

4.43. $\int \operatorname{arctg} x\, dx$. 4.44. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$. 4.45. $\int \sin^3 x \cos^2 x\, dx$.

4.46. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\, dx$. 4.47. $\int \frac{\sin x}{(1-\cos x)^2}\, dx$. 4.48. $\int \operatorname{tg}^5 x\, dx$.

4.49. $\int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$. 4.50. $\int \frac{dx}{1+\operatorname{tg} x}$. 4.51. $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

У задачах 4.52 – 4.63 обчислити визначені інтеграли :

4.52. $\int_0^1 \sqrt{1+x} \cdot dx$. 4.53. $\int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}$. 4.54. $\int_0^1 (e^x-1)^4 e^x\, dx$.

4.55. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x\, dx$. 4.56. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cos x}$. 4.57. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos x - \cos^2 x} \cdot dx$.

4.58. $\int\limits_0^1 xe^{-x}\,dx$. **4.59.** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$. **4.60.** $\int\limits_0^{\pi} x^3\sin x\,dx$.

4.61. $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx$. **4.62.** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,dx$. **4.63.** $\int\limits_3^8 \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x}}$.

4.64. Обчислити площу фігури , обмежену лініями , рівняння яких $y^2=2x+1$ і $x-y-1=0$.

4.65. Обчислити площу фігури , обмежену лініями $y=e^x$, $y=e^{-x}$ та прямою $x=1$.

4.66. Обчислити довжину дуги лінії $y=\ln x$ (від $x_1=\sqrt{3}$ до $x_2=\sqrt{8}$) .

4.67. Обчислити довжину дуги ланцюгової лінії $y=a\ \mathrm{ch}\frac{x}{a}$ (від $x_1=0$ до $x_2=b$) .

4.68. Обчислити об'єм тіла , обмеженого еліпсоїдом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

4.69. Обчислити об'єм тіла , обмеженого еліптичним параболоїдом $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}$ та площиною $z=1$.

У задачах 4.70 – 4.96 знайти загальні розв'язки диференціальних рівнянь :

4.70. $xyy'=1-x^2$. **4.71.** $yy'=\frac{1-2x}{y}$. **4.72.** $xy'+y=y^2$.

4.73. $y'=\frac{y^2}{x^2}-2$. **4.74.** $y'=\frac{x+y}{x-y}$. **4.75.** $x\,dy-y\,dx=y\,dy$.

4.76. $y'=\frac{2xy}{x^2-y^2}$. **4.77.** $y'+2y=4x$. **4.78.** $y'+2xy=xe^{-x^2}$.

4.79. $y'+\frac{1-2x}{x^2}y=1$. **4.80.** $y'+y=\cos x$. **4.81.** $y'=\frac{y+1}{x}$.

4.82. $y'+2xy=2x^3y^3$. **4.83.** $y'+\frac{y}{x+1}+y^2=0$. **4.84.** $y''=x+\sin x$.

4.85. $xy'' = y'$. 4.86. $y'' = y' + x$. 4.87. $y'' = \frac{y'}{x} + x$.

4.88. $y'' + y' - 2y = 0$. 4.89. $y'' + 9y = 0$. 4.90. $y'' - 4y' = 0$.

4.91. $y'' + 2y' + y = 0$. 4.92. $2y'' + y' - y = 2e^x$. 4.93. $y'' - 7y' + 6y = \sin x$.

4.94. $y'' - 2y' + 2y = 2x$. 4.95. $2y'' + 5y' = 5x^2 - 2x - 1$. 4.96. $y'' - 4y' + 4y = 3e^{2x}$.

У задачах 4.97 – 4.101 знайти частинні розв'язки , що задовольняють зазначеним початковим умовам :

4.97. $y' = \frac{1+y^2}{1+x^2}$, $y(0) = 1$.

4.98. $(y^2 - 3x^2)\,dy + 2xy\,dx = 0,$ $y(0) = 1$.

4.99. $xy' + y - e^x = 0$, $y(a) = b$.

4.100. $y'' - 4y' + 3y = 0,$ $y\big|_{x=0} = 6,$ $y'\big|_{x=0} = 10.$

4.101. $y'' - 2y' = e^x(x^2 + x - 3),$ $y\Big|_{x=0} = 2,$ $y'\big|_{x=0} = 2$.

У задачах 4.102 – 4.114 дослідити збіжність рядів :

4.102. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$. 4.103. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$. 4.104. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$.

4.105. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)}$. 4.106. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$. 4.107. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{1}{n}$.

4.108. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$. 4.109. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$. 4.110. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.

4.111. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{2n-1}$. 4.112. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(2n-1)^3}$.

4.113. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n2^n}$. 4.114. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{n}$.

У задачах 4.115 – 4.117 знайти області збіжності степеневих рядів :

4.115. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 10^n x^n$. 4.116. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$. 4.117. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n\,10^{n-1}}$.

4.118. Розкласти функцію $y = \ln x$ у ряд Тейлора в околі точки $x = 1$ $(x_0 = 1)$.

4.119. Розкласти функції в ряд Тейлора в околі точки $x = 0$:

а) $y = e^{2x}$; б) $y = e^{-x^2}$; в) $y = x^2 e^x$.

4.120. Записати у вигляді степеневого ряду частинний розв'язок рівняння

$$y'' - xy' + y - 1 = 0 , \quad y\big|_{x=0} = 0 , \quad y'\big|_{x=0} = 0 .$$

4.121. Знайти шість перших членів розкладу в степеневий ряд розв'язку диференціального рівняння $y'' - (1 + x^2)y = 0$, що задовольняє початковим умовам $y\big|_{x=0} = -2$, $y'\big|_{x=0} = 2$.

4.6. Індивідуальне завдання 4

Задача 1. Знайти інтеграли .

Варіанти завдань

1. а) $\int \frac{\sin 3x}{\sqrt{\cos^2 3x}} \, dx$; б) $\int \frac{5x^2}{5 - 2x^3} \, dx$; в) $\int x \cos 5x \, dx$;

г) $\int \frac{2 - x}{\sqrt{8 - x^2 - 2x}} \, dx$; д) $\int \frac{dx}{2 + \operatorname{tg} x}$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x + 1} - 1}$.

2. а) $\int \frac{\cos x}{2 \sin x - 5} \, dx$; б) $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3 - 4}} \, dx$; в) $\int \frac{\ln(2x + 1)}{x^3} \, dx$;

г) $\int \frac{x}{x^2 - 7x + 13} \, dx$; д) $\int \frac{dx}{1 - \sin^2 x}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} \, dx$.

3 а) $\int \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 3}} \, dx$; б) $\int e^{x^2 + 2x} (x + 1) \, dx$; в) $\int x e^{3x - 5} \, dx$;

г) $\int \frac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}} \, dx$; д) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - \operatorname{tg}^2 x}$; е) $\int \frac{x + 2}{\sqrt{3x + 1}} \, dx$.

4. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{2 + 5 \cos x}} \, dx$; б) $\int \sqrt{1 - 2x^3} \cdot x^2 \, dx$; в) $\int (x + 1) \cos 2x \, dx$;

г) $\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; д) $\int \sin 3x \;\cos 5x\; dx$; е) $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}\,dx$.

5. а) $\int e^{7x+1}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; в) $\int \frac{x}{\sin^2 x}\,dx$;

г) $\int \frac{3\,dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$; д) $\int \sin^5 2x\,dx$; е) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

6. а) $\int \frac{x^2\,dx}{3x^3-5}$; б) $\int \frac{\sqrt{2+\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x}\,dx$; в) $\int (2-x)\cos 3x\,dx$;

г) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{4+2\sin x}$; е) $\int \frac{dx}{(9+\sqrt[3]{x})\sqrt{x}}$.

7. а) $\int \frac{dx}{9x^2-8}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2(3-2x)}$; в) $\int x\ln(x-1)\,dx$;

г) $\int \frac{5\,dx}{\sqrt{3-x^2-2x}}$; д) $\int \frac{2-\sin x}{2+\cos x}\,dx$; е) $\int x\sqrt{2-x}\cdot dx$.

8. а) $\int x\cos(x^2+1)\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln^2 x}}$; в) $\int (2x+1)\operatorname{arctg} x\,dx$;

г) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{3-2\cos x}$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}+1}\,dx$.

9. а) $\int e^{-3x^2}\,dx$; б) $\int \frac{\cos x}{3-5\sin^2 x}\,dx$; в) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{2x-1}\cdot dx$;

г) $\int \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{1+3\sin^2 x}$; е) $\int \frac{1+\sqrt[4]{x}}{x+\sqrt{x}}\,dx$.

10. а) $\int \frac{dx}{(1+x^2)\operatorname{arctg} x}$; б) $\int e^{3-5x}\,dx$; в) $\int \arcsin x\,dx$;

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2-2x+1}}$; д) $\int \frac{\sin x}{1-\sin x}\,dx$; е) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$.

11. а) $\int e^{\sin^2 x}\sin 2x\,dx$; б) $\int \frac{x^2\,dx}{7+3x^3}$; в) $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}\cdot dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2+4x+14}$; д) $\int \sin^3 x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$.

12. а) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+4)^6}$; б) $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$; в) $\int \ln(x^2+4)\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2+3x+6}$; д) $\int \cos^5 x\,dx$; е) $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{x-1}}$.

13. а) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1-x^8}}$; б) $\int \frac{e^{\alpha x}}{e^{\alpha x}+5}\,dx$; в) $\int (x+5)\sin 3x\,dx$;

г) $\int \frac{3x+4}{x^2+7x+14}\,dx$; д) $\int \cos 3x\cos 9x\,dx$; е) $\int \frac{x^2\,dx}{(5x+2)\sqrt{5x+2}}$.

14. а) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3\operatorname{tg}x+1)}$; б) $\int \frac{\ln x\,dx}{x\sqrt{7+\ln^2 x}}$; в) $\int e^{-3x}(2-9x)\,dx$;

г) $\int \frac{2x-3}{x^2+x+5}\,dx$; д) $\int \sin 2x\sin 5x\,dx$; е) $\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt{x}}\,dx$.

15. а) $\int \frac{\cos 3x}{4+\sin 3x}\,dx$; б) $\int \frac{dx}{(1+4x^2)\sqrt{5+\operatorname{arctg}2x}}$; в) $\int (3x-2)\cos 5x\,dx$;

г) $\int \frac{x-3}{x^2-9x+23}\,dx$; д) $\int \sin^7 x\,dx$; е) $\int \frac{\sqrt{2x-3}}{x}\,dx$.

16. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{\cos^2 x}}\,dx$; б) $\int \frac{\sin 2x}{\sqrt{a^2+b^2\sin^2 x}}\,dx$; в) $\int e^{-2x}(4x-3)\,dx$;

г) $\int \frac{2x+3}{x^2-7x+12}\,dx$; д) $\int \cos^9 x\,dx$; е) $\int \frac{\sqrt{x-5}}{x^3}\,dx$.

17. а) $\int \frac{x+\operatorname{arctg}x}{1+x^2}\,dx$; б) $\int \frac{x\,dx}{a^2-x^2}$; в) $\int (2-4x)\sin 2x\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{7x^2+5x+4}}$; д) $\int \sin^4 x\cos^3 x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x-8}}$.

18. а) $\int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{3+2\cos x}}\,dx$; б) $\int \frac{x^3}{\sqrt{5+4x^4}}\,dx$; в) $\int x e^{-3x}\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{11+5x+6x^2}}$; д) $\int \cos^2 x \sin^5 x\,dx$; е) $\int \sqrt{\frac{2+x}{2-x}}\,dx$.

19. а) $\int \frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}\,dx$; б) $\int \frac{1}{x\ln^4 x}\,dx$; в) $\int (4x-2)\cos 2x\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{5+3x-x^2}}$; д) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^4 x}\,dx$; е) $\int \sqrt{\frac{3-4x}{9-5x}}\,dx$.

20. а) $\int \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{x}}{\sqrt{x}\,(1+x)}\,dx$; б) $\int \frac{3x\,dx}{\sqrt{9-7x^2}}$; в) $\int (5x-2)\,e^{3x}\,dx$;

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x^2+5x+3}}$; д) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x}\,dx$; е) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x+1}}\,dx$.

21. а) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$; б) $\int \frac{\operatorname{arctg} x + x}{1+x^2}\,dx$; в) $\int x^3 \ln x\,dx$;

г) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{8-3x-2x^2}}$; д) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}\,dx$; е) $\int \frac{\sqrt{3x+4}}{x^2}\,dx$.

22. а) $\int x^2\sqrt{x^3+5}\cdot dx$; б) $\int \frac{(2\ln x+3)^3}{x}\,dx$; в) $\int (x^2+4x)\cos x\,dx$;

г) $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2-4x+5}}\,dx$; д) $\int \operatorname{tg}^4 x\,dx$; е) $\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.

23. а) $\int (x^2-3x)^5(2x-3)\,dx$; б) $\int \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2+4}$; в) $\int (3x+5)\sin x\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{3x^2-x+1}$; д) $\int \sin^5 x\,dx$; е) $\int \frac{\sqrt{x}}{x+2}\,dx$.

24. а) $\int \frac{2-x^4}{1+x^2}\,dx$; б) $\int (2\sin\frac{x}{2}+3)^2\cos\frac{x}{2}\,dx$; в) $\int x^2 e^{8x}\,dx$;

г) $\int \frac{3x-2}{x^2-4x+5}\,dx$; д) $\int \cos^3 x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

25. а) $\int x^3(1-2x^4)^3\,dx$; б) $\int \frac{5x+3}{\sqrt{3-x^2}}\,dx$; в) $\int \ln x\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{2x^2-5x+7}$; д) $\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x}\,dx$; е) $\int x\sqrt{x-1}\cdot dx$.

26. а) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; в) $\int (x+1)e^x\,dx$;

г) $\int \frac{x-1}{x^2-x-1}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{\cos^4 x}$; е) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx$.

27. а) $\int x(x^2+1)^{\frac{3}{2}}\,dx$; б) $\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$; в) $\int (x^2+2x+3)\cos x\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}$; д) $\int \sin^2 x\cos^2 x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}$.

28. а) $\int \frac{x\,dx}{x^2-1}$; б) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^6-1}}$; в) $\int e^{2x}\cos x\,dx$;

г) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx$; д) $\int \sin^3 x\cos^4 x\,dx$; е) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$.

29. а) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^4-1}}$; б) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^4-x^4}}$; в) $\int (x+5)\,\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$; д) $\int \sin^2 x\cos^3 x\,dx$; е) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}+1}\,dx$.

30. а) $\int \frac{dx}{(x-7)\sqrt{x}}$; б) $\int \frac{\mathrm{arctg}\,\frac{x}{2}}{4+x^2}\,dx$; в) $\int x^2\mathrm{arctg}\,x\,dx$;

г) $\int \frac{x}{\sqrt{5x^2-2x+1}}\,dx$; д) $\int \cos^2 x\sin^4 x\,dx$; е) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x+1}}$.

31. а) $\int \frac{e^{\frac{x}{2}}\,dx}{\sqrt{16-e^{x}}}$; б) $\int \frac{x - \operatorname{arctg} 2x}{1+4x^2}\,dx$; в) $\int e^{5x}\cos x\,dx$;

г) $\int \frac{x\,dx}{x^2-7x+13}$; д) $\int \sin^{10} x \cos^3 x\,dx$; е) $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$.

Задача 2. а) знайти загальний розв'язок диференціального рівняння ; б) знайти частинний розв'язок диференціального рівняння , що задовольняє заданим початковим умовам .

Варіанти завдань

1. а) $xy\,dx+(x+1)\,dy=0$;

   б) $4y''+16y'+15y=4e^{-1{,}5x}$, $y(0)=3$, $y'(0)=-5{,}5$.

2. а) $y'=\frac{xy+y^2e^{-\frac{x}{y}}}{x^2}$;

   б) $y''-2y'+10y=10x^2+18x+6$, $y(0)=1$, $y'(0)=3{,}2$.

3. а) $x(x+2y)\,dx+(x^2-y^2)\,dy=0$;

   б) $y''\pm 4y'-12y=8\sin 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

4. а) $xy'=y+2x-2\sqrt{xy-y^2}$;

   б) $y''-y'=2(1-x)$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

5. а) $x\,dx-\sqrt{1-x^2}\cdot dy=0$;

   б) $y''-6y'+9y=x^2-x+3$, $y(0)=\frac{4}{3}$, $y'(0)=\frac{1}{27}$.

6. а) $y'+\frac{y}{x}=x\,e^{\frac{x}{2}}$;

   б) $y''-7y'+6y=\sin x$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

7. а) $(x+y)\,dx+(y-x)\,dy=0$;

   б) $2y''+y'-y=2e^{x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=0$.

8. а) $x y^2\, dy = (x^3 + y^3)\, dx$;

б) $y'' - 2y' + 2y = 2x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

9. а) $x\, dy - (x + y)\, dx = 0$;

б) $y'' - 3y' + 2y = 10 e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

10. а) $y' + y \cos x = e^{-\sin x}$;

б) $2y'' + 5y' = 29 \cos x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$.

11. а) $xy' - 2y = 2x^4$;

б) $y'' + 4y' - 12y = 8 \sin x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

12. а) $x(y^2 - 1)\, dx + y(x^2 - 1)\, dy = 0$;

б) $y'' + 4y' = e^{-2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

13. а) $y' + 3\dfrac{y}{x} = \dfrac{2}{x^3}$;

б) $y'' - 2y' + 5y = x\, e^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

14. а) $y' = e^{\frac{y}{x}}$;

б) $y'' + 5y' + 6y = 12 \cos 2x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

15. а) $x y' + (x + 1) y = 3x^2 e^{-x}$;

б) $y'' - 5y' + 6y = (12x - 7)\, e^{-x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

16. а) $y' - 4\dfrac{y}{x} = \dfrac{1}{x}$;

б) $y'' - 4y' + 13y = 26x + 5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

17. а) $(x^2 - 1) y' = 2x y^2$;

б) $y'' - 4y' = 6x^2 + 1$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$.

18. а) $x^2 y' = 1 + \cos 2y$;

б) $y'' - 2y' + y = 16 e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

19. а) $\dfrac{dx}{y + x} = \dfrac{dy}{y - x}$;

б) $y'' + 6y' + 9y = 10 e^{-3x}$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

20. а) $dx-\sqrt{1-x^2}\cdot dy=0$;

б) $y''+4y'+4y=3e^{-2x}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$.

21. а) $y'=\dfrac{x-y}{x-2y}$;

б) $y''-3y'+2y=x^2-x+1$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

22. а) $xyy'=1-x^2$;

б) $y''-4y'+4y=x^2$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

23. а) $xy'-y=y^3$;

б) $y''+2y'+y=e^{2x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=3$.

24. а) $y'=\dfrac{y}{x}-1$;

б) $y''-y'+y=x^3+6$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

25. а) $y'=-\dfrac{x+y}{x}$;

б) $y''+y=\cos x$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

26. а) $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=x$;

б) $y''+y'-6y=x\,e^{2x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=5$.

27. а) $y'=y\,\mathrm{tg}\,x+\cos x$;

б) $y''-2y'+5y=e^x\cos 2x$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

28. а) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2y}{x}-x^3$;

б) $y''+4y=\sin x$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$.

29. а) $y'=4\,\dfrac{y}{x}+x\sqrt{y}$;

б) $y''+2y'+y=e^x+e^{-x}$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

30. а) $xy'+y-e^x=0$;

б) $y''-y'=2x-1-3\,e^x$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$.

31. а) $y' - \dfrac{y}{1-x^2} = 1 + x$;

б) $y'' + y' = 5x + 2e^x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.

4.7. Зразок виконання індивідуального завдання 4

Задача 1. Знайти інтеграли :

а) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}\,dx$; б) $\displaystyle\int e^{x^2+6x}(x+3)\,dx$; в) $\displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$;

г) $\displaystyle\int \frac{x+4}{x^2+5x+7}\,dx$; д) $\displaystyle\int \sin^7 x \cos^2 x\,dx$; е) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x+3}\cdot(1+\sqrt[3]{x+3})}$.

Розв'язання:

а) $I = \displaystyle\int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}\,dx$.

Уводимо під знак диференціала вираз $(4+\ln x)$, і враховуючи, що $d(4+\ln x) = \dfrac{1}{x}\,dx$, маємо

$$I = \int \frac{\sqrt{4+\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt{4+\ln x}\cdot d(4+\ln x) = \frac{2\cdot(4+\ln x)^{3/2}}{3} + C .$$

б) $I = \displaystyle\int e^{x^2+6x}(x+3)\,dx$.

Уводимо під знак диференціала вираз (x^2+6x) , і враховуючи, що $d(x^2+6x) = 2\,(x+3)\,dx$, маємо

$$I = \int e^{x^2+6x}(x+3)\,dx = \frac{1}{2}\int e^{x^2+6x}\,d\,(x^2+6x) = \frac{1}{2}\,e^{x^2+6x} + C .$$

в) $I = \displaystyle\int x^2 \sin x\,dx$.

Інтеграл береться з використанням формули інтегрування частинами $\displaystyle\int u\,dv = uv - \int v\,du$.

$$I = \int x^2 \sin x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2; & du = 2x\,dx \\ dv = \sin x\,dx; & v = -\cos x \end{array} \right| = -x^2\cos x + \int 2x\cos x\,dx .$$

Для обчислення вихідного інтеграла формулу інтегрування частинами потрібно застосувати ще раз (до інтеграла в правій частині) :

$$\int x\cos x\,dx = \left|\begin{matrix} u = x; & du = dx \\ dv = \cos x\,dx; & v = \sin x \end{matrix}\right| = x\sin x - \int \sin x\,dx =$$

$$= x\sin x + \cos x + C\ .$$

Підставляючи , отримуємо $I = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C$.

г) $I = \int \dfrac{x+4}{x^2+5x+7}\,dx$.

Для обчислення інтеграла виділимо повний квадрат у знаменнику і , виконавши відповідну заміну , отримаємо

$$I = \int \frac{x+4}{x^2+5x+7}\,dx = \int \frac{x+4}{x^2+2\cdot\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2+7-\left(\frac{5}{2}\right)^2}\,dx = \int \frac{x+4}{\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,dx =$$

$$= \left|\begin{matrix} x+\frac{5}{2} = u \\ dx = du \end{matrix}\right| = \int \frac{u+\frac{3}{2}}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,du = \int \frac{u}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}\,du + \frac{3}{2}\int \frac{du}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{d\left(u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right)}{u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{3}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{u}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2}\ln\left|u^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right| + \sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2u}{\sqrt{3}} +$$

$$+ C = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+5x+7\right| + \sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}\frac{2x+5}{\sqrt{3}} + C\ .$$

д) $\int \sin^7 x\cos^2 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^3\cos^2 x\sin x\,dx =$

$$= \left|\begin{matrix} u = \cos x \\ du = -\sin x\,dx \end{matrix}\right| = -\int (1-u^2)^3 u^2 du = = -\int (1-3u^2+3u^4+u^6)u^2 du =$$

$$= -\frac{u^3}{3} + 3\frac{u^5}{5} - 3\frac{u^7}{7} + \frac{u^9}{9} + C = -\frac{\cos^3 x}{3} + 3\frac{\cos^5 x}{5} - 3\frac{\cos^7 x}{7} + \frac{\cos^9 x}{9} + C\ .$$

7 8 651

е) $I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}\cdot(1+\sqrt[3]{x+3})}$.

Інтеграл має ірраціональність . Позначимо $x+3=t^6$, $dx=6t^5\,dt$.

$$I=\int\frac{dx}{\sqrt{x+3}(1+\sqrt[3]{x+3})}=\left|\begin{matrix}x+3=t^6\\ dx=6t^5dt\end{matrix}\right|=\int\frac{6t^5dt}{t^3(1+t^2)}=6\int\frac{t^2}{1+t^2}dt=$$

$$=6\int dt-6\int\frac{dt}{1+t^2}=6t-6\operatorname{arctg}t+C=6\sqrt[6]{x+3}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x+3}+C$$

Задача 2. У пункті а) знайти загальний розв'язок диференціального рівняння ; у пункті б) знайти частинний розв'язок диференціального рівняння , що задовольняє заданим початковим умовам :

а) $y\,dy=\sqrt{a^2-y^2}\cdot dx$;

б) $y''-2y'=e^x(x^2+x-3)$, $\qquad y(0)=2$, $y'(0)=2$.

Розв'язання.

а) $y\,dy=\sqrt{a^2-y^2}\cdot dx$.

$$\frac{y\,dy}{\sqrt{a^2-y^2}}=dx\ ; \qquad \int\frac{ydy}{\sqrt{a^2-y^2}}=\int dx\ ; \qquad C-\sqrt{a^2-y^2}=x\ ,$$

звідки одержуємо $-\sqrt{a^2-y^2}=x-C$; $a^2-y^2=(x-C)^2$, або остаточно $(x-C)^2+y^2=a^2$.

б) $y''-2y'=e^x(x^2+x-3)$, $\qquad y(0)=2$, $y'(0)=2$.

1. $y''-2y'=0$. Частинні розв'язки цього рівняння шукаємо у вигляді $y=e^{kx}$. Підставляючи цей передбачуваний роз'язок у рівняння та скорочуючи на e^{kx} , приходимо до характеристичного рівняння $k^2-2k=0$, звідки $k_1=0$, $k_2=2$.

Одержуємо два частинних розв'язки : $y_1=e^{0x}=1$; $y_2=e^{2x}$. Це фундаментальна система розв'язків , бо $\frac{y_1}{y_2}\neq\text{const}$. Тому на їх основі будуємо загальний розв'язок однорідного рівняння $\overline{y} = C_1 + C_2 e^{2x}$.

2. Оскільки права частина заданого рівняння має вигляд $e^{\alpha x} P_n(x)$, то частинний розв'язок шукаємо в такій формі $(k_1 \neq \alpha\ ,\ k_2 \neq \alpha)$:

$$y = e^x (ax^2 + bx + c)\ ;$$

$$y' = e^x (ax^2 + bx + c) + e^x (2ax + b)\ ;$$

$$y'' = e^x (ax^2 + bx + c) + 2e^x (2ax + b) + 2ae^x\ .$$

Підставляємо ці значення в задане рівняння і приходимо до тотожності (котру заздалегідь скоротимо на $e^x \neq 0$) :

$$-ax^2 - bx + 2a - c = x^2 + x - 3\ .$$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч і праворуч , приходимо до системи рівнянь для визначення $a,\ b,\ c$: $-a = 1$; $-b = 1$; $2a - c = -3$, звідки $a = -1$, $b = -1$, $c = 1$; частинний розв'язок приймає вигляд

$$y^* = e^x (-x^2 - x + 1)\ .$$

3. Складаємо загальний розв'язок неоднорідного рівняння $y = C_1 + C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1)$.

4. Визначаємо C_1 , C_2 із початкових умов :

$$y' = 2C_2 e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) - e^x(2x + 1)\ ,$$

$$y\big|_{x=0} = 2 = C_1 + C_2 + 1\ ,$$

$$y'\big|_{x=0} = 2 = 2C_2 + 1 - 1\ ,$$

або

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1\ ; \\ \quad 2C_2 = 2\ . \end{cases}$$

З останньої рівності $C_2 = 1$. Тоді $C_1 = 0$ і частинний розв'язок неоднорідного рівняння , що задовольняє заданим початковим умовам , одержуємо у вигляді

$$y = e^{2x} + e^x(-x^2 - x + 1) = e^x(e^x - x^2 - x + 1)\ .$$

ГЛАВА 5. ДЕЯКІ ЗАСТОСУВАННЯ МАТЕМАТИКИ В ЕКОНОМІЦІ

5.1. Економічні задачі, пов'язані з використанням лінійної функціональної залежності

Розглянемо деякі приклади застосування лінійної залежності в економіці :

1. Якщо через k позначити тариф перевезення вантажу на одиницю відстані , b – витрати при перевезенні вантажу , що не залежать від відстані x , то загальну вартість y перевезення вантажу на відстань x можна обчислити за формулою $y = kx + b$.

2. Якщо позначити через y витрати підприємства впродовж місяця при випуску x одиниць однорідної продукції , то y може бути визначено за формулою $y = kx + b$, а величина kx буде визначати змінні витрати , що залежать від обсягу випуску (де k – витрати підприємства впродовж місяця на одиницю продукції) . Величина b визначає постійні витрати підприємства , які не залежать від обсягу продукції , що випускається (витрати за рахунок амортизації будинку , заробітної платні охорони , службовців і допоміжних робітників , опалення будинку і т . п .) .

Приклад. Валова продукція на 1 га сільськогосподарських угідь за чотири роки збільшилась на 24, 4 % . Скласти рівняння прямої, яка відображує зміну валової продукції на 1 га протягом чотирьох років за умови , що валова продукція у відсотках змінюється пропорційно часу .

Розв'язання. Валову продукцію , випущену у перший рік , приймемо за 100 % і будемо шукати рівняння прямої у вигляді $y = kx + b$:

$$k = \frac{24,4}{4} = 6,1 \ ; \qquad 100 = 6,1 \cdot 1 + b \ ; \qquad b = 93,9 \ .$$

Отже , $y = 6,1x + 93,9$ (x – рік) .

5.1. Витрати виробництва на 10 одиниць деякого товару складають 1 000 грошових одиниць , 50 одиниць товару – 2 000 грошових одиниць . Визначити витрати виробництва на 30 одиниць товару за умови , що витрати залежать від обсягу продукції лінійно .

5.2. Скласти рівняння прямої , яка відображує зміну врожайності 1 га протягом сімнадцяти років , якщо у перший рік з 1 га було зібрано 9,1 ц .

зернових культур , а в останній рік – 21 ц .

