В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан,
В.С. Дронь, О.С. Кондур

ВИЩА МАТЕМАТИКА. КУРС ЛЕКЦІЙ

У трьох частинах

Частина I

Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів

Івано-Франківськ
2011

ББК 22.11я73
В 558
УДК 51 (075.8)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України як навчальний посібник для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів (лист про надання грифу № 1/11-1491 від 22.02.2011)

Рецензенти:

Івасишен С.Д. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної фізики Національного технічного університету України "Київський політехнічний інститут";

Благун І.С. – заслужений діяч науки і техніки України, доктор економічних наук, професор,завідувач кафедри економічної кібернетики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника;

Пукальський І.Д. – доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри диференціальних рівнянь Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

В.П. Лавренчук, Т.І. Готинчан, В.С Дронь, О.С. Кондур

В 558 Вища математика. Курс лекцій. У трьох частинах. Частина І. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Навчальний посібник. – Івано-Франківськ: Видавництво Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника, 2011. – 448 с.

ISBN 978-966-640-301-1

Курс лекцій охоплює теоретичний матеріал з лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу та диференціальних рівнянь згідно з навчальною програмою вищих навчальних закладів України. Наведено багато прикладів розв'язування задач, а також запропоновано вправи для самостійного розв'язання.

Для студентів спеціальностей: економічних, інженерно-економічних, менеджмент у виробничій та невиробничій сферах.

ББК 22.11я73

ISBN 978-966-640-301-1

Передмова

Посібник охоплює матеріал з вищої математики для студентів, які навчаються у вищих навчальних закладах за спеціальностями економічними, інженерно-економічними, менеджмент у виробничій та невиробничій сферах та маркетингу. Він складається з трьох частин. У першій частині розглядаються елементи лінійної алгебри, аналітичної геометрії та математичного аналізу. Друга частина присвячена теорії ймовірностей та елементам математичної статистики. У третій частині викладено матеріали з математичних методів дослідження операцій (математичного програмування).

Основу посібника склали курси лекцій з вищої математики, що читались авторами впродовж багатьох років студентам економічних спеціальностей Чернівецького національного університету, Чернівецького торговельно-економічного інституту Київського національного університету, Прикарпатського національного університету, Інституту підприємництва та перспективних технологій при національному університеті "Львівська політехніка", Інституту управління природними ресурсами. Він разом з виданим авторами збірником задач і вправ з грифом Міністерства освіти і науки України утворює повний набір навчальних посібників з вищої математики для економічних спеціальностей вищих навчальних закладів.

Кожна частина посібника поділена на розділи, підрозділи й пункти, в яких у логічній послідовності вводяться поняття і факти вищої математики. Автори вважали за доцільне наводити доведення лише тих теорем, які вчать студентів логічно мислити. Крім того, кожне нове поняття ілюструється прикладами. Значну увагу автори звертали на складання математичних моделей економічних задач та описання методів їхнього розв'язання.

Кожний розділ посібника завершується вправами, які пропонуються для розв'язування в аудиторії або при самостійній роботі. Тому його можна використовувати і як збірник задач і вправ.

Перша частина посібника містить одинадцять розділів. У першому, другому, третьому і четвертому розділах розглянуто питання теорії множин, визначників, систем лінійних алгебраїчних рівнянь, матриць, векторної алгебри та аналітичної геометрії. Розділи з п'ятого по одинадцятий включно присвячені елементам математичного аналізу, де розглянуто важливі питання теорії границь і неперервності функцій та диференціального й інтегрального числення функцій однієї змінної, диференціального числення функцій багатьох змінних, числових та степеневих рядів, диференціальних рівнянь. Виклад матеріалу супроводжується значною кількістю задач і вправ, які допоможуть тим, хто вивчає вищу математику, краще зрозуміти суть понять, означень і тверджень, а також націлить їх на застосування викладеного матеріалу при розв'язуванні конкретних прикладних задач.

У другому виданні посібника зроблено деякі методичні і редакційні покращення, а також виправлено описки та неточності.

Деякі питання теорії множин. Декартові координати на прямій, площині та в просторі

У цьому розділі розглянемо деякі поняття теорії множин, комбінаторики, математичної логіки, дійсних чисел та поняття декартових координат на прямій, площині та в просторі.

1. Основні поняття теорії множин та математичної логіки

1.1. Множини й основні позначення

Сукупність, об'єднання, набір об'єктів певної природи називається **множиною**. При цьому треба чітко окреслити клас об'єктів, які розглядаються. Цей клас об'єктів називається **універсальною множиною**, а самі об'єкти називаються **елементами** або **точками** множини. Множини бувають **скінченними** і **нескінченними**, що визначається кількістю їхніх елементів. Множина, яка не містить жодного елемента, називається **порожньою** і позначається символом $\emptyset$. Ця множина вважається скінченною. Множини найчастіше позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C, ..., X, Y, Z, а їхні елементи – малими a, b, c, ..., x, y, z. Якщо x – елемент множини X, то пишуть $x \in X$ (x належить X). Якщо x не є елементом множини X, то пишуть $x \notin X$ або $x \bar{\in} X$ (x не належить X).

Множина X, яка складається з деяких елементів множини Y, називається **підмножиною** множини Y. Записують цей факт так: $X \subset Y$ або $Y \supset X$ (X міститься в Y або Y містить X). Вважають, що $\emptyset \subset X$ для довільної множини X, $X \subset X$ і $X \subset U$, де U – універсальна множина. Символи $\in, \ni, \subset, \supset$ називають відповідно **знаками належності** і **включення**. Якщо множини X і Y складаються з одних і тих самих елементів, то кажуть, що вони збігаються і пишуть $X = Y$, що рівносильно включенням $X \subset Y$ і $Y \subset X$.

Множина, елементами якої є числа називається **числовою множиною**. Зокрема, проміжки числової осі є числовими множинами.

Якщо множина містить небагато елементів, їх можна вказати у фігурних дужках: $X = \{a, b, c, d\}$, $Y = \{2, 5, 7, 10\}$. У випадку, коли множина містить багато елементів, її записують так: $A = \{x \,|\, P(x)\}$, де $P(x)$ вказує на властивість кожного з елементів x множини A. Наприклад, $A = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 < x < 7\}$ – множина всіх дійсних чисел, які задовольняють нерівність $2 < x < 7$; $B = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 9 \le 0\}$ – сукупність розв'язків нерівності $x^2 - 9 \le 0$, тобто множина точок відрізка $[-3; 3]$. Зрозуміло, що так само можна позначити й множини, що містять небагато елементів. Наприклад, $C = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x^2 - 3x + 2 = 0\}$ є сукупністю коренів рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, тобто це множина з двох елементів 1 і 2.

Основними числовими множинами є такі множини:

1) натуральних чисел $\mathbb{N} = \{1, 2, ..., n, ...\}$;

2) цілих чисел $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$;

3) раціональних чисел $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} \,|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$, тобто множина усіх звичайних дробів;

4) дійсних чисел $\mathbb{R} = \{a_0, a_1 a_2 ... \,|\, a_0 \in \mathbb{Z}, a_k \in \{0, 1, 2, ..., 9\}, k \in \mathbb{N}\}$, тобто множина усіх нескінченних десяткових дробів.

Для них правильні співвідношення $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

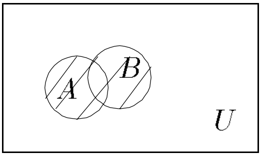
Нехай a і b – дійсні числа, причому $a < b$. Використовуватимемо такі позначення:

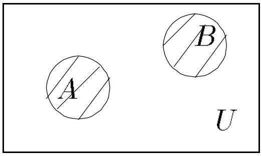
$$
\begin{array}{ll}
\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x \le b\} = [a; b]; & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x \le b\} = (a; b]; \\
\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x < b\} = [a; b); & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\} = (a; b); \\
\{x \in \mathbb{R} \,|\, a \le x\} = [a; +\infty); & \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x\} = (a; +\infty); \\
\{x \in \mathbb{R} \,|\, x \le b\} = (-\infty; b]; & \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\} = (-\infty; b).
\end{array}
$$

Ці множини називаються **проміжками**, причому $[a; b]$ називають **відрізком** або **сегментом**, $[a; b)$, $(a; b]$, $[a; +\infty)$ і $(-\infty; b]$ – **напівінтервалами**, а $(a; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ – **інтервалами**. Проміжки $[a; b]$, $(a; b]$, $[a; b)$, $(a; b)$ називають **обмеженими**; a і b – їх **кінцями**. Решта проміжків називають **необмеженими**.

Над множинами можна виконувати такі дії: об'єднання, переріз, доповнення, різницю, декартів добуток.

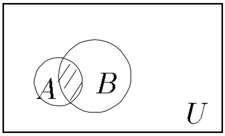
Об'єднанням $A \cup B$ двох множин A і B називають множину, елементи якої належать хоча б одній з цих множин.





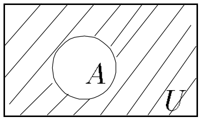
Аналогічно об'єднанням кількох множин A_1, A_2, ..., A_n називається множина C усіх тих і тільки тих елементів, які належать хоча б одній з цих множин: $C = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ або $C = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Переріз множин A і B – множина $A \cap B$, елементи якої належать обом цим множинам.

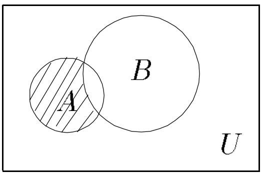


Перерізом кількох множин A_1, A_2, ..., A_n називається множина C усіх їхніх спільних елементів і позначається так: $C = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ або $C = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$.

Доповнення множини A – це така множина $\overline{A}$, елементами якої є ті елементи відповідної універсальної множини U, що не належать A.



Різниця множин A і B – множина $A \setminus B$, яка дорівнює $A \cap \overline{B}$, тобто складається з тих елементів множини A, що не належать B.



Декартів добуток множин A і B – це така множина $A \times B$, елементами якої є всі пари елементів (a, b), де $a \in A$, $b \in B$. При цьому вважається, що $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$ тоді й тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$. Аналогічно визначається декартів добуток множин A_1, A_2, ..., A_n, а саме: $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(a_1, a_2, ..., a_n) \,|\, a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, ..., a_n \in A_n\}$.

Приклад 1. Знайти $A \cup B$ і $A \cap B$, якщо:
1) $A = \{-2, -1, 0, 3, 5\}$, $B = \{-2, 0, 4, 5\}$;
2) $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{-1\}$;
3) $A = [0; 1)$, $B = (\frac{1}{2}; 2]$.

◀ Маємо 1) $A \cup B = \{-2, -1, 0, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{-2, 0, 5\}$;
2) $A \cup B = \{-1, 1, 2, 3\}$, $A \cap B = \emptyset$;
3) $A \cup B = [0; 2]$, $A \cap B = (\frac{1}{2}; 1)$. ▶

Приклад 2. Довести, що $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ для довільних множин A і B.

◀ Нехай $x \in \overline{A \cup B}$. Тоді $x \notin A \cup B$, звідки випливає, що $x \notin A$ і $x \notin B$, тобто $x \in \overline{A}$ і $x \in \overline{B}$. Останнє означає, що $x \in \overline{A} \cap \overline{B}$, і отже, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$. Повторивши ці міркування у зворотному порядку, одержимо $\overline{A \cup B} \supset \overline{A} \cap \overline{B}$. Тому $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. ▶

Приклад 3. Нехай множини A, B, C мають відповідно два, чотири і шість елементів. Скільки елементів має множина $A \times B \times C$?

◀ Згідно з означенням прямого добутку $A \times B \times C = \{(a, b, c) \,|\, a \in A,\ b \in B,\ c \in C\}$. Оскільки a може набувати два значення з A, b – чотири значення з B, c – шість значень з C, то всього матимемо $2 \cdot 4 \cdot 6 = 48$ трійок вигляду (a, b, c). Тому $A \times B \times C$ має 48 елементів. ▶

Будемо говорити, що між елементами множин A і B встановлено **взаємно однозначну відповідність**, якщо кожному елементу множини A відповідає єдиний елемент множини B і, навпаки, кожному елементу множини B відповідає єдиний елемент множини A.

Якщо між елементами множини A і B встановлено взаємно однозначну відповідність, то ці множини називають **еквівалентними** і пишуть $A \sim B$. Множину, яка еквівалентна множині натуральних чисел $\mathbb{N}$, називають **зліченною**. Очевидно, що всі зліченні множини еквівалентні.

1.2. Елементи комбінаторики

У багатьох прикладних задачах доводиться підраховувати число всіх підмножин скінченної множини, які задовольняють певні умови. Ці задачі вивчає **комбінаторика**.

Нехай A – множина, число елементів якої $N(A) = n$. Таку множину називають n-множиною.

В основі багатьох теорем і формул комбінаторики лежать правила суми і добутку.

Правило суми. *Якщо деякий об'єкт a можна вибрати m способами, а об'єкт b – n способами, причому ніякий вибір a не збігається з жодним з виборів b, то один з об'єктів a або b можна вибрати $m + n$ способами.*

На мові множин це правило означає, що коли A є m-множиною, B – n-множиною, причому $A \cap B = \emptyset$, то $N(A \cup B) = N(A) + N(B) = m + n$.

Правило добутку. *Якщо об'єкт a можна вибрати m способами і при кожному виборі об'єкта a об'єкт b можна вибрати n способами, то вибір пари (a, b) можна здійснити mn способами.*

Приклад 4. З Чернівців до Києва можна добратися поїздом, автобусом, літаком. З Києва до Чернігова – поїздом, автобусом, літаком і пароплавом. Скількома способами можна організувати маршрут Чернівці – Київ – Чернігів?

◀ Використовуючи правило добутку, отримуємо число можливих маршрутів: $3 \cdot 4 = 12$. ▶

Сформулюємо тепер **основне правило комбінаторики (правило добутку)** у загальному вигляді: *Нехай потрібно виконати одну за одною k дій. Якщо першу дію можна виконати n_1 способами, другу дію – n_2 способами, третю дію – n_3 способами і так до $k-$ої дії, яку можна виконати n_k способами, то всі k дій разом модуть бути виконані $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.*

Приклад 5. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити з цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, якщо: а) жодна з цифр не повторюється; б) цифри можуть повторюватися?

◀ а) Першою цифрою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5. Якщо перша цифра вибрана, то друга може бути вибрана 5 способами, третя – 4 способами, четверта – 3 способами. Згідно з правилом множення загальна кількість способів дорівнює $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 300$.

б) У цьому випадку першою цифрою може бути одна з цифр 1, 2, 3, 4, 5, тобто 5 випадків. Для кожної наступної маємо 6 випадків (0, 1, 2, 3, 4, 5). Отже, шукана кількість чотиризначних чисел дорівнює $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 5 \cdot 6^3 = 1080$. ▶

Множину A називають **упорядкованою**, коли в ній встановлено відношення порядку $\prec$, яке має такі властивості:

1) для будь-яких $\{a, b\} \subset A$ або $a \prec b$ (a передує b), або $b \prec a$;

2) якщо $a \prec b$, $b \prec c$, то $a \prec c$.

Для впорядкування n-множини A досить кожному її елементу приписати один з номерів $1, 2, ..., n$ або просто записати її елементи в певному порядку. Наприклад, множину $A = \{a, b, c\}$ можна впорядкувати так: (a, b, c), (b, a, c), (a, c, b), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).

Дві впорядковані множини вважають **рівними**, якщо вони складаються з тих самих елементів і однако впорядковані.

Нехай є n-множина A і деяке натуральне число $k \leq n$. **Розміщенням** з n елементів по k називають будь-яку впорядковану k-підмножину множини A. Число розміщень з n елементів по k позначають символом A_n^k. Обчислюється це число за формулою

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-k+1). \qquad (1)$$

Справді, розглянемо деяку впорядковану k-підмножину $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ n-множини A. Перший елемент a_1 можна вибрати n способами, другий елемент a_2 – $(n-1)$ способами, ..., останній елемент a_k – $(n-k+1)$ способами. Згідно з правилом добутку одержуємо формулу (1).

Приклад 6. Правління фірми складається з 7 осіб. Скількома способами з них можна обрати голову правління, директора та менеджера.

◀ Скористаємося формулою (1), де $n = 7$, $k = 3$:

$$A_7^3 = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210. \quad ▶$$

Розміщення з n елементів по n називаються **перестановками** з n елементів, і їхня кількість позначається P_n.

Очевидно, що P_n – це число різних способів, якими можна впорядкувати n-множину, і, отже, $P_n = A_n^n$. З формули (1) випливає, що

$$P_n = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot n \equiv n!. \tag{2}$$

Приклад 7. Скількома способами можна скласти список з 8 студентів.

◀ Оскільки складання списку є певним упорядкуванням множини з 8 осіб, то маємо $P_8 = 8! = 40\,320$.

Отже, список можна скласти 40 320 способами. ▶

Комбінацією з n елементів по k називається будь-яка k-підмножина n-множини A. Число всіх комбінацій з n елементів по k позначається символом C_n^k.

Згідно з означенням, комбінації – це невпорядковані k-підмножини з n-множини. Розглянемо будь-яку комбінацію $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Упорядковуючи її всеможливими способами, одержимо $k!$ різних розміщень, тобто рівність $A_n^k = k! C_n^k$.

Отже,

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}. \tag{3}$$

Приклад 8. Агрохімік перевіряє 6 типів мінеральних добрив, для чого йому треба провести декілька дослідів, щоб вивчити сумісність будь-якої трійки добрив. Для кожного досліду беруть ділянку 0,25 га. На якій площі проводяться всі досліди?

◀ Знайдемо спочатку число дослідів, які слід провести. Скористаємось формулою (3), де $n = 6$, $k = 3$:

$$C_6^3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Оскільки на кожний дослід виділяється 0,25 га, то на всі досліди треба виділити $20 \cdot 0,25 = 5$ га. ▶

Формулу (3) можна записати у вигляді

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{4}$$

Якщо вважати, що $0! = 1$, то формула (4) є правильною і при $n = k$.

Числа C_n^k називають **біномними коефіцієнтами**. Ця назва пов'язана з тим, що вони є коефіцієнтами у формулі бінома Ньютона

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k. \tag{5}$$

При $a = b = 1$ з формули (5) випливає, що $\sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$, тобто число всіх підмножин n-множини дорівнює 2^n.

Для будь-яких натуральних n і k $(k \leq n)$

$$\begin{aligned} C_n^k &= C_n^{n-k}, \\ C_{n+1}^k &= C_n^k + C_n^{k-1}. \end{aligned} \tag{6}$$

Оскільки $C_n^n = 1$, то можна вважати, що $C_n^0 = 1$ і тоді перша формула з (6) у цьому випадку є тотожністю 1=1.

1.3. Квантори. Логічні символи

Ми часто використовуватимемо значки $\forall$ і $\exists$, які називаються відповідно **кванторами загальності** й **існування**.

Символ $\forall x$ означає: "для всіх x", "для будь-якого x" або "яке б не було x". Наприклад, запис $\forall x > 0$ читається так: "для довільного додатного x" або "для всіх додатних x".

Символ $\exists x$ означає: "існує таке x, що ...", "для деяких x ..." або "принаймні для одного x ...". Наприклад, запис $\exists x > 0$ читається так: "існує таке додатне x, що ...".

Символ $\Rightarrow$ означає **логічний наслідок**. Так, якщо A і B – деякі твердження, то запис $A \Rightarrow B$ означає, що з A випливає B або якщо має місце A, то має місце B.

Знак $\Leftrightarrow$ означає **логічну рівносильність**. Запис $A \Leftrightarrow B$ означає, що з A випливає B і, навпаки, з B випливає A.

Запис $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0\ \forall n > n_0 :\ |x_n - a| < \varepsilon$ читається так: "для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке число n_0, що для довільного $n > n_0$ правильна нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$".

1.4. Межі числових множин

Множина X **обмежена зверху (знизу)**, якщо існує таке число $M(m)$, при якому для довільного $x \in X$ виконується нерівність $x \leq M$ $(x \geq m)$. Число $M(m)$ називається **верхньою (нижньою) межею** множини X. Множина, обмежена знизу і зверху, називається **обмеженою**. Будь-який скінченний проміжок обмежений. Інтервали $(a; +\infty)$ і $(-\infty; b)$ є множинами, обмеженими відповідно знизу і зверху, але не обмеженими відповідно зверху і знизу. Вся числова пряма не обмежена ні зверху, ні знизу.

Очевидно, що обмежена зверху (знизу) множина має безліч верхніх (нижніх) меж. Справді, якщо число M є верхньою межею множини X, то і будь-яке число $M_1 > M$, згідно з означенням верхньої межі, також буде верхньою межею цієї множини. Найменша верхня межа множини X, обмеженої зверху, називається **точною верхньою межею** цієї множини; вона позначається символом $\sup X$ (супремум ікс).

Найбільша нижня межа обмеженої знизу множини X, називається **точною нижньою межею** цієї множини і позначається символом $\inf X$ (інфімум ікс).

Наведемо деякі приклади. Нехай $X = (a; b)$, тоді числа a і b є відповідно точними нижньою і верхньою межами множини X, тобто $\inf X = a$, $\sup X = b$. Якщо $X = (-\infty; b)$, то нижніх меж, а отже, й точної нижньої межі множина X не має, а число b є її точною верхньою межею, тобто $\sup X = b$.

Можна довести, що довільна непорожня множина, яка обмежена зверху (знизу), має точну верхню (нижню) межу.

2. Дійсні числа. Координати точки на прямій, площині та в просторі

2.1. Поняття дійсного числа

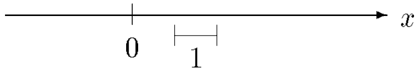
Нагадаємо основні відомості про дійсні числа.

Множина дійсних чисел $\mathbb{R}$ складається з усіх раціональних та ірраціональних чисел. **Раціональним числом** називається число, яке можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$. Зокрема, будь-яке ціле число m зображується у вигляді $\frac{m}{1}$ і тому є раціональним. Усі раціональні числа складають множину раціональних чисел $\mathbb{Q}$. Дійсні числа, які не входять у цю множину, тобто їх не можна подати у вигляді $\frac{m}{n}$, де $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, називаються **ірраціональними**.

Як відомо, кожне дійсне число зображується у вигляді десяткового дробу. При цьому раціональне число зображується у вигляді скінченного чи нескінченного періодичного десяткового дробу. Наприклад, $\frac{15}{1} = 15 = 15,0$; $\frac{-3}{4} = -0,75$; $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,(3)$. Кожне ірраціональне число зображується у вигляді нескінченного неперіодичного десяткового дробу. Наприклад, $\sqrt{2} = 1,414...$, $\pi = 3,14159...$, $e = 2,718...$. Тому найчастіше в арифметичних діях ірраціональні числа заокруглюють, тобто замінюють на наближене раціональне з потрібною точністю. Наприклад, $\pi \approx 3,14159 \approx 3,1416 \approx 3,142 \approx 3,14$. При заокругленні ірраціонального числа залишають $n-1$ цифру дробової частини без змін, а n-у цифру збільшують на 1, якщо після неї стоїть одна із цифр 5, 6, 7, 8 або 9, а якщо одна із цифр 0, 1, 2, 3, 4, то n-у цифру залишають без змін. При цьому помилка або похибка обчислень не перевищить величини $\frac{1}{10^n}$.

2.2. Геометричне зображення дійсного числа. Координати точки на прямій

Числовою віссю називається пряма, на якій вибрані початкова точка (початок), додатний напрямок (відмічений на рисунку стрілкою) і відрізок, довжина якого дорівнює одиниці (одиниця масштабу).



Напрямок, протилежний до напрямку числової осі, називається **від'ємним**. Якщо дійсне число $x > 0$, то йому відповідає точка числової осі, яка знаходиться від початку на відстані x у додатному напрямку. Якщо ж $x < 0$, то точка числової осі, яка відповідає йому, лежить на тій самій відстані, але у від'ємному напрямку від початку. Число 0 є початком числової осі.

Дійсне число x називається **координатою** точки M числової осі, яка його зображує. Домовимось писати $M(x)$ у тому випадку, коли x є координатою точки M. Доводиться, що кожному дійсному числу x відповідає єдина точка M числової осі, і, навпаки, кожній точці M цієї осі відповідає єдине дійсне число x – координата цієї точки. Кажуть, що між множиною дійсних чисел $\mathbb{R}$ і множиною точок числової осі існує взаємно однозначна відповідність, тобто ці множини еквівалентні. Тому надалі замість слів "число x" часто використовуватимемо слова "точка x".

Множина дійсних чисел є впорядкованою. Це означає, що довільні різні дійсні числа x_1 і x_2 задовольняють тільки одну з двох нерівностей $x_1 > x_2$ або $x_1 < x_2$.

Зауважимо, що множина дійсних чисел є **щільною**, тобто має властивість: між двома різними дійсними числами знаходиться безліч інших дійсних чисел. Це означає, що коли $x_1 < x_2$, то існує x, для якого $x_1 < x < x_2$, і таких x є нескінченно багато. Так само щільними є множини раціональних та ірраціональних чисел у множині дійсних чисел.

2.3. Абсолютна величина дійсного числа. Відстань між двома точками на прямій. Окіл точки

Абсолютною величиною (**модулем**) дійсного числа x називається саме це число, коли воно невід'ємне, і протилежне число

$-x$, коли воно від'ємне. Позначається абсолютна величина дійсного числа символом $|x|$. Отже,

$$|x| = \begin{cases} \;\;x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Згідно з означенням $|x| \geq 0$ і $|x| = |-x|$.

Розглянемо основні властивості модуля:

1) $-|x| \leq x \leq |x|, \quad x \in \mathbb{R}$;

2) нехай $a > 0$, тоді нерівності $|x| \leq a$ і $-a \leq x \leq a$ рівносильні;

3) $|x|^2 = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$.

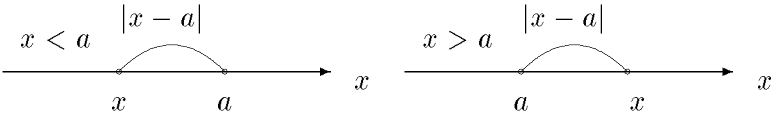
4) для довільних дійсних чисел x_1 і x_2:

$$|x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|, \qquad |x_1 - x_2| \geq \big|\,|x_1| - |x_2|\,\big|,$$

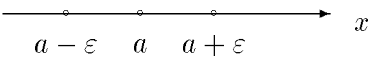
$$|x_1 x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \qquad \left|\frac{x_1}{x_2}\right| = \frac{|x_1|}{|x_2|}, \quad x_2 \neq 0.$$

Геометричний зміст модуля – це відстань точки $M(x)$ числової осі від початку.

Абсолютна величина різниці двох чисел $|x-a|$ означає відстань між точками x і a числової прямої як для випадку $x < a$, так і $x > a$:



Тому, наприклад, розв'язками нерівності $|x - a| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, будуть всі точки інтервалу $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$.



Довільний інтервал, який містить точку a, називається **околом** точки a. Інтервал вигляду $(a-\varepsilon; a+\varepsilon)$ називається ε-**околом** точки a.

Приклад 1. Спростити вираз $|x - 2|x||, \quad x \in \mathbb{R}$.

◀ Нехай $x \geq 0$, тоді $|x| = x$, і отже, $|x - 2|x|| = |x - 2x| = |-x| = |x| = x$. Якщо $x < 0$, то $|x| = -x$, а тому $|x - 2|x|| = |x + 2x| = |3x| = |3||x| = -3x$.

Отже, $|x - 2|x|| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \geq 0, \\ -3x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$ ▶

Приклад 2. Розв'язати рівняння $|x + 3| + 2x - 6 = 0$.

◀ Нехай $x < -3$, тоді $|x + 3| = -(x + 3)$ і рівняння набуде вигляду $x - 9 = 0$. Отримуємо $x = 9$, яке не задовольняє умову $x < -3$.

Нехай тепер $x \geq -3$, тоді $|x + 3| = x + 3$ і рівняння набуде вигляду $3x - 3 = 0$. Отримуємо $x = 1$, яке задовольняє умову $x \geq -3$.

Отже, розв'язком рівняння $|x + 3| + 2x - 6 = 0$ є значення $x = 1$. ▶

Приклад 3. Знайти відстань між точками $M_1(-0;5)$ і $M_2(3;5)$.

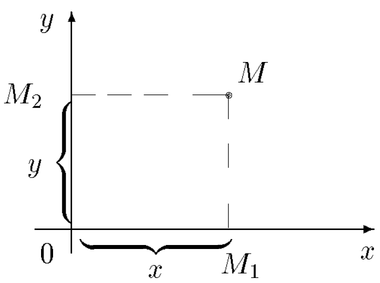
◀ Маємо $d = |3,5 - (-0,5)| = |3,5 + 0,5| = |4| = 4$. ▶

2.4. Координати точки на площині та в просторі

У попередньому пункті ми відмічали, що положення точки на прямій визначається одним числом – координатою цієї точки. Положення точки на площині визначається уже двома числами, а в просторі – трьома.

Розглянемо на площині дві взаємно перпендикулярні числові осі Ox і Oy, які мають спільний початок O, який збігається з точкою перетину осей, і спільну одиницю масштабу. Вісь Ox називається **віссю абсцис**, а вісь Oy – **віссю ординат**.

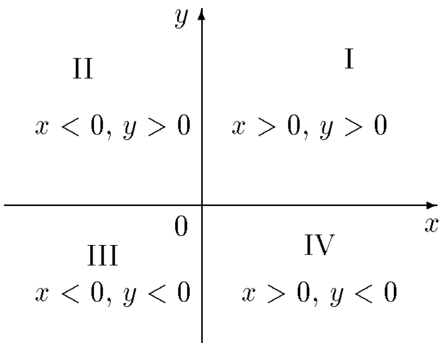
Площину, в якій розміщені осі Ox і Oy, назвемо **координатною площиною** і позначимо Oxy.



Візьмемо довільну точку M координатної площини Oxy. Опустимо з неї перпендикуляри MM_1 і MM_2 відповідно на осі Ox і Oy. Координата x точки M_1 на осі Ox називається **абсцисою** точки M, а координата y точки M_2 на осі Oy – **ординатою** точки M.

Числа x і y, що розглядаються разом, називаються **прямокутними** або **декартовими прямокутними координатами** точки M. Той факт, що точка M має координати x і y, символічно позначають так: $M(x; y)$. При цьому першою в дужках вказують абсцису, а другою – ординату. Початок координат має координати $(0; 0)$.

Отже, у вибраній системі координат кожній точці M площини відповідає пара чисел $(x; y)$ – її прямокутні координати, і, навпаки, кожній упорядкованій парі $(x; y)$ відповідає, і при тому одна, точка M на площині Oxy така, що її абсциса дорівнює x, а ордината – y. Тому прямокутна система координат на площині встановлює взаємно однозначну відповідність між множиною всіх точок площини і множиною всіх упорядкованих пар чисел.



Осі Ox і Oy ділять координатну площину на чотири частини, які називаються **чвертями** і позначаються римськими цифрами I, II, III і IV так, як показано на рисунку. Точки на осі Ox мають кооординати $(x; 0)$, а на осі Oy – $(0; y)$.

Для довільних двох точок $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ площини відстань d між ними визначається формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

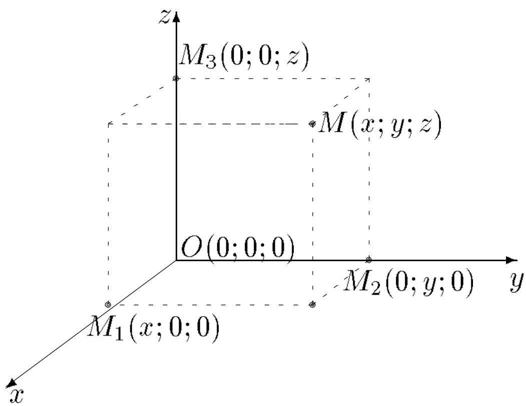
Приклад 4. Знайти відстань d між точками $M_1(-2; 4)$ і $M_2(5; 3)$.

◀ Маємо $d = \sqrt{(5 - (-2))^2 + (3 - 4)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$. ▶

Переконаємося, що положення точки в просторі можна визначити трьома числами.

Розглянемо три взаємно перпендикулярні осі в просторі Ox, Oy і Oz, які мають спільний початок O – точку перетину осей і спільну масштабну одиницю. Назвемо ці осі **координатними осями**, а їх спільний початок – **початком координат**.

Простір, у якому задані осі Ox, Oy і Oz, позначимо символом $Oxyz$. Нехай M – довільна точка простору $Oxyz$. Проведемо через неї три площини, які перпендикулярні координатним осям. Точки M_1, M_2, M_3 перетину цих площин з осями Ox, Oy і Oz називаються **проекціями** точки M на відповідні осі. Нехай точка M_1 на осі Ox має координату x, точка M_2 на осі Oy – координату y і точка M_3 на осі Oz – координату z. Числа x, y, z називаються прямокутними або декартовими прямокутними координатами точки M в просторі. Той факт, що точка M має координати x, y, z записують символічно так: $M(x;y;z)$. При цьому x називають **абсцисою**, y – **ординатою**, а z – **аплікатою**. Такі самі назви мають і координатні осі: вісь Ox називають **віссю абсцис**, вісь Oy – **віссю ординат**, вісь Oz – **віссю аплікат**.



Очевидно, що кожна точка M простору $Oxyz$ визначає єдину впорядковану трійку чисел $(x;y;z)$ – її координати. Навпаки, положення точки M в просторі $Oxyz$ цілком визначається трьома її декартовими координатами.

Якщо через кожну пару координатних осей провести площину, то дістанемо три взаємно перпендикулярні площини Oxy, Oyz і Ozx, які називаються **координатними площинами**. Вони ділять простір на вісім частин – **октантів**.

Якщо в просторі $Oxyz$ взято точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$, то відстань між ними знаходиться за формулою

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Приклад 5. Знайти відстань між точками $M_1(-1; 2; -3)$ і $M_2(1; 1; -5)$.

◀ Згідно з попередньою формулою одержимо

$$d = \sqrt{(1 - (-1))^2 + (1 - 2)^2 + (-5 - (-3))^2} =$$

$$= \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3. \quad ▶$$

Вправи

1. Довести тотожності для довільних множин A, B, C:
1) $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$
2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
3) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
4) $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup U = U$;
5) $A \cap \overline{A} = \emptyset, \quad A \cup \overline{A} = U$ (тут U – універсальна множина);
6) $(A \cup B) \setminus B = A \setminus B$, $(A \cap C) \setminus B = (A \cap C) \setminus (A \cap B)$;
7) $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$;
8) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$.

2. Довести, що $A \setminus B = \emptyset$ тоді й тільки тоді, коли $A \cap B = A$.

3. Знайти всі підмножини множини: а) $A = \{0, 1\}$; б) $A = \{0, 1, 2, 3\}$.

4. Нехай $A = \{2, 3\}$. Скільки елементів має множина: а) $A \times A$; б) $A \times A \times A$.

5. Нехай A – множина коренів рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, а $B = \{0, 2\}$. Знайти $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

6. Нехай $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - 1| \leq 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 1\}$. Знайти і зобразити такі множини: а) $A \cap B$; б) $A \cup B$; в) $A \times B$.

7. В їдальні є 3 перші страви, 5 других і 2 треті страви. Скількома способами можна скласти з них обід?

8. У розіграші першості країни з футболу беруть участь 16 команд. Скількома способами можуть бути розподілені золота і срібна медалі?

9. Для визначення швидкості росту бактерій треба вибрати 4 штами бактерій з наявних восьми. Скількома способами це можна зробити?

10. Збори з 80 осіб обирають голову, секретаря і трьох членів ревізійної комісії. Скількома способами це можна зробити?

11. Вісім студентів подорожували у двох човнах, у меншому з яких могло вміститися не більше 4 осіб, а в більшому – не більше 6 осіб. Скількома способами вони можуть розміститися у цих човнах?

12. Скількома способами можна 15 шахістів поділити на три команди по 5 осіб?

13. На вечірці присутні 12 дівчат і 15 юнаків. Скількома способами можна вибрати з них 4 пари для танців?

14. Число перестановок з n літер відноситься до числа перестановок з $n+2$ літер, як 0,1 до 3. Знайти n.

15. Скільки є двозначних чисел, у яких обидві цифри непарні?

16. Скільки чотиризначних чисел можна скласти із цифр 0, 3, 2, 7, 4, 9, якщо :

1) жодна з цифр не повторюється більше одного разу;

2) цифри можуть повторюватись:

3) числа повинні бути парними (цифри можуть повторюватись)?

17. На факультеті навчається 1500 студентів. Довести, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.

18. Пасажир залишив речі в автоматичній камері схову, а коли прийшов отримувати речі, то виявилось, що він забув номер. Пасажир лише пам'ятає, що в номері були присутні комбінації 45 і 63. Щоб відчинити камеру, слід набрати п'ятизначний номер. Яку найбільшу кількість номерів потрібно перебрати, щоб відчинити камеру?

19. Спростити вираз:

$$1)\ \frac{4x+|x|}{3x-|x|}+\frac{x-4|x|}{5x+|x|}; \qquad 2)\ \frac{x^2-7|x|+6}{x^2-3|x|+2}+\frac{8|x|}{x^2-4};$$

3) $\sqrt{x^2+8x+16}-|x-4|-8$.

20. Довести тотожность:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$; 2) $C_n^{k+1} = \dfrac{n-k}{k+1} C_n^k$;

3) $A_{n+3}^k = (n+3)(n+2)A_{n-1}^{k-2}$; 4) $A_{n-1}^{k-1} \cdot P_{n-k} = nP_{n-1}$.

21. Розв'язати рівняння:

1) $C_x^4 = 5$; 2) $C_{x+1}^5 = \dfrac{3}{8} A_x^3$; 3) $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$;

4) $A_7^x = xA_7^{x-1}$; 5) $\dfrac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$; 6) $\dfrac{P_{x+2}}{A_x^n P_{x-n}} = 132$.

Відповіді

3. а) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, A; б) $\emptyset$, $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{0, 1\}$, $\{0, 2\}$, $\{0, 3\}$, $\{1, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2, 3\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{0, 1, 3\}$, $\{0, 2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$, A. **4.** а) 4; б) 8.

5. $A \cup B = \{0; 1; 2\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \setminus B = \{1\}$, $B \setminus A = \{0\}$.

6. а) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 \le x \le 1\}$; б) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -1 \le x \le 2\}$; в) $\{(x; y) \in \mathbb{R}^2$, $0 \le x \le 2, -1 \le y \le 1\}$. **7.** 30. **8.** $16 \cdot 15 = 240$. **9.** $C_8^4 = 70$. **10.** $A_{80}^2 C_{78}^3 = \frac{80!}{3!75!}$. **11.** $C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 = 154$. **12.** $C_{15}^5 \cdot C_{10}^5$. **13.** $A_{12}^4 A_{15}^4$. **14.** $n = 4$.

15. 20. **16.** 1) 300; 2) 1080; 3) 540. **18.** 60.

19. 1) 2 при $x \ne 0$; 2) $\dfrac{x+6}{x+2}$, при $x \in [0; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$, і $\dfrac{x-6}{x-2}$, при $x \in (-\infty; -2) \cup (-2; -1) \cup (-1; 0)$; 3) -16 при $x \in (-\infty; -4)$, $2x - 8$ при $x \in [-4; 4]$, 0 при $x \in (4; +\infty)$. **21.** 1)5; 2) 8; 3) 17; 4) 4; 5) 7; 6) 10.

Основи лінійної алгебри

У цьому розділі розглянемо деякі поняття лінійної алгебри, зокрема, визначники та їхні властивості, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, матриці та дії над ними.

1. Елементи теорії визначників

1.1. Визначники другого й третього порядків

Нехай задано таблицю (матрицю), яка складається з чотирьох дійсних чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Вона має два рядки і два стовпчики. Її називають **матрицею другого порядку**, а числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} – її елементами. Елементи прийнято позначати літерою з двома індексами. Перший індекс вказує номер рядка, а другий – номер стовпчика, на перетині яких стоїть цей елемент.

Означення 1. *Визначником (детермінантом) другого порядку, що відповідає матриці (1), називають число $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$, яке позначають символом $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$. Отже,*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}. \tag{2}$$

Числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} називаються **елементами визначника**.

Множини елементів з однаковим першим індексом називають **рядками**, а з однаковим другим індексом – **стовпчиками** визначника, тобто елементи, розміщені на горизонталях, утворюють рядки, а на вертикалях – стовпчики визначника. Діагональ, яка утворена елементами a_{11}, a_{22}, називається **головною**, а діагональ, яка утворена елементами a_{12}, a_{21}, – **побічною**.

Означення 2. *Визначником третього порядку, що відповідає матриці*

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

називається число, що дорівнює алгебраїчній сумі $a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$, *яке позначають символом*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Отже,

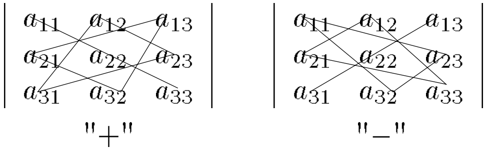
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} -$$

$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}. \tag{3}$$

Поняття елементів, рядків, стовпчиків, діагоналей, введені для визначників другого порядку, правильні й для визначників третього порядку.

Існують два правила обчислення визначників третього порядку.

1) **Правило трикутників**. У формулі (3) три перші доданки визначника третього порядку є добутками елементів головної діагоналі та елементів, розміщених у вершинах двох рівнобедрених трикутників, основи яких паралельні головній діагоналі. Для трьох інших добутків, які беруться у формулі (3) зі знаком "$-$", використовується таке саме правило, тільки береться не головна, а побічна діагональ.



"$+$" "$-$"

2) **Правило Сарруса**. За цим правилом складаємо матрицю (таблицю), для якої обчислюватимемо визначник. Справа від неї записуємо її перший і другий стовпчики. В основній таблиці проводимо головну діагональ і дві прямі, їй паралельні. Добутки елементів, розміщених на зазначених трьох прямих, є трьома членами визначника, що беруться зі своїми знаками. Щоб обчислити три інші члени визначника, проводимо побічну діагональ і дві прямі, їй паралельні. Добутки цих елементів беруться з протилежним знаком. Схематично це правило зображено на рисунку

$$\begin{pmatrix} & & - & - & - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ & & + & + & + \end{pmatrix}.$$

Приклад 1. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$.

◀ Згідно з формулою (2) $\Delta = 2 \cdot (-4) - 3 \cdot 5 = -8 - 15 = -23$. ▶

Приклад 2. Обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

◀ Скористаємося правилом трикутника обчислення визначника третього порядку: $\Delta = 2 \cdot 6 \cdot 3 + 5 \cdot 0 \cdot (-4) + 3 \cdot 7 \cdot 8 - 8 \cdot 6 \cdot (-4) - 0 \cdot 7 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 3 = 36 + 168 + 192 - 45 = 351$. ▶

Приклад 3. За допомогою правила Сарруса обчислити визначник $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

◀ Маємо таблицю $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -1 & 3 & 5 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$. Тоді $\Delta = 2 \cdot 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \cdot (-3) - 2 \cdot 5 \cdot 1 - (-3) \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 3 \cdot 1 = 10 - 2 - 9 - 10 - 6 - 3 = -20$. ▶

Розглянемо властивості визначників. Ці властивості правильні для визначників будь-якого порядку.

Властивість 1. *Величина визначника не зміниться, якщо його рядки поміняти місцями з відповідними стовпчиками, тобто*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (4)$$

◀ Доведення випливає безпосередньо з означення визначника, якщо застосувати його до правої і лівої частин рівності (4). ▶

Операція заміни рядків стовпчиками, а стовпчиків рядками з однаковими номерами називається **транспонуванням**. Отже, при транспонуванні значення визначника не змінюється.

З цієї властивості випливає, що рядки та стовпчики визначника рівноправні, тобто всі властивості, встановлені для рядків, правильні й для стовпчиків, і навпаки. Надалі всі властивості можна формулювати і доводити тільки для рядків або тільки для стовпчиків.

Властивість 2. *При перестановці двох рядків (стовпчиків) визначник зберігає абсолютну величину і змінює знак на протилежний.*

◀ Доведення випливає з означення визначника. ▶

Властивість 3. *Визначник з двома однаковими рядками (стовпчиками) дорівнює нулю.*

◀ Поміняємо місцями два однакові рядки визначника. Тоді, з одного боку, визначник Δ не зміниться, а з іншого, згідно з властивістю 2, знак його зміниться на протилежний. Отже, $\Delta = -\Delta$, звідки $2\Delta = 0$, тобто $\Delta = 0$. ▶

Введемо поняття **мінора** й **алгебраїчного доповнення** елемента визначника.

Нехай є визначник $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$. Викреслимо в ньому i-й рядок і j-й стовпчик, на перетині яких стоїть елемент a_{ij}. Внаслідок цього одержимо визначник другого порядку, який називається **мінором**, що відповідає елементу a_{ij} у визначнику

Δ, і позначається символом M_{ij}. Наприклад, $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$, $M_{31} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$.

Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij} визначника Δ називається мінор M_{ij}, взятий зі своїм знаком, якщо сума номерів рядка і стовпчика, на перетині яких розміщений елемент a_{ij}, парна, і зі знаком мінус, якщо ця сума непарна.

Залежність між мінором M_{ij} й алгебраїчним доповненням A_{ij} виражається співвідношенням

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

де i – номер рядка, j – номер стовпчика, на перетині яких знаходиться елемент a_{ij}.

Наприклад, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$, $A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = M_{11}$, $A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12}$.

Властивість 4 (Розклад визначника за елементами рядка (стовпчика)). *Визначник дорівнює сумі попарних добутків елементів будь-якого з його рядків (стовпчиків) на їхні алгебраїчні доповнення. Сума попарних добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на алгебраїчні доповнення елементів іншого рядка (стовпчика) дорівнює нулю.*

◀ Запишемо формулу (3) у вигляді

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) -$$

$$-a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}) = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} -$$

$$-a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+a_{12}(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

Отже,

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}. \tag{5}$$

Формулу (5) називають **розкладом визначника за елементами першого рядка**. Визначник можна розкладати за елементами інших рядків, а також стовпчиків.

Для доведення другої половини властивості 4 розглянемо визначник

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

утворений з визначника Δ заміною другого рядка третім рядком. Згідно з властивістю 3 визначник Δ' дорівнює нулю. Алгебраїчні доповнення будь-якого з елементів другого рядка не залежать від елементів цього рядка, оскільки вони викреслюються при утворенні алгебраїчних доповнень. Тому алгебраїчні доповнення відповідних елементів другого рядка визначників Δ і Δ' збігаються. Розклавши визначник Δ' за елементами його другого рядка, матимемо

$$\Delta' = a_{31}A_{21} + a_{32}A_{22} + a_{33}A_{23} = 0.$$

Аналогічно можна розглянути й інші варіанти. ▶

Властивість 5. *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) визначника дорівнюють нулю, то такий визначник дорівнює нулю.*

◀ Нехай усі елементи деякого рядка (стовпчика) дорівнюють нулю. Розклавши визначник за елементами цього рядка (стовпчика), дістанемо суму нулів, а отже, і сам визначник дорівнює нулю. ▶

Властивість 6. *Множник, спільний для всіх елементів деякого рядка (стовпчика), можна винести за знак визначника.*

◀ Нехай, наприклад, усі елементи другого рядка мають спільний множник λ, тобто

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

Розклавши визначник Δ' за елементами 2-го рядка, дістанемо

$$\Delta' = \lambda a_{21}A_{21} + \lambda a_{22}A_{22} + \lambda a_{23}A_{23} = \lambda(a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}).$$

Вираз у дужках є визначником

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

а тому

$$\Delta' = \lambda\Delta. \ \blacktriangleright$$

Властивість 7. *Якщо всі елементи деякого рядка (стовпчика) визначника Δ є сумою двох доданків, то й сам визначник дорівнює сумі двох визначників Δ_1 і Δ_2. У визначнику Δ_1 вказаний рядок (стовпчик) складається з перших доданків, у Δ_2 – з других доданків. Решта рядків (стовпчиків) визначників Δ_1 і Δ_2 – ті самі, що й в Δ.*

◀ Доведемо, наприклад, рівність

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник, що стоїть зліва, за першим рядком. Тоді одержимо суму

$$(b_{11}+c_{11})A_{11} + (b_{12}+c_{12})A_{12} + (b_{13}+c_{13})A_{13},$$

або після розкриття дужок,

$$(b_{11}A_{11} + b_{12}A_{12} + b_{13}A_{13}) + (c_{11}A_{11} + c_{12}A_{12} + c_{13}A_{13}).$$

Перша з цих сум дорівнює першому з визначників справа, друга сума дорівнює другому визначнику. ▶

Властивість 8. *Визначник не зміниться, якщо до одного з рядків (стовпчиків) додати інший рядок (стовпчик), помножений на довільне число.*

◀ Доведемо, що

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \lambda a_{21} & a_{12} + \lambda a_{22} & a_{13} + \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Для цього застосуємо до визначника, який стоїть зліва, властивість 7. Тоді одержимо, що цей визначник дорівнює

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Другий з цих визначників дорівнює нулю, оскільки після винесення за знак визначника спільного множника λ елементів першого рядка одержується визначник з двома однаковими рядками. ▶

1.2. Поняття про визначники вищих порядків

Властивість розкладу визначника за елементами рядка (стовпчика) дає можливість ввести поняття визначника n-го порядку.

Нехай є таблиця (матриця), складена з n^2 чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Означення 3. *Визначником n-го порядку, що відповідає матриці (6), є число, яке дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпчика) на їхні алгебраїчні доповнення.*

Позначається визначник n-го порядку символом

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Згідно з означенням

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}, \tag{7}$$

або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj}, \quad j \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{8}$$

Формула (7) дає розклад визначника за елементами i-го рядка, а формула (8) – за елементами j-го стовпчика. При цьому, якщо деякі елементи рядка або стовпчика, за якими розкладається визначник, дорівнюють нулю, то доданки, що відповідають цим елементам у розкладі визначника, випадають. Тому доцільно розкладати визначник за тими рядками або стовпчиками, які містять найбільшу кількість нулів. Згідно з властивістю 8 можна накопичувати нулі в будь-якому рядку або стовпчику визначника.

Приклад 4. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 8 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

◀ Розкладемо визначник за елементами першого рядка

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24 + 7 + 0 - 0 - 18 - 10 = 3. \blacktriangleright$$

Приклад 5. Обчислити визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

◀ Перетворимо спочатку визначник так, щоб у першому рядку всі елементи, крім одного, дорівнювали нулю. Для цього послідовно помножимо перший стовпчик на -2, -3, -4, і додамо відповідно до другого, третього і четвертого стовпчиків. Дістанемо визначник

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -4 & -8 & -10 \\ 4 & -5 & -10 & -15 \end{vmatrix},$$

який розкладемо за елементами першого рядка

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -8 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ -4 & -8 & -10 \\ -5 & -10 & -15 \end{vmatrix}.$$

Помножимо перший рядок нового визначника послідовно на -2 та на -3 і додамо до другого і третього рядків. Матимемо

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & -4 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник, наприклад, за елементами другого рядка, знайдемо

$$\Delta = 2 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \cdot 10 = -20. \blacktriangleright$$

2. Системи лінійних рівнянь

Система лінійних рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{9}$$

Тут x_1, x_2,..., x_n – **невідомі**, які треба знайти; a_{ij} – сталі, які називають **коефіцієнтами** системи, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, (перший індекс коефіцієнта означає номер рівняння, в якому знаходиться цей коефіцієнт, а другий індекс – номер невідомого, при якому він стоїть); b_1, b_2, ..., b_m – сталі, які називаються **вільними членами**.

Розв'язком системи (9) називають будь-яку сукупність чисел $(\alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_n)$, яка при підстановці її в систему замість відповідно невідомих x_1, x_2, $\ldots$, x_n перетворює всі рівняння системи в правильні рівності.

Систему (9) називають **сумісною**, якщо вона має принаймні один розв'язок, і **несумісною**, якщо вона не має розв'язків. Якщо сумісна система має тільки один розв'язок, то її називають **визначеною**, а якщо більше одного розв'язку – **невизначеною**.

Систему (9) називають **однорідною**, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і **неоднорідною**, якщо принаймні один з вільних членів не дорівнює нулю. Очевидно, що однорідна система завжди сумісна, оскільки має розв'язок $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ... ,$x_n = 0$, який називають **нульовим** або **тривіальним**.

Дві системи лінійних рівнянь називаються **рівносильними** або **еквівалентними**, якщо вони сумісні й мають одні й ті самі розв'язки або якщо вони несумісні. За допомогою елементарних перетворень систему (9) можна звести до еквівалентної системи. **Елементарними** називають перетворення:

1) викреслювання рівняння $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + ... + 0 \cdot x_n = 0$ – нульового рядка;

2) перестановка рівнянь або доданків $a_{ij}x_j$ в рівняннях;

3) додавання до обох частин одного рівняння відповідно обох частин іншого рівняння цієї системи, помноженого на довільне число;

4) відкидання рівнянь, які є лінійними комбінаціями інших рівнянь системи.

Розглянемо деякі методи розв'язування лінійних систем.

2.1. Системи n лінійних рівнянь з n невідомими. Правило Крамера

Розглянемо систему n лінійних рівнянь з n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{10}$$

Введемо позначення

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_j = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1j-1} & b_1 & a_{1j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2j-1} & b_2 & a_{2j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nj-1} & b_n & a_{nj+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$j \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Визначник Δ називається **головним визначником системи (10)**. Визначники Δ_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, одержуються з визначника Δ заміною j-го стовпчика стовпчиком з вільних членів.

Теорема 1 (правило Крамера). *Якщо визначник Δ системи n лінійних рівнянь з n невідомими (10) не дорівнює нулю, то ця система має єдиний розв'язок, що визначається формулами*

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{11}$$

◀ Нехай $(x_1; x_2; ...; x_n)$ – розв'язок системи (10). Для того щоб знайти його складову x_j, домножимо перше рівняння на A_{1j}, друге – на A_{2j} і так далі, n-е рівняння – на A_{nj}, де A_{1j}, A_{2j}, ..., A_{nj} – алгебраїчні доповнення елементів j-го стовпчика, і додамо ці рівняння. Тоді одержимо вираз

$$(a_{11}A_{1j} + a_{21}A_{2j} + ... + a_{n1}A_{nj})x_1 + (a_{12}A_{1j} + a_{22}A_{2j} + ... + a_{n2}A_{nj})x_2 +$$

$$+ \ldots + (a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + ... + a_{nj}A_{nj})x_j + ... + (a_{1n}A_{1j} + a_{2n}A_{2j} + ... +$$

$$+ a_{nn}A_{nj})x_n = b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + ... + b_nA_{nj}. \tag{12}$$

Коефіцієнт при невідомому x_j є сумою добутків елементів j-го стовпчика визначника Δ на відповідні їм алгебраїчні доповнення і згідно з властивістю 4 визначників дорівнює визначнику Δ. Коефіцієнти при всіх інших невідомих є сумами добутків елементів усіх стовпчиків, крім j-го, на алгебраїчні доповнення елементів j-го стовпчика і, у відповідності з властивістю 4 визначників, дорівнюють нулю. Вираз у правій частині (12) є Δ_j, а тому (12) набуває вигляду

$$\Delta \cdot x_j = \Delta_j, \quad j \in \{1, 2, ..., n\}, \tag{13}$$

звідки випливають рівності (11), які називаються **формулами Крамера**.

Отже, ми довели, що коли $(x_1; x_2; ...; x_n)$ є розв'язком системи (10), то числа x_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, визначаються формулами (11).

Навпаки, сукупність чисел x_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, які визначаються формулами (11), є розв'язком системи (10). Справді, підставляючи x_j, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, у ліву частину k-го рівняння, $k \in \{1, 2, ..., n\}$, системи (10), згідно з властивістю 4 визначника, одержимо

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \sum_{s=1}^{n} b_s A_{sj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{s=1}^{n} b_s \sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{sj} =$$

$$= \frac{1}{\Delta} b_k \Delta = b_k, \quad k \in \{1, 2, ..., n\}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 = 2. \end{cases}$$

◀ Маємо

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - 12 = -22.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, то система має єдиний розв'язок, який можна знайти за формулами Крамера. Знайдемо Δ_1 і Δ_2:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -35 - 6 = -41; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 28 = -24.$$

Тоді згідно з формулами (11): $\quad x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{41}{22}; \quad x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{12}{11}.$

Отже, розв'язком є $\left(\dfrac{41}{22}; \dfrac{12}{11}\right)$. ▶

Приклад 2. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1, \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8. \end{cases}$$

◀ Знайдемо визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 5 + 21 + 12 + 10 - 21 + 6 = 33.$$

Оскільки визначник системи не дорівнює нулю, то система має єдиний розв'язок, який знаходиться за формулами Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 20 + 7 + 48 + 40 - 84 + 2 = 33;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 24 + 24 - 2 - 24 + 12 = 33;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -40 + 84 + 4 + 40 - 7 - 48 = 33;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{33}{33} = 1.$$

Отже, розв'язком є $(1; 1; 1)$. ▶

Істотним недоліком розв'язування систем n лінійних рівнянь з n невідомими за формулами Крамера є велика трудомісткість при обчисленні визначників. Тому цей метод застосовувати на практиці для розв'язування реальних економічних задач недоцільно. Значно швидше можна розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих (методом Жордана–Гаусса), який буде розглянуто пізніше.

2.2. Однорідна система лінійних рівнянь

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = 0, \end{cases} \qquad (14)$$

яка називається **однорідною**. Очевидно, ця система завжди має нульовий (тривіальний) розв'язок $(0; 0; ...; 0)$. З'ясуємо, коли ця система має ненульові (нетривіальні) розв'язки.

Теорема 2. *Якщо визначник Δ однорідної системи (14) не дорівнює нулю, то ця система має лише тривіальний розв'язок.*

◀ Оскільки всі Δ_j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, дорівнюють нулю, бо містять нульовий стовпчик, то згідно з теоремою 1 (формули (11)) $x_j = 0$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$. ▶

Якщо ж система (14) має нетривіальний розв'язок, то її визначник Δ дорівнює нулю. Це випливає з того, що коли б $\Delta \neq 0$, то згідно з теоремою 2 єдиним розв'язком системи (14) був би нульовий. Отже, ненульові розв'язки система (14) має тоді й тільки тоді, коли $\Delta = 0$.

Приклад 3. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

◀ Оскільки

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 8 + 3 - 6 - 2 + 2 = -10 \neq 0,$$

то система має лише єдиний розв'язок $(0; 0; 0)$. ▶

Приклад 4. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

◀ Маємо $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$, бо перший і другий рядки пропорційні. Тому система має ненульові розв'язки. Знайдемо ці розв'язки. Для цього запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Ми відкинули друге рівняння, оскільки воно одержується з першого множенням обох його частин на 2.

Маємо

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = x_3, \\ 3x_1 - x_2 = -2x_3. \end{cases}$$

Тоді згідно з формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} x_3 & 3 \\ -2x_2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-x_3 + 6x_3}{-2 - 9} = -\frac{5}{11}x_3;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & x_3 \\ 3 & -2x_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-4x_3 - 3x_3}{-2 - 9} = \frac{7}{11}x_3.$$

Нехай $\dfrac{x_3}{11} = t$, тобто $x_3 = 11t$, тоді $x_1 = -5t$, $x_2 = 7t$, де t – довільне дійсне число.

Отже, загальним розв'язком системи є $x_1 = -5t$, $x_2 = 7t$, $x_3 = 11t$, $t \in \mathbb{R}$. ▶

3. Матриці

3.1. Основні поняття про матриці

Таблиця з чисел a_{ij}, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, вигляду

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається **матрицею** порядку (розміру) $m \times n$. При цьому числа a_{ij}, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$, називаються **елементами** матриці. Елементи з однаковими першими індексами утворюють рядки, а з однаковими другими індексами – стовпчики матриці. Якщо $m = n$, то матрицю називають **квадратною n-го порядку**. Якщо ж $m \neq n$, то – **прямокутною**.

У випадку, коли $n = 1$ матрицю A порядку $m \times 1$ називають **одностовпчиковою** або **матрицею-стовпчиком**, або **вектором-стовпчиком**

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

а при $m = 1$, тобто матрицю порядку $1 \times n$ називають **однорядковою**, або **матрицею-рядком**, або **вектором-рядком**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Множина елементів a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn} квадратної матриці n-го порядку утворює **головну діагональ**, а множина елементів a_{1n}, $a_{2,n-1}$, $a_{3,n-2}$, ..., a_{n1} – **побічну діагональ**. Якщо у квадратній матриці всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, то таку матрицю називають **діагональною**

$$\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

У випадку, коли $b_1 = b_2 = ... = b_n = 1$, діагональну матрицю називають **одиничною** і позначають її буквою E або I:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0\dots & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицю, в якої всі елементи дорівнюють нулю, називають **нульовою** або **нуль-матрицею**

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Якщо маємо квадратну матрицю n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

то для неї існує визначник, який позначатимемо символом $|A|$ або $det\,A$. У випадку, коли $|A| \neq 0$, матриця називається **невиродженою**, а при $|A| = 0$ – **виродженою.**

Приклад 1. З'ясувати, чи є виродженою матриця:

$$1)\;\; A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}; \quad 2)\;\; B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

◀ Маємо

1) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 12 - 12 = 0.$

Отже, матриця A вироджена.

2) $|B| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2 \neq 0,$

а це означає, що матриця B невироджена. ▶

Транспонованою щодо матриці A називають матрицю A^T, утворену з матриці A заміною рядків однаковими за номером стовпчиками. Матрицю A називають **симетричною**, якщо $A = A^T$, тобто якщо $a_{ij} = a_{ji}$ для всіх i, j. Квадратну матрицю називають **трикутною**, якщо всі її елементи a_{ij}, $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$, розміщені під головною діагоналлю $(i > j)$ або над головною діагоналлю $(i < j)$, дорівнюють нулю:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ або } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3.2. Дії над матрицями

Матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

одного й того самого розміру $m \times n$ називають **рівними**, тобто $A = B$, якщо $a_{ij} = b_{ij}$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Сумою (різницею) двох матриць A і B одного й того самого розміру $m \times n$ називають матрицю C, елементи якої дорівнюють сумам (різницям) відповідних елементів a_{ij} і b_{ij}, тобто $C = A + B$ $(C = A - B)$, де $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $(c_{ij} = a_{ij} - b_{ij})$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

Добутком матриці A **на число** λ називають матрицю λA, елементи якої дорівнюють добуткам елементів матриці A на число λ, тобто

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Операції множення матриці на число і додавання матриць мають такі властивості:

а) $A+B=B+A$ (комутативний закон);

б) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (асоціативний закон додавання);

в) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ (дистрибутивний закон);

г) $A+0=A$,

де A, B, C і 0 матриці однакових розмірів, λ і μ – сталі.

Розглянемо дві матриці

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1k} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nk} \end{pmatrix},$$

де число стовпчиків матриці A дорівнює числу рядків матриці B.

Добутком двох матриць A **і** B називають матрицю C, елементи c_{ij}, $i \in \{1,2,...,m\}$, $j \in \{1,2,...,k\}$, якої дорівнюють сумі добутків елементів i-го рядка матриці A на відповідні елементи j-го стовпчика матриці B, тобто $C = AB$, якщо $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + ... + a_{in}b_{nj}$ для всіх i та j.

Приклад 2. Знайти добуток матриць

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{і} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

◀ Маємо

$$AB=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 2\cdot1+1\cdot2+0\cdot2 & 2\cdot2+1\cdot1+0\cdot2 \\ 3\cdot1+1\cdot2+1\cdot2 & 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}. \quad ▶$$

Наступний приклад показує, що для добутку матриць не виконується властивість комутативності, тобто, взагалі кажучи, $AB \neq BA$ і, крім того, добуток матриць може дорівнювати нулю навіть у тому випадку, коли жодна з них не є нульовою матрицею.

Приклад 3. Знайти AB і BA, коли

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

◀ Згідно з правилом множення матриць

$$AB = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + 3(-1) & 3 \cdot 1 + 3(-1) \\ 3 \cdot 1 + 3(-1) & 3 \cdot 1 + 3(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 & 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 3 & (-1) \cdot 3 + (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -6 & -6 \end{pmatrix},$$

тобто $AB \neq BA$. ▶

Одинична матриця при множенні матриць має властивість: *для довільної квадратної матриці A правильна рівність*

$$AE = EA = A.$$

Безпосередньо перевіркою доводиться, що коли A і B – дві квадратні матриці одного й того самого порядку з визначниками $|A|$ і $|B|$, то визначник матриці $C = AB$ дорівнює добутку визначників співмножників, тобто $|C| = |A| \cdot |B|$.