5.3. Припускається , що перенесення вартості машини на продукцію , що виготовляється за її допомогою , залежить від часу t . Нехай первісна вартість $y = 25$ тис. грош. од., а термін служби до повного зносу – 10 років . Побудувати лінію залежності перенесеної на продукцію частини вартості машини від терміну її служби . Якою буде ця величина через 8 років ?

5.4. Витрати на перевезення двома видами транспорту відображуються функціями : $y = 50x + 150$, $y = 25x + 250$, де x – відстань перевезень , км ; y - транспортні витрати , грош. од. При яких відстанях економічніше користуватися першим видом транспорту ?

5.5. Перевезення вантажу від даного міста до першого пункту , який знаходиться на відстані 100 км , коштує 200 грош. од., а до другого , що знаходиться на відстані 400 км – 350 грош. од. Встановити залежність вартості перевезення y від відстані x, якщо вартість є лінійною функцією від відстані (якість доріг не враховується) .

5.2. Економічні задачі, пов'язані з використанням рівнянь кривих другого порядку

Приклад 1. Два однотипних підприємства A та B виробляють продукцію з однією і тією ж оптовою відпускною ціною m за один виріб . Однак автопарк , що обслуговує підприємство A , оснащений новішими та потужнішими вантажними автомобілями . Тому транспортні витрати на перевезення одного виробу складають за 1 км : для підприємства A 10 грош. од., а для підприємства B – 20 грош. од. Відстань між підприємствами 300 км . Як територіально має бути поділений ринок збуту між двома підприємствами для того , щоб витрати споживача на відвантаження виробів та їх транспортування були мінімальними ?

Розв'язання. Позначимо через S_1 та S_2 відстані до ринку від пунктів A та B відповідно .

Тоді витрати споживачів складуть

$$f(A) = m + 10\ S_1\ ;$$

$$F(B) = m + 20S_2 .$$

Знайдемо множину точок , для яких $S_1 = 2S_2$, тобто ті випадки розміщення ринку , коли $f(A) = f(B)$:

$$S_1 = \sqrt{x^2 + y^2} ; \qquad S_2 = \sqrt{(300 - x)^2 + y^2} ;$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(300 - x)^2 + y^2} ;$$

$$x^2 + y^2 = 360000 - 2400x + 4x^2 + 4y^2 ;$$

$$(x - 400)^2 + y^2 = 200^2 .$$

Це коло . Таким чином , для споживача всередині круга вигідніше купувати у пункті B , поза кругом – у пункті A , на колі – однаково .

Приклад 2. Нехай в момент $t = 0$ почалося виробництво певного типу машин , що раніше не вироблялися . Припустимо , що їхній випуск відбувається рівномірно за часом , річний обсяг продукції складає 1 млн грош. од., а повний термін експлуатації машин дорівнює 10 рокам . Визначити вартість машинного парку (за винятком суми зносу) на кінець t-го року , припускаючи , що $t \in [0, 10]$.

Розв'язання. Позначимо шукану вартість через y . Завдання полягає в тому , щоб знайти $y = f(t)$. Вартість машинного парку на кінець t - го року без урахування зносу складає $t \cdot 10^6$, але фактично вартість машинного парку буде меншою внаслідок фізичного та морального зносу . Враховуючи , що машини були введені у виробництво не одночасно , будемо вважати , що середній вік машини складає $\frac{1}{2}t$. Річний знос машини дорівнює $\frac{1}{10}$ її вартості . Тому в t - му році вартість зносу машинного парку буде

$$\frac{10^6 t}{10} \cdot \frac{1}{2} t = 5 \cdot 10^4 t^2 .$$

Таким чином , у t - му році фактична вартість буде дорівнювати

$$y = 10^6 t - 5 \cdot 10^4 t^2 ,$$

тобто функція залежності вартості машин від часу є квадратичною , а її графіком є парабола .

5.6. Два підприємства, що віддалені одне від одного на 100 км, виробляють деякі однакові вироби. Ціна реалізації одиниці виробу для обох підприємств однакова і дорівнює p. Нехай транспортні витрати на перевезення одиниці виробу від підприємства A до споживача складають 1 грош. од. на 1 км, а від B – 2 грош. од. Для яких споживачів витрати на придбання одиниці виробу в підприємств A і B повинні бути однаковими? Як доцільніше прикріпити споживачів до підприємств?

5.7. Розв'язати задачу 5.6 за умови, що транспортні видатки на 1 км шляху при перевезенні одного виробу від підприємств A та B до споживача однакові і складають 1 грош. од. на 1 км, а ціна реалізації кожного виробу на підприємствах A та B дорівнює 200 і 225 грош. од. відповідно.

5.8. Розв'язати задачу 5.6 за умови, що транспортні витрати на перевезення одного виробу від підприємства A до споживача складають 9 грош. од. на 1 км, а від підприємства B – 3 грош. од. на 1 км.

5.9. Відстань від кар'єру, який забезпечує сировиною підприємство, до залізничної станції, що відправляє споживачам готову продукцію підприємства, дорівнює 20 км. Відомо, що підприємство повинно знаходитися вдвічі ближче від джерела сировини, ніж від станції – відправника готової продукції. Знайти рівняння множини всіх можливих місцезнаходжень підприємства, прийнявши за вісь абсцис пряму, яка проходить через точки, що відповідають кар'єру та залізничній станції; за початок координат взяти точку, що ділить відрізок між кар'єром та станцією навпіл.

5.10. При випробуванні судна на підводних крилах експериментальні дані показали, що витрати пального зростають приблизно пропорційно квадрату швидкості судна. Скласти аналітичну залежність між витратами пального і швидкістю судна v, якщо відомо, що при швидкості 40 км/год витрати пального за 1 год. складають 20 л. Визначити орієнтовно витрати пального за годину при швидкості 60 км/год.

5.11. Для випуску x одиниць продукції витрати виробництва складають $4+0{,}5x$. Знайти собівартість одиниці продукції (тобто суму витрат на одиницю продукції). Побудувати графік, відповідний залежності собівартості від обсягу продукції, що випускається.

5.12. Відстань між двома торговими організаціями дорівнює 8 км . Знайти рівняння множини всіх можливих місцезнаходжень баз , які обслуговують ці організації , якщо відомо , що сума відстаней від бази до них повинна бути постійною та дорівнювати 20 км .

5.13. Відстань між двома заводами , що виробляють однакову продукцію, дорівнює 300 км . Транспортні витрати на транспортування продукції від заводу A вдвічі більші , ніж від B . Визначити лінію – межу районів , на якій однаково вигідно одержувати продукцію від заводів A та B .

5.14. Відстань між двома заводами , що виробляють однакову продукцію , дорівнює 400 км . Транспортні витрати на перевезення продукції від заводу A складають 2 грош. од. за 10 км , а від заводу B – 3 грош. од. за 10 км . Визначити межу районів , для яких однаково вигідно придбання продукції як на підприємстві A , так і на підприємстві B .

5.3. Економічні задачі, що зводяться до систем лінійних нерівностей

Приклад 1. Механічний цех може виготовити за зміну або 600 деталей A , або 1200 деталей B , або будь-яку їхню комбінацію у межах своєї потужності . Виробнича потужність термічного цеху , куди ці деталі надходять для гартування , дозволяє обробити або 1400 деталей A , або 800 деталей B , або допустиму їхню комбінацію . Деталі A надходять після цього у третій цех , пропускна спроможність якого не перевищує 400 деталей . Записати в математичній формі умови , котрі слід враховувати при укладанні плану випуску деталей A та B .

Розв'язання. Позначимо через x_1 і x_2 відповідно кількість деталей A і B , що плануються до випуску за зміну . Аналізуючи можливості механічного цеху , потужність якого приймемо за одиницю , необхідно врахувати , що при одночасному випуску деталей A і B повинна виконуватися умова пропорційності кількості деталей даного виду частці виробничої потужності цеху , зайнятої її випуском . Так , на виготовлення однієї деталі A буде приходитися $1/600$ усієї потужності цеху , а однієї деталі B – $1/1200$ усієї потужності . Для реалізації плану (x_1, x_2) потрібно зайняти $\frac{1}{600}x_1 + \frac{1}{1200}x_2$

усієї потужності цеху, що, певна річ, не може бути більш, ніж уся наявна виробнича потужність цеху, прийнята за одиницю. Цю умову можна записати так:

$$\frac{1}{600}x_1 + \frac{1}{1200}x_2 \le 1.$$

Аналогічної умови необхідно дотриматися і для термічного цеху:

$$\frac{1}{1400}x_1 + \frac{1}{800}x_2 \le 1.$$

Обмеження з пропускної спроможності третього цеху запишемо у вигляді $x_1 \le 400$. З практичних міркувань ясно, що x_1 і x_2 виражаються невід'ємними числами, тобто $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$.

Таким чином, множина допустимих планів описується наступною системою лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} \frac{1}{600}x_1 + \frac{1}{1200}x_2 \le 1; \\ \frac{1}{1400}x_1 + \frac{1}{800}x_2 \le 1, \\ x_1 \le 400, \\ x_1 \ge 0, \\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Інакше кажучи, саме записану систему нерівностей необхідно враховувати при укладанні будь-якого реального (у тому числі і оптимального) плану випуску деталей A і B в цьому виробництві.

Приклад 2. Побудувати область планів випуску деталей, використовуючи умови прикладу 1.

Розв'язання. Побудуємо граничні прямі, відповідні записаним вище нерівностям:

$$\frac{1}{600}x_1 + \frac{1}{1200}x_2 = 1,$$

$$\frac{1}{1400}x_1 + \frac{1}{800}x_2 = 1,$$

$$x_1 = 400, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = 0.$$

Відмітимо півплощини, що є областями розв'язків даних нерівностей.

Перетин півплощин – многокутник $OABCD$ – є областю планів випуску деталей (рис. 5.1) .

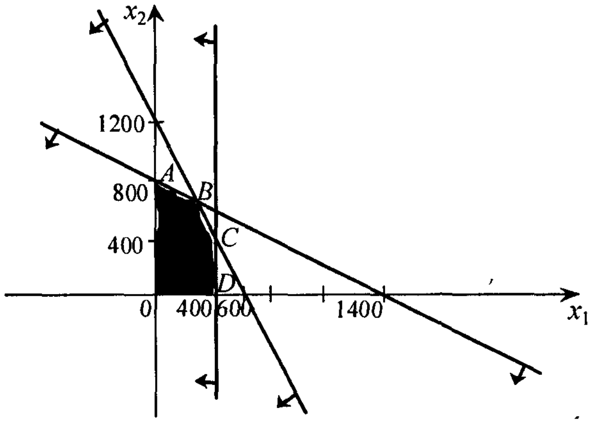

Рис 5.1

5.15. Трикотажне ательє виробляє жіночі кофточки двох моделей A і B . Запас прядива , його витрати на один виріб та ціна готового виробу наведені в наступній таблиці :

Прядиво	Витрати на виріб, кг		Запас, кг
	A	В	
Бежеве	0,05	0,1	20
Салатне	0,1	0,2	60
Коричневе	0,3	0,1	50
Ціна, грош.од.	250	300	

Яким умовам повинен задовольняти план випуску виробів , щоб витрати прядива не перевищували наявного запасу , а грошова сума від реалізації готової продукції була не менше ніж 60 000 грош. од.

5.16. Використовуючи умови задачі 5.15 побудувати на площині x_1Ox_2 область допустимих планів випуску продукції .

5.17. Цех випускає трансформатори видів A і B . На один трансформатор виду A витрачається 5 кг трансформаторного заліза і 3 кг дроту , а на трансформатор виду B – 3 кг заліза і 2 кг дроту . Від реалізації трансформатора виду A прибуток складає 12 грош. од., виду B – 10 грош. од. Змінний фонд заліза – 480 кг, дроту – 300 кг. Записати в математичній формі умови, яким повинен задовольняти план випуску трансформаторів, якщо видаток ресурсів не перевищує виділених фондів, а прибуток складає не менше 900 грош. од. за зміну.

5.18. Використовуючи умови задачі 5.17, побудувати на площині x_1Ox_2 область допустимих планів випуску трансформаторів.

5.4. Економічні задачі, в яких використовується теорія матриць

Приклад 1. Два залізобетонних заводи випускають вироби M, N, P вищої, першої та другої категорій якості. Кількість випущених кожним заводом виробів за кожною категорією якості характеризується наступною таблицею:

Категорія якості	Готові вироби					
	Перший завод			Другий завод		
	M	N	P	M	N	P
Вища	150	240	320	280	300	450
Перша	100	130	175	120	150	170
Друга	25	15	20	30	20	18

Який загальний випуск виробів за означеними категоріями якості?

Розв'язання. Кількість виробів, випущених першим заводом, можна розглядати як елементи матриці A, а другим заводом – як елементи матриці B:

$$A = \begin{pmatrix} 150 & 240 & 320 \\ 100 & 130 & 175 \\ 25 & 15 & 20 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 280 & 300 & 450 \\ 120 & 150 & 170 \\ 30 & 20 & 18 \end{pmatrix}.$$

Додаючи їх, отримаємо матрицю C, яка визначає загальне число виробів за означеними категоріями якості:

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 430 & 540 & 770 \\ 220 & 280 & 345 \\ 55 & 35 & 38 \end{pmatrix}.$$

Приклад 2. Відповідно до програми будівельно-монтажних робіт встановлено , що буде споруджено :

а) у галузі X_1 10 одиниць об'єктів типу 1 і 15 одиниць типу 2 ;

б) у галузі X_2 20 одиниць об'єктів типу 3 ;

в) у галузі X_3 100 одиниць об'єктів типу 4 .

Визначити витрати будівельних матеріалів видів p і q в кожній галузі , якщо норми витрат матеріалів (у відповідних одиницях вимірів) наведені у наступній таблиці :

Тип об'єкта	Норма витрат матеріалів	
	p	q
1	2	15
2	10	20
3	10	100
4	5	50

Розв'язання. Уведемо матриці : M – матриця вихідних даних за об'єктами будівництва , A – матриця норм витрат матеріалів :

$$M = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 100 \end{pmatrix} ; \qquad A = \begin{pmatrix} 2 & 15 \\ 10 & 20 \\ 10 & 100 \\ 5 & 50 \end{pmatrix} .$$

Тоді матриця витрат матеріалів p і q має вигляд

$$\Pi = M \cdot A = \begin{pmatrix} 170 & 450 \\ 200 & 2000 \\ 500 & 5000 \end{pmatrix} ,$$

тобто витрати матеріалу p у галузях X_1, X_2, X_3 відповідно складають 170 , 200 , 500 одиниць , а матеріалу q – відповідно 450 , 2 000 , 5 000 одиниць .

Приклад 3. При виготовленні деталей чотирьох видів витрати матеріалів , робочої сили та електроенергії задаються наступною таблицею (в умовних одиницях) :

Ресурси	Витрати на одну деталь кожного виду			
	1	2	3	4
Матеріали	1	3	0,5	2
Робоча сила	1,5	2	3	1
Електроенергія	2	1	1	0,5

Обчислити загальну потребу в матеріалах y_1, робочій силі y_2 та електроенергії y_3 для виготовлення заданої кількості x_i деталей кожного виду :

$$x_1 = 10\ ; \qquad x_2 = 2\ ; \qquad x_3 = 8\ ; \qquad x_4 = 4\,.$$

Розв'язання. Загальна потреба в матеріалах , робочій силі та електроенергії для виготовлення кількості x_i деталей кожного виду визначається рівнянням

$$Y = AX\,,$$

де $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ – матриця загальної потреби в ресурсах ;

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0,5 & 2 \\ 1,5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0,5 \end{pmatrix}$ – матриця норм витрат ресурсів ;

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ – матриця кількості виробів (за видами) .

При $X = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$ із рівняння $Y = AX$ отримаємо

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0,5 & 2 \\ 1,5 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0,5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ 47 \\ 32 \end{pmatrix},$$

тобто для виготовлення заданої кількості деталей кожного виду необхідно 28 одиниць матеріалів , 47 одиниць робочої сили , 32 одиниці електроенергії .

Приклад 4. Виконати розрахунок заробітної платні, яка припадає на кожне замовлення при виготовленні різних деталей, якщо відомі такі дані .

1. Витрати робочого часу в годинах на кожному робочому місці і на кожний виріб :

у табличній формі

Виріб	Витрати на робочому місці				
	1	2	3	4	5
A	2	1	4	5	0
B	1	4	2	5	2
C	0	1	0	3	4

у матричній формі $$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

2. Кількість виробів (у штуках) у кожному замовленні :

у табличній формі

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	0	4	2
L	0	2	4
M	5	1	0

у матричній формі $$Q = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Годинна заробітна платня (у грош. од.) на кожному робочому місці :

у табличній формі

Робоче місце	Годинна заробітна платня
1	1,25
2	1,50
3	1,40
4	1,40
5	1,25

у матричній формі $$Y = \begin{pmatrix} 1,25 \\ 1,50 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,25 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки матриця Y задає лінійну залежність між розміром заробітної платні і витратами робочого часу на кожному робочому місці, а матриця P – між витратами часу на кожному робочому місці і випуском виробів, то добуток PY задає лінійну залежність між випуском виробів і розміром заробітної платні. Оскільки матриця Q визначає кількість виробів у кожному замовленні, то добуток $Q(PY)$, таким чином , визначає розмір заробітної платні, що припадає на виконання кожного замовлення. Розрахунок добутку $X = Q(PY) = (QP)Y$ виконаємо за наступною схемою :

	P	Y
Q	QP	X

Тоді маємо :

					P			1,25 1,50	Y
			2	1	4	5	0	1,40	
			1	4	2	5	2	1,40	
	Q		0	1	0	3	4	1,25	
0	4	2	4	18	8	26	16	99,60	
0	2	4	2	12	4	22	20	81,90	X
5	1	0	11	9	22	30	2	102,55	

Таким чином , заробітна платня , що припадає на замовлення K , складає 99,60 грош. од., на замовлення L – 81,90 грош. од., на замовлення M - 102,55 грош. од.

Приклад 5. У наступній таблиці у вибраних одиницях наведено склад вітамінів в харчових продуктах $П_1$, $П_2$, $П_3$:

Продукти	Вітаміни			
	A	B	C	D
$П_1$	0,5	0,5	0	0
$П_2$	0,3	0	0,2	0,1
$П_3$	0,1	0,1	0,2	0,5

1. Скільки вітамінів кожного виду міститься в раціоні , що включає 5 одиниць продукту $П_1$, 10 одиниць продукту $П_2$ і 8 одиниць продукту $П_3$?

2. Враховуючи тільки вартість вітамінів у кожному продукті з розрахунку відповідно 10 , 20 , 25 і 50 грош. од. за одиницю кожного вітаміну , встановити вартість одиниці кожного виду продукту .

3. Підрахувати вартість раціону , склад якого наведено у п . 1.

Розв'язання. Уведемо матриці :

$A=(5\ \ 10\ \ 8)$, a_{1i} – кількість одиниць продукту i-го виду в раціоні, $i=\overline{1,3}$;

$$B=\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,5 \end{pmatrix},$$ b_{ij} – кількість вітамінів j-го виду в одиниці продукту i-го виду, $j=\overline{1,4}$, $i=\overline{1,3}$;

$$C=\begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 25 \\ 50 \end{pmatrix},$$ c_{j1} – вартість одиниці вітаміну j-го виду, $j=\overline{1,4}$.

1. Позначимо $D=\begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{21} \\ d_{31} \\ d_{41} \end{pmatrix}$, d_{j1} – кількість вітамінів j-го виду, що міститься в раціоні, $j=\overline{1,4}$.

Тоді $AB=D$,

$$D=(5 \quad 10 \quad 8)\begin{pmatrix}0,5 & 0,5 & 0 & 0\\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2,5+3+0,8\\ 2,5+0,8\\ 2+1,6\\ 1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6,3\\ 3.3\\ 3,6\\ 5\end{pmatrix}.$$

2. Позначимо $F=\begin{pmatrix}f_{11}\\ f_{21}\\ f_{31}\end{pmatrix}$, f_{j1} – вартість одиниці продукту j-го виду, $j=\overline{1,3}$.

Тоді $BC=F$,

$$F=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5 & 0 & 0\\ 0,3 & 0 & 0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 20\\ 25\\ 50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5+10\\ 3+5+5\\ 1+2+5+25\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\ 13\\ 33\end{pmatrix}.$$

3. Позначимо через S – вартість раціону, склад якого наведено у п. 1.

Тоді $S=AF$,

$$S=(5 \ 10 \ 8)\begin{pmatrix}15\\ 13\\ 33\end{pmatrix}=75+130+264=469 .$$

5.19. Три підприємства випускають 4 види виробів. Задана матриця випуску продукції

$$A=(a_{ik})=\begin{pmatrix}1150 & 1250 & 1020 & 1384\\ 2030 & 3700 & 2700 & 1856\\ 1500 & 990 & 1058 & 720\end{pmatrix},$$

де a_{ik} $(i=\overline{1,3},\ k=\overline{1,4})$ – накопичений з початку року на кінець деякого місяця обсяг випуску виробів k-го виду одного підприємства . Знайти місячний обсяг випуску виробів на кожному підприємстві, якщо аналогічна матриця через місяць мала вигляд

$$B=(b_{ik})=\begin{pmatrix}2370 & 1980 & 1790 & 1880\\ 3500 & 4736 & 4015 & 2750\\ 2220 & 2112 & 2010 & 1830\end{pmatrix}.$$

5.20. Три типи транспортних літаків розподілено між чотирма авіалініями . Задані матриці обсягу перевезень :

$$A=(a_{ik})=\begin{pmatrix}15 & 10 & 20 & 50\\ 20 & 25 & 10 & 17\\ 35 & 50 & 30 & 45\end{pmatrix}; \qquad B=(b_{ik})=\begin{pmatrix}97 & 54 & 75 & 200\\ 83 & 102 & 49 & 79\\ 71 & 210 & 150 & 180\end{pmatrix},$$

де a_{ik} , b_{ik} $(i=\overline{1,3}\ ,\ \ k=\overline{1,4})$ – накопичені з початку року обсяги перевезень одним літаком i-го типу на авіалінії k-го виду відповідно 30 квітня і 1 вересня деякого року. Знайти обсяги перевезень, здійснених літаками кожного типу на кожній авіалінії за минулий період .

5.21. Підприємство випускає три види продукції, які характеризуються матрицею – планом $X=(10\ \ 7\ \ 4)$. При випуску продукції використовують 5 видів сировини . Задана матриця витрат сировини

$$A=(a_{ik})=\begin{pmatrix}5 & 10 & 3 & 9 & 2\\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8\\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10\end{pmatrix},$$

де a_{ik} – витрати k-го виду сировини на одну одиницю i-го виду продукції .

Матриця $C=(7\ \ 4\ \ 5\ \ 10\ \ 2)$ задає вартість однієї одиниці кожного виду сировини .

Визначити : а) необхідну кількість одиниць сировини кожного виду для забезпечення плану ; б) вартість сировини для одиниці кожного виду продукції ; в) загальну вартість сировини при виконанні плану випуску X .

5.22. У наведеній нижче таблиці вказана кількість одиниць продукції, яка відвантажується щодня на заводах 1 , 2 , 3 до пунктів призначення I , II , III , IV , причому доставлення одиниці продукції із кожного заводу до пункту I коштує 90 грош. од., до пункту II – 110 , до пункту III – 120 , до пункту IV – 140 грош. од. Скласти матрицю витрат на перевезення .

Завод	Пункт призначення			
	I	II	III	IV
1	10	15	9	7
2	14	8	12	8
3	6	14	22	17

5.23. Заплановано побудувати в декількох галузях народного господарства об'єкти чотирьох різноманітних типів . Будівельний обсяг об'єктів за кожним з типів наступний (у тис. м^3) :

$$I - 75\,, \quad II - 100\,, \quad III - 50\,, \quad IV - 50\,.$$

Визначити обсяг будівельно-монтажних робіт трьох великих комплексів m, n, p, які виконуються під час будівництва цих об'єктів. Обсяги кожного виду робіт на один кубометр обсягу будівель в залежності від типу об'єкта наведено в наступній таблиці :

Тип об'єкта	Обсяги робіт		
	m	n	p
I	5	10	5
II	10	15	20
III	10	5	5
IV	20	5	20

5.24. При будівництві об'єктів різноманітних типів повинні бути виконані будівельно-монтажні роботи трьох великих комплексів m, n, p відповідно в обсязі 20 , 100 , 30 одиниць . Визначити потребу в робітничих кадрах чотирьох професій , необхідних для виконання цих робіт , якщо норми витрат праці робітників кожної професії наведені в наступній таблиці :

Комплекс	Норми витрат праці за професією			
	I	II	III	IV
m	2	5	4	5
n	4	2	10	2
p	2	8	4	6

5.25. Виконати розрахунок заробітної платні , яка приходиться на кожне замовлення при виробництві різноманітних виробів, користуючись даними наступних таблиць :

Виріб	Витрати робочого часу на кожному з робочих місць			
	1	2	3	4
A	0,8	2,1	1,2	3,0
B	1,3	0,5	2,8	0,2
C	1,1	1,0	2,5	1,8

Замовлення	Кількість виробів		
	A	*B*	*C*
K	5	7	3
L	4	0	2
M	6	2	1

Робоче місце	Годинна заробітна платня
1	1,30
2	1,25
3	1,40
4	1,45

5.5. Економічні задачі, що зводяться до систем лінійних рівнянь

Приклад 1. З деякого листового матеріалу необхідно викроїти 200 заготовок типу A , 260 – типу B і 290 – типу C . При цьому можна застосовувати три способи розкроювання . Кількість заготовок, одержуваних з кожного листа при кожному способі розкроювання, наведена в наступній таблиці :

Тип заготовки	Спосіб розкроювання		
	1	2	3
A	3	2	1
B	1	6	2
C	4	1	5

Записати в математичній формі умови виконання завдання .

Розв'язання. Позначимо через x_1, x_2, x_3 кількість листів матеріалу , що розкроєні відповідно першим , другим і третім способами . Тоді за першим способом розкроювання x_1 листів буде отримано $3x_1$ заготовок типу A , за другим – $2x_2$, за третім – $1x_3$. Для повного виконання завдання по заготовкам типу A сума $3x_1+2x_2+x_3$ повинна дорівнювати 200 , тобто $3x_1+2x_2+x_3=200$.

Аналогічно одержуємо рівняння

$$x_1+6x_2+2x_3=260\ ,$$

$$4x_1+x_2+5x_3=290\ ,$$

яким повинні задовольняти невідомі x_1, x_2, x_3 для того, щоб виконати завдання по заготовкам B і C.

Система лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2+\ x_3=200\ ; \\ x_1+6x_2+2x_3=260\ ; \\ 4x_1+\ x_2+5x_3=290 \end{cases}$$

виражає в математичній формі умови виконання всього завдання по заготовкам A, B, C.

Помітимо, що системи отриманого вигляду можуть бути розв'язані вивченими методами або використані як обмеження на змінні x_1, x_2, x_3 при розв'язанні оптимізаційних задач, пов'язаних з розкроюванням листового матеріалу.

Приклад 2. За умови прикладу 1 встановити, скільки листів буде потрібно для викроювання означеної кількості заготовок. Для розв'язку системи використати метод Гаусса.

Розв'язання. Систему, отриману в прикладі 1, запишемо у вигляді

$$\begin{cases} x_1+6x_2+2x_3=260\ ; \\ 3x_1+2x_2+\ x_3=200\ ; \\ 4x_1+\ x_2+5x_3=290\ . \end{cases}$$

Перетворимо розширену матрицю системи:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 260 \\ 3 & 2 & 1 & 200 \\ 4 & 1 & 5 & 290 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 260 \\ 0 & -16 & -5 & -580 \\ 0 & -23 & -3 & -750 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 260 \\ 0 & 16 & 5 & 580 \\ 0 & 0 & -3+5\cdot\frac{23}{16} & -750+\frac{580\cdot 23}{16} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 260 \\ 0 & 16 & 5 & 580 \\ 0 & 0 & \frac{67}{16} & \frac{1340}{16} \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 6 & 2 & 260 \\ 0 & 16 & 5 & 580 \\ 0 & 0 & 1 & 20 \end{array}\right).$$

Ставимо у відповідність розширеній матриці спрощену систему:

$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 260 \ ; \\ \quad 16x_2 + 5x_3 = 580 \ ; \\ \qquad x_3 \ = \ 20 \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 260 - 6 \cdot 30 - 2 \cdot 20 = 40 \ ; \\ x_2 = \dfrac{580}{16} - \dfrac{5}{16} \cdot 20 = \dfrac{480}{16} = 30 \ ; \\ x_3 = 20 \ , \end{cases}$$

$$x_1 = 40 \ , \quad x_2 = 30 \ , \quad x_3 = 20 \ .$$

Перевірка :

$$\begin{cases} 3 \cdot 40 + 2 \cdot 30 + 20 = 200 \ ; \\ 40 + 6 \cdot 30 + 2 \cdot 20 = 260 \ ; \\ 4 \cdot 40 + 30 + 5 \cdot 20 = 290 \ . \end{cases}$$

Система розв’язана вірно .

Приклад 3. Припустимо, що функція, яка характеризує валовий дохід підприємства, має вигляд $y_t = a + bq_t + cq_t^{\,2}$, де y_t – валовий дохід ; q_t – випуск продукції за період t . Спостереження охоплюють лише два періоди, для яких значення q_t , y_t наведені в наступній таблиці :

Період t	q_t	y_t
1	10	100
2	20	150

1. Виходячи з матричної форми задання функції валового прибутку

$$A(a \ b \ c)^{\mathrm{T}} = y_t ,$$

де $A = (1 \ \ q_t \ \ q_t^2)$, скласти з урахуванням проведених спостережень систему рівнянь для визначення параметрів a, b, c і розв’язати її .

2. Визначити всю сукупність функцій валового прибутку , що задовольняють згаданій в п. 1 системі рівнянь .

Розв’язання. Запишемо функцію валового прибутку у вигляді

$$(1 \quad q_t \quad q_t^2) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = y_t \, .$$

Підставимо задані значення з таблиці :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix}1 & 10 & 100\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=100 \ ; \\ \begin{pmatrix}1 & 20 & 400\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix}=150 \ . \end{cases}$$

Маємо систему

$$\begin{cases} a+10b+100c=100 \ ; \\ a+20b+400c=150 \ . \end{cases}$$

Розв'язуємо її, використовуючи метод Гаусса:

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 10 & 100 & 100\\ 1 & 20 & 400 & 150\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 10 & 100 & 100\\ 0 & 10 & 300 & 50\end{array}\right).$$

$\mathrm{Rg}\,A=\mathrm{Rg}\,\overline{A}=2=r<n=3 \ \Rightarrow$ Система сумісна, має безліч розв'язків:

$$\begin{cases} a+10b+100c=100 \ ; \\ \quad 10b+300c=\ 50 \ . \end{cases}$$

a, b – базисні змінні; c – вільна змінна,

$$\begin{cases} a+10b=100-100c \ ; \\ \quad 10b=\ 50-300c \ , \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-10\,(5-30c)+100-100c \ ; \\ b=5-30c \ , \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=50+200\,c \ ; \\ b=\ 5-\ 30\,c \ , \quad c\in R \ . \end{cases}$$

2. Уся сукупність функцій валового прибутку

$$y_t=(200c+50)+(5-30c)\,q_t+cq_t^2 \ .$$

До числа задач економіки, які зводяться до систем лінійних рівнянь, **відносяться задачі балансового аналізу**. Мета балансового аналізу – відповісти на питання, що виникає в макроекономіці і пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної з n галузей, щоб задовольнити всі потреби у продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник деякої продукції, а з іншого – як споживач і своєї і виробленої іншими галузями.

Зв'язок між галузями , як правило , відбивається в таблицях міжгалузевого балансу, а математична модель, що дозволяє їх аналізувати, розроблена в 1936 р. американським економістом В. Леонтьєвим . Розглянемо докладно модель Леонтьєва багатогалузевої економіки .

Припустимо, що розглядається n галузей промисловості, кожна з яких виробляє свою продукцію. Частина продукції йде на внутрішньо-виробниче споживання даною галуззю та іншими галузями, а решта призначена для мети кінцевого (поза сферою матеріального виробництва) особистого і суспільного споживання .

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу (наприклад , рік) .

Уведемо наступні позначення :

x_i – загальний (валовий) обсяг продукції i-ї галузі $(i=\overline{1,n})$;

x_{ij} – обсяг продукції i-ї галузі , що споживається j-ю галуззю в процесі виробництва $(i,j=\overline{1,n})$;

y_i – обсяг кінцевого продукту i-ї галузі для невиробничого споживання .

Оскільки валовий обсяг продукції будь-якої i-ї галузі дорівнює сумарному обсягу продукції, що споживається n галузями , і кінцевого продукту, то

$$x_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+y_i\,, \qquad i=\overline{1,\,n}\ .$$

Записані рівняння називаються співвідношеннями балансу . Будемо розглядати вартісний міжгалузевий баланс , коли всі величини , що входять у ці рівняння , мають вартісне вираження .

Уведемо коефіцієнти прямих витрат

$$a_{ij}=\frac{x_{ij}}{x_j}\ , \qquad i,\,j=\overline{1,\,n}\ ,$$

що показують витрати продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі .

Можна вважати, що в деякому проміжку часу коефіцієнти a_{ij} будуть сталими і залежатимуть від технології виробництва, що склалася . Це означає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску , тобто

$$x_{ij}=a_{ij}x_j\ , \qquad i,\,j=\overline{1,n}\ ,$$

…слідок чого побудована на цій підставі модель міжгалузевого балансу от- …мала назву **лінійної**.

Тепер співвідношення балансу набудуть вигляду

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i , \qquad i = \overline{1,n} .$$

Позначимо : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$; $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$; $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

…е X - вектор валового випуску ; Y – вектор кінцевого продукту : A – матри- …я прямих витрат .

Тоді співвідношення балансу можна записати в матричному вигляді :

$$X = AX + Y .$$

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у відшуканні такого **вектора** валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A за- …езпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Перепишемо співвідношення балансу у вигляді

$$Y = (E - A)X .$$

Маємо систему лінійних рівнянь відносно X. Якщо матриця $(E - A)$ …евироджена , тобто $\det(E - A) \neq 0$, то існує єдиний розв'язок системи, який знаходимо матричним способом

$$X = (E - A)^{-1} \cdot Y .$$

Матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається **матрицею повних витрат** .

Щоб з'ясувати економічний зміст елементів матриці $S = (S_{ij})$, будемо задаватися одиничними векторами кінцевого продукту $Y_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)^{T}$, …$_2 = (0, 1, \dots, 0)^{T}, \dots , Y_n = (0, 0, \dots, 1)^{T}$. Тоді з огляду на те, що $X = S \cdot Y$, …ідповідні вектори валового випуску будуть

$$X_1 = (S_{11}, S_{21}, \dots, S_{n1})^{T}, \quad X_2 = (S_{12}, S_{22}, \dots, S_{n2})^{T}, \dots , \quad X_n = (S_{1n}, S_{2n}, \dots, S_{nn})^{T}.$$

Отже, кожний елемент S_{ij} матриці S є валовий випуск продукції …-ї галузі, необхідний для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-ї галузі $y_j = 1$, $j = \overline{1,n}$.

Відповідно до економічного змісту задачі значення x_i повинні бути невід'ємними при невід'ємних значеннях y_i, a_{ij}, де $i,j = \overline{1,n}$.

Матриця $A(a_{ij} \geq 0)$ називається **продуктивною,** якщо для будь-якого вектора $Y(y_i \geq 0)$ існує розв'язок $X(x_i \geq 0)$ системи $X = AX + Y$. У цьому випадку і модель Леонтьєва називається продуктивною.

Існує декілька критеріїв продуктивності матриці A . Один з них говорить про те, що матриця A продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпців не перебільшує одиниці, причому хоча б для одного стовпця сума елементів строго менша одиниці , тобто матриця A продуктивна, якщо

$a_{ij} \geq 0 \quad \forall\ i,j = \overline{1,n}$, $\max\limits_{j=\overline{1,n}} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, існує номер j такий , що

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} < 1$.

Приклад 4. У таблиці наведено дані про використання балансу за звітний період , умов. грош. од. :

Галузь		Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
		Енергетика	Машинобудування		
Виробництво	Енергетика	7	21	72	100
	Машинобудування	12	15	73	100

Обчислити необхідний обсяг валового випуску в кожній галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі збільшиться вдвічі, а машинобудування залишиться на колишньому рівні .

Розв'язання. Маємо :

$$x_1 = 100,\ x_2 = 100,\ x_{11} = 7,\ x_{12} = 21,\ x_{21} = 12,\ x_{22} = 15;$$

$$y_1 = 72\ ,\quad y_2 = 73\ .$$

Знаходимо коефіцієнти прямих витрат за формулою

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \quad i,j = 1,2$$

$a_{11} = 0{,}07$; $a_{12} = 0{,}21$; $a_{21} = 0{,}12$; $a_{22} = 0{,}15$; тобто матриця прямих витрат

$$A=\begin{pmatrix}0{,}07 & 0{,}21\\ 0{,}12 & 0{,}15\end{pmatrix}.$$

Матриця A має невід'ємні елементи і задовольняє критерію продуктивності :

$$\max\ \{0{,}07+0{,}12;\ 0{,}21+0{,}15\}=\max\ \{0{,}19;\ 0{,}36\}=0{,}36<1.$$

Тому для будь-якого вектора кінцевого продукту Y можна знайти необхідний обсяг валового випуску X за формулою

$$X=(E-A)^{-1}\cdot Y.$$

Знайдемо матрицю повних витрат $S=(E-A)^{-1}$

$$E-A=\begin{pmatrix}0{,}93 & -0{,}21\\ -0{,}12 & 0{,}85\end{pmatrix}.$$

Оскільки $\det(E-A)=0{,}7653\neq 0$, то

$$S=(E-A)^{-1}=\frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}21\\ 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}.$$

За умовою вектор кінцевого продукту $Y=\begin{pmatrix}144\\ 73\end{pmatrix}$.

Тоді вектор валового випуску X визначиться так :

$$X=\frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix}0{,}85 & 0{,}21\\ 0{,}12 & 0{,}93\end{pmatrix}\begin{pmatrix}144\\ 73\end{pmatrix}=\frac{1}{0{,}7653}\begin{pmatrix}137{,}73\\ 85{,}17\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}179{,}99\\ 111{,}28\end{pmatrix}.$$

Отже, валовий випуск в енергетичній галузі треба збільшити до 179, 99 умов. од., а в машинобудівній – до 111, 28 умов. од.

Відомо, що задача знаходження власних векторів і власних значень матриць зводиться до розв'язку однорідних систем лінійних рівнянь.

Як приклад математичної моделі економічного процесу, що приводить до поняття власного вектора і власного значення матриці, розглянемо **лінійну модель обміну (модель міжнародної торгівлі)** .

Нехай є n країн $S_1, S_2, \dots, S_n$, національний дохід кожної з яких дорівнює відповідно $x_1, x_2, \dots, x_n$. Позначимо коефіцієнтами a_{ij} частку національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i.

Будемо вважати, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \qquad j = \overline{1, n} \ .$$

Розглянемо матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

що отримала назву **структурної матриці торгівлі** . Враховуючи попередню рівність, сума елементів будь-якого стовпця матриці A дорівнює одиниці .

Для будь-якої країни S_i , $i = \overline{1, n}$ виручка від внутрішньої і зовнішньої торгівлі складе

$$p_i = a_{i1} x_1 + a_{i2} x_2 + \ldots + a_{in} x_n \ .$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної країни S_i, тобто виручка від торгівлі кожної країни повинна бути не меншою її національного доходу :

$$p_i \geq x_i \ , \qquad i = \overline{1, n} \ .$$

Якщо вважати, що $p_i > x_i \quad \forall i$, то одержуємо систему нерівностей .

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n > x_1 \ ; \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n > x_2 \ ; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + \ldots + a_{nn} x_n > x_n \ . \end{cases}$$

Додавши ліві і праві частини нерівностей, отримаємо після перегрупування :

$$x_1 (a_{11} + a_{21} + \ldots + a_{n1}) + x_2 (a_{12} + a_{22} + \ldots + a_{n2}) + \ldots + x_n (a_{1n} + a_{2n} + \ldots + a_{nn}) >$$
$$> x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ .$$

Враховуючи, що вирази в дужках дорівнюють одиниці, приходимо до суперечливої нерівності :

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_n \ .$$

Таким чином, нерівність $p_i > x_i$, $i=\overline{1,n}$ неможлива, і умова $p_i \ge x_i$ **ває** вигляду $p_i = x_i$, $i=\overline{1,n}$. (З економічної точки зору це зрозуміло, всі країни не можуть водночас одержувати прибуток.)

Уводячи вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ національних доходів країн, отримає- івняння

$$A\vec{x} = \vec{x},$$

о задача звелася до знаходження власного вектора матриці A, що відпов- власному значенню $\lambda = 1$.

Приклад 5. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має ляд

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}6 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Знайти співвідношення національних доходів країн для збалансованої івлі.

Розв'язання. Згідно з викладеною вище теорією власним значенням иці A є $\lambda = 1$. Перевіримо, чи $\lambda = 1$ задовольняє характеристичному нню

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

о рівнянню

$$\begin{vmatrix} 0{,}1-\lambda & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}6-\lambda & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Поклавши $\lambda = 1$ та розкривши визначник, впевнюємось, що це вірно.

Знаходимо власний вектор $\vec{x}$, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$, 'язавши систему

$$(A - E)X = 0,$$

в розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} -0{,}9 & 0{,}3 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & -0{,}4 & 0 \\ 0{,}1 & 0{,}1 & -0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Використаємо метод Гаусса для розв'язування отриманої системи :

$$\begin{cases} -0,9x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 = 0 \ ; \\ 0,8x_1 - 0,4x_2 \qquad\quad = 0 \ ; \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 - 0,2x_3 = 0 \ . \end{cases}$$

Знаходимо, що

$$x_1 = \frac{2}{3}C \ ; \quad x_2 = \frac{4}{3}C \ ; \quad x_3 = C \ , \quad \text{тобто} \quad \vec{x} = \left(\frac{2}{3}C \, , \ \frac{4}{3}C \, , \ C\right) .$$

Отриманий результат означає, що для збалансованої торгівлі співвідношення національних доходів повинно бути $\frac{2}{3} : \frac{4}{3} : 1$, або $2:4:3$.

5.26. З пункту A до пункту B необхідно перевезти обладнання трьох типів: I – 95 од., II – 100 од., III – 185 од. Для перевезення обладнання завод може замовити три види транспорту. Кількість обладнання кожного типу, що вміщується на певний вид транспорту, наведена в наступній таблиці :

Тип обладнання	Вид транспорту		
	T_1	T_2	T_3
I	3	2	1
II	4	1	2
III	3	5	4

Записати в математичній формі умови перевезення обладнання з пункту A до пункту B .

5.27. За умови задачі 5.26 встановити, скільки одиниць транспорту кожного виду потрібно для перевезення обладнання з пункту A до пункту B . Для розв'язання системи використати метод Гаусса .

5.28. Підприємство випускає продукцію трьох видів A , B , C . Рівень випуску лімітується обмеженістю ресурсів. Усі числові дані наведено в наступній таблиці :

Ресурси	Запас ресурсу	Норми витрат на одиницю продукції		
		A	B	C
Сировина, кг	24	5	7	4
Матеріали, кг	75	10	5	20
Обладнання, од.	10	5	2	1

Записати в математичній формі умови, яким повинен задовольняти план випуску продукції, припускаючи повне використання ресурсів .

5.29. За умови задачі 5.28 знайти план випуску продукції. Для розв'язання системи використати метод Гаусса .

5.30. Цех випускає три види виробів: I , II , III . При цьому застосовуються три виробничих процеси: штампування, складання і фарбування. Інтенсивність (в людино-годинах за період) даних процесів складає відповідно 40 , 40 і 80 , а трудомісткість кожного процесу при виробництві продукції задається матрицею

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix},$$

де a_{ij} – кількість людино-годин , необхідна для i-го процесу обробки одиниці виробу j-го виду .

1. Написати в матричній формі систему рівнянь, яка характеризує рівність потужностей, що використовуються, і наявних для кожного процесу .

2. Нехай потужності кожного процесу обробки використовуються повністю. Який буде при цьому випуск кожного виду продукції ?

5.31. У наведеній нижче таблиці вказано вміст вітамінів A, B, C в одиниці маси кожного з продуктів $П_1$, $П_2$ і $П_3$. Для підтримання здоров'я необхідно споживати 11 од. вітаміну A , 9 од. вітаміну B і 20 од. вітаміну C.

Продукти	Вітаміни		
	A	B	C
$П_1$	1	3	4
$П_2$	2	3	5
$П_3$	3	0	3

1. Знайти всі можливі варіанти дієти, що включають продукти $П_1$, $П_2$, $П_3$ і містять означену кількість вітамінів A , B , C .

2. Нехай ціна одиниці продукту $П_1$ складає 60 грош. од., продукту $П_2$ – [illegible] грош. од., продукту $П_3$ – 10 грош. од. Скласти дієту вартістю 100 грош. од.

5.32. В економіці і господарській діяльності важливу роль відіграє припущення, що механізм ринкової конкуренції змінює ціну на продукт настільки , що попит і пропозиція зрівноважуються . Припустимо, що функція попиту на холодильники протягом певного часу має вигляд $x_1 = 12000 - 0{,}2x_2$, де x_1 – ціна холодильника, а x_2 – відповідна їхня кількість. Нехай функція пропозиції має вигляд : $x_1 = 300 + 0{,}1x_2$. При яких значеннях x_1 і x_2 настає рівновага ? Вирішити систему матричним методом (методом оберненої матриці) .

5.33. З двох заводів поставляються автомобілі для двох автопідприємств, потреби яких відповідно 200 і 300 автомобілів. Перший завод випустив 350 автомобілів, а другий – 150 автомобілів. Відомі витрати на перевезення автомобілів з заводу до кожного автопідприємства, що задані таблицею :

Завод	Витрати на перевезення в автопідприємство, грош. од.	
	1	2
1	15	20
2	8	25

Мінімальні витрати на перевезення дорівнюють 7 950 грош. од. Знайти оптимальний план перевезень автомобілів.

5.34. Є три банки, кожний з яких нараховує вкладнику певний річний відсоток (свій для кожного банку). На початку року 1/3 вкладу розміром 6 000 грош. од. вклали в банк 1, 1/2 вкладу – в банк 2 і частину, що залишалася – в банк 3, і до кінця року сума цих вкладів зросла до 7 500 грош. од. Якщо б спочатку 1/6 вкладу поклали у банк 1, 2/3 – у банк 2 і 1/6 вкладу - у банк 3, то до кінця року сума вкладу склала б 7 200 грош. од.; якщо б 1/2 вкладу поклали у банк 1, 1/6 – у банк 2 і 1/3 вкладу – у банк 3, то сума вкладів наприкінці року склала б 1250 грош. од. Який відсоток виплачує кожний банк ?

5.35. У таблиці наведено дані про виконання балансу за звітний період, умов. грош. од.:

	Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
		1	2		
Виробництво	1	100	160	240	500
	2	275	40	85	400

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної галузі, якщо кінцевий продукт першої галузі повинен збільшитися вдвічі, а другої – на 20 %.

5.36. У таблиці наведено дані виконання балансу за звітний період, млв. грош. од.

Фірма	Постачання фірмі		Кінцевий продукт	Валовий випуск
	1	2		
1	40	200	160	400
2	320	100	80	500

Обчислити необхідний обсяг валового випуску кожної фірми, якщо :
а) кінцевий продукт фірми 1 дорівнює 70, а фірми 2 – 120 ;
б) кінцевий продукт фірми 1 дорівнює 60, а фірми 2 – 80 .

5.37. У математичній економіці велику роль відіграють так звані продуктивні матриці. Доведено, що матриця A є продуктивною тоді і тільки тоді, коли всі власні значення матриці A за модулем менші одиниці. Перевірити, чи є матриця A продуктивною, якщо :

а) $A=\begin{pmatrix} 0,125 & 0,125 \\ 1,125 & 0,125 \end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0,1 & 0,5 \end{pmatrix}$.

5.6. Економічні задачі, пов'язані з послідовністю та її границею (елементи математики фінансів)

Розглянемо загальноприйняті в ринковій економіці алгоритми нарахування відсотку в залежності від терміну позички, типу відсотків, схеми поточного нарахування.

1. Побудова числової послідовності для знаходження грошових нагромаджень з урахуванням простих відсотків.

Позначимо через A грош. од. первісну суму. Процентна ставка дорівнює q відсотків річних. При нагромадженні грошових коштів з урахуванням простих відсотків у кожний тимчасовий період на добавлений відсоток не нараховуються нові відсотки. Тоді грошові нагромадження складуть :

після першого року $A_1 = A + \frac{Aq}{100} = A + Ar$, де $r = \frac{q}{100}$;

після другого року $A_2 = A + Ar + Ar = A(1+2r)$;

....

після n - го року $A_n = A(1+nr)$.

Отже,

$$A_n = A(1+nr).$$

2. Побудова числової послідовності для характеристики грошових нагромаджень з урахуванням складних відсотків.

При позначеннях, уведених у п. 1, отримаємо, враховуючи тепер, що відсоток прибутку нараховується на всі грошові нагромадження :

після першого року $A_1 = A + Ar = A(1+r)$;

після другого року $A_2 = A_1 + A_1 r = A(1+r)^2$;

....

після n-го року $A_n = A_{n-1} + A_{n-1} r = A(1+r)^n$.

Отже, при нарахуванні складних відсотків протягом n років кінцева сума грошових нагромаджень складе

$$A_n = A(1+r)^n.$$

Це основна формула для нарахування складних відсотків .

Величина $S = 1 + r$ називається коефіцієнтом складного відсотку .

3. Нехай відсотки нараховуються рівномірно m разів протягом року, кожний раз за нормою $\frac{r}{m}$ на новий залишок вкладу (сума вважається стабільною протягом усього розглядуваного періоду), тоді загальний член цієї послідовності буде мати вигляд

$$A_n = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn}.$$

4. Нехай відсотки тепер нараховуються неперервно, тобто $m \to \infty$, тоді отримаємо

$$\lim_{m\to\infty} A_n = \lim_{m\to\infty} A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{mn} = Ae^{rn}.$$

Отже, $A_n = A \cdot e^{rn}$.

Цю формулу можна використати для будь-яких розрахунків, пов'язаних зі складними відсотками .

5. Наведені в п. 1 – 4 формули зв'язують чотири змінні величини : A, A_n, r, n, де $r = \frac{q}{100}$, q – процентна ставка .

Знаючи три з них, можна легко знайти четверту .

Наприклад , з основної формули для нарахування складних відсотків

$$A_n = A\left(1+\frac{q}{100}\right)^n ,$$

після нескладних перетворень, отримаємо наступні формули :

$$n = \frac{\ln A_n - \ln A}{\ln\left(1+\frac{q}{100}\right)} ; \qquad q = 100\left[\left(\frac{A_n}{A}\right)^{\frac{1}{n}} - 1\right] ; \qquad A = A_n\left(1+\frac{q}{100}\right)^{-n} .$$

Відмітимо, що операція знаходження первісного вкладу A називається **дисконтуванням** . Значення A називають також **сучасним значенням для** A_n .

Приклад 1. Нехай 3 млн грош. од. видано в кредит на 6 місяців під прості відсотки за ставкою 10 % за місяць . Знайти нарощуване значення боргу наприкінці кожного місяця .

Розв'язання. Позначимо A_k – нарощуване значення боргу наприкінці місяця k . Оскільки $A = 3$ млн грош. од., $r = \frac{10}{100} = 0{,}1$, то виходячи з формули $A_k = A(1 + kr)$, маємо

$$A_k = 3(1 + 0{,}1\, k) , \qquad k = \overline{1,6} .$$

Отриманий результат представимо у вигляді таблиці.

k	0	1	2	3	4	5	6
A_k	3	3,3	3,6	3,9	4,2	4,5	4,8

Ми бачимо, що послідовність $A_0 = A$, A_1, A_2, ..., A_6 – це арифметична прогресія з початковим членом $A_0 = 3$ млн грош. од. і різницею 300 тис. грош. од.

Приклад 2. Нехай первісний вклад $A = 250$ тис. грош. од. вкладено на 4 роки під складні відсотки за ставкою 100 % річних. Знайти нарощуване значення вкладу за роками.

Розв'язання. Позначимо A_k – нарощуване значення вкладу наприкінці k-го року. Оскільки $A = 250 \cdot 10^3$ грош. од., $r = \frac{100}{100} = 1$, то за формулою $A_k = A\,(1 + r)^k$ маємо

$$A_k = 250 \cdot 10^3 (1+1)^k = 250 \cdot 10^3 \cdot 2^k, \quad k = \overline{1,4}.$$

Складемо таблицю.

k, років	0	1	2	3	4
A_k	$250 \cdot 10^3$	$5 \cdot 10^5$	10^6	$2 \cdot 10^6$	$4 \cdot 10^6$

Як видно, при $q = 100$ % зростання вкладу відбувається дуже швидко.

Приклад 3. 10 млн грош. од. інвестовані на 2 роки за ставкою 120 % річних. Треба знайти нарощувану за цей час суму і її приріст при нарахуванні: а) щорічно; б) по півріччям; в) щокварталу; г) щомісяця.

Розв'язання. Скористаємось формулою

$$A_n = A\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mn},$$

де $n = 2$, $A = 10$ млн грош. од., $q = 120$ %, $r = \frac{q}{100} = \frac{120}{100} = 1{,}2$, $m = 1, 2, 4, 12$ відповідно для випадків а), б), в), г).

Позначимо $\Delta = A_2 - A$ – приріст суми. Результати зведемо до таблиці.

Випадок	m	$\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot 2}$	$A_2 = A\left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\cdot 2}$, млн грош. од.	$\Delta = A_2 - A$, млн грош. од.
1	2	3	4	5
а)	1	$\left(1+\frac{1{,}2}{1}\right)^2 = 4{,}8400$	48,400	38,400

1	2	3	4	5
б)	2	$\left(1+\frac{1{,}2}{2}\right)^4=6{,}5536$	65,536	55,536
в)	4	$\left(1+\frac{1{,}2}{4}\right)^8=8{,}1573$	81,573	71,573
г)	12	$\left(1+\frac{1{,}2}{12}\right)^{24}=9{,}8497$	98,497	88,497

Приклад 4. Потрібно знайти сучасне значення боргу (первісний борг), …ована сума якого через 3 роки складе 7 млн грош. од. Відсотки нараховуються за наступними ставками : а) 140 % наприкінці кожного року ; б) 20 % наприкінці кожного кварталу ; в) 120 % річних наприкінці кожного місяця .

Розв'язання.

а) $A=\dfrac{A_n}{\left(1+\dfrac{q}{100}\right)^n}$,

де A – первісний борг або сучасне значення боргу ; $n=3$, $A_3=7\cdot10^6$ грош.

а ; $\dfrac{q}{100}=\dfrac{140}{100}=1{,}4$;

$$A=\frac{7\cdot10^6}{(1+1{,}4)^3}=\frac{7\cdot10^6}{13{,}824}=506\ 366\ .$$

б) $A=\dfrac{A_n}{(1+r)^{m\cdot n}}$,

де $n=3$, $A_3=7\cdot10^6$ грош. од.; $m=4$; $r=\dfrac{q}{100}=\dfrac{20}{100}=0{,}2$;

$$A=\frac{7\cdot10^6}{(1+0{,}2)^{12}}=\frac{7\cdot10^6}{8{,}916}=785\ 105\ .$$

в) $A = \dfrac{A_n}{\left(1+\dfrac{r}{m}\right)^{m \cdot n}}$,

де $n = 3$, $A_3 = 7 \cdot 10^6$ грош. од., $m = 12$; $r = \dfrac{q}{100} = \dfrac{120}{100} = 1{,}2$;

$$A = \frac{7 \cdot 10^6}{\left(1+\dfrac{1{,}2}{12}\right)^{36}} = \frac{7 \cdot 10^6}{30{,}913} = 226\ 442 \ .$$

Приклад 5. Сума 2 000 грош. од. покладена в банк за схемою неперервного нарахування відсотків за ставкою 10 % за рік. Знайти нарощену наприкінці року суму A_n при $n = 1,\ 2,\ 3,\ 5$ і 10 .

Розв'язання.

$$A_n = A \cdot e^{rn},$$

$$r = \frac{10}{100} = 0{,}1 , \quad A_n = 2000 \cdot e^{0{,}1 \cdot n} .$$

Результати обчислень зведено до таблиці.

n , років	0	1	2	3	5	10
A_n , грош. од.	2000	2210,34	2442,81	2699,72	3297,44	5436,56

Приклад 6. При одній і тій же відсотковій ставці за схемою неперервного нарахування відсотків вкладник C через 2 роки одержує 1 000 грош. од., вкладник D через 4 роки одержує 600 грош. од. Знайти відсоткову ставку q , якщо первісний вклад вкладника C вдвічі більше, ніж вклад вкладника D .

Розв'язання. Скористаємось формулою

$$A_n = A \cdot e^{rn} .$$

Тоді

$$A_2 = A^{(1)} \cdot e^{r \cdot 2} \ ; \qquad A_4 = A^{(2)} \cdot e^{r \cdot 4} ,$$

де – $A^{(1)}$, $A^{(2)}$ – початкові вклади вкладників C та D відповідно ,

$$A^{(1)} = A_2 \cdot e^{-2 \cdot r} \ ; \qquad A^{(2)} = A_4 \cdot e^{-4 \cdot r} .$$

Враховуючи, що $A^{(1)} = 2A^{(2)}$, маємо

$$1000 \cdot e^{-2\cdot r} = 1200 \cdot e^{-4\cdot r} .$$

Звідси

$$e^{2r} = 1{,}2 ;$$

$$2 \cdot r = \ln 1{,}2 \; ; \quad r = 0{,}5 \ln 1{,}2 = 0{,}09116 ,$$

$$q = r \cdot 100 \; \% \approx 9{,}1 \; \% .$$

Приклад 7. Знайти первісний борг позичальника кредитору, якщо позичальник повинен сплатити кредитору 1 000 грош. од. через 2 роки, 2 500 грош. од. через 3 роки, 3 000 грош. од. через 3,5 роки. Відсоткова ставка 6 % річних, нарахування відсотків неперервне.

Розв'язання. Скористаємось формулою $A_n = A \cdot e^{rn}$, звідки $A = A_n \cdot e^{-rn}$. За умовою $r = 0{,}06$. Тоді з урахуванням того, що борг повертається частинами, маємо

$$A = A_2 \cdot e^{-0{,}12} + A_3 \cdot e^{-0{,}18} + A_{3{,}5} \cdot e^{-0{,}21} ;$$

$$A = 1000 \; e^{-0{,}12} + 2500 \; e^{-0{,}18} + 3000 \; e^{-0{,}21} = 5\;406{,}85 \text{ грош. од.}$$

5.38. Знайти суму грошових нагромаджень від 5 000 грош. од. з урахуванням простих відсотків через п'ять років при відсотковій ставці $q_1 = 2 \;\%$, $q_2 = 3 \;\%$ річних. Обчислити відповідний приріст функції нагромаджування за 5 років в обох випадках.