Добуток матриць має властивості:

1) $(A + B)C = AC + BC$;

2) $C(A + B) = CA + CB$;

3) $A(BC) = (AB)C$.

3.3. Обернена матриця

Нехай A – квадратна матриця, визначник якої $|A| \neq 0$.

Оберненою до матриці A називається матриця A^{-1}, яка задовольняє співвідношення $A^{-1}A = AA^{-1} = E$, де E – одинична матриця.

Доводиться, що коли матриця A квадратна і невироджена, то існує єдина обернена матриця A^{-1}. Знаходиться A^{-1} за формулою

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \tag{15}$$

де A_{ij} – алгебраїчне доповнення елемента a_{ij}, $\{i,j\} \subset \{1,2,...,n\}$.

Приклад 4. Знайти матрицю A^{-1} для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

◀ Маємо

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 - 12 = -9.$$

Оскільки $|A| \neq 0$, то матриця A невироджена і, отже, для неї існує обернена.

Знайдемо алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij}, $\{i,j\} \subset \{1,2,3\}$:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -6;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4.$$

Тоді згідно з формулою (15) маємо

$$A^{-1} = -\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ -6 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

або

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}. \quad ▶$$

Наведемо деякі властивості оберненої матриці.

Властивість 1. *Визначник оберненої матриці дорівнює оберненій величині визначника заданої матриці, тобто* $|A^{-1}|=\dfrac{1}{|A|}$.

Властивість 2. *Обернена матриця добутку квадратних матриць дорівнює добутку обернених матриць-множників, узятих у зворотному порядку.*

◀ Справді, $AB(B^{-1}A^{-1})=A(BB^{-1})A^{-1}=AEA^{-1}=AA^{-1}=E$ і $(B^{-1}A^{-1})AB=B(AA^{-1})B^{-1}=BEB^{-1}=BB^{-1}=E$.

Отже, $B^{-1}A^{-1}$ є оберненою матрицею для AB. ▶

Властивість 3. *Матриця, яка є транспонованою до оберненої матриці, дорівнює оберненій матриці до транспонованої матриці, тобто* $(A^{-1})^T=(A^T)^{-1}$.

3.4. Матричний запис і матричний розв'язок системи лінійних рівнянь

Нехай задано систему n лінійних алгебраїчних рівнянь із n невідомими

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases} \tag{16}$$

Позначимо через A матрицю з коефіцієнтів при невідомих, через X – матрицю-стовпчик з невідомих і через B – матрицю-стовпчик із вільних членів:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Якщо скористатись правилом множення матриць і умовою рівності матриць, то систему (16) можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

або

$$AX = B. \tag{17}$$

Припустимо, що матриця A – невироджена, тобто $|A| \neq 0$, тоді існує обернена матриця A^{-1}. Помножимо зліва обидві частини рівності (17) на A^{-1}: $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

Оскільки $A^{-1}A = E$, то остаточно дістанемо

$$X = A^{-1}B. \tag{18}$$

Отже, матриця-стовпчик із невідомих дорівнює добутку оберненої матриці A^{-1} на матрицю-стовпчик вільних членів.

Рівність (17) називається **матричним рівнянням** або **матричним записом системи** (16), а (18) – **матричним розв'язком** цієї системи.

Приклад 5. Розв'язати за допомогою матричного методу систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = -1, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2. \end{cases}$$

◀ Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю до матриці A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 6 + 2 - 1 - 3 - 4 = 1,$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з формулою (18) одержуємо

$$X = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-1+2 \\ -1-0+2 \\ 5+1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

тобто $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$.▶

Розв'язування систем лінійних рівнянь за допомогою матричного методу ефективне тоді, коли ліва частина системи залишається незмінною, а змінюється лише стовпчик з вільних членів. Справді, замість того, щоб кожного разу розв'язувати нову систему, можна скористатись матричним методом, обчислити A^{-1}, а потім за формулою (18) знаходити нові значення невідомих при кожному зміненому стовпчику з вільних членів.

3.5. Власні числа і власні вектори матриці

Ненульовий вектор-стовпчик (матриця-стовпчик) $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ називається **власним вектором** квадратної матриці A n-го порядку, якщо існує таке число λ – **власне число матриці** A, що $AX = \lambda X$ або $(A - \lambda E)X = 0$.

Власні вектори знаходимо як розв'язки однорідної системи рівнянь $(A - \lambda E)X = 0$, яку можна записати в розгорнутому вигляді так:

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + (a_{22}-\lambda)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn}-\lambda)x_n = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Ненульові розв'язки цієї системи існують тоді й тільки тоді, коли її визначник $|A-\lambda E| = 0$, тобто

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

Рівняння (20) називається **характеристичним рівнянням** матриці A. Розв'язавши характеристичне рівняння, отримаємо власні числа матриці, а після цього із системи (19) для цих власних чисел – її ненульові розв'язки, тобто власні вектори.

Приклад 6. Знайти власні вектори і власні числа матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

◀ Складемо характеристичне рівняння матриці A

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0.$$

Власні числа $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

Запишемо системи рівнянь, які аналогічні системі (19), для визначення власних векторів X_1 і X_2.

Нехай $\lambda_1 = 2$. Тоді система має вигляд

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$

звідки випливає, що $x_2 = -x_1$. Якщо взяти $x_1 = 1$, то $x_2 = -1$ і тоді вектор $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, є власним вектором матриці A, що відповідає власному числу $\lambda_1 = 2$.

Для $\lambda_2 = 3$ маємо систему

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = 0, \\ 2x_1 + x_2 = 0; \end{cases} \quad x_2 = -2x_1,$$

тому $X_2 = C\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, є власним вектором матриці A, що відповідає власному числу $\lambda_2 = 3$.

Відповідь: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$; $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ▶

3.6. Ранг матриці

Розглянемо прямокутну матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

і виділимо в ній k довільних рядків і k довільних стовпчиків. Елементи, які розміщені на перетині виділених рядків і стовпчиків, утворюють квадратну матрицю порядку k. Визначник цієї матриці називають **мінором k-го порядку матриці** A. Очевидно, що $k \leq \min\{m, n\}$.

Наприклад, для матриці $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ одним з мінорів третього порядку є визначник $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}$, а одним з мінорів другого порядку – $\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$.

Самі елементи матриці можна розглядати як мінори першого порядку. Деякі мінори матриці можуть дорівнювати нулю, інші – ні.

Рангом матриці називають найбільший порядок мінора матриці, який не дорівнює нулю, тобто натуральне число r називають рангом матриці A, якщо серед мінорів r-го порядку цієї матриці є принаймні один відмінний від нуля, а всі мінори $(r+1)$-го порядку і вищого дорівнюють нулю. Той факт, що натуральне число r є рангом матриці A, записують так $\mathrm{rang}(A) = r$ або $r(A) = r$.

При знаходженні рангу матриці використовують спеціальні прийоми, які базуються на елементарних перетвореннях матриць. До елементарних перетворень матриць належать такі:

1) множення всіх елементів будь-якого рядка (стовпчика) на одне й те саме число, відмінне від нуля;

2) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпчика) відповідних елементів іншого рядка (стовпчика), помножених на одне й те саме число;

3) переставляння місцями будь-яких двох рядків (стовпчиків);

4) дописування або викреслювання рядка (стовпчика), що повністю складається з нулів.

Дві матриці називаються **еквівалентними**, якщо від однієї з них можна перейти до іншої за допомогою скінченного числа елементарних перетворень. Еквівалентні матриці, взагалі кажучи, не рівні, але вони мають однаковий ранг, що істотно використовується при обчисленні рангу матриці.

Приклад 7. Знайти ранг матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

◀ Зведемо задану матрицю до еквівалентної матриці, ранг якої знаходиться простіше.

Помноживши перший рядок на -1 і, додавши до третього рядка, одержимо матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

У матриці A_1 помножимо перший стовпчик по черзі на -2, -1, -1 і додамо відповідно до другого, третього і четвертого стовпчика, тоді A_1 перейде в матрицю

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Додавши другий рядок матриці A_2 до третього рядка, отримаємо матрицю

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Викреслимо третій рядок у матриці A_3, тоді матимемо

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Якщо помножити другий стовпчик на -1 і додати спочатку до третього стовпчика, а потім до четвертого, то дістанемо матрицю

$$A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Викреслювання третього і четвертого стовпчиків дає матрицю

$$A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $|A_6| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, то ранг матриці A дорівнює рангу матриці A_6 і дорівнює 2, тобто $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A_6) = 2$. ▶

3.7. Метод Жордана-Гаусса виключення змінних

Розв'язування систем лінійних рівнянь методом Крамера та з допомогою матричного методу (методу оберненої матриці) пов'язані з великою кількістю обчислень. Значно швидше можна розв'язати систему лінійних рівнянь методом послідовного виключення невідомих, який називають **методом Жордана-Гаусса**.

Розглянемо систему

$$\left\{ \begin{array}{r} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array} \right. \tag{21}$$

Нехай якийсь коефіцієнт $a_{ij} \neq 0$. Назвемо його **розв'язувальним (провідним)**. Рядок, якому належить розв'язувальний елемент, називатимемо **розв'язувальним (провідним) рядком**, а стовпчик, якому належить розв'язувальний елемент – **розв'язувальним (провідним) стовпчиком**.

Запишемо систему (21) у вигляді таблиці

A_1	A_2	$\ldots$	A_n	A_0
a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
a_{21}	a_{22}	$\ldots$	a_{2n}	b_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m

.

Припустимо, що $a_{11} \neq 0$. Поділимо на нього всі елементи першого рядка. Користуючись першим рядком, виключимо змінну x_1 з решти рівнянь. Для цього помножимо перший рядок по черзі на $-a_{21}$, $-a_{31}$,...,$-a_{m1}$ і додамо відповідно до другого, третього, ... , m-го рядка. Дістанемо таблицю

A_1	A_2	$\ldots$	A_n	A_0
1	a'_{12}	$\ldots$	a'_{1n}	b'_1
0	a'_{22}	$\ldots$	a'_{2n}	b'_2
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
0	a'_{m2}	$\ldots$	a'_{mn}	b'_m

.

Далі за розв'язувальний елемент візьмемо $a'_{22} \neq 0$ (якщо $a'_{22} = 0$, то міняємо місцями друге рівняння з якимось із наступних, щоб одержати рівносильну систему з $a'_{22} \neq 0$) і за його допомогою виключимо, аналогічно як змінну x_1, змінну x_2 з решти рівнянь (дістанемо нулі в другому стовпчику під a'_{22})

$$\begin{array}{cccccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_n & & A_0 \\ \hline 1 & a'_{12} & a'_{13} & \dots & a'_{1n} & & b'_1 \\ 0 & 1 & a''_{23} & \dots & a''_{2n} & & b''_2 \\ 0 & 0 & a''_{33} & \dots & a''_{3n} & & b''_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \dots & a''_{mn} & & b''_m \end{array}.$$

Якщо під час перетворень одержимо рядок, який складається з нулів, то його можна відкинути.

Продовжуємо процес далі. При цьому можливі такі ситуації: 1) після деякого кроку дістанемо рядок, у якому всі елементи лівіше від вертикальної риски дорівнюють нулю, а елемент правіше від цієї риски не дорівнює нулю (всі коефіцієнти при змінних деякого рівняння дорівнюють нулю, а вільний член відмінний від нуля) тоді ця система несумісна; 2) такого рядка не дістанемо, то система сумісна.

У другому випадку матимемо таблицю

$$\begin{array}{ccccccc|c} A_1 & A_2 & A_3 & \dots & A_r & \dots & A_n & A_0 \\ \hline 1 & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & 1 & c_{23} & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} & d_2 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & c_{3r} & \dots & c_{3n} & d_3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c_{rn} & d_r \end{array}.$$

Якщо ранг відповідної системи $r = n$, то вона має єдиний розв'язок. Щоб одержати цей розв'язок, необхідно в передостаннє рівняння замість x_n підставити його значення з останнього рівняння і знайти x_{n-1} і т.д. Якщо $r < n$, то перші r змінні $x_1, x_2, ..., x_r$ виражаємо через решту змінних $x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n$

$$\begin{cases} x_1 = c'_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + c'_{1,n}x_n + d'_1, \\ x_2 = c'_{2,r+1}x_{r+1} + \ldots + c'_{2,n}x_n + d'_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r = c'_{r,r+1}x_{r+1} + \ldots + c'_{r,n}x_n + d'_r. \end{cases} \tag{22}$$

У системі (22) змінні x_1, x_2,...,x_r виражені через x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n. Такий розв'язок системи називається **загальним розв'язком**, змінні x_1, x_2, ..., x_r називаються **базисними**, змінні x_{r+1}, x_{r+2}, ..., x_n – **вільними**. Надаючи вільним змінним довільних значень, діставатимемо частинні розв'язки.

Якщо вільним змінним надати нульових значень, то із системи (22) одержимо значення базисних змінних

$$x_1 = d'_1, \quad x_2 = d'_2, \quad \dots \quad x_r = d'_r.$$

Одержаний розв'язок системи (21) називають **базисним розв'язком**. Кількість базисних розв'язків не перевищує C_n^m. Якщо один базисний розв'язок знайдено, то для відшукання іншого одну з небазисних змінних переводять у базисні, а відповідну базисну – у небазисні.

Базисний розв'язок, у якого всі базисні змінні невід'ємні, називається **допустимим базисним розв'язком**.

Зручно здійснювати зведення системи (21) до базисної форми

$$\begin{cases} x_1 & & & +a'_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ & x_2 & & +a'_{2,m+1}x_{m+1} + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ & & x_m & +a'_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (23)$$

за допомогою методу Жордана-Гаусса.

Розглянемо детально цей процес. Нехай змінна x_s входить у r-е рівняння з коефіцієнтом a_{rs}. Для того щоб ця змінна стала базисною, поділимо r-е рівняння на $a_{rs} \neq 0$, тобто зробимо коефіцієнт при x_s одиницею і результат віднімемо від кожного з решти рівнянь, множачи кожного разу його на відповідний елемент a_{is} (дістанемо змінну x_s з коефіцієнтом 0).

Сукупність операцій, які утворюють крок жорданових виключень, називається **жордановим перетворенням**. Формули для обчислення коефіцієнтів a'_{ij}, b'_i, $i \in \{1, ..., m\}$, $j \in \{1, ..., n\}$, нової системи, одержаної у результаті одного кроку жорданових виключень із розв'язувальним елементом a_{rs}, мають вигляд:

$$a'_{rj} = \frac{1}{a_{rs}} a_{rj}, \quad b'_r = \frac{1}{a_{rs}} b_r;$$

$$a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is} a_{rj}}{a_{rs}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{is} b_r}{a_{rs}},$$
$$i \in \{1, ..., m\}, \ \ i \neq r, \quad j \in \{1, ..., n\}. \tag{24}$$

Обчислення за формулами (24) можна описати за допомогою **правила прямокутника:** *щоб знайти елемент a'_{ij}, треба від елемента a_{ij} відняти добуток коефіцієнтів, які стоять навпроти нього у провідних стовпчику і рядку, поділений на провідний елемент, розміщений по діагоналі від елемента a_{ij}.*

$$\begin{array}{ccc} a_{ij} & \text{— — — —} & a_{is} \\ | & & | \\ | & & | \\ | & & | \\ a_{rj} & \text{— — — —} & \boxed{a_{rs}} \end{array}$$

Отже, послідовність дій, які виконуються на одному кроці жорданових перетворень у відповідності з формулами (24) така : *провідний елемент замінюється одиницею; усі решта елементів провідного рядка діляться на провідний елемент; усі решта елементів провідного стовпчика замінюються нулями; елементи, які не належать провідним рядку або стовпчику, обчислюються за правилом прямокутника.*

Для перетворення системи (21) у базисну форму (23) треба не більше ніж m кроків жорданових перетворень. На першому кроці за провідний елемент вибирається довільний елемент $a_{rs} \neq 0$. На другому кроці провідний елемент вибирається у будь-якому рівнянні (крім r-го) серед ненульових коефіцієнтів системи, одержаної після першого кроку, і т.д. Якщо в процесі виключень з'явиться рівняння, у якому ліва частина дорівнює нулю, а вільний член відмінний від нуля, – це ознака несумісності системи. Якщо ліва і права частини деякого рівняння перетворюються в нуль, то воно є лінійною комбінацією решти рівнянь, і його треба виключити з розгляду. Отже, у процесі жорданових перетворень або встановлюється несумісність системи рівнянь, або система зводиться до еквівалентної базисної системи (23), звідки розв'язок одержується безпосередньо. Формули жорданових перетворень (24) застосовуються як у випадку $m = n$, так і у випадку $m < n$.

Приклад 8. Розв'язати систему лінійних рівнянь методом Жордана-Гаусса

$$\left\{\begin{array}{rrrrrl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & +2x_5 & = 4, \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & +4x_5 & = -3, \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & & = 1, \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & -3x_4 & +3x_5 & = 1. \end{array}\right.$$

◀ Результати обчислень подамо у вигляді таблиці:

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
$\boxed{1}$	-2	3	-4	2	4
0	1	-1	1	4	-3
1	3	0	-3	0	1
1	1	1	-3	3	1
1	-2	3	-4	2	4
0	$\boxed{1}$	-1	1	4	-3
0	5	-3	1	-2	-3
0	3	-2	1	1	-3

A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_0
1	0	1	-2	10	-2
0	1	-1	1	4	-3
0	0	2	-4	-22	12
0	0	$\boxed{1}$	-2	-11	6
1	0	0	0	21	-8
0	1	0	-1	-7	3
0	0	0	0	0	0
0	0	1	-2	-11	6

.

Отже, система набула вигляду

$$\left\{\begin{array}{rrrrl} x_1 & & & +21x_5 & = -8, \\ & x_2 & -x_4 & -7x_5 & = 3, \\ & x_3 & -2x_4 & -11x_5 & = 6, \end{array}\right.$$

де x_1, x_2, x_3 – базисні змінні, а x_4, x_5 – вільні змінні. Тому загальний розв'язок системи: $x_1 = -8 - 21x_5$, $x_2 = 3 + x_4 + 7x_5$, $x_3 = 6 + 2x_4 + 11x_5$, $\{x_4, x_5\} \subset \mathbb{R}$. Якщо покласти $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, то одержимо базисний розв'язок $x_1 = -8$, $x_2 = 3$, $x_3 = 6$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. ▶

За допомогою методу Жордана-Гаусса можна знаходити матрицю, обернену до заданої. При цьому не треба досліджувати задану матрицю на виродженість, обчислюючи її визначник. Якщо можливе число кроків жорданових перетворень r менше від порядку n матриці $(r < n)$, то матриця вироджена й оберненої немає.

Приклад 9. Знайти матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

◀ Запишемо матрицю A, а справа поряд із нею – одиничну матрицю E третього порядку і виконаємо максимально можливе число жорданових перетворень, щоб на місці матриці A утворити одиничну матрицю E. Обчислення подамо у вигляді таблиць:

A_1	A_2	A_3	E_1	E_2	E_3
$\boxed{2}$	2	3	1	0	0
1	−1	0	0	1	0
−1	2	1	0	0	1
1	1	3/2	1/2	0	0
0	$\boxed{-2}$	−3/2	−1/2	1	0
0	3	5/2	1/2	0	0
1	0	3/4	1/4	1/2	0
0	1	3/4	1/4	−1/2	0
0	0	$\boxed{1/4}$	−1/4	3/2	1
1	0	0	1	−4	−3
0	1	0	1	−5	3
0	0	1	−1	6	4

.

Отже, на місці матриці A дістали одиничну матрицю E, а на місці одиничної матриці E – обернену матрицю A^{-1}. Тому

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}. \quad ▶$$

3.8. Теорема Кронекера-Капеллі

Розглянемо систему (21). Матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

називається матрицею системи (21), а матриця

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

– розширеною матрицею системи (21).

Відповідь на питання, коли система (21) є сумісною, дає така теорема.

Теорема Кронекера-Капеллі. *Система лінійних рівнянь сумісна тоді й тільки тоді, коли ранг матриці системи дорівнює рангу розширеної матриці цієї системи, тобто* $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A_1)$.

Отже, якщо $\mathrm{rang}(A) < \mathrm{rang}(A_1)$, то система (21) не має розв'язків. Вона суперечлива – не існує вектора $x^0 = (x_1^0; x_2^0; ...; x_n^0)$, який задовольняє одночасно всі рівняння (21).

У випадку, коли $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A_1) = k$, система (21) має розв'язки. Щоб знайти їх, ми повинні вибрати із системи (21) деякі k рівнянь, матриця коефіцієнтів яких має ранг k, і розв'язати ці рівняння. Розв'язків у цієї системи з k рівнянь є нескінченно багато, але їх можна компактно записати. При цьому довільний розв'язок вибраних k рівнянь одночасно задовольняє решту $n - k$ рівнянь системи (21).

Описані вище випадки вичерпують усі можливі ситуації, оскільки ранг A_1 не може бути меншим, ніж ранг A.

Для розв'язання системи (21) у загальному випадку не треба обчислювати ранги матриць A і A_1, а потім їх порівнювати. Достатньо одразу застосувати метод Жордана-Гаусса. Метод Жордана-Гаусса зручний тим, що він є найменш трудомістким, дозволяє однозначно встановити сумісна задана система чи ні, а у випадку сумісності знайти її розв'язки. Крім того, він дає можливість знайти максимальне число лінійно незалежних рівнянь – ранг матриці системи.

Приклад 10. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 = 2. \end{cases}$$

◀ Матриця системи

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

має визначник $|A| = 0$. Очевидно, що ранг матриці A дорівнює 2, бо є визначник, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$.

Матриця

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

має ранг, що дорівнює 3, оскільки визначник, породжений заданою матрицею

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Отже, $\mathrm{rang}(A) < \mathrm{rang}(A_1)$, і система несумісна. ▶

Приклад 11. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$

◀ Маємо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $|A| = 0$, а $\operatorname{rang}(A_1) = \operatorname{rang}(A) = 2$. Отже, система сумісна і для знаходження її розв'язків виберемо два рівняння таких, щоб ранг матриці з їхніх коефіцієнтів дорівнював 2. Візьмемо, наприклад, перше і друге рівняння

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

Запишемо цю систему у вигляді

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 - x_2, \\ x_1 + 2x_3 = 1 - x_2. \end{cases}$$

Визначник Δ останньої системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

тому вона має єдиний розв'язок при довільній правій частині:

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 - x_2 & 1 \\ 1 - x_2 & 2 \end{vmatrix} = 1 - x_2, \quad x_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 1 & 1 - x_2 \\ 1 & 1 - x_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Отже, трійки чисел $(1 - x_2; x_2; 0)$ при будь-якому $x_2 \in \mathbb{R}$ дають всі розв'язки заданої системи. ▶

4. Лінійні економічні моделі

4.1. Застосування алгебри матриць

При розв'язуванні багатьох економічних задач використовується алгебра матриць.

Приклад 1. Підприємство випускає продукцію трьох видів P_1, P_2, P_3 і використовує сировину двох типів S_1 і S_2. Норми витрат сировини характеризуються матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, де кожний елемент a_{ij}, $i \in \{1,2,3\}$, $j \in \{1,2\}$, указує, скільки одиниць сировини j-го типу витрачається на виробництво одиниці продукції i-го виду. План випуску продукції задано матрицею-рядком $C = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix}$, вартість одиниці кожного типу сировини – матрицею-стовпчиком $B = \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Знайти витрати сировини, необхідні для планового випуску продукції, а також загальну вартість сировини.

◀ Витрати сировини 1-го типу становлять $2 \cdot 100 + 5 \cdot 80 + 1 \cdot 130 = 730$, а другого – $3 \cdot 100 + 2 \cdot 80 + 4 \cdot 130 = 980$ одиниць, а це означає, що матрицю-рядок S витрат сировини можна подати у вигляді

$$S = CA = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix}.$$

Тоді сумарна вартість сировини

$$Q = SB = \begin{pmatrix} 730 & 980 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = (730 \cdot 30 + 980 \cdot 50) = (70900).$$

Сумарну вартість сировини можна обчислити й по-іншому: спочатку обчислимо матрицю вартостей сировини, що витрачається на одиницю продукції, тобто матрицю $R = AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix}$, а потім сумарну вартість сировини

$$Q = CR = C(AB) = \begin{pmatrix} 100 & 80 & 130 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 210 \\ 250 \\ 230 \end{pmatrix} = (70900). \quad ▶$$

Приклад 2. Галузь складається з n підприємств, кожне з яких випускає по одному виду продукції в обсязі x_i, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, одиниць. Для забезпечення свого виробництва підприємство використовує частину продукції, яка випускається ним самим та іншими підприємствами. Нехай a_{ij} – частина продукції i-го підприємства, яка використовується j-им підприємством для забезпечення випуску своєї продукції обсягом x_j одиниць.

Знайти обсяг кінцевого продукту y_j, тобто кількість продукції j-го підприємства для реалізації поза цією галуззю. Розрахунки провести для випадку, коли матриці $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ і $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ мають відповідно вигляд

$$X = \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,3 \\ 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,2 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

◀ Позначимо через Y матрицю-стовпчик

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $y_i = x_i - \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, або в матричній формі $Y = X - AX$, тобто $Y = (E - A)X$, де E – одинична матриця.

У нашому випадку маємо

$$Y = \begin{pmatrix} 1 - 0,4 & -0,2 & -0,3 \\ -0,3 & 1 - 0,5 & -0,2 \\ -0,1 & -0,2 & 1 - 0,2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 400 \\ 500 \\ 200 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 240 - 100 - 60 \\ -120 + 250 - 40 \\ -40 - 100 + 160 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 90 \\ 20 \end{pmatrix}. \quad ▶$$

4.2. Застосування систем лінійних рівнянь

Наведемо приклади задач економіки, математичні моделі яких описуються системами лінійних рівнянь.

Приклад 3. Завод спеціалізується з випуску чотирьох видів виробів P_1, P_2, P_3 і P_4. При цьому використовується сировина чотирьох типів S_1, S_2, S_3 і S_4. Норми витрат кожної з них на одиницю продукції відповідного виду задано таблицею

Вид сировини	Норми витрат одиниць сировини на одиницю продукції				Витрати сировини на 1 день, ум.од
	P_1	P_2	P_3	P_4	
S_1	1	2	1	0	8
S_2	0	1	3	1	15
S_3	4	0	1	1	11
S_4	1	1	0	5	23

Знайти щоденний обсяг випуску продукції кожного виду.

◀ Нехай завод випускає x_j одиниць продукції P_j, $j \in \{1, ..., 4\}$. Тоді, згідно з нормами витрат сировини кожного типу, маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 8, \\ \quad x_2 + 3x_3 + x_4 = 15, \\ 4x_1 \qquad + x_3 + x_4 = 11, \\ x_1 + x_2 \qquad + 5x_4 = 23. \end{cases}$$

Розв'яжемо одержану систему методом Жордана-Гаусса

A_1	A_2	A_3	A_4	A_0
$\boxed{1}$	2	1	0	8
0	1	3	1	15
4	0	1	1	11
1	2	0	5	23
1	2	1	0	8
0	$\boxed{1}$	3	1	15
0	−8	−3	1	−21
0	−1	−1	5	15

A_1	A_2	A_3	A_4	A_0
1	0	−5	−2	−22
0	1	3	1	15
0	0	21	9	99
0	0	$\boxed{2}$	6	30
1	0	0	13	53
0	1	0	−8	−30
0	0	0	$\boxed{-54}$	−216
0	0	1	3	15

A_1	A_2	A_3	A_4	A_0
1	0	0	0	1
0	1	0	0	2
0	0	0	1	4
0	0	1	0	3

.

З останньої таблиці випливає, що $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$.

Отже, завод випускає в день 1 ум.од. продукції P_1; 2 ум.од. продукції P_2; 3 ум.од. продукції P_3 і 4 ум.од. продукції P_4. ▶

Приклад 4. Для виплати заробітної платні працівникам чотирьох категорій B_1, B_2, B_3 і B_4 виділено купюри таких вартостей: 1850 купюр по 100 грн.; 230 купюр по 50 грн.; 250 купюр по 10 грн. і 740 купюр по 1 грн. Заробітна платня працівника категорії B_1 становить 962 грн.; категорії B_2 – 713 грн.; категорії B_3 – 452 грн.; категорії B_4 – 261 грн.

Визначити скільки працівників заданої категорії працює на підприємстві, якщо кожному з них видали заробітну платню мінімальним числом купюр.

◀ Оскільки оплата проводиться мінімальним числом купюр, то таблиця розподілу купюр різної вартості, які видають співробітникам різних категорій, має вигляд

Вартість купюри, грн.	Розподіл купюр по категоріях				Загальна кількість купюр
	B_1	B_2	B_3	B_4	
100	9	7	4	2	1850
50	1	0	1	1	230
10	1	1	0	1	250
1	2	3	2	1	740

Нехай x_j – кількість працівників категорії B_j, $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Тоді за даними наведеної вище таблиці матимемо систему рівнянь балансу

$$\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 1850, \\ x_1 \quad + x_3 + x_4 = 230, \\ x_1 + x_2 \quad + x_4 = 250, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 740. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему методом Жордана-Гаусса.

A_1	A_2	A_3	A_4	A_0
9	7	4	2	1850
$\boxed{1}$	0	1	1	230
1	1	0	1	250
2	3	2	1	740
0	7	-5	-7	-220
1	0	1	1	230
0	$\boxed{1}$	-1	0	20
0	3	0	-1	280
0	0	$\boxed{2}$	-7	-360
1	0	1	1	230
0	1	-1	0	20
0	0	3	-1	220

A_1	A_2	A_3	A_4	A_0
0	0	1	$-7/2$	-180
1	0	0	$9/2$	410
0	1	0	$-7/2$	-160
0	0	0	$\boxed{19/2}$	760
0	0	1	0	100
1	0	0	0	50
0	1	0	0	120
0	0	0	1	80

.

Отже, працівників категорії B_1 на підприємстві працює 50 осіб, категорії B_2 – 120 осіб, категорії B_3 – 100 осіб і категорії B_4 – 80 осіб. ▶

4.3. Модель Леонтьєва багатогалузевої економіки

Метою балансового аналізу є відповідь на питання, яке виникає в макроекономіці й пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким повинен бути обсяг виробництва кожної з n галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник деякої продукції, а з другого – як споживач продукції і своєї, і виробленої іншими галузями.

Припустимо, що є n галузей промисловості, кожна з яких виробляє свою продукцію. Частина продукції йде на споживання всередині заданої галузі, а також іншими галузями, а друга частина – для реалізації (споживання) у невиробничій сфері.

Розглянемо процес виробництва за деякий проміжок часу, наприклад, рік.

Введемо такі позначення: x_i – сумарний (валовий) обсяг продукції i-ої галузі, y_i – обсяг кінцевого продукту i-ої галузі для невиробничого споживання, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, x_{ij} – обсяг продукції

i-ої галузі, що споживається j-ою галуззю в процесі виробництва, $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$.

Балансовий принцип зв'язку між різними галузями промисловості полягає в тому, що валовий випуск i-ої галузі повинен дорівнювати сумі обсягів споживання у виробничій і невиробничій сферах, тобто

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{25}$$

Ці рівняння називаються **співвідношеннями балансу**. Розглядатимемо вартісний міжгалузевий баланс, коли всі величини, які входять до рівності (25), мають вартісне вираження.

Уведемо коефіцієнти прямих витрат

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}, \ \ \{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}, \tag{26}$$

які виражають витрати продукції i-ої галузі на виробництво одиниці продукції j-ої галузі. Леонтьєвим було помічено, що протягом тривалого часу величини a_{ij} змінюються мало, і тому їх можна вважати сталими й залежними лише від технології виробництва. Це означає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску, тобто $x_{ij} = a_{ij}x_j$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$. При цьому співвідношення балансу набувають вигляду

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n + y_i, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{27}$$

Розглядатимемо матрицю-стовпчик X обсягів виробленої продукції (матриця валового випуску), матрицю Y обсягів продукції кінцевого споживання (матриця кінцевого споживання), а також матрицю A коефіцієнтів прямих витрат:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \ \ Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \ \ A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Тоді система рівнянь (27) у матричній формі матиме вигляд

$$X = AX + Y. \tag{28}$$

Це рівняння називають **рівнянням лінійного міжгалузевого балансу**, або **моделлю Леонтьєва**.

Рівняння (28) можна використовувати двояко: 1) відома матриця-стовпчик валового випуску X, а треба знайти матрицю-стовпчик кінцевого споживання Y (задача розглянута вище у прикладі 2); 2) для періоду T (наприклад, року) відома матриця стовпчик кінцевого споживання Y і треба знайти матрицю-стовпчик валового випуску.

У другому випадку треба розв'язати систему рівнянь (28) з відомими матрицями A і Y. Перепишемо рівняння (28) у вигляді

$$(E - A)X = Y. \tag{29}$$

Якщо матриця $(E - A)$ невироджена, тобто $\det(E - A) \neq 0$, то

$$X = (E - A)^{-1}Y. \tag{30}$$

Матриця $S \equiv (E - A)^{-1}$ називається **матрицею повних витрат**; кожний її елемент s_{ij} є величиною валового випуску продукції i-ої галузі, необхідної для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту y_j j-ої галузі, $j \in \{1, 2, ..., n\}$.

У відповідності з економічним змістом задачі значення x_i повинні бути невід'ємними при невід'ємних значеннях y_i і a_{ij}, де $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$.

Матриця $A \geq 0$ ($a_{ij} \geq 0$, $\{i, j\} \subset \{1, 2, \ldots, n\}$) називається **продуктивною**, якщо для довільної матриці-стовпчика $Y \geq 0$ ($y_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) існує розв'язок $X \geq 0$ ($x_i \geq 0$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$) рівняння (28). У цьому випадку й модель Леонтьєва називається продуктивною.

Існує декілька критеріїв продуктивності матриці A. Один з них стверджує, що матриця A продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпчиків не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпчиків сума елементів строго менша одиниці, тобто матриця A продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для довільних $\{i, j\} \subset \{1, 2, ..., n\}$, $\max\limits_{1 \leq j \leq n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$ та існує номер j_0 такий, що $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij_0} < 1$.

Приклад 5. У таблиці наведено дані про виконання балансу за певний звітний період

N п/п	Галузь	Споживання		Кінцевий продукт	Валовий випуск
		Енергетика	Машинобуд.		
1	Енергетика	7	21	72	100
2	Машинобудування	12	15	63	100

Обчислити необхідний обсяг валового випуску в кожній галузі, якщо кінцеве споживання енергетичної галузі збільшиться вдвічі, а машинобудування залишиться на попередньому рівні.

◀ Маємо $x_1 = 100$, $x_2 = 100$, $x_{11} = 7$, $x_{12} = 21$, $x_{21} = 12$, $x_{22} = 15$, $y_1 = 72$, $y_2 = 63$. За формулою (26) знаходимо коефіцієнти прямих витрат: $a_{11} = \frac{7}{100} = 0,07$; $a_{12} = \frac{21}{100} = 0,21$; $a_{21} = \frac{12}{100} = 0,12$; $a_{22} = \frac{15}{100} = 0,15$. Матриця прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 \end{pmatrix}$ має невід'ємні елементи і задовольняє критерій продуктивності, оскільки $\max\{0,07 + 0,12;\ 0,21 + 0,15\} = \max\{0,19; 0,36\} = 0,36 < 1$.

Тому для довільної матриці-стовпчика кінцевого продукту Y можна знайти необхідний обсяг валового випуску X за формулою $X = (E - A)^{-1} Y$.

Оскільки згідно з умовою $Y = \begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix}$, то треба знайти $(E - A)^{-1}$:

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,07 & 0,21 \\ 0,12 & 0,15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,93 & -0,21 \\ -0,12 & 0,85 \end{pmatrix};$$

$$\det(E - A) = 0,93 \cdot 0,85 - 0,12 \cdot 0,21 = 0,7653 \neq 0;$$

$$(E - A)^{-1} = \frac{1}{0,7653} \begin{pmatrix} 0,85 & 0,21 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}.$$

Отже, вектор кінцевого продукту

$$X = \frac{1}{0,7653}\begin{pmatrix} 0,85 & 0,21 \\ 0,12 & 0,93 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 144 \\ 63 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{0,7653}\begin{pmatrix} 0,85 \cdot 144 + 0,21 \cdot 63 \\ 0,12 \cdot 144 + 0,93 \cdot 63 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 177,2 \\ 99,1 \end{pmatrix},$$

тобто валовий випуск в енергетичній галузі треба збільшити до 177,2 ум.од., а в машинобудуванні – до 99,1 ум.од. ▶

Приклад 6. Визначити міжгалузевий баланс виробництва й споживання продукції трьох галузей, коли відомі матриці прямих витрат $A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix}$ і кінцевого продукту кожної галузі

$$Y = \begin{pmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{pmatrix}.$$

◀ Маємо $X = (E - A)^{-1}Y$, де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Очевидно, що

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,2 \\ 0,1 & 0,0 & 0,1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & 0,0 \\ -0,2 & 0,7 & -0,2 \\ -0,1 & 0,0 & 0,9 \end{pmatrix};$$

$$\det(E - A) = 0,421;$$

$$(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,49644 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49644 & 0,33254 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$X = \begin{pmatrix} 1,49644 & 0,21378 & 0,04751 \\ 0,47506 & 1,49644 & 0,33254 \\ 0,16627 & 0,02375 & 1,11639 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 100000 \\ 300000 \\ 200000 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 223280 \\ 562946 \\ 247030 \end{pmatrix}.$$

Обсяг виробництва першої галузі $x_1 = 223280$, другої $x_2 = 562946$ і третьої $x_3 = 247030$. Знаючи ці обсяги й коефіцієнти прямих витрат, можна обчислити потоки продукції від i-ої до j-ої галузі.

Якщо, наприклад, на одиницю продукції другої галузі йде 0,1 одиниць продукції першої галузі, то на 562946 одиниць всієї продукції другої галузі витрачається $0,1 \cdot 562946 = 56294,6$ одиниць продукції першої галузі. Решта продукції першої галузі споживається у ній самій: $0,3 \cdot 223280 = 66984,0$, бо у третій галузі її продукція не споживається, оскільки $a_{13} = 0$.

Отже, продукція першої галузі розподіляється так: $x_{11} = 66984,0$; $x_{12} = 56294,6$; $x_{13} = 0$; $y_1 = 100000$, що разом становить $x \approx 223279$.

Подібним чином можна знайти балансовий розподіл продукції другої й третьої галузей. ▶

4.4. Лінійна модель торгівлі

Вважатимемо, що бюджети n країн, які ми позначимо відповідно x_1, x_2, ..., x_n, витрачаються на купівлю товарів. Розглянемо **лінійну модель обміну**, або **модель міжнародної торгівлі**.

Нехай a_{ij} – частина бюджету x_j, яку j-а країна витрачає на закупівлю товарів i-ої країни. Уведемо матрицю коефіцієнтів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Якщо весь бюджет витрачається лише на закупки всередині країни та зовні неї, то це можна розглядати як торговельний баланс, а тому правильна рівність

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{32}$$

Матриця A, елементи якої задовольняють умови (32), називається **структурною матрицею торгівлі**. Очевидно, що для

i-ої країни загальна виручка від внутрішньої та зовнішньої торгівлі

$$P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}.$$

Умовою бездефіцитності (збалансованості) торгівлі є $P_i \geq x_i$ або

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ...a_{in}x_n \geq x_i, \quad i \in \{1, 2, ..., n\}. \tag{33}$$

Якщо матриця A є структурною, тобто виконуються умови (32), то в (33) не можуть бути знаки нерівності. Справді, додамо всі нерівності (33) і погрупуємо доданки з величинами x_j. Тоді одержимо, що

$$x_1(a_{11} + a_{21} + ... + a_{n1}) + x_2(a_{12} + a_{22} + ... + a_{n2}) + \ldots +$$

$$+x_n(a_{1n} + a_{2n} + ... + a_{nn}) \geq x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Оскільки в дужках стоять суми елементів матриці по стовпчиках, які дорівнюють одиниці за умовою (32), то одержимо нерівність

$$x_1 + x_2 + ... + x_n \geq x_1 + x_2 + ... + x_n.$$

Звідси випливає, що можливий лише знак рівності.

Отже, умови (33) набувають вигляду

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = x_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = x_n. \end{array} \right. \tag{34}$$

Позначимо через X матрицю-стовпчик, кожна компонента якої характеризує бюджет відповідної країни, тобто $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$.

Цю матрицю називають **матрицею бюджетів**. З допомогою цієї матриці та матриці A систему (34) можна подати у вигляді

$$AX = X. \tag{35}$$

З цього рівняння випливає, що власний вектор структурної матриці, який відповідає її власному числу $\lambda = 1$, складається з бюджетів країн бездефіцитної міжнародної торгівлі.

Рівняння (35) можна подати у вигляді

$$(A - E)X = 0, \tag{36}$$

звідки й знаходиться матриця X.

Приклад 7. Структурна матриця торгівлі чотирьох країн має вигляд

$$A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Знайти бюджети цих країн, які задовольняють умову збалансованої бездефіцитної торгівлі, якщо сума бюджетів $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$.

◀ Треба розв'язати систему (36), яка в цьому випадку має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0,2-1 & 0,3 & 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,3-1 & 0,1 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,5-1 & 0,2 \\ 0,1 & 0,1 & 0,2 & 0,4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

або

$$\begin{cases} -0,8x_1 + 0,3x_2 + 0,2x_3 + 0,2x_4 = 0, \\ 0,4x_1 - 0,7x_2 + 0,1x_3 + 0,2x_4 = 0, \\ 0,3x_1 + 0,3x_2 - 0,5x_3 + 0,2x_4 = 0, \\ 0,1x_1 + 0,1x_2 + 0,2x_3 - 0,6x_4 = 0. \end{cases}$$

Запишемо систему у вигляді

$$\begin{cases} -8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Оскільки визначник системи дорівнює нулю, то система має безліч розв'язків. Візьмемо друге, третє і четверте рівняння і розв'яжемо систему

$$\begin{cases} 4x_1 - 7x_2 + x_3 + 2x_4 = 0, \\ 3x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

Маємо, згідно з формулами Крамера,

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -2x_4 & -7 & 1 \\ -2x_4 & 3 & -5 \\ 6x_4 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -7 & 1 \\ 3 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{140x_4}{121}, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -2x_4 & 1 \\ 3 & -2x_4 & -5 \\ 1 & 6x_4 & 2 \end{vmatrix}}{121} = \frac{146}{121}x_4,$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & -7 & -2x_4 \\ 3 & 3 & -2x_4 \\ 1 & 1 & 6x_4 \end{vmatrix}}{121} = \frac{220}{121}x_4.$$

Оскільки $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6270$, то

$$\left(\frac{140}{121} + \frac{146}{121} + \frac{220}{121} + \frac{121}{121}\right) x_4 = 6270, \quad \frac{627}{121}x_4 = 6270,$$

$$x_4 = \frac{6270 \cdot 121}{627} = 1210.$$

Тому шукані величини бюджетів країн при бездефіцитній торгівлі такі: $x_1 = 1400$, $x_2 = 1460$, $x_3 = 2200$, $x_4 = 1210$. ▶

Вправи

1. Обчислити визначник:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} x-1 & 1 \\ x^3 & x^2+x+1 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; 6) $\begin{vmatrix} 0 & a & a \\ a & 0 & a \\ a & a & 0 \end{vmatrix}$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 16 \\ 0 & -1 & 10 \end{vmatrix}$.

2. Розв'язати рівняння або нерівність:

1) $\begin{vmatrix} 2 & x-4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 0$; 2) $\begin{vmatrix} 3x-3 & 2 \\ x & 1 \end{vmatrix} > 0$;

3) $\begin{vmatrix} 3x & -1 \\ x & 2x-3 \end{vmatrix} = \dfrac{3}{2}$; 4) $\begin{vmatrix} x & 3x \\ 4 & 2x \end{vmatrix} < 14$;

5) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5-x & 2 \\ 8-x & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$; 6) $\begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & x+3 \end{vmatrix} = 0$;

7) $\begin{vmatrix} 2 & x+2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & x \end{vmatrix} > 0$.

3. Обчислити визначник, розклавши за елементами будь-якого рядка або стовпчика:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \\ 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & 17 & -7 \\ -1 & 13 & 1 \\ 1 & 7 & 1 \end{vmatrix}$; 3) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 11 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 2 \\ -3 & 1 & 3 & 4 \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}$; 7) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 5 \end{vmatrix}$.

4. Розв'язати систему рівнянь:

1) $\begin{cases} 3x-5y=12, \\ 2x+7y=81; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-y\sqrt{3}=1, \\ x\sqrt{3}-3y=\sqrt{3}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 2x-y+z=-2, \\ x+2y+3z=-1, \\ x-3y-2z=3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3x-2y+5z=0, \\ x+2y-3z=0; \end{cases}$ 6) $\begin{cases} 2x+y-z=0, \\ x+2y+z=0, \\ 2x-y+3z=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} x-y-z=0, \\ x+4y+2z=0, \\ 3x+7y+3z=0. \end{cases}$

5. Визначити, при яких значеннях a і b система рівнянь

$\begin{cases} 3x - ay = 1, \\ 6x + 4y = b \end{cases}$ 1) має єдиний розв'язок; 2) не має розв'язків; 3) має безліч розв'язків.

6. При яких значеннях k однорідна система $\begin{cases} kx + y = 0, \\ x + ky = 0 \end{cases}$ має ненульові розв'язки.

7. Визначити, для яких значень a і b система рівнянь $\begin{cases} 3x - 2y + z = b, \\ 5x - 8y + 9z = 3, \\ 2x + y + az = -1 \end{cases}$
1) має єдиний розв'язок; 2) невизначена; 3) несумісна?

8. Для яких значень a система $\begin{cases} 3x - 2y + z = 0, \\ ax - 14y + 15z = 0, \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$ має лише нульовий розв'язок?

9. Знайти матрицю $A + 3B - C$, якщо $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

10. Обчислити матрицю $D = (AB)^T - C^2$, де $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

11. Знайти AB і BA, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Обчислити AB, якщо:

1) $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 5 & 3 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

13. Знайти добуток матриць ABC, де $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$,

$B = \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

14. Обчислити A^3, якщо $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

15. Знайти матрицю, обернену до заданої:

1) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, 3) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

16. Знайти власні значення і власні вектори матриці:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

17. Знайти ранг матриці:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 4 & -1 & 5 \\ 4 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

18. Матричним методом розв'язати систему:

1) $\begin{cases} 5x + 2y = 4, \\ 7x + 4y = 8; \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 2, \\ x + 5y - 4z = -5, \\ 4x + y - 3z = -4; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x - y + z = 2, \\ 3x + 2y + 2z = -2, \\ x - 2y + z = 1. \end{cases}$

19. Методом Жордана-Гаусса розв'язати систему:

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 - 8x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 3, \\ 2x_1 - 4x_2 + 8x_3 + 8x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 10x_3 + 8x_4 = 1; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2. \end{cases}$

20. Знайти матрицю, обернену до заданої, використовуючи метод Жордана-Гаусса:

1) $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. Підприємство щодобово випускає чотири види виробів, основні виробничо-економічні показники яких наведені в таблиці

Вид виробу N п/п	Кількість виробів, од.	Витрати сировини, кг	Норма часу виготовлення год/видів	Ціна виробу, гр.од/видів
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Знайти добові показники: витрати сировини S, затрати робочого часу T і вартість P продукції.

22. Підприємство випускає продукцію трьох видів і використовує сировину двох типів. Норми витрат сировини на одиницю продукції кожного виду визначені матрицею $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Вартості одиниць сировини кожного типу задані матрицею $B = (10 \;\; 15)$. Які загальні витрати виробництва на виготовлення 100 одиниць продукції першого виду, 200 одиниць продукції другого виду і 150 одиниць продукції третього виду?

23. При виготовленні деталей чотирьох видів P_1, P_2, P_3, P_4 витрати матеріалів, робочої сили та електроенергії задано таблицею

Ресурси	Витрати (ум.од.) на одну деталь			
	P_1	P_2	P_3	P_4
Матеріали	1	3	0,5	2
Робоча сила	1,5	2	3	1
Електроенергія	2	1	1	0,5

Обчислити загальні потреби в матеріалах y_1, робочій силі y_2 та електроенергії y_3 для виготовлення заданої кількості деталей кожного виду: $x_1 = 10$, $x_2 = 2$, $x_3 = 8$, $x_4 = 4$.

24. Виконати розрахунок заробітної платні, яка припадає на кожне замовлення при виготовленні різних деталей, якщо відомі матриці: 1) затрат робочого часу в годинах на кожному робочому місці $П_j$, $j \in \{1,2,3,4,5\}$, і на кожний виріб типу A_i, $i \in \{1,2,3\}$,

$$P = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} П_1 & П_2 & П_3 & П_4 & П_5 \\ \end{array}$$

$$P = \left(\begin{array}{ccccc} 2 & 1 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array};$$

2) кількість виробів B_k, $k \in \{1,2,3\}$ (у штуках), у кожній партії виробів типу A_i, $i \in \{1,2,3\}$,

$$\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array}$$

$$Q = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{array};$$

3) погодинної заробітної платні (у грошових одиницях) на кожному робочому місці

$$Y = \left(\begin{array}{c} 1,25 \\ 1,50 \\ 1,40 \\ 1,40 \\ 1,25 \end{array} \right).$$

25 (прогноз випуску продукції за запасами сировини). Підприємство випускає три види продукції, використовуючи сировину трьох типів. Необхідні характеристики виробництва задано таблицею:

Тип сировини	Витрати сировини за видами продукції			Запаси сировини
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

Треба визначити обсяг випуску продукції кожного виду при заданих запасах сировини.

26. На підприємстві є три цехи. Скільки продукції слід випускати кожному цеху, якщо задані матриця прямих витрати A і матриця кінцевого продукту Y:

1) $A = \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0,2 & 0,1 \\ 0,3 & 0 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0 \end{array} \right); \quad Y = \left(\begin{array}{c} 1200 \\ 2000 \\ 2400 \end{array} \right);$

$$2\,)\ A=\begin{pmatrix} 0 & 0,1 & 0,2 \\ 0,1 & 0 & 0,3 \\ 0,2 & 0,4 & 0 \end{pmatrix};\quad Y=\begin{pmatrix} 1224 \\ 1632 \\ 816 \end{pmatrix}?$$

27. Галузь складається з чотирьох підприємств; матриця випуску продукції і матриця внутрішнього споживання мають відповідно вигляд:

$$X=\begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 0,25 & 0,10 & 0,24 & 0,25 \\ 0,20 & 0,15 & 0,36 & 0,17 \\ 0,15 & 0,20 & 0,20 & 0,25 \\ 0,30 & 0,15 & 0,20 & 0,15 \end{pmatrix}.$$

Знайти матрицю обсягів кінцевого продукту, який має реалізовуватися поза галуззю.

28. Є дві фірми, які виробляють певний товар.

1) Сукупний продукт першої фірми дорівнює 200 а другої фірми – 300, матриця прямих витрат $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$. Знайти кінцевий продукт кожної фірми.

2) Кінцевий продукт першої фірми дорівнює 70, а другої – 120. Треба знайти необхідний сукупний продукт, якщо матриця прямих витрат $A=\begin{pmatrix} 0,1 & 0,4 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$.

29. Структурна матриця торгівлі трьох країн має вигляд

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,3 & 0,4 \\ 0,5 & 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,3 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

Знайти бюджети першої і другої країн, які задовольняють збалансовану бездефіцитну торгівлю за умови, що бюджет третьої країни дорівнює 1100 ум.од.

Відповіді

1. 1) 11; 2) $4ab$; 3) -1; 4) -12; 5) 0; 6) $2a^3$; 7) 87. **2.** 1) 12; 2) $x>3$; 3) $x_1=-\frac{1}{6}$, $x_2=\frac{3}{2}$; 4) $-1<x<7$; 5) $x_1=3$, $x_2=5$; 6) $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=-3$; 7) $-6<x<-4$. **3.** 1) -60; 2) 180; 3) 0; 4) 0; 5) -28; 6) -70; 7) 640. **4.** 1) (16; 7); 2) $x=1+y\sqrt{3}$, $y\in\mathbb{R}$; 3) $x=2$, $y=3$, $z=4$; 4) несумісна; 5) $x=-2t$, $y=7t$, $z=4t$, $t\in\mathbb{R}$; 6) $x=y=z=0$; 7) $x=$

$2t$, $y - 3t$, $z = 5t$, $t \in \mathbb{R}$. **5.** 1) $a \neq -2$; 2) $a = -2$, $b \neq 2$; 3) $a = -2$, $b = 2$. **6.** $k = \pm 1$. **7.** Якщо $a \neq -3$, то система має єдиний розв'язок; при $a = -3$; $b \neq \dfrac{1}{3}$ система несумісна; при $a = -3$, $b = 1/3$ система має безліч розв'язків. **8.** $a = 5$.

9. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. **10.** $\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$. **11.** $AB = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

12. 1) $\begin{pmatrix} 56 \\ 69 \\ 17 \end{pmatrix}$; 2) (31). **13.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix}$.

15. 1) $\begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -5/3 & 1/3 & 1 \\ -10/3 & 5/3 & 2 \end{pmatrix}$. **16.** 1) $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$, $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 2) $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $X_1 = C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = C\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. **17.** 1) 2; 2) 2. **18.** 1) $(0;2)$; 2) $(5;6;10)$; 3) $(2;-1;-3)$. **19.** 1) $(1;1;1)$; 2) несумісна; 3) $(1;2;3;4)$; 4) $x_1 = 6 - 8x$, $x_2 = 1 - 2x_3$, $x_4 = -1$, $x_3 \in \mathbb{R}$; 5) $(-1;0;1)$. **20.** 1) $\begin{pmatrix} -7/3 & 2 & -1/3 \\ 5/3 & -1 & -1/3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

21. $S = 570$ кг, $T = 1220$ год., $P = 3500$ гр.од. **22.** 2800. **23.** $y_1 = 28$, $y_2 = 47$, $y_3 = 32$. **24.** (99,6; 81,90; 102,55). **25.** $x_1 = 150$, $x_2 = 250$, $x_3 = 100$. **26.** 1) $X = \begin{pmatrix} 1640 \\ 2940 \\ 3116 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 1910 \\ 2440 \\ 2190 \end{pmatrix}$. **27.** $Y = (135 \quad 34 \quad 35 \quad 40)$.

28. 1) $Y = \begin{pmatrix} 60 \\ 80 \end{pmatrix}$; 2) $X = \begin{pmatrix} 260 \\ 410 \end{pmatrix}$. **29.** 1000 од. і 1200 од.

Елементи векторного аналізу

1. Вектори на площині та в просторі

1.1. Основні поняття

При вивченні різних явищ і процесів зустрічаються величини, які повністю визначаються заданням їхніх числових значень. Такі величини називаються **скалярними**. Скалярними величинами є, наприклад, довжина, площа, маса, температура і т.п. Крім скалярних величин, у різних задачах зустрічаються величини, для визначення яких, крім числового значення, необхідно знати також їхній напрямок у просторі або на площині. Такі величини називаються **векторними**. Векторні величини зображуються за допомогою векторів. **Вектором** називається напрямлений відрізок у просторі або на площині, у якого одна з його обмежуючих точок береться за початок, а друга – за кінець. Якщо A – початок вектора, а B – його кінець, то вектор позначається символом $\overrightarrow{AB}$. Вектор позначатимемо також і символом $\overrightarrow{a}$.

Довжиною (модулем) $|\overrightarrow{AB}|$ **вектора** $\overrightarrow{AB}$ називається число, що дорівнює довжині відрізка AB, який зображає цей вектор. Якщо вектор позначено через $\overrightarrow{a}$, то його модуль позначається символом $|\overrightarrow{a}|$.

Вектор, у якого кінець збігається з початком, називається **нульовим** і позначається $\overrightarrow{0}$. Нульовий вектор не має певного напрямку, а його модуль $|\overrightarrow{0}| = 0$.

Вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називаються **колінеарними**.

Два вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називаються **рівними**, якщо вони: 1) мають однакові модулі; 2) колінеарні; 3) напрямлені в один бік. У цьому випадку пишуть $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$. З цього означення випливає, що вектор можна переносити паралельно самому собі, поміщаючи його початок у будь-яку точку простору (площини).

Для кожного ненульового вектора $\overrightarrow{a}$ існує **протилежний вектор**, який позначається символом $-\overrightarrow{a}$. Вектор $-\overrightarrow{a}$ має модуль, який дорівнює модулю вектора $\overrightarrow{a}$, колінеарний з ним, але напрямлений у протилежний бік.

1.2. Лінійні операції над векторами

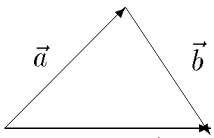
Лінійними операціями називаються операції додавання й віднімання векторів і множення вектора на число.

Добутком вектора $\overrightarrow{a}$ на число $\lambda \neq 0$ називається вектор $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$, довжина якого $|\overrightarrow{b}| = |\lambda||\overrightarrow{a}|$, а напрямок збігається з напрямком вектора $\overrightarrow{a}$ при $\lambda > 0$ і протилежний при $\lambda < 0$.

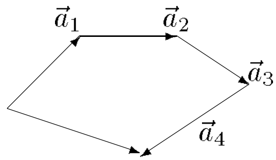
Звідси випливає, що вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}$ завжди розміщені на одній або на паралельних прямих, тобто є колінеарними. Правильним є й обернене твердження: з колінеарності векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ випливає, що

$$\overrightarrow{b} = \lambda\overrightarrow{a}. \tag{1}$$

Сумою векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається вектор $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$ початок якого збігається з початком вектора $\overrightarrow{a}$, а кінець з кінцем вектора $\overrightarrow{b}$, за умови, що початок вектора $\overrightarrow{b}$ знаходиться в кінці вектора $\overrightarrow{a}$.



$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



$\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4$

Це означення можна поширити на довільне скінченне число векторів. Це правило називається **правилом трикутника (многокутника)**.

Лінійні операції над векторами мають такі властивості:

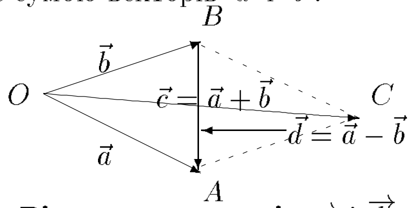
1) $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a}$;

2) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) + \overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + (\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c})$; 3) $\lambda(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = \lambda\overrightarrow{a} + \lambda\overrightarrow{b}$;

4) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{a} = \lambda\overrightarrow{a} + \mu\overrightarrow{a}$; 5) $(\lambda\mu)\overrightarrow{a} = \lambda(\mu\overrightarrow{a})$;

6) $0\,\overrightarrow{a} = \lambda\,\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}$.

Суму векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ можна одержати і таким чином: відкладемо від точки O вектори $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ і побудуємо паралелограм $OACB$. Вектор $\overrightarrow{OC}$, який є діагоналлю паралелограма і є сумою векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$.



Це правило називається **правилом паралелограма додавання векторів**.

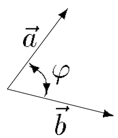
Різницею векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається вектор $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, сума якого з вектором $\vec{b}$ дає вектор $\vec{a}$.

Вектор, довжина якого дорівнює одиниці, називається **одиничним**.

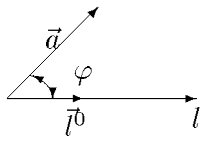
Нехай задано вектор $\vec{a} \neq \vec{0}$. Розглянемо одиничний вектор $\vec{a}^0$, колінеарний вектору $\vec{a}$ й однаково з ним напрямлений, тоді $\vec{a} = |\vec{a}|\vec{a}^0$. Вектор $\vec{a}^0$ називають **ортом** вектора $\vec{a}$.

1.3. Кут між двома векторами. Проекція вектора на вісь

Нехай у просторі задано два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, які мають спільний початок.



Кутом між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається найменший кут φ, $0 \leq \varphi \leq \pi$, на який треба повернути один із векторів до його суміщення з другим.

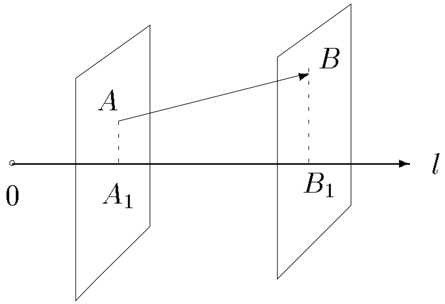


Розглянемо вісь l, додатний напрямок якої збігається з напрямком одиничного вектора $\vec{l}^0$, розміщеного на осі l.

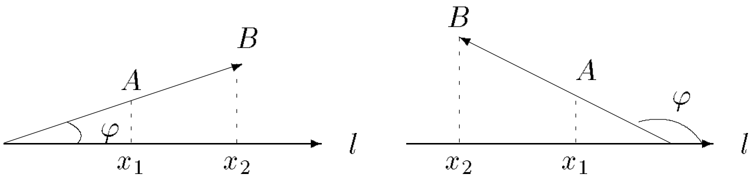
Під кутом між вектором $\vec{a}$ і віссю l розуміємо кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{l}^0$.

Нехай l – деяка вісь, а $\overrightarrow{AB}$ – вектор, який розміщений довільно у просторі. Позначимо через A_1 та B_1 проекції на вісь l відповідно початку A і кінця B цього вектора. Припустимо, що A_1 має на осі l координату x_1, а B_1 – координату x_2.

Різницю $x_2 - x_1$ між координатами проекцій кінця і початку вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l назвемо **проекцією вектора $\overrightarrow{AB}$ на цю вісь**.



Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з віссю l гострий кут, то $x_2 > x_1$,і проекція $x_2 - x_1 > 0$; якщо ж кут між віссю l і вектором $\overrightarrow{AB}$ – тупий, то $x_2 < x_1$, і проекція $x_2 - x_1 < 0$.

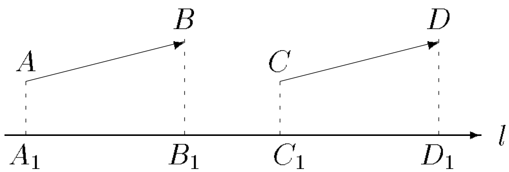


У випадку, коли $\overrightarrow{AB} \perp l$, маємо $x_2 = x_1$ і тому проекція $x_2 - x_1 = 0$.

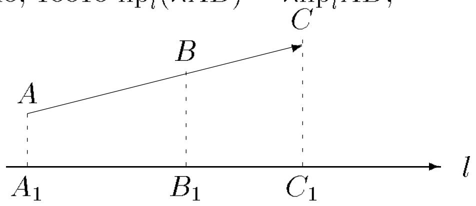
Проекцію вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l позначатимемо символом пр$_l\overrightarrow{AB}$.

Основні властивості проекції вектора на вісь:

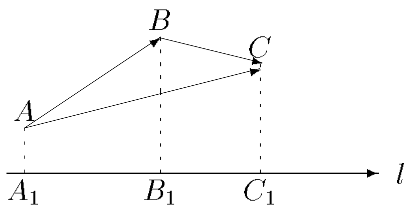
1) проекції рівних векторів на одну й ту саму вісь однакові, тобто пр$_l\overrightarrow{AB}$ = пр$_l\overrightarrow{CD}$, якщо $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$;



2) при множенні вектора на число λ його проекція множиться на це число, тобто $\text{пр}_l(\lambda\overrightarrow{AB}) = \lambda\text{пр}_l\overrightarrow{AB}$;



3) проекція суми векторів на вісь l дорівнює сумі проекцій цих векторів на задану вісь, тобто $\text{пр}_l\overrightarrow{AC} = \text{пр}_l\overrightarrow{AB} + \text{пр}_l\overrightarrow{BC}$;

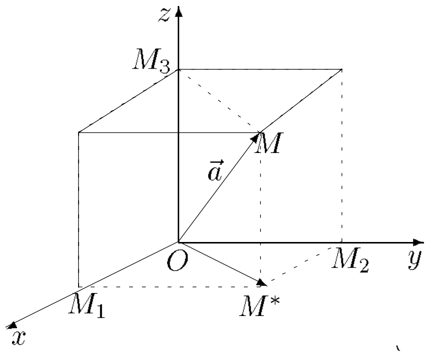


4) проекція вектора $\overrightarrow{AB}$ на вісь l дорівнює добутку модуля заданого вектора на косинус кута φ між цим вектором і віссю l, тобто $\text{пр}_l\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$.