5.39. Розв'язати задачу 5.38 з урахуванням складних відсотків. Порівняти результати.

5.40. Сума 800 тис. грош. од. інвестується на 3 роки під складні відсотки за ставкою 80 % річних. Знайти нарощену суму за цей термін.

5.41. Вклад $A = 100\,000$ грош. од. вкладено під складні відсотки терміном на 3 роки. Обчислити кінцеву суму, якщо відсотки нараховуються наприкінці кожного кварталу за нормою $r / m = 0{,}06 / 4 = 0{,}015$.

5.42. Розв'язати задачу 5.41 в припущенні, що відсотки нараховуються неперервно. Порівняти результати.

5.43. Кредит розміром 600 тис. грош. од. видано під складні відсотки на 1 рік за ставкою 10 % в місяць. Знайти повну суму боргу до кінця терміну.

5.44. Знайти складні відсотки за півтора року, нараховані на 900 тис. грош. од. за ставкою 32 % у квартал .

5.45. На терміновий вклад у банку зараховано 100 грош. од. за ставкою 6 % річних . Знайти нагромаджені на рахунку суми через 2 , 3 , 4 і 5 років за умови : а) нарахування простих відсотків ; б) нарахування складних відсотків ; в) неперервного нарахування відсотків.

5.46. Знайти сучасне значення інвестиції (початкове значення), якщо нарощена до кінця п'ятого року сума складає 15 млн грош. од. Відсотки нараховуються за наступними ставками : а) 120 % наприкінці кожного року ; б) 60 % наприкінці кожного півріччя .

5.47. Знайти, яка сума повинна бути інвестована сьогодні для накопичування 500 тис. грош. од. до кінця року при нарахуванні відсотків за ставкою : а) 160 % річних наприкінці кожного кварталу ; б) 140 % річних наприкінці кожного півріччя .

5.48. При ставці 6 % в рік знайти первісний борг позичальника кредитору, якщо позичальник повинен сплатити кредитору 1 000 грош. од. через 0,75 року , 2 500 грош. од. через 1,75 року , 3 000 грош. од. через 2,25 року . Нарахування відсотків неперервне .

5.49. Щорічний приріст деревини в сосновому лісі складає 4 % , промисловість використовує 5,5 % наявних насаджень . Через скільки років залишиться 1 % наявної деревини ?

5.50. Первинна вартість верстата складає A грош. од., амортизаційні відрахування - q% річних . Припускаючи, що відрахування виконуються неперервно, визначити остаточну вартість верстата через n років .

5.7. Економічні задачі, в яких використовується поняття похідної

Задача на продуктивність праці. Нехай функція $u = u(t)$ виражає кількість виробленої продукції u за час t , і необхідно знайти продуктивність праці в момент t_0 .

Очевидно, за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ кількість виробленої продукції зміниться від значення $u_0 = u(t_0)$ до значення $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$.

: середня продуктивність праці за цей термін $z_{сер} = \dfrac{\Delta u}{\Delta t}$. Продуктивність

в момент t_0 можна визначити як граничне значення середньої продук-
·сті за період часу від t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, тобто

$$z = \lim_{\Delta t \to 0} z_{сер} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} = u'(t_0).$$

Отже, похідна обсягу виробленої продукції за часом $u'(t_0)$ є продук-
зністю праці в момент t_0. У цьому **економічний зміст похідної**.

У практиці економічних досліджень широке застосування отримали
:обничі функції, які використовують для встановлення залежностей, на-
-иклад, випуску продукції від витрат ресурсів, витрат виробництва від об-
·: продукції, виторгу від продажу товару і т. д. У припущенні диференційов-
:т і виробничих функцій важливе значення набувають їхні диференціальні
.:актеристики, пов'язані з поняттям похідної.

Розглянемо похідні для означених типів виробничих функцій.

1. Нехай виробнича функція $K = K(x)$ – функція витрат виробництва,
.. залежить від кількості продукції x.

Припустимо, що кількість продукції збільшується на Δx. Кількості
:одукції $x + \Delta x$ відповідають витрати виробництва $K(x + \Delta x)$. Отже, при-
·.сту кількості продукції Δx відповідає приріст витрат на виробництво про-
.ції $\Delta K = \Delta K(x + \Delta x) - K(x)$.

Середній приріст витрат виробництва є $\dfrac{\Delta K}{\Delta x}$. Це приріст витрат ви-
:ництва на одиницю приросту кількості продукції.

Граничними витратами виробництва називається границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x).$$

Граничні витрати виробництва збігаються зі швидкістю зміни витрат
виробництва. Величина $K'(x)$ характеризує наближено додаткові витрати
на виробництво одиниці додаткової продукції.

2. Позначимо $U(x)$ виторг від продажу x одиниць товару.

Граничним виторгом називається границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = U'(x).$$

3. Нехай виробнича функція $y = f(x)$ встановлює залежність випуску продукції y від витрат ресурсу x.

Граничним продуктом називається границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = f'(x).$$

За допомогою похідної можна обчислити приріст залежної змінної, що відповідає приросту незалежної змінної.

В економічних дослідженнях широко використовується поняття еластичності. Це зумовлено тим, що в багатьох задачах зручніше обчислювати відсоток приросту (відносний приріст) залежної змінної, котрий відповідає відсотку приросту незалежної змінної. Це і приводить нас до поняття еластичності функції (інколи її називають відносною похідною).

Отже, нехай дана функція $y = f(x)$, для якої існує похідна $y' = f'(x)$

Еластичністю функції $y = f(x)$ відносно змінної x називають границю відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y / y}{\Delta x / x} = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} f'(x).$$

Її позначають $E_x(y)$.

Отже,

$$E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x) = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx}.$$

Величину $E_x(y)$ при заданому значенні x називають також показником, або коефіцієнтом, еластичності. Еластичність відносно x є наближений відсотковий приріст функції (підвищення або пониження), що відповідає приросту незалежної змінної на 1 %.

Відзначимо **властивості еластичності функції**.

1^0. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної x на темп зміни функції $T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y}$, тобто

$$E_x(y) = x T_y.$$

2°. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій :

$$E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v) \ ;$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v) \ .$$

3°. Якщо $C=\text{const}$, то $E_x(C\cdot u)=E_x(u)$.

Еластичність функції застосовується для аналізу попиту і споживання. Наприклад, еластичність попиту y відносно ціни x (або прибутку x) – коефіцієнт, що показує наближено, на скільки відсотків зміниться попит (обсяг споживання) за умови зміни ціни (або прибутку) на 1 % .

Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) $|E_x(y)|>1$, то попит вважають еластичним, якщо $|E_x(y)|=1$ – нейтральним, якщо $|E_x(y)|<1$ – нееластичнім відносно ціни (або прибутку).

Взагалі, високий коефіцієнт еластичності означає слабкий ступінь задоволення потреби ; низький - вказує на більшу потребу в даному товарі.

Приклад 1. Нехай функція $K(x)=20x-\dfrac{x^2}{20}$ встановлює залежність витрат виробництва від кількості x продукції, що випускається. Знайти граничні витрати виробництва і коефіцієнт еластичності, якщо обсяг продукції складає 100 одиниць, 20 одиниць.

Розв'язання.

1. Граничні витрати виробництва є похідна від функції витрат

$$K'(x)=20-\frac{x}{10}.$$

При відповідних обсягах продукції :

$$K'(100)=20-\frac{100}{10}=10 \ ;$$

$$K'(20)=20-\frac{20}{10}=18 \ .$$

Отже, чим більше виробляється продукції, тим повільніше ростуть витрати на її випуск .

2. Еластичність функції $E_x(y)=\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}$.

У нашому випадку $y(x)=K(x)=20x-\frac{x^2}{20}$;

$$E_x(K)=\frac{x}{20x-\frac{x^2}{20}}\left(20-\frac{x}{10}\right)=\frac{2\,(200-x)}{400-x};$$

$$E_{100}(K)=\frac{2\cdot100}{300}=\frac{2}{3}\approx0{,}67\,; \qquad E_{20}(K)=\frac{2\cdot180}{380}=\frac{18}{19}\approx0{,}95\,.$$

Отже, якщо при обсязі випуску 100 одиниць кількість продукції, що випускається, збільшиться на 1 %, тобто на 1, то відносні витрати виробництва збільшаться приблизно на 0,67 % ; при обсязі 20 одиниць збільшення випуску продукції на 1 % призведе до збільшення відносних витрат приблизно на 0,95 % .

Приклад 2. Залежність між витратами виробництва y і обсягом продукції x, що випускається, виражається функцією $y=50x-0{,}05x^3$ (грош. од.). Визначити середні і граничні витрати, якщо обсяг продукції 10 од.

Розв'язання.

Функція середніх витрат (на одиницю продукції) виражається відношенням

$$y_1=\frac{y}{x}=50-0{,}05x^2,$$

$$y_1(10)=50-0{,}05\cdot10^2=45 \text{ (грош. од.)}.$$

Граничні витрати : $y'=50-0{,}05\cdot3x^2$; $y'(10)=35$ (грош. од.) .

Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції складають 45 грош. од., то граничні витрати, тобто додаткові витрати на виробництво додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва (обсязі продукції , що випускається у кількості 10 од.), складають 35 грош. од.

Приклад 3. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. грош. од.) і випуском продукції x (млрд грош. од.) виражається функцією $y=-0{,}5x+80$. Знайти еластичність собівартості, якщо випуск продукції дорівнює 60 млрд грош. од.

Розв'язання.
Еластичність собівартості

$$E_x(y)=\frac{x}{-0{,}5x+80}\cdot(-0{,}5)=\frac{x}{x-160},$$

$$E_{60}(y)=\frac{60}{60-160}=-0{,}6\,.$$

Це означає, що у разі випуску продукції на 60 млрд грош. од. збільшення його на 1 % призведе до зниження собівартості на 0,6 %.

Приклад 4. Дослідним шляхом встановлено функції попиту $q=\dfrac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $S=p+0{,}5$, де q, S – кількість товару, що купується і пропонується на продаж відповідно, в одиницю часу; p – ціна товару. Знайти :

а) ціну рівноваги, тобто ціну, при якій попит і пропозиція врівноважуються ;

б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни ;

в) зміну прибутку у разі збільшення ціни на 5 % від ціни рівноваги .

Розв'язання.

а) Ціна рівноваги визначається з умови $q=S$:

$$\frac{p+8}{p+2}=p+0{,}5,$$

звідки $p=2$, тобто ціна рівноваги дорівнює 2 грош. од.

б) Знайдемо еластичності попиту і пропозиції за формулою

$$E_x(y)=\frac{x}{y}\,y'\,.$$

Тоді

$$q'=\frac{-6}{(p+2)^2}\,;\qquad S'=1\,;$$

$$E_p(q)=-\frac{6p}{(p+2)\,(p+8)}\,;\qquad E_p(S)=\frac{2p}{2p+1}\,.$$

Для ціни рівноваги $p=2$ маємо

$$E_2(q)=-0{,}3\,;\qquad E_2(S)=0{,}8\,.$$

Оскільки отримані значення еластичностей за абсолютною величиною менші одиниці, то і попит, і пропозиція даного товару при ціні рівноваги нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не призведе до р… зміни попиту і пропозиції.

Так, при збільшенні ціни p на 1 % попит зменшиться на 0,3 %, а пр… позиція збільшиться на 0,8 %.

в) При збільшенні ціни p на 5 % від рівноважної попит зменшуєть… на $5 \cdot 0,3 = 1,5$ %, отже, прибуток зростає на 3,5 % (5 % - 1,5 % = 3,5 %…

Приклад 5. Як пов'язані граничні і середні витрати підприємства, як… еластичність повних витрат дорівнює одиниці ?

Розв'язання.

Нехай повні витрати підприємства y виражаються функцією $y = f(x$… де x – обсяг продукції, що випускається. Тоді середні витрати y_1 на вироб-ництво одиниці продукції $y_1 = \frac{y}{x}$. Таким чином,

$$E_x(y_1) = E_x\left(\frac{y}{x}\right) = E_x(y) - E_x(x) = E_x(y) - 1.$$

За умовою $E_x(y) = 1$, отже $E_x(y_1) = 1 - 1 = 0$. Це означає, що зі зміно… обсягу продукції x середні витрати на одиницю продукції не міняються, тобт…

$y_1 = \frac{y}{x} = c$, звідки $y = cx$.

Граничні витрати підприємства визначаються похідною $y' = c$. Отже $y' = y_1$, тобто граничні витрати рівні середнім витратам. (помітимо, що отримане твердження справедливе тільки для лінійних функцій витрат).

Приклад 6. Фірма планує випускати сонячні батареї. На основі досліджень була встановлена залежність попиту q від ціни p за батарею :

$$q = 100\,000 - 200\,p,$$

де q - кількість батарей для продажу в рік . Витрати фірми на випуск q сонячних батарей складають

$$c = 150\,000 + 100q + 0{,}003q^2.$$

Розрахувати прибуток, визначити його максимальне значення.

Розв'язання. Валовий прибуток

$$R = p\,q.$$

З умови запишемо функцію p як функцію змінної q:

$$p = 500 - 0{,}005q .$$

$$R = R(q) = (500 - 0{,}005q)\, q .$$

Прибуток

$$P = R - c .$$

$$= (500 - 0{,}005q)\, q - (150000 + 100q + 0{,}003q^2) =$$
$$= -0{,}008q^2 + 400q - 150000 .$$

Визначимо максимальний прибуток

$$P'(q) = -0{,}016q + 400 ,$$
$$-0{,}016q + 400 = 0 ,$$
$$q = 25000 ,$$
$$P''(q) = -0{,}016 < 0 .$$

Отже, при $q = 25000$ одиниць прибуток досягає максимуму, $P(25000) = 4\ 850\ 000$ грош.од. – максимальне значення прибутку.

Приклад 7. Підприємство виробляє x одиниць продукції за ціною $p(x) = 50 - \frac{1}{10}x$, а витрати виробництва задаються функцією

$$K(x) = \frac{1}{50}x^2 + 14x + 800 .$$

Знайти оптимальний для підприємства обсяг випуску продукції і відповідний йому максимальний прибуток .

Розв'язання.

Нехай $U(x)$ – валовий прибуток, $z(x)$ - прибуток від реалізації x одиниць продукції за ціною $p(x)$.

Тоді

$$U(x) = x \cdot p(x) ;$$
$$z(x) = U(x) - K(x) ,$$

де $p(x)$, $K(x)$ – задані функції.

Для розв'язання задачі слід досліджувати функцію $z(x)$ на екстремум. При цьому прибуток буде максимальним для такого обсягу x випуску продукції, для якого $z'(x)=0$, $z''(x)<0$.

Проведемо це дослідження.

1. Формуємо $z(x)$, знаходимо $z'(x)$ і, розв'язавши рівняння $z'(x)=0$, знаходимо критичну точку.

Врахуємо, що

$$U(x)=50x-\frac{1}{10}x^2, \qquad K(x)=\frac{1}{50}x^2+14x+800 :$$

$$z(x)=U(x)-K(x) ;$$

$$z'(x)=U'(x)-K'(x)=0 ; \qquad U'(x)=K'(x) ;$$

$$50-\frac{1}{5}x=\frac{1}{25}x+14 ; \qquad \frac{6}{25}x=36 ; \qquad x=150 \text{ – критична точка} .$$

2. Знаходимо $z''(x)$ і визначаємо її знак при $x=150$:

$$z''(x)=U''(x)-K''(x)=-\frac{1}{5}-\frac{1}{25}=-\frac{6}{25}<0 \qquad \forall x .$$

Отже, $x=150$ – точка максимуму функції $z(x)$, тобто оптимальний обсяг виробництва складає 150 одиниць продукції.

3. Знаходимо максимальний прибуток виробництва, тобто $z_{\max}=z(150)$.

При $x=150$ ціна $p=50-\frac{1}{10}\cdot 150=35$; валовий прибуток $U=35\cdot 150=5250$.

Витрати виробництва $K=\frac{1}{50}\cdot 150^2+14\cdot 150+800=450+2100+800=$ $=3350$; максимальний від продажу прибуток $z_{\max}=5250-3350=1900$.

Приклад 8. Виробник реалізує свою продукцію за ціною p за одиницю, а витрати при цьому задаються кубічною залежністю $S(x)=ax+\lambda x^3$ $(a<p, \lambda>0)$. Знайти оптимальний для виробника обсяг випуску продукції і відповідний йому прибуток.

Розв'язання.

Позначимо обсяг продукції, що випускається, через x. Складемо функцію прибутку $C(x)=px-(ax+\lambda x^3)$, де px – валовий прибуток від продукції, що реалізується. Досліджуємо цю функцію на екстремум.

1. Знаходимо $C'(x)=(p-a)-3\lambda x^2$.

2. Знаходимо критичні точки : $C'(x)=(p-a)-3\lambda x^2=0$, звідки $x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ (другу критичну точку $x_2=-\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ не розглядаємо за змістом задачі).

3. Знаходимо $C''(x)=-6\lambda x$ і визначаємо знак другої похідної при $x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$:

$C''\left(x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right)<0$ (в даному випадку $C''(x)<0$ при будь-якому $x>0$), отже, при $x=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ прибуток $C(x)$ максимальний.

4. Знаходимо максимум функції (тобто максимальний розмір прибутку)

$$C_{max}\left(x_1=\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right)=\frac{2(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}} .$$

Приклад 9. Капітал в 1 млрд грош. од. може бути розміщений у банку 50 % річних або інвестований у виробництво, причому ефективність вкладення очікується у розмірі 100 %, а витрати задаються квадратичною залежністю. Прибуток оподатковується в p %. При яких значеннях p вкладення у виробництво є більш ефективним, ніж чисте розміщення капіталу у банку?

Розв'язання.

Нехай x (млрд грош. од.) інвестується у виробництво, а $1-x$ – розміщується під відсотки. Тоді розміщений капітал через рік стане рівним

$$(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x ,$$

а капітал, вкладений у виробництво, визначимо за формулою

$$x\left(1+\frac{100}{100}\right)=2x .$$

Витрати складуть ax^2, оскільки за умовою вони задаються квадратичною залежністю, тобто прибуток від вкладення у виробництво $c = 2x - ax^2$.

Податки складуть $(2x - ax^2)\frac{p}{100}$, тобто чистий прибуток виявиться рівним $\left(1-\frac{p}{100}\right)(2x - ax^2)$.

Загальна сума через рік складе :

$$A(x) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x + \left(1-\frac{p}{100}\right)(2x - ax^2) = \frac{3}{2} + \left[2\left(1-\frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right]x - a\left(1-\frac{p}{100}\right)x^2$$

Треба знайти максимальне значення цієї функції на відрізку $[0, 1]$.

Маємо

$$A'(x) = 2\left(1-\frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} - 2a\left(1-\frac{p}{100}\right)x \ ;$$

$$A'(x) = 0 \ \text{при} \ x_0 = \frac{2\left(1-\frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}}{2a\left(1-\frac{p}{100}\right)} \ ;$$

$A''(x) = -2a\left(1-\frac{p}{100}\right) < 0$, тобто x_0 – точка максимуму.

Щоб $x_0 \in [0, 1]$, необхідно виконати умову

$$0 < 2\left(1-\frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} < 1 \ , \ \text{або} \quad p < 25 \ .$$

Таким чином, якщо $p > 25$, то вигідніше нічого не вкладати у виробництво і розмістити весь капітал у банку. Якщо $p < 25$, то можна показати, що при $x = x_0$

$$A(x_0) = \frac{3}{2} + \frac{\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right]^2}{4a\left(1-\frac{p}{100}\right)} > \frac{3}{2} = A(0) \ ,$$

тобто вкладення у виробництво вигідніше, ніж чисте розміщення під відсотки.

5.51. Розрахувати еластичність даних функцій і знайти значення показника еластичності для заданих x:

а) $y = x^3 + 1$, $\quad x = 1$, $\quad x = 5$;

б) $y = e^{5x}$, $\quad x = 1$, $\quad x = 0$, $\quad x = 2$;

в) $y = 5 \ln x$, $\quad x = 10$, $\quad x = e$, $\quad x = e^4$;

г) $y = 3x - 6$, $\quad x = 10$;

д) $y = 1 + 2x - x^2$, $\quad x = 1$;

е) $y = xe^{-x^2}$, $\quad x = 1$, $\quad x = 2$.

5.52. Розрахувати еластичність функцій :

а) $y = ax + b$, де a, b – сталі ;

б) $y = ax^m$, де a, m – сталі .

5.53. Крива повних витрат має вигляд $y = K = 6\log(1 + 3x)$. Визначити криву граничних витрат.

5.54. Задана крива повних витрат $K(x)$. Визначити : а) криву граничних витрат ; б) розрахувати коефіцієнти еластичності при заданих значеннях x, де x – обсяг виробництва, якщо :

1) $K(x) = 150x - x^2 + \dfrac{x^3}{100}$, $\quad x = 10$, $\quad x = 50$;

2) $K(x) = x^3 - 3x^2 + 10x$, $\quad x = 1$, $\quad x = 2$.

5.55. Функцією середніх витрат називається функція $S = \dfrac{f(x)}{x}$, де $f(x)$ – повні витрати виробництва, x – кількість одиниць продукції. Нехай витрати на виробництво x одиниць однорідної продукції виражаються формулою $y = x^3 + 3x^2 + 10x$. Необхідно знайти : а) обсяг виробництва, при якому середні витрати будуть мінімальними ; б) побудувати криві повних, середніх і граничних витрат.

5.56. Цукровий завод виробляє x одиниць продукції в місяць, а су марні витрати виробництва $K(x)=\frac{x^2}{50}+5x+300$. Залежність між питомок ціною p і кількістю одиниць продукції x, що можна продавати за цією ціною така : $p(x)=40-\frac{x}{10}$. Розрахувати, за яких умов прибуток буде максимальним (валовий прибуток $U(x)=x\,p(x)$, прибуток $z(x)=U(x)-K(x)$).

5.57. Крива повних витрат має вигляд $K(x)=x^3-6x^2+15x$ (x – обсяг виробництва). Розрахувати, при якому обсязі виробництва середні витрати мінімальні.

5.58. Залежність між витратами виробництва y (грош. од.) і обсягом продукції, що випускається x (од.), виражається функцією $y=10x-0,04x^3$ Визначити середні та граничні витрати при обсязі продукції, рівному 5 од.

5.59. Залежність попиту q від ціни p виражається функцією

$$q(p)=-2p^2+3p+8\ .$$

Знайти еластичність $E_p(q)$ попиту q відносно ціни p і значення показника еластичності при $p=1$. Зробити висновки.

5.60. Функції попиту q і пропозиції S від ціни p задаються відповідно рівняннями : $q=7-p$ і $S=p+1$. Знайти : а) ціну рівноваги ; б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни ; в) зміну прибутку (у відсотках) при збільшенні ціни на 5 % від ціни рівноваги .

5.61. Дана функція $K(x)$ повних витрат виробництва . Знайти :

а) обсяг виробництва, при якому середні витрати будуть мінімальні ;

б) побудувати криві повних, середніх і граничних витрат виробництва ;

в) розрахувати коефіцієнти еластичності при заданих значеннях x, де x – обсяг виробництва, якщо :

1) $K(x)=\frac{x^2}{4}+x+100$, $x=2$, $x=50$;

2) $K(x)=100+\frac{x^2}{25}$, $x=5$, $x=25$.

5.62. Загальна вартість вироблених q одиниць продукції визначається ..ією

$$c(q) = 100000 + 1500q + 0{,}2q^2.$$

Середня вартість одиниці продукції

$$f(q) = \frac{c(q)}{q}.$$

Визначити, скільки одиниць продукції q слід випускати, щоб мінімізу- середню вартість одиниці продукції.

5.8. Економічні задачі, в яких використовуються функції багатьох змінних та їх частинні похідні

Наведемо економічну інтерпретацію частинних похідних.

Нехай задана виробнича функція $z = f(x, y)$, що виражає, наприк- зитрати виробництва в залежності від кількості двох видів продукції x що випускаються. Припустимо, що чинник x змінився на Δx, тоді ви- -нича функція зміниться на $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$. Отже, $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ ..ає середній приріст виробничої функції на одиницю приросту чинника ..о середні витрати виробництва на одиницю продукції x. Перейшовши ..зниці при $\Delta x \to 0$, отримаємо граничні витрати виробництва на оди- ..о продукції x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогічно за чинником y:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Еластичність виробничої функції $z = f(x, y)$ відносно чинників ви- ..бництва x і y встановлюється таким чином: $E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}$ і вказує ..близно відсотковий приріст виробничої функції (підвищення, понижен- ..) відповідно до приросту чинника x на 1 % за умови, що чинник y не міняється ; $E_y(z)=\frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}$ і вказує приблизно відсотковий приріст виробни-чої функції відповідно до приросту чинника y на 1 % за умови, що чинник x не міняється.

Якщо виробнича функція встановлює залежність випуску y від n виробничих чинників $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ у вигляді $y=f(x_1,\ x_2,\dots,\ x_n)$, то диференціальними характеристиками такої функції є : $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ – гранична ефективність чинника x_i ; $E_{x_i}(y)=\frac{\partial y}{\partial x_i}\frac{x_i}{y}$ – еластичність випуску y відносно чинника x_i та інші .

Приклад 1. Потік пасажирів z виражається функцією $z=\frac{x^2}{y}$, де x – число жителів ; y – відстань між містами. Знайти частинні похідні і пояснити їхній зміст.

Розв'язання. Похідна $z'_x=\frac{2x}{y}$ показує, що при одній і тій же відстані між містами збільшення потоку пасажирів пропорційне подвоєному числу жителів. Похідна $z'_y=-\frac{x^2}{y^2}$ показує, що при одній і тій же чисельності жителів збільшення потоку пасажирів обернено пропорційне квадрату відстані між містами.

Приклад 2. Для випуску деякого товару визначена виробнича функція $f(x,\ y)=20x+10y-2y^2+4x^2+3xy$, де x, y – чинники виробництва. Визначити : а) закон зміни виробничої функції ; б) еластичність функції за кожним чинником ; в) коефіцієнт еластичності за чинниками при $x=1$, $y=1$

Розв'язання. а) Щоб визначити зміну виробничої функції за чинниками x і y відповідно, необхідно знайти $\frac{\partial f}{\partial x}$ і $\frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 20 + 8x + 3y \; ; \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 10 - 4y + 3x \; .$$

б) За означенням еластичність функції за кожним з чинників така :

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\,\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{z}\,(20 + 8x + 3y) \; ;$$

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\,\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{z}\,(10 - 4y + 3x) \; ,$$

де $z = 20x + 10y - 2y^2 + 4x^2 + 3xy$.

в) Обчислимо коефіцієнти еластичності при $x = 1$, $y = 1$. Врахуємо, що $z(1, 1) = 20 + 10 - 2 + 4 + 3 = 35$:

$$E_x(z) = \frac{20 + 8 + 3}{35} = \frac{31}{35} \approx 0{,}89 \; ;$$

$$E_y(z) = \frac{10 - 4 + 3}{35} = \frac{9}{35} \approx 0{,}26 \; .$$

Таким чином, із зростанням чинника x на 1 % відбудеться відносне зростання заданої виробничої функції приблизно на 0,89 % (за умови стабільності чинника y).

При зростанні чинника y на 1 % і незмінності чинника x виробнича функція зросте приблизно на 0,26 %. Отже, найбільше впливає на виробничу функцію $z = f(x, y)$ чинник x.

Відзначимо, що від'ємне значення коефіцієнта еластичності показує зменшення виробничої функції при зростанні відповідного чинника. Наприклад, якщо $E_x(z) = -0{,}08$ і $z = f(x, y)$ – функція випуску продукції, то зростання чинника x на 1 % призводить до зниження випуску продукції на 0,08 %.

Приклад 3. Нехай $z = 2x^2y + 3xy^2 + x^3$ – виробнича функція, де x – витрати живої праці, y – витрати уречевленої праці. Знайти $E_x(z)$ і $E_y(z)$ в точці $(1, 1)$.

Розв'язання. Наближений відсотковий приріст функції z, що відповідає приросту незалежних змінних x і y на 1 %, визначимо за формулами

$$E_x(z)=\frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}\ ; \qquad E_y(z)=\frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y}\ .$$

Знайдемо частинні похідні по x і y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=4xy+3y^2+3x^2\ ; \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=2x^2+6xy\ .$$

Тоді

$$E_x(z)=\frac{x(4xy+3y^2+3x^2)}{2x^2y+3xy^2+x^3}\ ; \qquad E_y(z)=\frac{y(2x^2+6xy)}{2x^2y+3xy^2+x^3}\ .$$

У заданій точці $(1,1)$ $\quad E_x(z)=\frac{10}{6}\approx 0,67$; $\quad E_y(z)=\frac{8}{6}\approx 1,33$.

Зі зростанням витрат живої праці на 1 % обсяг виробництва збільшиться приблизно на 0,67 %, а зі зростанням витрат уречевленої праці на 1 % обсяг виробництва збільшиться приблизно на 1,33 %.

Приклад 4. Фірма виробляє два види товарів G_1 і G_2 і продає їх за ціною 1 000 грош. од. та 800 грош. од. відповідно. Обсяги випуску товарів - Q_1 і Q_2. Функція витрат має вигляд

$$C=2Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2\ .$$

Треба знайти такі значення Q_1 і Q_2, за яких прибуток, отриманий фірмою, максимальний, і знайти цей прибуток.

Розв'язання. Сумарний прибуток від продажу товарів G_1 і G_2:

$R=1000\,Q_1+800\,Q_2$.

Прибуток П являє собою різницю між прибутком R і витратами C, тому

$$\Pi=R-C=(1000\,Q_1+800\,Q_2)-(2Q_1^2+2Q_1Q_2+Q_2^2)\ ,$$

або

$$\Pi(Q_1,Q_2)=1000\,Q_1+800\,Q_2-2Q_1^2-2Q_1Q_2-Q_2^2\ .$$

Це і є функція, максимум якої слід знайти.