1.4. Прямокутний декартів базис. Розклад вектора по осях координат. Дії над векторами, заданими своїми координатами

Розглянемо прямокутну систему координат у просторі. На кожній осі виберемо одиничний вектор, напрямок якого збігається з додатним напрямком осі. На осі Ox візьмемо одиничний вектор $\vec{i}$, на осі Oy – $\vec{j}$, на осі Oz – $\vec{k}$:

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1.$$



Ці вектори взаємно перпендикулярні. Їх називають **ортами осей координат**. Прийнято також називати ці орти **декартовим прямокутним базисом.**

Розглянемо вектор $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{OM}$ у просторі. Згідно з правилом додавання векторів

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM^*} + \overrightarrow{M^*M} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \tag{2}$$

Якщо координати точки $M(x;y;z)$, то

$$\overrightarrow{OM_1} = x\,\vec{i};\ \ \overrightarrow{OM_2} = y\,\vec{j};\ \ \overrightarrow{OM_3} = z\,\vec{k}. \tag{3}$$

Тоді з (2) і (3) випливає, що

$$\overrightarrow{a} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}. \tag{4}$$

Рівність (4) називають **розкладом вектора $\vec{a}$ по координатних осях**. Очевидно, що $x = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{a}$, $y = \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{a}$, $z = \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{a}$, а тому кажуть, що коефіцієнти розкладу (4) є **проекціями вектора $\overrightarrow{a}$ на осі координат**.

Якщо початок вектора суміщено з початком координат, то його проекції x, y, z на координатні осі збігаються з координатами кінця вектора – точки M. Тому проекції будь-якого вектора на координатні осі називають **координатами вектора** $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{a}$.

Після вибору в просторі певної системи координат вектор і трійка його координат однозначно визначають одне одного, тому вектор (4) можна записати у вигляді

$$\overrightarrow{a} = (x;y;z). \tag{5}$$

Оскільки осі координат взаємно перпендикулярні, то довжина вектора $\overrightarrow{OM}$ дорівнює діагоналі прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{OM_3}$ і тому виражається рівністю

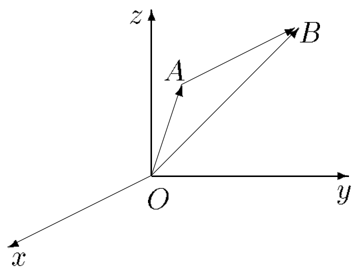
$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \qquad (6)$$

Вектор можна визначити заданням початку і кінця, тоді координати вектора виражаються через координати цих точок. Якщо в заданій системі координат початок вектора $\overrightarrow{a}$ знаходиться в точці $A(x_1; y_1; z_1)$, а кінець у точці $B(x_2; y_2; z_2)$, то $\overrightarrow{OA} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}$.

З рівності $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ випливає, що

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}) - (x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k}) =$$

$$= (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j} + (z_2 - z_1) \vec{k}.$$



Отже,

$$\overrightarrow{a} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Формула (6) у цьому випадку набуває вигляду

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Очевидно, що відстань між двома точками $A(x_1; y_1; z_1)$ і $B(x_2; y_2; z_2)$ дорівнює довжині вектора $\overrightarrow{AB}$, а тому обчислюється за формулою

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Запис вектора у координатній формі дозволяє лінійні операції над векторами здійснювати над їхніми координатами.

Нехай є вектори $\vec{a} = x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}$ і λ – деяке число.

Тоді

$$\lambda\vec{a} = \lambda(x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}) = (\lambda x_1)\,\vec{i} + (\lambda y_1)\,\vec{j} + (\lambda z_1)\,\vec{k}$$

або

$$\lambda\vec{a} = (\lambda x_1; \lambda y_1; \lambda z_1). \tag{7}$$

Далі

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}) \pm (x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k}) =$$

$$= (x_1 \pm x_2)\,\vec{i} + (y_1 \pm y_2)\,\vec{j} + (z_1 \pm z_2)\,\vec{k}$$

або

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2). \tag{8}$$

Якщо вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ колінеарні, то $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, тобто

$$x_2\,\vec{i} + y_2\,\vec{j} + z_2\,\vec{k} = \lambda(x_1\,\vec{i} + y_1\,\vec{j} + z_1\,\vec{k}). \tag{9}$$

Звідси випливає, що

$$x_2 = \lambda x_1, \quad y_2 = \lambda y_1, \quad z_2 = \lambda z_1$$

або

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{y_2}{y_1} = \frac{z_2}{z_1}. \tag{10}$$

Оскільки умови (10) – це відношення, то один або два знаменники можуть дорівнювати нулю, але тоді й відповідні чисельники дорівнюватимуть нулю.

Умова (10) є необхідною і достатньою умовою колінеарності двох векторів.

Приклад 1. Задано вектори $\vec{a} = (2; 0; 1)$ і $\vec{b} = (3; 5; -2)$. Знайти довжину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

◀ Маємо $\overrightarrow{c} = 2(2;0;1) - 3(3;5;-2) = (4;0;2) - (9;15;-6) = (4 - 9; 0 - 15; 2 + 6) = (-5;-15;8)$.

Тоді $|\overrightarrow{c}| = \sqrt{(-5)^2 + (-15)^2 + 8^2} = \sqrt{25 + 225 + 64} = \sqrt{314}$. ▶

Приклад 2. Для яких значень α і β вектори $\overrightarrow{a} = (-2;3;\beta)$ і $\overrightarrow{b} = (\alpha;-6;2)$ колінеарні?

◀ Згідно з (10)

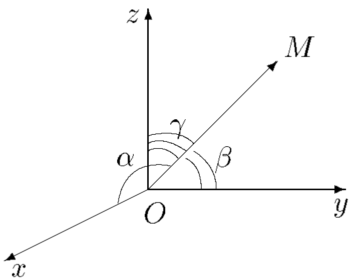
$$\frac{-2}{\alpha} = \frac{-3}{6} = \frac{\beta}{2}.$$

Тому

$$-\frac{2}{\alpha} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 4; \quad \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}; \quad \beta = -1.$$

Отже, вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ колінеарні, коли $\alpha = 4$, $\beta = -1$. ▶

Напрямок вектора $\overrightarrow{a}$ в просторі визначається кутами α, β і γ, які цей вектор утворює з осями координат. Косинуси цих кутів $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ називають **напрямними косинусами вектора**.



Нехай вектор $\overrightarrow{a}$ заданий своїми координатами, тобто $\overrightarrow{a} = (x;y;z)$. Оскільки $x = \text{пр}_{Ox}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\alpha$, $y = \text{пр}_{Oy}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\beta$, $z = \text{пр}_{Oz}\overrightarrow{a} = |\overrightarrow{a}|\cos\gamma$, де $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, то

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \tag{11}$$

Піднісши кожну з рівностей (11) до квадрата і додавши їх, дістанемо, що

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Очевидно, що

$$\overrightarrow{a}^0 = \cos\alpha\,\vec{i} + \cos\beta\,\vec{j} + \cos\gamma\,\vec{k}.$$

Приклад 3. Знайти косинуси кутів, які вектор $\overrightarrow{AB}$ утворює з осями координат, якщо $A(1;2;3)$ і $B(2;4;5)$.

◀ Маємо $\overrightarrow{AB} = (2-1; 4-2; 5-3)$, тобто $\overrightarrow{AB} = (1;2;2)$. Тоді $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+4+4} = 3$, $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$, $\cos\beta = \dfrac{2}{3}$, $\cos\gamma = \dfrac{2}{3}$. ▶

1.5. Скалярний добуток двох векторів

Скалярним добутком векторів $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ називається число, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними. Позначається скалярний добуток символом $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}$. Тому

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|\cos\varphi. \qquad (12)$$

Оскільки $|\overrightarrow{b}|\cos\varphi = \text{пр}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b}$, $|\overrightarrow{a}|\cos\varphi = \text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}$, то з рівності (12) випливає, що

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{a}|\text{пр}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} \quad \text{або} \quad \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = |\overrightarrow{b}|\text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a}.$$

Звідси знаходимо, що

$$\text{пр}_{\overrightarrow{a}}\overrightarrow{b} = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|}, \quad \text{а} \quad \text{пр}_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{a} = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{b}|}.$$

Скалярний добуток двох векторів має властивості:

1) $\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{a}$;

2) $\lambda(\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}) = (\lambda\overrightarrow{a})\,\overrightarrow{b} = \overrightarrow{a}(\lambda\overrightarrow{b})$;

3) $(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b})\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}\,\overrightarrow{c} + \overrightarrow{b}\,\overrightarrow{c}$;

4) якщо скалярний добуток двох векторів дорівнює нулю, то дорівнює нулю або один із цих векторів, або косинус кута між ними, тобто вектори ортогональні (перпендикулярні). Навпаки, якщо $\overrightarrow{a} \perp \overrightarrow{b}$, то $\cos\varphi = 0$, і, тому скалярний добуток векторів дорівнює нулю.

Отже, два ненульові вектори перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли їхній скалярний добуток дорівнює нулю.

Очевидно, що $\vec{a}\,\vec{a} = |\vec{a}||\vec{a}|\cos 0 = |\vec{a}||\vec{a}| = |\vec{a}|^2$, тобто

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2. \tag{13}$$

Приклад 4. Задано вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$, причому $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 5$. Кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$ дорівнює 60^0. Знайти модуль вектора $\vec{c}$.

◀ Скориставшись рівністю (13), дістанемо

$$|\vec{c}| = \sqrt{\vec{c}^{\,2}} = \sqrt{(2\vec{a} + 3\vec{b})^2} = \sqrt{4\vec{a}^{\,2} + 12\vec{a}\,\vec{b} + 9\vec{b}^{\,2}}.$$

Маємо, що

$$\vec{a}^{\,2} = |\vec{a}|^2 = 4^2 = 16, \quad \vec{b}^{\,2} = |\vec{b}|^2 = 5^2 = 25,$$

і

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = 4 \cdot 5 \cdot \cos 60^0 = 4 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} = 10.$$

Тому

$$|\vec{c}| = \sqrt{4 \cdot 16 + 12 \cdot 10 + 9 \cdot 25} = \sqrt{409}. \ ▶$$

Запишемо скалярний добуток векторів через їхні координати.

Нехай $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$ або $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$. Тоді

$$\vec{a}\,\vec{b} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k})(x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}) = x_1x_2\,\vec{i}\,\vec{i} + x_1y_2\,\vec{i}\,\vec{j} +$$

$$+ x_1z_2\,\vec{i}\,\vec{k} + y_1x_2\,\vec{j}\,\vec{i} + y_1y_2\,\vec{j}\,\vec{j} + y_1z_2\,\vec{j}\,\vec{k} + z_1x_2\,\vec{k}\,\vec{j} + z_1y_2\,\vec{k}\,\vec{j} + z_1z_2\,\vec{k}\,\vec{k}.$$

Оскільки $\vec{i}\,\vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1$, $\vec{j}\,\vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1$, $\vec{k}\,\vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$, $\vec{i}\,\vec{j} = \vec{j}\,\vec{i} = 1 \cdot 1\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\vec{i}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{i} = 1 \cdot 1\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\vec{j}\,\vec{k} = \vec{k}\,\vec{j} = 1 \cdot 1\cos\frac{\pi}{2} = 0$, то

$$\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{14}$$

Якщо скористатися (14), то отримаємо, що вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ ортогональні тоді й тільки тоді, коли

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0. \tag{15}$$

Приклад 5. При якому значенні m вектори $\overrightarrow{a} = (2;3;-1)$ і $\overrightarrow{b} = (1;-5;m)$ перпендикулярні?

◀ З умови (15) випливає, що $2\cdot 1 + 3(-5) + (-1)m = 0$, звідки одержуємо, що $m = -13$. Отже, вектори $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ перпендикулярні, коли $m = -13$. ▶

З формули (12) дістаємо, що

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}||\overrightarrow{b}|}.$$

Якщо скористатися (14), то звідси одержуємо, що

$$\cos\varphi = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}. \tag{16}$$

Приклад 6. Обчислити косинус кута між векторами $\overrightarrow{a} = (3;1;-1)$ і $\overrightarrow{b} = (2;2;1)$.

◀ Згідно з формулою (16)

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 2 + 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1}{\sqrt{3^2+1^2+(-1)^2}\sqrt{2^2+2^2+1^2}} = \frac{7}{3\sqrt{11}} \approx 0,703. \blacktriangleright$$

1.6. Лінійна залежність векторів

Вектори $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$, ..., $\overrightarrow{a}_k$, називаються **лінійно залежними**, якщо існують числа λ_1, λ_2, ..., λ_k, принаймні одне з яких не дорівнює нулю ($\lambda_1^2+\lambda_2^2+...+\lambda_k^2 \neq 0$), такі, що виконується рівність

$$\lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2 + ... + \lambda_k\overrightarrow{a}_k = \overrightarrow{0}. \tag{17}$$

Якщо ж рівність (17) виконується тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = 0$, то вектори $\overrightarrow{a}_1$, $\overrightarrow{a}_2$, ..., $\overrightarrow{a}_k$ називаються **лінійно незалежними**.

З рівності (17), припускаючи, наприклад, $\lambda_1 \neq 0$, дістанемо

$$\overrightarrow{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\overrightarrow{a}_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1}\overrightarrow{a}_3 - ... - \frac{\lambda_k}{\lambda_1}\overrightarrow{a}_k.$$

Покладаючи $-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \mu_2$, ..., $-\frac{\lambda_k}{\lambda_1} = \mu_k$, одержимо

$$\overrightarrow{a}_1 = \mu_2 \overrightarrow{a}_2 + \mu_3 \overrightarrow{a}_3 + ... + \mu_k \overrightarrow{a}_k. \tag{18}$$

Вектор $\mu_2 \overrightarrow{a}_2 + ... + \mu_k \overrightarrow{a}_k$ називається **лінійною комбінацією** векторів $\overrightarrow{a}_2$, ..., $\overrightarrow{a}_k$.

Отже, якщо декілька векторів лінійно залежні, то принаймні один із них завжди можна зобразити у вигляді лінійної комбінації решти.

Правильне й обернене твердження, а саме: якщо один із векторів є лінійною комбінацією інших, то всі ці вектори лінійно залежні. Справді, нехай, наприклад, вектор $\overrightarrow{a}_1$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3$, ..., $\overrightarrow{a}_k$. Тоді правильною є рівність (18), яку можна записати так: $-\overrightarrow{a}_1 + \mu_2 \overrightarrow{a}_2 + ... + \mu_k \overrightarrow{a}_k = \overrightarrow{0}$. Звідси, згідно з означенням лінійної залежності векторів, випливає, що вектори $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2$, ..., $\overrightarrow{a}_k$ лінійно залежні, оскільки виконується (17), де $\lambda_1 = -1$, і, отже, не дорівнює нулю.

Приклад 7. Скласти лінійну комбінацію векторів $\overrightarrow{a}_1 = (2; -1; 0)$, $\overrightarrow{a}_2 = (-3; 2; 1)$ з коефіцієнтами $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$.

◀ Маємо $2\overrightarrow{a}_1 = (2 \cdot 2; 2 \cdot (-1); 2 \cdot 0) = (4; -2; 0)$, $3\overrightarrow{a}_2 = (3 \cdot (-3); 3 \cdot 2; 3 \cdot 1) = (-9; 6; 3)$. Тоді $2\overrightarrow{a}_1 + 3\overrightarrow{a}_2 = (4; -2; 0) + (-9; 6; 3) = (4 - 9; -2 + 6; 0 + 3) = (-5; 4; 3)$. ▶

Приклад 8. Довести, що вектори $\overrightarrow{a}_1 = (2; 0)$, $\overrightarrow{a}_2 = (0; 3)$ є лінійно незалежними.

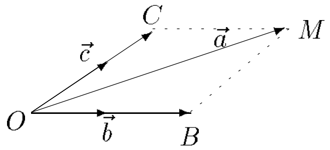
◀ Треба довести, що рівність $\lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 = \overrightarrow{0}$ рівносильна тому, що $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. Маємо, $\lambda_1 \overrightarrow{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{a}_2 = (2\lambda_1 + 0\lambda_2; 0\lambda_1 + 3\lambda_2) = (2\lambda_1; 3\lambda_2)$, а тоді з рівності $(2\lambda_1; 3\lambda_2) = \overrightarrow{0}$ випливає, що $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$. ▶

Приклад 8 свідчить про те, що на площині існує система з двох лінійно незалежних векторів.

Теорема. *Будь-які три вектори $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{c}$ на площині лінійно залежні.*

◀ Справді, нехай серед векторів є два колінеарні, наприклад, $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$. Тоді $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b}$ або $\overrightarrow{a} = \lambda \overrightarrow{b} + 0\overrightarrow{c}$, тобто вектор $\overrightarrow{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\overrightarrow{b}$ і $\overrightarrow{c}$.

Якщо серед заданих векторів немає жодної пари колінеарних, то, звівши всі три вектори до спільного початку, побудуємо паралелограм. Тоді $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, а, оскільки $\overrightarrow{OB} = \lambda_1 \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \lambda_2 \vec{c}$ то



$$\vec{a} = \lambda_1 \vec{b} + \lambda_2 \vec{c}.$$

Це означає, що вектор $\vec{a}$ є лінійною комбінацією векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$. ▶

Очевидно, що два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ на площині лінійно незалежні тоді й тільки тоді, коли вони неколінеарні.

Звідси і з попереднього випливає, що максимальне число лінійно незалежних векторів на площині дорівнює двом.

Базисом на площині називаються два довільних лінійно незалежних вектори.

Згідно з теоремою, будь-який вектор на площині можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів базису

$$\vec{c} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{b}. \tag{19}$$

Числа λ і μ називаються **координатами вектора** $\vec{c}$ відносно базису $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а саму формулу (19) називають **розкладом вектора** $\vec{a}$ по базису $\vec{a}$ і $\vec{b}$.

Приклад 9. Розкласти вектор $\vec{b} = (4; -15)$ по базису $\vec{a}_1 = (2; 0)$, $\vec{a}_2 = (0; 3)$.

◀ У прикладі 8 доведено, що вектори $\vec{a}_1$ і $\vec{a}_2$ лінійно незалежні, а отже, утворюють базис. Тоді $\vec{b} = \lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2$ або $(4; -15) = (2\lambda_1; 0) + (0; 3\lambda_2)$, що рівносильне рівності $(4; -15) = (2\lambda_1; 3\lambda_2)$, звідки випливає, що $4 = 2\lambda_1$, $-15 = 3\lambda_2$, і, отже, $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -5$.

Тому

$$\vec{b} = 2\vec{a}_1 - 5\vec{a}_2. \quad ▶$$

Аналогічно, як і у випадку площини, доводиться, що будь-які чотири вектори у просторі лінійно залежні, а максимальне число лінійно незалежних векторів у просторі дорівнює трьом.

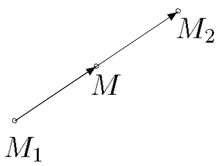
Отже, у просторі базис складається з трьох довільних лінійно незалежних векторів.

Зауваження. Доведено [6], що три вектори $\vec{a} = (x_1;\, y_1;\, z_1)$, $\vec{b} = (x_2;\, y_2;\, z_2)$ і $\vec{c} = (x_3;\, y_3;\, z_3)$ лінійно незалежні у просторі тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \neq 0\ .$$

1.7. Поділ відрізка в заданому відношенні

Нехай треба відрізок M_1M_2 поділити у відношенні $\lambda > 0$. Це означає, що треба знайти на заданому відрізку точку M, для якої $M_1M : MM_2 = \lambda$, або $M_1M = \lambda MM_2$.



Нехай задані точки M_1 і M_2 мають відповідно координати $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Знайдемо координати точки $M(x; y; z)$. Очевидно, що $\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}$ або $(x-x_1; y-y_1; z-z_1) = (\lambda(x_2-x); \lambda(y_2-y); \lambda(z_2-z))$.

Звідси випливає, що $x - x_1 = \lambda(x_2 - x)$, $y - y_1 = \lambda(y_2 - y)$, $z - z_1 = \lambda(z_2 - z)$, тобто

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \qquad (20)$$

Якщо точка M є серединою відрізка M_1M_2, то $M_1M = MM_2$ і, отже, $\lambda = 1$. У цьому випадку рівності (20) набудуть вигляду

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (21)$$

Приклад 10. Задано точки $M_1(1; 2)$, $M_2(3; 4)$. Поділити відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \frac{1}{2}$.

◀ Оскільки $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 3$, $y_2 = 4$, то

$$x = \frac{1 + \frac{1}{2}\cdot 3}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}, \quad y = \frac{2 + \frac{1}{2}\cdot 4}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{8}{3}.$$

Отже, точка $M(5/3; 8/3)$ ділить відрізок M_1M_2 у відношенні $\lambda = \dfrac{1}{2}$. ▶

2. Поняття n-вимірного евклідового простору

У попередніх пунктах було доведено, що вектор $\overrightarrow{a}$ у просторі визначається трійкою чисел – його координатами $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; x_3)$, а на площині – двома числами $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2)$. Тому у просторі вектор називають **тривимірним**, а на площині – **двовимірним**.

Поняття n-вимірного вектора вводиться аналогічно.

Упорядкована система n дійсних чисел x_1, x_2, ..., x_n називається **n-вимірним вектором** і позначається символом $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$. Числа x_1, x_2, ..., x_n називаються **координатами вектора**.

Вектор, у якого всі координати дорівнюють нулю, називається **нуль-вектором або нулем** $\overrightarrow{0} = (0; 0; ...; 0)$.

Вектор $(-x_1; -x_2; ...; -x_n)$ називається **протилежним** до вектора $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ і позначається символом $-\overrightarrow{a}$.

Два вектори $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ і $\overrightarrow{b} = (y_1; y_2; ...; y_n)$ називаються **рівними** $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$, якщо їхні відповідні координати однакові, тобто $x_i = y_i$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$.

Сумою (різницею) двох векторів $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ і $\overrightarrow{b} = (y_1; y_2; ...; y_n)$ називається вектор $\overrightarrow{a} \pm \overrightarrow{b} = (x_1 \pm y_1; x_2 \pm y_2; , ..., x_n \pm y_n)$.

Добутком вектора $\overrightarrow{a} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ на число λ називається вектор $\lambda\overrightarrow{a} = (\lambda x_1; \lambda x_2; ...; \lambda x_n)$.

Лінійні операції над n-вимірними векторами мають ті самі властивості, що й лінійні операції над векторами у тривимірному просторі та на площині.

Множина всіх n-вимірних векторів, для яких введено операції додавання й множення на число, називається **арифметичним векторним простором** і позначається символом $\mathbb{R}^n$.

Означення лінійної залежності і незалежності векторів, лінійної комбінації векторів на площині і в просторі переносяться без змін і на арифметичний простір $\mathbb{R}^n$.

Максимальне число лінійно незалежних векторів у $\mathbb{R}^n$ дорівнює n.

Базисом векторного простору $\mathbb{R}^n$ називають будь-яку сукупність n лінійно незалежних векторів цього простору. Базис із векторів $\overrightarrow{e}_1 = (1;0;...;0)$, $\overrightarrow{e}_2 = (0;1;...;0)$, ..., $\overrightarrow{e}_n = (0;0;...;1)$ називають **одиничним**.

Скалярним добутком векторів $\overrightarrow{a} = (x_1;x_2;...;x_n)$ і $\overrightarrow{b} = (y_1;y_2;...;y_n)$ називається число

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n. \tag{22}$$

Означений таким чином скалярний добуток має ті самі властивості, що й скалярний добуток на площині і в просторі.

Якщо в n-вимірному просторі введено скалярний добуток, то його називають **n-вимірним евклідовим простором** і позначають символом $\mathbb{R}^n$.

Очевидно, що

$$|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\overrightarrow{a}^2} = \sqrt{\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{a}} \quad \text{або} \quad |\overrightarrow{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}.$$

Для знаходження кута φ між векторами $\overrightarrow{a}$ і $\overrightarrow{b}$ використовують формулу

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b}}{|\overrightarrow{a}|\,|\overrightarrow{b}|}$$

або

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}.$$

Для векторів $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$, ..., $\overrightarrow{e}_n$

$$\overrightarrow{e}_i\overrightarrow{e}_j = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

Базис $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$,...,$\overrightarrow{e}_n$ називають також одиничним **ортонормованим базисом**.

Розглянемо n-вимірний евклідів простір $\mathbb{R}^n$ з ортонормованим базисом $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$,...,$\overrightarrow{e}_n$. Нехай задано вектор $\overrightarrow{a} = (x_1;x_2;...,x_n)$, де x_1, x_2, ..., x_n – координати вектора у заданому базисі. Як і у випадку тривимірного простору, поставимо у відповідність кожному вектору $\overrightarrow{a}$ простору $\mathbb{R}^n$ точку M, під якою розумітимемо набір чисел x_1, x_2, ..., x_n. Ці числа називають **прямокутними декартовими координатами точки** M і записують $M(x_1; x_2; ...; x_n)$. Точку $O(0; 0; ...; 0)$ називають **початком координат**. Сукупність початку координат O і векторів базису $\overrightarrow{e}_1$, $\overrightarrow{e}_2$,..., $\overrightarrow{e}_n$ називають **декартовою прямокутною системою координат** в n-вимірному просторі.

Якщо вектор $\overrightarrow{AB}$ визначається початком $A(x_1; x_2; ...; x_n)$ і кінцем $B(y_1; y_2; ...; y_n)$, то $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1; y_2 - x_2; ...; y_n - x_n)$. У випадку, коли початок вектора збігається з початком координат $O(0; 0; ...; 0)$, а кінець – із точкою $M(x_1; x_2; ...; x_n)$, то вектор $\overrightarrow{OM} = (x_1; x_2; ...; x_n)$ називають **радіус-вектором** точки M. Його координати збігаються з координатами точки M.

Відстанню між двома точками A і B назвемо модуль вектора $\overrightarrow{AB}$, а саме

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + ... + (y_n - x_n)^2}.$$

Приклад 1. З'ясувати, чи вектори $\overrightarrow{a}_1 = (1; 3; 1; 3)$, $\overrightarrow{a}_2 = (2; 1; 1; 2)$ і $\overrightarrow{a}_3 = (3; -1; 1; 1)$ лінійно залежні.

◀ Складемо векторну рівність $\lambda_1\overrightarrow{a}_1 + \lambda_2\overrightarrow{a}_2 + \lambda_3\overrightarrow{a}_3 = 0$ або $\lambda_1(1; 3; 1; 3) + \lambda_2(2; 1; 1; 2) + \lambda_3(3; -1; 1; 1) = 0$. Ця рівність рівносильна системі рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0, \\ 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему методом Жордана-Гаусса, зведемо її до вигляду

$$\begin{cases} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0, \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0. \end{cases}$$

звідки знаходимо сукупність її розв'язків $\lambda_1 = c$, $\lambda_2 = -2c$, $\lambda_3 = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Отже, для заданих векторів їхня лінійна комбінація дорівнює нулю при довільних ненульових λ_1, λ_2 і λ_3, а це означає, що ці вектори лінійно залежні. ▶

Приклад 2. Знайти скалярний добуток векторів $\overrightarrow{a} = (3; 1; -2; 3; 0)$ і $\overrightarrow{b} = (0; 2; -4; 3; -1)$.

◀ Згідно з (22) маємо

$$\overrightarrow{a}\,\overrightarrow{b} = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + (-2)(-4) + 3 \cdot 3 + 0(-1) = 2 + 8 + 9 = 19. \ ▶$$

Вправи

1. Задано точки $A(3; -1; 2)$ і $B(-1; 2; 1)$. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{BA}$.

2. Знайти лінійну комбінацію векторів $3\vec{a} + 4\vec{b} - \vec{c}$, де $\vec{a} = (4; 1; 3)$, $\vec{b} = (1; 2; -2)$, $\vec{c} = (10; 8; 1)$.

3. Задано $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 19$, $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Знайти $|\vec{a} - \vec{b}|$.

4. Для яких значень α і β вектори $\vec{a} = (-4; 6; \beta)$ і $\vec{b} = (\alpha; -3; 2)$ колінеарні?

5. Задано чотири точки $A(-1; 5; -10)$, $B(5; -7; 8)$, $C(2; 2; -7)$ і $D(5; -4; 2)$. Перевірити, чи вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ колінеарні; знайти який з них довший і у скільки разів; як вони напрямлені – в один чи в протилежні боки.

6. Знайти початок вектора $\vec{a} = (2; -3; -1)$, якщо його кінець збігається з точкою $(1; -1; 2)$.

7. На площині задано три вектори $\vec{a} = (3; -2)$, $\vec{b} = (-2; 1)$ і $\vec{c} = (7; -4)$. Знайти розклад кожного з цих векторів, беручи за базис два інші.

8. Для якого значення α вектори $\vec{a} = (\alpha; -3; 2)$ і $\vec{b} = (1; 2; -\alpha)$ перпендикулярні?

9. Вектор $\vec{x}$ колінеарний вектору $\vec{a} = (6; -8; -7,5)$ і утворює з віссю Oz гострий кут. Знаючи, що $|\vec{x}| = 50$, знайти його координати.

10. Задано точки $A(-1; 3; -7)$, $B(2; -1; 5)$ і $C(0; 1; -5)$. Обчислити $(2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB})(2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA})$.

11. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$, якщо $\vec{a} = (3; -5; 8)$ і $\vec{b} = (-1; 1; -4)$.

12. Знайти кут між векторами $\vec{a} = (2; 3; -1)$ і $\vec{b} = (4; 5; 2)$.

13. Знайти орт вектора $\vec{a} = (6; -2; -3)$.

14. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = 60^0$, причому $|\vec{a}| = 5$ і $|\vec{b}| = 8$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.

15. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знаючи, що $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$, обчислити кут α між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$.

16. Знайти сумарні затрати робочого часу T і вартість P виробленої продукції, якщо відомі вектори асортименту $\vec{q} = (20; 40; 60; 10)$, затрат робочого часу $\vec{t} = (5; 10; 7; 12)$ і цін $\vec{p} = (30; 15; 40; 20)$.

17. Для векторів $\vec{a} = (2; 4; -3; 0)$ і $\vec{b} = (-1; 2; 2; -5)$ знайти їхні довжини і кут між ними.

18. Знайти вектор $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$ і такий, що $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$.

19. У трикутнику з вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(-2; 2; 5)$ і $C(1; 2; 3)$ знайти косинус кута при вершині A.

20. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$. Знайти $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - 3\vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.

Відповіді

1. $\overrightarrow{AB} = (-4; 3; -1)$, $\overrightarrow{BA} = (4; -3; 1)$. **2.** $(6;\ 3;\ 0)$. **3.** $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$. **4.** $\alpha = 2$, $\beta = -4$. **5.** Вектор $\overrightarrow{AB}$ удвічі довший за вектор $\overrightarrow{CD}$, вони напрямлені в один бік. **6.** $(-1; 2; 3)$. **7.** $\vec{a} = 2\vec{b} + \vec{c}$, $\vec{b} = \dfrac{1}{2}\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{c}$, $\vec{c} = \vec{a} - 2\vec{b}$. **8.** $\alpha = -6$. **9.** $\vec{x} = (-24; 32; 30)$. **10.** -524. **11.** $|\vec{a} + \vec{b}| = 6$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 14$. **12.** $\cos\varphi = \sqrt{\dfrac{7}{10}}$, $\varphi = \arccos\sqrt{\dfrac{7}{10}}$. **13.** $\vec{a}^0 = \left(\dfrac{6}{7}; -\dfrac{2}{7}; -\dfrac{3}{7}\right)$. **14.** $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{129}$, $|\vec{a} - \vec{b}| = 7$. **15.** $\alpha = \arccos\dfrac{2}{7}$. **16.** $T = 1040$, $P = 3000$. **17.** $|\vec{a}| = \sqrt{29}$; $|\vec{b}| = \sqrt{34}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. **18.** $(4; 2; -2)$. **19.** $\cos\varphi = \dfrac{13}{\sqrt{290}}$. **20.** $-10\left(1 + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Аналітична геометрія

1. Лінії, поверхні та їхні рівняння

В аналітичній геометрії об'єкти (точки, лінії, поверхні) та їхнє розміщення на площині або в просторі визначаються аналітично, тобто за допомогою методів алгебри. Робиться це з використанням декартового методу координат. При цьому геометричні об'єкти за допомогою формул описуються рівняннями або нерівностями, які зв'язують між собою координати кожної точки заданого об'єкта.

Рівнянням, яке відповідає заданій множині точок на площині або в просторі, називають рівність, яку задовольняють координати будь-якої точки цієї множини і не задовольняють координати точок, що не належать цій множині.

Приклад 1. Знайти рівняння множини точок, рівновіддалених від точок $M_1(-4;2)$ і $M_2(-2;-6)$.

◀ Відомо, що відстань між точками $M_1(x_1;y_1)$ і $M_2(x_2;y_2)$ визначається за формулою

$$d(M_1,M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка шуканої лінії. Тоді згідно з умовою $MM_1=MM_2$, тобто

$$\sqrt{(x+4)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+2)^2+(y+6)^2}.$$

Якщо піднести обидві частини до квадрата, то після перетворень одержимо

$$x-4y-5=0.$$

Очевидно, що це рівняння прямої, яка є серединним перпендикуляром відрізка M_1M_2. ▶

Приклад 2. Вивести рівняння множини точок, що знаходяться на відстані R від точки $M_0(x_0;y_0;z_0)$, яка називається центром.

◀ Візьмемо довільну точку $M(x;y;z)$ заданої множини. Згідно з умовою

$$d(M,M_0)=R$$

або

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R.$$

Якщо піднести до квадрата, то одержимо рівняння

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2,$$

яке називають **рівнянням сфери** з центром у точці $M_0(x_0;y_0;z_0)$ і радіусом R. Навпаки, якщо координати точки $M(x;y;z)$ задовольняють одержане рівняння, то ця точка знаходиться на відстані R від точки M_0.

Якщо центр сфери збігається з початком координат, то рівняння сфери набуде вигляду $x^2+y^2+z^2=R^2$. ▶

Доводиться, що коли рівняння

$$F(x,y,z)=0$$

з відомою функцією F визначає деякий геометричний об'єкт, то цей об'єкт є поверхнею в просторі. Наприклад, рівняння $x^2+y^2+z^2=-1$ не визначає жодного реального геометричного образу, бо ліва частина не може бути від'ємною, а рівняння $x^2+y^2+z^2=0$ визначає точку $(0;0;0)$.

Аналогічно рівняння

$$F(x,y)=0,$$

якщо воно має зміст, визначає деяку лінію на площині.

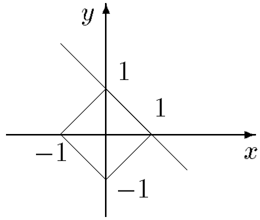
Для того щоб переконатися, чи лежить точка $M(x_0,y_0)$ на заданій лінії, треба перевірити, чи задовольняють її координати вказане рівняння.

У прикладі 1 для заданої відповідними властивостями множини точок знайдено її рівняння. Розглянемо тепер задачу, коли за відомим рівнянням треба знайти множину точок.

Приклад 3. Визначити, яку множину точок описує рівняння $|x|+|y|=1$.

◀ Оскільки $|a|=|-a|$, $a\in\mathbb{R}$, то разом із точкою $(x_0;y_0)$ до шуканої множини належать також точки $(-x_0;y_0)$, $(x_0;-y_0)$, $(-x_0;-y_0)$. Це означає, що осі Ox і Oy – осі симетрії шуканої множини. Тому знайдемо її частину, що лежить у першій чверті, а решту дістанемо, симетрично відобразивши цю частину відносно осей координат.

Для $x\geq 0$ і $y\geq 0$ маємо $|x|=x$, $|y|=y$, а тому рівняння набуде вигляду $x+y=1$. Нарисувавши частину цієї прямої, що лежить у першій чверті, і відобразивши її симетрично відносно осей координат, одержимо шукану множину – квадрат, що зображений на рисунку 1.



. ▶

Рис. 1

Розглянуті приклади показують, як метод координат дозволяє застосовувати алгебраїчні методи при розв'язуванні геометричних задач. Тепер розглянемо приклад, коли алгебраїчну задачу можна розв'язати геометрично за допомогою методу координат.

Приклад 4. При яких значеннях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ x + y = a \end{cases}$$

не має розв'язків, має єдиний розв'язок, має безліч розв'язків?

◀ Перше рівняння системи – це рівняння кола з центром у початку координат і радіусом 1. Друге рівняння є рівнянням прямої, яка відтинає на осях координат відрізки, довжиною a. Розв'язати систему – це означає знайти точки, координати яких задовольняють як перше, так і друге рівняння, тобто знайти точки перетину прямої $x + y = a$ і кола. З рис. 2 випливає, що при $a > \sqrt{2}$ і при $a < -\sqrt{2}$ пряма не перетинає кола, тобто система не має розв'язків; при $a = \pm\sqrt{2}$ маємо дотичні до кола, тобто система має єдиний (кратний) розв'язок; при $-\sqrt{2} < a < \sqrt{2}$ пряма перетинає коло, тобто система має два розв'язки. Інших випадків немає. ▶

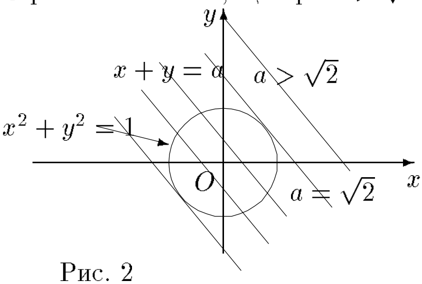
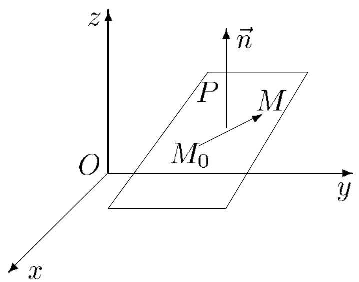


Рис. 2

2. Площина в просторі

2.1. Нормальний вектор площини. Різні типи рівнянь площини

Розглянемо в просторі $\mathbb{R}^3$ площину P. Її положення повністю визначається заданням вектора $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$, перпендикулярного до цієї площини, і деякої точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$, що лежить у цій площині. Вектор $\overrightarrow{n}$ називається **нормальним вектором** площини.



Знайдемо рівняння площини P, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і має заданий нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$. Для цього візьмемо довільну точку $M(x; y; z)$ площини, яка не збігається з точкою M_0, і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$. Оскільки $\overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{n}$, то

$$\overrightarrow{M_0M}\,\overrightarrow{n} = 0, \qquad (1)$$

що еквівалентно рівнянню

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (2)$$

Очевидно, що рівняння (2) не задовольняють координати жодної точки $N \notin P$, бо $\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{M_0N} \neq 0$.

Рівняння (2) називається **рівнянням площини, що проходить через задану точку.** Це рівняння є рівнянням першого степеня відносно змінних (координат) x, y і z.

Приклад 1. Скласти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2; -3; 1)$, перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{n} = (5; 1; -4)$.

◀ Маємо $A = 5$, $B = 1$, $C = -4$; $x_0 = 2$, $y_0 = -3$, $z_0 = 1$. Тоді згідно з (2), одержуємо рівняння площини

$$5(x - 2) + 1(y - (-3)) + (-4)(z - 1) = 0$$

або

$$5x + y - 4z - 3 = 0. \quad \blacktriangleright$$

Надаючи коефіцієнтам A, B, C рівняння (2) конкретні значення, можна одержати рівняння будь-якої площини, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$. Сукупність площин, що проходять через задану точку, називається **в'язкою площин**. Рівняння (2), у якому коефіцієнти A, B і C набувають довільних значень, називається **рівнянням в'язки** площин.

Приклад 2. Знайти рівняння площини, що проходить через три задані точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$, $M_3(x_3; y_3; z_3)$.

◀ Запишемо рівняння в'язки площин, що проходять через точку $M_1(x_1; y_1; z_1)$:

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{3}$$

У цьому рівнянні коефіцієнти A, B і C невідомі. Щоб їх знайти, скористаємося тим, що координати точок M_2 і M_3 повинні задовольняти рівняння (3):

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0, \tag{4}$$

$$A(x_3 - x_1) + B(y_3 - y_1) + C(z_3 - z_1) = 0. \tag{5}$$

Очевидно, що (3), (4), (5) – це однорідна система трьох рівнянь із трьома невідомими A, B, C. Така система, як відомо, має ненульові розв'язки тоді й тільки тоді, коли її визначник дорівнює нулю, тобто

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Рівняння (6) і є **рівнянням площини, що проходить через три задані точки**.

Зокрема, у випадку, коли $M_1(1; -1; 0)$, $M_2(2; 1; -3)$ і $M_3(-1; 0; 1)$, рівняння площини має вигляд

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z \\ 2 - 1 & 1 + 1 & -3 \\ -1 - 1 & 0 + 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - (y+1)\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$5(x-1)+5(y+1)+5z=0 \text{ або } x+y+z=0. \quad \blacktriangleright$$

2.2. Загальне рівняння площини

У попередньому пункті ми довели, що будь-якій площині відповідає рівняння першого степеня відносно змінних координат.

Розглянемо тепер загальне рівняння першого степеня з трьома змінними:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{7}$$

де принаймні один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю, бо в противному випадку ми мали б не рівняння, а тотожність $D = 0$. Зазначимо, що тотожність $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 = 0$ задовольняють всі точки простору і тому вона не визначає площину. Нехай, наприклад, $C \neq 0$. Запишемо (7) у вигляді

$$A(x-0) + B(y-0) + C(z + \frac{D}{C}) = 0. \tag{8}$$

Рівняння (8) рівносильне рівнянню (7). Порівнюючи (8) із (2), ми бачимо, що (8), а отже, і (7) є рівнянням площини, що має нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ і проходить через точку $M_0(0; 0; -\frac{D}{C})$. Отже, доведено, що будь-яке рівняння першого степеня (7) є рівнянням деякої площини в просторі.

Рівняння (7) називається **загальним рівнянням площини**.

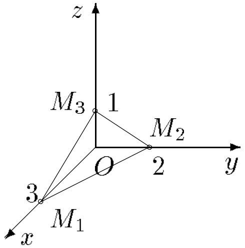
Якщо вільний член $D = 0$, то рівняння площини має вигляд $Ax + By + Cz = 0$, і його задовольняють координати початку координат $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Отже, площина проходить через початок координат.

Очевидно, що рівняння $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ відповідно є рівняннями координатних площин Oyz, Oxz, Oxy.

Приклад 3. Побудувати площину $2x + 3y + 6z - 6 = 0$.

$\blacktriangleleft$ Знайдемо точки перетину площини з осями координат. Для знаходження точки перетину з Ox, треба підставити в рівняння площини $y = 0$, $z = 0$: $2x + 3 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 6 = 0$, $x = 3$.

Аналогічно, покладаючи $x = 0$, $y = 0$, одержимо точку перетину з віссю Oz: $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 6z - 6 = 0$, звідки $z = 1$. Нарешті, при $x = 0$, $z = 0$ знаходимо $y = 2$. Отже, задана площина проходить через три точки $M_1(3;0;0)$, $M_2(0;2;0)$ і $M_3(0;0;1)$.



Якщо в рівнянні (7) $D \neq 0$, то, поділивши це рівняння на D, дістанемо

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{9}$$

де $a = -\frac{D}{A}$, $b = -\frac{D}{B}$, $c = -\frac{D}{C}$. Рівняння (9) називається **рівнянням площини у відрізках** на осях координат.

2.3. Взаємне розміщення площин у просторі

Розглянемо дві площини P_1 і P_2, що задані рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Очевидно, що площини P_1 і P_2:

1) збігаються, коли

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}; \tag{10}$$

2) є паралельними тоді й тільки тоді, коли їхні нормальні вектори $\overrightarrow{n}_1 = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ колінеарні і виконується умова

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}; \tag{11}$$

3) є перпендикулярними тоді й тільки тоді, коли їхні нормальні вектори $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ перпендикулярні, тобто $\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2} = 0$ або

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0. \tag{12}$$

Під кутом між двома площинами розуміємо кут між нормальними векторами $\overrightarrow{n_1} = (A_1; B_1; C_1)$ і $\overrightarrow{n_2} = (A_2; B_2; C_2)$ цих площин. Тому

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}$$

або

$$\cos\varphi = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{13}$$

Приклад 4. Записати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(-2; 1; 4)$ паралельно площині $3x + 2y - 7z + 8 = 0$.

◀ Рівняння в'язки площин, що проходять через точку $M_0(-2; 1; 4)$ має вигляд

$$A(x + 2) + B(y - 1) + C(z - 4) = 0. \tag{14}$$

З цієї сукупності виділимо ту, яка паралельна площині $3x + 2y - 7z + 8 = 0$. Очевидно, що це можливо, коли нормальний вектор $\overrightarrow{n_1} = (A; B; C)$ площини (14) колінеарний вектору $\overrightarrow{n} = (3; 2; -7)$. Зокрема, можна взяти $\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{n_2}$. Тому рівняння шуканої площини

$$3(x + 2) + 2(y - 1) + (-7)(z - 4) = 0$$

або

$$3x + 2y - 7z + 32 = 0. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 5. Знайти кут між площинами $x + 2y - 3z + 4 = 0$ і $2x + 3y + z + 8 = 0$.

◀ Згідно з формулою (13)

$$\cos\varphi = \frac{1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{5}{14}.$$

Отже, один із суміжних кутів дорівнює $\varphi = arccos\frac{5}{14}$, а другий $\pi - \varphi$. ▶

Приклад 6. Через точку $M_0(-2;3;6)$ провести площину, перпендикулярну до площин $2x+3y-2z-4=0$ (P_1) і $3x+5y+z=0$ (P_2).

◀ Нехай $\vec{n}=(A;B;C)$ нормальний вектор цієї площини. Тоді рівняння шуканої площини має вигляд

$$A(x+2)+B(y-3)+C(z-6)=0. \quad (P)$$

Для того щоб знайти A, B, C, скористаємося тим, що $P\perp P_1$ і $P\perp P_2$, тобто $\vec{n}\perp\vec{n_1}$, $\vec{n}\perp\vec{n_2}$, де $\vec{n_1}=(2;3;-2)$, $\vec{n_2}=(3;5;1)$. Отже, дістанемо систему

$$\begin{cases} 2A+3B-2C=0, \\ 3A+5B+C=0. \end{cases}$$

Звідки одержуємо, що

$$A=13C, \quad B=-8C, \quad C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

Тому рівняння шуканої площини

$$13C(x+2)-8C(y-3)+C(z-6)=0$$

або

$$13x-8y+z+44=0. \quad ▶$$

2.4. Точка перетину трьох площин

Нехай задано три площини $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ (P_1), $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ (P_2) і $A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$ (P_3). Щоб знайти точку перетину цих площин, треба, очевидно, розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0, \\ A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0. \end{cases}$$

Якщо визначник цієї системи

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}\neq 0,$$

то вона має єдиний розв'язок, тобто три площини перетинаються в одній точці.

Приклад 7. Знайти точку перетину площин $x + y - 2z + 3 = 0$, $2x - 2y + 3z - 7 = 0$, $x + 3y - z - 4 = 0$.

◀ Розв'язуючи систему

$$\begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0, \\ 2x - 2y + 3z - 7 = 0, \\ x + 3y - z - 4 = 0, \end{cases}$$

наприклад, за допомогою формул Крамера знайдемо координати точки перетину площин $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$. ▶

2.5. Відстань від точки до площини

Нехай задані точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і площина P, що має рівняння $Ax + By + Cz + D = 0$. Відстань d між ними, тобто довжина перпендикуляра, опущеного з точки M_1 на площину P, визначається за формулою

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{15}$$

Приклад 8. Знайти відстань між площинами $2x + y - z - 3 = 0$ (P_1) і $4x + 2y - 2z + 6 = 0$ (P_2).

◀ Візьмемо довільну точку площини P_1, наприклад, $M_1(0; 0; -3)$ і знайдемо відстань від неї до площини P_2, що дорівнює, відстані між цими паралельними площинами. Маємо

$$d = \frac{|0 + 0 - 2 \cdot (-3) + 6|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|6 + 6|}{\sqrt{24}} = \frac{|12|}{2\sqrt{6}} =$$

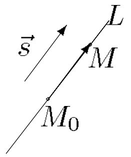
$$= \frac{12}{2\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}. \quad ▶$$

3. Пряма в просторі

3.1. Канонічні та параметричні рівняння прямої

Положення прямої у просторі повністю визначається заданням довільної фіксованої її точки M_0 і вектора $\overrightarrow{s}$, який паралельний цій прямій або лежить на ній. Вектор $\overrightarrow{s}$ називається **напрямним вектором** прямої.

Виведемо рівняння прямої L, що проходить через задану точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ і напрямним вектором якої є $\overrightarrow{s} = (m; n; p)$.



Нехай $M(x; y; z)$ – довільна точка прямої L, тоді вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0; z - z_0)$ колінеарний вектору $\overrightarrow{s} = (m; n; p)$, тобто

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \tag{16}$$

І навпаки, всі точки простору, що задовольняють рівняння (16), належать прямій L. Рівняння (16) називаються **канонічними рівняннями прямої в просторі**.

Числа m, n і p є проекціями напрямного вектора $\overrightarrow{s}$ на координатні осі.

Оскільки вектор $\overrightarrow{s}$ ненульовий, то всі три числа m, n і p не можуть одночасно дорівнювати нулю, але один або два з них можуть дорівнювати нулю. Наприклад, можливий такий запис:

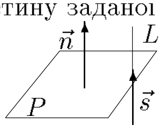
$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0} = \frac{z - z_0}{0}, \tag{16$'$}$$

який означає, що проекції вектора $\overrightarrow{s}$ на осі Oy і Oz дорівнюють нулю. Тому і вектор $\overrightarrow{s} = (m; 0; 0)$, і пряма, яка визначена рівняннями (16$'$), перпендикулярні осям Oy і Oz, тобто площині Oyz.

Зауважимо, що рівність (16$'$) рівносильна рівності: $y = y_0$, $z = z_0$, а x – довільне.

Приклад 1. Записати рівняння прямої L, що перпендикулярна площині $2x - 3y + 4z - 8 = 8$ (P_1) і проходить через точку перетину цієї площини з віссю Oz.

◀ Знайдемо спочатку точку перетину площини P_1 із віссю Oz : $x = 0$, $y = 0$, тоді $4z - 8 = 0$ або $z = 2$. Отже, точка $M_0(0; 0; 2)$ є точкою перетину заданої площини з віссю Oz.



Згідно з умовою задачі пряма L перпендикулярна площині L, а це означає, що вектор $\overrightarrow{s}$ колінеарний вектору $\overrightarrow{n}$, тому можна взяти $\overrightarrow{s} = \overrightarrow{n} = (2; -3; 4)$.

Якщо скористатися рівняннями (16), то одержимо рівняння шуканої прямої

$$\frac{x-0}{2} = \frac{y-0}{-3} = \frac{z-2}{4} \quad \text{або} \quad \frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{4}. \quad ▶$$

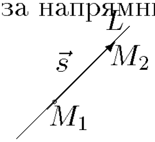
Якщо прирівняти співвідношення (16) до $t \in \mathbb{R}$, то дістанемо

$$x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad (17)$$

Рівняння (17) називаються **параметричними рівняннями прямої у просторі**.

3.2. Рівняння прямої, що проходить через дві точки

Нехай пряма L проходить через дві точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ і $M_2(x_2; y_2; z_2)$. Складемо канонічні рівняння цієї прямої. Для цього за напрямний вектор $\overrightarrow{s}$ прямої візьмемо



$$\overrightarrow{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1).$$

Отже, $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, $p = z_2 - z_1$, тому з рівнянь (16) одержимо рівняння шуканої прямої

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \qquad (18)$$

Рівняння (18) називаються **рівняннями прямої, що проходить через дві точки**.

Приклад 2. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(2; 3; -5)$ і $M_2(-4; 3; 2)$.

◀ Згідно з (18) маємо рівняння шуканої прямої

$$\frac{x-2}{-4-2} = \frac{y-3}{3-3} = \frac{z+5}{2+5} \quad \text{або} \quad \frac{x-2}{-6} = \frac{y-3}{0} = \frac{z+5}{7}.$$

Ця пряма перпендикулярна осі Oy. ▶

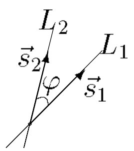
3.3. Кут між двома прямими. Умови паралельності й перпендикулярності прямих

Нехай у просторі задано дві прямі:

$$\frac{x-x_1}{m_1}=\frac{y-y_1}{n_1}=\frac{z-z_1}{p_1}, \quad (L_1)$$

$$\frac{x-x_2}{m_2}=\frac{y-y_2}{n_2}=\frac{z-z_2}{p_2}. \quad (L_2)$$

Дві прямі у просторі можуть збігатись, перетинатись, бути паралельними та мимобіжними. Кут між паралельними прямими дорівнює нулю, а між мимобіжними прямими – куту між прямими, які перетинаються і паралельні цим мимобіжним прямим. Цей кут не залежить від вибору прямих, що перетинаються.



Тому за кут між прямими L_1 і L_2 візьмемо кут φ між напрямними векторами $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$ заданих прямих. Оскільки $\overrightarrow{s_1}=(m_1;n_1;p_1)$, $\overrightarrow{s_2}=(m_2;n_2;p_2)$, то

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{s_1}\overrightarrow{s_2}}{|\overrightarrow{s_1}||\overrightarrow{s_2}|}$$

або

$$\cos\varphi=\frac{m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}. \tag{19}$$

Умови колінеарності й перпендикулярності прямих L_1 і L_2 рівносильні відповідно умовам колінеарності й перпендикулярності їхніх напрямних векторів $\overrightarrow{s_1}$ і $\overrightarrow{s_2}$ такі:

$$L_1\|L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1}\|\overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}; \tag{20}$$

$$L_1\perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s_1}\perp\overrightarrow{s_2} \Leftrightarrow m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2=0. \tag{21}$$

Отже, дві прямі L_1 і L_2 збігаються у просторі, тоді й тільки тоді, коли: 1) виконується умова (20); 2) знайдеться точка, координати якої задовольняють рівняння обох прямих.

Дві прямі L_1 і L_2 паралельні у просторі, тоді й тільки тоді, коли: 1) виконується умова (20); 2) знайдеться точка, координати якої задовольняють рівняння однієї з прямих і не задовольняють рівняння іншої.

Згідно з означенням перпендикулярними називають прямі, що перетинаються під прямим кутом. Інколи і мимобіжні прямі називають перпендикулярними, якщо кут між їхніми проекціями на спільну площину дорівнює 90^0. У цих випадках для напрямних векторів прямих виконується умова (21).

Якщо ввести позначення

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix},$$

то прямі L_1 і L_2:

1) мимобіжні $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$;

2) лежать в одній площині $\Leftrightarrow \Delta = 0$;

3) перпендикулярні $\Leftrightarrow \Delta = 0$ і $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$;

4) мимобіжні перпендикулярні $\Leftrightarrow \Delta \neq 0$ і $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Приклад 3. Знайти кут між прямими

$$\frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{3} = \frac{z-1}{-2} \ (L_1), \quad \frac{x+2}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{5} \ (L_2).$$

◀ Згідно з формулою (19) маємо

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + 3\cdot 2 + (-2)\cdot 5}{\sqrt{5^2+3^2+(-2)^2}\sqrt{3^2+2^2+5^2}} = \frac{11}{38} \quad \text{або} \quad \varphi = \arccos\frac{11}{38}. \quad ▶$$

3.4. Пряма як лінія перетину площин

Пряму в просторі можна визначити як лінію перетину двох непаралельних площин $A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$ (P_1) і $A_2 x +$

$B_2y + C_2z + D_2 = 0$ (P_2), тобто як множину точок, координати яких задовольняють систему двох лінійних рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{22}$$

Правильне й обернене твердження: система двох незалежних лінійних рівнянь (22) визначає пряму як лінію перетину непаралельних площин. Рівняння (22) називаються **загальними рівняннями прямої**.

Приклад 4. Скласти канонічні рівняння прямої, що задана загальними рівняннями

$$\begin{cases} 2x - 5y + z + 4 = 0, \\ x + 2y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

◀ Знайдемо спочатку параметричні рівняння прямої. Для цього розв'яжемо систему відносно y і z:

$$\begin{cases} -5y + z = -2x - 4, \\ 2y - z = -x - 2; \end{cases}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2x-4 & 1 \\ -x-2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = x + 2; z = \frac{\begin{vmatrix} -5 & -2x-4 \\ 2 & -x-2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = 3x + 6.$$

Отже, $x = t$, $y = t + 2$, $z = 3t + 6$ – параметричні рівняння прямої. Тоді канонічні рівняння прямої такі:

$$\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-6}{3}, \quad \vec{s} = (1; 1; 3). ▶$$

Приклад 5. Знайти координати точки M, що ділить навпіл відрізок прямої

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-3}{-1},$$

який міститься між площинами Oxz і Oxy.

◀ Знайдемо точку перетину заданої прямої з площиною Oxz. Для цього підставимо $y = 0$ у рівняння прямої

$$\frac{x-2}{3} = \frac{1}{5} = \frac{z-3}{-1} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \frac{x-2}{3} = \frac{1}{5}, \\ \frac{z-3}{-1} = \frac{1}{5}; \end{cases}$$

Звідки $x = \frac{13}{5}$, $z = \frac{14}{5}$. Отже, точкою перетину прямої з площиною Oxz є точка $M_1(\frac{13}{5}; 0; \frac{14}{5})$.

Аналогічно, підставивши $z = 0$ у рівняння прямої, дістанемо точку перетину прямої з площиною Oxy:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{5} = 3 \quad \text{або} \quad \begin{cases} x - 2 = 9, \\ y + 1 = 15; \end{cases}$$

звідки $x = 11$, $y = 14$, $z = 0$. Точкою перетину прямої з площиною Oxy є $M_2(11; 14; 0)$.

Знайдемо координати точки $M(x; y; z)$, що є серединою відрізка M_1M_2: $x = \dfrac{13/5 + 11}{2} = \dfrac{34}{5}$; $y = \dfrac{0 + 14}{2} = 7$; $z = \dfrac{14/5 + 0}{2} = \dfrac{7}{5}$.

Отже, $M(\frac{34}{5}; 7; \frac{7}{5})$. ▶

3.5. Відстань від точки до прямої у просторі

Нехай є пряма L: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ і точка $M_1(x_1; y_1; z_1)$ поза нею. Доводиться, що відстань від заданої точки до прямої знаходиться за формулою

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ n & p \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 - z_0 & x_1 - x_0 \\ p & m \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ m & n \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (23)$$

Приклад 6. Знайти відстань від точки $M_1(1; -1; -2)$ до прямої $\dfrac{x+3}{3} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-8}{-2}$.

◀ Скористаємося формулою (23):

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -1+2 & -2-8 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -2-8 & 1+3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1+3 & -1+2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} 1 & -10 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -10 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{17}} =$$

$$= \frac{\sqrt{18^2 + (-22)^2 + 5^2}}{\sqrt{17}} = \sqrt{\frac{833}{17}} = 7. \quad ▶$$

4. Пряма і площина в просторі

Розглянемо пряму L і площину P

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}, \quad (L) \tag{24}$$

$$Ax+By+Cz+D=0. \ \ (P) \tag{25}$$

Пряма і площина у просторі можуть бути паралельними, перетинатись, а також пряма може належати площині. Щоб з'ясувати взаємне розташування прямої L і площини P, треба розв'язати систему рівнянь (24), (25). Найпростіше це можна зробити так: запишемо рівняння прямої L у параметричній формі

$$x=x_0+mt, \quad y=y_0+nt, \quad z=z_0+pt \tag{26}$$

і підставимо (26) у рівняння (25):

$$A(x_0+mt)+B(y_0+nt)+C(z_0+pt)+D=0$$

або

$$t(Am+Bn+Cp)=-(Ax_0+By_0+Cz_0+D). \tag{27}$$

Отримали рівняння відносно параметра t.

4.1. Точка перетину прямої з площиною

Відомо, якщо пряма і площина перетинаються, то вони мають лише одну спільну точку. Отже, рівняння (27) повинно мати лише один розв'язок. А це можливо лише тоді, коли

$$Am+Bn+Cp\neq 0.$$

Тоді

$$t=\frac{-(Ax_0+By_0+Cz_0+D)}{Am+Bn+Cp}.$$

Підставивши значення t у (26), одержимо координати точки перетину прямої L і площини P.

Приклад 1. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-5}{2}$ із площиною $2x + 3y - 2z + 2 = 0$.

◀ Запишемо рівняння прямої в параметричній формі $x = 2t + 1$, $y = 3t - 1$, $z = 2t + 5$. Підставивши ці вирази в рівняння площини, дістанемо

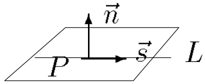
$$2(2t+1) + 3(3t-1) - 2(2t+5) + 2 = 0 \quad \text{або} \quad t = 1.$$

Тоді координати точки перетину прямої та площини $x = 2 \cdot 1 + 1 = 3$, $y = 3 \cdot 1 - 1 = 2$, $z = 2 \cdot 1 + 5 = 7$, тобто точкою перетину прямої і площини є $M(3; 2; 7)$ ▶.

Зазначимо, що коли рівняння (27) має безліч розв'язків, тобто виконуються умови:

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad \text{і} \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0,$$

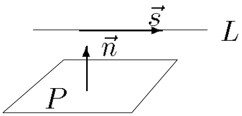
то пряма L лежить у площині P.



4.2. Умови паралельності й перпендикулярності прямої і площини

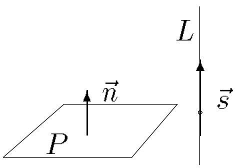
Зрозуміло, що пряма L і площина P паралельні тоді й тільки тоді, коли рівняння (27) не має жодного розв'язку, тобто коли виконуються умови:

$$Am + Bn + Cp = 0 \qquad \text{і} \qquad Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$



При цьому напрямний вектор $\overrightarrow{s} = (m; n; p)$ прямої і нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ перпендикулярні.

Пряма L і площина P перпендикулярні тоді й тільки тоді, коли вектори $\overrightarrow{s} = (m; n; p)$ і $\overrightarrow{n} = (A; B; C)$ колінеарні, тобто



$$\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}.$$

Приклад 2. Написати рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;-3;4)$ паралельно до прямих

$$\frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-3}{8}\quad (L_1)\quad \text{і}\quad \frac{x+1}{4}=\frac{y-1}{0}=\frac{z+5}{2}\quad (L_2).$$

◀ Нехай $\overrightarrow{n}=(A;B;C)$ – нормальний вектор шуканої площини P. Тоді рівняння площини матиме вигляд

$$A(x-2)+B(y+3)+C(z-4)=0. \tag{28}$$

Оскільки площина P паралельна прямим L_1 і L_2, то її нормальний вектор $\overrightarrow{n}=(A;B;C)$ перпендикулярний до напрямних векторів $\overrightarrow{s}_1=(1;2;8)$ і $\overrightarrow{s}_2=(4;0;2)$ прямих L_1 і L_2, тобто

$$\begin{cases} \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{s}_1 \\ \overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{s}_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{n}\ \overrightarrow{s}_1=0 \\ \overrightarrow{n}\ \overrightarrow{s}_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A+2B+8C=0, \\ 4A+2C=0, \end{cases}$$

звідки $C=-2A$, $B=\frac{15}{2}A$.