Для знаходження стаціонарних точок знаходимо частинні похідні першого порядку від функції $\Pi(Q_1,Q_2)$ і прирівнюємо їх до нуля:

$$\Pi'_{Q_1}(Q_1,\ Q_2) = 1000 - 4Q_1 - 2Q_2\ ;$$

$$\Pi'_{Q_2}(Q_1,\ Q_2) = \ 800 - 2Q_1 - 2Q_2\ ;$$

$$\begin{cases} 1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0\ ; \\ \ 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0\ . \end{cases}$$

Розв'язок системи : $Q_1 = 100$, $Q_2 = 300$. Таким чином, стаціонарна

та $M_0(100;\ 300)$.

Знаходимо частинні похідні другого порядку :

$$A = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2}\right|_{M_0} = -4\ ;\quad B = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1\, \partial Q_2}\right|_{M_0} = -2\ ;\quad C = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2}\right|_{M_0} = -2\ ,$$

$$A < 0\ ,\qquad \Delta = AC - B^2 = -4\cdot(-2) - 4 = 4 > 0\ .$$

Отже, точка $M_0(100;\ 300)$ є точкою максимуму.

Максимальний прибуток досягається при обсягах виробництва $= 100$, $Q_2 = 300$. Знайдемо суму максимального прибутку :

$$\Pi(100;\ 300) = 1000\cdot 100 + 800\cdot 300 - 2\cdot 100^2 - 2\cdot 100\cdot 300 - 300^2 =$$

$\,0\ 000$ грош. од.

Приклад 5. Фірма реалізує частину товару на внутрішньому ринку, а іншу частину поставляє на експорт. Зв'язок ціни товару P_1 і його кількості Q_1, проданого на внутрішньому ринку, описується кривою попиту за рівнянням

$$P_1 + Q_1 = 500\ .$$

Аналогічно для експорту ціна P_2 і кількість Q_2 також зв'язані співвідношенням (рівнянням кривої попиту)

$$2P_2 + 3Q_2 = 720\ .$$

Сумарні витрати визначаються виразом

$$C = 50000 + 20\ (Q_1 + Q_2)\ .$$

Яку цінову політику повинна проводити фірма, щоб прибуток був максимальним ?

Розв'язання. Сумарний прибуток

$$R = R_1 + R_2 \ ,$$

де R_1 , R_2 – прибутки від продажу на внутрішньому ринку та експортни постачань відповідно :

$$R_1 = P_1 \cdot Q_1 = (500 - Q_1)\, Q_1 = 500\, Q_1 - Q_1^2 \ ;$$

$$R_2 = P_2 \cdot Q_2 = (360 - 1{,}5\, Q_2)\, Q_2 = 360\, Q_2 - 1{,}5\, Q_2^2 \ .$$

В обох випадках ціна береться з відповідних кривих попиту .

$$R = R_1 + R_2 = 500\, Q_1 - Q_1^2 + 360\, Q_2 - 1{,}5\, Q_2^2 .$$

Одержуваний фірмою прибуток

$$\Pi(Q_1 , Q_2) = R - C = (500Q_1 - Q_1^2 + 360Q_2 - 1{,}5Q_2^2) - 50000 - 20(Q_1 + Q_2) =$$

$$= 480Q_1 - Q_1^2 + 340Q_2 - 1{,}5Q_2^2 - 50000 \ .$$

Знаходимо частинні похідні першого порядку :

$$\Pi'_{Q_1}(Q_1 , Q_2) = 480 - 2Q_1 \ ;$$

$$\Pi'_{Q_2}(Q_1 , Q_2) = 340 - 3Q_2 \ ;$$

$$\begin{cases} 480 - 2Q_1 = 0 \ ; \\ 340 - 3Q_2 = 0 \ . \end{cases}$$

$$Q_1 = 240 \ , \quad Q_2 = 340/3 \ .$$

Стаціонарна точка $M_0(240;\ 340/3)$.

Обчислюємо частинні похідні другого порядку :

$$A = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1^2}\right|_{M_0} = -2 ; \quad B = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_1\, \partial Q_2}\right|_{M_0} = 0 ; \quad C = \left.\frac{\partial^2 \Pi}{\partial Q_2^2}\right|_{M_0} = -3 \ ,$$

$$A < 0 \ , \qquad \Delta = AC - B^2 = 6 > 0 \ .$$

Отже, в стаціонарній точці має місце максимум.

Знайдемо оптимальні ціни для продажу на внутрішньому ринку і по експорту, підставляючи координати точки максимуму в криві попиту :

$$P_1 = 500 - Q_1 = 500 - 240 = 260 \ ;$$

$$P_2 = 360 - 1{,}5\, Q_2 = 360 - 1{,}5 \cdot \frac{340}{3} = 190 \ .$$

Підрахуємо максимальний прибуток при оптимальних обсягах продажів на внутрішньому і зовнішньому ринках:

$$(240;\ 340/3) = 480 \cdot 240 - 240^2 + 340 \cdot (340/3) - 1{,}5 \cdot (340/3)^2 - 50000 =$$
$$= 26866{,}67\ .$$

Приклад 6. Фірма виробляє два види товарів G_1 і G_2 в кількості Q_1 і Q_2 відповідно. Функція витрат має вигляд

$$C = 10Q_1 + Q_1 Q_2 + 10Q_2\ ,$$

а попиту для кожного товару

$$P_1 = 50 - Q_1 + Q_2\ , \quad P_2 = 30 + 2Q_1 - Q_2\ ,$$

де P_1, P_2 – ціна одиниці товару видів G_1 і G_2 відповідно.

Крім того, фірма зв'язана обмеженням на загальний обсяг виробництва товарів G_1 і G_2, її квота складає 15 одиниць, тобто $Q_1 + Q_2 = 15$.

Знайти максимальний прибуток, що може бути досягнутий за цієї умови.

Розв'язання. Прибуток позначимо $\Pi(Q_1,\ Q_2)$:

$$\Pi(Q_1,\ Q_2) = R - C\ ,$$

де R – сумарний прибуток, C – функція витрат,

$$R = R_1 + R_2\ ,$$

де R_1, R_2 — прибутки від продажу товарів G_1 і G_2 відповідно,

$$R_1 = P_1 \cdot Q_1 = (50 - Q_1 + Q_2)\, Q_1 = 50Q_1 - Q_1^2 + Q_1 Q_2\ ;$$

$$R_2 = P_2 \cdot Q_2 = (30 + 2Q_1 - Q_2)\, Q_2 = 30Q_2 + 2\, Q_1 Q_2 - Q_2^2\ ,$$

де P_1, P_2 беруться з кривих попиту товарів G_1 і G_2 відповідно. Тоді

$$R = 50Q_1 - Q_1^2 + 3Q_1 Q_2 + 30Q_2 - Q_2^2\ ;$$

$$\Pi(Q_1,\ Q_2) = R - C = 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 + 20Q_2 - Q_2^2\ .$$

Перепишемо обмеження у вигляді

$$g(Q_1,\ Q_2) = 15 - Q_1 - Q_2 = 0\ .$$

Одержуємо задачу на умовний екстремум: знайти максимум функції

$$\Pi(Q_1, Q_2) = 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 20Q_2 - Q_2^2$$

при обмеженні

$$g(Q_1, Q_2) = 15 - Q_1 - Q_2 = 0 .$$

Для розв'язання використовуємо метод множників Лагранжа. Будуємо функцію Лагранжа :

$$F(Q_1, Q_2, \lambda) = 40Q_1 - Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + 20Q_2 - Q_2^2 + \lambda(15 - Q_1 - Q_2).$$

Обчислюємо частинні похідні від $F(Q_1, Q_2, \lambda)$ за змінними Q_1, Q_2, λ і прирівнюємо їх до нуля :

$$F'_{Q_1} = 40 - 2Q_1 + 2Q_2 - \lambda = 0 ;$$

$$F'_{Q_2} = 2Q_1 + 20 - 2Q_2 - \lambda = 0 ;$$

$$F'_{\lambda} = 15 - Q_1 - Q_2 = 0 .$$

Отримали систему трьох рівнянь з трьома невідомими, яку перепишемо у вигляді

$$\begin{cases} -2Q_1 + 2Q_2 - \lambda = -40 ; \\ 2Q_1 - 2Q_2 - \lambda = -20 ; \\ Q_1 + Q_2 = 15 . \end{cases}$$

Розв'язуємо її методом виключення.

Отримаємо $\lambda = 30$, $Q_1 = 10$, $Q_2 = 5$.

Точка $M_0(10;\ 5)$ - стаціонарна . Для дослідження її на екстремум знайдемо $d^2F\Big|_{M_0}$ з урахуванням обмеження.

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1^2}\right|_{M_0} = -2; \quad \left.\frac{\partial^2 F}{\partial Q_1 \partial Q_2}\right|_{M_0} = 2; \quad \left.\frac{\partial^2 F}{\partial Q_2^2}\right|_{M_0} = -2 ,$$

$$d^2F\Big|_{M_0} = -2\,dQ_1^2 + 4\,dQ_1\,dQ_2 - 2\,dQ_2^2 .$$

Оскільки $Q_1 + Q_2 = 15$, то $dQ_1 = -dQ_2$. Тоді

$$d^2F\Big|_{M_0} = -2\,dQ_2^2 - 4\,dQ_2^2 - 2\,dQ_2^2 = -8\,dQ_2^2 < 0 .$$

Через те що екстремум функції $\Pi(Q_1, Q_2)$ за наявності заданого обмеження збігається з екстремумом функції $F(Q_1, Q_2, \lambda)$, точка $M_0(10; 5)$ – точка умовного максимуму функції $\Pi(Q_1, Q_2)$.

Отже, $Q_1 = 10$, $Q_2 = 5$ – обсяг продажу, за умови якого прибуток максимальний.

Відповідне значення самого прибутку

$$\Pi(10, 5) = 40 \cdot 10 - 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 + 20 \cdot 5 - 5^2 = 475 .$$

В економічних дослідженнях часто ставиться **задача порівняння чинників і показника**, прийнятого за функцію. У цьому випадку доцільно залежність між функціональною ознакою і чинниками – аргументами $x_1, x_2, \ldots, x_p$ виражати у вигляді степеневої функції

$$z = A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_i^{\alpha_i} \ldots x_p^{\alpha_p} ,$$

де показник степеня α_i є показником еластичності y по x_i. Наприклад, обсяг виробництва в тисячах грошових одиниць в залежності від деяких виробничих чинників x_1, x_2, x_3, x_4 представлений функцією $z = 2{,}98 \cdot (x_1)^{0{,}39} \cdot (x_2)^{0{,}48} \cdot (x_3)^{0{,}18} \cdot (x_4)^{-0{,}09}$. Коефіцієнти еластичності $\alpha_1 = 0{,}39$, $\alpha_2 = 0{,}48$, $\alpha_3 = 0{,}18$, $\alpha_4 = -0{,}09$ показують, що на темпи підвищення обсягу виробництва найбільше впливає чинник x_2. У разі збільшення x_2 на 1 % випуск продукції зростає на 0,48 %. Зверніть увагу, що збільшення x_4 на 1 % призведе до зниження випуску продукції на 0,09 %.

В економічних дослідженнях часто вимагається встановити залежність між двома величинами x і y, якщо задані результати n вимірів x_i, y_i ($i = \overline{1, n}$). Для розв'язання такої задачі використовується **метод найменших квадратів**.

Приклад 7. Є наступні дані про ціну на нафту x (грош. од.) та індекс акцій нафтових компаній y (умов. од.)

x	17,28	17,05	18,30	18,80	19,20	18,50
y	537	534	550	555	560	552

Припускаючи, що між змінними x і y існує лінійна залежність

$y = ax + b$, знайти a і b за допомогою методу найменших квадратів.

Розв'язання. Відомо (гл. 3), що система нормальних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0\,; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} y_i - a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - bn = 0\,. \end{cases}$$

У даному випадку $n = 6$. Знайдемо необхідні для розрахунків суми $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} y_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i$, $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$. Проміжні обчислення оформимо у вигляді допоміжної таблиці.

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
	17,28	537	9279,36	298,5984
	17,05	534	9104,70	290,7025
	18,30	550	10065,00	334,8900
	18,80	555	10434,00	353,4400
	19,20	560	10752,00	368,6400
	18,50	552	10212,00	342,2500
Σ	110,13	3288	59847,06	1988,5200

Система нормальних рівнянь має вигляд:

$$\begin{cases} 1988{,}52a + 110{,}13b = 59847{,}06\,; \\ 110{,}13a + 6\,b = 3288\,. \end{cases}$$

Її розв'язок $a = 15,317$, $b = 266,86$ дасть шукану залежність :

$$y = 15{,}317x + 266{,}86\,.$$

Таким чином, зі збільшенням ціни нафти на 1 грош. од. індекс акцій нафтових компаній в середньому зростає на 15,32 од.

5.63. Задана виробнича функція $z = z(x, y)$, що дає залежність між обсягом виробництва z і витратами живої праці x та уречевленої праці y. Знайти :

а) закон зміни виробничої функції за кожним із чинників x та y;

б) еластичність функції за кожним із чинників :

в) коефіцієнти еластичності по витратах живої та уречевленої праці при $x=1$, $y=1$. Зробити висновки.

Розв'язати задачу для наступних функцій:

1) $z(x, y)=xy^3-3x^2y^2+2y^4-120y$;

2) $z(x, y)=\ln(x^3+2y^3)$;

3) $z(x, y)=e^{xy}$;

4) $z(x, y)=x^3-y^2+6xy+39x+18y-20$;

5) $z(x, y)=-x^2+2xy-4x-8y$.

5.64. На виробництві використовується два види ресурсів у кількості x_1 і x_2 одиниць. Вартість одиниці кожного з ресурсів складає 1 і 2 грош. од. відповідно. Для придбання ресурсів виділено 10 000 грош. од. Визначити оптимальні витрати ресурсів, що мають забезпечити підприємству досягнення максимального прибутку, якщо відомо, що сумарний прибуток z підприємства залежить від витрат ресурсів наступним чином: $z=2x_1+10x_2-x_2^2$.

5.65. Задана виробнича функція, що залежить від декількох чинників: $z=0.84(x_1)^{0,624}(x_2)^{-0,38}(x_3)^{0,706}$. Провести аналіз впливу відносних приростів чинників x_1, x_2, x_3 на темпи зміни виробничої функції.

5.66. Річні видатки підприємства можуть бути виражені функцією $f(x_1, x_2)=a+b_1x_1+b_2x_2+\frac{C_1}{x_1}+\frac{C_2}{x_2}$, де a, b_1, b_2, C_1, C_2 – сталі. За яких значень x_1, x_2 видатки підприємства будуть найменшими? Розрахувати коефіцієнти еластичності при $x_1=1$, $x_2=1$. Розв'язати задачу при наступних значеннях коефіцієнтів a, b_1, b_2, C_1, C_2:

1) $a=1$, $b_1=9$, $b_2=64$, $C_1=36$, $C_2=4$;

2) $a=100$, $b_1=25$, $b_2=16$, $C_1=225$, $C_2=64$;

3) $a=50$, $b_1=144$, $b_2=49$, $C_1=9$, $C_2=196$

5.67. Річний видаток підприємства (амортизація, відсотки на капітал, вклади на поновлення, ремонт і витрати виробництва) може бути ви-ражений функцією $f(x_1, x_2) = a + b(x_1 + x_2) + \frac{C}{x_1 + x_2} + \frac{C_1}{x_1} + \frac{C_1}{x_2}$, де a, b, C, C_1, C_2 – сталі. Знайти значення чинників x_1 і x_2, за яких річни видаток буде найменшим. Розрахувати коефіцієнти еластичності при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

Розв'язати задачу при наступних значеннях коефіцієнтів a, b, C, C_1, C_2:

1) $a = 20$, $b = 12$, $C = 72$, $C_1 = 4$, $C_2 = 16$;

2) $a = 10$, $b = 9$, $C = 72$, $C_1 = 28$, $C_2 = 7$.

5.68. Фірма вирішила щомісяця асигнувати 100 тис. грош. од. на вироб-ництво деякої продукції. Нехай середня заробітна платня по фірмі складає 2 00 грош. од., а вартість одиниці сировини дорівнює 1 000 грош. од. Треба визна-чити, яку кількість робітників k і яку кількість сировини C необхідно мат фірмі для отримання найбільшого обсягу продукції Q, якщо відомо, що обся прямо пропорційний кількості робітників і кількості сировини з коефіцієнто пропорційності, котрий дорівнює 5.

5.69. У наведеній нижче таблиці є дані про випуск хутрової продукції н фабриці за 7 років. Знайти параметри функції $y = ax + b$, що виражає дина-міку зростання за кожний рік. Використати метод найменших квадратів.

Рік x	1-й	2-й	3-й	4-й	5-й	6-й	7-й
y, млн грош. од.	6,3	9,5	13,9	16,1	20,2	24,1	26,8

5.70. Темпи зростання продуктивності праці y за роками в промис-ловості держави наведено в таблиці. Припускаючи, що залежність y від x лінійна ($y = ax + b$), знайти a і b. Використати метод найменших квад-ратів.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	100	156	170	184	194	205	220	229

9 Економічні задачі, що зводяться до обчислення визначених інтегралів

Економічний зміст визначеного інтеграла. Нехай функція $z = f(t)$ ..є зміну продуктивності деякого виробництва з плином часу. Знайдемо · продукції U, виробленої за термін часу $[0, T]$.

Відзначимо, що коли продуктивність праці не змінюється з часом ·) - стала функція), то обсяг продукції ΔU, виробленої за деякий про-..ок часу $[t,\ t+\Delta t]$, задається формулою $\Delta U = f(t)\,\Delta t$. ..загальному випадку справедлива наближена рівність $\Delta U = f(\xi)\,\Delta t$, де $\in [t,\ t+\Delta t]$, котра є тим точнішою, чим менше значення Δt.

Розіб'ємо відрізок $[0, T]$ на проміжки часу точками $= t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T$. Для обсягу продукції ΔU_i, виробленої за про-..ок часу $[t_{i-1},\ t_i]$, маємо

$$\Delta U_i = f(\xi_i)\,\Delta t_i, \quad \text{де} \quad \xi_i \in [t_{i-1},\ t_i], \quad \Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тоді

$$U \approx \sum_{i=1}^{n} \Delta U_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta t_i.$$

Звідси

$$U = \lim_{\max \Delta t_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta t_i = \int_0^T f(t)\,dt.$$

Отже, якщо $f(t)$ – продуктивність праці в момент часу t, то

$= \int_0^T f(t)\,dt$ – обсяг продукції, що випускається за проміжок часу $[0, T]$;

$= \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$ – обсяг продукції, що випускається за проміжок $[t_1, t_2]$.

Приклад 1. Визначити обсяг продукції, виробленої робітником за ..гу годину робочого дня, якщо продуктивність праці характеризується ..нкцією

$$f(t) = \frac{2}{3t+4} + 3.$$

Розв'язання. Шуканий обсяг визначається за формулою

$$V = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt .$$

У нашому випадку

$$V = \int_1^2 \left(\frac{2}{3t+4} + 3 \right) dt = \left(\frac{2}{3} \ln|3t+4| + 3t \right) \Bigg|_1^2 =$$

$$= \frac{2}{3}\ln 10 - \frac{2}{3}\ln 7 + 6 - 3 = \frac{2}{3}\ln\frac{10}{7} + 3 .$$

Розглянемо задачу знаходження капіталу (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями. **Чисті інвестиції (капіталовкладення)** – це загальні інвестиції, які були зроблені за певний проміжок часу, за винятком інвестицій на відшкодування основних фондів (капіталу), які виходять з ладу. Таким чином, за одиницю часу капітал збільшується на суму чистих інвестицій.

Якщо капітал розглядати як функцію часу $K(t)$, а чисті інвестиції відповідно як $f(t)$, то викладене вище можна записати у вигляді

$$f(t) = \frac{d}{dt} K(t) .$$

Часто вимагається знайти приріст капіталу за період з моменту часу t_1 до t_2, тобто величину

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) .$$

Враховуючи, що $K(t)$ є первісна для функції $f(t)$, маємо

$$\Delta K = K(t_2) - K(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\, dt .$$

Приклад 2. Чисті інвестиції задано функцією

$$f(t) = 7000\sqrt{t}$$

Визначити :

а) приріст капіталу за три роки ;

б) термін часу (у роках), після якого приріст капіталу складе 50 000

Розв'язання. а) скористаємось формулою для обчислення ΔK, поклавши $t_1 = 0$, $t_2 = 3$:

$$\Delta K = K(3) - K(0) = \int_0^3 7000\sqrt{t}\ dt = 7000 \cdot \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 =$$

$$= 7000 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3^{\frac{3}{2}} = 24\ 248{,}71\ .$$

б) позначимо шукану тривалість часу через T, тоді

$$\Delta K = \int_0^T f(t)\ dt\ .$$

Підставимо $\Delta K = 50000$ і $f(t) = 7000\sqrt{t}$:

$$50000 = \int_0^T 7000\sqrt{t} \cdot dt\ ;$$

$$\int_0^T 7000\ t^{\frac{1}{2}}\ dt = 7000 \cdot \frac{2}{3}\ t^{\frac{3}{2}} \Big|_0^T = 7000 \cdot \frac{2}{3}\ T^{\frac{3}{2}}\ ;$$

$$50000 = 7000 \cdot \frac{2}{3}\ T^{\frac{3}{2}}\ ;$$

$$T^{\frac{3}{2}} = \frac{50 \cdot 3}{14} = 10{,}71\ ;$$

$$T = 10{,}71^{\frac{2}{3}} = 4{,}86\ \text{(року)}.$$

Нехай відома функція $t = t(x)$, що описує зміни витрат часу t на виготовлення виробу в залежності від ступеня освоєння виробництва, де x – порядковий номер виробу в партії. Тоді середній час $t_{\text{сер}}$, витрачений на виготовлення одного виробу в період освоєння від x_1 до x_2 виробів, обчислюється за теоремою про середнє :

$$t_{\text{сер}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)\ dx\ .$$

Що стосується функції зміни витрат часу на виготовлення виробів $t = t(x)$, то часто вона має вигляд $t = a x^{-b}$, де a – витрати часу на перший виріб, b – показник виробничого процесу.

Приклад 3. Знайти середній час, витрачений на освоєння одного виробу в період освоєння від $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ виробів, якщо функція зміни витрат часу на виготовлення виробів $t = a x^{-b}$, де $a = 600$ (хв), $b = 0,5$.

Розв'язання.

$$t_{\text{сер}} = \frac{1}{x_2 - x_1} \int_{x_1}^{x_2} t(x)\, dx = \frac{1}{121-100} \int_{100}^{121} 600 x^{-\frac{1}{2}} dx =$$

$$= \frac{600}{21} \cdot 2\sqrt{x}\, \Bigg|_{100}^{121} = \frac{2 \cdot 200}{7} \cdot (11-10) = \frac{400}{7} \approx 57,2 \ \text{(хв)}.$$

Приклад 4. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 1$, виражених в грошових одиницях, якщо обсяг продукції x змінюється від 0 до 3 одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати приймають середнє значення.

Розв'язання. Згідно з теоремою про середнє значення

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

У нашому випадку

$$f(\xi) = \frac{1}{3} \int_0^3 (3x^2 + 4x + 1)\, dx = \frac{1}{3} \left(3\frac{x^3}{3} + \frac{4}{2} x^2 + x \right) \Bigg|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{3} (x^3 + 2x^2 + x) \Bigg|_0^3 = \frac{1}{3} (27 + 18 + 3) = 16 \ \text{(грош. од.)},$$

тобто середнє значення витрат дорівнює 16.

Визначимо, при якому обсязі продукції витрати приймають це значення, тобто розв'яжемо рівняння

$$3x^2 + 4x + 1 = 16, \quad \text{або} \quad 3x^2 + 4x - 15 = 0.$$

Враховуючи, що обсяг продукції не може бути від'ємним, з останнього рівняння маємо

$$\xi = x = \frac{-2 + \sqrt{4 + 45}}{3} = \frac{-2 + 7}{3} = \frac{5}{3},$$

тобто $\xi = 5/3$ одиниць продукції.

При розрахунку економічної ефективності капітальних вкладень зустрічаються задачі розрахунку початкової суми за її кінцевою величиною, отриманою через час t (років) при річному відсотку (відсотковій ставці) p. Цей процес, як відомо, називається **дисконтуванням** .

Нехай K_t – кінцева сума, отримана за t років, і K дисконтована (початкова) сума, яку в фінансовому аналізі називають також **сучасною сумою** . Якщо відсотки прості, то $K_t = K(1+it)$, де $i = p/100$ – питома відсоткова ставка. Тоді $K = \dfrac{K_t}{1+it}$. У разі складних відсотків $K_t = K(1+it)^t$, і тому $K = \dfrac{K_t}{(1+it)^t}$. У разі неперервного нарахування відсотків $K_t = K e^{it}$, і тому $K = K_t e^{-it}$.

Нехай щорічно прибуток, що надходить, змінюється за часом і описується функцією $f(t)$, та при питомій нормі відсотка, що дорівнює i , відсоток нараховується неперервно. Можна показати, що в цьому випадку дисконтований прибуток K за період T обчислюється за формулою

$$K = \int_0^T f(t)\, e^{-it} dt .$$

Приклад 5. Визначити дисконтований прибуток за три роки при відсотковій ставці 8 % , якщо первісні (базові) капіталовкладення склали 10 млрд гр. од. і передбачається щорічне збільшення капіталовкладень на 1 млрд гр. од.

Розв'язання. Очевидно, що капіталовкладення задаються функцією

$$f(t) = 10 + 1\cdot t = 10 + t .$$

Тоді дисконтована сума капіталовкладень складе

$$K = \int_0^3 (10+t)\, e^{-0,08t} dt = \left| \begin{array}{ll} u = 10+t; & du = dt \\ dv = e^{-0,08t} dt; & v = \dfrac{1}{-0,08} e^{-0,08t} \end{array} \right| =$$

$$= (10+t)\ \frac{1}{-0,08} e^{-0,08t} \Big|_0^3 + \frac{1}{0,08} \int_0^3 e^{-0,08t} dt = -\frac{1}{0,08}(13 e^{-0,24} - 10) -$$

$$-\frac{1}{0,08^2} e^{-0,08t} \Big|_0^3 = \frac{1}{0,08}(13\, e^{-0,24} - 10) - \frac{1}{0,08^2}(e^{-0,24} - 1) \approx 30{,}5 \text{ млрд грош. од.}$$

Це означає, що через три роки буде отримана однакова нарощена сума як за умови щорічних капіталовкладень у розмірах від 10 до 13 млрд грош. од., так і за умови, що одночасні первісні вкладення складали 30,5 млрд грош. од. (при одній і тій же відсотковій ставці та неперервному нарахуванні відсотків).

Для оцінки ступеня нерівності **в розподілі прибутків** серед населення досліджують криву Лоренца, що показує залежність відсотка прибутків від відсотка населення, що їх отримує (рис. 5.2 , крива OBA) .

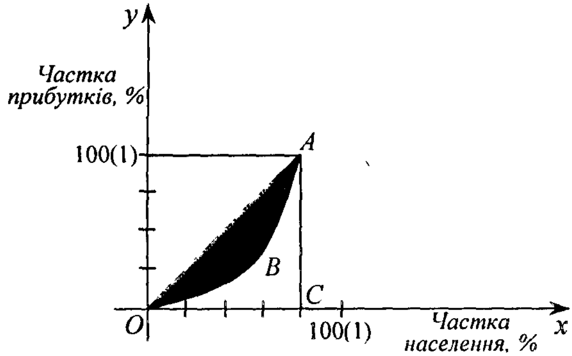

Рис. 5.2

При рівномірному розподілі прибутків крива Лоренца вироджується в пряму – бісектрису OA, тому площа фігури OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника OAC (коефіцієнт Джині) , характеризує ступінь нерівності в розподілі прибутків серед населення.

Приклад 6. За даними досліджень розподілу прибутків в одній з країн крива Лоренца може бути описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x – частка населення, y – частка прибутків населення. Обчислити коефіцієнт Джині

Розв'язання. Очевидно, коефіцієнт Джині (див. рис. 5.2)

$$K = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}, \quad \text{бо} \quad S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2},$$

$$S_{OABC} = \int_0^1 \left(1 - \sqrt{1 - x^2}\right) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\, dx,$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} x=\sin t \\ dx=\cos t\,dt \\ x=0 \quad t=0 \\ x=1 \quad t=\dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cdot \cos t\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}t \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4}\sin 2t \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4},$$

$$S_{OABC} = 1-\frac{\pi}{4}; \qquad K = 1-2\left(1-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0{,}57.$$

Достатньо високе значення K показує істотно нерівномірний розподіл прибутків серед населення в розглядуваній країні.

5.71. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 3x^2 + 4x + 2$, виражених в грошових одиницях, якщо обсяг продукції x змінюється від 0 до 3 од. Вказати обсяг продукції, за якого витрати приймають середнє значення.

5.72. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 6x^2 + 4x + 1$, виражених в грошових одиницях, якщо обсяг продукції x змінюється від 0 до 5 од. Вказати обсяг продукції, за якого витрати приймають середнє значення.

5.73. Визначити обсяг продукції, виробленої робітником за п'яту годину робочого дня, якщо продуктивність характеризується функцією

$$f(t) = \frac{3}{3t+2} + 5.$$

5.74. Визначити обсяг продукції, виробленої робітником за третю годину робочого дня, якщо продуктивність характеризується функцією

$$f(t) = \frac{3}{4t+5} + 4.$$

5.75. Продуктивність праці протягом робочого дня змінюється. Нехай · продуктивності праці має вигляд $f(t) = 100 + 10t$ (дет./год). Скільки зробить робітник за дві години роботи? (Тут t – відрізок часу від робочого дня.)

5.76. Скільки вугілля видобуде шахтар за три години роботи, якщо функція продуктивності праці є $f(t) = 20 + 2t$ (т/год) ?

5.77. Через деякий час після початку роботи продуктивність праці перестає зростати і стає приблизно сталою. Визначити, скільки деталей зробить робітник за восьмигодинну зміну, якщо за перші дві години роботи продуктивність зростає за законом $f(t) = 100 + 10t$. Наступні чотири години продуктивність праці залишається сталою та дорівнює досягнутій на кінець другої години роботи, а останні дві години зменшується за законом $f(t) = f(6) - 15t$, де $f(6)$ – продуктивність праці в кінці шостої години роботи. Визначити середню продуктивність праці за зміну.

5.78. Міська площа, яку треба заасфальтувати, має форму еліпса, велика вісь якого дорівнює 120 м, а мала – 100 м. Визначити сумарні витрати на асфальтування площі, якщо вартість асфальтування 1 м^2 складає 20 грош. од.

5.79. Знайти середнє значення витрат, якщо функція витрат задана рівнянням $f(x) = 3x + 2 - \dfrac{1}{x}$ (x – обсяг виробництва), а обсяг випуску продукції змінюється від 1 до 4,5. Вказати обсяг продукції, за якого витрати приймають середнє значення.

5.80. Визначити дисконтований (початковий) обсяг прибутку, отриманого за 10 років, якщо щорічно прибуток складав 100 тис. грош. од., відсоткова ставка дорівнювала 5 %. Відсотки нараховуються неперервно .

5.81. Обчислити початковий вклад K, якщо виплати по цьому вкладу повинні складати 100 грош. од. впродовж чотирьох років, а відсоткова ставка – 7 %. Відсотки нараховуються неперервно .

5.82. Ріка протікає лугом, утворюючи криву $y = x - 2x^2$, одиниця довжини – 1 км, вісь Ox – лінія шосе. Скільки гектарів лугу між шосе і рікою

5.83. Сумарні ресурси для споживання визначаються за формулою

$$C_t = \int_0^t e^{\alpha t} dt,$$

де α – середньорічний темп приросту ресурсів споживання ; t – час.

Визначити сумарні ресурси для споживання, якщо :

а) $\alpha = 2$ %, $t = 5$; в) $\alpha = 2{,}7$ %, $t = 4$;

б) $\alpha = 3$ %, $t = 10$; г) $\alpha = 1{,}9$ %, $t = 6$.

5.84. Залежність витрат електроенергії, виробленої на електростанції продовж доби, від часу t задається формулою

$$w = \int_0^t f(x)\,dx ,$$

е $f(x)$ – навантаження на електростанцію, кВт·год ; x – кількість годин боти на електростанції, що відраховується від початку доби.

Визначити витрати електроенергії :

а) за одну годину роботи, якщо $f(x) = 20xe^{x^2}$;

б) за десять годин роботи, якщо $f(x) = 5x\sqrt{x}$;

в) за п'ять годин роботи, якщо $f(x) = \ln(1+x)$.

5.85. Електропоїзд, що виходить з залізничної станції, іде з прискоренням $a = f(t)$, де t – час перебування в дорозі. Витрати електроенергії кВт·год) на рух електропоїзда задається формулою

$$M = \int_0^t f(t)\,dt .$$

Обчислити витрати електроенергії впродовж перших трьох годин руху, що :

а) $f(t) = te^{2t}$; б) $f(t) = \ln t$; в) $f(t) = te^{t^2}$.

5.86. Визначити запас товару на складі, що утвориться за два дні, якщо ження товарів характеризується функцією $f(t) = 3t^2 + 3t + 4$.

5.87. Визначити кількість тракторів, що випущено за п'ять років, якщо і випуск зростав за арифметичною прогресією : $f(t) = a_0 + b_0 t$, де час, років .

5.88. Обсяг виробленого сукупного суспільного продукту визначається за формулою

$$y_t = y_0 e^{\int_0^t y(t)\,dt},$$

де $y(t)$ – темп приросту виробництва ; t – час ; y_0 – початковий обсяг виробленого сукупного продукту. Знайти обсяг виробленого сукупного суспільного продукту, якщо темп приросту виробництва визначається як $y(t) = 2 + 3t + t^2$.

5.89. Функція граничного прибутку задається формулою

$$y(x) = -0{,}02x + 10,$$

де x – кількість проданих одиниць товару. Визначити загальний прибуток від продажу 300 одиниць товару.

5.90. Виробник реактивних двигунів оцінює рівень витрат на обслуговування двигунів функцією від годин роботи двигуна :

$$r(x) = 40 + 0{,}030\,x^2,$$

де x – кількість годин ; $r(x)$ – витрати на ремонт. Визначити витрати, що очікуються протягом 100 годин роботи.

5.91. Енергозберігаюче обладнання коштує 75 тис. грош. од. Заощадження від використання такого обладнання визначаються формулою

$$s(t) = 40e^{-0{,}5t},$$

де t – час , років ; s – заощадження , тис. грош. од. Через який час фірма покриє витрати на придбання обладнання?

5.10. Економічні задачі, що зводяться до диференціальних рівнянь

Приклад 1. Швидкість обезцінювання обладнання внаслідок його зносу пропорційна в кожний даний момент часу його фактичній вартості. Початкова вартість – A_0. Яка буде вартість обладнання після його використання впродовж t років?

Розв'язання. Нехай A_t – вартість обладнання в момент t. Зміна вартості (обезцінювання) виражається різницею $A_0 - A_t$. Швидкість обезцінювання $\frac{d}{dt}(A_0 - A_t)$ пропорційна фактичній вартості в даний момент A_t Одержуємо рівняння

$$\frac{d(A_0 - A_t)}{dt} = k A_t$$

початковою умовою

$$A_t \Big|_{t=0} = A_0 .$$

Розв'язавши його, отримаємо :

$$-\frac{d A_t}{dt} = k A_t; \qquad \int \frac{dA_t}{A_t} = -\int k\, dt ; \qquad \ln|A_t| = -kt + \ln|C| ;$$

$$\ln\left|\frac{A_t}{C}\right| = -kt; \qquad \frac{A_t}{C} = e^{-kt}; \qquad A_t = Ce^{-kt}.$$

Для визначення довільної сталої C використаємо початкову умову $A_t = A_0$ при $t = 0$: $A_0 = Ce^{-k\,0}$, $C = A_0$, $A_t = A_0 e^{-kt}$. Отриманий частинний розв'язок дає відповідь на питання даної задачі.

Приклад 2. Нехай $y(t)$ - кількість продукції, що випускається галуззю за час t; p - ціна продукції. Сума інвестицій (коштів, направлених на розширення виробництва) $I(t)$ пропорційна прибутку $p\,y(t)$ з коефіцієнтом пропорційності m ($m = \text{const}$, $0 < m < 1$). Підвищення швидкості випуску продукції пропорційне збільшенню інвестицій з коефіцієнтом пропорційності η. Вимагається знайти кількість продукції, що випускається галуззю за час t, якщо в початковий момент часу $t = t_0$ $y = y_0$.

Розв'язання. У відповідності з умовою

$$I(t) = m\,p\,y(t),$$

$$y' = \eta I(t),$$

$$y' = \eta\, m\, p\, y(t).$$

Позначимо $k = \eta m p$. Тоді рівняння прийме вигляд

$$y' = k y .$$

Маємо рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dt} = k y ,$$

$$\frac{dy}{y} = k\, dt , \qquad \frac{dy}{y} = k\, dt ,$$

$$\ln|y| = kt + \ln|C| ,$$

$$y = C e^{kt} .$$

Врахуємо, що $y\big|_{t=t_0} = y_0$, тоді

$$y_0 = C\, e^{k t_0} ,$$

$$C = y_0\, e^{-k t_0} .$$

Звідси $y = y_0\, e^{k(t - t_0)}$.

Приклад 3. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються відповідно співвідношеннями

$$q = 4p' - 2p + 39 , \quad s = 44p' + 2p - 1 ,$$

де p – ціна товару ; p' – тенденція формування ціни (похідна ціни за часом). Нехай також в початковий момент часу ціна p за одиницю товару складала 1 грош. од. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти закон зміни ціни в залежності від часу.

Розв'язання. Для того щоб попит відповідав пропозиції, необхідно виконання рівності

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1 .$$

Звідси

$$10p' + p - 10 = 0 .$$

Маємо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними :

$$-10 \frac{dp}{dt} = p - 10 ,$$

$$\frac{dp}{p - 10} = -\frac{dt}{10} ,$$

$$\ln|p-10| = -\frac{t}{10} + \ln|C| ,$$

$$\ln\left|\frac{p-10}{C}\right| = -\frac{t}{10} ,$$

$$\frac{p-10}{C} = e^{-0,1t} ,$$

$$p = C\, e^{-0,1t} + 10 .$$

Врахуємо, що $p\big|_{t=0} = 1$, тоді

$$1 = C + 10 ; \qquad C = -9 ;$$

$$p = -9\, e^{-0,1t} + 10 .$$

Отже, щоб між попитом і пропозицією збереглася рівновага, необхідно, щоб ціна змінювалася відповідно до отриманої формули.

Приклад 4. Нехай попит і пропозиція на товар визначаються співвідношеннями

$$q = 2p'' - p' - p + 15 , \quad s = 3p'' + p' + p + 5 ,$$

де p – ціна на товар ; p' – тенденція формування ціни ; p'' – темп зміни ціни. Нехай також у початковий момент часу $p(0) = 6$, $q(0) = s(0) = 10$. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, знайти залежність ціни від часу.

Розв'язання. Виходячи з вимоги відповідності попиту пропозиції, маємо

$$q = s .$$

Отже,

$$2p'' - p' - p + 15 = 3p'' + p' + p + 5 ,$$

звідки одержуємо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами :

$$p'' + 2p' + 2p = 10 .$$

Відповідне однорідне рівняння :

$$p'' + 2p' + 2p = 0 .$$

Характеристичне рівняння :

$$k^2 + 2k + 2 = 0 .$$

Корені характеристичного рівняння :

$$k_{1,2} = -1 \pm i .$$

Загальний розв'язок однорідного рівняння :

$$p^*(t) = C_1 e^{-t} \cos t + C_2 e^{-t} \sin t .$$

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння будемо шукати у вигляді

$$p_{ч} = A .$$

Тоді

$$p'_{ч} = 0 \ ; \quad p''_{ч} = 0 .$$

Підставивши ці значення в диференціальне рівняння, отримаємо

$$2A = 10 ,$$

$$A = 5 , \quad p_{ч} = 5 .$$

Загальний розв'язок буде таким :

$$p(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + 5 .$$

Врахуємо початкові умови :

$$p(0) = 6 \ ; \quad 6 = C_1 + 5 \ ; \quad C_1 = 1 .$$

Тоді

$$p(t) = e^{-t}(\cos t + C_2 \sin t) + 5 \ ;$$

$$p'(t) = -e^{-t}(\cos t + C_2 \sin t) + e^{-t}(-\sin t + C_2 \cos t) =$$
$$= e^{-t}\left[(C_2 - 1)\cos t - (C_2 + 1)\sin t\right] ;$$

$$p''(t) = -e^{-t}\left[(C_2 - 1)\cos t - (C_2 + 1)\sin t\right] + e^{-t}\left[-(C_2 - 1)\sin t - (C_2 + 1)\cos t\right] =$$
$$= e^{-t}\left[-2C_2 \cos t + 2\sin t\right] .$$

Звідси ,

$$p'(0) = C_2 - 1 \ ;$$
$$p''(0) = -2\,C_2 .$$

Враховуючи, що $q = 2p'' - p' - p + 15$ і $q(0) = 10$, знаходимо

$$10 = 2(-2C_2) - (C_2 - 1) - 6 + 15 ,$$

звідки $C_2 = 0$. Отже, $p(t) = 5 + e^{-t} \cos t$.

Приклад 5. Нехай торговими установами реалізується продукція, пр яку в момент часу t з числа потенційних покупців N знає лише x покупців. Після проведення рекламних оголошень швидкість зміни кількості покупців, що знають про продукцію, пропорційна як кількості покупців, котрі знають про товар, так і кількості покупців, яким про нього ще нічого невідомо.

Відомо, що в початковий момент часу $t=0$ про товар дізналося N/γ чоловік (час відраховується після рекламних оголошень), γ – задане число. Знайти закон зміни в залежності від часу кількості x покупців, що знають про продукцію.

Розв'язання. Згідно з умовою рівняння для визначення $x=x(t)$ має вигляд

$$\frac{dx}{dt}=kx(N-x),$$

де $\frac{dx}{dt}$ – швидкість зміни кількості покупців, що знають про товар; x – кількість тих, хто знає про товар; $N-x$ – кількість тих, хто не знає про товар в момент часу t; k – додатний коефіцієнт пропорційності.

Початкова умова: $x|_{t=0}=N/\gamma$.

Розв'язуємо диференціальне рівняння, що є рівнянням з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{x(N-x)}=k\,dt.$$

У результаті інтегрування маємо

$$\frac{1}{N}\ln\left|\frac{x}{N-x}\right|=kt+C.$$

Зважаючи $NC=C_1$, приходимо до рівності

$$\frac{x}{N-x}=Ae^{Nkt},$$

де $A=e^{C_1}$. Розв'яжемо останнє рівняння відносно x:

$$x=N\frac{A\cdot e^{Nkt}}{A\cdot e^{Nkt}+1}=\frac{N}{1+p\cdot e^{-Nkt}},\qquad \text{де } p=1/A.$$

Отримане рівняння називається **рівнянням логістичної кривої**.

Врахуємо початкові умови :

$$\frac{N}{\gamma}=\frac{N}{1+p}\ ; \qquad 1+p=\gamma\ ; \qquad p=\gamma-1\ .$$

Тоді $x=\dfrac{N}{1+(\gamma-1)e^{-Nkt}}$ – закон зміни кількості покупців в залежності від часу t. Зокрема, при $\gamma=2$ отримаємо

$$x=\frac{N}{1+e^{-Nkt}}\ .$$

На рис. 5.3 схематично зображена логістична крива при $\gamma=2$.

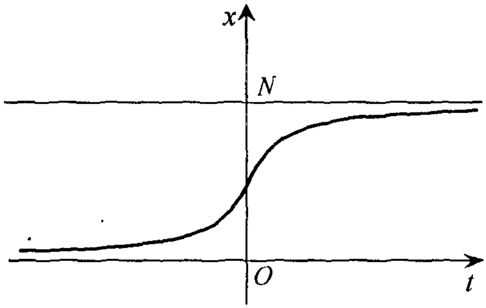

Рис. 5.3

Приклад 6. Скласти диференціальне рівняння розширеного відтворення.

Розв'язання. Позначимо P – вартість валового національного продукту, P_1 – вартість виробничих засобів виробництва, P_2 – вартість виробничих засобів споживання. Відомо, що

$$\frac{P_1}{P}=H; \qquad \frac{P_2}{P}=1-H\ .$$

Тоді $P_1=HP$, $P_2=(1-H)\,P$.

Позначимо частку перенесеної вартості в національному доході через S. Тоді, національний дохід (в вартісному вираженні) є різницею $P-SP=P(1-S)$. Частина національного доходу іде на збільшення виробничих фондів C (у фонд накопичення) з метою розширення виробництва.

Ця частина дає швидкість зростання C', тобто $\frac{dC}{dt}=C'$ (t – час). Інша частина іде на споживання, тобто

$$P(1-S)=\frac{dC}{dt}+P_2=\frac{dC}{dt}+(1-H)P.$$

Уводячи фондоємність приросту продукції $f=\frac{dC}{dP}$ і враховуючи, що $\frac{dC}{dt}=\frac{dC}{dP}\frac{dP}{dt}=f\frac{dP}{dt}$, отримуємо $P(1-S)=f\frac{dP}{dt}+(1-H)P$, звідки

$$\frac{dP}{dt}=\frac{H-S}{f}P.$$

Це рівняння називається **диференціальним рівнянням розширено-відтворення** .

5.92. Проінтегрувати диференціальне рівняння розширеного відтво-рення $\frac{dP}{dt}=\frac{H-S}{f}P$, вважаючи, що H, S, f – сталі.

5.93. Через який проміжок часу відбудеться подвоєння сукупного спільного продукту P, якщо його залежність від часу відбиває рівняння розширеного відтворення $\frac{dP}{dt}=\frac{H-S}{f}P$, де $H=0{,}6$; $S=0{,}5$; $f=1$.

5.94. Повні витрати виробництва є функцією y від обсягу виробництва. Граничні і повні витрати для всіх значень x задовольняють рівнянню $-4y+x=0$. Знайти функцію повних витрат, що задовольняє початковій умові $y(0)=0$.

5.95. Повні витрати виробництва є функцією обсягу виробництва x. Знайти функцію повних витрат y, якщо відомо, що граничні витрати для всіх значень x пропорційні середнім витратам. Коефіцієнт пропорційності рівний k, початкова умова $y(0)=1$ (функцією середніх витрат називається функція $S=\frac{f(x)}{x}$, $y=f(x)$ – повні витрати).

5.96. Сумарний прибуток фірми є функцією $y(x)$, де x – кількість виробленої продукції. Граничний прибуток фірми відповідає функції $y'(x) = 50000 - x$. Якою буде функція сумарного прибутку фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий прибуток.

5.97. Виторг від продажу x одиниць товару описується функцією $U(x)$. Граничний виторг – $U'(x) = x + 100$. Яким буде виторг за продану продукцію, якщо виторг від продажу 100 одиниць продукції дорівнює 40 000 грош. од.

5.98. Нехай еластичність виробничої функції $y = f(x)$ відносно змінної x характеризується співвідношенням

$$E_x(y) = \frac{x - 2x^2}{1 + x - x^2}.$$

Визначити саму функцію, якщо її графік проходить через точку $M(1, 2)$ $\left(E_x(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}\right)$.

5.99. Нехай еластичність виробничої функції $y = f(x)$ відносно змінної x характеризується співвідношенням $E_x(y) = a$, $a = \text{const}$. Знайти цю функцію, якщо її графік проходить через точку $M(1, 1)$.

5.100. Знайти залежність ціни p і попиту q від часу t, якщо попит пропозиція визначаються співвідношеннями

$$q(t) = p'' - 4p' - p + 17,$$

$$s(t) = 2p'' + p' + 3p + 5;$$

$$p(0) = 3,$$

$$q(0) = 11,$$

$$q(t) = s(t).$$

5.11. Індивідуальне завдання 5

Задача 1. Підприємство випускає вироби трьох видів: I, II, III. При цьому використовується сировина трьох типів: S_1, S_2, S_3. Норми витрат кожного з типів сировини на один виріб і обсяг витрат сировини за один день задано таблицею.

Вид сировини	Норми витрат на один виріб, умов. од.			Витрати сировини за один день, умов. од.
	I	II	III	
S_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	b_2
S_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	b_3

Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду виробу.

Варіанти завдань

№ варіанта	Вид сировини	Норми витрат на один виріб, умов. од.			Витрати сировини за один день, умов. од.
		I	II	III	
1	2	3	4	5	6
1	S_1	2	1	9	1750
	S_2	5	4	6	2700
	S_3	8	7	4	2800
2	S_1	1	2	5	1100
	S_2	3	4	3	1800
	S_3	5	6	2	2600
3	S_1	1	5	2	630
	S_2	4	3	7	680
	S_3	6	1	1	440
4	S_1	2	7	1	390
	S_2	4	5	2	420
	S_3	6	3	1	350
5	S_1	9	3	4	820
	S_2	7	1	6	820
	S_3	5	2	2	400

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6
6	S_1	1	7	6	540
	S_2	9	3	4	720
	S_3	8	2	2	540
7	S_1	5	2	9	350
	S_2	3	10	7	490
	S_3	1	3	5	180
8	S_1	1	7	6	460
	S_2	10	4	5	420
	S_3	2	3	9	470
9	S_1	6	1	8	530
	S_2	5	4	3	490
	S_3	2	1	10	430
10	S_1	7	2	9	340
	S_2	6	3	10	340
	S_3	5	4	1	240
11	S_1	9	7	1	270
	S_2	8	6	2	280
	S_3	7	5	1	210
12	S_1	1	6	2	280
	S_2	2	5	1	250
	S_3	3	4	10	1020
13	S_1	1	8	5	880
	S_2	9	7	4	1050
	S_3	10	6	3	1070
14	S_1	1	5	8	450
	S_2	10	6	1	720
	S_3	1	7	3	450
15	S_1	1	5	2	630
	S_2	5	8	9	1310
	S_3	6	1	1	440
16	S_1	2	7	1	390
	S_2	6	12	3	810
	S_3	6	3	1	350
17	S_1	9	3	4	820
	S_2	7	1	6	820
	S_3	14	5	6	1220

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6
18	S_1	1	3	5	180
	S_2	4	13	12	670
	S_3	5	2	9	350
19	S_1	2	1	10	430
	S_2	7	5	13	920
	S_3	8	2	18	960
20	S_1	1	6	2	280
	S_2	3	11	3	530
	S_3	4	10	12	1300
21	S_1	1	8	5	880
	S_2	10	15	9	1930
	S_3	11	14	8	1950
22	S_1	2	9	1	680
	S_2	4	7	2	810
	S_3	8	5	1	1080
23	S_1	3	8	2	800
	S_2	6	2	1	460
	S_3	9	4	1	700
24	S_1	5	3	4	670
	S_2	10	2	2	660
	S_3	15	1	1	730
25	S_1	1	7	4	170
	S_2	9	1	3	125
	S_3	10	2	3	155
26	S_1	2	7	5	180
	S_2	8	3	4	150
	S_3	10	1	1	80
27	S_1	1	7	4	170
	S_2	10	8	7	295
	S_3	19	3	6	280
28	S_1	3	8	2	800
	S_2	9	10	3	1260
	S_3	15	6	2	1160
29	S_1	1	9	2	115
	S_2	7	8	3	145
	S_3	14	2	1	100

1	2	3	4	5	6
	S_1	6	5	1	155
30	S_2	2	1	4	85
	S_3	3	2	1	80
	S_1	7	1	6	75
31	S_2	8	1	5	75
	S_3	3	10	1	120

Задача 2. Задано наступний міжгалузевий баланс тригалузевої моделі господарства.

Галузь виробництва	Галузь споживання			Кінцевий продукт	Валовий випуск	Новий кінцевий продукт
	1	2	3	Y	X	$\overline{Y}$
1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	y_1	x_1	$\overline{y_1}$
2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	y_2	x_2	$\overline{y_2}$
3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	y_3	x_3	$\overline{y_3}$

Визначити такі економічні показники :

1) коефіцієнти прямих витрат (матрицю прямих витрат A) ;
2) коефіцієнти повних витрат (матрицю повних витрат S) ;
3) валовий випуск $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$ галузей, що забезпечує новий кінцевий продукт $\overline{Y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3})$.

Варіанти завдань

№ варіан-та	Галузь виробництва	Галузь споживання			Кінцевий продукт	Валовий випуск	Новий кінцевий продукт
		1	2	3	Y	X	$\overline{Y}$
1	2	3	4	5	6	7	8
	1	40	10	5	50	100	100
1	2	30	30	0	60	120	90
	3	0	20	40	100	160	90

Продовження таблиці

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	20	20	10	50	100	80
	2	40	30	30	100	200	120
	3	40	40	50	170	300	100
3	1	50	20	30	20	120	50
	2	10	10	50	30	100	50
	3	20	50	80	50	200	40
4	1	10	40	20	30	100	50
	2	50	20	10	120	200	100
	3	20	10	20	50	100	80
5	1	30	40	10	120	200	100
	2	50	40	50	160	300	120
	3	20	10	10	60	100	100
6	1	10	50	50	190	300	100
	2	50	10	10	30	100	80
	3	20	40	80	60	200	70
7	1	80	50	80	50	200	80
	2	20	60	10	60	150	100
	3	40	10	10	40	100	80
8	1	80	10	40	170	300	100
	2	20	40	10	80	150	100
	3	60	50	10	20	150	50
9	1	60	40	10	90	200	100
	2	20	20	20	40	100	50
	3	10	20	30	90	150	100
10	1	10	10	20	30	70	20
	2	20	30	30	10	90	40
	3	30	20	30	20	100	30
11	1	50	100	100	150	400	100
	2	100	50	50	100	300	80
	3	100	60	10	30	200	60
12	1	60	100	10	30	200	60
	2	50	100	50	100	300	100
	3	50	30	150	170	400	100
13	1	100	40	50	110	300	100
	2	50	50	50	50	200	100
	3	50	100	100	150	400	100

Продовження таблиц

1	2	3	4	5	6	7	8
14	1	10	60	10	20	100	100
	2	20	100	50	130	300	100
	3	30	100	30	40	200	80
15	1	10	20	20	50	100	100
	2	50	100	100	150	400	120
	3	50	100	100	50	300	100
16	1	50	20	20	110	200	100
	2	50	10	20	20	100	50
	3	50	10	10	30	100	60
17	1	20	10	20	50	100	100
	2	20	100	20	60	200	80
	3	30	20	40	60	150	50
18	1	30	70	10	40	150	80
	2	40	60	50	50	200	100
	3	30	10	30	30	100	60
19	1	50	100	40	60	250	100
	2	40	20	30	110	200	100
	3	40	30	10	20	100	40
20	1	50	80	10	60	200	100
	2	50	50	40	110	250	60
	3	20	40	10	30	100	50
21	1	20	0	10	20	50	40
	2	10	10	20	60	100	50
	3	0	30	10	40	80	60
22	1	10	30	20	10	70	30
	2	20	10	20	40	90	20
	3	10	40	10	20	80	60
23	1	30	20	10	30	90	60
	2	30	50	20	20	120	60
	3	10	20	30	20	80	40
24	1	40	30	10	20	100	60
	2	40	30	30	30	130	40
	3	20	30	20	20	90	80
25	1	30	20	10	60	120	30
	2	30	40	20	10	100	40
	3	10	10	30	30	80	50

	2	3	4	5	6	7	8
26	1	10	30	20	20	80	60
	2	50	10	20	30	110	50
	3	20	30	40	50	140	50
27	1	20	10	50	10	90	40
	2	10	40	30	30	110	60
	3	30	20	40	40	130	50
28	1	10	10	40	30	90	60
	2	10	50	30	30	120	90
	3	30	20	10	40	100	50
29	1	50	50	10	90	200	80
	2	40	60	50	150	300	100
	3	10	30	10	50	100	100
30	1	60	10	100	130	300	100
	2	20	30	20	30	100	60
	3	80	20	10	90	200	180
31	1	10	50	20	20	100	60
	2	20	60	40	80	200	100
	3	30	30	100	140	300	100

Задача 3. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має ляд

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

a_{ij} – частка національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю зрів у країни S_i, при цьому

$$\sum_{i=1}^{3} a_{ij} = 1 \qquad (j = \overline{1,3}).$$

Знайти співвідношення національних доходів країн для збалансованої гівлі.

Варіанти завдань

1. $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0 & 0,3\\ 0,3 & 0,5 & 0,6\\ 0,3 & 0,5 & 0,1\end{pmatrix}$.

2. $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,5 & 0\\ 0,5 & 0,4 & 0,5\\ 0 & 0,1 & 0,5\end{pmatrix}$

3. $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,7 & 0\\ 0,7 & 0,2 & 0,7\\ 0 & 0,1 & 0,3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,5 & 0\\ 0,6 & 0,4 & 0,4\\ 0 & 0,1 & 0,6\end{pmatrix}$

5. $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0\end{pmatrix}$.

6. $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

7. $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

8. $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

9. $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3}\\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

10. $A=\begin{pmatrix}0 & 0,3 & 0,4\\ 0,5 & 0,6 & 0,3\\ 0,5 & 0,1 & 0,3\end{pmatrix}$

11. $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,4 & 0\\ 0,6 & 0,3 & 0,5\\ 0,1 & 0,3 & 0,5\end{pmatrix}$.

12. $A=\begin{pmatrix}0 & 0,4 & 0,3\\ 0,5 & 0,3 & 0,6\\ 0,5 & 0,3 & 0,1\end{pmatrix}$

13. $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0 & 0,4\\ 0,6 & 0,5 & 0,3\\ 0,1 & 0,5 & 0,3\end{pmatrix}$.

14. $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0,3 & 0\\ 0,3 & 0,6 & 0,5\\ 0,3 & 0,1 & 0,5\end{pmatrix}$

15. $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0 & 0,5\\ 0,5 & 0,5 & 0,4\\ 0 & 0,5 & 0,1\end{pmatrix}$.

16. $A=\begin{pmatrix}0,4 & 0 & 0,5\\ 0,6 & 0,4 & 0,4\\ 0 & 0,6 & 0,1\end{pmatrix}$.

17. $A=\begin{pmatrix}0 & 0,4 & 0,5\\ 0,4 & 0,6 & 0,4\\ 0,6 & 0 & 0,1\end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix}0,5 & 0,4 & 0\\ 0,4 & 0,6 & 0,4\\ 0,1 & 0 & 0,6\end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{4}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4 & 0,4\\ 0 & 0,1 & 0,6\\ 0,4 & 0,5 & 0\end{pmatrix}$.

21. $A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,4 & 0,4\\ 0,4 & 0,5 & 0\\ 0 & 0,1 & 0,6\end{pmatrix}$.

22. $A=\begin{pmatrix}0,7 & 0,5 & 0\\ 0,1 & 0,5 & 0,1\\ 0,2 & 0 & 0,9\end{pmatrix}$.