Підставивши знайдені коефіцієнти в (28), дістанемо рівняння шуканої площини

$$A(x-2)+\frac{15A}{2}(y+3)-2A(z-4)=0 \ \text{ або } 2x+15y-4z+57=0. \quad ▶$$

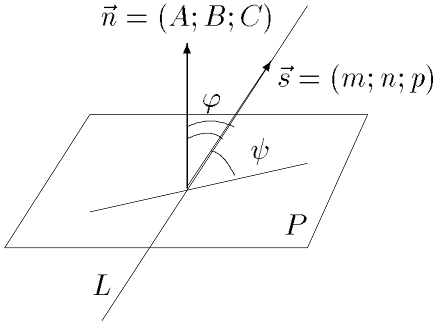
4.3. Кут між прямою і площиною

Розглянемо пряму L, яка визначається рівнянням (24) і площину P, рівняння якої (25). Знайдемо кут ψ між прямою L і площиною P. Очевидно, що $\varphi+\psi=\frac{\pi}{2}$, тому $\cos\varphi=\cos(\frac{\pi}{2}-\psi)=\sin\psi$. Оскільки

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n}\ \overrightarrow{s}}{|\overrightarrow{n}|\ |\overrightarrow{s}|}=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}, \tag{29}$$

то

$$\sin\psi=\frac{Am+Bn+Cp}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{m^2+n^2+p^2}}. \tag{30}$$



Приклад 3. Знайти кут між прямою і площиною, якщо пряма й площина задані рівняннями:

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + 2y + 2z - 2 = 0; \end{cases} \quad (L) \qquad 2x - 5y + z - 2 = 0 \quad (P).$$

◀ Запишемо рівняння прямої L у канонічній формі:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -1 \\ -2z+2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{4}{3}z + \frac{2}{3}; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & -2z+2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = -\frac{z}{3} + \frac{2}{3}.$$

Якщо взяти $z = -3t$, то дістанемо параметричні рівняння прямої:

$$x = 4t + \frac{2}{3}, \quad y = t + \frac{2}{3}, \quad z = -3t.$$

Тоді канонічні рівняння прямої такі:

$$\frac{x - 2/3}{4} = \frac{y - 2/3}{1} = \frac{z}{-3}.$$

Тому згідно з (30) маємо

$$\sin\psi = \frac{2 \cdot 4 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot (-3)}{\sqrt{2^2 + (-5)^2 + 1^2}\sqrt{4^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{0}{\sqrt{30} \cdot \sqrt{26}} = 0,$$

а, отже, $\psi = 0^0$. ▶

5. Пряма на площині

5.1. Нормальний вектор прямої. Рівняння прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора

З попереднього параграфа відомо, що пряму в просторі можна задати як перетин двох площин. Розглянемо частинний випадок, коли одна з площин $z = 0$, тобто пряма розглядається на площині Oxy:

$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ z = 0. \end{cases} \tag{31}$$

Якщо у перше рівняння підставити $z = 0$, то дістанемо систему

$$\begin{cases} Ax + By + D = 0, \\ z = 0. \end{cases} \tag{32}$$

що визначає пряму перетину координатної площини Oxy площиною $Ax + By + D = 0$, яка паралельна осі Oz.

Нормальний вектор $\overrightarrow{n} = (A; B; 0)$ площини $Ax + By + D = 0$ одночасно є нормальним вектором прямої, що задана системою (32).

Якщо наперед відомо, що пряма розглядається на площині Oxy, то друге рівняння системи (32) опускається.

Отже, пряма в $\mathbb{R}^2$ визначається одним рівнянням

$$Ax + By + C = 0,$$

яке називається **загальним рівнянням прямої на площині**. Ми замінили в позначеннях D на C для зручності.

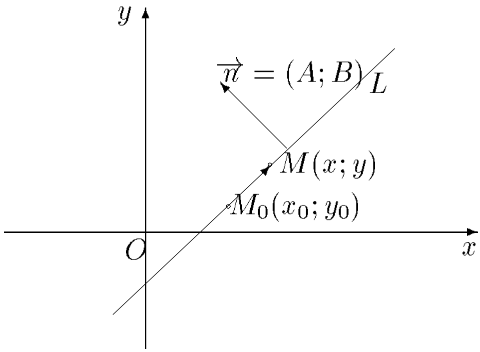
Вектор $\overrightarrow{n} = (A; B)$ називається **нормальним вектором** прямої на площині.

Можна вивести рівняння прямої на площині іншим способом.

Розглянемо пряму L на площині. Нехай $M_0(x_0; y_0)$ деяка її точка, а $\overrightarrow{n} = (A; B)$ вектор, перпендикулярний цій прямій, тобто **нормальний вектор** прямої. Точка M_0 і нормальний вектор $\overrightarrow{n}$ повністю визначають положення прямої L на площині.

Візьмемо довільну точку $M(x;y)$ прямої L. За умовою вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ перпендикулярний вектору $\overrightarrow{n} = (A;B)$, тобто $\overrightarrow{n}\overrightarrow{M_0M} = 0$ або

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{33}$$



Одержане рівняння задовольняють координати довільної точки $M(x;y)$ прямої L. Якщо деяка точка $M_1(x_1;y_1)$ не лежить на прямій L, то її координати не задовольняють рівняння (33), оскільки в цьому випадку $\overrightarrow{n}\overrightarrow{M_0M_1} \neq 0$. Отже, рівняння (33) є рівнянням прямої L. Воно називається **рівнянням прямої, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора**.

Приклад 1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(-1;3)$ перпендикулярно до вектора $\overrightarrow{n} = (2;-5)$.

◀ Скористаємося рівнянням (33), де $A = 2$, $B = -5$, $x_0 = -1$, $y_0 = 3$:

$$2(x+1) - 5(y-3) = 0 \quad \text{або} \quad 2x - 5y + 17 = 0. \quad ▶$$

5.2. Точка перетину прямих. Побудова прямої за її рівнянням

Нехай задано дві прямі $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ (L_1) та $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (L_2) і треба знайти точку їхнього перетину. Оскільки ця точка належить кожній з двох заданих прямих, то її координати повинні задовольняти як рівняння першої прямої, так і рівняння другої прямої.

Отже, для знаходження координат точки перетину двох прямих, треба розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Приклад 2. Знайти точку перетину прямих $2x + y - 1 = 0$ і $x + 2y + 1 = 0$.

◀ Координати шуканої точки перетину знайдемо, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = -1. \end{cases}$$

Маємо

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{3}{3} = 1, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{-3}{3} = -1,$$

тобто точка перетину M має координати $x = 1$ і $y = -1$. ▶

Опишемо, як побудувати пряму за її рівнянням. Для побудови прямої досить знати дві її точки. Щоб побудувати кожну з цих точок, задамо довільне значення однієї з її координат, а потім із рівняння знаходимо відповідне значення другої координати.

Якщо в загальному рівнянні прямої $Ax + By + C = 0$ обидва коефіцієнти при x і y не дорівнюють нулю, тобто $A \neq 0$ і $B \neq 0$, то для побудови цієї прямої найкраще знаходити точки її перетину з осями координат.

Приклад 3. Побудувати пряму $2x + y - 2 = 0$.

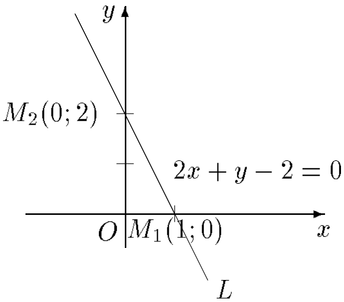
◀ Знайдемо точку $M_1(x_1; y_1)$ перетину заданої прямої з віссю Ox. Для цього розв'яжемо сумісно їхні рівняння:

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

звідки $x_1 = 1$, $y_1 = 0$. Отже, знайдено точку $M_1(1;0)$ перетину заданої прямої з віссю абсцис. Розв'язуючи аналогічно систему

$$\begin{cases} 2x + y - 2 = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

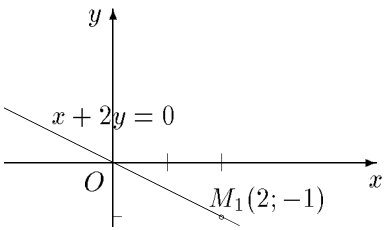
знаходимо точку $M_2(0;2)$ перетину прямої з віссю ординат. Через точки M_1 і M_2 проводимо пряму



. ▶

Приклад 4. Побудувати пряму $x + 2y = 0$.

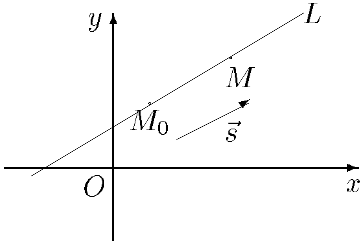
◀ Очевидно, що задана пряма проходить через точку $O(0;0)$. Для того щоб знайти другу точку, через яку проходить ця пряма, візьмемо, наприклад, $x = 2$, тоді $2 + 2y = 0$ або $y = -1$. Отже, другою точкою є $M_1(2;-1)$.



. ▶

5.3. Напрямний вектор прямої. Канонічне рівняння прямої

Розглянемо на площині Oxy довільну пряму L. Її положення повністю визначається заданням будь-якої її точки $M_0(x_0;y_0)$ і вектора $\vec{s} = (m; n)$, який паралельний заданій прямій або лежить на ній. Цей вектор називається **напрямним вектором прямої** L.



Нехай $M(x; y)$ – довільна точка прямої L. Оскільки вектори $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0)$ і $\vec{s} = (m; n)$ колінеарні, то їхні координати пропорційні, тобто

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \tag{34}$$

Одержане рівняння задовольняють координати довільної точки $M(x; y)$ прямої L і не задовольняють координати точок $M_1(x_1; y_1)$, що не лежать на цій прямій. Воно називається **канонічним рівнянням прямої** L.

Якщо пряма L, що проходить через точку $M_0(x_0; y_0)$, паралельна осі Oy, то її рівняння $x = x_0$. Напрямний вектор цієї прямої $\vec{s} = (0; n)$, а тому рівняння (34) має вигляд

$$\frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n}.$$

Аналогічно, канонічне рівняння прямої, що паралельна осі Ox, має вигляд $y = y_0$ або

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0}.$$

Нехай задано дві точки $M_1(x_1; y_1)$ і $M_2(x_2; y_2)$ на площині. Складемо канонічне рівняння прямої, що проходить через ці точки. За її напрямний вектор $\vec{s}$ візьмемо вектор $\overrightarrow{M_1M_2} =$

$(x_2 - x_1; y_2 - y_1)$. Використовуючи формулу (34) при $m = x_2 - x_1$, $n = y_2 - y_1$, одержимо

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \qquad (35)$$

Рівняння (35) називається **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

Приклад 5. Скласти рівняння прямої L, що проходить через початок координат, перпендикулярно до прямої L_1, яка проходить через точки $M_1(4; -3)$ і $M_2(-1; 0)$.

◀ Знайдемо спочатку рівняння прямої, що проходить через точки $M_1(4; -3)$ і $M_2(-1; 0)$:

$$\frac{x-4}{-5} = \frac{y+3}{3} \quad \text{або} \quad 3x + 5y + 3 = 0 \ \ (L_1).$$

Рівняння шуканої прямої L, яка проходить через точку $O(0; 0)$, має вигляд

$$Ax + By = 0.$$

Щоб знайти A і B, скористаємося тим, що $L \perp L_1$, а отже, нормальний вектор $\vec{n} = (A; B)$ прямої L колінеарний напрямному вектору $\vec{s} = (-5; 3)$ прямої L_1, тобто $\dfrac{A}{-5} = \dfrac{B}{3}$ або $A = -\dfrac{5}{3}B$.

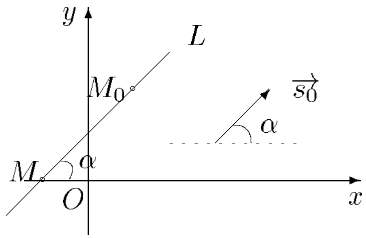
Тому рівняння прямої L таке:

$$-\frac{5}{3}Bx + By = 0 \quad \text{або} \quad 5x - 3y = 0. \quad ▶$$

5.4. Рівняння прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку

Нехай на площині Oxy задано пряму L, яка перетинає вісь Ox у точці M. Кутом α між віссю Ox і прямою L називається найменший кут, на який треба повернути навколо точки M проти годинникової стрілки вісь Ox до суміщення її з прямою. Якщо пряма збігається з віссю Ox або паралельна до неї, то кут α дорівнює нулю.

Розглянемо на площині Oxy пряму L, яка не паралельна осі Oy. Її положення повністю визначається кутом α між віссю Ox і прямою L і точкою $M_0(x_0; y_0)$, що належить цій прямій. За напрямний вектор заданої прямої візьмемо одиничний вектор $\overrightarrow{s}_0 = (\cos\alpha; \sin\alpha)$, який утворює з віссю Ox той самий кут, що й пряма L.



Тому в рівнянні (34) треба взяти $m = \cos\alpha$, $n = \sin\alpha$, а це означає, що воно запишеться у вигляді

$$\frac{x - x_0}{\cos\alpha} = \frac{y - y_0}{\sin\alpha}$$

або

$$y - y_0 = \operatorname{tg}\alpha \cdot (x - x_0).$$

Позначивши $\operatorname{tg}\alpha = k$, останнє рівняння запишемо у вигляді

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{36}$$

Число $k = \operatorname{tg}\alpha$ називається **кутовим коефіцієнтом прямої**, а рівняння (36) – **рівнянням прямої, що проходить через задану точку в заданому напрямку**.

Запишемо рівняння (36) у вигляді

$$y = kx + b, \tag{37}$$

де $b = y_0 - kx_0$. Рівняння (37) називається **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**, а ордината b – відрізком, що відтинає пряма на осі Oy.

Розглянемо деякі частинні випадки рівняння (37). Якщо $b = 0$, то рівняння (7) набуває вигляду

$$y = kx. \tag{38}$$

У цьому випадку пряма проходить через початок координат.

Інший частинний випадок рівняння (37) одержимо, коли $k = \operatorname{tg}\alpha = 0$, тобто $\alpha = 0$:

$$y = b. \tag{39}$$

Це рівняння прямої, паралельної осі Ox.

Якщо пряма L, не перпендикулярна осі Ox, задана загальним рівнянням

$$Ax + By + D = 0,$$

причому $B \neq 0$, то, розв'язуючи його відносно y, дістанемо рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B},$$

де $k = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{D}{B}$.

Приклад 6. Скласти рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(2; -1)$ й утворює з віссю Ox кут $\alpha = \dfrac{\pi}{6}$.

◀ Знайдемо кутовий коефіцієнт прямої $k = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Згідно з формулою (36) рівняння прямої має вигляд

$$y + 1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 2) \qquad \text{або} \qquad x - \sqrt{3}y - 2 - \sqrt{3} = 0. \quad ▶$$

Приклад 7. Задано загальне рівняння прямої $2x - 2y - 3 = 0$. Знайти величину відрізка, який відтинає ця пряма на осі Oy, а також кут між віссю Ox і заданою прямою.

◀ Розв'язавши рівняння відносно y, отримаємо рівняння з кутовим коефіцієнтом: $y = x - \frac{3}{2}$, де $k = \operatorname{tg}\alpha = 1$, $b = -\frac{3}{2}$. Отже, величина відрізка, що його відтинає пряма на осі ординат, дорівнює $-\dfrac{3}{2}$, а кут α між віссю Ox і цією прямою дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$. ▶

5.5. Кут між двома прямими. Умови паралельності й перпендикулярності двох прямих

Дві прямі на площині або перетинаються, або паралельні, або збігаються.

Нехай дві прямі L_1 і L_2 перетинаються в точці M. У залежності від того, якими рівняннями визначаються ці прямі, ми одержимо відповідні формули для знаходження кута між ними.

Якщо прямі L_1 і L_2 задані загальними рівняннями $A_1x+B_1y+C_1=0$ (L_1) і $A_2x+B_2y+C_2=0$ (L_2), то кут між ними – це кут між їхніми нормальними векторами $\vec{n}_1=(A_1;B_1)$ і $\vec{n}_2=(A_2;B_2)$, а тому

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}. \qquad (40)$$

Якщо прямі L_1 і L_2 задані своїми канонічними рівняннями $\dfrac{x-x_1}{m_1}=\dfrac{y-y_1}{n_1}$ (L_1), $\dfrac{x-x_2}{m_2}=\dfrac{y-y_2}{n_2}$ (L_2), то кут між ними – це кут між їхніми напрямними векторами $\vec{s}_1=(m_1;n_1)$ і $\vec{s}_2=(m_2;n_2)$, тобто

$$\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{m_1m_2+n_1n_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2}\sqrt{m_2^2+n_2^2}}. \qquad (41)$$

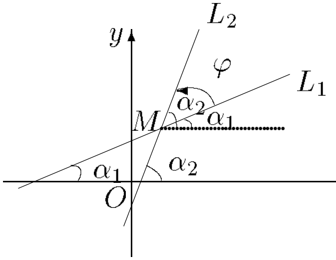
У випадку, коли рівняння прямих L_1 і L_2 мають вигляд $y=k_1x+b_1$ (L_1) і $y=k_2x+b_2$ (L_2) і кут $\varphi\neq\dfrac{\pi}{2}$, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\operatorname{tg}(\alpha_2-\alpha_1)=\frac{\operatorname{tg}\alpha_2-\operatorname{tg}\alpha_1}{1+\operatorname{tg}\alpha_1\operatorname{tg}\alpha_2}.$$

Оскільки $\operatorname{tg}\alpha_1=k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2=k_2$, то

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}. \qquad (42)$$

При цьому кут φ відраховується у напрямку від прямої L_1 до прямої L_2



.

Опишемо умови паралельності й перпендикулярності прямих L_1 і L_2. Якщо прямі L_1 і L_2 задані своїми загальними рівняннями, то:

$$L_1 || L_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}; \qquad (43)$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{n}_1 \perp \overrightarrow{n}_2 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \qquad (44)$$

Якщо ж виконується умова $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$, то прямі L_1 і L_2 збігаються.

У випадку, коли прямі L_1 і L_2 задані канонічними рівняннями, то

$$L_1 || L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{s}_1 || \overrightarrow{s}_2 \Leftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2}, \\ \\ \text{знайдеться точка, координати якої задовольняють} \\ \text{рівняння лише однієї з прямих.} \end{cases} \qquad (45)$$

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{s}_1 \perp \overrightarrow{s}_2 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \qquad (46)$$

Нехай L_1 і L_2 визначаються рівняннями з кутовим коефіцієнтом. У випадку папарельності прямих їхні кути нахилу α_1 і α_2 дорівнюють один одному. Тоді $\alpha_1 = \alpha_2 \Leftrightarrow \operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$.

Отже,

$$L_1 || L_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2 \text{ і } b_1 \neq b_2 \qquad (47)$$

У випадку перпендикулярності прямих одержуємо умови:

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \operatorname{ctg}\varphi = \frac{1 + k_1 k_2}{k_2 - k_1} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Leftrightarrow k_1 k_2 = -1. \qquad (48)$$

Приклад 8. Знайти кут між прямими $3x+y-6=0$ і $x+2y+1=0$.

◀ Запишемо задані рівняння у вигляді $y=-3x+6$ і $y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}$ та скористаємося формулою (42), де $k_1=-3$, $k_2=-\frac{1}{2}$:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2} = \frac{-1/2+3}{1+(-3)\cdot(-1/2)} = 1, \quad \text{тобто} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}. \quad ▶$$

Приклад 9. Знайти рівняння прямої L, що проходить через точку $M_0(3;-5)$ паралельно прямій L_1, яка проходить через точки $M_1(0;-2)$ і $M_2(-1;3)$.

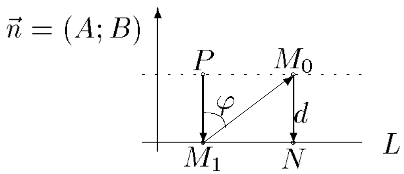
◀ Рівняння прямої L_1, яка проходить через точки M_1 і M_2, має вигляд:

$$\frac{x-0}{-1-0} = \frac{y+2}{3+2} \quad \text{або} \quad y=-5x-2, \quad \text{де} \quad k_1=-5.$$

Знайдемо тепер рівняння прямої L, скориставшись (36), де $k=k_1=-5$:

$$y+5=-5(x-3) \quad \text{або} \quad y=-5x-10. \quad ▶$$

5.6. Відстань від точки до прямої



Нехай треба знайти відстань d від точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямої L, що задана рівнянням $Ax+By+D=0$. Візьмемо на прямій L довільну точку $M_1(x_1;y_1)$ і розглянемо вектор $\overrightarrow{M_1M_0}=(x_0-x_1;y_0-y_1)$. Через точку M_0 проведемо пряму паралельно до прямої L. Тоді

$$d = |\overrightarrow{M_0N}| = |\overrightarrow{PM_1}| = \text{пр}_{\vec{n}}|\overrightarrow{M_1M_0}| = ||\overrightarrow{M_1M_0}|\cos\varphi|.$$

Оскільки $\cos\varphi = \dfrac{\overrightarrow{n}\,\overrightarrow{M_1M_0}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{M_1M_0}|}$, то

$$d = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Точка $M_1 \in L$, тому $Ax_1 + By_1 = -D$, а отже,

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (49)$$

Приклад 10. Знайти відстань від точки C, яка ділить відрізок із кінцями $A(-2; 1)$ і $B(3; 2)$ у відношенні 3:2, до прямої $2x - 5y + 1 = 0$.

◀ Знайдемо спочатку координати точки C:

$$x_C = \frac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}, \quad y_C = \frac{y_A + \lambda y_B}{1 + \lambda};$$

$$x_C = \frac{-2 + \frac{3}{2} \cdot 3}{1 + 3/2} = 1, \quad y_C = \frac{1 + \frac{3}{2} \cdot 2}{1 + 3/2} = \frac{8}{5}.$$

Тоді відстань d від точки $C(1; \dfrac{8}{5})$ до прямої $2x - 5y + 1 = 0$ знаходимо за формулою (49):

$$d = \frac{|2 \cdot 1 - 5 \cdot \frac{8}{5} + 1|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{5}{\sqrt{29}}. \quad ▶$$

Приклад 11. Трикутник задано вершинами $A(1; 2)$, $B(-2; 1)$ і $C(2; 3)$. Знайти довжину його висоти, опущеної з вершини A.

◀ Знайдемо рівняння прямої, що проходить через точки $B(-2; 1)$ і $C(2; 3)$:

$$\frac{x - 2}{-2 - 2} = \frac{y - 3}{1 - 3} \quad \text{або} \quad x - 2y + 4 = 0.$$

Шукану довжину висоти знайдемо за формулою (49), як відстань від точки $A(1; 2)$ до прямої BC:

$$d = \frac{|1 - 2 \cdot 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}. \quad ▶$$

6. Криві другого порядку

6.1. Рівняння кривої другого порядку

На площині, в деякій прямокутній системі координат Oxy розглянемо рівняння другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{50}$$

де A, B, C, D, E, F – задані дійсні числа і, крім того, принаймні одне з чисел A, B або C відмінне від нуля. Сукупність точок площини, координати яких задовольняють рівняння (50), називається **кривою другого порядку**. Може трапитися, що немає точок із дійсними координатами, які задовольняють рівняння (50). У цьому випадку кажуть, що рівняння (50) визначає уявну криву другого порядку.

Раніше ми вивели рівняння кола з центром у точці $M_0(x_0; y_0)$ і радіусом R:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \tag{51}$$

Якщо розкрити дужки в рівнянні (51), то дістанемо рівняння кола у такому вигляді:

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - R^2 = 0.$$

Це рівняння є рівнянням вигляду (50), де коефіцієнт $B = 0$, а $A = C$. Доведено, що рівняння (50), у якому $A = C$, а $B = 0$ визначає коло, якщо воно взагалі визначає деякий реальний об'єкт.

Приклад 1. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$ визначає коло і знайти координати його центра й радіус.

◀ Оскільки $A = C$ і $B = 0$, то рівняння визначає коло. Щоб знайти центр і радіус кола, запишемо рівняння у вигляді

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 + 4y + 4) = 16$$

або

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 4^2.$$

Отже, центр кола $M_0(1; -2)$, а радіус $R = 4$. ▶

Приклад 2. Довести, що рівняння $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 22 = 0$ не визначає ніякої дійсної лінії.

◀ Виділимо у рівнянні повні квадрати:

$$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 6y + 9) = -4$$

або

$$(x + 3)^2 + (y - 3)^2 = -4.$$

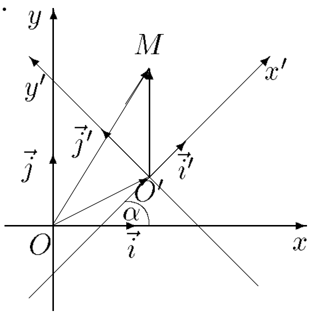
Оскільки ліва частина не може бути від'ємною, а права частина є від'ємним числом, то це рівняння не задовольняють координати жодної точки площини. Кажуть, що рівняння задає уявне коло. ▶

У наступних пунктах ми розглянемо інші криві другого порядку: еліпс, гіперболу й параболу.

Важливу роль при вивченні питання про те, яку лінію визначає рівняння (50), відіграє перетворення системи координат на площині.

6.2. Перетворення систем координат на площині

Нехай є дві декартові прямокутні системи координат Oxy і $O'x'y'$.



Розглянемо довільну точку M, яка в системі Oxy має координати $(x; y)$, а в системі $Ox'y'$ – $(x'; y')$. Вважатимемо, що точка O' має в системі координат Oxy координати $(a; b)$. Знайдемо зв'язок між старими координатами $(x; y)$ точки M і новими $(x'; y')$. Маємо

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}, \tag{52}$$

де $\overrightarrow{OM} = x\ \vec{i} + y\ \vec{j}$, $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{i}' + y'\vec{j}'$, $\overrightarrow{OO'} = a\ \vec{i} + b\ \vec{j}$.

Розкладемо вектори $\vec{i}'$ та $\vec{j}'$ за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$. Якщо позначити через α кут, який утворює вісь $O'x'$ із віссю Ox, то матимемо:

$$\vec{i}' = (\text{пр}_{Ox}\vec{i}')\vec{i} + (\text{пр}_{Oy}\vec{i}')\vec{j}, \quad \vec{j}' = (\text{пр}_{Ox}\vec{j}')\vec{i} + (\text{пр}_{Oy}\vec{j}')\vec{j}$$

або

$$\vec{i'} = \cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}, \quad \vec{j'} = -\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}. \qquad (53)$$

Тоді рівність (52) можна подати у вигляді

$$x\,\vec{i} + y\,\vec{j} = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} + x'(\cos\alpha\,\vec{i} + \sin\alpha\,\vec{j}) +$$

$$+y'(-\sin\alpha\,\vec{i} + \cos\alpha\,\vec{j}).$$

Звідси випливає, що

$$\begin{cases} x = a + x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = b + x' sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \qquad (54)$$

Формули (54) називаються **формулами перетворення** декартової системи координат на площині.

Якщо $\alpha = 0$, то маємо **паралельне перенесення** системи координат у точку $O'(a; b)$:

$$\begin{cases} x = a + x', \\ y = b + y'. \end{cases}$$

У випадку, коли $O = O'$, одержуємо формули повороту осей:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x' sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \qquad (55)$$

Приклад 3. Виразити старі координати точки x і y через її нові координати x', y' при повороті осей на кут $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

◀ Оскільки $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то згідно з формулами (55) маємо

$$x = x'\frac{1}{2} - y'\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad y = x'\frac{\sqrt{3}}{2} + y'\frac{1}{2}$$

або

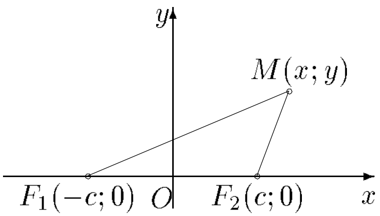
$$x = \frac{1}{2}(x' - \sqrt{3}y'), \quad y = \frac{1}{2}(\sqrt{3}x' + y'). \quad ▶$$

6.3. Еліпс

Еліпсом називається множина усіх точок площини, сума відстаней кожної з яких від двох заданих точок цієї площини, які називаються **фокусами**, є сталою величиною, більшою за відстань між фокусами.

Позначимо фокуси через F_1 і F_2, відстань між ними – через $2c$, а сталу величину, що дорівнює сумі відстаней кожної точки еліпса до фокусів, через $2a$. Згідно з умовою $2a > 2c$, тобто $a > c$.

Побудуємо декартову систему координат так, щоб фокуси F_1 і F_2 лежали на осі абсцис, а початок координат збігався із серединою відрізка F_1F_2. Тоді фокуси мають координати $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$.



Виведемо рівняння еліпса у вибраній системі координат. Візьмемо довільну точку $M(x; y)$ еліпса. Згідно з означенням еліпса

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

Скориставшись формулою для відстані між двома точками, одержимо $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$, $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, а тому

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \qquad (56)$$

Для спрощення цього рівняння запишемо його у вигляді

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Піднісши обидві частини рівняння до квадрата, дістанемо

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

або після очевидних перетворень

$$cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Після піднесення до квадрата і подальшого спрощення, одержимо

$$c^2x^2 - 2cxa^2 + a^4 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$

або

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2). \tag{57}$$

Оскільки $a > c$, то $a^2 - c^2$ є додатним числом. Уведемо позначення

$$a^2 - c^2 = b^2. \tag{58}$$

Тоді рівняння (57) запишеться у вигляді $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ або

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{59}$$

Згідно з означенням еліпса координати будь-якої його точки задовольняють рівняння (56). Оскільки рівняння (59) є наслідком рівняння (56), то його також задовольняють координати довільної точки еліпса.

Можна довести, що координати точок, які не лежать на еліпсі, не задовольняють рівняння (59). Отже, рівняння (59) є рівнянням еліпса. Воно називається **канонічним рівнянням еліпса**.

Вивчимо форму еліпса, користуючись його канонічним рівнянням. Зауважимо, що рівняння містить тільки парні степені x і y. Це означає, що будь-яка точка $M(x;y)$ належить еліпсу одночасно з точками $M_1(x;-y)$, $M_2(-x;y)$ і $M_3(-x;-y)$, які симетричні до точки M відносно осей Ox і Oy. Отже, еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії, які у вибраній системі координат збігаються з осями координат. Осі симетрії еліпса надалі називатимемо **осями** еліпса, а точку їхнього перетину – **центром** еліпса. Вісь, на якій розміщені фокуси (у цьому випадку вісь абсцис), називається **фокальною віссю**.

Визначимо форму еліпса у першій четверті. Для цього розв'яжемо рівняння (59) відносно y:

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Очевидно, що тут $0 \le x \le a$, оскільки вираз під знаком кореня повинен бути невід'ємним. При зростанні x від 0 до a величина y зменшується від b до 0. Частина еліпса, яка лежить у першій четверті, це дуга, обмежена точками $B_2(0;b)$ і $A_2(a;0)$, які лежать на осях координат. Скориставшись тепер симетрією еліпса, одержуємо, що еліпс має форму, яка зображена на рис. 1.

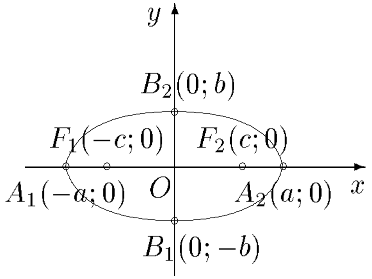


Рис. 1

Точки перетину еліпса з осями називаються **вершинами** еліпса. Із симетрії еліпса випливає, що крім вершин $A_2(a;0)$ і $B_2(0;b)$ еліпс має ще дві вершини $A_1(-a;0)$ і $B_1(0;-b)$. Відрізки A_1A_2 і B_1B_2, які з'єднують протилежні вершини еліпса, а також їхні довжини $2a$ і $2b$, називаються відповідно **великою** й **малою осями** еліпса.

Числа a і b називаються відповідно **великою** й **малою півосями** еліпса.

Відношення $\dfrac{c}{a}$ половини відстані між фокусами до більшої півосі еліпса називається **ексцентриситетом** еліпса і позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{60}$$

Оскільки $c < a$, то ексцентриситет еліпса менший одиниці, тобто $\varepsilon < 1$. Ексцентриситет характеризує форму еліпса. Справді, із формули (58) випливає, що $\left(\dfrac{b}{a}\right)^2 = 1 - \left(\dfrac{c}{a}\right)^2 = 1 - \varepsilon^2$. Звідси видно, що чим менший ексцентриситет еліпса, тим менше відрізняється його мала піввісь b від великої півосі a, тобто тим менше витягнутий еліпс уздовж фокальної осі.

У граничному випадку при $b = a$ одержимо коло радіуса a:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{або} \qquad x^2 + y^2 = a^2.$$

При цьому $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{a^2 - a^2} = 0$, і фокуси еліпса збігаються з центром кола. Ексцентриситет кола дорівнює нулю: $\varepsilon = \frac{0}{a} = 0$.

Приклад 4. Знайти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика піввісь $a = 5$, а ексцентриситет $\varepsilon = 0,6$.

◀ Згідно з умовою $\varepsilon = \dfrac{c}{a} = 0,6$, а тому половина відстані між фокусами $c = a \cdot 0,6 = 5 \cdot 0,6 = 3$. Тоді $b^2 = a^2 - c^2 = 25 - 9 - 16$.

Отже, шукане канонічне рівняння еліпса має вигляд

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1. \quad ▶$$

Приклад 5. Скласти канонічне рівняння еліпса, якщо його велика піввісь $a = 4$ і він проходить через точку $M_0(2; -3)$.

◀ Канонічне рівняння еліпса при $a = 4$ має вигляд

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Оскільки цей еліпс проходить через точку M_0, то її координати задовольняють рівняння еліпса, тобто

$$\frac{2^2}{16} + \frac{(-3)^2}{b^2} = 1.$$

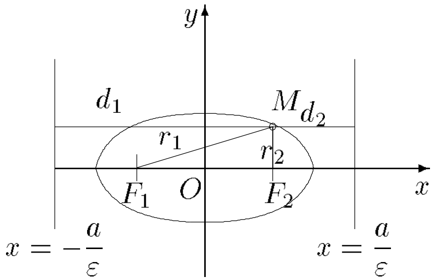
Звідси одержуємо,що $b^2 = 12$, а тому шукане рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1. \quad ▶$$

Директрисами еліпса називаються дві прямі, які перпендикулярні до фокальної осі еліпса і симетрично розміщені відносно центра кривої на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$ від нього.

Оскільки для еліпса $\varepsilon < 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} > a$, а це означає, що директриси розміщені зовні еліпса. Рівняння директрис еліпса

$$x = \pm\frac{a}{\varepsilon}.$$



Доведено [6], що відношення довжини фокального радіуса довільної точки еліпса до відстані цієї точки від відповідної директриси є сталою величиною, що дорівнює ексцентриситету, тобто $\frac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ і $\frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$.

Фокальні радіуси точки $M(x; y)$ еліпса можна обчислювати за формулами

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x.$$

6.4. Гіпербола

Гіперболою називається множина точок площини, абсолютна величина різниці відстаней кожної з яких від двох заданих точок цієї площини, які називаються **фокусами**, є сталою величиною, що не дорівнює нулю і менша за відстань між фокусами.

Позначимо відстань між фокусами F_1 і F_2 через $2c$, а сталу величину, що дорівнює модулю різниці відстаней від кожної точки гіперболи до фокусів, через $2a$, причому $0 < 2a < 2c$ або $0 < a < c$.

Як і у випадку еліпса виберемо систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокуси F_1 і F_2, а за початок координат візьмемо середину відрізка F_1F_2. У заданій системі координат фокуси мають координати $F_1(-c; 0)$ і $F_2(c; 0)$.

Виведемо рівняння гіперболи у вибраній системі координат. Згідно з означенням гіперболи для довільної точки $M(x; y)$ гіперболи маємо

$$|MF_1 - MF_2| = 2a$$

або
$$MF_1 - MF_2 = \pm 2a.$$

Оскільки $MF_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ і $MF_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, то
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \tag{61}$$

Після спрощень, подібних до тих, які проведено при виведенні рівняння еліпса, дістанемо рівняння
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2), \tag{62}$$
яке є наслідком рівняння (61).

Очевидно, що це рівняння збігається з рівнянням (57) для еліпса. Однак у рівнянні (62) різниця $a^2 - c^2 < 0$, оскільки $a < c$. Тому покладемо
$$c^2 - a^2 = b^2. \tag{63}$$

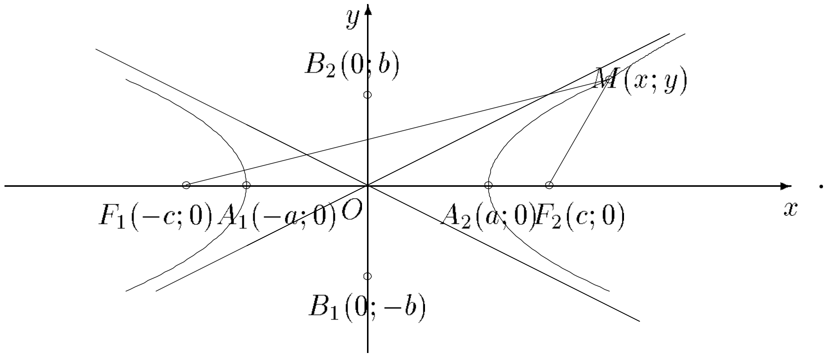
Тоді рівняння (62) набуде вигляду
$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$
або
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{64}$$

Воно називається **канонічним рівнянням гіперболи**. Рівняння (64), яке є наслідком рівняння (61), задовольняють координати будь-якої точки гіперболи і не задовольняють координати точки, що не лежить на гіперболі.

Вивчимо форму гіперболи, користуючись її канонічним рівнянням. Це рівняння містить лише парні степені, а тому гіпербола має дві осі симетрії, які збігаються з координатними осями. Надалі осі симетрії гіперболи називатимемо **осями** гіперболи, а точку їхнього перетину – **центром** гіперболи. Вісь гіперболи, на якій розміщені фокуси, називатимемо **фокальною віссю**. Дослідимо формулу гіперболи у першій четверті, де
$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{65}$$

Тут $x \geq a$, оскільки під знаком кореня повинен стояти невід'ємний вираз. При зростанні x від a до $+\infty$ величина y зростає від 0 до $+\infty$. Отже, частина гіперболи, яка лежить у першій четверті, – це дуга AM.

Оскільки гіпербола розміщена симетрично відносно координатних осей, то крива має вигляд, який зображений на рисунку. Точки перетину гіперболи з фокальною віссю називаються її **вершинами**. Покладаючи $y = 0$ у рівняння гіперболи, знайдемо абсциси її вершин $x = \pm a$. Отже, гіпербола має дві вершини $A_1(-a; 0)$ і $A_2(a; 0)$. З віссю ординат гіпербола не перетинається. Справді, поклавши в рівнянні гіперболи $x = 0$, дістанемо для y уявні вирази: $y = \pm\sqrt{-b^2}$. Тому фокальна вісь гіперболи називається **дійсною віссю**, а вісь симетрії, перпендикулярна до фокальної осі, – **уявною віссю** гіперболи.



Дійсною віссю називають також відрізок довжиною $2a$, який з'єднує вершини $A_1(-a; 0)$ і $A_2(a; 0)$ гіперболи. Відрізок довжиною $2b$, який з'єднує точки $B_1(0; -b)$ і $B_2(0; b)$, називається **уявною віссю** гіперболи. Числа a і b називаються відповідно **дійсною** й **уявною півосями** гіперболи. Можна довести, що при досить великих за абсолютною величиною x точки графіка гіперболи як завгодно близькі до прямих

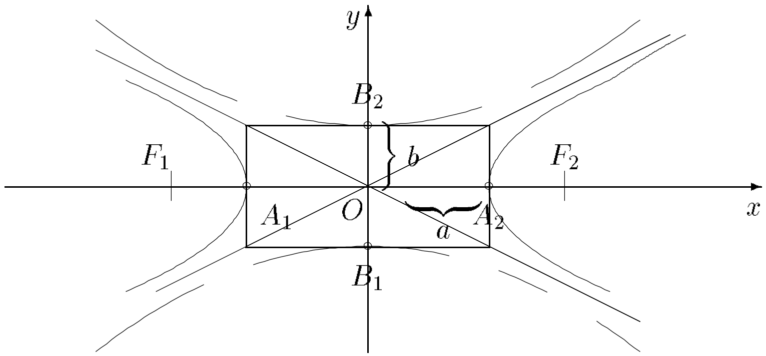
$$y = \pm\frac{b}{a}x, \tag{66}$$

які називаються **асимптотами** гіперболи.

Для побудови графіка гіперболи зручно спочатку побудувати прямокутник з центром у початку координат і зі сторонами, паралельними координатним осям Ox і Oy, довжини яких дорівнюють відповідно $2a$ і $2b$. Цей прямокутник називають **основним**. Кожна з його діагоналей, необмежено продовжена в обидва боки, є асимптотою. Далі очевидно, як будувати графік гіперболи.

Відношення половини відстані між фокусами до дійсної півосі гіперболи називається **ексцентриситетом** гіперболи й позначається літерою ε:

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \tag{67}$$



Оскільки для гіперболи $c > a$, то ексцентриситет гіперболи $\varepsilon > 1$. Ексцентриситет характеризує форму гіперболи. Справді, $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{c}{a}\right) - 1 = \varepsilon^2 - 1$. Звідси видно, що чим менший ексцентриситет гіперболи, тим менше відношення $\frac{b}{a}$ її півосей. Відношення $\frac{b}{a}$ визначає форму основного прямокутника гіперболи, а отже, і форму самої гіперболи. Чим менший ексцентриситет гіперболи, тим витягнутіший у напрямку фокальної осі її основний прямокутник.

Рівняння

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

також визначає гіперболу. Вона зображена на рисунку пунктирними лініями; її вершини лежать на осі Oy. Ця гіпербола називається **спряженою** до гіперболи (64). Обидві гіперболи мають одні й ті самі асимптоти.

Гіпербола називається рівнобічною, якщо її дійсна піввісь дорівнює уявній півосі, тобто $a = b$. Канонічне рівняння рівнобічної гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad \text{або} \qquad x^2 - y^2 = a^2.$$

Асимптотами рівнобічної гіперболи є прямі

$$y = x \quad \text{і} \quad y = -x,$$

тобто бісектриси першого й третього координатних кутів.

Ексцентриситет рівнобічної гіперболи

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + a^2}}{a} = \frac{\sqrt{2} \cdot a}{a} = \sqrt{2}.$$

Приклад 6. Знайти канонічне рівняння гіперболи, якщо відстань між її фокусами дорівнює 26, а ексцентриситет – $\dfrac{13}{12}$.

◀ Згідно з умовою $2c = 26$, тобто $c = 13$, а $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{13}{12}$, звідки випливає, що $a = 12$. Тоді $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$. Отже, рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1. \quad ▶$$

Приклад 7. Гіпербола, осі якої збігаються з осями координат, проходить через точки $M_1(-3; \frac{\sqrt{2}}{2})$ і $M_2(4; -2)$. Знайти її канонічне рівняння.

◀ Шукане канонічне рівняння гіперболи має вигляд

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де a і b невідомі. Оскільки гіпербола проходить через точки M_1 і M_2, то їхні координати задовольняють рівняння гіперболи, тобто

$$\begin{cases} \dfrac{(-3)^2}{a^2} - \dfrac{(\sqrt{2}/2)^2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{4^2}{a^2} - \dfrac{(-2)^2}{b^2} = 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \dfrac{9}{a^2} - \dfrac{1/2}{b^2} = 1, \\ \dfrac{16}{a^2} - \dfrac{4}{b^2} = 1. \end{cases}$$

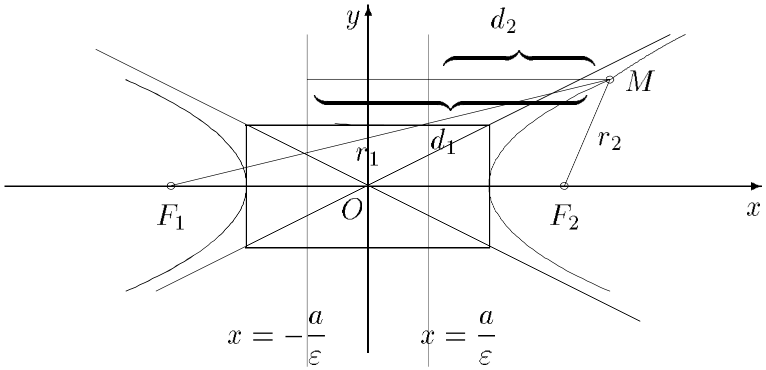
Звідси знаходимо $a^2 = 8$, $b^2 = 4$, а тому рівняння гіперболи

$$\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1. \quad \blacktriangleright$$

Директрисами гіперболи називаються дві прямі, які перпендикулярні до фокальної осі гіперболи і симетрично розміщені відносно її центра на відстані $\dfrac{a}{\varepsilon}$.

Оскільки для гіперболи $\varepsilon > 1$, то $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$. Звідси випливає, що директриси гіперболи розміщені всередині смуги, де немає жодної точки гіперболи.

Як і у випадку еліпса відношення довжини фокального радіуса кожної точки гіперболи до відстані цієї точки від відповідної директриси є сталою величиною, яка дорівнює ексцентриситету гіперболи, тобто $\dfrac{r_1}{d_1} = \varepsilon$ і $\dfrac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ [6].



Приклад 8. Ексцентриситет гіперболи $\varepsilon = 3$, відстань від точки M гіперболи до директриси дорівнює 4. Знайти відстань від точки M до фокуса, однобічного з цією директрисою.

◀ Оскільки $\dfrac{r}{d} = \varepsilon$, то $\dfrac{r}{4} = 3$ або $r = 12$. ▶

Фокальні радіуси точки $M(x;y)$ гіперболи обчислюються за формулами:

1)якщо точка M лежить на правій вітці гіперболи, то

$$r_1 = \varepsilon x + a, \quad r_2 = \varepsilon x - a;$$

2) якщо ж точка M лежить на лівій вітці гіперболи, то

$$r_1 = -\varepsilon x - a, \quad r_2 = -\varepsilon x + a.$$

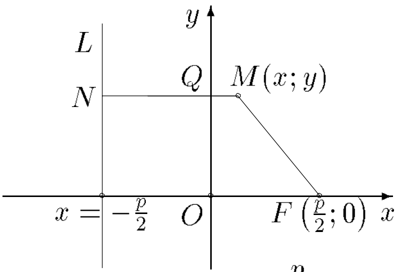
6.5. Парабола

Параболою називається множина точок площини, для кожної з яких відстань до деякої фіксованої точки F, яка називається **фокусом**, дорівнює відстані до деякої фіксованої прямої L, яка називається **директрисою**.

Для виведення рівняння параболи введемо на площині прямокутну систему координат так, щоб вісь абсцис проходила через фокус параболи перпендикулярно до директриси і була напрямлена від директриси до фокуса. За початок координат візьмемо середину відрізка між фокусом і директрисою.

Нехай $M(x;y)$ – довільна точка параболи. Позначимо через r відстань від точки M до фокуса F, тобто $r = FM$, через d – відстань від точки M до директриси, а через p – відстань від фокуса до директриси.

Величину p називають **параметром** параболи. Точка M лежатиме на параболі тоді й тільки тоді, коли $r = d$, тобто $MF = MN$.



З рисунка випливає, що $MN = NQ + QM = \frac{p}{2} + x$, а $MF = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + (y - 0)^2}$. Отже,

$$\frac{p}{2} + x = \sqrt{(x - \frac{p}{2})^2 + y^2}.$$

Піднісши обидві частини до квадрата, дістанемо

$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

або

$$y^2 = 2px. \tag{68}$$

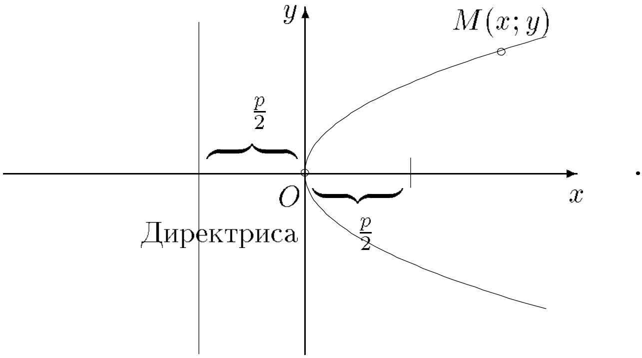
Рівняння (68) називається **канонічним рівнянням параболи**. Його задовольняють координати довільної точки параболи. Можна довести, що координати точок, які не лежать на параболі, не задовольняють рівняння (68).

Дослідимо форму параболи за її рівнянням (68). Оскільки це рівняння містить y тільки в парному степені, то парабола симетрична відносно осі Ox. Отже, досить розглянути тільки її частину, що лежить у верхній півплощині. Для цієї частини $y > 0$, тому, розв'язавши рівняння (68) відносно y, одержимо

$$y = \sqrt{2px}. \tag{69}$$

З рівності (69) випливає: 1) $x \geq 0$, тобто лівіше від осі Oy немає жодної точки параболи; 2) якщо $x = 0$, то $y = 0$, а це означає, що початок координат належить параболі; 3) при необмеженому зростанні x величина y також необмежено зростає.

Отже, змінна точка $M(x; y)$, переміщуючись параболою зі зростанням x, виходить із початку координат і рухається вправо і вверх, причому при $x \to +\infty$ точка нескінченно віддаляється як від осі Oy, так і від осі Ox. Відобразивши симетрично розглянуту частину параболи відносно осі Ox, дістанемо всю параболу, що задана рівнянням (68)



Вісь симетрії параболи називається **фокальною віссю**. Точка O перетину параболи з віссю симетрії називається її **вершиною**.

Парабола, рівняння якої $y^2 = -2px$, $p > 0$, розміщена зліва від осі ординат (рис. 1, а). Вершина цієї параболи збігається з початком координат, а віссю симетрії є вісь Ox.

Рівняння $x^2 = 2py$, $p > 0$, є рівнянням параболи, вершина якої збігається з початком координат, а віссю симетрії є вісь Oy (рис. 1, б). Ця парабола лежить вище осі абсцис. Рівняння $x^2 = -2py$, $p > 0$, визначає параболу, що лежить нижче від осі Ox, з вершиною в початку координат (рис 1, в).

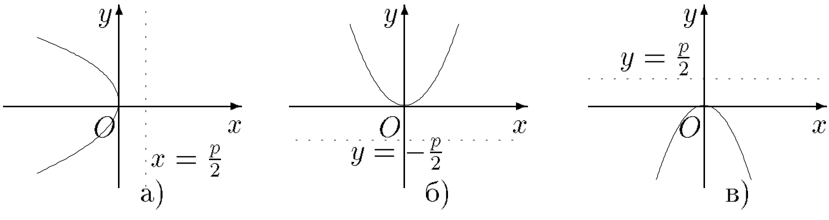


Рис. 1

Приклад 9. Для параболи $y^2 = 6x$ скласти рівняння директриси і знайти фокус.

◀ Порівнюючи рівняння $y^2 = 6x$ із канонічним рівнянням параболи (69), одержимо, що $2p = 6$, або $p = 3$. Оскільки директриса параболи має рівняння $x = -\frac{p}{2}$, а фокус – координати $(\frac{p}{2}; 0)$, то отримаємо, що рівняння директриси нашої параболи $x = -\frac{3}{2}$, а фокус $F(\frac{3}{2}; 0)$. ▶

Зауваження. Парабола має лише один фокус, а довжина її осі необмежена. Отже, означення ексцентриситету, аналогічне тому, що ми мали у випадку гіперболи та еліпса, не має змісту. Проте ексцентриситет ще означають як відношення відстані довільної точки кривої другого порядку від фокуса до відстані цієї точки від відповідної директриси. Тому згідно з означенням параболи її ексцентриситет $\varepsilon = 1$. Ця домовленість оправдана тим, що для еліпса та гіперболи $\varepsilon = \frac{r}{d}$, а у випадку параболи $r = d$ і тому $\varepsilon = 1$.

6.6. Зведення загального рівняння лінії другого порядку до найпростішого вигляду

Вигляд рівняння кривої залежить від вибору системи координат. У різних системах координат для однієї й тієї самої кривої можна дістати рівняння різної складності. Тому виникає задача спрощення рівняння заданої кривої за допомогою перетворення систем координат. Таке спрощення дозволяє одержати простіше рівняння і за його виглядом визначити тип кривої, тобто вияснити чи є крива еліпсом, гіперболою і т.д.

Розглянемо загальне рівняння лінії другого порядку

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \tag{70}$$

де коефіцієнти A, B, C, D, E і F – довільні числа, і, крім того, числа A, B і C одночасно не дорівнюють нулю , тобто $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Теорема. *Якщо $AC - B^2 \neq 0$, то за допомогою паралельного перенесення і наступного повороту осей координат рівняння (70) зводиться до вигляду*

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{F} = 0, \tag{71}$$

де $\overline{A}$, $\overline{C}$, $\overline{F}$ – деякі числа; $(\overline{x};\overline{y})$ – координати точки в новій системі координат.

◀ Зробимо паралельне перенесення системи координат за формулами

$$x = x' + x_0, \quad y = y' + y_0. \tag{72}$$

Підставивши (72) у (70), одержимо в нових координатах рівняння

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + 2D'x' + 2E'y' + F' = 0, \tag{73}$$

де

$$D' = Ax_0 + By_0 + D; \quad E' = Bx_0 + Cy_0 + E;$$
$$F' = Ax_0^2 + 2Bx_0y_0 + Cy_0^2 + 2Dx_0 + 2Ey_0 + F.$$

У рівнянні (73) коефіцієнти D' і E' перетворюються в нуль, якщо підібрати координати точки $(x_0; y_0)$ так, щоб виконувались рівності

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0. \end{cases} \tag{74}$$

Оскільки $AC - B^2 \neq 0$, то система (74) має єдиний розв'язок відносно x_0, y_0.

Якщо $(x_0; y_0)$ – розв'язок системи (74), то рівняння (73) запишеться у вигляді

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F' = 0. \tag{75}$$

Нехай тепер прямокутна система координат $O'\overline{x}\,\overline{y}$ одержана за допомогою повороту на кут α системи $O'x'y'$. Тоді координати x', y' зв'язані з координатами $\overline{x}$, $\overline{y}$ формулами

$$x' = \overline{x}\cos\alpha - \overline{y}\sin\alpha, \quad y' = \overline{x}\sin\alpha + \overline{y}\cos\alpha. \tag{76}$$

Підставивши (76) у (75), одержимо рівняння

$$\overline{A}\overline{x}^2 + 2\overline{B}\overline{x}\,\overline{y} + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{F} = 0, \tag{77}$$

де

$$\overline{A} = A\cos^2\alpha + 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\sin^2\alpha;$$

$$\overline{B} = -A\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + C\sin\alpha\cos\alpha;$$

$$\overline{C} = A\sin^2\alpha - 2B\cos\alpha\sin\alpha + C\cos^2\alpha, \quad \overline{F} = F'.$$

Виберемо α так, щоб коефіцієнт $\overline{B}$ у рівнянні (77) перетворився в нуль. Ця вимога приводить до знаходження α з рівняння

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha.$$

Якщо $A = C$, то $\cos 2\alpha = 0$, і можна взяти $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Якщо ж $A \neq C$, то беремо $\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2B}{A-C}$ і рівняння (77) набуває вигляду

$$\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{F} = 0,$$

що й доводить теорему. ▶

Класифікація ліній другого порядку. Коефіцієнти A, B і C при старших членах рівняння (70) при паралельному перенесенні осей координат, як випливає з доведення теореми, не змінюються, але вони змінюються при повороті осей координат. У той же час вираз $AC - B^2$ залишається незмінним як при перенесенні, так і при повороті осей, тобто не залежить від перетворення координат. Цей факт є очевидним при паралельному перенесенні осей координат. Доведемо його для випадку повороту осей. Маємо

$$\overline{AC} - \overline{B}^2 = (A\cos^2\alpha + 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha)\times$$

$$\times(A\sin^2\alpha - 2B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha) - ((C - A)\sin\alpha\cos\alpha +$$

$$+B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha))^2$$

або

$$\overline{AC} - \overline{B}^2 = AC(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) - B^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = AC - B^2,$$

що й треба було довести.

Величина $AC - B^2$ називається **інваріантом** загального рівняння лінії другого порядку.

У залежності від знаку величини $AC - B^2$ лінії другого порядку діляться на такі три типи: 1) еліптичний, якщо $AC - B^2 > 0$;

2) гіперболічний, якщо $AC - B^2 < 0$; 3) параболічний, якщо $AC - B^2 = 0$.

Розглянемо лінії різних типів.

1) **Еліптичний** тип. Оскільки $AC - B^2 > 0$, то згідно з теоремою загальне рівняння лінії другого порядку можна звести до вигляду

$$Ax^2 + Cy^2 + F = 0. \tag{78}$$

Можливі такі випадки: а) $A > 0, C > 0$ (випадок $A < 0, C < 0$ зводиться до випадку $A > 0, C > 0$ множенням рівняння на (-1)) і $F < 0$. Перенесемо F у праву частину рівняння (78) і поділимо на нього. Тоді рівняння набуде вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a^2 = -\frac{F}{A}$, $b^2 = -\frac{F}{C}$. Порівнюючи одержане рівняння з рівнянням еліпса, робимо висновок, що воно є канонічним рівнянням еліпса.

б) $A > 0$, $C > 0$ і $F > 0$. Тоді аналогічно як і вище рівняння (78) запишеться у вигляді

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

Це рівняння не задовольняють координати жодної точки площини. Воно називається **рівнянням уявного еліпса**.

в) $A > 0$, $C > 0$, $F = 0$. Рівняння (78) має вигляд

$$a^2x^2 + c^2y^2 = 0,$$

де $a^2 = A$, $c^2 = C$. Його задовольняють координати лише однієї точки. Таке рівняння називається **рівнянням пари уявних прямих, що перетинаються.**

2) **Гіперболічний** тип. Оскільки $AC - B^2 < 0$, то згідно з теоремою загальне рівняння лінії другого порядку зводиться до вигляду (78).

Можливі такі випадки:

а) $A > 0$, $C < 0$ (випадок $A < 0$, $C > 0$ зводиться до цього випадку множенням рівняння (78) на (-1)) і $F \neq 0$. Нехай, наприклад, $F < 0$. Перенесемо F у праву частину рівняння і поділимо на нього. Рівняння (78) набуває вигляду

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

де $a^2 = -\frac{F}{A}$, $b^2 = -\frac{F}{C}$. Одержане рівняння є канонічним рівнянням гіперболи.

б) $A > 0$, $C < 0$ і $F = 0$. Рівняння (78) набуває вигляду

$$a^2x^2 - c^2y^2 = 0 \quad \text{або} \quad (ax - cy)(ax + cy) = 0,$$

де $a^2 = A$, $c^2 = -C$. Останнє рівняння задовольняють тільки координати точок площини, що розміщені на прямих $ax - cy = 0$ і $ax + cy = 0$, які перетинаються у початку координат, і, отже, маємо пару **прямих, що перетинаються**.

3) **Параболічний** тип. Якщо $AC - B^2 = 0$, то, як і в теоремі, поворотом осей координат на кут α загальне рівняння лінії другого порядку зводиться до вигляду

$$Ax^2 + Cy^2 + 2Ey + 2Dx + F = 0. \tag{79}$$

Тут $AC = 0$ і, отже, один із коефіцієнтів A і C дорівнює нулю.

Нехай $A = 0$, $C \neq 0$. Подамо рівняння (79) у вигляді

$$C(y^2 + \frac{2E}{C}y + (\frac{E}{C})^2) + 2Dx + F - \frac{E^2}{C} = 0$$

або

$$C(y + \frac{E}{C})^2 + 2Dx + \overline{F} = 0,$$

де $\overline{F} = F - \frac{E^2}{C}$. Зробимо паралельне перенесення системи координат:

$$x' = x, \quad y' = y + \frac{E}{C}.$$

Тоді рівняння набуде вигляду

$$Cy'^2 + 2Dx' + \overline{F} = 0. \tag{80}$$

Можливі такі випадки:

а) $D \neq 0$. Запишемо рівняння (80) у вигляді

$$Cy'^2 + 2D(x + \frac{\overline{F}}{2D}) = 0.$$

Перейдемо до нових координат за формулами $\overline{x} = x' + \frac{\overline{F}}{2D}$, $\overline{y} = y'$. Тоді дістанемо рівняння $C\overline{y}^2 + 2D\overline{x} = 0$, або

$$\overline{y}^2 = 2p\overline{x}, \tag{81}$$

де $p = -\dfrac{D}{C}$. Рівняння (81) є канонічним рівнянням параболи.

б) $D = 0$. Рівняння (80) у цьому випадку має вигляд

$$CY'^2 + \overline{F} = 0. \tag{82}$$

Якщо C і $\overline{F}$ мають різні знаки, то, покладаючи $\left|\frac{\overline{F}}{C}\right| = a^2$, рівняння запишемо так:

$$(y' - a)(y' + a) = 0.$$

Воно визначає **пару паралельних прямих**.

Якщо C і $\overline{F}$ мають однакові знаки, то рівняння (82) набуває вигляду

$$y'^2 + a^2 = 0.$$

Це рівняння не задовольняють координати жодної точки площини. Воно називається рівнянням **пари уявних паралельних прямих**.

Якщо ж $\overline{F} = 0$, то рівняння (82) буде таким

$$y'^2 = 0.$$

Воно визначає вісь $O'x'$. Його можна розглядати також як граничний випадок при $\overline{F} \to 0$, тобто як рівняння **пари прямих, що збігаються**.

Приклад 10. Визначити, які лінію визначає рівняння

$$y = x^2 - 4x + 3.$$

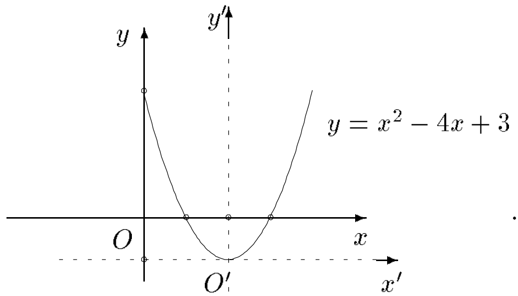
◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$y - 1 = x^2 - 4x + 4 \qquad \text{або} \qquad y - 1 = (x-2)^2.$$

Зробимо паралельне перенесення системи координат:

$$y' = y + 1, \quad x' = x - 2.$$

Тоді рівняння лінії запишеться у вигляді $y' = x'^2$, тобто є параболою



. ▶

Приклад 11. Яку лінію визначає рівняння

$$8x^2 - 16x + 3y^2 + 12y - 4 = 0?$$

◀ Утворимо повні квадрати

$$8(x^2 - 2x + 1) + 3(y^2 + 4y + 4) = 24$$

або

$$8(x-1)^2 + 3(y+2)^2 = 24,$$

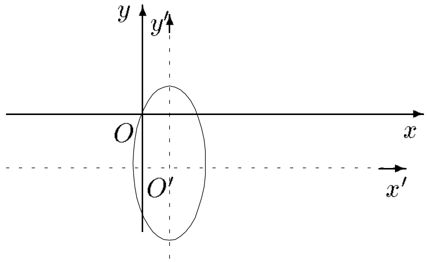
$$\frac{(x-1)^2}{3} + \frac{(y+2)^2}{8} = 1.$$

Якщо зробити паралельне перенесення системи координат

$$x' = x - 1, \quad y' = y + 2,$$

то дістанемо рівняння $\dfrac{x'^2}{3} + \dfrac{y'^2}{8} = 1.$

Це еліпс із півосями $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{8}$. Оскільки $a < b$, то фокуси еліпса лежать на осі $O'y'$



Приклад 12. Яку лінію визначає рівняння

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 - 24x - 82y + 15 = 0?$$

◀ У рівнянні присутній доданок з добутком xy, тому зробимо спочатку поворот осей координат. Для цього знайдемо кут повороту α з рівняння

$$2B\cos 2\alpha = (A - C)\sin 2\alpha,$$

$$24\cos 2\alpha = -7\sin 2\alpha, \quad \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}.$$

Оскільки $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^{\alpha}}$, то $\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = -\dfrac{24}{7}$ або $12\operatorname{tg}^2\alpha - 7\operatorname{tg}\alpha - 12 = 0$. Звідси одержуємо, що $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$. Досить взяти одне з цих значень, наприклад, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Скориставшись формулами

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}, \quad \sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha\cos\alpha,$$

одержимо, що $\cos\alpha = \pm\dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \pm\dfrac{4}{5}$. Розглянемо випадок, коли $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, і зробимо поворот осей системи координат за формулами:

$$x = \frac{1}{5}(3\overline{x} - 4\overline{y}), \quad y = \frac{1}{5}(4\overline{x} + 3\overline{y}).$$

Підставивши ці вирази в рівняння лінії, отримаємо

$$4\overline{x}^2 - \overline{y}^2 - 16\overline{x} - 6\overline{y} + 3 = 0.$$

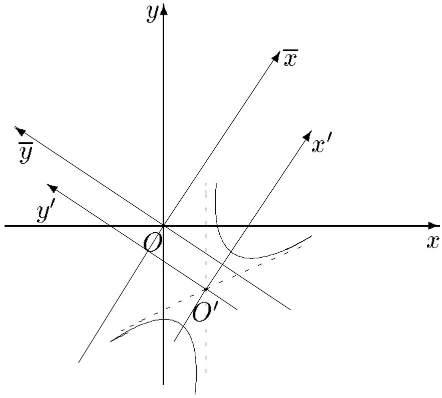
Тепер утворимо повні квадрати $4(\overline{x}^2 - 4\overline{x} + 4) - (\overline{y}^2 + 6\overline{y} + 9) = 4$, або

$$\frac{(\overline{x}-2)^2}{1} - \frac{(\overline{y}+3)^2}{4} = 1.$$

Зробимо паралельне перенесення системи координат $x' = \overline{x} - 2$, $y' = \overline{y} + 3$. У новій системі координат рівняння матиме вигляд

$$\frac{x'^2}{1} - \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Це гіпербола з півосями $a = 1$, $b = 2$.



Приклад 13. Визначити, яку лінію визначає рівняння $xy = a$.

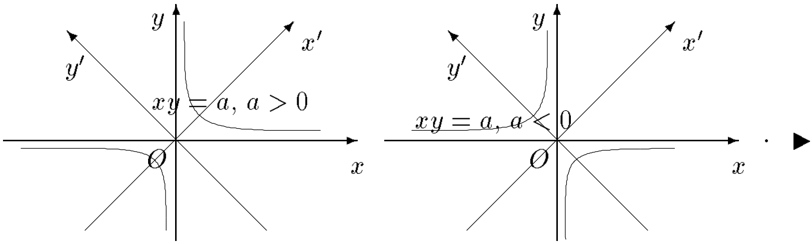
◀ Тут $A = C$, а тому систему координат треба повернути на кут $\alpha = \frac{\pi}{4}$, тобто зробити перетворення

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \quad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y').$$

Підставивши ці вирази в рівняння кривої, одержимо рівняння

$$x'^2 - y'^2 = 2a.$$

Це рівнобічна гіпербола. Для неї осями симетрії є нові осі координат, а асимптотами – старі осі координат.



Вправи

1. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(3;-2;-7)$ паралельно площині $2x-3z+5=0$.

2. Знайти рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2;-1;4)$ і $M_2(3;2;-1)$ перпендикулярно до площини $x+y+z-3=0$.

3. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M_0(2;-3;-4)$ і відтинає на координатних осях відрізки однакової довжини.

4. Знайти кут між площинами: 1) $2x-3y+3z-1=0$ і $-2x+3y-3z+5=0$; 2) $3x-4y-z-1=0$ і $2x+3y-6z-2=0$.

5. Обчислити відстань d від точки $P(-1;1;-2)$ до площини, яка проходить через точки $M_1(1;-1;1)$, $M_2(-2;1;3)$ і $M_3(4;-5;-2)$.

6. Знайти відстань між площинами $2x+2y-z-15=0$ і $4x+4y-2z+11=0$.

7. Знайти точку перетину площин $x+2y-z-2=0$, $3x-y-z-3=0$ і $x+2y+z-4=0$.

8. Скласти параметричні рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки $M_1(1;1;-2)$, $M_2(3;-1;0)$.

9. Знайти канонічні та параметричні рівняння прямої $2x+3y-z-4=0$, $3x-5y+2z+1=0$.

10. Знайти гострий кут між прямими
$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z}{\sqrt{2}}; \quad \frac{x+2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z+5}{\sqrt{2}}.$$

11. Для якого значення m пряма $\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y-2}{m}=\dfrac{z+3}{-2}$ паралельна площині $x-3y+6z+7=0$?

12. Знайти точку перетину прямої $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ з площиною $2x+3y+z-1=0$.

13. Знайти кут між прямою $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{-2}$ і площиною $x+2y+2z+3=0$.

14. Знайти відстань від точки $M_1(1;-1;-2)$ до прямої $\frac{x+3}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-8}{-2}$.

15. Задано пряму $2x+3y+4=0$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(2;1)$: 1) паралельно до заданої прямої; 2) перпендикулярно до заданої прямої.

16. Відомі середини сторін трикутника: $M_1(2;1)$, $M_2(5;3)$ і $M_3(3;-4)$. Знайти рівняння його сторін.

17. Знайти кут між прямими: 1) $5x-y+7=0$ та $2x-3y+1=0$; 2) $y=2x-3$ та $y=\frac{1}{2}x+1$.

18. Знайти відстань від точки $M_0(2;-1)$ до прямої, яка відтинає на осях координат відрізки величиною $a=8$ і $b=6$.

19. Знайти рівняння прямої, яка відображає зміну врожайності 1 га орної землі протягом сімнадцяти років, якщо в перший рік з 1 га було зібрано 21 ц зернових, а в останній – 37 ц.

20. При яких α і β прямі $\alpha x-2y-1=0$ та $6x-4y-\beta=0$: 1) мають спільну точку; 2) паралельні; 3) збігаються?

21. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M_0(-2;3)$, на однакових відстанях від точок $M_1(5;-1)$ і $M_2(3;7)$.

22. Точка $C(3;-1)$ є центром кола, яке відтинає на прямій $2x-5y+18=0$ хорду, довжина якої дорівнює 6. Знайти рівняння цього кола.

23. Скласти рівняння кола, яке проходить через точки $A(5;0)$, $B(1;4)$, якщо його центр знаходиться на прямій $x+y-3=0$.

24. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо його мала вісь дорівнює 24, а відстань між фокусами $2c=10$.

25. Задано еліпс $9x^2+25y^2=225$. Знайти: а) півосі; б) фокуси; в) ексцентриситет; г) рівняння директрис.

26. Скласти рівняння гіперболи, фокуси якої знаходяться на осі абсцис симетрично відносно початку координат, якщо відстань між фокусами $2c=6$ і ексцентриситет $\varepsilon=3/2$.

27. Скласти рівняння гіперболи, якщо відомі її ексцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}$, фокус $F(2;-3)$ і рівняння відповідної директриси $3x-y+3=0$.

28. Знайти рівняння параболи, якщо задано її фокус $F(4;3)$ і директрису $y+1=0$.

29. На параболі $y^2=32x$ знайти точки, відстань від яких до прямої $4x+3y+10=0$ дорівнює 2.

30. Яку лінію визначає рівняння:

1) $4x^2+9y^2-40x+36y+100=0$;
2) $x^2-y^2-4x+2y-4=0$;
3) $2x^2-4x+2y-3=0$;
4) $5x^2-4xy+2y^2=24$;
5) $2x^2+4xy-y^2=12$;
6) $9x^2-24xy+16y^2-20x+110y-50=0$;
7) $3x^2-2xy+3y^2-4x-4y-12=0$?

Відповіді

1. $2x-3z-27=0$. **2.** $4x-3y-z-7=0$. **3.** $x+y+z+5=0$. **4.** 1) $\varphi=\pi$; 2) $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$. **5.** $d=4$. **6.** $d=\dfrac{41}{6}$. **7.** $\left(\dfrac{11}{7};\dfrac{5}{7};1\right)$. **8.** $x=t+3$, $y=-t-1$, $z=t$, $t\in\mathbb{R}$. **9.** $\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z+2}{-19}$; $x=t+1$, $y=-7t$, $z=-19t+2$, $t\in\mathbb{R}$. **10.** 60^0. **11.** $m=-3$. **12.** $(2;-3;6)$. **13.** 0^0. **14.** 7. **15.** 1) $2x+3y-7=0$; 2) $3x-2y-4=0$. **16.** $7x-2y-12=0$; $5x+y-28=0$; $2x-3y-18=0$. **17.** 1) $\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\operatorname{arctg}\dfrac{3}{7}$. **18.** $d=4,4$. **19.** $y=x+20$. **20.** 1) $\alpha\neq 3$, β – довільне; 2) $\alpha=3$, β – довільне; 3) $\alpha=3$, $\beta=2$. **21.** $4x+y+5=0$ або $y-3=0$.

22. $(x-3)^2+(y+1)^2=38$. **23.** $(x-2)^2+(y-1)^2=10$. **24.** $\dfrac{x^2}{169}+\dfrac{y^2}{144}=1$. **25.** а) 5 і 3; б) $F_1(-4;0)$, $F_2(4;0)$; в) $\varepsilon=4/5$; г) $x=\pm\dfrac{25}{4}$. **26.** $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$. **27.** $7x^2-y^2-6xy+26x-18y-17=0$. **28.** $y=\dfrac{1}{8}x^2-x+3$. **29.** $(0;0)$; $(18;-24)$. **30.** 1) $\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$; 2) $x'^2-y'^2=7$; 3) $x'^2=-y'$; 4) $\dfrac{x'^2}{24}+\dfrac{y'^2}{4}=1$; 5) $\dfrac{x'^2}{4}-\dfrac{y'^2}{6}=1$; 6) $y'^2=-2x'$; 7) $\dfrac{x'^2}{8}+\dfrac{y'^2}{4}=1$.

Функції однієї змінної

1. Поняття функції

1.1. Змінні величини

При вивченні закономірностей, які зустрічаються у природі, доводиться мати справу як зі сталими величинами, так і зі змінними.

Сталою називається величина, яка зберігає одне й те саме значення або взагалі, або у певній ситуації. У другому випадку сталу величину називають **параметром.**

Змінною називається величина, яка може набувати різних числових значень. Змінну величину (змінну) вважають заданою, якщо відома множина всіх числових значень, яких вона може набувати. Сталу величину можна розглядати як частинний випадок змінної, коли множина її числових значень складається з одного числа.

Числові значення змінної величини утворюють певну множину дійсних чисел. Їй відповідає деяка множина точок числової осі. Ці множини можуть бути різними, в залежності від змінної, яка розглядається. Найчастіше ми зустрічатимемося з числовими множинами таких типів: інтервал $(a;b)$; відрізок $[a;b]$; напіввідрізки $[a;b)$, $(a;b]$; нескінченні напівінтервали $(a;+\infty)$, $(-\infty;b)$ або нескінченні напіввідрізки $[a;+\infty)$, $(-\infty;b]$; уся числова вісь $(-\infty;+\infty)$. Усі вони детально описані в першому розділі. Надалі всі указані множини об'єднуватимемо терміном проміжок.

Будь-який інтервал, що містить точку a, називається **околом** точки a. Інтервал $(a-\varepsilon;a+\varepsilon)$, тобто множина точок x таких, що $|x-a|<\varepsilon$, де $\varepsilon>0$, називається **ε-околом точки** a.

1.2. Поняття функції. Способи задання функції

При вивчені різних явищ та процесів, як правило, маємо справу з сукупністю змінних величин, які зв'язані між собою так, що значення одних величин, що називаються незалежними змінними, повністю визначають значення інших, які називаються залежними змінними або функціями.

Означення 1. *Змінна величина y називається функцією змінної величини x, якщо вони зв'язані між собою так, що кожному можливому значенню величини x (допустимі значення), відповідає єдине цілком визначене значення величини y.*

При цьому x називається **аргументом** або **незалежною змінною**, а y – **залежною змінною** або **функцією**.

Сукупність усіх значень незалежної змінної x, для яких функція y визначена, називається **областю визначення** або областю існування функції і позначається символом $D(y)$ або X.

Сукупність усіх значень y називається **множиною значень** функції і позначається символом $E(y)$ або Y.

Той факт, що y є функцією від x, скорочено позначатимемо так: $y = f(x), \quad x \in X$, де символ f називається **характеристикою функції** й означає правило, за яким елементу $x \in X$ відповідає єдиний елемент $y \in Y$.

Якщо функція f ставить у відповідність числу x_0 деяке число y_0, то це записують у вигляді $y_0 = f(x_0)$ і при цьому y_0 називають **частинним** значенням функції при $x = x_0$.

Поряд із терміном функція використовують рівнозначний термін **відображення**, а замість запису $y = f(x)$ пишуть $f : \ x \longmapsto y$ і кажуть, що f відображає число x у число y, або, що число y є образом числа x при відображенні f.

При обчисленнях запис $y = f(x)$ зручніший за запис вигляду $f : \ x \longmapsto y$. Наприклад, запис $f(x) = x^2$ значно зручніше і простіше використовувати при аналітичних перетвореннях, ніж запис $f : \ x \longmapsto x^2$. Крім букви f для позначення функцій використовують й інші букви, наприклад, $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = \varphi(x)$, $y = F(x)$ і т.д. Іншими буквами можуть позначатися також залежна і незалежна змінні.

Функція, усі значення якої однакові, називається **сталою**. Сталу функцію позначають символом $y = C$, $x \in \mathbb{R}$.

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **обмеженою зверху** (**знизу**) на множині X, якщо існує число M (m) таке, що для довільного $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \le M$ $(f(x) \ge m)$. Якщо функція обмежена і зверху і знизу на множині X, то вона називається **обмеженою** на цій множині. Умову обмеженості функції f можна сформулювати так: існує число $A > 0$ таке, що для довільного $x \in X$ виконується нерівність $|f(x)| \le A$. Наприклад, функція $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, обмежена на $\mathbb{R}$, бо $|\cos x| \le 1$, $x \in \mathbb{R}$, а функція $f(x) = \frac{1}{x}$ не є обмеженою на інтервалі $(0;1)$, оскільки не існує числа M такого, щоб для довільного $x \in (0;1)$ виконувалась нерівність $\frac{1}{x} \le M$.

Для наочного дослідження поведінки функції, будують графік, розглядаючи незалежну змінну x і функцію y як прямокутні координати деякої точки M на площині Oxy.

Означення 2. *Графіком функції $y = f(x)$, $x \in X$, називається множина усіх точок $M(x;y)$ площини Oxy, координати яких зв'язані функціональною залежністю, тобто множина точок вигляду $(x; f(x))$, $x \in X$.*

Графік функції може бути деякою суцільною лінією (кривою або прямою), а може складатися з окремих точок.

Зауважимо, що не всяка лінія є графіком деякої функції. Наприклад, коло $x^2 + y^2 = 1$ не є графіком функції, оскільки кожне $x \in (-1;1)$ входить не в одну, а у дві пари чисел $(x;y)$ цієї множини з різними значеннями y : $y_1 = \sqrt{1-x^2}$ і $y_2 = -\sqrt{1-x^2}$, що суперечить вимозі однозначності в означенні функції (рис. 1).

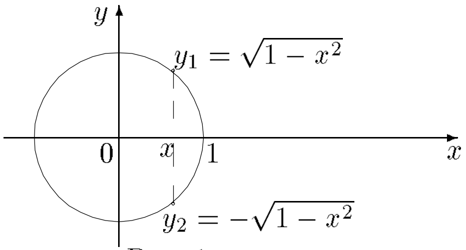


Рис. 1

У той же час частина кола, що лежить у нижній півплощині, є графіком функції $y_1 = -\sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1;1)$, а друга частина, що лежить у верхній півплощині,– графіком функції $y = \sqrt{1-x^2}$.

Способи задання функції. Для того щоб задати функцію f, треба:

1) описати область $D(f)$ визначення функції;

2) задати закон відповідності, за яким для кожного $x \in D(f)$ знаходитимемо число y.

Основні способи задання цього закону **аналітичний**, **графічний**, **табличний** і **словесний**.

При **аналітичному** способі задання функція визначається за допомогою аналітичного виразу, тобто за допомогою формули, яка вказує, які треба операції здійснити над значеннями аргументу, щоб дістати відповідне значення функції.

Якщо функція $y = f(x)$, $x \in X$, задана формулою, то її характеристика f описує ту сукупність дій, яку треба в певному порядку виконати над значенням аргументу x, щоб одержати відповідне значення функції. Наприклад,

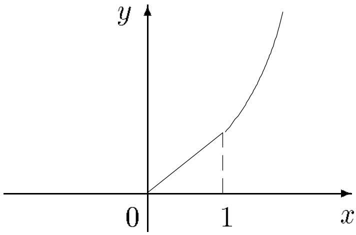
$$f(x) = \sqrt[3]{x^2-1}, \quad x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty).$$

Тут f означає: 1) піднесення x до квадрата; 2) віднімання від отриманого результату одиниці; 3) добування з одержаної різниці кубічного кореня.

При аналітичному способі задання функції, якщо область визначення не описана, вважають, що нею є множина всіх тих значень x, для яких написана формула має зміст. Цю область називають **природною областю визначення.** Наприклад, $y = \sqrt{1-x^2}$ має областю визначення ті x, для яких $1 - x^2 \geq 0$, тобто $X = [-1;1]$.

Треба пам'ятати, що не можна ототожнювати функцію і формулу, за допомогою якої задається ця функція. Наприклад: 1) $y = x^2$, $x \in (0;+\infty)$; 2) $y = x^2$, $x \in [-2;2]$; 3) $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, це три різні функції, оскільки вони мають різні області визначення, хоча задаються за допомогою однієї й тієї самої формули.

Можливий і такий випадок, коли функція на різних частинах області визначення задається різними формулами. Наприклад,



$$y = \begin{cases} x, & \text{коли } 0 \le x \le 1; \\ x^2, & \text{коли } x > 1. \end{cases}$$

При **табличному** способі задання функції складається таблиця, у якій указується ряд значень аргументу й значення функції, що їм відповідають. Наприклад,

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	...
y	...	-27	-8	-1	0	1	8	...

Очевидно, що за заданими табличними значеннями можна аналітично відтворити функцію, а саме, $y = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$.

У загальному випадку це не завжди вдається зробити, бо таблиця визначає не всі значення функції.

Проміжні значення функції знаходять наближено методом **інтерполяції**. Найпростішим є лінійне інтерполювання, при якому припускається, що приріст функції пропорційний приросту аргументу. Якщо задане значення x лежить між наведеними в таблиці значеннями x_0 і $x_1 = x_0 + h$, яким відповідають значення $y_0 = f(x_0)$ і $y_1 = f(x_0) + \Delta f$, то вважають, що

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta f. \tag{1}$$

Величина $\frac{x-x_0}{h}\Delta f$ називається **інтерполяційною поправкою**.

Якщо за заданим значенням функції треба знайти наближене значення аргументу, то необхідно провести обернене інтерполювання.

Приклад 1. Функція задана таблицею:

x	3	$3,04$	$3,08$
y	$3,42$	$3,88$	$4,38$

Знайти: 1) $f(3,008)$; 2) x, якщо $f(x) = 4,1$.

◀ Для випадку 1) маємо: $x_0 = 3$; $f(x_0) = 3,42$; $x_1 = 3,04$; $f(x_1) = 3,88$; $h = x_1 - x_0 = 3,04 - 3,0 = 0,04$; $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = 3,88 - 3,42 = 0,46$.

Згідно з інтерполяційною формулою (1)

$$y = f(3,008) \approx 3,42 + \frac{3,008 - 3}{0,04} \cdot 0,46 = 3,512.$$

2) Обернене інтерполювання можна провести за формулою (1), якщо в ній поміняти місцями x та y:

$$g(y) \approx g(y_0) + \frac{y - y_0}{h} \Delta g, \tag{2}$$

де $x = g(y)$ – невідоме значення оберненої функції.

Маємо $y_0 = 3,88$; $g(y_0) = 3,04$; $y_1 = 4,38$; $g(y_1) = 3,08$; $h = y_1 - y_0 = 4,38 - 3,88 = 0,50$; $\Delta g = g(y_1) - g(y_0) = 3,08 - 3,04 = 0,04$.

Скориставшись формулою (2), дістанемо

$$x = g(4,1) \approx 3,04 + \frac{4,1 - 3,88}{0,5} 0,04 = 3,0576 \approx 3,058. \quad \blacktriangleright$$

Таблиці часто використовуються для задання функцій. Так, добре відомими є таблиці тригонометричних функцій, таблиці логарифмів і т.п. Прикладом табличного способу задання функцій є також графік руху поїздів, який визначає місцезнаходження поїзда у певні моменти часу.

Графічний спосіб задання функції полягає в тому, що дається графік функції, а її значення, які відповідають тим або іншим значенням аргументу, знаходяться безпосередньо з графіка. Наприклад, на рисунку 2 зображено графік деякої функції $y = g(x)$, із якого видно, що $D(f) = [-2; 3]$, $E(f) = [-1; 4]$.

Важливим є вміння читати графік, тобто встановлювати властивості функції за її графіком. Зокрема, з наведеного рисунка видно, що задана функція має єдиний нуль $x = -1,5$; зростає на всій області визначення; $f(x) < 0$ при $x \in [-2; -1,5)$; $f(x) > 0$ при $x \in (-1,5; 3]$.

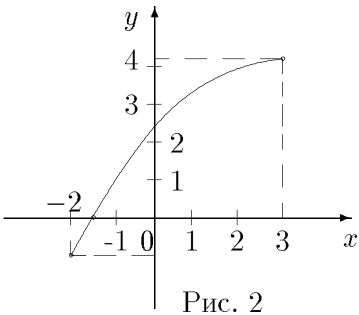


Рис. 2

Графічно функцію задають тоді, коли аналітичний спосіб застосовувати важко або й неможливо. У багатьох випадках графіки креслять прилади-самописці. Наприклад, кардіограми, енцефалограми в медицині, барограми, що виражають графічно зміну атмосферного тиску з часом, в географії і т.п.

Словесний спосіб задання функції полягає в тому, що закон відповідності задається словами. Відому функцію $f(x) = |x|$ (рис. 3) задають словами так:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{якщо } x < 0; \\ x, & \text{якщо } x \geq 0. \end{cases}$$

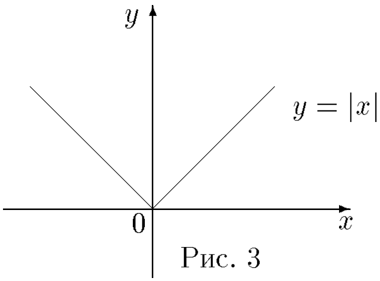


Рис. 3

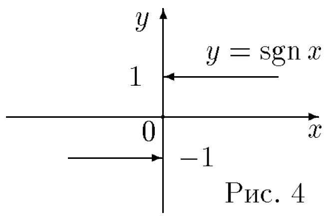


Рис. 4

Наведемо ще приклади таких функцій. Функцію $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (рис. 4) (читається "сигнум x" або "знак x") задають словами

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо } x < 0, \\ 0, & \text{якщо } x = 0, \\ 1, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Функцію $f(x) = [x]$ (ціла частина x) задають так: ціла частина дійсного числа x – це найбільше ціле число, що не перевищує x (рис. 5). Наприклад: $[2,3]=2$; $[-1,8]=-2$.

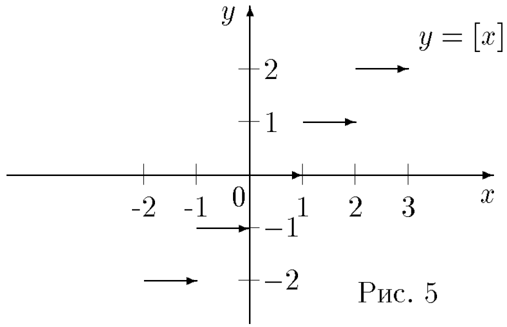


Рис. 5

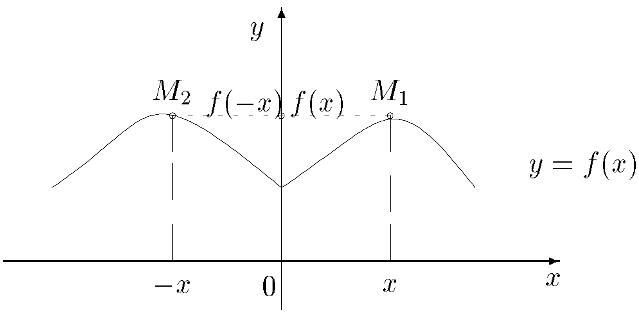
Ще одним прикладом словесного задання функції є функція Діріхле:

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{якщо } x-\text{ раціональне },\\ 0, & \text{якщо } x-\text{ ірраціональне.}\end{cases}$$

1.3. Парні та непарні функції. Періодичні функції

Функція $y=f(x)$, $x\in X$, називається **парною**, якщо: 1) множина X симетрична відносно точки $x=0$; 2) $f(-x)=f(x)$, $x\in X$.

Наприклад, функції $y=x^2$, $x\in\mathbb{R}$, і $y=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$, – парні, оскільки $(-x)^2=x^2$ і $\cos(-x)=\cos x$, $x\in\mathbb{R}$.

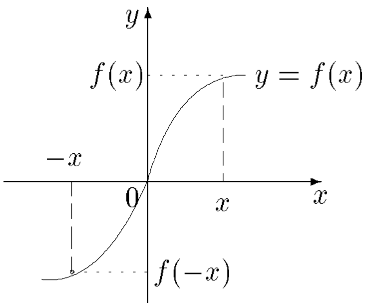


З означення парної функції випливає, що дві точки графіка цієї функції $M_1(x; f(x))$ і $M_2(-x; f(-x))$ симетричні відносно осі ординат. Оскільки значення x з області визначення функції можна вибрати довільно, то *графік парної функції симетричний відносно осі Oy.*

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **непарною**, якщо: 1) множина X симетрична відносно точки $x = 0$; 2) $f(-x) = -f(x)$, $x \in X$.

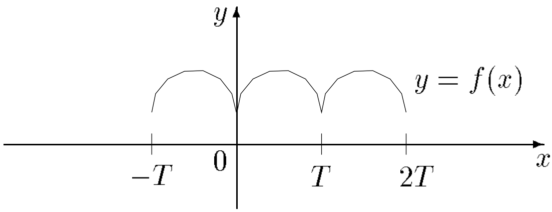
Наприклад, функції $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, і $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, непарні, оскільки $(-x)^3 = -x^3$, $\sin(-x) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.



Треба мати на увазі, що не всяка функція є парною або непарною. Наприклад, кожна з функцій $y = x^2 - x + 1$, $x \in \mathbb{R}$; $y = x + \cos x$, $x \in \mathbb{R}$; $y = 2^x$, $x \in \mathbb{R}$ не є ні парною, ні непарною.

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, називається **періодичною**, якщо існує таке число $T \neq 0$, що $f(x \pm T) = f(x)$, $x \in X$.



При цьому найменше з додатних чисел T, що задовольняють умову $f(x \pm T) = f(x)$, називається **періодом** функції $y = f(x)$, $x \in X$. З тригонометрії відомо, що функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ є періодичними. Для перших двох із них період дорівнює 2π, а дві останні мають період π. При дослідженні періодичності функції з періодом T і побудови її графіка досить знати значення цієї функції на будь-якому відрізку довжини T, наприклад, на $[0; T]$.

1.4. Монотонні функції

Функція f називається **зростаючою** (**спадною**) на проміжку X, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше (менше) значення функції.

Нехай $\{x_1, x_2\} \subset X$ і $x_2 > x_1$. Тоді функція зростає на проміжку x, якщо $f(x_2) > f(x)$, і спадає, якщо $f(x_2) < f(x_1)$ (рис. 6).

Якщо функція f є тільки зростаючою або тільки спадною на проміжку X, то вона називається **монотонною** на цьому проміжку.

З рисунків 6 а) і 6 б) безпосередньо видно, що кожна пряма, яка паралельна осі Ox, перетинає графік монотонної функції в одній точці, тобто кожному значенню $y \in Y$ відповідає єдине значення $x \in X$ таке, що $y = f(x)$.

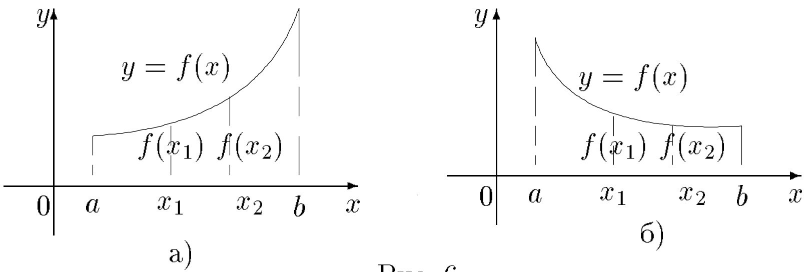
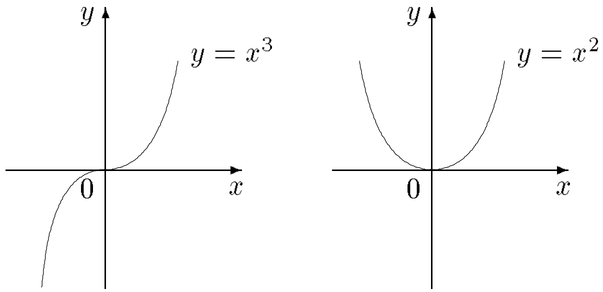


Рис. 6

Наприклад, функція $y = x^3$, $x \in \mathbb{R}$, монотонна на $\mathbb{R}$; функція $y = x^2$, $x \in \mathbb{R}$, – кусково-монотонна: на $(-\infty; 0)$ вона спадає, а на $(0; +\infty)$ – зростає.

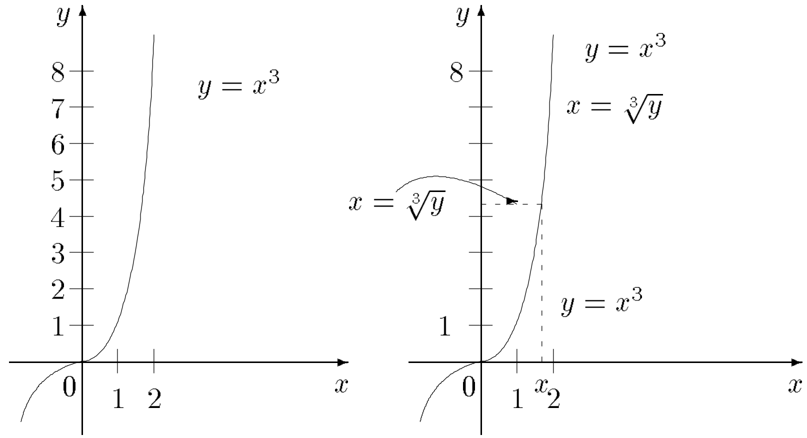


У випадку, коли для $\{x_1, x_2\} \subset X$, $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) \ge f(x_2))$, то функція f називається **неспадною (незростаючою)** на множині X.

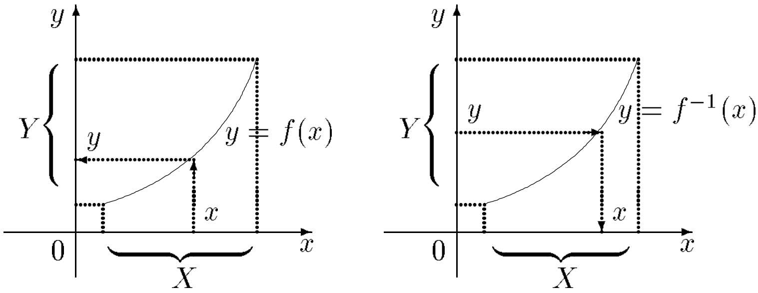
1.5. Поняття оберненої функції

Розглянемо функцію $y = x^3$, $x \in [-1; 2]$. Ця функція здійснює відображення відрізка $[-1; 2]$ на відрізок $[-1; 8]$ – множину значень цієї функції.

Розглянемо рівність $y = x^3$ як рівняння відносно x. Це рівняння для кожного значення $y \in [-1; 8]$ визначає єдине значення $x \in [-1; 2]$ за формулою $x = \sqrt[3]{y}$. Геометрично це означає, що всяка пряма, яка проходить через точку відрізка $[-1; 8]$, паралельно осі Ox, перетинає графік функції $y = x^3$ тільки в одній точці. Іншими словами, кожному значенню $y \in [-1; 8]$ ставиться у відповідність єдине значення $x \in [-1; 2]$. Це означає, що на відрізку $[-1; 8]$ задана функція $x = \sqrt[3]{y}$, яка відображає цей відрізок на відрізок $[-1; 2]$. Функція $x = \sqrt[3]{y}$ називається **оберненою** до функції $y = x^3$.



Перейдемо тепер до загального випадку. Розглянемо функцію $y = f(x)$ з областю визначення X і множиною значень Y. Нехай ця функція така, що будь-яка пряма, яка проходить через точку множини Y, паралельно осі Ox, перетинає її графік тільки в одній точці, тобто рівняння $y = f(x)$ для кожного $y \in Y$ визначає єдине значення $x \in X$.



Оскільки кожному значенню $y \in Y$ відповідає єдине значення $x \in X$, то на множині Y визначена функція, множиною значень якої є X. Ця функція називається **оберненою** до функції $y = f(x)$ і позначається символом $x = f^{-1}(y)$. Очевидно, що для функції $x = f^{-1}(y)$ оберненою є функція $y = f(x)$. Тому обидві ці функції називаються **взаємно оберненими**.

Задана функція $y = f(x)$, $x \in X$, і обернена до неї $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, виражають одну й ту саму залежність між x і y. Але у першому випадку ми розглядаємо x як незалежну змінну, а y як функцію; у другому випадку – навпаки, y вважаємо незалежною змінною, а x – функцією. Отже, одна й та сама лінія є графіком функції $y = f(x)$ і оберненої до неї функції $x = f^{-1}(y)$. Однак, якщо для функції f вісь Ox є віссю незалежної змінної, то для оберненої функції f^{-1} віссю незалежної змінної служить вісь Oy.

Зауважимо, що не для всякої функції існує обернена. Наприклад, функція $y = x^2$, якщо її розглядати на всій числовій осі, не має оберненої функції, оскільки кожному значенню $y > 0$ відповідає два значення x: $x = -\sqrt{y}$ і $x = \sqrt{y}$. Якщо функцію $y = x^2$ розглядати на проміжку $0 \leq x < +\infty$, то вона має обернену функцію $x = \sqrt{y}$, бо кожному значенню $y \geq 0$ відповідає єдине значення $x \in [0, +\infty)$, яке задовольняє рівняння $y = x^2$. Якщо ж функцію $y = x^2$ розглядати на інтервалі $-\infty < x < 0$, то матимемо іншу обернену функцію $x = -\sqrt{y}$, $y \geq 0$.

Природно, виникає запитання: якою повинна бути функція $y = f(x)$, щоб вона мала обернену $x = f^{-1}(y)$? Доведено, що монотонна функція $y = f(x)$, $x \in X$ має обернену. Практично, щоб знайти для функції $y = f(x)$, $x \in X$, яка задана за допомогою формули, обернену до неї функцію $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, треба розв'язати відносно x рівняння $y = f(x)$, якщо це можливо.

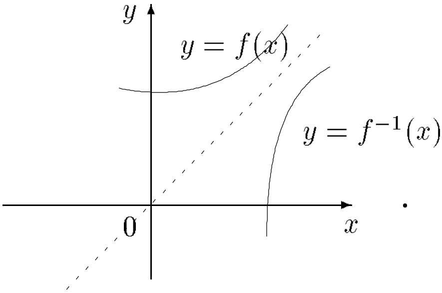
Приклад 2. Знайти функцію обернену до функції $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$.

◀ Область визначення заданої функції $X = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$. Розв'язавши рівняння $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$ відносно x, одержимо $x = \dfrac{5y+3}{y-2}$. Отже, оберненою до функції $y = \dfrac{2x+3}{x-5}$, $x \in X$, є функція $x = \dfrac{5y+3}{y-2}$, $y \in Y = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$. ▶

Зауваження. *Нехай функція $x = f^{-1}(y)$, $y \in Y$, є оберненою до функції $y = f(x)$, $x \in X$. Якщо незалежну змінну позначити знову через x, а функцію – через y, то тоді обернену функцію можна записати у вигляді $y = f^{-1}(x)$. Наприклад, для $y = x^3$,*

$x \in \mathbb{R}$, *оберненою є функція* $x = \sqrt[3]{y}$, *або, якщо змінити позначення, функція* $y = \sqrt[3]{x}$.

Графік оберненої функції $y = f^{-1}(x)$ симетричний до графіка функції $y = f(x)$ відносно бісектриси першого й третього координатних кутів



.

1.6. Складена функція. Елементарні функції

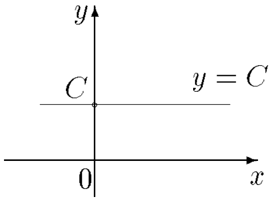
Нехай функція $y = f(u)$ є функцією від змінної u, визначеною на множині U, з областю значень V, а змінна u у свою чергу є функцією $u = \varphi(x)$ від змінної x, визначеною на множині X, з областю значень U. Тоді задана на множині X функція $y = f(\varphi(x))$ називається **складеною функцією** (або **композицією** функцій, **суперпозицією** функцій, функцією від функції). Змінну u називають проміжним аргументом складеної функції.

Наприклад, якщо $y = \lg u$, а $u = \sin x$, то y є складеною функцією від x: $y = \lg \sin x$. Задана складена функція визначена лише для тих значень x, при яких $u = \sin x > 0$, оскільки логарифмічна функція визначена лише для додатних значень аргументу.

Стала функція $f(x) = C$, $C = \text{const}$, степенева функція x^α $(\alpha \in \mathbb{R})$, показникова функція a^x $(0 < a \neq 1)$, логарифмічна функція $\log_a x$ $(0 < a \neq 1)$, тригонометричні функції $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ і обернені тригонометричні функції $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ називаються **найпростішими елементарними** функціями. Усі функції, які одержуються за допомогою скінченного числа арифметичних дій над найпростішими елементарними функціями, а також є суперпозицією цих функцій, утворюють клас **елементарних** функцій. Наприклад, елементарними є функції: $f(x) = |x|$; $f(x) = \lg^3 \operatorname{arctg} 2^{\sqrt{x}} + \sin 3x$, $f(x) = \ln|\sin 5x| - e^{\arcsin\sqrt{x}}$ і т.д.

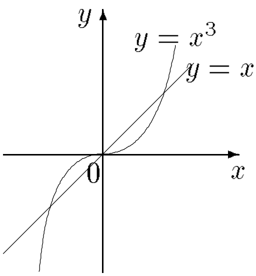
Розглянемо детальніше основні елементарні функції.

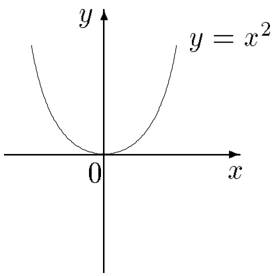
1. **Стала** $y = C$, $C \in \mathbb{R}$, – це функція, яка має одне й те саме значення для всіх значень аргументу. Графіком цієї функції є пряма, яка паралельна осі абсцис



2. **Степенева** функція $y = x^\alpha$, де α – дійсне число, відмінне від нуля. Вигляд області визначення цієї функції залежить від показника α. Розглянемо окремі випадки степеневої функції:

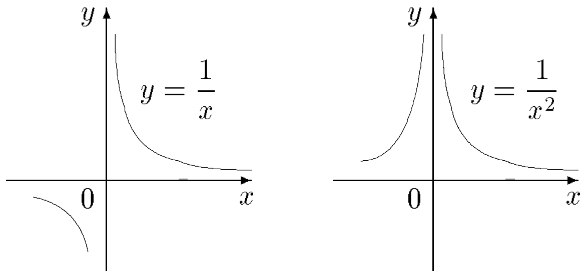
а) $y = x^n$, $n \in \mathbb{N}$; $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$, якщо n – непарне і $E(y) = [0; +\infty)$, якщо n – парне; функція непарна, коли n – непарне, і парна, коли n – парне; зростає на $(-\infty; +\infty)$ при n – непарному; спадає на $(-\infty; 0]$ і зростає на $(0; +\infty)$ при парному n.



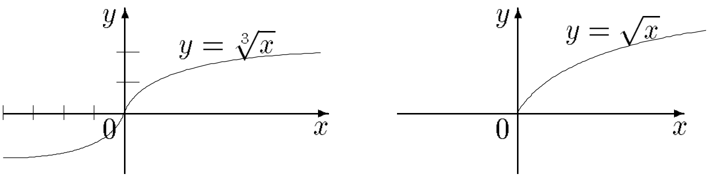


б) $y = x^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$; $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0, +\infty)$; $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, коли n – непарне, і $E(y) = [0; +\infty]$, коли n – парне; функція непарна при непарному n і парна при парному n; спадає на $(-\infty; 0)$ і на $(0; +\infty)$, якщо n – непарне; зростає на

$(-\infty; 0)$ і спадає на $(0; +\infty)$, якщо n – парне;

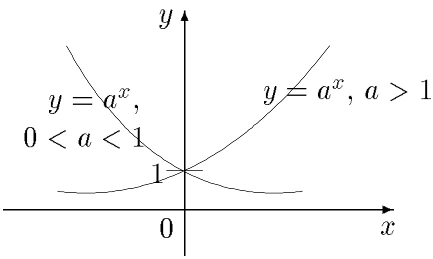


в) $y = \sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$; $D(y) = (-\infty; +\infty)$, якщо n – непарне, і $D(y) = [0; +\infty)$, якщо n – парне; $E(y) = (-\infty; +\infty)$, коли n – непарне, і $E(y) = [0; +\infty)$, коли n – парне; функція непарна при непарному n і загального вигляду при парному n; зростає, якщо n – непарне, і зростає на $[0, +\infty)$, якщо n – парне.

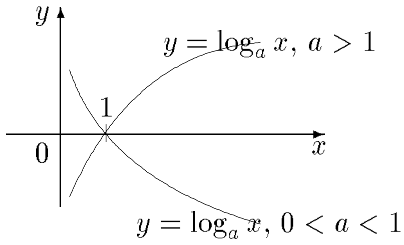


Якщо показник α є дійсним числом, то областю визначення функції $y = x^\alpha$ вважають проміжок $X = (0; +\infty)$.

3. **Показникова** функція $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = (0; +\infty)$; зростає на $(-\infty; +\infty)$, якщо $a > 1$; спадає на $(-\infty; +\infty)$, якщо $0 < a < 1$.

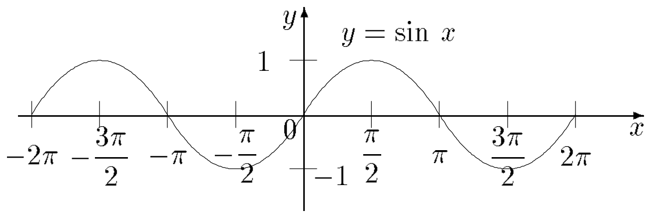


4. **Логарифмічна** функція $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, $D(y) = (0; +\infty)$, $E(y) = (-\infty; +\infty)$; зростає на $(0; +\infty)$, якщо $a > 1$; спадає на $(0; +\infty)$, якщо $0 < a < 1$.

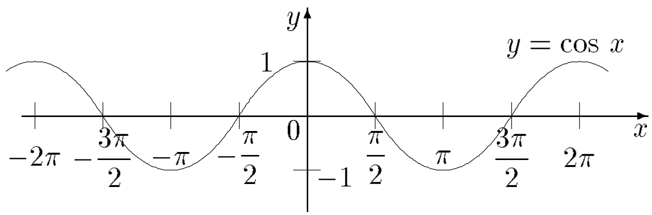


5. **Тригонометричні** функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$:

а) $y = \sin x$; $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [-1; 1]$; функція непарна; зростає на $[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n]$ і спадає на $[\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{N}$; періодична з періодом $T = 2\pi$;

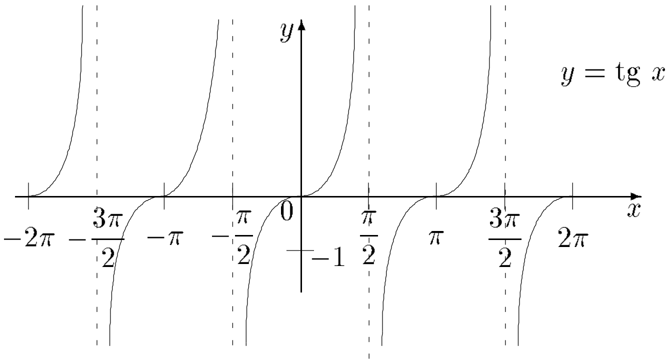


б) $y = \cos x$; $D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [-1; 1]$; функція парна; зростає на $[-\pi + 2\pi n; 2\pi n]$ і спадає на $[2\pi n; \pi + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{N}$; періодична з періодом $T = 2\pi$;

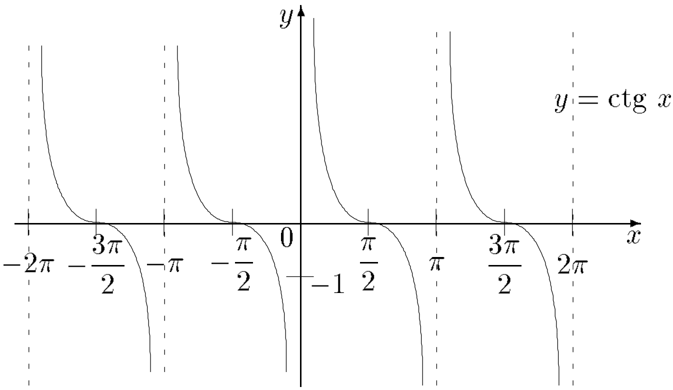


в) $y = \operatorname{tg} x$; $D(y)$ – об'єднання проміжків $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$,

$n \in \mathbb{Z}$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$; функція непарна; зростає на $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; періодична з періодом $T = \pi$;



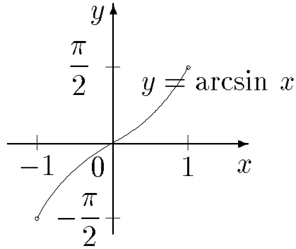
г) $y = \mathrm{ctg}\, x$; $D(y)$ – об'єднання проміжків $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$; функція непарна; спадає на $(\pi n; \pi + \pi n)$, $n \in \mathbb{Z}$; періодична з періодом $T = \pi$.



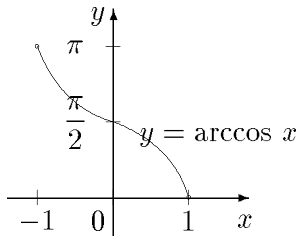
6. **Обернені тригонометричні** функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \mathrm{arcctg}\, x$, $y = \mathrm{arctg}\, x$:

а) $y = \arcsin x$. Якщо розглядати функцію $y = \sin x$ на всій числовій осі $(-\infty; +\infty)$, то вона не має оберненої, оскільки одному значенню $y \in [-1; 1]$ відповідає нескінченно багато значень x.

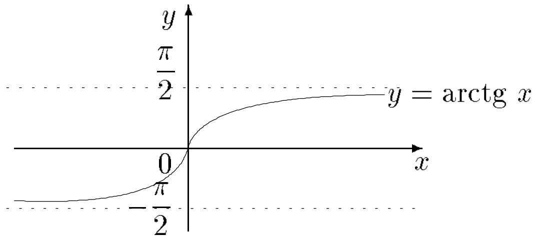
Якщо ж цю функцію розглядати на сегменті $[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$, то на ньому функція $y=\sin x$ зростає і, отже, має обернену, яку позначають символом $x=\arcsin y$. Позначивши незалежну змінну через x, а функцію через y, одержимо $y=\arcsin x$. Функція $y=\arcsin x$ визначена на сегменті $[-1;1]$ і набуває значень, які належать сегменту $[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}]$;



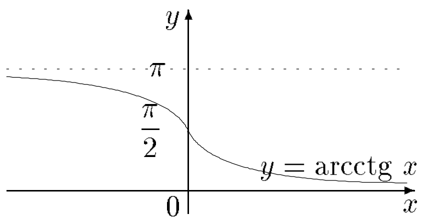
б) $y=\arccos x$. Ця функція визначається як обернена до функції $y=\cos x$, якщо останню розглядати на сегменті $[0;\pi]$, де вона спадає. Функція $y=\arccos x$ визначена на сегменті $[-1;1]$, а її значення належать сегменту $[0;\pi]$;



в) $y=\mathrm{arctg}\,x$. Задана функція визначається як обернена до функції $y=\mathrm{tg}\,x$, якщо останню розглядати для $x\in(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2})$, де вона зростає. Функція $y=\mathrm{arctg}\,x$ визначена на всій числовій осі, а її значення належать проміжку $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;



г) $y = \operatorname{arcctg} x$. Ця функція визначається як обернена до функції $y = \operatorname{ctg} x$, якщо останню розглядати на інтервалі $(0; \pi)$, де вона спадає. Функція $y = \operatorname{arcctg} x$ визначена на всій числовій осі, а множина значень належить проміжку $(0; \pi)$.



Розрізняють чотири типи елементарних функцій.

1. Функція вигляду

$$P(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_{m-1} x + a_m,$$

де $m \geq 0$ – ціле число, коефіцієнти a_0, a_1,...a_m – довільні числа $(a_0 \neq 0)$, називається **цілою раціональною** функцією або **алгебраїчним многочленом** степеня m. Многочлен першого степеня називається також **лінійною** функцією, а многочлен другого степеня – **квадратним тричленом**.

2. Функція, яка є відношенням двох цілих раціональних функцій

$$R(x) = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + ... + a_{m-1} x + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + ... b_{n-1} x + b_n},$$

називається **дробово-раціональною** функцією.

Сукупність цілих раціональних і дробово-раціональних функцій утворюють клас **раціональних** функцій.

3. Функція, що одержується за допомогою скінченної кількості суперпозицій і чотирьох арифметичних дій над степеневими функціями як із цілими, так і з дробовими показниками і не є раціональною, називається **ірраціональною** функцією.

Наприклад, $f(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = x+\sqrt{x}$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{5x^2+4x-7}{3x^2-8x+4}}+$ $(\sqrt[5]{x}+x)^3$ – ірраціональні функції.

4. Функція, яка не є раціональною або ірраціональною, називається **трансцендентною** функцією. Це, наприклад, функції $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sin x + x$ і т.д.

1.7. Застосування функції в економіці

Мікроекономіка аналізує діяльність окремих ланок господарської системи. Це можуть бути окремі фірми, підприємства, ринки конкретних видів товарів й послуг і т.п. При цьому одним із найважливіших питань мікроекономіки є вивчення взаємодії попиту і пропозиції. **Попит** на товар – це потреба в певній кількості товару, яка обмежена діючими цінами і платоспроможністю споживачів. **Пропозиція** – це кількість товару, яка надходить на ринок для продажу за запропонованою ціною.

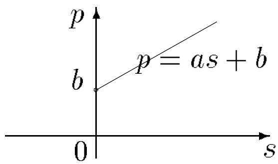
Зрозуміло, що випуск додаткової продукції вимагає додаткових витрат. Щоб спонукати до цього виробника, треба запропонувати йому вищу ціну, тобто пропозиція є деякою функцією ціни. Якщо позначити пропозицію через s, а ціну через p, то цю функцію можна подати у вигляді $s = f(p)$. Ця функція може бути досить складною, і, крім того, пропозиція s може залежати не тільки від ціни товару p, але й від інших факторів. Для простоти вважатимемо, що s залежить лише від p. Графік функції, яка виражає залежність пропозиції від ціни товару, називається **кривою пропозиції**.

Пропозиція s залежить від ціни p, і, навпаки, ціна p залежить від пропозиції s. Цей факт можна записати у вигляді $p = g(s)$, де g – функція, яка є оберненою до функції f. Конкретний вигляд цієї залежності можна знайти з емпіричних даних або з економічної теорії. Припустимо, що задана залежність є лінійною, тобто

$$p = as + b,$$

де a і b – деякі сталі, які називаються **параметрами** і визначаються емпірично. Зазначені припущення є спрощенням дійсності. Його зручно робити , бо лінійна функція є простою і її легше аналізувати, що дає можливість хоча б трохи наблизитися до розв'язування задачі. Такий прийом, коли ми виділяємо деякі істотні риси з реальної задачі, а потім робимо припущення для спрощення, називають **моделюванням**. При цьому реальність замінюється деякою моделлю, досліджуючи яку ми можемо робити певні попередні передбачення. Чим ближча модель до дійсності, тим вона складніша і тим точніші висновки, які можна за її допомогою зробити.

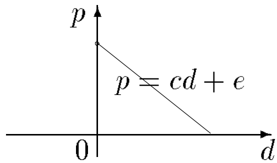
Економічна теорія підказує, що пропозиція товару зростає зі зростанням ціни. Справді, чим вища ціна на товар, тим більше число виробників намагається запропонувати цей товар на ринку, тобто, функція $p = as + b$ є зростаючою функцією, а отже, $a > 0$.



Розглянемо тепер **криву попиту**. Очевидно, що вона є спадною функцією. Справді, якщо ціна на деякий товар зростає, то кількість проданого товару зменшуватиметься. Припускаючи, що криву попиту в першому наближенні можна розглядати як пряму, матимемо залежність

$$p = cd + e, \quad c < 0,$$

де p – ціна, d – попит, а c і e – сталі або параметри.



Попит d можна виразити через ціну p, скориставшись оберненою функцією, але ми користуватимемося попередньою формулою, як це прийнято в економіці.

Пропозиція і попит стосуються певного виду товару або групи товарів. Кількість товару може виражатися у різних одиницях, але для пропозиції й попиту ці одиниці одні й ті самі. Тому, позначаючи кількість товару буквою q, ми можемо криві пропозиції й попиту зобразити на одному рисунку.

У мікроекономіці цікавим є випадок рівності попиту й пропозиції, тобто точка перетину кривих попиту і пропозиції. Ця точка називається **точкою рівноваги**, а ціна, що їй відповідає – **рівноважною ціною** (**ціною рівноваги**). Така назва пов'язана з тим, що в точці рівноваги попит збігається з пропозицією, тобто весь виготовлений товар знаходить свого покупця, а всі бажаючі купити цей товар мають можливість це зробити.

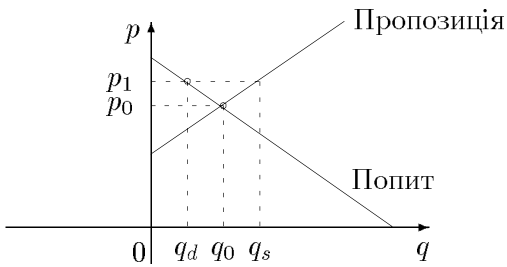


Рис. 7

Розглянемо випадки, коли ринкова ціна відрізняється від рівноважної ціни p_0. Нехай $p_1 > p_0$. Тоді очевидно (рис. 7), що кількість товару q_s,яка відповідає пропозиції, більша за кількість товару q_d, що відповідає попиту, тобто пропозиція перевищує попит. Як наслідок матимемо залишки нереалізованої продукції на складах. Це у свою чергу спонукатиме виробника зменшити ціну на продукцію, тобто ринкова ціна p_1 прямуватиме до ціни рівноваги p_0. Це явище називається **тиском ринку**.

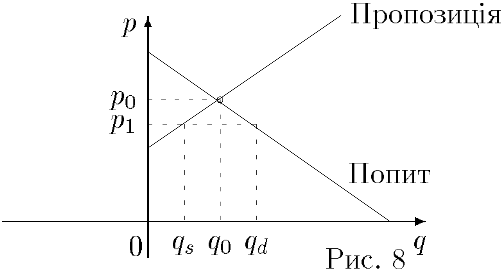


Рис. 8

Якщо $p_1 < p_0$, то у цьому випадку (рис. 8), $q_s < q_d$. Це означає, що попит перевищує пропозицію. У цій ситуації виробники товару, користуючись дефіцитом, підвищують ціну, тобто ринкова ціна знову прямує до ціни рівноваги p_0.

Ми розглянули найпростіший випадок, коли криві пропозиції й попиту є прямими.

Макроекономіка займається аналізом економічної діяльності на національному (державному) рівні. Одним із найважливіших макроекономічних показників, що характеризує успіхи господарської діяльності, є національний доход. Обчислення національного доходу є досить складною задачею. При її розв'язуванні використовуються різні за складністю моделі. Ми розглянемо найпростішу **двосекторну модель**.

Вважатимемо, що національну економіку можна подати як таку, що складається з двох секторів: виробників і споживачів. Виробники – це заводи, різні фірми, фермерські господарства і т.п., тобто всі ті, хто виробляє товар або здійснює послуги. Виробники у своїй діяльності використовують такі ресурси, як земля, капітал, жива праця і т.д. Усі ці ресурси належать до факторів виробництва і, за припущенням, належать споживачам. За використання цих ресурсів виробники змушені сплачувати споживачам. Суму всіх цих платежів і складає **національний доход**. Слід зауважити, що кожна фізична особа в більшості випадків належить і до виробників і до споживачів. Наприклад, робітник на заводі – це, звичайно, виробник. Завод сплачує йому за надані ресурси, і, купуючи на заробітну плату товари, робітник стає покупцем.

Наведене вище означення національного доходу може видатися дещо штучним. Тому треба мати на увазі, що будь – яке означення має зміст у рамках конкретної моделі і може змінюватися при переході до іншої моделі.

Гроші, одержувані споживачами, тобто їхній доход I, можна розділити на дві частини: придбання товарів і послуг, що називається споживанням C, і заощадженням S. Очевидно, що

$$I = C + S.$$

У свою чергу, і споживання C, і заощадження S є функціями доходу I, тому

$$C = f(I), \quad S = g(I).$$

Отже, якщо позначити доход через y, то матимемо

$$y = f(y) + g(y)$$

або

$$g(y) = y - f(y), \quad f(y) = y - g(y).$$

Якщо доходи зростають, то, взагалі кажучи, зростає і споживання, тому функція споживання f є зростаючою.

Припустимо, що функція f лінійна. Тоді функцію споживання C можна записати у вигляді

$$C = ay + b,$$

де a – коефіцієнт, що називається **граничною схильністю до споживання**, при цьому $0 < a < 1$.

Справді, $a > 0$, оскільки функція споживання зростаюча, і $a < 1$, бо споживання є частиною доходу y. Величина b називається

автономним споживанням, тобто споживанням при нульовому доході або проїданням старих запасів. Графік функції споживання зображено на рис. 9:

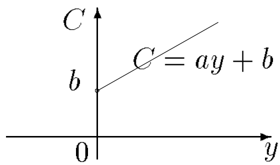


Рис. 9

Якщо відома функція споживання C, то легко можна знайти функцію заощаджень S:

$$S = y - C = y - (ay + b) = (1 - a)y - b,$$

де $(1 - a)$ – кутовий коефіцієнт, який називається **граничною схильністю до заощадження**. Оскільки $0 < a < 1$, то $1 - a > 0$, а тому функція заощаджень є зростаючою. Графік цієї функції зображено на рис.10:

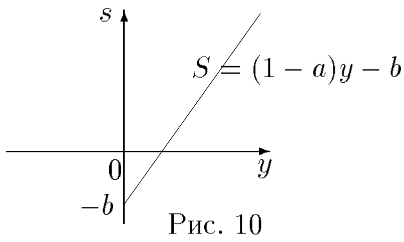


Рис. 10

Як бачимо функція S може набувати і від'ємних значень. Це означає, що коли рівень доходу опускається нижче певної величини, то він перестає забезпечувати споживання, а тому треба витрачати запаси.

Найпростішу двосекторну модель можна зробити реальнішою, доповнивши її елементом, який відображає капіталовкладення і розвиток виробництва або інвестиції. Схема такої економіки наведена на рис. 11.

До виробників надходять два грошових потоки: інвестиції і витрати споживачів , а виходять доходи споживачів y. Якщо економіка знаходиться в рівновазі, то виконується рівність $S = i$, тобто всі заощадження інвестуються. Тому

$$y = C + i,$$

де $C = ay + b$, а рівень інвестицій i вважається незмінним.

Змінні i, a, b називаються параметрами моделі, або **зовнішніми** змінними, а змінні y, C, S – **внутрішніми** змінними моделі. Для визначення внутрішніх змінних маємо систему

$$\begin{cases} y = C + i, \\ C = ay + b. \end{cases}$$

Звідси одержуємо, що

$$y = \frac{b+i}{1-a}, \quad C = a\frac{b+i}{1-a} + b.$$

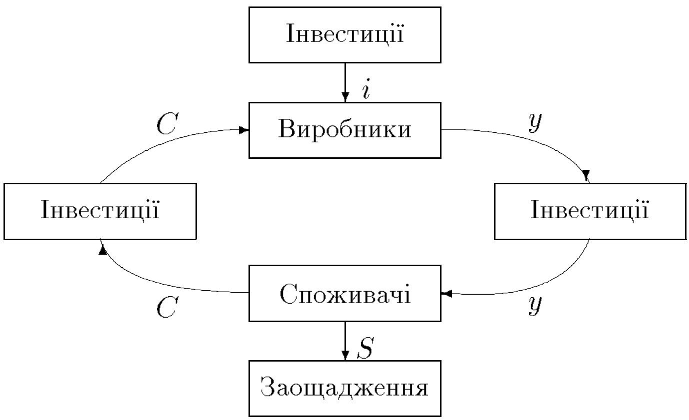


Рис. 11

Для того щоб модель ще краще відображала реальність, доповнимо її державними витратами і податками. Обидві ці величини є важелями в руках уряду для регулювання ринкової економіки. Державні витрати g – зовнішня змінна, або параметр моделі. Державні витрати долучаються до інвестицій, а тому

$$y = C + i + g.$$

Податки ж зменшують реальний доход на величину t тому

$$C = a(y - t) + b.$$

Сукупний податок може бути постійним, тобто $t = t_0$. У цьому випадку – це зовнішня змінна або параметр моделі.

Якщо $t = \tau y$, то t – внутрішня змінна, а роль параметра відіграє коефіцієнт пропорційності τ, який називається **ставкою податку**.

Можливий комбінований випадок, коли

$$t = \tau y + t_0,$$

де τ і t_0 – параметри.

У цьому випадку також маємо систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими y і C:

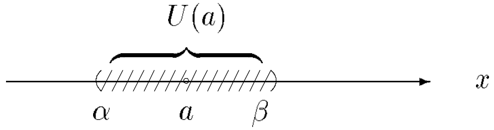
$$\begin{cases} y = C + i + g, \\ C = a(y - \tau y - t_0) + b. \end{cases}$$

Внутрішні змінні y і C, які визначаються всередині самої моделі, називаються також **ендогенними** змінними. Відповідно величини i, g, τ, t_0, що задаються зовні, називаються **екзогенними** змінними.

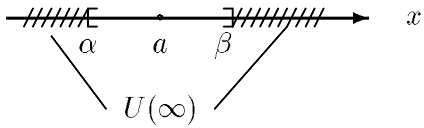
2. Границя функції.

2.1. Означення границі функції

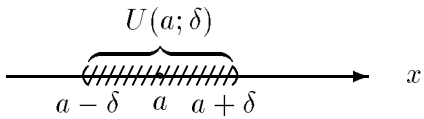
Під околом $U(a)$ точки a (a – дійсне число) розумітимемо довільний інтервал $(\alpha;\beta)$, який містить цю точку:



Під околом $U(\infty)$ символа $\infty = \pm\infty$ розумітимемо зовнішність будь-якого відрізка $[\alpha;\beta]$,тобто $U(\infty) = (-\infty;\alpha) \cup (\beta;+\infty)$:



Через $U(a;\delta)$ позначатимемо δ-окіл точки a, тобто інтервал $(a-\delta;a+\delta)$.



Надалі ми також використовуватимемо поняття правого й лівого δ-околу точки a:

$$U_+(a;\delta) = (a;a+\delta); U_-(a;\delta) = (a-\delta;a).$$

Нехай функція f визначена на множині X. Точка a (a – скінчене) називається **точкою скупчення** цієї множини, якщо її довільний δ-окіл $U(a;\delta)$ містить нескінченно багато елементів множини X. У найпростішому випадку можна вважати, що функція f визначена у деякому околі точки a, причому в самій точці a функція f не обов'язково визначена.

Отже, нехай a – точка скупчення множини X – області визначення функції f.

Означення 1. *Число b називається границею функції f при $x \to a$ (або в точці a), тобто*

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ таке, що

$$|f(x) - b| < \varepsilon,$$

як тільки $x \in \overset{o}{U}(a, \delta) \cap X$, де $\overset{o}{U}(a, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}$ (проколений окіл точки a).