23. $A=\begin{pmatrix}0,7 & 0,5 & 0,1\\ 0,1 & 0,5 & 0,2\\ 0,2 & 0 & 0,7\end{pmatrix}$.

24. $A=\begin{pmatrix}0,3 & 0,2 & 0,4\\ 0,5 & 0,4 & 0\\ 0,2 & 0,4 & 0,6\end{pmatrix}$.

25. $A=\begin{pmatrix}0,2 & 0,3 & 0,4\\ 0,4 & 0,5 & 0\\ 0,4 & 0,2 & 0,6\end{pmatrix}$.

26. $A=\begin{pmatrix}0,8 & 0 & 0,6\\ 0,1 & 0,2 & 0,3\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\end{pmatrix}$.

27. $A=\begin{pmatrix}0,6 & 0 & 0,8\\ 0,3 & 0,2 & 0,1\\ 0,1 & 0,8 & 0,1\end{pmatrix}$.

28. $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,8 & 0,1\\ 0,3 & 0,2 & 0,1\\ 0,6 & 0 & 0,8\end{pmatrix}$.

29. $A=\begin{pmatrix}0,6 & 0,8 & 0\\ 0,3 & 0,1 & 0,2\\ 0,1 & 0,1 & 0,8\end{pmatrix}$.

30. $A=\begin{pmatrix}0,8 & 0,6 & 0\\ 0,1 & 0,3 & 0,2\\ 0,1 & 0,1 & 0,8\end{pmatrix}$.

31. $A=\begin{pmatrix}0,1 & 0,3 & 0,2\\ 0,8 & 0,6 & 0\\ 0,1 & 0,1 & 0,8\end{pmatrix}$.

Задача 4. Обсяг продукції U, виробленої підприємством впродовж робочого дня, може бути заданий функцією $U = U(t)$, $1 \le t \le 8$, де t – робочий час, год.

Треба знайти :

1) продуктивність праці, швидкість і темп її зміни ;
2) при якому значенні часу t після початку роботи продуктивність праці максимальна ;
3) значення продуктивності праці, швидкості і темпу її зміни через $t = i$ ($i = \overline{1,8}$) годин після початку роботи .

Результати обчислень звести в таблицю та проаналізувати.

Варіанти завдань

1. $U(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{3}{2}t^2 + 20t + 60$. **2.** $U(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 3t^2 + 40t + 50$.

3. $U(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 60t + 40$. **4.** $U(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 6t^2 + 80t + 30$.

5. $U(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 20$. **6.** $U(t) = -t^3 + 9t^2 + 120t + 10$.

7. $U(t) = -\frac{7}{6}t^3 + \frac{21}{2}t^2 + 140t + 10$. **8.** $U(t) = -\frac{4}{3}t^3 + 12t^2 + 160t + 90$

9. $U(t) = -\frac{3}{2}t^3 + \frac{27}{2}t^2 + 180t + 80$. **10.** $U(t) = -\frac{5}{3}t^3 + 15t^2 + 200t + 70$

11. $U(t) = -\frac{11}{6}t^3 + \frac{33}{2}t^2 + 220t + 60$. **12.** $U(t) = -2t^3 + 18t^2 + 240t + 50$.

13. $U(t) = -\frac{13}{6}t^3 + \frac{39}{2}t^2 + 260t + 40$. **14.** $U(t) = -\frac{7}{3}t^3 + 21t^2 + 280t + 30$

15. $U(t) = -\frac{5}{2}t^3 + \frac{45}{2}t^2 + 300t + 20$. **16.** $U(t) = -\frac{8}{3}t^3 + 24t^2 + 320t + 10$

17. $U(t) = -\frac{1}{6}t^3 + \frac{7}{4}t^2 + 15t + 50$. **18.** $U(t) = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{2}t^2 + 30t + 40$.

19. $U(t) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{21}{4}t^2 + 45t + 30$. **20.** $U(t) = -\frac{2}{3}t^3 + 7t^2 + 60t + 20$.

21. $U(t) = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{35}{4}t^2 + 75t + 10$. **22.** $U(t) = -t^3 + \frac{21}{2}t^2 + 90t + 10$.

23. $U(t)=-\frac{7}{6}t^3+\frac{49}{4}t^2+105t+90$. **24.** $U(t)=-\frac{4}{3}t^3+14t^2+120t+80$.

25. $U(t)=-\frac{3}{2}t^3+\frac{63}{4}t^2+135t+70$. **26.** $U(t)=-\frac{5}{3}t^3+\frac{35}{2}t^2+150t+60$.

27. $U(t)=-\frac{11}{6}t^3+\frac{77}{4}t^2+165t+50$. **28.** $U(t)=-2t^3+21t^2+180t+40$.

29. $U(t)=-\frac{13}{6}t^3+\frac{91}{4}t^2+195t+30$. **30.** $U(t)=-\frac{7}{3}t^3+\frac{49}{2}t^2+210t+20$.

31. $U(t)=-\frac{5}{2}t^3+\frac{105}{4}t^2+225t+10$.

Задача 5. Знайти обсяг продукції, виробленої за проміжок часу t_0, що продуктивність праці характеризується функцією $f(t)$.

Варіанти завдань

1. $f(t)=te^{2t}$; t_0 – перші три години роботи.
2. $f(t)=\ln t$; t_0 – перші три години роботи.
3. $f(t)=te^{t^2}$; t_0 – перші три години роботи.
4. $f(t)=20te^{t^2}$; t_0 – перша година роботи.
5. $f(t)=5t\sqrt{t}$; t_0 – перші п'ять годин роботи.
6. $f(t)=\ln(1+t)$; t_0 – перші п'ять годин роботи.
7. $f(t)=t^2+\frac{1}{4}$; t_0 – друга година роботи.
8. $f(t)=3e^{\frac{t}{2}}$; t_0 – п'ята година роботи.
9. $f(t)=(1+5t)e^{2t}$; t_0 – три роки.
10. $f(t)=(1+4t)e^{3t}$; t_0 – чотири роки.
11. $f(t)=(5+4t)e^{2t}$; t_0 – три роки.
12. $f(t)=(6+7t)e^{2t}$; t_0 – п'ять років.
13. $f(t)=(4+3t)e^{4t}$; t_0 – два роки.

14. $f(t)=(5+6t)e^{3t}$; t_0 – один рік.

15. $f(t)=(9+t)e^{3t}$; t_0 – два роки.

16. $f(t)=(8+5t)e^{2t}$; t_0 – три роки.

17. $f(t)=(1+9t)e^{2t}$; t_0 – п'ять років.

18. $f(t)=-4t^2+24t+160$; t_0 – перші чотири години роботи.

19. $f(t)=-3t^2+18t+120$; t_0 – третя і четверта години робочого дня

20. $f(t)=-\frac{5}{2}t^2+15t+100$; t_0 – п'ята і шоста години робочого дня

21. $f(t)=-\frac{1}{2}t^2+3t+20$; t_0 – друга і третя години робочого дня

22. $f(t)=-t^2+6t+40$; t_0 – перші чотири години робочого дня

23. $f(t)=\frac{1}{5t+2}+3$; t_0 – друга і третя години робочого дня.

24. $f(t)=\frac{1}{4t+3}+4$; t_0 – четверта і п'ята години робочого дня.

25. $f(t)=\frac{5}{4t+2}+3$; t_0 – перші дві години робочого дня.

26. $f(t)=\frac{6}{7t+2}+5$; t_0 – перші три години робочого дня.

27. $f(t)=\frac{4}{3t+8}+2$; t_0 – друга і третя години робочого дня.

28. $f(t)=\frac{5}{6t+3}+1$; t_0 – перша і друга години робочого дня.

29. $f(t)=\frac{9}{3t+1}+2$; t_0 – п'ята година робочого дня.

30. $f(t)=\frac{8}{5t+2}+3$; t_0 – друга година робочого дня.

31. $f(t)=\frac{1}{9t+2}+5$; t_0 – третя година робочого дня.

Задача 6. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох в ресурсів x та y і виражається функцією $z = z\ (x, y)$. Визначити вит- ресурсів x і y, що забезпечують максимальний прибуток підприєм- і знайти цей максимальний прибуток.

Варіанти завдань

1. $z(x,y) = -800 - x^2 - y^2 + 40x + 60y$.
2. $z(x,y) = 250 - x^2 - y^2 + 20x + 100y$.
3. $z(x,y) = -1800 - x^2 - y^2 + 80x + 60y$.
4. $z(x,y) = -2100 - x^2 - y^2 + 40x + 100y$.
5. $z(x,y) = -2100 - x^2 - y^2 + 60x + 80y$.
6. $z(x,y) = -1700 - x^2 - y^2 + 40x + 80y$.
7. $z(x,y) = -1500 - x^2 - y^2 + 20x + 80y$.
8. $z(x,y) = -400 - x^2 - y^2 + 40x + 20y$.
9. $z(x,y) = -2000 - x^2 - y^2 + 100x + 40y$.
10. $z(x,y) = -3800 - x^2 - y^2 + 120x + 60y$.
11. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 40x + 60y - 600$.
12. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x - 800$.
13. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100y - 1200$.
14. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 100x + 100y - 3100$.
15. $z(x,y) = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 80x + 140y - 4200$.
16. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 60x + 20y - 600$.
17. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 100y - 800$.
18. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 100x - 1200$.
19. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 100x + 100y - 3100$.
20. $z(x,y) = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 140x + 80y - 4200$.
21. $z(x,y) = -4x^2 - 2y^2 + 2xy + 40x + 60y - 700$.

22. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+140x-1200$.

23. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+20x+100y-1300$.

24. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+160x+100y-4000$.

25. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+140x+140y-5100$.

26. $z(x,y)=-4x^2-2y^2+2xy+200x+20y-2800$.

27. $z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+60x+40y-700$.

28. $z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+140y-1200$.

29. $z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+100x+20y-1300$.

30. $z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+100x+160y-4000$.

31. $z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+140x+140y-5100$.

5.12. Зразок виконання індивідуального завдання 5

Задача 1. Підприємство випускає вироби трьох видів: I, II, III. При цьому використовується сировина трьох типів: S_1; S_2, S_3. Норми витрат кожного з типів сировини на один виріб і обсяг витрат сировини за один день задано таблицею.

Вид сировини	Норми витрат на один виріб, умов. од.			Витрати сировини за один день, умов. од.
	I	II	III	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	900
S_3	3	2	2	1600

Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду виробу.

Розв'язання.

Нехай щодня підприємство випускає x_1 одиниць виробів першого виду, x_2 одиниць – другого виду, x_3 одиниць – третього виду. Тоді відповідно до витрат сировини кожного типу маємо систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700 \ ; \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 = \ \ 900 \ ; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600 \ . \end{cases}$$

Розв'язуємо систему методом Гаусса :

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 3 & 4 & 2700 \\ 2 & 1 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 2 & 1600 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 900 \\ 2 & 1 & 1 & 900 \\ 3 & 2 & 2 & 1600 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 900 \\ 0 & -1 & -3 & -900 \\ 0 & -1 & -4 & -1100 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 900 \\ 0 & 1 & 3 & 900 \\ 0 & 0 & -1 & -200 \end{array}\right).$$

$\mathrm{Rg}\,\overline{A} = \mathrm{Rg}\,A = 3 = n$, тобто існує єдиний розв'язок системи :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 900 \ ; \\ \qquad x_2 + 3x_3 = 900 \ ; \\ \qquad\qquad x_3 = 200 \ , \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = 900 - 300 - 400 = 200 \ ; \\ x_2 = 900 - 600 = 300 \ ; \\ x_3 = 200 \ . \end{cases}$$

Отримали $x_1 = 200$, $x_2 = 300$, $x_3 = 200$. Зробивши перевірку, бачимо, що система розв'язана вірно.

Таким чином, підприємство випускає 200 одиниць виробу першого виду, 300 – другого виду, 200 – третього виду.

Задача 2. Задано наступний міжгалузевий баланс тригалузевої моделі господарства :

Галузь виробництва	Галузь споживання			Кінцевий продукт	Валовий випуск	Новий кінцевий продукт
	1	2	3	Y	X	$\overline{Y}$
1	10	5	40	45	100	100
2	30	0	30	40	100	50
3	20	40	0	140	200	80

Визначити такі економічні показники :

1) коефіцієнт прямих витрат (матрицю прямих витрат A) ;

2) коефіцієнт повних витрат (матрицю повних витрат S) ;

3) валовий випуск $\overline{X} = (\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})$ галузей, що забезпечує новий кінцевий продукт $\overline{Y} = (\overline{y_1}, \overline{y_2}, \overline{y_3}) = (100, 50, 80)$.

Розв'язання.

Скористаємось теорією, викладеною в п. 5.5.

1. Оскільки коефіцієнти прямих витрат a_{ij} визначаються за формулою $a_{ij} = \dfrac{x_{ij}}{x_j}$ $(i, j = \overline{1, 3})$, то матриця прямих витрат має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} \dfrac{10}{100} & \dfrac{5}{100} & \dfrac{40}{200} \\ \dfrac{30}{100} & \dfrac{0}{100} & \dfrac{30}{200} \\ \dfrac{20}{100} & \dfrac{40}{100} & \dfrac{0}{200} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,05 & 0,2 \\ 0,3 & 0 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Коефіцієнти повних витрат знаходимо як елементи оберненої матриці $S = (S_{ij}) = (E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 0,9 & -0,05 & -0,2 \\ -0,3 & 1 & -0,15 \\ -0,2 & -0,4 & 1 \end{pmatrix};$$

$$S = (E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,17 & 0,26 \\ 0,43 & 1,12 & 0,255 \\ 0,42 & 0,48 & 1,16 \end{pmatrix}.$$

Обернення квадратної матриці найкраще проводити методом повного виключення (методом елементарних перетворень) з використанням обчислювальних засобів. Слід також виконати перевірку правильності знайденої оберненої матриці, тобто виконання рівності $(E - A)\,(E - A)^{-1} = E$

3. Валовий випуск, необхідний для забезпечення заданого кінцевого продукту, отримаємо із співвідношення

$$\overline{X} = (E - A)^{-1} \cdot \overline{Y} = S \cdot \overline{Y} = \begin{pmatrix} 1,23 & 0,17 & 0,26 \\ 0,43 & 1,12 & 0,255 \\ 0,42 & 0,48 & 1,16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 \\ 50 \\ 80 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 152 \\ 120 \\ 158 \end{pmatrix}.$$

Задача 3. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1, S_2, S_3 має ляд

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix},$$

a_{ij} – частка національного доходу, яку країна S_j витрачає на закупівлю товарів у країни S_i, при цьому $\sum_{i=1}^{3} a_{ij}=1$, $j=\overline{1,3}$.

Знайти співвідношення національних доходів країн для збалансованої торгівлі.

Розв'язання.

Як відомо з п. 5.5, задача зводиться до знаходження власного вектора матриці A, що відповідає власному значенню $\lambda=1$. (Перевірте, що $\lambda=1$ є коренем характеристичного рівняння $\det(A-\lambda E)=0$.)

Знаходимо власний вектор $\vec{x}$, що відповідає власному значенню $\lambda=1$, розв'язавши систему рівнянь $(A-E)X=0$.

У розгорнутому вигляді

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

або

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2+\frac{1}{2}x_3=0; \\ \frac{1}{3}x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3=0; \\ \frac{1}{3}x_1+\frac{1}{4}x_2-x_3=0. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему методом Гаусса :

10*

$$A-E=\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 3 & 6 \\ 2 & -3 & 3 \\ 4 & 3 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & \\ -8 & \\ 4 & \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -9 & 18 \\ 0 & 9 & -18 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Rg}(A-E)=2<3$, тобто існують нетривіальні розв’я

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2+3x_3=0\ ; \\ \quad\ -x_2+2x_3=0\ , \end{cases}$$

x_1, x_2 – базисні змінні , x_3 – вільна змінна,

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2=-3x_3\ ; \\ \quad\ -x_2=-2x_3\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=\frac{1}{2}(3x_2-3x_3)=\frac{1}{2}(6c-3c)=\frac{3}{2}c\ ; \\ x_2=2c\ ; \\ x_3=c\ , \end{cases}$$

$$\vec{x}=\left(\frac{3}{2}c,\ 2c,\ c\right), \quad c>0\ .$$

Отриманий результат означає, що збалансованість торг

досягається при векторі національних доходів $\vec{x}=\left(\frac{3}{2}c,\ 2c, \ldots\right.$

співвідношенні національних доходів країн 2/3 : 2 : 1 , або

Задача 4. Обсяг продукції U, вироблений підприємст робочого дня , представлено функцією

$$U(t)=-\frac{5}{6}t^3+\frac{15}{2}t^2+100t+50 \text{ (од.)}, \qquad 1\le t\le 8$$

де t – робочий час , год.

Треба знайти :

1) продуктивність праці, швидкість і темп її зміни ,

2) при якому значенні часу t після початку роботи прод максимальна ;

…чення продуктивності праці, швидкості і темпу її зміни через $t = i$ …н після початку роботи.

…ти обчислень звести в таблицю та проаналізувати.

…ання.

…емось теорією, викладеною в п. 5.7.

…ктивність праці виражається похідною $z(t) = U'(t)$, а …емп зміни продуктивності праці – відповідно похідною $z'(t)$ і …ою похідною $T_z(t) = \left[\ln z(t)\right]'$:

$$= U''(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 \text{ (од./год)};$$

$$= -5t + 15 \text{ (од./год}^2\text{)};$$

$$\frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t+15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t-6}{t^2 - 6t - 40} \left(\frac{1}{\text{год}} \right).$$

…емо максимум функції $z(t)$:

$$= -5t + 15 = 0, \qquad t = 3;$$

…ритична точка функції $z(t)$;

… при $t < 3$, $z'(t) < 0$ при $t > 3$. Звідси випливає, що $t = 3$ – …му функції $z(t)$.

$$z(3); \qquad z(3) = -\frac{5}{2} \cdot 3^2 + 15 \cdot 3 + 100 = 122{,}5 \text{ (од. /год).}$$

… продуктивність праці максимальна через три години після по… і дорівнює 122,5 (од. /год).

…емо таблицю значень $z(i)$, $z'(i)$, $T_z(i)$ при $i = \overline{1,8}$.

i	$z(i)$	$z'(i)$	$T_z(i)$
1	112,5	10	0,09
2	120	5	0,04
3	122,5	0	0
4	120	–5	–0,04
5	112,5	–10	–0,09
6	100	–15	–0,15
7	82,5	–20	–0,24
8	60	–25	–0,42

Результати обчислень показують, що до кінця робочого дня продуктивність праці істотно знижується; при цьому зміна знаку $z'(t)$ і $T_z(t)$ з плюса на мінус свідчить про те, що підвищення продуктивності праці в перші години робочого дня змінюється її зниженням в останні години.

Задача 5. Знайти обсяг продукції, виробленої за чотири роки, якщо продуктивність праці характеризується функцією $f(t)=(1+t)e^{3t}$.

Розв'язання.

Скористаємось теорією, викладеною в п. 5.9.

Обсяг U виробленої продукції дорівнює

$$U=\int_0^4 (1+t)e^{3t}\,dt.$$

Використаємо метод інтегрування частинами :

$$U=\int_0^4 (1+t)\,e^{3t}\,dt=\left|\begin{array}{ll} u=1+t; & du=dt \\ dv=e^{3t}\,dt; & v=\int e^{3t}\,dt=\frac{1}{3}e^{3t} \end{array}\right|=$$

$$=(t+1)\cdot\frac{1}{3}e^{3t}\Big|_0^4-\int_0^4\frac{1}{3}e^{3t}\,dt=\frac{5}{3}e^{12}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}e^{3t}\Big|_0^4=\frac{1}{3}(5e^{12}-1)-\frac{1}{9}(e^{12}-1)=$$

$$=\frac{1}{9}(14e^{12}-2)\approx 2{,}53\cdot 10^5 \text{ (умов. од.).}$$

Задача 6. Сумарний прибуток підприємства залежить від витрат двох видів ресурсів x, y і виражається функцією

$$z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+20x+200y-2800.$$

Визначити витрати ресурсів x, y, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, і знайти цей максимальний прибуток.

Розв'язання.

$$z(x,y)=-2x^2-4y^2+2xy+20x+200y-2800.$$

Знайдемо частинні похідні z'_x і z'_y:

$$z'_x = -4x + 2y + 20\ ,$$
$$z'_y = -8y + 2x + 200\ .$$

Для відшукання критичних точок складемо систему рівнянь :

$$\begin{cases} -4x + 2y + 20 = 0\ ; \\ -8y + 2x + 200 = 0\ . \end{cases}$$

Розв'яжемо її :

$$\begin{cases} -2x + y = -10\ ; \\ x - 4y = -100\ , \end{cases} \quad \Rightarrow \quad -7y = -210\ , \qquad y = 30\ ; \quad x = 20\ .$$

Критична точка – $M_0(20, 30)$.

Знаходимо другі частинні похідні :

$$z''_{xx}\big|_{M_0} = -4\ ; \qquad z''_{xy}\big|_{M_0} = 2\ ; \qquad z''_{yy}\big|_{M_0} = -8\ .$$

Маємо : $A = -4$, $B = 2$, $C = -8$, тобто

$$A < 0, \qquad \Delta = AC - B^2 = 32 - 4 = 28 > 0\ .$$

Таким чином, у точці $M_0(20, 30)$ функція $z(x, y)$ досягає максиму-. м. Значення функції в точці максимуму $z_{\max} = z(20, 30) = 400$.

Отже, витрати ресурсів x , y, що забезпечують максимальний прибуток підприємства, дорівнюють відповідно 20 од. і 30 од., до того ж максимальний прибуток підприємства дорівнює 400 умов. од.

ВІДПОВІДІ

Глава 1

1.1. 2. **1.2.** $4ab$. **1.3.** 1. **1.4.** 22. **1.5.** 0. **1.6.** 28. **1.10.** а) 22; б) –200 в) 41; г) $\sqrt{105}$; д) 11/3; е) $\frac{22}{7}$; є) $\cos\alpha = \frac{2}{3}$, $\cos\beta = -\frac{1}{3}$, $\cos\gamma = -\frac{2}{3}$. ж) $-{}^{84}\!/\!_{\sqrt{129}}$; з) $\frac{11}{21}$. **1.11.** $\alpha = \pm{}^{3}\!/\!_{5}$. **1.12.** $(\pm 5, 2, -3)$. **1.13.** $\frac{\pi}{3}$. **1.14.** 6 ; 14

1.15. $\frac{\pi}{2}$. **1.16.** $(4, 2, -2)$. **1.17.** а) $(-3, 5, 7)$; б) $(-6, 10, 14)$

1.18. $2\sqrt{6}$. **1.19.** 5. **1.20.** $\alpha = -6, \beta = 21$. **1.21.** -7. **1.22.** а) 42; б) 24

1.23. ${}^{32}\!/\!_{\sqrt{504}}$. **1.24.** 6. **1.25.** $3\sqrt{2}$. **1.26.** Да. **1.27.** а) $x + y - 1 = 0$ б) $x + 3y - 5 = 0$, $\frac{x}{5} + \frac{y}{5/3} = 1$; в) $x - y + 1 = 0$; $\frac{x}{-1} + \frac{y}{1} = 1$. **1.28.** а) $\frac{3}{\sqrt{5}}$ б) $\frac{x+1}{-2} = \frac{y-2}{1}$, в) $-2(x+1) + y - 2 = 0$. **1.29.** $2x + y = 0$. **1.30.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$

1.31. $2x + 3y - 8 = 0$; $2x - y = 0$; $2x - 3y + 16 = 0$. **1.32.** $5x - 7y + 4 = 0$

1.33. $x - 2y - z = 0$. **1.34.** $-x + 2y - 3z - 3 = 0$. **1.35.** $x + y - 3 = 0$

1.36. ${}^{3}\!/\!_{2\sqrt{6}}$. **1.37.** 8. **1.38.** $x + y + z - 3 = 0$. **1.39.** $\frac{x-0}{-3} = \frac{y - 5/3}{4} = \frac{z - 7/3}{5}$

1.40. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-1}{-2}$. **1.41.** $(1, -6, -4)$. **1.42.** 3. **1.43.** ${}^{6}\!/\!_{\sqrt{5}}$.

Глава 2

2.1. 42. **2.2.** 110. **2.3.** 300. **2.4.** а) $\begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 \\ -3 & 11 & 21 \\ 12 & -11 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ 11 & -2 & 3 \\ 1 & 22 & 2 \end{pmatrix}$

2.5. –4. **2.6.** $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 39 & 5 \end{pmatrix}$. **2.7.** $\begin{pmatrix} -1 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$. **2.8.** $\begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$. **2.9.** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & \end{pmatrix}$

2.10. а) $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}$. **2.11.** $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5/3 & 1/3 & 1 \\ -10/3 & 5/3 & 2 \end{pmatrix}$. **2.12.** Не існує.

2.13. $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. **2.14.** 2. **2.15.** 2. **2.16.** 3. **2.17.** $(2, 3)$. **2.18.** $(1, -1, 0)$.

2.18. $(1, 0, -1)$. **2.20.** $(1, 1, 1)$. **2.21.** $(1, 0, -1)$. **2.22.** $(1, 1, 2)$. **2.23.** $(1, 1, 1)$.

2.24. Несумісна. **2.25.** $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = (3 - 5C_1 - 25C_2)/9$, $x_4 = (-2C_1 + 10C_2)/3$ $\forall C_1, C_2 \in \mathrm{R}$. **2.26.** $x_1 = 1 + 5C_1 - 5C_2$, $x_2 = -3C_1 + 3C_2$, $x_3 = C_1$, $x_4 = C_2$ $\forall C_1, C_2 \in \mathrm{R}$. **2.27.** $x_1 = (3 - 2C_2)/10 - C_1$, $x_2 = C_1$, $x_3 = -1/2 - 4C_2$, $x_4 = (1 - 14C_2)/10$, $x_5 = C_2$ $\forall C_1, C_2 \in \mathrm{R}$.

2.28. $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 = C$. **2.29.** $x_1 = C_1$, $x_2 = C_2$, $x_3 = (3C_1 + 6C_2)/4$, $x_4 = (5C_1 + 10C_2)/4$ $\forall C_1, C_2 \in \mathrm{R}$. **2.30.** $x_1 = -C/7$, $x_2 = 10C/7$, $x_3 = C$ $\forall C \in \mathrm{R}$. **2.31.** $\{(3,-6,1,0,0), (-3,5,0,1,0), (0,-1,0,0,1)\}$. **2.32.** $\{(3,-2,1)\}$.

2.33. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$; $\vec{x}_1 = C(1,-1)$, $\vec{x}_2 = C(-1, 2)$, $C \neq 0$. **2.34.** $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$; $\vec{x}_1 = C(1, 1)$, $\vec{x}_2 = C(2, 1)$, $C \neq 0$. **2.35.** $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$; $\vec{x}_1 = C(1, 0, 1)$, $\vec{x}_2 = C(1, 1, 1)$, $\vec{x}_3 = C(1, 0, -1)$, $C \neq 0$. **2.36.** $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -7$; $\vec{x}_1 = (2C_1 - 2C_2, C_2, C_1)$, $|C_1| + |C_2| \neq 0$, $\vec{x}_2 = (C, 2C, -2C)$, $C \neq 0$.

2.37. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$; $\vec{x}_1 = (C, C, -C)$, $C \neq 0$.

Глава 3

3.1. 9. **3.2.** $3/4$. **3.3.** ∞. **3.4.** 0. **3.5.** $-\frac{2}{5}$. **3.6.** $1/2$. **3.7.** 6. **3.8.** ∞. **3.9.** 0.

3.10. ∞. **3.11.** $1/2$. **3.12.** -1. **3.13.** $1/4$. **3.14.** 0. **3.15.** 4. **3.16.** ∞. **3.17.** $1/4$.

3.18. $1/3$. **3.19.** 0. **3.20.** 0. **3.21.** 3. **3.22.** k. **3.23.** $2/5$. **3.24.** $2/3$. **3.25.** $1/2$.

3.26. $3/4$. **3.27.** $1/2$. **3.28.** $1/2$. **3.29.** $\pi/2$. **3.30.** $\frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$. **3.31.** $1/e$.

3.32. $1/e$. **3.33.** 1. **3.34.** ∞, якщо $x \to +\infty$; 0, якщо $x \to -\infty$. **3.35.** 0, якщо

$x \to +\infty$; ∞, якщо $x \to -\infty$. **3.36.** $e^{-2/3}$. **3.37.** k. **3.38.** $\ln a$. **3.39.** $2/3$
3.40. 1. **3.41.** $x=-2$ точка розриву другого роду. **3.42.** $x=0$, усувний розрив
3.43. $x=0$, розрив другого роду. **3.44.** $x=0$, розрив першого роду. **3.101.** $\frac{2}{3}\sqrt[6]{a}$
3.102. 0. **3.103.** α/β. **3.104.** 1. **3.105.** e. **3.106.** 0. **3.107.** α. **3.108.** $1/2$
3.109. e^2. **3.115.** 1) 0; 2) 6; 3) –4; 4) $k_1=2$, $k_2=4$. **3.116.** $y=12x-16$
$x+12y-98=0$. **3.138.** $(0,0)$. **3.139.** $(2,-2)$. **3.140.** $(-1,1)$. **3.141.** $(1,1)$
3.142. $z_{max}=\frac{1}{4}$ при $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{1}{2}$. **3.143.** $z_{max}=5$ при $x=1$, $y=2$; $z_{min}=-5$ при $x=-1$, $y=-2$. **3.144.** $z_{min}=2$ при $x=1$, $y=1$.