Коротко за допомогою символів означення можна записати так:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \; \forall x \in \overset{o}{U}(a; \delta) \cap X :$$

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

З'ясуємо геометричний зміст цього поняття. Згідно з означенням для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta > 0$, що як тільки число x попадає в проколений δ-окіл точки a ($x \in (a - \delta; a) \cup (a; a + \delta)$), то число $f(x)$ попадає в ε-окіл точки b, отже, частина графіка функції f, що відповідає цьому околу точки a, лежить у смузі між горизонталями $y = b - \varepsilon$ та $y = b + \varepsilon$ (рис. 1)

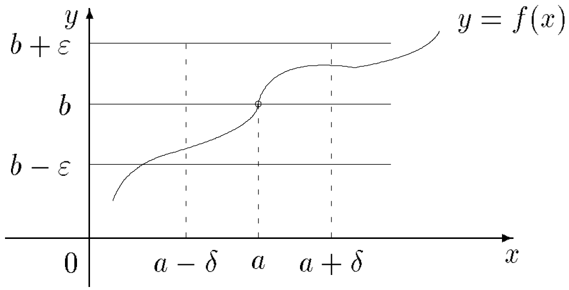


Рис. 1

Зауважимо, що значення функції f в самій точці a нас не цікавить, зокрема, функція в точці a може бути не визначена.

Якщо $a = \infty$, то

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists\, \Delta > 0\ \forall\, |x| > \Delta : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Геометрично з означення випливає, що частина графіка функції f, яка відповідає значенням аргументу $x \in (-\infty; -\Delta) \cup (\Delta; \infty)$, міститься у смузі, обмеженій прямими $y = b - \varepsilon$ і $y = b + \varepsilon$ (рис. 2).

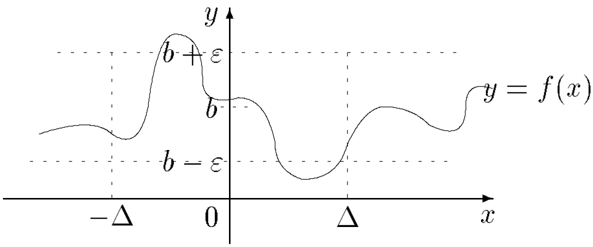


Рис. 2

Приклад 1. Довести, що $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$, де $x \in (1; 3)$.

◀ Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне дійсне число. Доведемо, що існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що $|x^2 - 4| < \varepsilon$, як тільки $x \in (2 - \delta; 2 + \delta) \cap (1; 3)$.

Маємо $|x^2-4| = |(x-2)(x+2)| = |x-2||x+2| = |x-2|(x+2) < 5|x-2|$, бо $x+2 < 5$, якщо $x \in (1; 3)$. Візьмемо $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, тоді для $x \in (2-\delta; 2+\delta) \cap (1; 3)$ $|x^2 - 4| < 5 \cdot \dfrac{\varepsilon}{5} = \varepsilon$, що й треба довести. ▶

Приклад 2. Довести, що

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+1} = 1.$$

◀ Задамо довільне додатне ε і розглянемо абсолютну величину різниці $f(x) - b$:

$$|f(x) - b| = |\frac{x}{x+1} - 1| = \left|\frac{x - x + 1}{x+1}\right| = \frac{1}{|x+1|} =$$

$$= \frac{1}{|x - (-1)|} \le \frac{1}{|x| - |-1|} = \frac{1}{|x| - 1}.$$

Візьмемо $\Delta = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$. Тоді, якщо $|x| > \Delta$, тобто $|x| > 1 + \dfrac{1}{\varepsilon}$, то $|x| - 1 > \frac{1}{\varepsilon}$, а тому $\dfrac{1}{|x| - 1} < \varepsilon$.

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\Delta = 1 + \frac{1}{\varepsilon}$ таке, що для всіх $|x| > \Delta$ виконується нерівність $|\frac{x}{x+1} - 1| < \varepsilon$, тобто $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{x+1} = 1$. ▶

Приклад 3. Довести, що коли $f(x) = C, x \in \mathbb{R}$, то

$$\lim_{x \to a} f(x) = C, a \in R.$$

◀ Візьмемо довільне $\varepsilon > 0$. Тоді $|f(x) - C| = |C - C| = 0 < \varepsilon$, якщо, $|x - a| < \delta = \varepsilon$, де $a \in \mathbb{R}$, а це означає, що $\lim\limits_{x \to a} C = C$. ▶

Розглянемо деякі властивості функцій, які мають скінчені границі в точці a.

Теорема 1. *Якщо функція f має границю при $x \to a$, то вона обмежена в деякому околі точки a.*

◀ Згідно з умовою існує границя

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; \forall \, x \in \overset{o}{U} (a; \delta) \cap X : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

Тоді

$$|f(x)| = |(f(x) - b) + b| \le |f(x) - b| + |b| <$$

$$< \varepsilon + |b| \equiv M, \;\; x \in \overset{o}{U} (a; \delta) \cap X. \quad ▶$$

Зауваження 1. Обернене твердження неправильне, тобто з обмеженості функції в деякому околі точки a не випливає, взагалі кажучи, існування границі цієї функції при $x \to a$.

Наприклад, функція $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$ є обмеженою в проколотому околі точки $x = 0$, але доведено, що вона не має границі при $x \to 0$.

Теорема 2. *Нехай функція f визначена в деякому околі $U(a)$ точки a і $A < f(x) < B$, $x \in U(a)$. Якщо існує $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, то $A \le b \le B$.*

◀ Доведення проводимо від супротивного. Нехай $b < A$. Візьмемо $\varepsilon = A - b > 0$. Тоді, оскільки функція f має границю при $x \to a$, то для $x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap U(a)$ правильна нерівність

$$|f(x) - b| < A - b \Leftrightarrow -(A - b) < f(x) - b < A - b \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -A + 2b < f(x) < A.$$

Звідси випливає, що $f(x) < A$ для $x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap U(a)$, а це суперечить умові теореми. Отже, $b \geq A$. ▶

Зауваження 2. Теорема 2 правильна і у випадку, коли $A \leq f(x) \leq B$, або $A < f(x) \leq B$, або $A \leq f(x) < B$, $x \in U(a)$.

Наслідок. *Додатна функція не може мати від'ємної границі, а від'ємна функція – додатної границі.*

2.2. Однобічні границі

Символічний запис $x \to a - 0$ означає, що x набуває значень, які належать лівому околу точки a, тобто $x \to a$ і $x < a$.

Аналогічно запис $x \to a + 0$ означає, що $x \to a$ і $x > a$.

Означення 2. 1) *Число b називається* **лівим граничним значенням функції f в точці** $x = a$ *якщо*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_-(a;\delta) \cap X : |f(x) - b| < \varepsilon.$$

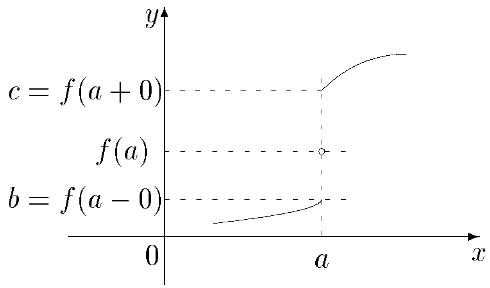
Позначають ліве граничне значення символом $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ або $b = f(a - 0)$.

2) *Число c називається* **правим граничним значенням функції f в точці** $x = a$ *якщо*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in U_+(a;\delta) \cap X : |f(x) - c| < \varepsilon.$$

Позначають праве граничне значення символом $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = c$ або $c = f(a + 0)$.

Якщо функція f визначена в точці a, то її значення у цій точці $f(x)$ може не збігатися з числами $f(a-0)$ і $f(a+0)$:



Наприклад, для функції

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ якщо } x < 0, \\ 0, \text{ якщо } x = 0, \\ 1, \text{ якщо } x > 0, \end{cases}$$

маємо

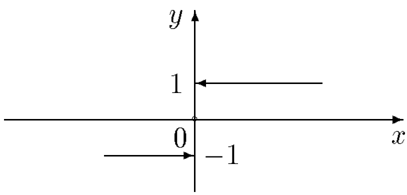
$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (-1) = -1,$$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} (1) = 1,$$

$$f(0) = 0$$

і, отже,

$$f(0-0) \neq f(0+0) \neq f(0).$$



Праве і ліве граничні значення функції f у точці a часто називають **однобічними граничними значеннями**.

Очевидно, що коли функція f має границю в точці a, то вона має й однобічні границі в цій точці, і вони однакові.

Обернене твердження таке: якщо обидві однобічні границі існують й однакові, то функція f має границю в точці $x = a$.

2.3. Границя послідовності

Розглянемо функцію, областю визначення якої є множина натуральних чисел: $x = f(n), n \in \mathbb{N}$. Така функція називається функцією **натурального аргументу** або **числовою послідовністю**. Значення цієї функції називаються **членами послідовності** і позначаються символами x_n, $n \in \mathbb{N}$. Члени послідовності звичайно розміщуються у порядку зростання аргументу:

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), ..., x_n = f(n), ...$$

При цьому x_1 називається першим членом послідовності, x_2 – другим членом, ..., x_n називається n**-ним** або **загальним членом послідовності.**

Позначають послідовність символом $(x_n, n \in \mathbb{N})$, або $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Наприклад, символ $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right\}$ позначає послідовність чисел

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$$

Геометрично послідовність зображується на числовій осі у вигляді сукупності точок, координати яких дорівнюють відповідним членам послідовності. На рис. 3 зображена послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$.

Рис. 3

Означення 3. *Число a називається* **границею послідовності** $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, *тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, *якщо для довільного* $\varepsilon > 0$

існує номер $n_0 = n_0(\varepsilon)$ такий, що для $n > n_0$ виконується нерівність $|x_n - a| < \varepsilon$. У символічній формі:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in N\ \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon.$$

Послідовність, яка має границю, називається **збіжною**, а яка не має – **розбіжною**.

Зміст означення границі числової послідовності полягає в тому, що коли a – границя послідовності $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$, то в довільний, як завгодно малий, ε-окіл точки a потрапляють усі члени послідовності, за винятком скінченного їхнього числа.

Приклад 4. Довести, що границя послідовності $\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ дорівнює нулю, тобто

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

◀ Доведемо, що для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_0 = n_0(\varepsilon) > 0$ таке, що $|x_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon$ для всіх $n > n_0$.

Очевидно, що $|x_n - 0| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n}$. Якщо $n > n_0$, то $\frac{1}{n} < \frac{1}{n_0}$. Для того щоб виконувалась нерівність $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, досить взяти $n_0 > \dfrac{1}{\varepsilon}$, зокрема, можна взяти $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$, де $\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$– ціла частина числа $\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ можна взяти $n_0 = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right] + 1$. Тоді для $n > n_0$ виконуватиметься нерівність $|x_n - 0| < \varepsilon$, а це означає, що $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. ▶

Приклад 5. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

◀ Маємо

$$|\frac{n}{n+1} - 1| = |\frac{n-n-1}{n+1}| = |\frac{-1}{n+1}| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

Очевидно, що для довільного $n > n_0$ виконується нерівність, $\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0}$ а тому $|\dfrac{n}{n+1} - 1| < \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{n_0}$. Якщо для заданого $\varepsilon > 0$ вибрати n_0

так, щоб виконувалась нерівність $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, то тоді $|\frac{n}{n+1} - 1| < \varepsilon$ для довільного $n > n_0$. Звідси й випливає, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$. ▶

2.4. Нескінченно малі та нескінченно великі функції

Розглянемо функції, які визначені на деякому проміжку X і точку a, яка, можливо, і не належить проміжку X, але будь-який її окіл містить точки цієї множини.

Означення 4. *Функція α називається* **нескінченно малою при** $x \to a$, *якщо її границя дорівнює нулю, тобто*

$$\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0.$$

Знаючи означення границі функції при $x \to a$, можна дати розгорнуте означення нескінченно малої функції.

Означення 5. *Функція α називається* **нескінченно малою при** $x \to a$, *якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що для будь-якого $x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap X$ правильна нерівність*

$$|\alpha(x)| < \varepsilon.$$

Якщо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то функція $\alpha(x) = f(x) - b$ є нескінченно малою при $x \to a$, що випливає з означення границі.

Звідси випливає, що в околі $U(a;\delta)$ функцію f можна подати у вигляді

$$f(x) = b + \alpha(x),\ x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap X,$$

де $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$.

Означення 6. *Функція f називається* **нескінченно великою при** $x \to a$, *якщо* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, *що рівносильне такому:*

$$\forall E > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in \overset{o}{U}(a;\delta) \cap X : |f(x)| > E.$$

Наприклад, функції $y = \sin x$ при $x \to 0$ і $y = \dfrac{3}{2x-5}$ при $x \to \infty$ є нескінченно малими величинами, бо $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$ і

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{2x-5}=0$; функція $y=\operatorname{tg}x$ при $x\to\dfrac{\pi}{2}-0$ і $y=\sqrt{5x-8}$ при $x\to\infty$ є нескінченно великими, оскільки $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}\operatorname{tg}x=\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{5x-8}=\infty$.

Між нескінченно малими і нескінченно великими функціями існує певний зв'язок, а саме: якщо $f(x)\to\infty$ при $x\to a$, то $\dfrac{1}{f(x)}\to 0$ при $x\to a$; якщо $\alpha(x)\to 0$ при $x\to a$, то $\dfrac{1}{\alpha(x)}\to\infty$ при $x\to a$ за умови, що $\alpha(x)\neq 0$ для $x\neq a$.

Зауваження 3. Можна переконатися, що необмежена функція не є, взагалі кажучи, нескінченно великою. Наприклад, функція $f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$ є необмеженою в довільному околі точки $x=0$, але вона не є нескінченно великою при $x\to 0$, оскільки функція весь час коливається, переходячи від додатних до від'ємних значень і, навпаки. Очевидно, що нескінченно велика функція є необмеженою при $x\to a$.

Вивчимо основні властивості нескінченно малих та нескінченно великих функцій.

Властивість 1. *Сума довільного скінченого числа нескінченно малих при $x\to a$ функцій є нескінченно малою при $x\to a$ функцією.*

◀ Доведемо властивість для випадку двох функцій α і β.

Згідно з означенням маємо:

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta_1>0\ \forall x\in\overset{o}{U}(a;\delta_1)\cap X:|\alpha(x)|<\frac{\varepsilon}{2};$$

для цього ж $\varepsilon>0$ $\exists\delta_2>0$ $\forall x\in\overset{o}{U}(a;\delta_2)\cap X$: $|\beta(x)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. Тоді

$$|\alpha(x)+\beta(x)|\leq\alpha(x)|+|\beta(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

для довільного $x\in(\overset{o}{U}(a;\delta_1)\cap\overset{o}{U}(a;\delta_2))\cap X$. ▶

Властивість 2. *Добуток обмеженої функції на нескінченно малу при $x\to a$ функцію є нескінченно малою функцією при $x\to a$.*

◀ Нехай f є обмеженою в деякому околі $U(a;\delta)$ точки a, тобто існує число $M > 0$ таке, що для довільного $x \in U(a;\delta)$ правильна нерівність $|f(x)| \leq M$. Якщо функція α є нескінченно малою при $x \to a$, то

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 = \delta_1(\varepsilon) > 0\ \forall x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) : |\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}.$$

Тоді $|f(x)\alpha(x)| = |f(x)|\cdot|\alpha(x)| \leq M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon\ \forall x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap U(a;\delta)$, а це і означає, що функція $f \cdot \alpha$ є нескінченно малою при $x \to a$. ▶

Зауваження 4. З теореми 1 випливає, що нескінченно мала при $x \to a$ функція є обмеженою в деякому околі точки a.

Властивість 3. *Добуток скінченного числа нескінченно малих при $x \to a$ функцій є нескінченно малою функцією при $x \to a$.*

◀ Доведення цієї властивості випливає з властивості 2 і зауваження 4. ▶

Зауваження 5. Відношення двох нескінченно малих функцій α і β при $x \to a$ може бути функцією довільної поведінки.

Наприклад, нехай $\alpha(x) = x, \beta(x) = 2x + x^2, \gamma = x^2$. Хоча

$$\lim_{x\to 0} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \beta(x) = 0, \quad \lim_{x\to 0} \gamma(x) = 0,$$

але

$$\lim_{x\to 0} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x} = \lim_{x\to 0} x = 0;$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x + x^2}{x} = \lim_{x\to 0} (2 + x) = 2.$$

Отже, границя $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ може дорівнювати: нулю; числу $b \neq 0$; символу ∞. У цьому випадку нескінченно мала α називається відповідно: **нескінченно малою вищого порядку, ніж β; одного порядку мализни; нижчого порядку мализни, ніж β.** Зокрема, якщо $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то нескінченно малі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ при $x \to a$ називаються **еквівалентними**; в цьому випадку пишуть $\alpha(x) \sim \beta(x),\ x \to a$. Той факт, що $\alpha(x)$ є нескінченно малою вищого порядку, ніж $\beta(x)$ записується так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$ при $x \to a$. Якщо $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ одного порядку мализни, то пишуть $\alpha(x) = O(\beta(x))$.

З правил порівняння нескінченно малих функцій випливає така важлива властивість: якщо $\alpha(x) \sim \alpha_1(x)$ і $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ при $x \to a$ й існує границя $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то існує і границя $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$, причому ці границі однакові.

2.5. Основні тереми про границі

Розглядатимемо функції, які визначені у деякому околі $U(a)$ точки a, за винятком, можливо, самої точки a.

Теорема 3. *Якщо* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, *то* $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c$.

◀ З означення границі функції випливає, що

$$f(x) = b + \alpha(x),\ x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1), \qquad g(x) = c + \beta(x),\ x \in \overset{o}{U}(a;\delta_2),$$

де $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$. Тоді

$$f(x) \pm g(x) = (b + \alpha(x)) \pm (c + \beta(x)) = b \pm c + (\alpha(x) \pm \beta(x)),$$

$$x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap \overset{o}{U}(a;\delta_2).$$

Оскільки функція $\alpha(x) \pm \beta(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$, то

$$\lim_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = b \pm c. \quad ▶$$

Наслідок. *Функція може мати лише одну границю при* $x \to a$.

◀ Нехай $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ і $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$, де $b \neq c$. Тоді згідно з теоремою 1

$$0 = \lim_{x\to a}(f(x) - f(x)) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} f(x) = b - c.$$

Звідси випливає, що $b-c=0$ або $b=c$, що суперечить припущенню $b \neq c$. ▶

Зауваження 6. В умові теореми 3 припускається, що кожна з функцій має границю, і доводиться, що їхня сума (різниця) також має границю. Обернене твердження, взагалі кажучи, не має місця.

Наприклад,

$$\lim_{x \to \infty} (sin^2 x + cos^2 x) = \lim_{x \to \infty} 1 = 1,$$

але $\lim\limits_{x \to \infty} sin^2 x$ і $\lim\limits_{x \to \infty} cos^2 x$ не існують.

Теорема 4. *Якщо* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$, *то*

$$\lim_{x \to a} f(x) g(x) = b \cdot c.$$

◀ З того, що $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ випливає, що

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad x \in \overset{o}{U} (a; \delta_1), \qquad g(x) = c + \beta(x), \quad x \in \overset{o}{U} (a; \delta_2),$$

де $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$. Тоді

$$f(x)g(x) = (b + \alpha(x))(c + \beta(x)) = bc + (b \cdot \beta(x) +$$

$$+ c \cdot \alpha + \alpha\beta(x)), \; x \in \overset{o}{U} (a; \delta_1) \cap \overset{o}{U} (a; \delta_2).$$

Оскільки функція $b\beta(x) + c\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$ є нескінченно малою при $x \to a$, то $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x) = bc$. ▶

Наслідок. Сталий множник можна виносити за знак границі:

$$\lim_{x \to a} (c \cdot f(x)) = \lim_{x \to a} c \; \lim_{x \to a} f(x) = c \lim_{x \to a} f(x).$$

Теорема 5. *Якщо* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = c$ *і* $c \neq 0$, *то*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}.$$

◀ Оскільки

$$f(x) = b + \alpha(x), \quad x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1), \qquad g(x) = c + \beta(x), \quad x \in \overset{o}{U}(a;\delta_2),$$

де $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ і $\lim\limits_{x\to a} \beta(x) = 0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \frac{b+\alpha(x)}{c+\beta(x)} - \frac{b}{c} = \frac{bc + c\alpha(x) - bc - b\beta(x)}{c^2 + c\beta(x)} =$$

$$= \frac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c^2 + c\beta(x)} = \gamma(x), \; x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap \overset{o}{U}(a;\delta_2).$$

Дріб $\dfrac{c\alpha(x) - b\beta(x)}{c^2 + c\beta(x)} = \gamma(x)$ є нескінченно малою функцією при $x \to a$, бо $\lim\limits_{x\to a}(c\alpha(x) - b\beta(x)) = c\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) - b\beta(x) = c\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) - b\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = 0$, а $\lim\limits_{x\to a}(c^2 + c\beta(x)) = \lim\limits_{x\to a} c^2 + c\lim\limits_{x\to a}\beta(x) = c^2$. Отже, маємо, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{b}{c} = \gamma(x), \; x \in \overset{o}{U}(a;\delta_1) \cap \overset{o}{U}(a;\delta_2),$$

де $\lim\limits_{x\to a}\gamma(x) = 0$. Звідси випливає, що функція $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ має границю при $x \to a$, яка дорівнює $\dfrac{b}{c}$. ▶

Теореми про границі суми, різниці, добутку і частки полегшують знаходження границь.

Приклад 6. Знайти

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(x+10)(x+20)^2(x+30)^3}{x^6}.$$

◀ Перетворимо функцію, границю якої треба знайти, і скористаємося теоремою 4:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right)\left(1+\frac{20}{x}\right)^2\left(1+\frac{30}{x}\right)^3 = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{10}{x}\right) \times$$

$$\times \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{20}{x}\right)^2 \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{30}{x}\right)^3 = 1\cdot 1^2 \cdot 1^3 = 1. \;▶$$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}$.

◀ Оскільки границя чисельника

$$\lim_{x\to 1}(x^2+3x+2)=\lim_{x\to 1}x^2+3\lim_{x\to 1}x+2=1+3+2=6,$$

а границя знаменника

$$\lim_{x\to 1}(x^2-2x+5)=\lim_{x\to 1}x^2-2\lim_{x\to 1}x+5=1-2+5=4\neq 0,$$

то застосувавши теорему 5, дістанемо

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+3x+2}{x^2-2x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+3x+2)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-2x+5)}=\frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

Безпосереднє застосування теореми про границі не завжди дає позитивний результат. Наприклад, не можна застосовувати теорему 5, якщо чисельник і знаменник прямують одночасно до нуля або нескінченності. У цьому випадку кажуть, що дріб $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є невизначеністю вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ відповідно. Знаходження границі $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ у цих випадках називатимемо розкриттям невизначеності вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$. Тому часто спершу треба тотожно перетворити функцію, границю якої шукаємо, а потім застосувати теореми про границі.

Приклад 8. Знайти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$.

◀ Тут безпосередньо застосувати теорему 5 не можна, бо границя і чисельника і знаменника дорівнює нулю при $x\to 1$:

$$\lim_{x\to 1}(x^2-1)=\lim_{x\to 1}x^2-1=1^2-1=0,$$

$$\lim_{x\to 1}(x^3-1)=\lim_{x\to 1}x^3-1=1^3-1=0.$$

Отже, треба розкрити невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Для цього перетворимо дріб, розклавши чисельник і знаменник на множники:

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Скоротивши дріб на $x-1\neq 0$, матимемо тотожність

$$\frac{x^2-1}{x^3-1}=\frac{x+1}{x^2+x+1}.$$

Тоді границі правої та лівої частин однакові:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x+1}{x^2+x+1}=\frac{\lim\limits_{x\to 1}(x+1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+1)}=$$

$$=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 9. Знайти $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}$.

◀ Оскільки чисельник і знаменник прямують до нескінченності, при $x\to+\infty$, то маємо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$. Для того щоб знайти границю заданого дробу, попередньо перетворимо його, винісши за дужки у чисельнику і знаменнику x у найвищому степені:

$$\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\frac{x^2(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{x^2(6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}.$$

Тоді матимемо

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{5x^2+6x+1}{6x^2+4x+2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2}}{6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(5+\frac{6}{x}+\frac{1}{x^2})}{\lim\limits_{x\to+\infty}(6+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{5}{6}. \blacktriangleright$$

Приклад 10. Знайти $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{5x+6}{3x^2+4x+2}$.

◀ Для того щоб можна було застосувати теорему 5 про границю частки, поділимо чисельник і знаменник на x^2 :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{5x+6}{3x^2+4x+2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}{3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2})}{\lim\limits_{x\to-\infty}(3+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2})}=\frac{0}{3}=0. \blacktriangleright$$

Приклад 11. Знайти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13}$.

◀ Маємо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3(7+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2})}{x^3(\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{13}{x^3})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{7+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{13}{x^3}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}(7+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2})=\lim\limits_{x\to\infty}7+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}=7$, а

$$\lim_{x\to\infty}(\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{13}{x^3})=\lim_{x\to\infty}\frac{6}{x}+\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}+\lim_{x\to\infty}\frac{13}{x^3}=0,$$

то дріб $\dfrac{7+\frac{6}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{13}{x^3}}$ є нескінченно великою функцією при $x\to+\infty$, а тому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+6x^2-2x}{6x^2+5x+13}=\infty. \blacktriangleright$$

Узагальнюючи приклади, які розглядаються вище, можна зробити висновок: при $x\to\pm\infty$ границя відношення двох многочленів однакових степенів дорівнює відношенню коефіцієнтів при старших степенях x; якщо ж степені многочленів різні, то границя їхнього відношення дорівнює нулю, коли степінь чисельника менший за степінь знаменника, і – нескінченності у протилежному випадку, тобто

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{a_mx^m+a_{m-1}x^{m-1}+...+a_0}{b_sx^s+b_{s-1}x^{s-1}+...+b_0}=\begin{cases}0, & m<s,\\ \dfrac{a_m}{b_s}, & m=s,\\ \infty, & m>s.\end{cases}$$

2.6. Деякі ознаки існування границі функції

Не кожна функція має границю, навіть тоді, коли вона обмежена. Наприклад, $f(x) = \sin x$ при $x \to \infty$ границі не має, але $|\sin x| \le 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Розглянемо деякі ознаки існування границі функції.

Теорема 6. *Нехай у деякому околі $U(a)$ точки a (за винятком можливо самої точки a) функція f міститься між функціями ψ і φ, які мають однакову границю при $x \to a$, тобто,*

$$\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x),\ x \in \overset{o}{U}(a),$$

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = \lim_{x \to a} \psi(x) = b.$$

Тоді функція f має при $x \to a$ ту саму границю b, тобто $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

◀ Згідно з умовою $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x),\ x \in \overset{o}{U}(a)$. Додамо до всіх частин нерівності $-b$:

$$\varphi(x) - b \le f(x) - b \le \psi(x) - b,\ x \in \overset{o}{U}(a).$$

Звідси випливає, що

$$|f(x) - b| \le \max(|\varphi(x) - b|, |\psi(x) - b|),\ x \in \overset{o}{U}(a).$$

Оскільки

$$\lim_{x \to a} \varphi(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_1 > 0\ \forall x \in \overset{o}{U}(a; \delta_1) \cap \overset{o}{U}(a) :$$

$$|\varphi(x) - b| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \to a} \psi(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_2 > 0\ \forall x \in \overset{o}{U}(a; \delta_2) \cap \overset{o}{U}(a) :$$

$$|\psi(x) - b| < \varepsilon,$$

то

$$|f(x) - b| < \varepsilon,\ x \in \overset{o}{U}(a; \delta_1) \cap \overset{o}{U}(a; \delta_2) \cap \overset{o}{U}(a),$$

що рівносильно $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. ▶

Теорема 7. *Нехай функція f монотонна і обмежена при $x < a$ $(x > a)$. Тоді існує ліва (права) границя f при $x \to a$:*

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = f(a-0), (\lim_{x\to a+0} f(x) = f(a+0)).$$

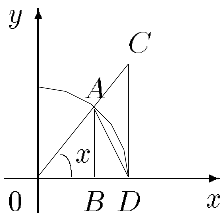
Наслідок. *Обмежена монотонна послідовність $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ має границю.*

2.7. Дві важливі границі

2.7.1. Перша важлива границя. *Довести, що*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

◀ Безпосереднє обчислення цієї границі приводить до невизначеності вигляду $\frac{0}{0}$. Для розкриття цієї невизначеності скористаємося геометричними міркуваннями.



Нехай x – величина центрального кута в радіанах і $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, а радіус кола R. Очевидно, що $S_{\Delta AOD} < S_{\text{сект.}AOD} < S_{\Delta COD}$. Оскільки $AB = R\sin x, OD = R, CD = R\,\mathrm{tg}\,x$, то одержимо

$$\frac{1}{2}OD\cdot AB < \frac{1}{2}\breve{AD}\cdot R < \frac{1}{2}OD\cdot CD \Leftrightarrow \frac{1}{2}R^2\sin x < \frac{1}{2}R^2 x <$$

$$< \frac{1}{2}R^2\,\mathrm{tg}\,x \Leftrightarrow \sin x < x < \mathrm{tg}\,x, x \in (0; \frac{\pi}{2}).$$

Поділивши ці нерівності на $\sin x > 0$, матимемо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}, x \in (0; \frac{\pi}{2}).$$

Очевидно, що ця нерівність правильна і для $x \in (-\frac{\pi}{2}; 0)$, оскільки $\frac{-x}{\sin(-x)} = \frac{x}{\sin x}$, $\cos(-x) = \cos x$.

Отже, маємо нерівності

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}; 0) \cap (0; \frac{\pi}{2}).$$

Оскільки $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$, $\lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, то згідно з теоремою 6 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. ▶

Наведемо приклади застосування цієї важливої границі.

Приклад 12. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

◀ Маємо

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \frac{1}{\cos 2x} \cdot 2 =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos 2x} \cdot \lim_{x\to 0} 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2. \ ▶$$

Приклад 13. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

◀ Обчислимо цю границю, зробивши певні перетворення:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} =$$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{1}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \ ▶$$

2.7.2. Друга важлива границя. *Довести, що послідовність* $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} = \{(1 + \frac{1}{n})^n, n \in \mathbb{N}\}$ *має скінченну границю, яка міститься між 2 і 3.*

◀ Для доведення того, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, перевіримо виконання умов наслідку з теореми 7.

Скориставшись формулою бінома Ньютона, подамо x_n у вигляді:

$$x_n = (1+\frac{1}{n})^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\cdot\frac{1}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\cdot\frac{1}{n^3} + ... + \frac{n(n-1)...(n-(n-1))}{n!}\cdot\frac{1}{n^n}$$

або

$$x_n = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n}) + ... +$$

$$+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})...(1-\frac{n-1}{n}).$$

Аналогічно

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1}) + ... +$$

$$+ \frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n-1}{n+1}) + \frac{1}{(n+1)!}\times$$

$$\times(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})...(1-\frac{n}{n+1}).$$

Оскільки

$$1-\frac{k}{n} < 1-\frac{k}{n+1},\ k\in\{0,\,1,\,...\,n\},$$

і, крім того, x_{n+1} містить у порівнянні з x_n додатковий додатний член, то $x_n < x_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, тобто послідовність $\{x_n,\, n\in\mathbb{N}\}$ є зростаючою.

У формулі для x_n кожний вираз у дужках менший за 1, і, крім того,

$$\frac{1}{k!} < \frac{1}{2^{k-1}},\quad k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}.$$

Тому для кожного $n\in\mathbb{N}$ виконується

$$x_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 + \frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3,$$

тобто послідовність $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ обмежена зверху числом 3. Очевидно, що $\{x_n, n\in\mathbb{N}\}$ обмежена знизу 2.

Отже, послідовність є зростаючою і обмеженою, а тому згідно з попереднім наслідком має скінчену границю, яку позначають буквою e:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \text{де } 2 \le e \le 3.$$

Точніше підраховується, що $e \approx 2,718281....$ Крім того, можна довести, що e є ірраціональним числом.

Доведено, що функція $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to +\infty$ і при $x \to -\infty$ має границею число e:

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x.$$

У цій рівності покладемо $y = \frac{1}{x}$, тобто $x = \frac{1}{y}$ і як результат одержимо ще один запис числа e:

$$e = \lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}.$$

Число e (число Ейлера, неперове число) відіграє дуже важливу роль у математичному аналізі. Графік функції $y = e^x$ називається **експонентою**. Широко використовуються логарифми за основою e, які називаються **натуральними**. Натуральні логарифми позначаються символом ln:

$$\log_e x = \ln x.$$

До числа e приводить розв'язування багатьох прикладних задач статистики, фізики, біології, хімії, економіки і т. п.

Приклад 14. Розглянемо задачу про неперервне нарахування відсотків. Початковий вклад у банк становив q_0 грошових одиниць. Банк виплачує p% річних. Треба знайти розмір вкладу q_t через t років.

◀ Очевидно, що при p% річних розмір вкладу щорічно збільшується в $(1+\frac{p}{100})$ разів, тобто $q_1 = q_0(1+\frac{p}{100})$, $q_2 = q_1(1+\frac{p}{100}) = q_0(1+\frac{p}{100})^2$, ..., $q_t = q_0(1+\frac{p}{100})^t$.

Отже , через t років сума вкладу $q_t = q_0(1+\dfrac{p}{100})^t$.

Ця формула називається **формулою складних відсотків**.

Якщо нараховувати відсотки по вкладах не один раз на рік, а n разів, то при тому самому щорічному приросту p% відсоток нарахування за $\dfrac{1}{n}$−ну частину року становитиме $\dfrac{p}{n}$%, а розмір вкладу за t років при nt нарахуваннях дорівнюватиме

$$q_t = q_0(1 + \frac{p}{100n})^{nt}.$$

Вважатимемо, що відсотки по вкладу нараховуються кожне півріччя ($n = 2$), щоквартально ($n = 4$), щомісячно ($n = 12$), кожного дня ($n = 365$), щогодини ($n = 8760$) і т.д. , неперервно ($n \to \infty$). Тоді розмір вкладу за t років становитиме

$$g_t = \lim_{n\to\infty} q_0(1 + \frac{p}{100n})^{nt} = q_0 \lim_{n\to\infty}((1 + \frac{p}{100n})^{\frac{100n}{p}})^{\frac{pt}{100}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = \frac{p}{100n}, \\ n \to \infty \Rightarrow x \to 0 \end{array} \right| = q_0 \lim_{x\to 0}((1 + x)^{\frac{1}{x}})^{\frac{pt}{100}} = q_0 e^{\frac{pt}{100}}.$$

Ця формула виражає показниковий (експоненціальний) закон зростання (при $p > 0$) або спадання (при $p < 0$) розміру вкладу. Вона використовується при неперервному нарахуванні відсотків.

На практиці у фінансово-кредитних операціях неперервне нарахування відсотків використовується рідко, але воно є ефективним при аналізі складних фінансових проблем, зокрема, при обгрунтуванні та виборі інвестиційних рішень. ▶

У багатьох випадках обчислення границі спрощується, якщо скористатися еквівалентністю нескінченно малих функцій.

Приклад 15. Знайти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{x + x^3}$.

◀ Оскільки $\sin 5x \sim 5x$, $x + x^3 \sim x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{x + x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{5x}{x} = \lim_{x\to 0} 5 = 5. \quad ▶$$

Наведемо деякі **основні еквівалентності**. Якщо $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$, то $\alpha(x) \sim \sin\alpha(x) \sim \operatorname{tg}\alpha(x) \sim \arcsin\alpha(x) \sim \operatorname{arctg}\alpha(x) \sim \ln(1 + \alpha(x)) \sim (e^{\alpha(x)} - 1)$.

Приклад 16. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

◀ Маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Оскільки $\arcsin x \sim x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\arcsin x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3} = \frac{2}{3}. \quad ▶$$

3. Неперервність функції

Поняття неперервності функції є одним з основних понять математичного аналізу.

3.1 Означення неперервності функції

Означення 1. *Функція $y = f(x)$ з областю визначення X називається* **неперервною в точці** x_0, *якщо виконуються умови*:

1) *функція f визначена в точці x_0, тобто $x_0 \in X$;*
2) *існує $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$;*
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

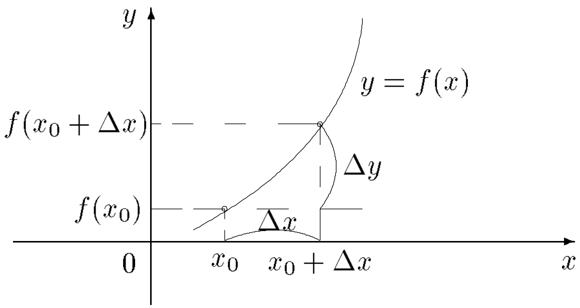
Оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$, то умову 3) можна записати у вигляді

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

тобто для неперервної функції можна міняти місцями знак характеристики f і знак границі lim.

Якщо $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$ або $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$, то функція f називається **неперервною в точці** x_0 **справа** або **зліва** відповідно. Очевидно, що коли функція f неперервна у точці x_0 і справа і зліва, то вона неперервна в цій точці.

Різницю $x - x_0$ називають приростом аргументу x у точці x_0 і позначають через Δx, а різницю $f(x) - f(x_0)$ – приростом функції f у точці x_0, який викликаний приростом аргументу Δx, і позначають символом Δf або Δy. Отже, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$.



Зауважимо, що при фіксованому x_0 величина Δy є функцією аргументу Δx.

У нових позначеннях рівність $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ можна подати у вигляді

$$\lim_{x - x_0 \to 0} (f(x) - f(x_0)) = 0,$$

або

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Звідси випливає означення.

Означення 2. *Функція f називається* **неперервною в** x_0 *якщо її приріст у цій точці є нескінченно малою функцією при* $\Delta x \to 0$.

Функція f називається **неперервною на множині** X, якщо вона визначена на цій множині й неперервна у кожній точці цієї множини. Зокрема, функція f неперервна на $[a; b]$, якщо вона неперервна на $(a; b)$ й неперервна у точці a справа, а у точці b зліва, тобто $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = f(a)$, $\lim\limits_{x \to b-0} f(x) = f(b)$.

Приклад 1. Дослідити на неперервність функцію $y = x^2$.

◀ Область визначення функції $D(y) = \mathbb{R}$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in \mathbb{R}$. Маємо, що приріст функції, який відповідає приросту Δx аргументу дорівнює

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = \Delta x(2x_0 + \Delta x).$$

Очевидно, що коли $\Delta x \to 0$, то й $\Delta y \to 0$. Отже, функція f неперервна в точці x_0, а оскільки ця точка довільна, то функція неперервна на $\mathbb{R}$. ▶

3.2. Властивості функцій, які неперервні у точці

Теорема 1. *Якщо функції f і g неперервні в точці x_0, то й функції $f \pm g$, $f \cdot g$, $\dfrac{f}{g}$ також неперервні в цій точці (остання при $g(x_0) \neq 0$).*

◀ Оскільки неперервні в точці x_0 функції мають у цій точці скінченні границі:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0),$$

то згідно з основними теоремами про границі, матимемо

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0) \pm g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\ g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x)\ \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\ g(x_0);$$

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)}, \quad g(x_0) \neq 0.$$

Звідси й випливає, що функції $f \pm g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ неперервні в точці x_0. ▶

За допомогою цієї теореми доведемо неперервність деяких елементарних функцій.

1. Раціональні функції. Розглянемо спочатку функцію $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$. Очевидно, що для довільного $x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = C = f(x_0)$, тобто стала функція неперервна у кожній точці числової осі.

Аналогічно для функції $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$, маємо: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} x = x_0 = f(x_0)$, тобто функція є також неперервною на $\mathbb{R}$.

Якщо скористатися теоремою 1, то отримаємо, що функції $x^2 = x \cdot x$; $x^3 = x^2 \cdot x$; ... ; $x^n = x^{n-1} \cdot x$ неперервні у будь-якій точці з $\mathbb{R}$.

Розглянемо тепер алгебраїчний многочлен

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

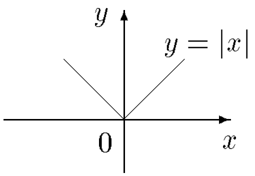
де $n \geq 0$ – ціле число, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ – довільні дійсні числа. Кожний з доданків $a_0x^n, \ldots, a_n$ є добутком двох неперервних функцій – сталої і степеневої, а, отже, є неперервною функцією згідно з доведеною вище теоремою 1. Тому многочлен $P_n(x)$ є неперервною функцією у будь-якій точці $x_0 \in \mathbb{R}$ як сума неперервних функцій.

2. Дробово-раціональна функція, тобто функція вигляду

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)},$$

де P_n і Q_m – многочлени відповідно степенів n і m, є неперервною у всіх точках $x_0 \in \mathbb{R}$, де знаменник Q_m не дорівнює нулю, як частка неперервних функцій.

3. Функція $f(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$.



Очевидно, що коли $x \in (0; \infty)$ або $x \in (-\infty; 0)$, то $f(x) = x$ і $f(x) = -x$ відповідно, а, отже, є неперервною функцією. Доведемо, що ця функція неперервна й у точці $x = 0$. Маємо

$$\lim_{x \to 0-0} |x| = \lim_{x \to 0-0} (-x) = -\lim_{x \to 0-0} x = 0;$$
$$\lim_{x \to 0+0} |x| = \lim_{x \to 0+0} x = 0.$$

Це означає, що права й ліва границі в точці $x = 0$ однакові, а тому функція неперервна в цій точці.

4. Найпростіші елементарні функції. Доведено [10], що найпростіші елементарні функції неперервні в області визначення:

1) $y = a^x$, $0 < a \neq 1$, – неперервна на $\mathbb{R}$;

2) $y = \log_a x$, $0 < a \neq 1$, – неперервна на $(0; \infty)$;

3) $y = \sin x$ і $y = \cos x$ – неперервні на $\mathbb{R}$; $y = \operatorname{tg} x$ – неперервна при $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; $y = \operatorname{ctg} x$ – неперервна при $x \neq \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

4) $y = \arcsin x$ і $y = \arccos x$ – неперервні на $[-1; 1]$; $y = \operatorname{arctg} x$ і $y = \operatorname{arcctg} x$ – неперервні на $\mathbb{R}$.

Доведемо, наприклад, неперервність функції $y = \sin x$ у довільній точці $x \in \mathbb{R}$. Скористаємось означенням 2 неперервності функції. Надамо аргументу x приросту Δx, тоді функція набуде приросту

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x \qquad \text{або} \qquad \Delta y = 2\cos(x + \frac{\Delta}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}.$$

Перейшовши до границі в лівій і правій частинах рівності при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 2 \lim_{\Delta x \to 0} (\cos(x + \frac{\Delta x}{2}) \sin \frac{\Delta x}{2}) = 0, \text{ бо } |\cos(x + \frac{\Delta x}{2})| \le 1,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sin \frac{\Delta x}{2} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{2} = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

а добуток обмеженої функції на нескінченно малу є нескінченно малою. Отже, функція $y = \sin x$ неперервна в довільній точці $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 2. *Якщо функція f неперервна в точці x_0 і $f(x_0) > 0$, то існує такий окіл точки x_0, у якому $f(x) > 0$.*

◀ Згідно з означенням неперервності функції f у точці x_0 маємо, що $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Скориставшись означенням границі, одержимо, що

$$\forall \varepsilon = f(x_0) > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x \in U(x_0; \delta) \, : \, |f(x) - f(x_0)| < f(x_0)$$

або

$$0 < f(x) < 2f(x_0).$$

Отже, для $x \in U(x_0; \delta)$ правильна нерівність $f(x) > 0$. ▶

Теорема 3. *Якщо функція $u = \varphi(x)$ неперервна в точці x_0, а функція $y = f(u)$ неперервна в точці $u_0 = \varphi(x_0)$, то складена функція $y = f(\varphi(x))$ неперервна в точці x_0.*

◀ Для доведення теореми досить переконатися, що

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = f(\varphi(x_0)).$$

Згідно з неперервністю функції $u = \varphi(x)$, маємо $\lim_{x \to x_0} \varphi(x) = \varphi(x_0) = u_0$, тобто при $x \to x_0$ також і $u \to u_0$. Тому, скориставшись неперервністю функції $f(u)$, дістанемо

$$\lim_{x \to x_0} f(\varphi(x)) = \lim_{u \to u_0} f(u) = f(u_0) = f(\varphi(x_0)). \quad ▶$$

Коротко цю теорему можна сформулювати так: *складена функція $y = f(\varphi(x))$, яка утворена з двох неперервних функцій $f(u)$ і $\varphi(x)$, є неперервною функцією.*

Наприклад, складена функція $y = \sin(x^2 + 4x - 3)$ неперервна для всіх $x \in \mathbb{R}$, оскільки функції $y = \sin u$ і $u = x^2 + 4x - 3$ неперервні скрізь на $\mathbb{R}$. Складена функція $y = \ln(1 - x^2)$ неперервна для всіх значень x, що задовольняють нерівність $1 - x^2 > 0$, тобто в інтервалі $(-1; 1)$.

Як відомо, елементарною функцією називається така функція, яку можна задати одним аналітичним виразом, складеним з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних дій і скінченного числа утворень складених функцій. Оскільки основні елементарні функції неперервні в усіх точках, у яких вони визначені, то з теорем 1 і 3 випливає, що всяка елементарна функція неперервна в усіх точках області визначення.

Цей важливий результат дозволяє легко знаходити границю елементарної функції при $x \to x_0$, якщо функція визначена в точці $x = x_0$. Для цього досить обчислити значення функції в цій точці:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0).$$

Приклад 2. Знайти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_a(1 + x)}{x}$.

◀ Зауважимо, що при $x \to 0$ чисельник і знаменник одночасно прямують до нуля, а тому ми маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Зробимо деякі перетворення:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \lim_{x \to 0}(\frac{1}{x} \log_a(1 + x)) = \lim_{x \to 0} \log_a(1 + x)^{1/x}.$$

Оскільки логарифмічна функція неперервна, то ми можемо перейти до границі під знаком функції, тобто

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log_a(1 + x)}{x} = \log_a(\lim_{x \to 0}(1 + x)^{1/x}).$$

Відомо, що $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{1/x}=e$, а тому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e.$$

Зокрема, при $a=e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 3. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

◀ Тут ми маємо невизначеність типу $\frac{0}{0}$. Для знаходження границі зробимо заміну змінної, поклавши $a^x-1=t$. Тоді $x=\log_a(1+t)$. Зауважуючи, що при $x\to 0$ також і $t\to 0$, знаходимо

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\lim\limits_{t\to 0}\frac{\log_a(1+t)}{t}}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a.$$

Звідси, зокрема, випливає, що

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 4. Нехай функції u і v визначені та неперервні в деякому околі точки x_0 і $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)=1$, а $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)=\infty$. Довести, що

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)(u(x)-1)}, \tag{3}$$

якщо існує границя $\lim\limits_{x\to x_0}v(x)(u(x)-1)$.

◀ Маємо невизначеність 1^∞. Для її розкриття зробимо очевидні перетворення, скориставшись при цьому неперервністю функцій:

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\lim_{x\to x_0}\left((1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{v(x)(u(x)-1)}=$$

$$= \left(\lim_{x\to x_0}(1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}}\right)^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1)}.$$

Оскільки $u(x)\to 1$ при $x\to x_0$, то $z(x)=u(x)-1\to 0$ при $x\to x_0$, а тому

$$\lim_{x\to x_0}(1+(u(x)-1))^{\frac{1}{u(x)-1}} = \lim_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}} = e.$$

Тоді

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)(u(x)-1)}. \quad \blacktriangleright$$

Застосуємо формулу (3) для знаходження конкретної границі.

Приклад 5. Знайти $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$.

◀ Оскільки маємо невизначеність типу 1^∞, то скористаємось формулою (3):

$$\lim_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg}^2 x(1+x^2-1)} =$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} x^2\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}\cos^2 x} = e^{1\cdot 1} = e. \quad \blacktriangleright$$

У підрозділі 1.5 цього розділу було введено поняття оберненої функції і доведено, що строго монотонна на деякому проміжку X функція має обернену, яка визначена на проміжку Y – множині значень прямої функції і є також монотонною. Відповідь на питання, коли ж обернена функція є неперервною, дає теорема.

Теорема 4. *Якщо функція $y=f(x)$ неперервна і строго монотонна на проміжку X і Y – множина значень цієї функції, то на множині Y існує обернена функція $x=f^{-1}(y)$, яка є також строго монотонною і неперервною.*

3.3. Класифікація точок розриву функції

Точка x_0 називається **точкою розриву** функції f, якщо вона належить області визначення функції або її межі і не є точкою неперервності. При цьому розрізняють три типи точок розриву.

1. Усувний розрив. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ існує, але функція не визначена в точці x_0 або $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$, то точка x_0 називається **точкою усувного розриву** функції.

Приклад 6. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо} \quad x \neq 0, \\ 2, & \text{якщо} \quad x = 0. \end{cases}.$$

◀ Якщо $x \neq 0$, то f є неперервною функцією, як частка неперервних функцій. Тому треба дослідити точку $x = 0$. Маємо $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 2 = f(0)$, а це означає, що точка $x = 0$ є точкою усувного розриву.

Цей розрив можна усунути, якщо підправити нашу функцію, тобто взяти

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{якщо} \quad x \neq 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x = 0. \end{cases} \quad \blacktriangleright$$

2. Розрив 1-го роду. Границя $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не існує. Якщо при цьому існують обидві однобічні границі $f(x_0 + 0)$ і $f(x_0 - 0)$ (очевидно не рівні між собою), то x_0 називається **точкою розриву 1-го роду**.

Приклад 7. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & \text{якщо} \quad x < 0, \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0, \\ 1, & \text{якщо} \quad x > 0. \end{cases}$$

◀ Якщо $x \neq 0$, то функція неперервна. Тому треба дослідити її в точці $x = 0$.

Маємо

$$\lim_{x \to 0-0} f(x) = \lim_{x \to 0-0} (-1) = -1;$$

$$\lim_{x \to 0+0} f(x) = \lim_{x \to 0+0} 1 = 1.$$

Оскільки ці однобічні границі різні, то точка $x = 0$ є точкою розриву першого роду.

Очевидно, що $f(0 + 0) - f(0 - 0) = 1 - (-1) = 2$. У цьому випадку кажуть, що функція має в цій точці **стрибок**, який дорівнює 2. ▶

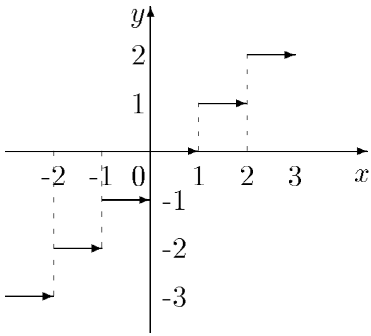
3. Розрив 2-го роду. Точка x_0 називається **точкою розриву 2-го роду**, якщо в цій точці функція f не має хоча б однієї з однобічних границь або принаймні одна з цих границь дорівнює нескінченності.

Приклад 8. Дослідити функцію $f(x) = 2^{-\frac{1}{x}}$ на неперервність і визначити характер точки розриву.

◀ Функція визначена на множині $X = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ і неперервна як суперпозиція неперервних функцій. У точці $x_0 = 0$ функція f не визначена і $f(0-0) = \lim\limits_{x\to 0-0} 2^{-\frac{1}{x}} = +\infty$, $f(0+0) = \lim\limits_{x\to 0+0} 2^{-\frac{1}{x}} = 0$. Отже, точка x_0 є точкою розриву другого роду. ▶

Функція f називається **кусково-неперервною на** $[a;b]$, якщо вона неперервна в усіх внутрішніх точках цього відрізка, за винятком, можливо, скінченного числа точок, у яких має розриви 1-го роду, і, крім того, має однобічні границі у точках a і b.

Функція f називається **кусково-неперервною на** $\mathbb{R}$, якщо вона кусково-неперервна на довільному відрізку.

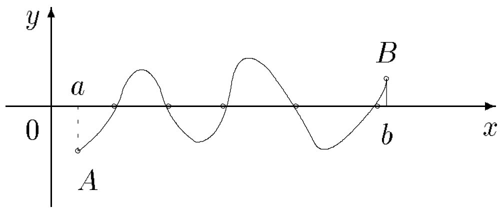


Прикладом кусково-неперервної на $\mathbb{R}$ функції є $f(x) = [x]$. Ця функція в точках $x = n$, $n \in \mathbb{Z}$, неперервна справа і розривна зліва, а в усіх інших точках числової осі неперервна.

3.4. Властивості функцій, неперервних на відрізку

Теорема 5 (проходження неперервної функції через нуль). *Нехай функція f неперервна на відрізку $[a;b]$ і на кінцях відрізка набуває значень різних знаків. Тоді існує точка $c \in (a;b)$, у якій $f(c) = 0$.*

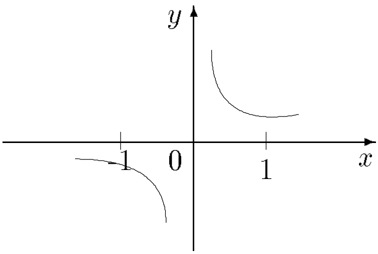
Геометричний зміст теореми такий: *якщо точки графіка функції $y = f(x)$, що відповідають кінцям відрізка $[a;b]$, лежать по різні боки від осі Ox, то цей графік принаймні в одній точці* *відрізка перетинає вісь Ox.*



Наслідок 1 (проходження неперервної функції через довільне проміжне значення). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, $f(a) = A$, $f(b) = B$, $A \neq B$ і C – довільне число, яке міститься між числами A і B, то на інтервалі $(a;b)$ знайдеться принаймні одна точка c, для якої $f(c) = C$.*

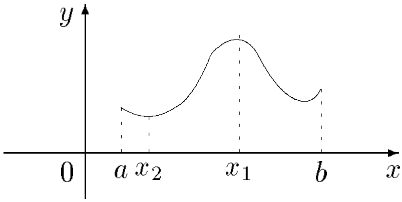
Цей наслідок можна сформулювати й так: *неперервна на відрізку $[a;b]$ функція набуває усі проміжні значення між її значеннями на кінцях відрізка, тобто, неперервна на $[a;b]$ функція, переходячи від одного значення до другого обов'язково проходить через усі проміжні значення.*

Зауваження 1. *Якщо функція на відрізку має принаймні одну точку розриву, то твердження теореми 5 і наслідку 1 перестають бути правильними.* Наприклад, функція $y = \frac{1}{x}$ додатна при $x = 1$ і від'ємна при $x = -1$, але на відрізку $[-1;1]$ немає точки, у якій вона перетворюється в нуль. Це є наслідком того, що на відрізку $[-1;1]$ є точка розриву $x = 0$ функції.



Теорема 6 (досягнення функцією, неперервною на відрізку, своїх найбільшого та найменшого значень). *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона досягає на цьому*

відрізку своїх як найбільшого, так і найменшого значень.



Ця теорема стверджує, що на відрізку $[a;b]$ знайдеться така точка x_1, значення функції f в якій буде найбільшим з усіх її значень на цьому відрізку: $f(x) \le f(x_1)$, $x \in [a;b]$. Аналогічно, на відрізку знайдеться така точка x_2, що $f(x) \ge f(x_2)$, $x \in [a;b]$.

Наслідок 2. *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона обмежена на цьому відрізку.*

Позначимо через M і m відповідно найбільше і найменше значення функції f на відрізку $[a;b]$. Тоді

$$m \le f(x) \le M, \quad x \in [a;b].$$

Нехай $C = \max(|m|, |M|)$. У цьому випадку

$$|f(x)| \le C, \quad x \in [a;b],$$

тобто f є обмеженою на відрізку $[a;b]$.

Зауваження 2. *Теорема 6 не має місця, якщо відрізок $[a;b]$ замінити інтервалом $(a;b)$.* Наприклад, функція $f(x) = \frac{1}{x}$ неперервна на $(0;1)$, але не є обмеженою на ньому, оскільки $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

Найбільше значення функції на $[a;b]$ позначають символом

$$M = \sup_{[a;b]} f(x),$$

а найменше

$$m = \inf_{[a;b]} f(x).$$

Різниця між M і m називається коливанням неперервної функції на $[a;b]$ і позначається буквою ω: $\omega = M - m$.

Вправи

1. Знайти область визначення функції:

1) $y = -\sqrt{x^2 - 4x + 4}$; 2) $y = \log_2(x-2)$; 3) $y = \sqrt{x} - \lg(2x-3)$; 4) $y = \arccos \dfrac{2x}{x^2+1}$; 5) $y = \sqrt{x \sin^2 \pi x}$; 6) $y = \dfrac{1}{\lg(1-x)} + \sqrt[3]{x+2}$.

2. Знайти множину значень функції:

1) $y = 2 - x - x^2$; 2) $y = \sqrt{3} \sin x + \cos x$; 3) $y = 2^{\sin x}$; 4) $y = \frac{1}{2} \arcsin x^2$; 5) $y = \sqrt{5x - 4 - x^2}$; 6) $y = \dfrac{6x}{x^2+1}$.

3. Дослідити на парність (непарність) функцію:

1) $y = x^2 \sqrt[3]{x} + 2 \sin x$; 2) $y = |x| - 5e^{x^2}$; 3) $y = x^2 + 5x$; 4) $y = \ln^2(\sqrt{x^2+1} + x)$; 5) $y = (x-1)^2 \sin^2 x$; 6) $y = |x| + x^4$, де $x \in [-2; 10]$.

4. Знайти основний період функції:

1) $y = \sin(2x - \frac{1}{2})$; 2) $y = 6 \operatorname{tg} \frac{3\pi x}{4}$; 3) $y = \cos^2 2\pi x$; 4) $y = \cos 2x \cos 6x$; 5) $y = \operatorname{tg} 4\pi x + \operatorname{ctg} 5\pi x$; 6) $y = \cos 2x + \operatorname{tg} 3x + \operatorname{ctg} 4x$.

5. Знайти найбільше і найменше значення функції:

1) $y = 4 + \sqrt{1 - x^2}$; 2) $y = 3 \sin x + 4 \cos x$; 3) $y = \log_2(x^2 + 4x + 6)$; 4) $y = 2^{\cos x}$; 5) $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

6. Знайти таке значення x, для якого функція $y = \frac{x^2}{32 + 2x^4}$ набуває найбільшого значення.

7. З'ясувати, які з наведених нижче функцій мають обернені; знайти відповідні обернені функції та їхні області визначення:

1) $y = ax + b$; 2) $y = \ln 2x$; 3) $y = 2^{x/2}$; 4) $y = x^2 - 1$, $x \in (-\infty; -\frac{1}{2}]$; 5) $y = \begin{cases} x, \text{ якщо } x \le 0, \\ 2x, \text{ якщо } x > 0. \end{cases}$

8. Використовуючи означення границі функції, довести, що:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n+4}{n} = 3$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \cos \dfrac{n\pi}{4} = 0$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n-1}{n+3} = 2$; 4) $\lim\limits_{x\to 4}(6 - 5x) = -14$; 5) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x-3}{2x+1} = 2$.

9. Знайти границю послідовності: 1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 2n^2 + 2}{3n^2 + 4n}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n+1}{3n-1}$; 3) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+3} - \sqrt{n})$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1 + 2 + \ldots + n}{n+2} - \dfrac{n}{2} \right)$;

5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\cdot\sin n!}{n+1}$; 6) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^{n+5}$; 7) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n}$.

10. Знайти границю: 1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$; 2) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{3x+6}{x^3+8}$;
3) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;
6) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin x-\cos x}{\cos 2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^4+13x^2+7}-2x^2)$; 8) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 5x}$;
9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$; 11) $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\ sin\dfrac{1}{x-5}$;
12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; 13) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$; 14) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(2\operatorname{arctg}x-\dfrac{\pi}{\cos x}\right)$;
15) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\arcsin x}{2x+\arcsin x}$; 16) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{2}{x})^x$; 17) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;
18) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-3}\right)^{x^3-5}$; 19) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{2x^2}}$; 20) $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$;
21) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

11. Дослідити функцію на неперервність і визначити характер точок розриву:

$$1)\quad f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}(2x^2+3), & \text{якщо}\ \infty<x\le 1,\\ 6-5x, & \text{якщо}\ 1<x<3,\\ x-3, & \text{якщо}\ 3\le x<+\infty;\end{cases}$$

2) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2-1}{x-1}, & \text{якщо}\ x\ne 1,\\ 2, & \text{якщо}\ x=1;\end{cases}$ 3) $f(x)=\begin{cases}\frac{1-\sqrt[3]{x}}{1-x}, & \text{якщо}\ x\ne 1,\\ 1, & \text{якщо}\ x=1;\end{cases}$

$$4)\quad f(x)=\begin{cases}2x+1, & \text{якщо}\ 2\le x\le 0,\\ x^2+2, & \text{якщо}\ 0<x\le 2;\end{cases}$$

$$5)\quad f(x)=\begin{cases}2x, & \text{якщо}\ x\le 0,\\ 1-x, & \text{якщо}\ 0<x\le 2,\\ \frac{1}{2-x}, & \text{якщо}\ x>2;\end{cases}$$

$$6)\quad f(x)=\frac{|2x-3|}{2x-3};\qquad 7)\quad f(x)=\frac{x}{x+2}.$$

12. Знайти границю: 1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{10^x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{2x}-1}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x}{1+\operatorname{tg} x}\right)^{\frac{1}{x}}$;
6) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x)^{\operatorname{ctg}^2 2x}$; 7) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$;
8) $\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(\ln(1+\dfrac{x^2}{3})-\ln\dfrac{x^2}{3}\right)$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\lg(1+x^2)}{x\sin 2x}$; 10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}$.

Відповіді

1. 1) $\mathbb{R}$; 2) $(2;+\infty)$; 3) $(\frac{3}{2};+\infty)$; 4) $\mathbb{R}$; 5) $\mathbb{Z}\cup(0;+\infty)$; 6) $(-\infty;0)\cup(0;1)$. **2.** 1) $(-\infty;\frac{9}{4}]$; 2) $[-2;2]$; 3) $[\frac{1}{2};2]$; 4) $[0;\frac{\pi}{4}]$; 5) $[0;\frac{3}{2}]$; 6) $[-3;3]$. **3.** 1) Непарна; 2) Парна; 3) Ні парна, ні непарна; 4) Парна; 5) Ні парна, ні непарна; 6) Ні парна, ні непарна. **4.** 1) π; 2) $\frac{4}{3}$; 3) $\frac{1}{2}$; 4) $\frac{\pi}{2}$; 5) 1; 6) π. **5.** 1) $y_{\min}=4$, $y_{\max}=5$; 2) $y_{\min}=-5$, $y_{\max}=5$; 3) $y_{\min}=1$; 4) $y_{\min}=\frac{1}{2}$, $y_{\max}=2$; 5) $y_{\min}=\frac{1}{2}$, $y_{\max}=1$. **6.** $x=\pm 2$, $y_{\max}=\frac{1}{16}$. **7.** 1) Якщо $a=0$, то обернена функція не існує; якщо $a\neq 0$, то $x=\dfrac{y-b}{a}$ – обернена функція і $D=(-\infty;+\infty)$; 2) $x=\frac{1}{2}e^{y}$, $D=(-\infty;+\infty)$; 3) $x=2\log_2 y$, $D=(0;+\infty)$; 4) $x=-\sqrt{y-1}$, $D=[-\frac{3}{4};+\infty)$; 5) $x=\begin{cases} y, & \text{якщо } y\le 0,\\ \frac{y}{2}, & \text{якщо } y>0.\end{cases}$

9. 1) ∞; 2) $\frac{2}{3}$; 3) 0; 4) $-\frac{1}{2}$; 5) 0; 6) e^5; 7) e^{-3}.

10. 1) 0 ; 2) $\frac{1}{4}$; 3)-12; 4) $\frac{5}{2}$; 5) 4; 6) $-\frac{1}{\sqrt{2}}$; 7) $\frac{13}{4}$; 8) $\frac{2}{5}$; 9) $\frac{3}{4}$; 10) -1; 11) 1; 12) 8; 13) $-\frac{1}{2}$; 14) -2; 15) $\frac{1}{3}$; 16) e^2; 17) e^3; 18) ∞; 19) $e^{\frac{-1}{4}}$; 20) e^{-1}; 21) $e^{\frac{-1}{2}}$.

11. 1) $x=3$ – точка розриву 1-го роду; 2) неперервна; 3) $x=1$ – точка усувного розриву; 4) $x=0$ – точка розриву 1-го роду; 5) $x=0$ – точка розриву 1-го роду; $x=2$ – точка розриву 2-го роду; 6) $x=\frac{3}{2}$ – точка розриву 1-го роду; 7) $x=-2$ – точка розриву 2-го роду.

12. 1) $\lg e$; 2) $\frac{5}{3}$; 3) $2\ln a$; 4) e; 5) 1; 6) $e^{-1/2}$; 7) $e^{-1/2}$; 8) 3; 9) $\frac{1}{2}\lg e$; 10) $-\frac{1}{2}$.

Диференціальне числення функції однієї змінної

1. Поняття похідної

1.1. Означення похідної

Нехай на деякому проміжку X визначена функція $y = f(x)$. Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо аргументу x у точці x_0 приросту Δx такого, щоб точка $x_0 + \Delta x$ належала проміжку X. При цьому функція f набуде приросту $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Розглянемо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \tag{1}$$

яке називається **різницевим відношенням**.

Означення 1. *Похідною функції f у точці x_0 називається границя при $\Delta x \to 0$ різницевого відношення (1) за умови, що вона існує.*

Для позначення похідної функції f в точці x_0 використовують символи $y'(x_0)$, $f'(x_0)$ або $\dfrac{df(x_0)}{dx}$.

Отже, згідно з означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо для деякого значення x_0 виконуються умови

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \text{ або } \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

то кажуть, що в точці x_0 функція f має **нескінченну похідну** відповідно **знаку плюс** або **знаку мінус**. На відміну від нескінченної похідної означену перед цим похідну функції інколи називають **скінченною похідною**.

Якщо функція f має скінченну похідну $f'(x)$ у кожній точці $x \in X$, то кажуть, що функція має похідну на проміжку X.

Наведемо приклади знаходження похідних від деяких функцій.

Приклад 1. Знайтити похідну функції $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$, де C – стала.

◀ Візьмемо довільну точку $x \in \mathbb{R}$ і надамо їй приросту Δx. Тоді функція набуде приросту

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0.$$

Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$. Звідси випливає, що

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

Отже, $(C)' = 0$, $x \in \mathbb{R}$. ▶

Приклад 2. Знайти похідну функції $f(x) = x$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ Нехай x – довільна точка з $\mathbb{R}$. Надамо їй приросту Δx. Тоді функція одержить приріст

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x) - x = \Delta x.$$

Тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, звідки випливає, що

$$\lim_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 1 = 1.$$

Отже, $(x)' = 1$, $x \in \mathbb{R}$. ▶

Приклад 3. Знайти похідну функції $f(x) = x^n$, $n \in N$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ Візьмемо довільну точку $x \in R$ і надамо їй приросту Δx. Тоді функція набуде приросту

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) =$$

$$= (x + \Delta x)^n - x^n = x^n + nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x^2 + \ldots + \Delta x^n - x^n =$$

$$= nx^{n-1}\Delta x + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x2 + \ldots + \Delta x^n.$$

Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x + \ldots + \Delta x^{n-1}$$

і

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}\Delta x+\ldots+\Delta x^{n-1}\right)=nx^{n-1}.$$

Отже, $(x^n)'=nx^{n-1}$, $x\in\mathbb{R}$. ▶

1.2. Геометричний, фізичний та економічний зміст похідної

1.2.1. Геометричний зміст похідної. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на інтервалі $(a;b)$ і нехай точка M на графіку цієї функції відповідає значенню аргументу x_0, а точка P – значенню $x_0+\Delta x$. Проведемо через точки M і P пряму і назвемо її **січною**. Позначимо через $\varphi(\Delta x)$ кут між січною і віссю Ox (рис. 1). Очевидно, що цей кут залежить від Δx. Якщо існує $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi(\Delta x)=\varphi_0$, то пряму з кутовим коефіцієнтом $k = \operatorname{tg}\varphi_0$, що проходить через точку $M(x_0; f(x_0))$, називатимемо **граничним положенням січної** MP при $\Delta x\to 0$ або, що те саме, при прямуванні точки P до точки M вздовж графіка.

Дотичною до графіка функції $y = f(x)$, $x\in(a;b)$, у точці $M(x_0; f(x_0))$ назвемо граничне положення січної MP при $\Delta x\to 0$, або, що те саме, при $P\to M$.

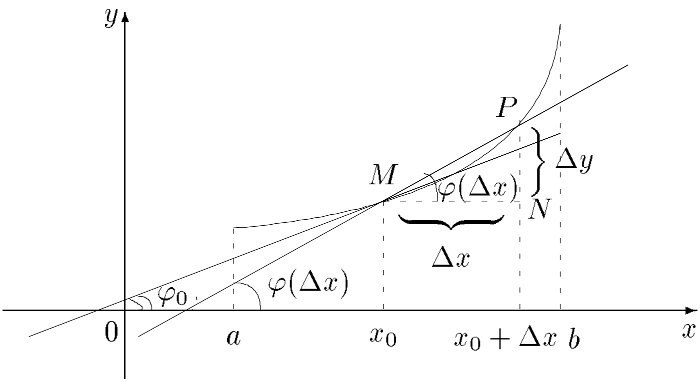


Рис. 1

З цього означення випливає, що для існування дотичної досить, щоб існувала границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x) = \varphi_0$, яка дорівнює куту нахилу дотичної до осі Ox.

Доведемо, що коли функція f має в точці x_0 похідну, то існує дотична до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0; f(x_0))$, причому кутовий коефіцієнт цієї дотичної, тобто тангенс кута нахилу її до осі Ox, дорівнює похідній $f'(x_0)$.

З трикутника MNP знаходимо, що

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{PN}{MN} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \qquad (2)$$

Оскільки існує похідна, то існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0).$$

При $\Delta x \to 0$ січна переходить у дотичну, а тому, скориставшись неперервністю тангенса в його області визначення, отримаємо $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \operatorname{tg}(\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi(\Delta x)) = \operatorname{tg} \varphi_0$.

Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$ в обох частинах рівності (2), одержимо

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = f'(x_0),$$

що й треба було довести. Отже, *похідна функції $y = f(x)$ в точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $M(x_0; f(x_0))$*. Якщо скористатися рівнянням прямої, що проходить через задану точку у заданому напрямку, то рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0; f(x_0))$ матиме вигляд

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

1.2.2. Фізичний зміст похідної. Припустимо, що функція $y = f(x)$ описує закон руху матеріальної точки M вздовж прямої, тобто $y = f(x)$ – шлях, пройдений точкою M від початку відліку за час x. Тоді за час x_0 пройдено шлях $y_0 = f(x_0)$, а за час $x_0 + \Delta x$

– шлях $y_1 = f(x_0 + \Delta x)$. За проміжок часу Δx точка M пройде відрізок шляху $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Відношення $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ називається **середньою швидкістю** за час Δx, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ визначає **миттєву швидкість точки в момент часу** x_0.

Поняття швидкості, запозичене з фізики, зручне при дослідженні поведінки довільної функції. Яку б залежність не відображала функція $y = f(x)$, відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ є середньою швидкістю зміни y відносно зміни x, а $y'(x_0)$ – миттєва швидкість зміни y при $x = x_0$.

Важливість похідної полягає в тому, що при вивченні довільних процесів і явищ природи за її допомогою можна оцінити швидкість зміни зв'язаних між собою величин.

1.2.3. Економічний зміст похідної. Як один із прикладів застосування похідної в економіці розглянемо наступну ситуацію. Нехай функція $y = f(x)$ виражає кількість виробленої продукції на момент часу x і треба знайти продуктивність праці в момент часу x_0. Очевидно, що за період часу від x_0 до $x_0+\Delta x$ кількість виробленої продукції зміниться на величину $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Тоді середня продуктивність праці за цей період часу дорівнює $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Продуктивність же праці в момент часу x_0 можна знайти як граничне значення середньої продуктивності при $\Delta x \to 0$, тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(x_0).$$

1.3. Права і ліва похідні

Використовуючи праву і ліву границі функції, введемо поняття правої і лівої похідної функції $y = f(x)$ в точці x_0.

Означення 2. *Правою (лівою) похідною функції* $y = f(x)$ *в точці* x_0 *називається права (ліва) границя відношення* $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ *при* $\Delta x \to 0$ *за умови, що ця границя існує. Праву похідну позначають символом* $f'(x_0 + 0)$, *а ліву –* $f'(x_0 - 0)$. *Отже,*

$$f'(x_0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta f}{\Delta x},\quad f'(x_0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Якщо функція f має в точці x_0 похідну, то вона має в цій точці і праву і ліву похідні, які однакові.

Обернене твердження таке: *якщо функція $y=f(x)$ має в точці x_0 і праву і ліву похідні, які однакові, то функція $y=f(x)$ має в точці x_0 похідну.*

Існують функції, які мають в точці x_0 ліву і праву похідні, але не мають похідної в цій точці. Наприклад, функція

$$f(x)=|x|=\begin{cases} x, & \text{якщо } x\geq 0,\\ -x, & \text{якщо } x<0.\end{cases}$$

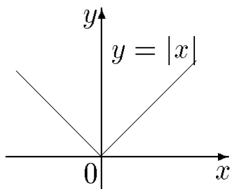
Ця функція має в точці $x_0=0$ праву похідну, яка дорівнює

$$f'(0+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

і ліву похідну, яка дорівнює

$$f'(0-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Оскільки $f'(0+0)\neq f'(0-0)$, то ця функція не має похідної в точці $x_0=0$. Геометрично це означає відсутність дотичної до графіка функції в точці $x_0=0$



.

2. Диференційовність функції. Диференціал

2.1. Диференційовність функції в точці

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку X. Символом x_0 позначимо деяке фіксоване значення аргументу із вказаного проміжку, а символом Δx – приріст аргументу такий, що $x_0 + \Delta \in X$.

Означення. *Функція f називається* **диференційовною у точці** x_0, *якщо приріст Δy цієї функції в точці x_0, який відповідає приросту аргументу Δx, можна зобразити у вигляді*

$$\Delta y = A\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{3}$$

де A – деяке число, незалежне від Δx, а $\alpha(\Delta x)$ – нескінченно мала функція при $\Delta x \to 0$.

Оскільки $\alpha(\Delta x)\Delta x = o(\Delta x)$, то формулу (3) можна записати у вигляді

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x). \tag{4}$$

Теорема 1. *Для того щоб функція f була диференційовною в точці x_0, необхідно і досить, щоб вона мала у цій точці скінченну похідну.*

◀ **Необхідність.** Нехай функція f диференційовна в точці x_0, тобто має місце рівність (3). Припустивши, що $\Delta x \neq 0$, після ділення (3) на Δx, дістанемо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x). \tag{5}$$

Якщо перейти в (5) до границі при $\Delta x \to 0$, то матимемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = A,$$

тобто $f'(x_0)$ існує й дорівнює A.

Достатність. Нехай функція f має в точці x_0 скінченну похідну, тобто існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0),$$

а це означає, що функція

$$\alpha(\Delta x) = \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$$

є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$.

Отже,

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x), \tag{6}$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Формула (6) збігається з (3), якщо позначити через A число $f'(x_0)$, яке не залежить від Δx. ▶

Теорема 1 дозволяє надалі ототожнювати поняття диференційовності функції у точці з поняттям існування похідної у цій точці. Тому операцію знаходження похідної називають **диференціюванням**.

2.2. Зв'язок між поняттям диференційовності та неперервності функції

Теорема 2. *Якщо функція f диференційовна в точці x_0, то вона й неперервна в цій точці.*

◀ Згідно з означенням диференційовності функції f у точці x_0 її приріст у цій точці можна подати у вигляді (3). Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = A \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0,$$

а це означає, що функція f неперервна в точці x_0. ▶

Твердження, обернене до теореми 2, неправильне, бо існують функції, які неперервні в точці, але недиференційовні в цій точці.

Наприклад, функція $y = |x|$ неперервна в точці $x_0 = 0$, але не диференційовна в цій точці. Існують функції, які неперервні на деякій множині, але не мають похідної в жодній точці цієї множини.

2.3. Поняття диференціала функції

Нехай функція f диференційовна в точці x_0, тобто виконується рівність (3). Аналізуючи її, бачимо, що приріст Δy є сумою двох доданків. Перший з цих доданків $A\Delta x$ при $A \neq 0$ є лінійною і однорідною функцією від Δx, яка є нескінченно малою при $\Delta x \to 0$ того самого прядку, що й Δx. Другий доданок $\alpha(\Delta x)\Delta x$ при $\Delta x \to 0$ є нескінченно малою функцією вищого порядку, ніж Δx, оскільки $\dfrac{\alpha(\Delta x)\Delta x}{\Delta x} = \alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Отже, при $\Delta x \to 0$ перший доданок $A\Delta x$ є головною частиною приросту диференційовної функції. Цю головну частину приросту називають **диференціалом функції у точці** x_0, що відповідає приросту аргументу Δx. Позначають диференціал символом dy. Отже,

$$dy = A\Delta x. \tag{7}$$

Якщо $A = 0$, то доданок $A\Delta x$ перестає бути головною частиною приросту Δy, бо він дорівнює нулю, тоді як $\alpha(\Delta x)\Delta x \neq 0$. Прийнято вважати, що й в цьому випадку диференціал визначається формулою (7), тобто $dy = 0$.

Оскільки $A = f'(x_0)$, то формулу (7) можна записати у вигляді

$$dy = f'(x_0)\Delta x. \tag{8}$$

Очевидно, що dy, взагалі кажучи, не дорівнює приросту функції Δy.

Введемо поняття диференціала dx незалежної змінної x. Під диференціалом dx незалежної змінної x розумітимемо довільне незалежне від x число. Домовимося за число dx брати приріст Δx незалежної змінної x. Ця домовленість оправдана, якщо розглядати незалежну змінну x як функцію вигляду $y = x$, для якої

$dy = dx = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$. Звідси випливає, що формулу (8) можна переписати у вигляді

$$dy = f'(x_0)dx. \tag{9}$$

Оскільки при малих Δx

$$\Delta y \approx dy, \tag{10}$$

то диференціал зручно використовувати для наближених обчислень. Для цього рівність (10) записують у вигляді

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x,$$

або

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Приклад 1. Знайти $\sqrt[3]{1,1}$.

◀ Нехай $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $x_0 = 1$. Тоді

$$\Delta x = 0,1, \quad \text{а} \quad f(x_0) = f(1) = \sqrt[3]{1} = 1.$$

Оскільки

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},$$

то $f'(1) = \dfrac{1}{3}$. Тому

$$\sqrt[3]{1,1} \approx \sqrt[3]{1} + 0,1 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{1^2}} = 1 + 0,1 \cdot \frac{1}{3} = 1,033. \ ▶$$

3. Основні правила диференціювання. Обчислення похідних основних елементарних функцій

3.1. Основні правила диференціювання

Теорема 1. *Якщо функції $u = u(x)$ і $v = v(x)$ диференційовні в точці x, то сума, різниця, добуток і частка цих функцій (частка за умови, що $v(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці, причому правильні формули*

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x),$$

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0. \qquad (11)$$

◀ Доведемо одну з рівностей (11), наприклад, другу. Нехай $y = u(x)v(x)$. Тоді

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x) =$$

$$= (u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x + \Delta x)v(x))+$$

$$+(u(x + \Delta x)v(x) - u(x)v(x)) = u(x + \Delta x)(v(x + \Delta x) - v(x))+$$

$$+v(x)(u(x + \Delta x) - u(x)).$$

Тому

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u(x + \Delta x)\frac{\Delta v(x)}{\Delta x} + v(x)\frac{\Delta u(x)}{\Delta x}. \qquad (12)$$

Якщо $\Delta x \to 0$, то згідно з умовою $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v(x)}{\Delta x} = v'(x)$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u(x)}{\Delta x} = u'(x)$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} u(x + \Delta x) = u(x)$, бо u – неперервна функція.

Отже, права частина (12) при $\Delta x \to 0$ має границю $u(x)v'(x)+v(x)u'(x)$. Тому існує границя й лівої частини, яка дорівнює $y'(x)$ і має місце рівність

$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \quad \blacktriangleright$$

Наслідок. *Сталий множник виноситься за знак похідної, тобто*

$$(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x),$$

де C – стала, u – диференційовна функція у точці x.

3.2. Обчислення похідних тригонометричних, логарифмічної та показникової функцій

3.2.1. Похідні тригонометричних функцій.

1. Похідна функції $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$, визначається формулою

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◀ Маємо

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Тому при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cos(x + \frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = 1$, а $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x$ згідно з неперервністю функції $\cos x$, $x \in \mathbb{R}$, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \frac{\Delta x}{2}) = \cos x.$$

Отже,

$$(\sin x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

2. Похідна функції $y = \cos$, $x \in \mathbb{R}$, визначається формулою

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

◀ Маємо

$$\Delta y = \cos(x + \Delta x) - \cos x = -2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Тому при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\sin(x+\frac{\Delta x}{2})}{\Delta x} = -\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\sin(x + \frac{\Delta x}{2}).$$

Оскільки згідно з неперервністю функції $\sin x$, $x \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) = \sin x$, то

$$y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\lim_{\Delta x\to 0}\sin(x+\frac{\Delta x}{2}) = -\sin x,$$

тобто

$$(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

3. Похідна функції $y = \operatorname{tg} x$ визначається формулою

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}.$$

◀ Оскільки $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, то згідно з теоремою 3

$$y' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже,

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}\right\}. \ ▶$$

4. Похідна функції $y = \operatorname{ctg} x$ визначається формулою

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \;\; x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n, \, n \in \mathbb{Z}\}.$$

◀ Оскільки $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, то аналогічно як у випадку $\operatorname{tg} x$, маємо

$$y' = \frac{(\cos x) \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{(-\sin x) \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= -\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

тобто

$$(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n, \, n \in \mathbb{Z}\}. \;▶$$

3.2.2. Похідна логарифмічної функції. Похідна функції $y = \log_a x$, $x > 0$, $0 < a \neq 1$, визначається формулою

$$y' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}, \;\; x > 0.$$

◀ Взявши за x довільну точку напівпрямої $x > 0$ і, вважаючи, що $|\Delta x| < x$, можна записати:

$$\Delta y = \log_a (x + \Delta x) - \log_a x = \log_a \frac{x + \Delta x}{x} = \log_a (1 + \frac{\Delta x}{x}).$$

Отже, при $\Delta x \neq 0$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \frac{x}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)$$

або

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(1 + \dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\dfrac{x}{\Delta x}} = e$, а логарифмічна функція неперервна, то

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\dfrac{x}{\Delta x}} \right) =$$

$$= \frac{1}{x} \log_a \left(\lim_{\Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} \right) = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a},$$

тобто

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}, \quad x > 0.$$

Зокрема, при $a = e$

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0. \quad \blacktriangleright$$

3.2.3. Похідна показникової функції. Похідна функції $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$, визначається формулою

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}.$$

$\blacktriangleleft$ Маємо

$$\Delta y = a^{x + \Delta x} - a^x = a^x (a^{\Delta x} - 1), x \in \mathbb{R}.$$

Якщо $\Delta x \neq 0$, то

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^x (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln a$, то $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} a^x \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \ln a$, тобто

$$(a^x)' = a^x \ln a, \quad x \in \mathbb{R}, 0 < a \neq 1.$$

Зокрема, $(e^x)' = e^x$, $\quad \blacktriangleright$.

3.3. Похідна оберненої функції. Обчислення похідних обернених тригонометричних функцій

Теорема 2. *Нехай функція $y = f(x)$ у деякому околі точки x_0 зростає (спадає) і неперервна. Нехай, крім того, вона диференційовна в точці x_0 і $f'(x_0) \neq 0$. Тоді існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка визначена і строго монотонна у деякому околі точки $y_0 = f(x_0)$, диференційовна в цій точці й правильна рівність*

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

◀ Для функції $y = f(x)$ виконується умова існування оберненої функції. Тому існує обернена функція $x = f^{-1}(y)$, яка визначена у деякому околі точки $y_0 = f(x_0)$ і неперервна в цьому околі. Надамо аргументу y цієї оберненої функції в точці y_0 довільного приросту $\Delta y \neq 0$. Цьому приросту відповідає приріст Δx оберненої функції, причому згідно із зростанням (спаданням) функції $\Delta x \neq 0$. Отже, маємо право написати тотожність

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}.$$

Нехай тепер $\Delta y \to 0$, тоді й $\Delta x \to 0$, бо обернена функція $x = f^{-1}(y)$ неперервна в точці y_0. Тому

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Звідси випливає, що

$$(f^{-1}(y_0))' = \frac{1}{f'(x_0)}. \quad \blacktriangleright$$

Тепер застосуємо цю теорему для обчислення похідних від обернених тригонометричних функцій.

1. Похідна функції $y = \arcsin x$. Ця функція визначена на інтервалі $-1 < x < 1$ і є оберненою до функції $x = \sin y$, яка визначена на інтервалі $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Оскільки для функції $x = \sin y$ в околі довільної точки $y \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ виконуються умови теореми 2, то функція $y = \arcsin x$ диференційовна в довільній точці $x = \sin y$ і правильна формула

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}}.$$

Ми взяли $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$, бо $\cos y$ на інтервалі $(-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2})$ додатний. Якщо зауважити, що $\sin y = x$, то матимемо

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

2. Похідна функції $y = \arccos x$. Ця функція визначена на $(-1; 1)$ і є оберненою до функції $x = \cos y$, яка визначена на $(0; \pi)$. Тому

$$(\arccos x)' = \frac{1}{(\cos y)'} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}}.$$

Ми врахували, що $\sin y = \sqrt{1 - \cos^2 y}$, бо $\sin y > 0$ на $(0; \pi)$.

Оскільки $x = \cos y$, то

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}, \quad x \in (-1; 1).$$

3. Похідна функції $y = \operatorname{arctg} x$. Ця функція визначена на $\mathbb{R}$ і є оберненою до $x = \operatorname{tg} y$, яка визначена на $(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Тому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y}.$$

Оскільки $\operatorname{tg} y = x$, то звідси одержуємо

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Похідна функції $y = \operatorname{arcctg} x$. Ця функція визначена на $\mathbb{R}$ і є оберненою до функції $x = \operatorname{ctg} y$, яка визначена на $(0; \pi)$. Тому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{ctg} y)'} = -\sin^2 y = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 y}.$$

Оскільки $\operatorname{ctg} y = x$, то

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3.4. Диференціювання складеної функції

Теорема 3. *Нехай функція $x = \varphi(t)$ диференційовна у точці t_0, а функція $y = f(x)$ диференційовна у відповідній точці $x_0 = \varphi(t_0)$. Тоді складена функція $f(\varphi(t))$ диференційовна у точці t_0, причому правильна рівність*

$$(f(\varphi(t_0)))' = f'(x_0)\varphi'(t_0). \tag{13}$$

◀ Надамо аргументу t у точці t_0 довільного приросту $\Delta t \neq 0$. Йому відповідає приріст Δx функції $x = \varphi(t)$. Приросту Δx у свою чергу відповідає приріст Δy функції $y = f(x)$ в точці x_0. Оскільки функція $y = f(x)$ диференційовна, то її приріст в точці x_0 можна подати у вигляді

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x, \tag{14}$$

де $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Поділивши рівність (14) на $\Delta t \neq 0$, дістанемо

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'(x_0)\frac{\Delta x}{\Delta t} + \alpha(\Delta x)\frac{\Delta x}{\Delta t}. \tag{15}$$

Якщо $\Delta t \to 0$, то з неперервності функції $x = \varphi(t)$ випливає, що й $\Delta x \to 0$, а тоді й $\alpha(\Delta x)$ прямує до нуля. Згідно з умовою теореми існує границя $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t_0)$. Отже, при $\Delta t \to 0$ існує границя правої частини (15), а тому існує границя лівої частини і правильна рівність (13). ▶

Зауваження. У цій теоремі розглянута складена функція, де y залежить від t через проміжну змінну x. Можлива складніша залежність – з двома, трьома і більшим числом проміжних змінних, але правило диференціювання залишається тим самим.

Наприклад, якщо $y = f(x)$, де $x = \varphi(u)$, а $u = \psi(v)$ і $v = \chi(t)$, то похідну $y'(t)$ треба обчислювати за формулою

$$y'(t) = f'(x)\varphi'(u)\psi'(v)\chi'(t). \tag{16}$$

Приклад 1. Знайти похідну функції

$$y = e^{\operatorname{arctg} x}.$$

◀ Розглядатимемо зазначену функцію як складену вигляду $y = e^u$, де $u = \operatorname{arctg} x$. Тоді за формулою (13)

$$y'(x) = y'(u)u'(x) = e^u \frac{1}{1+x^2}.$$

Замінюючи u на $\operatorname{arctg} x$, остаточно матимемо

$$y' = e^{\operatorname{arctg} x} \frac{1}{1+x^2}. \quad ▶$$

Приклад 2. Знайти похідну функції $y = 5^{\operatorname{arcctg}(x^2+1)^3}$.

◀ Задану функцію можна подати у вигляді $y = 5^u$, де $u = \operatorname{arcctg} v$, а $v = w^3$ і $w = x^2 + 1$.

Використовуючи формулу (16), одержуємо

$$y'(x) = y'(u)u'(v)v'(w)w'(x) = (5^u)'(\operatorname{arcctg} v)'(w^3)'(x^2+1)' =$$

$$= 5^u \ln 5 (-\frac{1}{1+v^2}) 3w^2 2x = 5^{\operatorname{arcctg}(x^2+1)^3} \ln 5 (-\frac{1}{1+(x^2+1)^6}) \times$$

$$\times 3(x^2+1)^2 2x = -\frac{6x(x^2+1)^2}{1+(x^2+1)^6} 5^{\operatorname{arcctg}(x^2+1)^3} \ln 5. \quad ▶$$

3.5. Логарифмічна похідна. Похідна степеневої функції з довільним дійсним показником

3.5.1. Поняття логарифмічної похідної. Нехай функція $y = f(x)$ додатна і диференційовна в точці x. Тоді в цій точці існує $\ln y = \ln f(x)$. Розглядаючи $\ln f(x)$ як складену функцію аргументу x, можна знайти похідну цієї функції у точці x, беручи $y = f(x)$ за проміжний аргумент:

$$(\ln f(x))' = \frac{y'}{y}. \tag{17}$$

Величина, яка визначається формулою (17), називається **логарифмічною похідною**.

Приклад 3. За допомогою логарифмічної похідної знайти похідну степенево-показникової функції $y = u(x)^{v(x)}$, де $u(x) > 0$ і $u(x)$ та $v(x)$ диференційовні в точці x.

◀ Оскільки $\ln y = v(x)\ln u(x)$, то, скориставшись формулою (17), дістанемо

$$\frac{y'}{y} = (v(x)\ln u(x))' \quad \text{або} \quad \frac{y'}{y} = v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}.$$

Звідси, враховуючи те, що $y = u(x)^{v(x)}$, дістанемо таку формулу для похідної степенево-показникової функції

$$y' = u(x)^{v(x)}(v'(x)\ln u(x) + v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}). \quad ▶ \tag{18}$$

Приклад 4. Знайти похідну функції $y = x^x$, $x > 0$.

◀ Задану функцію можна подати у вигляді $y = u(x)^{v(x)}$, де $u(x) = x$ і $v(x) = x$. За допомогою формули (18) знаходимо

$$y' = x^x(1 \cdot \ln x + x\frac{1}{x}) = x^x(\ln x + 1),$$

тобто $(x^x)' = x^x(\ln x + 1), x > 0$. ▶

Логарифмічна похідна часто використовується в задачах економіки. Наведемо декілька з них.

Нехай $K = K(t)$ – величина вкладу в момент часу t. Чи можна визначити наближено ставку банківського відсотка r за функцією

$K(t)$? Якщо відсотки нараховуються один раз, то за період часу Δt вони становлять $Kr\Delta t$, де r – номінальна ставка за рік, Δt – частина року. Оскільки приріст вкладу і відсотки з вкладу одне й те саме, то $\Delta K = Kr\Delta t$. Звідси одержуємо, що

$$r = \frac{\Delta K}{K\Delta t}.$$

Припустимо, що функція $K(t)$ має похідну $K'(t)$. Тоді можна взяти $\Delta K \approx dK = K'(t)\Delta t$, а тому

$$r \approx \frac{K'(t)\Delta t}{K(t)\Delta t} = \frac{K'(t)}{K(t)} = (\ln K)'.$$

Отже, ставка банківського відсотка r збігається з логарифмічною похідною від величини вкладу.

Приклад 5. Нехай величина вкладу визначається функцією $K(t) = K_0(t+1)^{\frac{3}{2}}$, де t – число років від відкриття вкладу, K_0 – величина початкового вкладу. Знайти, як змінювалась ставка відсотка $r = r(t)$.

◀ Маємо

$$r \approx (\ln K_0(t+1)^{\frac{3}{2}})' = (\ln K_0 + \frac{3}{2}\ln(t+1))' = \frac{3}{2}\frac{1}{t+1},$$

або у відсотках $\quad r \approx (t+1)^{-1}150\%$.

Звідси випливає, що через два роки після відкриття вкладу ставка була $r \approx (2+1)^{-1}150 = 50\%$ річних, а через п'ять років зменшилась до $r \approx (5+1)^{-1}150\% = 25\%$ річних і т.д.

Зауважимо, що величина вкладу при цьому не зменшувалась, а зростала, оскільки $K' = \frac{3}{2}K_0(t+1)^{\frac{1}{2}} > 0$. ▶

Нехай $A(t)$ – вартість деякого активу в момент часу t, r – прибутковість від вкладення грошей в інші активи. Для простоти вважатимемо, що r не залежить від часу. Коли вигідно купувати або продавати актив A?

Щоб відповісти на це питання, знайдемо проміжок часу, протягом якого миттєва прибутковість активу A буде більшою за r.

Оскільки миттєва прибутковість A збігається з темпом зростання його вартості, то шуканий проміжок часу визначається нерівністю

$$(\ln A(t))' > r.$$

Якщо зазначена нерівність визначає проміжок $(t_1; t_2)$, то актив A треба купити в момент t_1 і продати в момент t_2. ▶

Приклад 6. Нехай $r = 10\%$ річних, $A(t) = Ce^{\operatorname{arctg} t}$, $C = const$. У який момент часу найвигідніше купити (продати) актив A?

◀ Маємо

$$(\ln A(t))' = (\ln Ce^{\operatorname{arctg} t})' = (\ln C + \ln e^{\operatorname{arctg} t})' =$$

$$= (\ln C + \operatorname{arctg} t)' = \frac{1}{1+t^2}.$$

Тоді проміжок часу знаходимо з нерівності $\dfrac{1}{1+t^2} > 0,1$, звідки випливає, що $t^2 < 9$, або $t \in (-3; 3)$. Це означає, що прибутковість активу більша за 0,1 на проміжку $(-3; 3)$ Отже, актив вигідно купити в момент $t_1 = -3$ і продати в момент $t_2 = 3$. ▶

3.5.2. Похідна степеневої функції з довільним показником. Похідна функції $y = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $x > 0$, визначається формулою

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, x > 0, \alpha \in \mathbb{R}.$$

◀ Оскільки $y = x^\alpha > 0$, то $\ln y = \alpha \ln x$. Згідно з формулою (17)

$$\frac{y'}{y} = (\alpha \ln x)' \quad \text{або} \quad \frac{y'}{y} = \frac{\alpha}{x}.$$

Звідси випливає, що

$$y' = y\frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1} \quad \text{або} \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, \quad x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

3.6. Неявна функція та її диференціювання

Нехай задано рівняння

$$F(x, y) = 0, \tag{19}$$

де F – функція двох змінних. Якщо кожному значенню $x \in X$ відповідає єдине значення y, яке разом з x задовольняє рівняння (19), то кажуть, що це рівняння визначає на множині X **неявну функцію** $y = \varphi(x)$.

Отже, для неявної функції $y = \varphi(x)$, заданої рівнянням (19), правильна рівність $F(x, \varphi(x)) = 0$, $x \in X$.

Функція $y = f(x)$, $x \in X$, яка задана рівнянням, розв'язаним відносно y, називається **явною.**

У деяких випадках кожному значенню $x \in X$ відповідає декілька значень y, які задовольняють рівняння (19). Тоді це рівняння визначає не одну, а декілька неявних функцій. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 - 1 = 0$ визначає дві неявні функції, які можна записати у явному вигляді, розв'язавши це рівняння відносно y : $y = \sqrt{1 - x^2}$, $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

Не кожну неявну функцію можна подати у вигляді явної елементарної функції. Наприклад, рівняння $5^y - 5y + x^2 - 1 = 0$ визначає неявну функцію $y = \varphi(x)$, але це рівняння не можна розв'язати відносно y так, щоб y виражолося через елементарні функції аргументу x. Крім того, не всяке рівняння $F(x, y) = 0$ визначає неявну функцію. Наприклад, рівняння $x^2 + y^2 + 1 = 0$ не задовольняють жодні дійсні значення x і y, і, отже, воно не визначає жодної неявної функції.

Похідна y'_x функції $y = y(x)$, заданої неявно, знаходиться з рівняння

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = 0,$$

де F розглядається як складена функція аргументу x.

Приклад 7. Знайти y'_x, якщо функція y задана неявно рівнянням $xy + y^2 = 1$.

◀ Продиференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x :

$$y + xy'_x + 2yy'_x = 0 \quad \text{або} \quad y + (x + 2y)y'_x = 0.$$

Тоді $y'_x = -\dfrac{y}{x + 2y}$. ▶

3.7. Таблиця похідних найпростіших елементарних функцій

Зведемо одержані вище формули для обчислення похідних в одну таблицю:

1) $(C)' = 0$, $C \in \mathbb{R}$;

2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$, зокрема, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$;

3) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x}\log_a e$, $x > 0$, $0 < a \neq 1$, зокрема, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$;

4) $(a^x)' = a^x \ln a$, $0 < a \neq 1$, зокрема, $(e^x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$;

5) $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$;

6) $(\cos x)' = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$;

7) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$, $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\, n \in \mathbb{Z}\right\}$;

8) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$, $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pi n,\, n \in \mathbb{Z}\}$;

9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$;

10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1; 1)$;

11) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

12) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R}$.

4. Похідні та диференціали вищих порядків

4.1. Поняття похідної n-го порядку

Похідна f' функції $y = f(x)$, визначеної і диференційовної на проміжку X, є функцією, яка також визначена на заданому проміжку. Може трапитися, що і функція f' є диференційовною у деякій точці $x \in X$, тобто має в цій точці похідну. Цю похідну називають **другою похідною** (похідною другого порядку) функції $y = f(x)$ у точці x і позначають символом $f^{(2)}(x)$ $(f''(x), y''(x), y^{(2)}(x))$.

Послідовно можна ввести поняття третьої похідної, четвертої похідної і т.д. **Похідною** $n-$**го порядку** або $n-$**ною похідною** функції y в точці x називається похідна від похідної $(n-1)-$го порядку, якщо вона існує, тобто

$$y^{(n)}(x) = (y^{n-1}(x))' \; n \in \mathbb{N}.$$

Друга похідна має певний фізичний зміст. Якщо $y = f(x)$ описує закон руху матеріальної точки вздовж прямої, то перша похідна $f'(x)$ є миттєвою швидкістю точки в момент часу x, а друга похідна – швидкістю зміни швидкості, тобто прискоренням рухомої точки в заданий момент.

4.2. Формули для похідних порядку n деяких функцій

1. Знайдемо n-ну похідну степеневої функції $y = x^\alpha$, $x > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Послідовно диференціюючи, отримуємо

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\; y^{(2)} = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \ldots,$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-(n-1))x^{\alpha-n}.$$

У частинному випадку $\alpha = m$, $m \in N$, маємо

$$(x^m)^{(m)} = m!$$

Тому
$$(x^m)^{(n)} = 0 \quad \text{при} \quad n > m.$$

Звідси випливає, що похідна n-го порядку многочлена m-го степеня при $n > m$ дорівнює нулю.

2. Знайдемо n-ну похідну показникової функції $y = a^x$, $x \in \mathbb{R}$, $0 < a \neq 1$. Послідовно диференціюючи, одержуємо
$$y' = a^x \ln a, \;\; y^{(2)} = a^x (\ln a)^2, \;\; y^{(3)} = a^x (\ln a)^3, \; ...,$$
$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n, \;\; x \in \mathbb{R},$$

Зокрема, якщо $y = e^x$, то $(e^x)^{(n)} = e^x$ для довільного $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$.

3. Знайдемо n-ну похідну функції $y = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Послідовно диференціюючи, отримуємо
$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}), \quad y^{(2)} = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}),$$
$$y^{(3)} = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}), \; ..., \; y^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$
Отже,
$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}), \quad x \in \mathbb{R}.$$

4) Аналогічно можна одержати формулу для n-ої похідної функції $y = \cos x$:
$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2}), \;\; x \in \mathbb{R}.$$

4.3. Формула Лейбніца для n-ої похідної добутку двох функцій

Виведемо формулу для обчислення похідної n-го порядку від добутку двох функцій $u(x)v(x)$, що мають похідні довільного порядку. Послідовно диференціюючи, одержуємо
$$y'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

$$y^{(2)} = u^{(2)}(x)v(x) + 2u'(x)v'(x) + u(x)v^{(2)}(x),$$

$$y^{(3)} = u^{(3)}(x)v(x) + u^{(2)}(x)v'(x) + 2u^{(2)}(x)v'(x)+$$

$$+2u^{(2)}(x)v^{(2)}(x) + u'(x)v^{(2)}(x) + u(x)v^{(3)}(x) =$$

$$= u^{(3)}(x)v(x) + 3u^{(2)}(x)v'(x) + 3u'(x)v^{(2)}(x) + u(x)v^{(3)}(x).$$

Праві частини цих рівностей подібні на розклад відповідних степенів бінома $(u+v)^n$ за формулою Ньютона, але замість показників степеня маємо числа, які визначають порядок похідних, а самі функції u і v розглядаємо як похідні нульового порядку $u^{(0)}(x)$ і $v^{(0)}$. Враховуючи це, запишемо загальний вигляд n-ої похідної від добутку двох функцій:

$$y^{(n)}(x) = (u(x)v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x)v(x) + nu^{(n-1)}(x)v'(x)+$$

$$+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}(x)v^{(2)}(x) + \ldots +$$

$$+\frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}(x)v^{(k)}(x) + \ldots + u(x)v^{(n)}(x). \quad (20)$$

Формулу (20) називають **формулою Лейбніца**. Строге доведення цієї формули проводиться методом математичної індукції.

Приклад 1. Знайти п'яту похідну функції $y = x^5e^x$.

◀ Нехай $u(x) = x^5$, $v(x) = e^x$. Тоді

$$u'(x) = 5x^4, \;\; u^{(2)}(x) = 20x^3, \;\; u^{(3)}(x) = 60x^2,$$

$$u^{(4)}(x) = 120x, \;\; u^{(5)}(x) = 120;$$

$$v'(x) = v^{(2)}(x) = v^{(3)}(x) = v^{(4)}(x) = v^{(5)}(x) = e^x.$$

Підставляючи ці вирази у формулу (20) при $n = 5$, дістаємо

$$y^{(5)} = 120e^x + 5\cdot 120xe^x + \frac{5\cdot 4}{2}60x^2e^x + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}20x^3e^x+$$

$$+5\cdot 5x^4e^x + x^5e^x = e^x(120 + 600x^2 + 200x^3 + 25x^4 + x^5). \quad ▶$$

4.4. Диференціали вищих порядків

Для зручності поряд з позначенням диференціалів символами dy і dx використовують позначення δy і δx.

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в кожній точці $x \in X$. Тоді її диференціал

$$dy = f'(x)dx,$$

який назвемо диференціалом першого порядку, є функцією змінних x і dx. Нехай функція $f'(x)$ у свою чергу диференційовна у деякій точці x. Розглядатимемо dx у виразі для dy як сталий множник. Тоді $\delta(dy) = \delta(f'(x)dx) = (f'(x)dx)'\delta x = f''(x)dx\delta x$.

Диференціал $\delta(dy)$ від диференціала dy в точці x, взятий при $\delta x = dx$, називається **диференціалом другого порядку** функції f у точці x і позначається символом d^2y, тобто

$$d^2y = f''(x)(dx)^2.$$

У свою чергу диференціал $\delta(d^2y)$ від диференціала d^2y, взятий при $\delta x = dx$, називається **диференціалом третього порядку функції** f і позначається символом d^3y, і т.д.

$$d^n y = y^{(n)}(x)(dx)^n$$

або

$$d^n y = f^{(n)}(x)(dx)^n, n \in \mathbb{N}. \qquad (21)$$

Приклад 2. Знайти диференціал d^3y функції $y = x^4 - 3x^2 + 4$.

◀ Знайдемо спочатку третю похідну. Маємо

$$y' = 4x^3 - 6x, \;\; y'' = 12x^2 - 6, \;\; y^{(3)} = 24x.$$

Тоді згідно з формулою (21)

$$d^3y = y^{(3)}(x)(dx)^3 = 24x(dx)^3. \quad ▶$$

Приклад 3. Знайти d^2y якщо функція y задана неявно рівнянням $xy + y^2 = 1$.

◀ Продиференціюємо задане співвідношення, розглядаючи y як функцію від x :

$$y + xy'_x + 2yy'_x = 0 \quad \text{або} \quad y + (x+2y)y'_x = 0 \qquad (22).$$

Диференціюємо останнє співвідношення (22)

$$y'_x + (1 + 2y'_x)y'_x + (x+2y)y''_{xx} = 0.$$

Звідси випливає, що

$$y''_{xx} = -\frac{2(y'_x + (y'_x)^2)}{x+2y}.$$

Підставивши у цей вираз знайдене з (22) значення y'_x, дістанемо

$$y''_{xx} = \frac{2(\frac{y}{x+2y} - (\frac{y}{x+2y})^2)}{x+2y} \quad \text{або} \quad y''_{xx} = \frac{2(xy+y^2)}{(x+2y)^3}.$$

Оскільки згідно з умовою $xy + y^2 = 1$, то $y''_{xx} = \dfrac{2}{(x+2y)^3}$. Тоді згідно з формулою (21)

$$d^2y = \frac{2}{(x+2y)^3}(dx)^2. \quad ▶$$

5. Застосування похідної в прикладних задачах

5.1. Похідна в економічних задачах

Пояснимо економічний зміст похідної на конкретних задачах.

1. Нехай витрати виробництва K однорідної продукції є функцією кількості продукції x. Припустимо, що кількість продукції зросла на Δx одиниць. Тоді приріст витрат виробництва становитиме

$$\Delta K = K(x + \Delta x) - K(x).$$

Середній приріст витрат виробництва дорівнюватиме $\dfrac{\Delta K}{\Delta x}$.

Границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta K}{\Delta x} = K'(x)$ називається **граничними витратами виробництва**.

Приклад 1. Залежність витрат виробництва K від обсягу продукції x визначається формулою

$$K = 100x - \frac{x^3}{30}.$$

Знайти граничні витрати, якщо обсяг виробництва становить: 1) 5 одиниць; 2) 10 одиниць продукції.

◀ Маємо $K'(x) = (100x - \dfrac{x^3}{30})' = 100 - \dfrac{x^2}{10}$. Тоді $K'(5) = 100 - \dfrac{5^2}{10} = 100 - \dfrac{25}{10} = \dfrac{975}{10} = 97,5$; $K'(10) = 100 - \dfrac{10^2}{10} = 100 - \dfrac{100}{10} = 90$.

Це означає, що при обсязі виробництва 5 одиниць продукції витрати на виготовлення наступної одиниці становитимуть 97,5 гр. од. а при обсязі виробництва 10 одиниць вони становитимуть 90 гр. од. ▶

2. Нехай $U(x)$ – виторг від продажу x одиниць товару. Міркуючи аналогічно як у попередньому випадку, одержуємо границю

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x}.$$

Ця границя називається **граничним виторгом**.

Приклад 2. Функція попиту на деякий товар визначається формулою $p = 10 - 2x$, де x – обсяг попиту, p – ціна. Знайти граничний виторг при $x = 2$.

◀ Очевидно, що виторг від продажу x одиниць товару

$$U(x) = x(10 - 2x) = 10x - 2x^2.$$

Тоді $U'(x) = 10 - 4x$.

Якщо $x = 2$, то $U'(2) = 10 - 4 \cdot 2 = 2$. Це означає, що коли попит зростає від двох до трьох одиниць, то виторг зросте на 2 грошові одиниці. ▶

Граничні величини характеризують процес зміни економічного об'єкта (процесу) з часом або відносно іншого фактора.

За допомогою похідної можна знайти приріст функції, який відповідає приросту незалежної змінної. У багатьох задачах зручно знаходити відсоток приросту функції, який відповідає відсотку приросту незалежної змінної. Це приводить до поняття **еластичності функції (відносної похідної)**.

Розглянемо функцію $y = f(x)$, $x \in X$. Припустимо, що приріст незалежної змінної x дорівнює Δx, тоді відносний приріст – $\dfrac{\Delta x}{x}$. Відповідний приріст функції $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, а відносний приріст – $\dfrac{\Delta y}{y}$. Складемо відношення $\dfrac{\Delta y}{y} : \dfrac{\Delta x}{x}$, яке показує, у скільки разів відносний приріст функції більший за відносний приріст незалежної змінної. Подамо зазначене відношення у вигляді

$$\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x} = \frac{x}{y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Якщо існує $f'(x)$, то маємо

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{x}{y}\,\frac{\Delta y}{\Delta x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y',$$

тобто

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\frac{\Delta y}{y}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{x}{y}y'. \tag{23}$$

Границю (23) називають **еластичністю функції** f відносно змінної x і позначають символом $E_x(y)$. Отже, згідно з означенням

$$E_x(f) = \frac{x}{f(x)} f'(x) \qquad \text{або} \qquad E_x(y) = \frac{x}{y} y'(x).$$

Еластичність f відносно x є відсотковим приростом функції, який відповідає приросту незалежної змінної на один відсоток.

Приклад 3. Знайти еластичність функції $y = 3x - 6$ та обчислити її при $x = 10$.

◀ Згідно з означенням

$$E_x(y) = \frac{x}{y} y' = \frac{x}{3x-6} 3 = \frac{3x}{3x-6} = \frac{x}{x-2}.$$

Якщо $x = 10$, то

$$E_{10}(y) = \frac{10}{10-2} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Це означає, що коли x зростає на один відсоток, то функція зростає на $\frac{5}{4}$ відсотка. ▶

Теорема 1. *Еластичність добутку двох функцій дорівнює сумі еластичностей множників, а еластичність частки двох функцій – різниці еластичностей чисельника і знаменника, тобто*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v),$$
$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v).$$

◀ Очевидно, що

$$E_x(uv) = \frac{x}{uv}(uv)' = \frac{x}{uv}(u'v + uv') = \frac{x}{u}\ u' + \frac{x}{v}\ v' = E_x(u) + E_x(v).$$

Аналогічно $E_x(\frac{u}{v}) = \frac{x}{\frac{u}{v}} \left(\frac{u}{v}\right)' = = \frac{vtx}{u} \cdot \frac{u'v-uv'}{v^2} = \frac{x}{u}u' - \frac{x}{v}v' = E_x(u) - E_x(v)$. ▶

Розглянемо деякі приклади на застосування еластичності функції.

Приклад 4. Вивчити еластичність попиту відносно ціни.

◀ Нехай на деякий момент попит q залежить від ціни за законом $q = q(p)$. Тоді еластичність попиту відносно ціни

$$E_n \equiv E_p(q) = \frac{p}{q} q'(p).$$

Вона визначає, як змінюється попит на товар, коли його ціна зростає на один відсоток.

У більшості випадків функція попиту є спадною функцією, оскільки з підвищенням ціни на товар попит на нього зменшується. Отже, в таких випадках $q' < 0$. Щоб не мати справи з від'ємними числами, при вивченні еластичності попиту вважають, що

$$E_n = -\frac{p}{q} q'(p).$$

Якщо $E_n > 1$, тобто підвищенню ціни на один відсоток відповідає зниження попиту більше, ніж на один відсоток, то кажуть, що попит **еластичний**.

Якщо $E_n = 1$, тобто підвищенню ціни на один відсоток відповідає зниження попиту на один відсоток, то кажуть, що попит **нейтральний**.

У випадку, коли $0 < E_n < 1$, тобто підвищенню ціни на один відсоток відповідає зниження попиту менше, ніж на один відсоток, то попит називають **нееластичним**.

Наприклад, якщо

$$q = 10 - p,$$

то $E_n = -\dfrac{p}{q}\, q' = -\dfrac{p}{10-p}(-1) = \dfrac{p}{10-p}$.

При $p = 2$ маємо, що попит нееластичний, бо $E_n = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$. Це означає, що при ціні 2 грошові одиниці підвищення ціни на один відсоток викликає зниження попиту на $\dfrac{1}{4}$ відсотка.

Якщо ж

$$q = \frac{c}{p}, \quad c = \mathrm{const},$$

то

$$E_n = -\frac{p}{q} q' = -\frac{p}{\frac{c}{p}} \left(-\frac{c}{p^2} \right) = 1,$$

тобто попит є нейтральним. ▶

Можна розглядати еластичність попиту відносно доходу споживачів, пропозиції відносно ціни, а також еластичність повних і середніх витрат.

Наприклад, якщо підприємство виробляє x одиниць продукції певного виду і $K(x)$ є функцією сумарних витрат, то

$$E_k \equiv E_x(K) = \frac{x}{K} K'(x) = K' : \frac{K}{x}.$$

Отже, еластичність сумарних витрат є відношенням граничних витрат до середніх витрат.

Розглянемо функцію, яка описує середні витрати $\mu = \dfrac{K}{x}$. Тоді

$$E_\mu \equiv E_x(\mu) = \frac{x}{\mu}\,\mu' = \frac{x}{\frac{K}{x}}\left(\frac{K}{x}\right)' = \frac{x^2}{K}\frac{K'x - K}{x^2} = \frac{x}{K}K' - 1 = E_k - 1.$$

Це означає, що еластичність середніх витрат на одиницю продукції менша за еластичність сумарних витрат.

Якщо $E_k = 1$, то $E_\mu = 0$ і, отже, $\mu'(x) = 0$, тобто середні витрати μ сталі. З рівності $E_\mu = 0$ випливає, що $K'x - K = 0$ або $K' = \frac{K}{x}$. Тому при $E_k = 1$ граничні витрати K' дорівнюють середнім витратам.

Приклад 5. Залежність між собівартістю продукції C і обсягом виробництва Q виражається формулою

$$C = 50 - 0,4Q.$$

Знайти еластичність собівартості, якщо обсяг випуску продукції $Q = 15$ грошових одиниць.

◀ Маємо

$$E_Q(C) = \frac{Q}{C}C' = \frac{Q}{50 - 0,4 \cdot Q}(-0,4).$$

Звідси при Q=15 одержимо

$$E_{15}(C) = \frac{15}{50 - 0,4 \cdot 15}(-0,4) = \frac{-6}{50-6} = \frac{-6}{44} = \frac{-3}{22} \approx -0,14.$$

Отже, при заданому обсязі випуску продукції збільшення його на один відсоток приводить до зниження собівартості приблизно на $0,14\%$. ▶

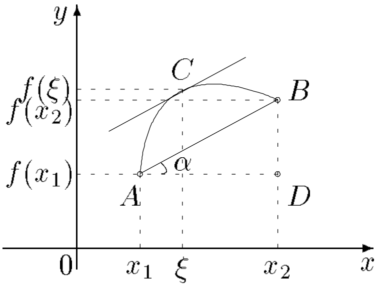
5.2. Застосування похідної до дослідження функцій

5.2.1. Теорема про скінченний приріст функції та наслідки з неї.

Теорема 2 (теорема Лагранжа). *Якщо функція f диференційовна на деякому проміжку X і $\{x_1, x_2\} \subset X, x_1 < x_2$, – довільні значення з цього проміжку, то*

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1), \tag{24}$$

де $x_1 < \xi < x_2$.



◀ Доведення проведемо за допомогою певних нестрогих міркувань. Оскільки в кожній точці графіка функції існує дотична, то, рухаючи її неперервно вздовж графіка, дістанемо, що в точці $C(\xi; f(\xi))$ дотична паралельна січній AB, а це означає, що $\operatorname{tg}\alpha = f'(\xi)$. З ΔABD знаходимо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, а тому

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi),$$

звідки й випливає рівність (24). ▶

Наслідок 1. *Якщо* $f'(x) = 0$, $x \in X$, *то* $f(x) = C$, $x \in X$.

◀ Справді, нехай $f'(x) = 0$, $x \in X$. Візьмемо у (24) $x_1 = x_0$ – фіксоване, а $x_2 = x$ – довільне значення з X. Тоді

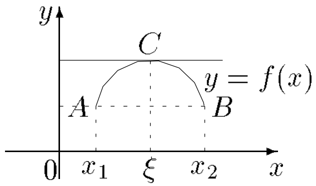
$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) = 0\ (x - x_0) = 0,$$

звідки випливає, що $f(x) = f(x_0) = \text{const}$, $x \in X$. ▶

Наслідок 2. *Якщо* $f_1'(x) = f_2'(x)$, $x \in X$, *то* $f_1(x) = f_2(x) + C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in X$.

◀ Оскільки $(f_1(x) - f_2(x))' = f_1'(x) - f_2'(x) = 0$, $x \in X$, то з наслідку 1 випливає, що $f_1(x) - f_2(x) = C$, $C \in \mathbb{R}$, $x \in X$. ▶

Теорема 3 (теорема Ролля про корені похідної). *Якщо функція f диференційовна на $(x_1; x_2)$ і неперервна на $[x_1; x_2]$ і, крім того, $f_1(x) = f_2(x)$, то існує точка ξ така, що $f'(\xi) = 0$.*



◀ Для простоти вважатимемо, що f диференційовна на $[x_1; x_2]$. Тоді згідно з формулою (24)

$$0 = f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

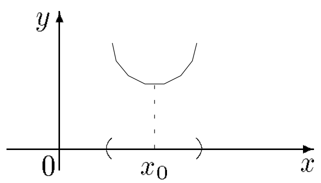
Оскільки $x_2 \neq x_1$, то $f'(\xi) = 0$, $\xi \in (x_1; x_2)$. ▶

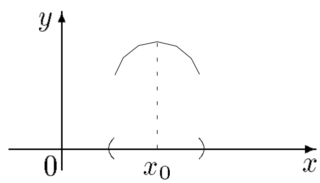
Теорема 4. (достатні умови зростання (спадання) функції). *Якщо в усіх точках проміжку X $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), то функція f зростає (спадає) на X.*

◀ Нехай x_1 і x_2 довільні точки з проміжку X, але такі, що $x_1 < x_2$. Згідно з теоремою 2 $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$, де $\xi \in (x_1; x_2)$. Оскільки $f'(\xi) > 0$ ($f'(\xi) < 0$), то $f(x_2) > f(x_1)$ ($f(x_2) < f(x_1)$), бо $x_2 > x_1$. Це означає, що f зростає (спадає) на X.

5.2.2. Екстремум функції.

Означення. *Функція f має в точці x_0 мінімум (максимум), якщо існує окіл $U(x_0)$ цієї точки такий, що для довільного $x \in U(x_0)$ виконується нерівність $f(x_0) \le f(x), (f(x_0) \ge f(x))$.*





Максимум і мінімум об'єднують спільною назвою **екстремум**.

Теорема 5 (необхідна умова екстремуму). *Якщо функція f диференційовна в точці x_0 і має в цій точці екстремум, то $f'(x_0) = 0$.*

◀ Припустимо, що точка x_0 є точкою максимуму. Тоді для малих Δx маємо $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$. Звідси випливає, що

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} > 0 \quad \text{при} \quad \Delta x < 0,$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < 0 \quad \text{при} \quad \Delta x > 0.$$

Згідно з умовою теореми існує $f'(x_0)$, тобто $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$, а тому, перейшовши до границі в попередніх нерівностях, матимемо $f'(x_0) \leq 0$ при $\Delta x \to 0 + 0$ і $f'(x_0) \geq 0$ при $\Delta x \to 0 - 0$. Оскільки $f'(x_0)$ не залежить від того, як $\Delta x \to 0$, то $f'(x_0) = 0$.

Аналогічно доводиться теорема у випадку мінімуму. ▶

Ця теорема дає **необхідну умову екстремуму**. Корені рівняння $f'(x) = 0$ називаються **критичними** або **стаціонарними точками**. До критичних точок належать також точки, в яких похідна не існує.

Наприклад, для функції $f(x) = |x|$ критичною є точка $x = 0$, у якій похідна не існує.

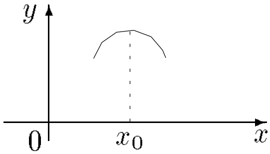
Приклад 6. Знайти критичні точки функції $y = x^3, x \in \mathbb{R}$.

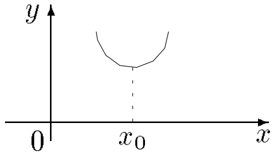
◀ Маємо $y' = 3x^2$. Тоді з рівняння $3x^2 = 0$ знаходимо, що $x = 0$. Отже, точка $x_0 = 0$ є критичною, але в цій точці функція не має екстремуму. ▶

З цього прикладу випливає, що треба ще знати достатні умови екстремуму.

Теорема 6 (достатні умови екстремуму). *Якщо x_0 – критична точка функції f і в деякому околі цієї точки зліва й справа від неї похідна $f'(x)$ має протилежні знаки, то в точці x_0 функція f має екстремум, причому:*

1) максимум, якщо $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) < 0$ при $x > x_0$;





2) мінімум, якщо $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ і $f'(x) > 0$ при $x > x_0$.
Якщо ж похідна не змінює знаку при переході через точку x_0, то в цій точці функція екстремуму не має.

◀ Згідно з умовою $f'(x_0) = 0$, а тому f неперервна в точці x_0 та існує скінченне значення $f(x_0)$. Якщо $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) при $x < x_0$ і $f'(x) < 0 (f'(x) > 0)$ при $x > x_0$, то це означає, що зліва від точки x_0 функція зростає (спадає), а справа від неї – спадає (зростає), тому $f(x_0)$ є найбільшим (найменшим) значенням функції f у деякому околі точки x_0.

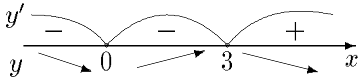
Аналогічно доводиться друга частина теореми. ▶

Приклад 7. Знайти екстремум функції

$$y = \frac{x^4}{4} - x^3.$$

◀ Маємо $y' = x^3 - 3x^2$. Тоді з рівняння $x^3 - 3x^2 = 0$ випливає, що $x_1 = 0$, $x_2 = 3$ є критичними точками.

Скористаємося достатніми умовами: $y' = x^2(x - 3)$ і тоді знаки похідної відмітимо на рисунку



,

тобто $y'(x) < 0$, $-\infty < x < 0$; $y'(x) < 0$, $0 < x < 3$; $y'(x) > 0$, $3 < x < +\infty$.

Отже, в точці $x_1 = 0$ функція не має екстремуму, а в точці $x_2 = 3$ має мінімум, причому $f_{\min} = f(3) = \dfrac{3^4}{4} - 3^3 = 3^3(\dfrac{3}{4} - 1) = -\dfrac{27}{4}$. ▶

Сформулюємо інші достатні умови екстремуму.

Теорема 7. *Якщо функція f двічі неперервно диференційовна в околі точки x_0, і $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) \neq 0$, то в цій точці* *функція f має екстремум, а саме: 1) максимум, якщо $f''(x_0) < 0$; 2) мінімум, якщо $f''(x_0) > 0$.*

◀ Нехай $f'(x_0) = 0$, а $f''(x_0) < 0$. Оскільки f'' неперервна в околі точки x_0 і $f''(x_0) < 0$, то вона є від'ємною і в деякому околі точки x_0, а це означає, що f' спадає в цьому околі. Згідно з умовою $f'(x_0) = 0$, а тому $f'(x) > 0$ зліва від точки x_0, а справа – $f'(x) < 0$. Звідси випливає згідно з теоремою 6, що функція f у точці x_0 має максимум. ▶

Ця теорема не діє у випадку, коли $f''(x_0) = 0$.

5.2.3. Знаходження найбільшого і найменшого значень функції. У застосуваннях важливу роль відіграють задачі про знаходження найбільшого й найменшого значень функції на проміжку X.

Нехай функція f визначена на проміжку X. Якщо для будь-якого $x \in X$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$ для деякого $x_0 \in X$, то x_0 називають точкою **глобального максимуму (мінімуму)** функції на проміжку X, а число $f(x_0)$ – **найбільшим (найменшим)** значенням функції на цьому проміжку і позначають символом $\max\limits_{x\in X} f(x) = f(x_0)$ $(\min\limits_{x\in X} f(x) = f(x_0))$. Наприклад, $\min\limits_{x\in\mathbb{R}} x^2 = 0$, $\max\limits_{x\in[0;2\pi]} \sin x = 1$. Зауважимо, що функція може не мати найбільшого (найменшого) значення. Наприклад, $\max\limits_{x\in\mathbb{R}} x^3$ не існує, $\min\limits_{x\in(\frac{\pi}{2};\pi)} \operatorname{tg} x$ не існує.

Раніше було доведено, що коли функція f неперервна на $[a;b]$, то вона досягає на цьому відрізку своїх найбільшого і найменшого значень. Це можливо або в точках екстремуму, або на кінцях відрізка. Тому для знаходження найменшого і найбільшого значень функції, яка неперервна на $[a;b]$, треба обчислити її значення в усіх критичних точках і на кінцях відрізка, а потім вибрати серед них найменше та найбільше.

Приклад 8. Знайти найбільше й найменше значення функції $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, якщо $x \in [0;4]$.

◀ Знаходимо $y' = x^2 - 4x + 3$ і розв'язуємо рівняння $y' = 0$ або $x^2 - 4x + 3 = 0$, корені якого $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. Обидва корені належать проміжку $[0;4]$. Оскільки $y(0) = 1$, $y(1) = \frac{7}{3}$, $y(3) = 1$, $y(4) = \frac{7}{3}$, звідси випливає, що $\max\limits_{x\in[0;4]} y(x) = \frac{7}{3}$, $\min\limits_{x\in[0;4]} y(x) = 1$. ▶

5.2.4. Напрямок опуклості графіка функції. Точка перегину. Графік диференційовної функції називається **опуклим догори (донизу)** на проміжку X, якщо для значень аргументу з цього проміжку він розміщений нижче (вище) довільної своєї дотичної. На рис. 1 а), б) показано графіки функцій опуклих догори та донизу відповідно.

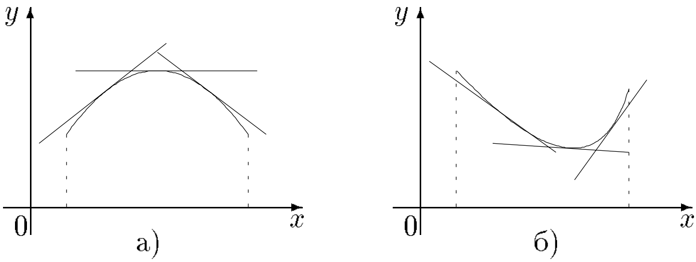


Рис. 1

Достатні умови опуклості графіка функції дає теорема.

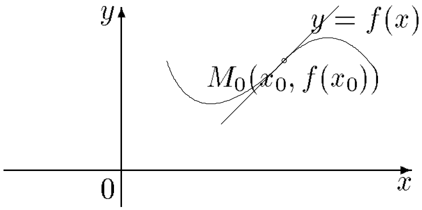
Теорема 8. *Якщо функція f має на проміжку X другу похідну і $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$) на X, то графік функції опуклий донизу (догори).*

Необхідна умова опуклості слабкіша: *якщо функція опукла на проміжку X, то можна стверджувати лише, що $f''(x) \geq 0$ (або $f''(x) \leq 0$), $x \in X$.* Наприклад, функція $y = x^4$ опукла на всій числовій осі, у той же час її друга похідна $y'' = 12x^2$ не скрізь додатна, зокрема, $y''(0) = 0$.

Точкою перегину графіка функції f називається така його точка, при переході через яку він змінює напрямок опуклості.

З цього означення випливає, що точки перегину – це точки екстремуму першої похідної.

У точці перегину дотична перетинає графік функції, оскільки він переходить з одного боку дотичної на другий, тобто перегинається через неї



Доводиться, що необхідна і достатня умова перегину функції f в точці $M_0(x_0; f(x_0))$ дається теоремою.