Глава 4

4.1. $C-\frac{1}{x}$. **4.2.** $C-\frac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$. **4.3.** $z-2\ln|z|-\frac{1}{z}+C$

4.4. $\operatorname{tg}x-x+C$. **4.5.** $x-\sin x+C$. **4.6.** $\frac{(x+1)^{16}}{16}+C$

4.7. $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$. **4.8.** $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$. **4.9.** $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$

4.10. $\frac{(\operatorname{arctg} x)^3}{3}+C$. **4.11.** $C-\frac{1}{2(\arcsin x)^2}$. **4.12.** $\ln|\ln x|+C$

4.13. $x-4\ln|x+4|+C$. **4.14.** $x+\ln(x^2+1)+C$. **4.15.** $\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$

4.16. $\frac{1}{5}\ln\left|\frac{2x-3}{x+1}\right|+C$. **4.17.** $\frac{1}{7}\ln\left|\frac{x-2}{x+5}\right|+C$. **4.18.** $\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}}+C$

4.19. $\arcsin(x-2)+C$. **4.20.** $\frac{1}{3}\arcsin\frac{3x-1}{3}+C$. **4.21.** $\frac{x}{2}+\frac{\sin 2x}{4}+C$

4.22. $\frac{x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C$. **4.23.** $\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}x\cos 2x+C$

4.24. $x\sin x+\cos x+C$. **4.25.** $\frac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}+C$.

4.26. $\dfrac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C$. **4.27.** $C-e^{-x}(2+2x+x^2)$.

4.28. $x\ln(x^2+1)-2x+2\operatorname{arctg}x+C$. **4.29.** $2[\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})]+C$.

4.30. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\ \operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-2}{2}}+C$. **4.31.** $2[\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x})]+C$.

4.32. $x+\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$.

4.33. $\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}-\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C$. **4.34.** $\ln\dfrac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C$.

4.35. $\dfrac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]+C$. **4.36.** $\ln\left|\dfrac{x^2}{x+1}\right|+\dfrac{6}{x+1}+C$.

4.37. $x+\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{|x|}+C$. **4.38.** $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right|+C$. **4.39.** $\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C$.

4.40. $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C$.

4.41. $\dfrac{1}{3}\ln\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x^2+x+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}+C$.

4.42. $\ln\dfrac{x}{\left(1+\sqrt[10]{x}\right)^{10}}+\dfrac{10}{\sqrt[10]{x}}-\dfrac{5}{\sqrt[5]{x}}+\dfrac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\dfrac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$.

4.43. $x\operatorname{arctg}x-\dfrac{1}{2}\ln\ (1+x^2)+C$. **4.44.** $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C$.

4.45. $\dfrac{\cos^5 x}{5}-\dfrac{\cos^3 x}{3}+C$. **4.46.** $\dfrac{1}{3\cos^3 x}-\dfrac{1}{\cos x}+C$. **4.47.** $\dfrac{1}{\cos x-1}+C$.

4.48. $\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln|\cos x|+C$. **4.49.** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{x}{2}\right)\right|+C$.

4.50. $\frac{1}{2}[x+\ln|\sin x+\cos x|]+C$. 4.51. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C$.

4.52. $\frac{2}{3(\sqrt{8}-1)}$. 4.53. $\frac{7}{72}$. 4.54. $0{,}2\,(e-1)^5$. 4.55. $\frac{2}{7}$. 4.56. 2. 4.57. $\frac{4}{3}$

4.58. $1-\frac{2}{e}$. 4.59. $\frac{\pi}{2}-1$. 4.60. $\pi^3-6\pi$. 4.61. $7+2\ln 2$. 4.62. $2-\frac{\pi}{2}$

4.63. $\frac{32}{3}$. 4.64. $\frac{16}{3}$. 4.65. $e+\frac{1}{e}-2$. 4.66. $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. 4.67. $\frac{a}{2}\left(e^{\frac{b}{a}}-e^{-\frac{b}{a}}\right)$

4.68. $\frac{4}{3}\pi abc$. 4.69. $\pi\sqrt{2}$. 4.70. $x^2+y^2=\ln Cx^2$. 4.71. $y=\sqrt[3]{C+3x-3x^2}$

4.72. $Cx=\frac{y-1}{y}$. 4.73. $y-2x=Cx^3(y+x)$. 4.74. $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2+y^2}$

4.75. $\ln|y|+\frac{x}{y}=C$. 4.76. $x^2+y^2=Cy$. 4.77. $y=Ce^{-2x}+2x-1$

4.78. $y=e^{-x^2}\left(C+\frac{x^2}{2}\right)$. 4.79. $y=C\,x^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$.

4.80. $y=C\,e^{-x}+\frac{1}{2}(\cos x+\sin x)$. 4.81. $y=C\,x-1$.

4.82. $\frac{1}{y^2}=Ce^{2x^2}+x^2+\frac{1}{2}$. 4.83. $y=\frac{1}{(1+x)[C+\ln|1+x|]}$.

4.84. $y=\frac{x^3}{6}-\sin x+C_1x+C_2$. 4.85. $y=C_1x^2+C_2$.

4.86. $y=C_1e^x+C_2-x-\frac{x^2}{2}$. 4.87. $y=\frac{1}{3}x^3+C_1x^2+C_2$

4.88. $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. 4.89. $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$

4.90. $y = C_1 e^{4x} + C_2$. **4.91.** $y = C_1 e^{-x} + C_2 x e^{-x}$.

4.92. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{\frac{x}{2}} + e^x$. **4.93.** $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x + \dfrac{5\sin x + 7\cos x}{74}$

4.94. $y = e^x (C_1 \cos x + C_2 \sin x) + x + 1$.

4.95. $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{5}{2}x} + \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{7}{25}x$. **4.96.** $y = e^{2x}(C_1 + C_2 x) + \frac{3}{2}x^2 e^{2x}$.

4.97. $y = \dfrac{1+x}{1-x}$. **4.98.** $y^3 = y^2 - x^2$. **4.99.** $y = \dfrac{e^x + ab - e^a}{x}$.

4.100. $y = 4e^x + 2e^{3x}$. **4.101.** $e^x\,(e^x - x^2 - x + 1)$. **4.108.** Збігається. **4.109.** Розбігається. **4.110.** Збігається. **4.111.** Збігається умовно. **4.112.** Збігається абсолютно. **4.113.** Збігається абсолютно. **4.114.** Розбігається **4.115.** $(-0.1;0.1)$.

4.116. $(-1,1]$. **4.117.** $[-10,10)$. **4.118.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(x-1)^n}{n}$.

4.119. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n+1}}{(n-1)!}$.

4.120. $\dfrac{x^2}{2} + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)\,x^{2n+2}}{(2n+2)!}$.

4.121. $y = -2 + 2x - x^2 + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{7x^5}{60} - \dots$.

Глава 5

5.1. 1500. **5.2.** $y = 0{,}7x + 8{,}4$. **5.3.** 5. **5.4.** При $x > 400$ більш економічні перевезення другим видом транспорту. **5.5.** $y = 0{,}5x + 150$. **5.6.** Споживачам, що знаходяться всередині круга $(x - 83{,}3)^2 + y^2 \le 66{,}7^2$, доцільніше купувати на B, поза кругом – на A. **5.7.** Всередині круга $(x + 62{,}5)^2 + y^2 \le 37{,}5^2$ будуть купувати на підприємстві A, поза кругом – на B.

5.8. Всередині круга $(x+12,5)^2+y^2 \le 37,5^2$ будуть купувати на підприємств A, поза кругом – на B. **5.9.** $\left(x+\frac{50}{3}\right)^2+y^2=\left(\frac{40}{3}\right)^2$. **5.10.** $m=\frac{V^2}{80}$; 45..

5.11. $y=0,5+\frac{4}{x}$. **5.12.** $\frac{x^2}{10^2}+\frac{y^2}{(2\sqrt{21})^2}=1$. **5.13.** $(x+100)^2+y^2=200^2$

5.14. $x^2+y^2-1440x+288000=0$. **5.19.** $\begin{pmatrix} 1220 & 730 & 770 & 496 \\ 1470 & 1036 & 1315 & 894 \\ 720 & 1122 & 952 & 1110 \end{pmatrix}$

5.20. $\begin{pmatrix} 82 & 44 & 55 & 150 \\ 63 & 77 & 39 & 62 \\ 36 & 160 & 120 & 135 \end{pmatrix}$. **5.21.** а) (102 204 81 144 116); б) (184 161 16(

в) 3607. **5.22.** $(4610\ 4700\ 7100)^{\mathrm{T}}$. **5.23.** (2875 2750 362.
5.24. (500 540 1200 480). **5.25.** (120,52 56,36 80,01). **5.27.** (15, 20, 1(
5.29. (1, 1, 3). **5.30.** 1) $Ax=B$, $x=(x_1\,x_2\,x_3)^{\mathrm{T}}$, $B=(40\ 40\ 80)$
2) $(10,5,10)$. **5.31.** 1) $x_1=3x_3-5$, $x_2=8-3x_3$; 2) (1, 2, 2
5.32. (4 200 ; 39 000). **5.33.** 50, 300, 150, 0. **5.34.** 25 %, 20 %, 15 %
5.35. $X=(945,6;\ 691,2)^{\mathrm{T}}$. **5.36.** а) 260; 410; б) 200; 300. **5.37.** а) так
б) ні. **5.38.** 5 200, 5 300, 200, 300 грош.од. **5.39.** 5 306,05; 5 463,65; 306,05
463,65 грош.од. **5.40.** 4 665,6 тис. грош од. **5.41.** 119 562 грош од.
5.42. 119 720 грош.од. **5.43.** 1 883,04 тис. грош. од. **5.44.** 3 860,91 тис. грош. од. **5.45.** а) 112; 118; 124,130; б) 112,36; 119,10; 126,25; 133,82; в) 112,.. 119,62; 126,88; 134,5. **5.46.** а) 0,7 млн грош. од.;б) 0,9 млн грош од.
5.47. а) ≈ 130,3 тис. грош. од.; б) ≈ 173 тис. грош. од. **5.48.** 5 798,89 грош од.
5.49. 308 років. **5.50.** $Ae^{-0,01qn}$.

5.51. а) $E_x(y)=\frac{3x^3}{x^3+1}$, $E_1(y)=1,5$, $E_5(y)\approx 2,97$. б) $E_x(y)=5x$
$E_1(y)=5$, $E_0(y)=0$, $E_2(y)=10$; в) $E_x(y)=1/\ln x$,
$E_{10}(y)=(\ln 10)^{-1}\approx 0,4343$, $E_e(y)=1$, $E_{e^4}(y)=0,25$;

г) $E_x(y)=\dfrac{x}{x-2}$, $E_{10}(y)=1{,}25$; д) $E_x(y)=\dfrac{2x(1-x)}{1+2x-x^2}$, $E_1(y)=0$;

е) $E_x(y)=1-2x^2$, $E_1(y)=-1$, $E_2(y)=-7$. **5.52.** а) $E_x(y)=\dfrac{ax}{ax+b}$;

б) $E_x(y)=m$. **5.53.** $k'=18(1+3x)^{-1}\log e$.

5.54. 1) $E_{10}(k)\approx 0{,}91$, $E_{50}(k)\approx -0{,}33$; 2) $E_1(k)\approx 0{,}87$, $E_2(k)=1{,}25$.
5.55. $x=1{,}5$. **5.56.** $x\approx 146$ од. **5.57.** $x=3$. **5.58.** 9 грош. од., 7 грош. од.

5.59. $E_p(q)=\dfrac{p(3-4p)}{-2p^2+3p+8}$, $E_1(q)=-\dfrac{1}{9}$. **5.60.** а) 3 грош. од.;

б) $E_p(q)=-0{,}75$, $E_p(s)=1$; в) 1,25 %. **5.61.** 1) а) $x=20$,

б) $E_2(k)\approx 0{,}039$, $E_{50}(k)\approx 1{,}788$; 2) а) $x=50$, в) $E_5(k)=0{,}0198$, $E_{25}(k)=0{,}4$. **5.62.** $q\approx 707$ од., $f(q)\approx 1782{,}8$ грош. од.
5.63. 1) в) $E_x(z)\approx 0{,}042$, $E_y(z)\approx 0{,}958$; 2) в) $E_x(z)\approx 0{,}911$,

$E_y(z)\approx 1{,}821$; 3) в) $E_x(z)=1$, $E_y(z)=1$; 4) в) $E_x(z)\approx 1{,}024$,

$E_y(z)\approx 0{,}536$; 5) в) $E_x(z)\approx 0{,}363$, $E_y(z)\approx 0{,}545$. **5.64.** $x_1=9994$, $x_2=3$.

5.66. $x_i=\sqrt{\dfrac{C_i}{b_i}}$, $i=1,2$; $E_{x_1}(f)\Big|_{(1,1)}=\dfrac{1}{a+b_1+b_2+c_1+c_2}(b_1-c_1)$,

$E_{x_2}(f)\Big|_{(1,1)}=\dfrac{1}{a+b_1+b_2+c_1+c_2}(b_2-c_2)$;

$x_1=2$, $x_2=\dfrac{1}{4}$, $E_{x_1}(f)\Big|_{(1,1)}\approx -0{,}229$, $E_{x_2}(f)\Big|_{(1,1)}\approx 0{,}508$;

$x_1=3$, $x_2=2$, $E_{x_1}(f)\Big|_{(1,1)}\approx -0{,}465$, $E_{x_2}(f)\Big|_{(1,1)}\approx -0{,}112$;

$x_1=\dfrac{1}{4}$, $x_2=2$, $E_{x_1}(f)\Big|_{(1,1)}\approx 0{,}301$, $E_{x_2}(f)\Big|_{(1,1)}\approx -0{,}328$

5.67. $x_i=\sqrt{\dfrac{C_i}{b}\left[1+\dfrac{C}{(\sqrt{C_1}+\sqrt{C_2})^2}\right]}$, $i=1,2$;

$$E_{x_1}(f)\big|_{(1,\,1)} = \frac{1}{a+2b+\frac{c}{2}+c_1+c_2}\left(b-\frac{c}{4}-c_1\right),$$

$$E_{x_2}(f)\big|_{(1,\,1)} = \frac{1}{a+2b+\frac{c}{2}+c_1+c_2}\left(b-\frac{c}{4}-c_2\right);$$

1) $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $E_{x_1}(f)\big|_{(1,1)} = -0{,}1$, $E_{x_2}(f)\big|_{(1,1)} = -0{,}22$

2) $x_1 = \frac{2\sqrt{15}}{3}$, $x_2 = \frac{\sqrt{15}}{3}$, $E_{x_1}(f)\big|_{(1,1)} \approx -0{,}373$, $E_{x_2}(f)\big|_{(1,1)} \approx -0{,}16$

5.68. 25; 50. **5.69.** $y = 3{,}46x + 2{,}86$ **5.70.** $y = 15{,}93x + 110{,}57$. **5.71.** 17; 5/3

5.72. 61; $\frac{(-1+\sqrt{91})}{3}$. **5.73.** $\ln(17/14)+5$. **5.74.** $3\ln(17/13)/4+4$

5.75. 220 дет. **5.76.** 69 т. **5.77.** 910 деталей, $f_{\text{сер}} = 113{,}75$ дет./го

5.78. 188,5 грош.од. **5.79.** $x \approx 1{,}5$. **5.80.** 800 грош.од. **5.81.** 348,88 грош. о

5.82. $4\frac{1}{6}$ га. **5.83.** а) 10 000 од.; б) 238 млрд од.; в) 16 200 од.; г) 41 300 о

5.84. а) 17 кВт·год; б) 632 кВт·год; в) 6 кВт·год. **5.85.** а) 665 кВт·го б) 7 кВт·год; в) 3706 кВт·год. **5.86.** 22. **5.87.** $5(2a_0+5b_0)/2$

5.88. $y = y_0\left(e^{\frac{57}{2}}-1\right)$. **5.89.** 2100 грош. од. **5.90.** 50000 грош. о

5.91. $\approx 5{,}5$ років. **5.92.** $P = P_0 e^{\frac{H-S}{f}t}$. **5.93.** ≈ 7 років.

5.94. $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}e^{4x}$. **5.95.** $y = x^k$. **5.96.** $y = 50\,000x - \frac{x^2}{2}$

5.97. $U(x) = \frac{x^2}{2} + 100x + 25\,000$. **5.98.** $y = 2(1+x-x^2)$. **5.99.** $y = x^a$.

5.100. $p(t) = \frac{8}{29}(e^{-4t} - e^{-t}) + 3$; $q(t) = \frac{8}{29}(33e^{-4t} - 4e^{-t}) + 3$.

ДОДАТКИ

Додаток 1. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ЕЛЕМЕНТАРНОЇ МАТЕМАТИКИ

1.1. АЛГЕБРАЇЧНІ ФУНКЦІЇ

1.1.1. Властивості степенів

Для будь-яких x, y та додатніх a, b вірні наступні рівності :

$$a^0 = 1; \qquad (ab)^x = a^x b^x;$$

$$a^x \cdot a^y = a^{x+y}; \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x};$$

$$a^x : a^y = a^{x-y}; \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}.$$

$$(a^x)^y = a^{xy};$$

1.1.2. Многочлени

Для будь-яких a, b, c вірні наступні рівності :

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b);$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2;$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3;$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2);$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2);$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

де x_1, x_2 – корені рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

1.1.3. Властивості арифметичних коренів

Для будь-яких натуральних n, k, більших 1, та'будь-яких невід'ємних a, b вірні наступні рівності :

$$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}\,;\qquad \left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a\ \ (a\geq 0);$$

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ \ (b\neq 0);\qquad \sqrt[n]{a}<\sqrt[n]{b},\ \text{якщо}\ 0\leq a<b;$$

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}\,;\qquad \sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases} a & \text{при } a\geq 0,\\ -a & \text{при } a<0;\end{cases}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[kn]{a}\,;\qquad \sqrt[2n]{a^{2n}}=|a|;$$

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}\,;\qquad \sqrt[2n+1]{-a}=-\sqrt[2n+1]{a}\ \ (a\geq 0).$$

1.2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ФУНКЦІЇ

1.2.1. Співвідношення між тригонометричними функціями одного і того ж аргументу

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1\,;$$

$$\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x},\qquad x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z\,;$$

$$\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x},\qquad x\neq\pi n,\ n\in Z\,;$$

$$\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1\,,\qquad x\neq\frac{\pi n}{2},\ n\in Z\,;$$

$$1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x},\qquad x\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z\,;$$

$$1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x},\qquad x\neq\pi n,\ n\in Z\,.$$

1.2.2. Формули додавання

$\sin(x+y)=\sin x\,\cos y+\cos x\,\sin y$;

$\sin(x-y)=\sin x\,\cos y-\cos x\,\sin y$;

$\cos(x+y)=\cos x\,\cos y-\sin x\,\sin y$;

$\cos(x-y)=\cos x\,\cos y+\sin x\,\sin y$;

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}y},\quad x,y,\ x+y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$$

$$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y}{1+\operatorname{tg}x\,\operatorname{tg}y},\quad x,y,\ x-y\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

1.2.3. Формули подвійного аргументу

$\sin 2x=2\sin x\cos x$;

$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$;

$$\operatorname{tg}2x=\frac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}^2 x},\quad x\neq\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k,\ k\in Z,\quad x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z.$$

1.2.4. Формули половинного аргументу

$$\sin^2\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{2};$$

$$\cos^2\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{2};$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{1+\cos x}=\frac{1-\cos x}{\sin x},\quad x\neq\pi+2\pi n,\ n\in Z.$$

1.2.5. Формули перетворення суми в добуток

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};$$

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2};$$

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\,\cos y}, \qquad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\,\cos y}, \qquad x, y \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z;$$

1.2.6. Формули перетворення добутку в суму

$$\sin x\,\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right);$$

$$\cos x\,\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right);$$

$$\sin x\,\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right).$$

1.2.7. Співвідношення між $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in Z;$$

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad x \neq (2n+1)\pi, \quad n \in Z.$$

1.2.8. Формули зведення

Назва функції не змінюється				Назва функції змінюється на схожу			
u	$-\alpha$	$\pi-\alpha$	$\pi+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$
$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z$				$\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$			
ctg	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$-\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
$\alpha\neq\pi n,\ n\in Z$				$\alpha\neq\frac{\pi}{2}(2n+1),\ n\in Z$			

1.2.9. Значення тригонометричних функцій

Значення кута α	Функції			
	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{ctg}\alpha$
0	0	1	0	∞
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞	0

1.3. ВЛАСТИВОСТІ ЛОГАРИФМІВ

1^0. **Основна логарифмічна тотожність :**

$$x = a^{\log_a x}, \qquad x > 0 .$$

2^0. Логарифм основи дорівнює одиниці :

$$\log_a a = 1 .$$

3^0. Логарифм одиниці дорівнює нулю :

$$\log_a 1 = 0 .$$

4^0. **Формула для логарифма добутку :**

$$\log_a (x_1 \ x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 , \qquad x_1 > 0 \ \text{і} \ x_2 > 0 .$$

5^0. **Формула для логарифма частки :**

$$\log_a \frac{x_1}{x_2} = \log_a x_1 - \log_a x_2 , \qquad x_1 > 0 \ \text{і} \ x_2 > 0 .$$

6^0. **Формула для логарифма степеня :**

$$\log_a x^p = p \log_a x ,$$

де $x > 0$, p – будь-яке дійсне число .

7^0. **Формула переходу до нової основи логарифма :**

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a},$$

де $x > 0$, b – будь-яке дійсне число, $b > 0$, $b \neq 1$.

Зокрема ,

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad \text{або} \quad \log_a b \cdot \log_b a = 1 .$$

Додаток 2. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Похідна: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

Основні правила диференціювання :

1. $C' = 0$.
2. $(CU)' = CU'$.
3. $(U \pm V)' = U' \pm V'$.
4. $(U \cdot V)' = U'V + UV'$.
5. $\left(\dfrac{U}{V}\right)' = \dfrac{U'V - UV'}{V^2}$.
6. $(f(U))'_x = f'_U \cdot U'_x$.

Тут C – стала, $U = U(x)$, $V = V(x)$.

Основні формули диференціювання :

1. $(U^{\alpha})' = \alpha U^{\alpha-1} \cdot U'$, $\alpha \in R$.
2. $(\log_a U)' = \dfrac{U'}{U \ln a}$.
3. $(\ln U)' = \dfrac{U'}{U}$.
4. $(a^U)' = a^U \ln a \cdot U'$.
5. $(e^U)' = e^U U'$.
6. $(\sin U)' = \cos U \cdot U'$.
7. $(\cos U)' = -\sin U \cdot U'$.

8. $(\mathrm{tg}\, U)' = \dfrac{1}{\cos^2 U} U'$.

9. $(\mathrm{ctg}\, U)' = -\dfrac{1}{\sin^2 U} U'$.

10. $(\arcsin U)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$.

11. $(\arccos U)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-U^2}} U'$.

12. $(\mathrm{arctg}\, U)' = \dfrac{1}{1+U^2} U'$.

13. $(\mathrm{arcctg}\, U)' = -\dfrac{1}{1+U^2} U'$.

14. $(\mathrm{sh}\, U)' = \mathrm{ch}\, U \cdot U'$.

15. $(\mathrm{ch}\, U)' = \mathrm{sh}\, U \cdot U'$.

16. $(\mathrm{th}\, U)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 U} U'$.

17. $(\mathrm{cth}\, U)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 U} U'$.

Тут $U = U(x)$. Якщо $U(x) = x$, то $U'(x) = x' = 1$.

Додаток 3. ОСНОВНІ ФОРМУЛИ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

Невизначений інтеграл :

$\int f(x)dx = F(x) + C$, $F'(x) = f(x)$.

Таблиця основних невизначених інтегралів

1. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$.

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$.

3. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$.

4. $\int e^x dx = e^x + C$.

5. $\int \sin x \, dx = -\cos x + C$.

6. $\int \cos x \, dx = \sin x + C$.

7. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

8. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.

9. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

10. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C$.

11. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

12. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} + C$.

13. $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + C$, $a \neq 0$.

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$.

15. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}\, dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$.

16. $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left| \operatorname{tg}\frac{x}{2} \right| + C$.

17. $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left| \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C$.

18. $\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$.

19. $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \ln|\sin x| + C$.

20. $\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C$.

21. $\int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C$.

22. $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$.

23. $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$.

Визначений інтеграл :

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ , \quad \lambda = \max\ \Delta x_i\,, \quad \xi_i \in [x_{i-1}, x_i\,].$$

Формула Ньютона - Лейбніца :

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)\,.$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. *Элементы* линейной алгебры и аналитической геометрии. / Р.Ф. Апатенок , А.М. Маркина , Н.В. Попова , В.Б. Хейнман . - Минск : Вышэйш . шк ., 1986 .

2. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1988.

3. *Бугров Я. С., Никольский С. М.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного . - М .: Наука , 1985 .

4. *Высшая* математика . Общий курс / А.В. Кузнецов , Л.Ф. Янчук , С.А. Мызгаева и др . - Минск : Вышэйш . шк ., 1993 .

5. *Высшая* математика для экономистов / Н.Ш. Кремер , Б.А. Путко , И.М. Тришин , М.Н. Фридман . – М .: Банки и биржи , ЮНИТИ , 1997 .

6. *Колесников А. Н.* Краткий курс математики для экономистов . – М .: ИНФРА – М , 1997 .

7. *Дубовик В. П., Юрик І. І.* Вища математика . – К .: Вища шк ., 1993 .

8. *Сборник* задач по математике для втузов. Ч.1. Линейная алгебра и основы математического анализа / Под. ред. А.В. Ефимова, Б.П. Демидовича. – М .: Наука , 1986 .

9. *Сборник* задач и упражнений по высшей математике. Общий курс : Учеб. пособие / А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Е.И. Шилкина и др. – Минск : Вышэйш . шк ., 1994 .

10. *Берман Г. Н.* Сборник задач по курсу математического анализа . - М .: Наука , 1985 .

11. *Михайленко В. М., Антонюк Р. А.* Сборник прикладных задач по высшей математике. – К.: Вища шк., 1990 .

12. *Сборник* задач и упражнений по высшей математике / Под ред. О.А. Репина. – Самара : Гос . эконом . акад ., 1995 .

13. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях. – М .: Наука, 1987.

14. *Башарин Г. П* Начала финансовой математики. – М .: ИНФРА – М, 1997.

15. *Методические* указания по применению задач экономического содержания при изучении курса "Высшая математика" / Сост. Т.Н. Травкина, Л.Д. Широкорад. – Х.: ХИЭИ, 1986.

16. *Кузнецов Ю. Н.* Аналитическая геометрия с экономическими примерами и задачами . – К.: Вища шк ., 1975.

17. *Сирл С., Госман У.* Матричная алгебра в экономике. – М .: Статистика, 1974.

18. *Ноздрин И. Н., Степаненко И. М., Костюк Л. К.* Прикладные задачи по высшей математике . – К.: Вища шк ., 1976 .

19. *Власов В. Г.* Конспект лекций по высшей математике. – М .: Айрис. 1996.

20. *Бугір М. К.* Математика для економістів . – Тернопіль : Підручники і посібники, 1998.

21. *Справочник* по математике для экономистов / В.Е. Барбаумов. В.И. Ермаков и др.; Под ред. В.И. Ермакова . – М.: Высш. шк., 1987.

22. *Лопатников Л. И.* Популярный экономико-математический словарь . – М.: Знание, 1990 .

ЗМІСТ

Помічені помилки та опечатки

Номер задачі та відповідь до неї Читати так		
№5.38 5500, 5750, 500, 750	**№5.39** 5520, 5796, 520, 796	**№5.46** а) 0,29, б) 0,14
№5.79 2,7	**№5.83** а) 11000, б) 3560, в) 18200, г) 9230	**№5.85** а) 505, б) 35, в) 4051
№5.90 14000	**№5.100** $p(t)=(e^{-t}-e^{-4t})/9+3$, $q(t)=(4e^{-t}-31e^{-4t})/9+14$	

Сторінка	Рядок	Надруковано	Повинно бути
114	8 зверху	$x^2 +$	$z^2 +$
136	3 зверху	$x+x$	$x+y$
167	2 знизу	$+C_2 \cos\beta x$	$+C_2 \sin\beta x$
224	7 знизу, 11 знизу	1250, 7500	7250, 7250
243	3 знизу	$+3x^2$	$-3x^2$
255	7 зверху	x^3	$-x^3$
265, 285	6 знизу, 12 знизу	$\ln t$	$\ln(t+1)$
266	7 зверху	$y(t)=2+3t+t^2$	$y(t)=2+3t+t^2,\ t=3$
273	2 знизу	$y(0)$	$y(1)$
275	1 знизу, 8 знизу, 14 знизу	400, 680, 2700	460, 780, 2200
276	1 зверху 14 знизу 8 знизу 1 знизу	540 1050 1310 1220	480 1150 1410 1280
277	11 зверху	1930	2030

Навчальне видання

ТЕВЯШЕВ Андрій Дмитрович
ЛИТВИН Олександра Григорівна

ВИЩА МАТЕМАТИКА
ЗАГАЛЬНИЙ КУРС

Збірник задач та вправ

Редактор *А. Л. Алієва*
Художник обкладинки *Ю. О. Гуля*
Виконавець комп'ютерної верстки *Т. Є. Сергієнко*
Технічний редактор *Г. П. Александрова*
Коректор *О. Л. Левкович*

Підписано до друку з оригіналу-макета 27.11.98. Формат 60×84/16. Папір офсе
Друк офсетний. Умов. друк. арк. 18,6. Обл.–вид. арк. 20. Тираж 1000 прим.
Вид № 12 Зам. 8-651

"Рубікон"
Україна, 310166, Харків, вул. Бакуліна, 11

Надруковано з оригіналу-макета на книжковій фабриці "Глобус".
Україна, 310012, Харків, вул. Енгельса, 11