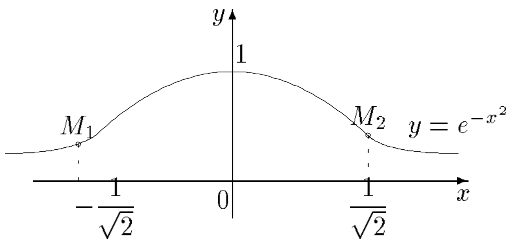
Теорема 9. *Якщо для функції f друга похідна f'' у деякій точці x_0 дорівнює нулю, а при переході через цю точку змінює знак на протилежний, то точка $M_0(x_0; f(x_0))$ є точкою перегину графіка функції.*

Приклад 9. Знайти точки екстремуму і перегину функції $y = e^{-x^2}$ та побудувати її графік.

◀ Послідовно знаходимо $y' = -2xe^{-x^2}$, $y'' = (4x^2-2)e^{-x^2}$. Очевидно, що $y'(x) = 0$ в точці $x = 0$. Оскільки $y''(0) = -2 < 0$, то в точці $x = 0$ функція має максимум.

З рівняння $y''(x) = 0$ або $(4x^2 - 2)e^{-x^2} = 0$ одержуємо $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Зміна знаку другої похідної така: $y''(x) > 0$, коли $-\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}}$; $y''(x) < 0$, коли $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}}$; $y''(x) > 0$, коли $\frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty$.

Отже, в точках $M_1(-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$ і $M_2(\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}})$ графік функції має перегин, оскільки при переході через точку M_1 графік функції змінює напрямок опуклості донизу зліва на опуклість догори справа, а через точку M_2 – опуклість догори зліва на опуклість донизу справа.



. ▶

5.2.5. Асимптоти графіка функції. Можливі ситуації, коли графік функції як завгодно близько наближається до певної прямої. Таку пряму називають **асимптотою**. Розрізняють три види асимптот: вертикальні, горизонтальні та похилі.

Вертикальна асимптота. Пряма $x = x_0$ є **вертикальною асимптотою** графіка функції $y = f(x)$, якщо f визначена в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0, й хоча б одна з однобічних границь дорівнює нескінченності, тобто

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty \quad \text{або} \quad \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty.$$

Очевидно, що пряма $x = x_0$ не може бути вертикальною асимптотою, якщо функція неперервна в точці x_0, оскільки $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Отже, графік функції, яка неперервна на всій числовій осі, вертикальних асимптот не має. Тому вертикальні асимптоти $x = x_0$ треба шукати в точках розриву функції f або на кінцях її області визначення.

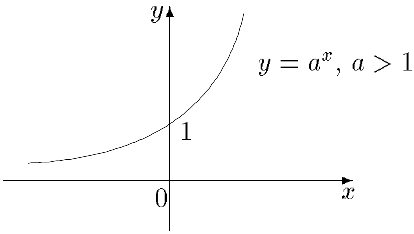
Приклад 10. Знайти вертикальну асимптоту графіка функції $y = \dfrac{1}{x}$.

◀ Якщо $x \neq 0$, то функція неперервна, і тому вертикальної асимптоти немає. Вона можлива в точці розриву $x = 0$. Оскільки $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, то пряма $x = 0$ справді є вертикальною асимптотою графіка функції. ▶

Горизонтальна асимптота. Якщо функція f визначена при досить великих x та існує скінченна границя $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$, то пряма $y = b$ є **горизонтальною асимптотою** графіка функції f (правобічною, коли $x \to +\infty$, лівобічною, коли $x \to -\infty$ і двобічною, коли обидві однобічні границі однакові).

Приклад 11. Знайти горизонтальну асимптоту графіка функції $y = a^x$, $a > 1$, $x \in \mathbb{R}$.

◀ Оскільки при $a > 1$ $\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$, то пряма $y = 0$ є лівою горизонтальною асимптотою. Правої горизонтальної асимптоти у цієї кривої немає, бо $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.



$\blacktriangleright$

Похила асимптота. Нехай функція f визначена при досить великих x. Пряма $y = kx + b$ називається **похилою асимптотою** графіка функції f при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$), якщо $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - (kx+b)) = 0$ ($\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x) - (kx+b)) = 0$). Для того щоб пряма $y = kx + b$ була похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$, необхідно й досить, щоб існували скінченні границі

$$k = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to+\infty}(f(x) - kx);$$

або

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to-\infty}(f(x) - kx).$$

У першому випадку маємо праву похилу асимптоту, а в другому – ліву. Якщо границі збігаються, то пряма $y = kx + b$ є двобічною похилою асимптотою.

Приклад 12. Знайти асимптоти графіка функції $y = \dfrac{x^3}{x^2+1}$.

$\blacktriangleleft$ Очевидно, що графік функції не має ні вертикальних асимптот, бо немає точок розриву, ні горизонтальних, бо $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^3}{x^2+1} = \infty$. Знайдемо похилу асимптоту.

Маємо

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2+1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - 1\cdot x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{x^2+1} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x}{x^2+1} = 0.$$

Отже, похилою асимптотою є пряма $y = x$. ▶

5.2.6. Загальна схема дослідження функцій та побудова їхніх графіків. Користуються такою схемою дослідження функцій:

1) знаходять область визначення, проміжки неперервності та точки розриву;

2) досліджують функцію на парність, непарність і періодичність;

3) знаходять асимптоти;

4) знаходять проміжки монотонності функції, точки екстремуму;

5) знаходять проміжки опуклості графіка функції, точки його перегину;

6) визначають точки перетину графіка з осями координат, якщо вони існують;

7) зводять одержану інформацію в таблицю і будують графік функції.

Приклад 13. Побудувати графік функції

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

◀ 1) Маємо $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$, $x = -1$ – точка розриву другого роду.

2) Функція – ні парна, ні непарна.

3) Оскільки $\lim\limits_{x\to -1\pm 0} f(x) = \lim\limits_{x\to -1\pm 0} \dfrac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$, то пряма $x = -1$ є вертикальною асимптотою;

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x^2 \cdot 2(1+\frac{1}{x})^2} = \frac{1}{2};$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2x^2 - x}{2(x+1)^2} =$$

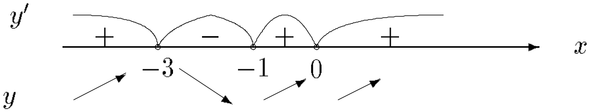
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2(2+\frac{1}{x})}{2x^2(1+\frac{1}{x})^2} = -1,$$

тобто пряма $y = \dfrac{1}{2}x - 1$ є похилою асимптотою.

4) Оскільки $y' = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$, то з умови $y' = 0$ або $x^2(x+3) = 0$ одержуємо, що

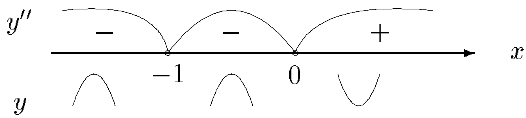
$$x_1 = 0, x_2 = -3.$$

За знаком першої похідної визначимо ділянки монотонності функції та знайдемо точки екстремуму



Отже, в точці $x_1 = -3$ функція f має максимум, а в точці $x_2 = 0$ екстремуму немає; $f_{max} = f(-3) \approx -3,37$.

5) Прирівнявши другу похідну $y'' = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$ до нуля, одержимо $x = 0$. Знак другої похідної такий:



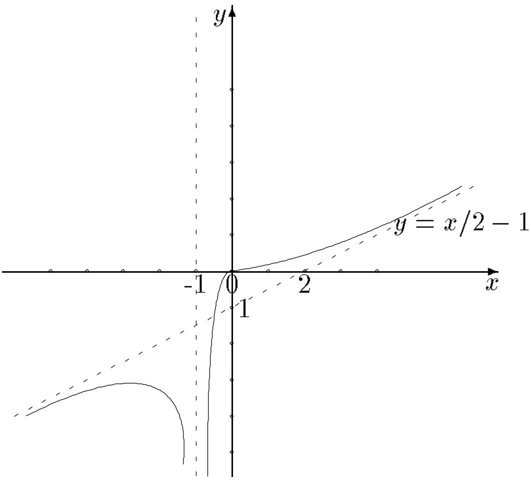
У точці $(0,0)$ графік функції має перегин.

6) Графік функції перетинає осі координат в точці $(0,0)$.

7) Зведемо усю одержану інформацію в таблицю.

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	-1	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
y''	$-$		$-$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$ $\cap$		$\searrow$ $\cap$		$\nearrow$ $\cap$		$\nearrow$ $\cup$

Будуємо графік функції.



5.3. Розкриття невизначеностей. Правило Лопіталя

Відношення двох функцій $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ при $x \to x_0$ називається **невизначеністю вигляду** $\dfrac{0}{0}$, якщо

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Розкрити невизначеність означає, що треба знайти границю $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, якщо вона існує або довести, що вона не існує.

Наступна теорема дає правило розкриття невизначеностей вигляду $\dfrac{0}{0}$.

Теорема 10 (правило Лопіталя). *Нехай функції f і g визначені й диференційовні в деякому околі точки x_0, за винятком, можливо, самої точки x_0. Нехай, крім того, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ і $g'(x) \neq 0$ у вказаному околі точки x_0. Якщо існує* *границя відношення похідних* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(скінченна або нескінченна), то існує границя* $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$*, причому правильна формула*

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Зауваження 1. Теорема є правильною й у випадку, коли $x_0=\pm\infty$.

Приклад 14. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}$.

◀ Оскільки $\lim\limits_{x\to 0}(x-\sin x)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}x^3=0$, то маємо невизначеність вигляду $\dfrac{0}{0}$. Застосуємо правило Лопіталя

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{6}.\quad ▶$$

Зауваження 2. Якщо $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ є невизначеністю $\dfrac{\infty}{\infty}$ при $x\to x_0$. Для розкриття цієї невизначеності правильна теорема, аналогічна попередній.

Приклад 15. Знайти $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}$.

◀ Маємо невизначеність $\dfrac{\infty}{\infty}$, оскільки $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln x=+\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty}x=+\infty$. Тоді $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{(\ln x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}=0.$ ▶

Невизначеності вигляду $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$ можна звести до невизначеностей $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$. Проілюструємо це на прикладах.

Приклад 16. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x$.

◀ Маємо невизначеність $0\cdot\infty$. Переписавши границю у вигляді $\lim\limits_{x\to 0+0}x\ln x=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$, дістанемо невизначеність $\frac{\infty}{\infty}$, яку розкриваємо за правилом Лопіталля

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0+0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim_{x\to 0+0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0+0}(-x)=0. \blacktriangleright$$

Невизначеності вигляду 0^0, 1^∞, ∞^0, які виникають при розгляді границі функції $y=u(x)^{v(x)}$ зводяться до невизначеності $0\cdot\infty$ за допомогою тотожного перетворення

$$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Приклад 17. Знайти границю $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{ctg} x}$.

$\blacktriangleleft$ Це невизначеність вигляду 1^∞. Запишемо цю границю так:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\operatorname{ctg} x}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{ctg} x\ \ln(1+x)}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{\operatorname{tg} x}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(1+x))'}{(\operatorname{tg} x)'}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{\cos^2 x}}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos^2 x}{1+x}}=e^1=e. \blacktriangleright$$

5.4. Формула Тейлора

Розглянемо спочатку многочлен

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n \tag{25}$$

і задачу про розклад цього многочлена за степенями $x-x_0$, де x_0 – певне число. Цю задачу можна розв'язати просто, якщо скористатися тотожністю $x\equiv x_0+(x-x_0)$. Можна це зробити по-іншому. Нехай

$$P(x)=A_0+A_1(x-x_0)+A_2(x-x_0)^2+...+A_n(x-x_0)^n \tag{26}$$

є шуканим розкладом, коефіцієнти якого $A_1, A_2, \ldots, A_n$ треба знайти. Покладаючи в тотожності (26) $x=x_0$, дістаємо, що $P(x_0)=A_0$, тобто $A_0=P(x_0)$.

Диференціюючи (26), маємо

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - x_0) + ... + nA_n(x - x_0)^{n-1}.$$

Звідси, поклавши $x = x_0$, одержимо $A_1 = P'(x_0)$.

Після повторного диференціювання, знаходимо

$$P''(x) = 2A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - x_0) + \ldots + n(n-1)A_n(x - x_0)^{n-2}$$

і при $x = x_0$ одержимо, що $A_2 = \dfrac{P''(x_0)}{2!}$. Повторюючи ці міркування, дістаємо

$$A_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}, k \in \{0, 1, 2, .., n\}, \tag{27}$$

де за означенням $P^{(0)}(x) = P(x)$ і $0! = 1$.

Формулу (27) можна строго довести методом математичної індукції.

Підставляючи коефіцієнти (27) в розклад (26), дістаємо формулу Тейлора для многочлена

$$P(x) = P(x_0) + P'(x_0)(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots +$$

$$+\frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

або

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{28}$$

Приклад 18. Многочлен $P(x) = 1 - 2x + 3x^3 - 4x^3$ розкласти за степенями $x + 1$.

◀ Скористаємося формулою (28), де $x_0 = -1$. Маємо $P'x) = -2 + 6x - 12x^2$, $P''(x) = 6 - 24x$, $P^{(3)}(x) = -24$, а тому $P(-1) = 10$, $P'(-1) = -20$, $P''(-1) = 30$, $P^{(3)}(-1) = -24$.

Отже,

$$P(x) = 10 - 20(x + 1) + \frac{30}{2!}(x + 1)^2 + \frac{(-24)}{3!}(x + 1)^3,$$

або
$$P(x) = 10 - 20(x+1) + 15(x+1)^2 + 4(x+1)^3. \quad \blacktriangleright$$

Очевидно, що коли $x_0 = 0$, то права частина (28) збігається з правою частиною многочлена (25). Тому
$$a_k = \frac{P^{(k)}(0)}{k!}, k \in \{0, 1, 2, ..., n\}.$$

Приклад 19. Функцію $f(x) = (a+x)^n$, $n \in \mathbb{N}$ розкласти за степенями x.

$\blacktriangleleft$ Маємо $(a+x)^n = A_0 + A_1 x + ... + A_n x^n$, де A_k згідно з формулою (27) мають вигляд $A_k = \dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}, k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$.

Оскільки
$$f^{(k)}(x) = n(n-1)...(n-k+1)(a+x)^{n-k}, k \in \{0, 1, 2, ..., n\},$$
то
$$f^{(0)}(0) = a^n,$$
$$f^{(k)}(0) = n(n-1)...(n-k+1)a^{n-k}, k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Отже,
$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2 + ...$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}a^{n-k}x^k + \ldots + x^n,$$
тобто ми одержали формулу бінома Ньютона.

Зокрема, при $a = 1$, маємо
$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 + ... + x^n. \quad \blacktriangleright$$

Розглянемо тепер довільну функцію f, яка має неперервні похідні до n-го порядку на інтервалі $(a; b)$ і $x_0 \in (a; b)$.

Використовуючи попередні міркування, побудуємо многочлен Тейлора степеня n:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k. \tag{29}$$

Многочлен $P_n(x)$ можна розглядати як деяке наближення (апроксимацію) функції f. Якщо позначити через $R_{n+1}(x)$ відповідну похибку (залишковий член), то матимемо

$$f(x) = P_n(x) + R_{n+1}(x). \tag{30}$$

Можна довести, що $R_{n+1}(x)$ є нескінченною малою функцією порядку вищого, ніж $(x - x_0)^n$ при $x \to x_0$, тобто $R_{n+1}(x) = o((x - x_0)^n)$ при $x \to x_0$.

Якщо функція f має в околі точки x_0 і $(n+1)$-у похідну, то для $R_{n+1}(x)$ матимемо формулу

$$R_{n+1}(x = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!})(x - x_0)^{n+1}, \tag{31}$$

де ξ – певна точка, яка знаходиться між точками x_0 і x.

Якщо скористатися формулами (29), (30) і (31), то одержимо формулу Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ...+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}. \tag{32}$$

Якщо $x_0 = 0$, то формулу (32) називають **формулою Маклорена** і вона має вигляд

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},$$

де $0 < \theta < 1$.

Приклад 20. Записати формули Маклорена для функції:
1) $f(x) = e^x$; 2)$f(x) = \sin x$; 3)$f(x) = \cos x$.

◀ 1) Маємо $f(x) = f'(x) = ... = f^{(n+1)}(x) = e^x$, а тому $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n+1)}(0) = 1$.

Тоді

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \ x \to 0.$$

2) $f(x) = \sin x$. Оскільки $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, то

$$f^{(n)}(0) = \sin n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } n = 2k, \\ (-1)^{(n-1)/2}, \text{ якщо } n = 2k-1, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Тому

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}), \ x \to 0.$$

3) $f(x) = \cos x$. Маємо $f^{(n)}(x) = (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n\frac{\pi}{2})$, $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = \cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0, \text{ якщо } n = 2k-1, \\ (-1)^{n/2}, \text{ якщо } n = 2k, \ k \in \mathbb{N}. \end{cases}$

Отже,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}), \ x \to 0.$$

За допомогою цих формул можна наближено обчислювати з певною точністю значення функції, замінюючи її многочленом Тейлора. ▶

Формула Тейлора, а точніше наближена рівність $f(x) \approx P_2(x)$ застосовується в економічній статистиці. Нехай для чисел $x_1, x_2, ..., x_n$ відоме середнє арифметичне

$$a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$$

і середнє квадратичне відхилення

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - a)^2 + (x_2 - a)^2 + ... + (x_n - a)^2}{n}}.$$

Треба знайти середнє арифметичне вигляду

$$\overline{y} = \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n},$$

якщо числа $x_1, x_2, ..., x_n$ невідомі, але відомий проміжок, у якому вони містяться. Звичайно, точне значення $\overline{y}$ визначити неможливо. Тому знайдемо $\overline{y}$ наближено. При цьому помилка буде тим меншою, чим менше максимальне значення $f^{(3)}(x)$ на проміжку, що містить всі $x_1, x_2, ..., x_n$. Замінимо $f(x)$ її многочленом Тейлора другого степеня з центром у точці a:

$$f(x) \approx P_2(a) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{1}{2}f''(a)(x-a)^2.$$

Тоді

$$\overline{y} \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(a) + f'(a)(x_i - a) + \frac{1}{2}f''(a)(x_i-a)^2) =$$

$$= \frac{1}{n}nf(a) + f'(a)(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i - \frac{1}{n}na) + \frac{1}{2n}f''(a)\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2.$$

Оскільки $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 = \frac{1}{2}\sigma^2$, а $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i = a$, то

$$\overline{y} \approx f(a) + \frac{1}{2}f''(a)\sigma^2. \qquad (33)$$

Приклад 21. Для чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_{100} відомі середнє арифметичне $a = 2$ і середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0,1$. Знайти наближено суму кубів $x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{100}^3$.

◀ Для функції $f(x) = x^3$, $x \in [c;d] \subset \mathbb{R}$, знайдемо середнє арифметичне за формулою (33):

$$\overline{y} = \frac{x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{100}^3}{100} \approx a^3 + \frac{1}{2}6a\sigma^2 = 2^3 + 3\cdot 2\cdot 0,1^2 = 8,06.$$

Звідси випливає, що $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{100}^3 \approx 806$. ▶

Приклад 22. Для додатних чисел x_1, x_2, $\ldots$, x_n відомі середнє арифметичне a і середнє квадратичне відхилення σ. Знайти наближено середнє геометричне $\sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n}$.

◀ Середнє геометричне можна подати у вигляді

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = e^{\ln(\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})} = e^{\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n)}.$$

Використовуючи формулу (33) для функції $f(x) = \ln x$, дістанемо

$$\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \ldots + \ln x_n) \approx \ln a - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

Отже,

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \approx e^{\ln a - \frac{\sigma^2}{2a^2}} = e^{\ln a} \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2a^2}} = a \cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2a^2}}$$

або

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \approx a e^{-\frac{\sigma^2}{2a^2}}. \quad ▶ \tag{34}$$

Приклад 23. Нехай p_i – вартість споживчого кошика на 31 грудня i-го року, $i \in \{0, 1, 2, ..., 10\}$, $k_j = \frac{p_j}{p_{j-1}}$ – індекс споживчих цін за j-тий рік, $j \in \{1, 2, ..., 10\}$. Відомо, що середнє арифметичне чисел $k_1, k_2, ..., k_{10}$ дорівнює 1, а середнє квадратичне відхилення $\sigma = 0,1$. Визначити приблизно відносну зміну цін з 31 грудня нульового року до 31 грудня десятого року.

◀ Використовуючи формулу (34), знайдемо наближено середнє геометричне

$$\sqrt[10]{k_1 k_2 \cdots k_{10}} \approx 1 \cdot e^{-\frac{0,1^2}{2}} = e^{-0,005}.$$

Далі,

$$\frac{p_{10}}{p_0} = k_1 k_2 \cdots k_{10} = (e^{-0,005})^{10} = e^{-0,05} \approx 0,95.$$

Отже, за десять років ціни знизились приблизно на 5%. ▶

Вправи

1. Користуючись означенням похідної, знайти похідну функції: 1) $y = \sqrt{1 + x^2}$; 2)$y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; 3)$y = \frac{1}{3x+2}$; 4)$y = \frac{1}{x^2}$.

2. Знайти похідну функції: 1) $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 4x - 5$; 2)$y = 6\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$; 3)$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$; 4)$y = x^2 \cos x$; 5)$y = \frac{\cos x}{1+2\sin x}$; 6)$y = 2^x \operatorname{arctg} x$; 7)$y = x\ \sin x\ \ln x$; 8)$y = \cos^2 x + \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; 9)$y = \sqrt{1 - x^2} \arccos x$; 10)$y = \frac{\operatorname{arcctg} x}{\sqrt{1+x^2}}$;

11)$y=x^{x^2}$; 12)$y=(\ln x)^x$; 13)$y=(\sin x)^{\cos x}$; 14)$y=2\ x^{\sqrt{x}}$; 15)$y=(\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}$.

3. Знайти похідну функції й обчислити її значення при $x=x_0$: 1)$y=\frac{x}{2x-1}, x_0=0$; 2)$y=\sqrt{1+\ln^2 x}, x_0=1$; 3)$y=\sin x\ e^{\cos x}, x_0=\frac{\pi}{2}$; 4)$y=\ln\frac{2+\operatorname{tg} x}{2-\operatorname{tg} x}, x=\frac{\pi}{3}$; 5)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+12}), x_0=2$.

4. Знайти похідну функції, яка задана неявно: 1)$x^2+xy+y^2=0$; 2)$e^y-e^{-x}+xy=0$; 3)$y^x=x^y$; 4)$\sin(xy)+\cos(xy)=\operatorname{tg}(x+y)$; 5)$e^x\sin y-e^{-y}\cos x=0$.

5. Скласти рівняння дотичної до кривої: 1)$y=\dfrac{8}{4+x^2}$ у точці з абсцисою $x=2$; 2) $x^3+xy+y^3=0$ у точці $M_0(1;-1)$.

6. Точка рухається прямолінійно за законом $S(t)=2t^3-3t^2+5t+2$. Знайти швидкість та прискорення руху.

7. Знайти диференціал функції: 1)$y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$; 2)$y=\ln\cos x$; 3)$y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$; 4)$y=2^{\frac{-1}{\cos x}}$; 5)$y+x=e^y$.

8. Обчислити наближено 1)$\arcsin 0,05$; 2)$\sqrt[3]{0,95}$; 3)$\ln 1,2$; 4)$\sqrt[4]{15,8}$; 5)$\operatorname{arctg} 1,04$.

9. Знайти похідну вказаного порядку n функції: 1)$y=x^2e^x, n=3$; 2)$y=x\cos x, n=2$; 3)$y=e^x\cos x, n=4$; 4)$y=x^3\ln x,\ n=4$; 5)$y=(1+x^2)\operatorname{arctg} x, n=2$; 6)$y=x^x, n=2$; 7)$\operatorname{arctg} y=x+y, n=2$.

10. Знайти диференціал вказаного n-го порядку функції: 1)$y=3^{-x^2}, n=2$; 2)$y=\ln(x+\sqrt{x^2+4}), n=2$; 3)$y=e^x\ln x, n=3$; 4)$y=\frac{\sin x}{x}, n=2$; 5)$y^2+xy=1, n=2$.

11. Функція сукупних витрат має вигляд $y=6\lg(1+3x)$. Знайти функцію граничних витрат.

12. Залежність між витратами виробництва y (гр. од.) і обсягом виготовленої продукції x (од.) виражається функцією $y=10x-0,04x^3$. Знайти середні та граничні витрати, якщо обсяг продукції становить 5 одиниць.

13. Функція пропозиції на деякий товар $s=\frac{20+4p^2}{1+10p}$, функція попиту – $q=\frac{25-p+4p^2}{1+10p}$. Знайти ціну рівноваги, тобто ціну, коли попит і пропозиція дорівнюють один одному, а також еластичності попиту та пропозиції для цієї ціни.

14. Функція попиту q визначається формулою $q=q_0e^{-kp}$, де q_0 і k – відомі величини. Знайти, при яких значеннях ціни p попит буде еластичним, тобто $E_p(q)<-1$.

15. За правилом Лопіталя знайти границю: 1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x}$;

2) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+3x-4}{x^3-1}$; 3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{\ln x}$; 4) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 7x}{\cos 5x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln x}{\ln\sin x}$; 6) $\lim\limits_{x\to\infty}(\pi - 2\operatorname{arctg} x)\ln x$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x})$; 8) $\lim\limits_{x\to\infty}(x\ln x-\sqrt{x+x^2})$; 9) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; 10) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}-0}(\operatorname{tg} x)^{\cos x}$.

16. Використовуючи формулу Тейлора, подати функцію у вигляді многочлена: 1) $f(x)=x^4-5x^3+x^2-3x+4$ за степенями $x-4$; 2) $f(x)=(x^2-3x+1)^3$ за степенями x; 3) $f(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ за степенями $(x+1)$.

17. Знайти інтервали монотонності функції: 1) $f(x)=x^4-2x^2-5$; 2) $f(x)=2x^2-\ln x$; 3) $f(x)=2\sin x+\cos 2x$, $x\in[0;2\pi]$; 4) $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$; 5) $f(x)=x^2-2\cos x, x\in[0;2\pi]$.

18. Знайти екстремум функції: 1) $f(x)=2x^3-3x^2$; 2) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$; 3) $f(x)=x-\ln(1+x)$; 4) $f(x)=x\ln^2 x$; 5) $f(x)=\frac{e^x}{x}$.

19. Знайти найбільше і найменше значення функції: 1) $f(x)=x^4-2x^2+5$, $x\in[-2;2]$; 2) $f(x)=x+\sqrt{x}$, $x\in[0;4]$; 3) $f(x)=e^{2x}-e^{-2x}$, $x\in[-2;1]$; 4) $f(x)=xe^{-\frac{x^2}{2}}$, $x\in\mathbb{R}$; 5) $f(x)=3x^2-6x$, $x\in[0;3]$.

20. Відомо, що функція доходу $P(x)=16x-x^2$, а функція витрат на виробництво продукції $S(x)=x^2+1$, де x – обсяг виробленої продукції. Підприємство сплачує податок t з одиниці продукції, а тому функція прибутку $\pi(x)=P(x)-S(x)-tx$. Яким повинен бути податок t, щоб величина сумарного податку $T=tx$ була найбільшою?

21. Сіткою довжиною 120 м треба обгородити прилеглу до будинку прямокутну ділянку найбільшої площі. Знайти розміри ділянки.

22. Знайти точки перегину й інтервали опуклості графіка функції: 1) $f(x)=x^5+5x-6$; 2) $f(x)=xe^x$; 3) $f(x)=2x^2+\ln x$; 4) $f(x)=(x-4)^5+4x+4$; 5) $f(x)=e^{-x^2}$.

23. Провести дослідження та побудувати графік функції: 1) $f(x)=x^3-3x$; 2) $f(x)=x^2+x$; 3) $f(x)=(2+x)e^{-x}$; 4) $y=\frac{1}{x}+4x^2$; 5) $f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}$.

Відповіді

1. 1) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; 2) $-\dfrac{1}{2\sqrt{x^3}}$; 3) $-\dfrac{3}{(3x+2)^2}$; 4) $-\dfrac{2}{x^3}$.

2. 1) $(x-2)^2$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$; 3) $-\dfrac{x^2+2x+3}{x^4}$; 4) $x(2\cos x-x\sin x)$; 5) $-\dfrac{2+\sin x}{(1+2\sin x)^2}$; 6) $2^x\left(\ln 2\operatorname{arctg} x+\dfrac{1}{1+x^2}\right)$; 7) $\sin x\ln x+x\cos x\ln x+$

$\sin x$; 8) $\dfrac{1-\sin x\sin 2x}{\sin x}$; 9) $-\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\right)$;
10) $-\dfrac{1+x\operatorname{arctg}x}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; 11) $x^{x^2+1}(2\ln x+1)$; 12) $(\ln x)^x\left(\frac{1}{\ln x}+\ln\ln x\right)$;
13) $(\sin x)^{\cos x-1}(\cos^2 x-\sin^2 x\ln\sin x)$; 14) $x^{\sqrt{x}-\frac{1}{2}}(2+\ln x)$;
15) $(\operatorname{tg}2x)^{\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}\left(\dfrac{4\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{\sin 4x}-\dfrac{\ln\operatorname{tg}2x}{2\sin^2\frac{x}{2}}\right)$.

3. 1) -1; 2) 0; 3) -1; 4) 16; 5) 0,25. **4.** 1) $-\dfrac{2x+y}{x+2y}$; 2) $-\dfrac{e^{-x}+y}{e^y+x}$;
3) $\dfrac{y^2-xy\ln y}{x^2-xy\ln x}$; 4) $-\dfrac{y\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}{x\cos^2(x+y)(\cos(xy)-\sin(xy))-1}$;
5) $\dfrac{e^x\sin y+e^{-y}\sin x}{e^x\cos y+e^{-y}\cos x}$. **5.** 1) $x+2y-4=0$; 2) $x+2y-1=0$.

6. $v(t)=6t^2-6t+5$; $a(t)=12t-6$. **7.** 1) $\dfrac{(2-x)dx}{x^3}$; 2) $-\operatorname{tg}x\,dx$;
3) $\dfrac{dx}{2x\sqrt{4x-1}}$; 4) $2^{-\frac{1}{\cos x}}\ln 2\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 5) $\dfrac{dx}{e^y-1}$.

8. 1) 0,05; 2) 0,983; 3) 0,2; 4) 1,9938; 5) 0,805.

9. 1) $e^x(x^2+6x+6)$; 2) $-2\sin x-x\cos x$; 3) $-4e^x\cos x$;
4) $\dfrac{6}{x}$; 5) $\dfrac{2x}{1+x^2}+2\operatorname{arctg}x$; 6) $x^x\left((\ln x+1)^2+\frac{1}{x}\right)$; 7) $-\dfrac{2(1+y^2)}{y^5}$.

10. 1) $3^{-x^2}\ln 9(2x^2\ln 3-1)dx^2$;
2) $-\dfrac{x}{(x^2+4)^{3/2}}dx^2$; 3) $e^x\left(\ln x+\dfrac{3}{x}-\dfrac{3}{x^2}+\dfrac{2}{x^3}\right)dx^3$;
4) $\dfrac{(2-x^2)\sin x-2x\cos x}{x^3}dx^2$; 5) $\dfrac{2}{(x+2y)^3}dx^2$.

11. $\dfrac{18}{1+3x}\lg e$. **12.** 9 гр.од.; 7 гр.од. **13.** $p_0=5$; $E_5(s)=0,7$; $E_5(q)=0,67$. **14.** $p>\dfrac{1}{2k}$. **15.** 1) 0; 2) $\dfrac{7}{3}$; 3) 3; 4)$-\dfrac{7}{5}$; 5) 1; 6) 0; 7) $-\dfrac{1}{3}$; 8) ∞; 9) $e^{-1/2}$; 10) 1. **16.** 1) $(x-4)^4+11(x-4)^3+37(x-4)^2+21(x-4)-56$; 2) $x^6-9x^5+30x^4-45x^3+30x^2-9x+1$; 3) $1+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\ldots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$.

17. 1) спадає на $(-\infty;-1)$ і $(0;1)$; зростає на $(-1;0)$ і $(1;\infty)$. 2) спадає на $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$, зростає на $\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$;
3) зростає на $\left(0;\dfrac{\pi}{6}\right)$, $\left(\dfrac{\pi}{2};\dfrac{5\pi}{6}\right)$ і $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$, спадає на $\left(\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right)$ і $\left(\dfrac{5\pi}{6};\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

4) зростає на $(-\infty;\infty)$; 5) спадає на $\left(0;\dfrac{\pi}{3}\right)$ і $\left(\dfrac{5\pi}{3};2\pi\right)$, зростає на $\left(\dfrac{\pi}{3};\dfrac{5\pi}{3}\right)$. **18.** 1) $f_{\max}=f(0)=0$; $f_{\min}=f(1)=-1$; 2) $f_{\max}=f(0)=1$; 3) $f_{\min}=f(0)=0$; 4) $f_{\max}=f(e^{-2})=\dfrac{4}{e^2}$; $f_{\min}=f(1)=0$; 5) $f_{\min}=f(1)=e$.

19. 1) $M=13, m=4$; 2) $M=6, m=0$; 3) $M=e^2-e^{-2}$, $m=e^{-4}-e^4$; 4) $M=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$, $m=-\dfrac{1}{\sqrt{e}}$; 5) $M=9$, $m=-3$.

20. $t_0=8$, $x_0=2$, $\Pi_{\max}=7$, $T_{\max}=16$ (знайти x при відомому t, яке реалізує екстремум Π, і дослідити на екстремум $T=T(x)$).

21. 30 м $\times$ 60 м. **22.** 1) Опукла догори на $(-\infty;0)$ і донизу на $(0;\infty)$, точка перегину $(0;-6)$; 2) опукла догори на $(-\infty;-2)$ і донизу на $(-2;\infty)$, точка перегину $\left(-2;-\dfrac{2}{e^2}\right)$; 3) опукла догори на $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$ і донизу на $\left(\dfrac{1}{2};\infty\right)$, точка перегину $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}-\ln 2\right)$; 4) опукла догори на $(-\infty;4)$ і донизу на $(4;\infty)$, точка перегину $(4;20)$; 5) опукла догори на $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і опукла донизу на $\left(-\infty;-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ і $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};\infty\right)$, точки перегину $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$ і $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}};e^{-\frac{1}{2}}\right)$.

23. 1) $D(y)=\mathbb{R}$, $y_{\max}=y(-1)=2$, $y_{\min}=y(1)=-2$, перегин при $x=0$, асимптот немає; 2) $D(y)=\mathbb{R}$, $y_{\min}=y\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$, спадає на $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$, зростає на $\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$, опукла донизу на $\mathbb{R}$; 3) правобічна асимптота $y=0$, $y_{\max}=y(-1)=2$, функція зростає на $(-\infty;1)$, спадає на $(-1;\infty)$, опукла догори на $(-\infty;0)$, опукла донизу на $(0;\infty)$, точка перегину $(0;2)$; 4) $D(y)=\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $y_{\min}=y\left(\dfrac{1}{2}\right)=3$, перегин при $x=-\dfrac{\sqrt[3]{2}}{2}$, $x=0$ – вертикальна асимптота; 5) асимптота $x=0$, $y_{\min}=y(-1)=y(1)=2$, функція спадає на $(-\infty;-1)$ і на $(0;1)$, зростає на $(-1;0)$ і на $(1;\infty)$, опукла донизу на $(-\infty;0)$ і $(0;\infty)$, точок перегину немає.

Невизначений інтеграл

1. Первісна і невизначений інтеграл

1.1. Поняття первісної

У попередньому розділі ми ввели поняття похідної й навчилися знаходити похідні від елементарних функцій. Тут ми розв'язуватимемо обернену задачу, а саме: відома похідна f' функції f на проміжку X, треба знайти функцію f. Іншими словами, для функції f треба знайти таку функцію F, щоб $F'(x) = f(x)$, $x \in X$. Наприклад, для функції $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$, цю умову задовольняє функція $F(x) = \sin x, x \in \mathbb{R}$, бо $F'(x) = (\sin x)' = \cos x, x \in \mathbb{R}$. Відновлення функції за відомою похідною – це одна з основних задач інтегрального числення.

Означення 1. *Функція F називається* **первісною** *для функції f на проміжку X, якщо для всіх значень $x \in X$ виконується рівність $F'(x) = f(x)$.*

Приклад 1. Знайти первісну для функції: 1) $f(x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$; 2)$f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0;\infty)$.

◀ 1) Очевидно, що первісною для цієї функції є функція $F(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in (-1;1)$.

Справді, $(\sqrt{1-x^2})' = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = -\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1;1)$.

2) Оскільки $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0;\infty)$, то $F(x) = \ln x$ є первісною для функції $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \in (0;\infty)$. ▶

Якщо первісна для функції f існує, то вона визначається неоднозначно. Справді, якщо F – первісна для функції f на X, то для довільного $C \in \mathbb{R}$ функція $F + C$ є також первісною для функції f на X, бо

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = f(x), \quad x \in X.$$

З іншого боку, якщо F і G – первісні для функції f на X, то

$$(F(x) - G(x))' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \quad x \in X,$$

тобто існує $C \in \mathbb{R}$ таке, що для всіх $x \in X$ правильна рівність $F(x) - G(x) = C$ або $F(x) = G(x) + C$.

Отже, якщо F – одна із первісних для функції f на X, то довільна первісна Φ для функції f на X має вигляд

$$\Phi(x) = F(x) + C, \quad x \in X, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Рівність (1) називають **основною властивістю первісної**.

Геометричний зміст її такий: графіки всіх первісних функції f дістаємо з будь-якого з них паралельним перенесенням вздовж осі Oy.

Приклад 2. Для функції $f(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$, знайти ту первісну, графік якої проходить через початок координат.

◀ Оскільки $F'(x) = (x^2 - x)' = 2x - 1 = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, то функція $F(x) = x^2 - x$ є первісною для функції $f(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Згідно з основною властивістю первісної будь-яка первісна функції $f(x) = 2x - 1$ має вигляд $\Phi(x) = x^2 - x + C$, $x \in \mathbb{R}$, $C \in \mathbb{R}$. Оскільки точка $O(0;0)$ лежить на графіку цієї функції, то $0 = \Phi(0)$, тобто $0 = 0^2 - 0 + C$ або $C = 0$. Отже, шукана первісна $\Phi(x) = x^2 - x$. ▶

1.2. Невизначений інтеграл

Означення 2. Невизначеним інтегралом *від функції f на X називається сукупність всіх первісних для функції f на цьому проміжку, тобто вираз $F(x) + C$, $x \in X$, де F – будь-яка первісна для функції f на X, а $C \in \mathbb{R}$ – довільна стала.*

Позначається невизначений інтеграл символом

$$\int f(x)dx. \tag{2}$$

У цьому позначенні знак $\int$ називається **знаком інтеграла**, вираз $f(x)dx$ – **підінтегральним виразом**, а $f(x)$ – **підінтегральною функцією**.

Отже, згідно з означенням 2

$$\int f(x)dx = F(x) + C, \tag{3}$$

де F – одна із первісних для функції f на X, а C – довільна стала.

Процедура визначення первісної або невизначеного інтеграла для функції f називається інтегруванням f. Інтегрування є операцією, оберненою до диференціювання. Для того щоб перевірити, чи правильно виконано інтегрування, треба взяти похідну від одержаного результату й переконатися, що одержано підінтегральну функцію. Як всяка обернена операція, інтерування є складнішою дією, ніж диференціювання.

Приклад 3. Знайти інтеграл $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}}$.

◀ Згідно з формулою (3) маємо $\int \frac{-xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2} + C$, $x \in (-1;1)$, оскільки $(\sqrt{1-x^2})' = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (-1;1)$. ▶

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \cos x dx$.

◀ Очевидно, що $\int \cos x dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$, бо $(\sin x)' = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. ▶

Зауважимо, що коли F є первісною для функції f, то підінтегральний вираз $f(x)dx = F'(x)dx = dF(x)$ є диференціалом первісної F.

Надалі ми розглядатимемо такі підінтегральні функції, для яких невизначений інтеграл існує. Зокрема, пізніше ми доведемо, що коли f неперервна на $(a;b)$, то для неї існує первісна на $(a;b)$, а отже, й невизначений інтеграл.

1.3. Основні властивості невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів

Із означення невизначеного інтеграла випливають такі його властивості.

Властивість 1. *Похідна від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції, а диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто*

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x), \quad d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx, \quad x \in X.$$

◀ Справді,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = F'(x)+0 = f(x), \quad x \in X,$$

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+C) = (F(x)+C)'dx = f(x)dx, \quad x \in X. \blacktriangleright$$

Властивість 2. *Невизначений інтеграл від диференціала функції дорівнює сумі цієї функції й довільної сталої C, тобто*

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

◀ Оскільки $dF(x) = F'(x)dx$, то $dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)+C$, $x \in X$. ▶

Властивість 3. *Сталий множник можна винести за знак інтеграла, тобто якщо $A = \mathrm{const}$, то*

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

◀ Згідно з умовою $F'(x) = f(x)$, $x \in X$. Тоді $(AF(x))' = AF'(x) = Af(x)$, $x \in X$. Звідси випливає, що

$$A\int f(x)dx = A(F(x)+C) = AF(x)+C_1 = \int Af(x)dx, \quad x \in X. \blacktriangleright$$

Властивість 4. *Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій, тобто*

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

◀ Справді, диференціюючи ліву частину рівності, одержимо згідно з властивістю 1 $(\int (f(x) \pm g(x))dx)' = f(x) \pm g(x)$, $x \in X$, а похідна правої частини

$$(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx)' = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)' =$$

$$= f(x) \pm g(x), \quad x \in X.$$

Отже, похідні однакові, що й треба було довести. ▶

Властивість 5. *Якщо F є первісною для f, то*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C, \quad x \in X,$$

де a і b – сталі, причому $a \neq 0$.

◀ Для доведення переконаємся, що похідна від правої частини рівності дорівнює підінтегральній функції:

$$\left(\frac{1}{a}F(ax+b) + C\right)' = \frac{1}{a}F'(ax+b) \cdot a + 0 = f(ax+b). \quad ▶$$

Запишемо таблицю основних інтегралів, яка випливає з таблиці похідних і рівності (3).

1) $\int 0 \cdot dx = C$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$, $x \in (0; +\infty)$;

3) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, $x \neq 0$;

4) $\displaystyle\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $0 < a \neq 1$; $\displaystyle\int e^x dx = e^x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

5) $\displaystyle\int \sin x dx = -\cos x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

6) $\displaystyle\int \cos x dx = \sin x + C$, $x \in \mathbb{R}$;

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

8) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$;

9) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left[\begin{array}{l} \arcsin \frac{x}{a} + C, \\ \\ -\arccos \frac{x}{a} + C, \quad -a < x < a,\ a > 0; \end{array}\right.$

10) $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a} + C, \\ \\ -\dfrac{1}{a}\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{a} + C, \quad x \in \mathbb{R},\ a \neq 0; \end{array}\right.$

11) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$

де у випадку знаку "+"у підінтегральній функції вважається $x \in \mathbb{R}$, а у випадку знаку "−"− $x \in (-\infty; -|a|) \cup (|a|, +\infty)$;

12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C,\ a \neq 0,\ |x| \neq a.$

Перевіримо, наприклад, формулу 3). Нехай $x > 0$, тоді $\ln|x| = \ln x$ і $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$. Якщо ж $x < 0$, то $|x| = -x$ і $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}\cdot(-1) = \dfrac{1}{x}$.

Приклад 5. Знайти $\displaystyle\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx.$

◀ Поділимо почленно чисельник на знаменник і застосуємо спочатку властивості 3 і 4, а потім табличні інтеграли 2) і 3). Маємо

$$\int \frac{2 + 3\sqrt[3]{x^2} + 5\sqrt{x}}{\sqrt{x^3}}dx = 2\int x^{-3/2}dx + 3\int x^{-5/6}dx + 5\int \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{2x^{-1/2}}{-1/2} + \frac{3x^{1/6}}{1/6} + 5\ln x + C = -\frac{4}{\sqrt{x}} + 18\sqrt[6]{x} + 5\ln x + C,\ x > 0. \ ▶$$

Приклад 6. Знайти $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$

◀ Спочатку перетворимо підінтегральну функцію $\dfrac{1}{x^4+x^2} = \dfrac{(x^2+1)-x^2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{x^2+1}{x^2(x^2+1)} - \dfrac{x^2}{x^2(x^2+1)} = \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{1}{x^2+1}$. Тепер запишемо вихідний інтеграл як різницю табличних інтегралів 2) і 10) (при $a = 1$):

$$\int \frac{dx}{x^4+x^2} = \int \frac{dx}{x^2} - \int \frac{dx}{x^2+1} = \int x^{-2}dx - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + C,\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 7. Граничний доход фірми визначається функцією $f(x) = 50000 - x$, де x – кількість виробленої продукції. Знайти функцію сумарного доходу фірми, якщо нульовий випуск продукції дає нульовий доход.

◀ Згідно з означенням граничного доходу

$$F(x) = \int (50000 - x)dx = 50000x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Урахувавши умову $F(0) = 0$, знайдемо сталу C:

$$0 = 50000 \cdot 0 - \frac{0^2}{2} + C, \text{ або } C = 0.$$

Отже, сумарний доход фірми $F(x) = 50000x - \dfrac{x^2}{2}$. ▶

Зауваження. Раніше було доведено, що похідна від елементарної функції є також елементарною функцією. З операцією інтегрування вже складніше. Доведено, що інтеграли від деяких елемантарних функцій не є елементарними функціями. Прикладами таких інтегралів є: 1) $\int e^{-x^2}dx$ – інтеграл Пуассона; 2)$\int \cos x^2 dx$, $\int \sin x^2 dx$ – інтеграли Френеля; 3) $\displaystyle\int \frac{dx}{\ln x}$, $0 < x \neq 1$ – інтегральний логарифм; 4) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}dx$, $x \neq 0$ – інтегральний синус; $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}dx, x \neq 0$ – інтегральний косинус. Ці інтеграли існують, але вони не є елементарними фунціями. Їх можна обчислити наближено. Зокрема, інтегральний синус можна записати у вигляді

$$\int \frac{\sin x}{x}dx \approx \int \frac{1}{x}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!})dx =$$

$$= \int (1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)!})dx =$$

$$= x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)(2n-1)!} + C,$$

що дозволяє обчислювати його з певним ступенем точності.

2. Основні методи інтегрування

2.1. Метод заміни змінної (метод підстановки)

У багатьох випадках введення нової змінної дозволяє спростити підінтегральний вираз і звести інтеграл до лінійної комбінації табличних інтегралів. Такий метод називається **методом заміни змінної (методом підстановки)**.

Теорема 1. *Нехай функція $x = \varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку T, а X – множина значень цієї функції, на якій визначена функція $f(x)$. Якщо функція f має первісну на множині X, то на множині T правильна формула*

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t)\varphi'(t))dt. \tag{4}$$

◀ Нехай $F(x)$ – первісна для $f(x)$ на множині X, тобто $F'(x) = f(x)$, $x \in X$. Згідно з правилом диференціювання складеної функції $F(\varphi(t))$ одержимо, що

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t),\ t \in T.$$

Отже, функція $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ має на множині T первісну $F(\varphi(t))$, а тому

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C. \tag{5}$$

Оскільки $F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x)dx$, то з рівності (5) одержимо формулу (4). Вираз (4) називається **формулою заміни змінної у невизначеному інтегралі.** ▶

Часто вигідніше формулу заміни змінної використовувати в іншому вигляді.

Якщо нам треба знайти інтеграл

$$\int f(x)dx,$$

то інколи вдається вибрати таку нову змінну $t = \varphi(x)$, що

$$f(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x), \; x \in X,$$

причому $\int g(t)dt = G(t) + C$, $t \in T$.

Тоді

$$\int f(x)dx = G(\varphi(x)) + C.$$

Приклад 1. Знайти інтеграл $\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx$.

◀ Зробимо заміну $t = \sqrt{x}$, $x > 0$. Тоді $x = t^2$, $dx = 2tdt$ й інтеграл набуде вигляду

$$\int \frac{\sqrt{x}}{1+x}dx = \int \frac{t \cdot 2tdt}{1+t^2} = 2\int \frac{t^2dt}{1+t^2} = 2\int \frac{(1+t^2)-1}{1+t^2}dt =$$

$$= 2\left(\int dt - \int \frac{dt}{1+t^2}\right) = 2(t - \operatorname{arctg} t) + C =$$

$$= 2(\sqrt{x} - \operatorname{arctg}\sqrt{x}) + C, \quad x > 0. \quad ▶$$

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \cos 2x dx$.

◀ Маємо

$$\int \cos 2x dx = \left| \begin{array}{c} t = 2x \\ dt = 2dx \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int \cos t dt = \frac{1}{2}\sin t + C =$$

$$= \frac{1}{2}\sin 2x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \sqrt{4-x^2}dx$.

◀ Тут зручно зробити тригонометричну заміну $x = 2\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Тоді $4 - x^2 = 4 - 4\sin^2 t = 4(1-\sin^2 t) = 4\cos^2 t$, $dx = 2\cos t dt$, а тому

$$\int \sqrt{4-x^2}dx = \int 2\cos t \cdot 2\cos t dt = 2\int 2\cos^2 t dt.$$

Оскільки $2\cos^2 t = 1 + cos2t$, то

$$\int \sqrt{4-x^2} = 2\int (1+\cos 2t)dt = 2(\int dt + \int \cos 2t dt) =$$

$$= 2(t + \frac{\sin 2t}{2}) + C = 2t + \sin 2t + C.$$

Для того щоб одержати остаточну відповідь, яка виражає невизначений інтеграл через змінну x, виразимо t з формули заміни змінної через x $t = \arcsin\frac{x}{2}$ і зауважимо, що

$$\sin 2t = 2\sin t\cos t = x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2}.$$

Отже, $\int \sqrt{4-x^2}dx = 2\arcsin\frac{x}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{4-x^2} + C, \quad x \in [-2; 2].$ ▶

Приклад 4. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{x+a}$.

◀ Маємо

$$\int \frac{dx}{x+a} = \left| \begin{array}{c} t = x+a \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} + C = \ln|t| + C =$$

$$= \ln|x+a| + C, \ x \neq -a. \quad ▶$$

2.2. Інтегрування частинами

Теорема 2. *Нехай функції u і v визначені й диференційовні на проміжку X і нехай функція $u'(x)v(x)$ має первісну на цьому проміжку. Тоді на проміжку X функція $u(x)v'(x)$ також має первісну і правильна рівність*

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx. \tag{6}$$

◀ З рівності $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$ випливає, що

$$u(x)v'(x) = (u(x)v(x))' - u'(x)v(x), \quad x \in X. \tag{7}$$

Первісною для функції $(u(x)v(x))'$ на проміжку X є функція $u(x)v(x)$, а функція $u'(x)v(x)$ має первісну на X згідно з умовою теореми. Тому й функція $u(x)v'(x)$ має первісну на X. Інтегруючи рівність (7), дістаємо формулу (6). ▶

Формулу (6) називають **формулою інтегрування частинами**. Функції u і v вибирають так, щоб інтеграл $\int u'(x)v(x)dx$ був простішим з точки зору інтегрування, ніж інтеграл $\int u(x)v'(x)dx$.

Оскільки $v'(x)dx = dv$, $u'(x)dx = du$, то формулу (6) можна записати у вигляді

$$\int udv = uv - \int vdu. \tag{7'}$$

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int x^3 \ln x dx$.

◀ Маємо

$$\int x^3 \ln x dx = \left| \begin{array}{c} u = \ln x,\, du = \dfrac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx,\, v = \displaystyle\int x^3 dx = \dfrac{x^4}{4} + 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\frac{x^4}{4} + C =$$

$$= \frac{x^4}{4}(\ln x - \frac{1}{4}) + C, \quad x > 0. \quad ▶$$

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \operatorname{arctg} x dx$.

◀ Зробимо очевидні перетворення

$$\int \operatorname{arctg} x dx = \left| \begin{array}{c} u = \operatorname{arctg} x, du = \dfrac{dx}{1+x^2}, \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \int x \frac{dx}{1+x^2} = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} =$$

$$= x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C, \quad x \in \mathbb{R}. ▶$$

Інколи для обчислення інтеграла метод інтегрування частинами доводиться застосовувати неодноразово.

Приклад 7. Знайти інтеграл $\int x^2 \cos x dx$.

◀ Маємо

$$\int x^2 \cos x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2, du = 2x dx, \\ dv = \cos x dx, v = \int \cos x dx = \sin x + 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = x^2 \sin x - 2 \int x \sin x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x, du = dx, \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{matrix} \right| = x^2 \sin x - 2(-x \cos x -$$

$$- \int (-\cos x) dx) = x^2 \sin x - 2(-x \cos x + \sin x) + C =$$

$$= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \ ▶$$

Зауваження. Метод інтегрування частинами застосовується при знаходженні невизначених інтегралів таких типів:

$$1) \int P_n(x) e^{ax} dx, \ \int P_n(x) \sin bx dx, \ \int P_n(x) \cos bx dx, \tag{8}$$

$$2) \int P_n(x) \ln x dx, \ \int P_n(x) \arcsin x dx, \ \int P_n(x) \arccos x dx,$$

$$\int P_n(x) \operatorname{arctg} dx, \int P_n(x) \operatorname{arcctg} x dx, \tag{9}$$

де P_n – многочлен n-го степеня.

Застосовуючи формулу $(7')$ до інтегралів вигляду (8), за u треба брати P_n, а за dv – інші частини підінтегрального виразу. Оскільки кожне інтегрування знижує степінь многочлена P_n на одиницю, то треба застосовувати формулу $(7')$ n разів. При обчислені інтегралів групи (9) за u треба брати відповідно $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$, а за dv – вираз $P_n(x)dx$.

3. Інтегрування деяких класів функцій

3.1. Інтегрування раціональних функцій

Відношення двох алгебраїчних многочленів

$$f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)},$$

де $P_m(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_m x^m$, $Q_n(x) = b_0 + b_1 x + ... + b_n x^n$, $a_m \neq 0$; $b_n \neq 0$, $m \in Z_+$, $n \in \mathbb{N}$, називається **раціональною функцією** або **раціональним дробом**. Якщо $m < n$, то раціональний дріб називається **правильним**. У випадку, коли $m \geq n$, дріб називається **неправильним**. Нехай треба знайти невизначений інтеграл від раціональної функції $f(x), x \in X$. Якщо $m \geq n$ то, поділивши чисельник на знаменник, виділимо у функції f цілу частину:

$$f(x) = W(x) + \frac{P_{m_1}(x)}{Q_n(x)}, \quad m_1 < n,$$

де W – многочлен степеня $m-n$. Оскільки інтегрувати многочлен ми вміємо, то все звелося до інтегрування правильного дробу.

Приклад 1. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx$.

◀ Очевидно, що дріб $f(x) = \dfrac{x^3+x+1}{x^2+1}$ є неправильним, тому виділимо цілу частину:

$$f(x) = \frac{x(x^2+1)+1}{x^2+1} = x + \frac{1}{x^2+1}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^3+x+1}{x^2+1}dx = \int \left(x + \frac{1}{x^2+1}\right) dx =$$

$$= \int x dx + \int \frac{dx}{x^2+1} = \frac{x^2}{2} + \operatorname{arctg} x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

Отже, можна вважати, що інтегрування раціональної функції f зведено до інтегрування правильного дробу. У курсі алгебри доводиться, що всякий правильний дріб можна подати у вигляді суми найпростіших дробів вигляду

$$\frac{A}{x-a}, \quad \frac{A}{(x-a)^k}, \quad \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^m},$$

де $\{k, m\} \subset \mathbb{N} \setminus \{1\}$, A, B, C, a, p, q – дійсні числа, а квадратний тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів.

Приклад 2. Знайти інтеграл $\int \frac{x^2+4}{x^3-4x} dx$.

◀ Розкладемо знаменник підінтегральної функції на множники: $x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$. Тоді згідно з викладеним вище правильний дріб можна подати у вигляді

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+2}.$$

Знайдемо коефіцієнти A, B, C. Скористаємося прийомом, який називається **методом невизначених коефіцієнтів**. Для цього зведемо праву частину до спільного знаменника і прирівняємо чисельники:

$$x^2 + 4 = A(x-2)(x+2) + Bx(x-2) + Cx(x-2).$$

Зауважимо, що в кожного доданку правої частини відсутній точно один множник, тому при підстановці коренів знаменника всі доданки правої частини, крім одного, перетворюються в нуль:

$$\begin{array}{lll} x = 0, & 4 = A \cdot (-2) \cdot 2, & A = -1; \\ x = 2, & 8 = B \cdot 2 \cdot 4, & B = 1; \\ x = -2, & 8 = C \cdot (-2) \cdot (-4), & C = 1. \end{array}$$

Отже, шуканий розклад на найпростіші дроби має вигляд:

$$\frac{x^2+4}{x^3-4x} = \frac{-1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+2},$$

а тому інтеграл зображується у вигляді суми інтегралів, які легко знаходяться:

$$\int \frac{x^2+4}{x^3-4x} dx = -\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dx}{x-2} + \int \frac{dx}{x+2} = -\ln|x| + \ln|x-2| +$$

$$+\ln|x+2|+C=\ln\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x}\right|+C=\ln\left|\frac{x^2-4}{x}\right|+C,\ x\notin\{-2;0;2\}.\ \blacktriangleright$$

Приклад 3. Знайти інтеграл $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}$.

$\blacktriangleleft$ Підінтегральна функція $\dfrac{1}{x(x^2+1)^2}$ є правильним раціональним дробом і її розклад на найпростіші дроби має вигляд

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

Звівши дроби у правій частині до спільного знаменника, і прирівнявши чисельники дробів в обох частинах рівності, одержимо

$$1=A(x^2+1)^2+(Bx+C)x(x^2+1)+(Dx+E)x.$$

У цьому випадку маємо лише один дійсний корінь $x=0$ знаменника, що досить для знаходження тільки коефіцієнта A. Якщо $x=0$, то $1=A$, тобто $A=1$. Для знаходження решти коефіцієнтів розкриємо дужки в правій частині рівності й запишемо її у вигляді многочлена:

$$1=(A+B)x^4+Cx^3+(2A+B+D)x^2+(C+E)x+A.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях у лівій та правій частинах, дістанемо систему рівнянь для знаходження невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{array}{r|l} x^4 & 0=A+B,\\ x^3 & 0=C,\\ x^2 & 0=2A+B+D,\\ x^1 & 0=C+E,\\ x^0 & 1=A. \end{array}$$

Звідси знаходимо, що $A=1$; $B=-1$; $C=0$; $D=-1$; $E=0$. Шуканий розклад має вигляд

$$\frac{1}{x(x^2+1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{-x}{x^2+1}+\frac{-x}{(x^2+1)^2}.$$

Отже,

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)^2}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}-\int\frac{xdx}{(x^2+1)^2}.$$

Другий і третій інтеграли знаходимо за допомогою заміни змінної $t = x^2 + 1, dt = 2xdx$:

$$\int \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C,$$

$$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{2t} + C = -\frac{1}{2(x^2+1)} + C.$$

Остаточно одержимо, що

$$\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2} = \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \frac{1}{2(x^2+1)} + C, \quad x \neq 0. \ \blacktriangleright$$

Приклад 4. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx.$

◀ Розкладемо підінтегральну функцію на суму найпростіших дробів:

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

Зведемо дроби у правій частині до спільного знаменника й прирівняємо чисельники дробів в обох частинах рівності:

$$2x^3 + 4x^2 + x + 2 = A(x-1)(x^2+x+1) + B(x^2+x+1) +$$

$$+(Cx+D)(x-1)^2;$$

$$\begin{array}{c|l} x^3 & 2 = A + C, \\ x^2 & 4 = B + D - 2C, \\ x^1 & 1 = B + C - 2D, \\ x^0 & 2 = -A + B + D. \end{array}$$

Звідси знаходимо $A = 2$, $B = 3$, $C = 0$, $D = 1$. Тому

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{(x-1)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Отже,

$$\int \frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}dx = \int \frac{2dx}{x-1} + \int \frac{3dx}{(x-1)^2} +$$

$$+\int\frac{dx}{x^2+x+1}=2\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{(x-1)^2}+\int\frac{dx}{x^2+x+1}=$$

$$=2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\int\frac{d(x+\frac{1}{2})}{(x+\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}=$$

$$=2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+C=$$

$$=2\ln|x-1|-\frac{3}{x-1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,\quad x\neq 1.\quad \blacktriangleright$$

3.2. Інтегрування деяких ірраціональностей

Розглянемо інтеграл вигляду

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx, \tag{10}$$

де R – раціональна функція, тобто многочлен або відношення многочленів; a, b, c, d – дійсні числа такі, що $ad-bc\neq 0$, n – натуральне число, яке не дорівнює одиниці.

При знаходженні інтеграла (10) використовують підстановку

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

яка раціоналізує підінтегральний вираз.

Приклад 5. Знайти інтеграл $\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}$.

$\blacktriangleleft$ Нехай $t=\sqrt[3]{x+1}$. Тоді $x=t^3-1$, $dx=3t^2dt$, а тому інтеграл набуде вигляду

$$\int\frac{xdx}{\sqrt[3]{x+1}}=\int\frac{(t^3-1)3t^2dt}{t}=3(\int t^4dt-\int tdt)=$$

$$=3(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2})+C=\frac{3}{5}(\sqrt[3]{x+1})^5-\frac{3}{2}(\sqrt[3]{x+1})^2+C,\quad x\neq -1.\quad \blacktriangleright$$

Інтеграл вигляду

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{x^{m_1}}, \ldots,\ \sqrt[n_k]{x^{m_k}}\right) dx, \tag{11}$$

де R – раціональна функція; n_1, m_1,..., n_k, m_k – натуральні числа, раціоналізується підстановкою

$$x = t^s,$$

де s – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$. При такій заміні всі відношення $\frac{m_1}{n_1} = r_1, \ldots, \frac{m_k}{n_k} = r_2$ є цілими числами.

Приклад 6. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

◀ Маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt[6]{x}, x = t^6, \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = \int \frac{6t^5 dt}{t^3 + t^2} =$$

$$= 6\int \frac{t^3}{t+1} dt = 6\int \frac{(t^3+1)-1}{t+1} dt = 6\int \frac{t^3+1}{t+1} dt -$$

$$-6\int \frac{dt}{t+1} = 6\int \frac{(t+1)(t^2-t+1)}{t+1} dt - 6\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 6\int (t^2 - t + 1) dt - 6\int \frac{dt}{t+1} = 6(\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + t) - 6\ln|t+1| + C =$$

$$= 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - 6\ln(\sqrt[6]{x} + 1) + C, \quad x > 0. \quad ▶$$

Зауваження. Враховуючи запропоновані заміни до інтегралів (10) і (11), інтеграл вигляду

$$\int R\left(x,\ \sqrt[n_1]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_1}}, \ldots,\ \sqrt[n_k]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m_k}}\right) dx,$$

де R – раціональна функція; n_1, m_1,..., n_k, m_k – натуральні числа; a, b, c, d – дійсні числа такі, що $ad - bc \neq 0$, раціоналізується підстановкою

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

де s – найменший спільний знаменник дробів $\frac{m_1}{n_1}, \ldots, \frac{m_k}{n_k}$.

Інтеграл вигляду

$$\int x^m (a+bx^n)^p dx,$$

де $\{m,n,p\} \in \mathbb{Q}$, $\{a,b\} \in \mathbb{R}$, називається інтегралом від диференціального бінома $x^m(a+bx^n)^p dx$. Він виражається через елементарні функції тільки в наступних трьох випадках:

1) якщо $p \in \mathbb{Z}$, то застосовується підстановка $x = t^s$, де s – найменший спільний знаменник дробів m і n;

2) якщо $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$, то застосовується підстановка $a + bx^n = t^s$, де s – знаменник дробу $p = \frac{k}{s}$;

3) якщо $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$, то застосовується підстановка $ax^{-n} + b = t^s$, де s – знаменник дробу $p = \frac{k}{s}$.

У решті випадків, як було доведено П.Л.Чебишовим, інтеграли від диференціального бінома не виражаються через елементарні функції.

Приклад 7. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

◀ Маємо $\displaystyle\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx$.

Оскільки $p = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$, $m = -\frac{1}{2}$, $n = \frac{1}{4}$, $\frac{m+1}{n} = 2 \in \mathbb{Z}$, то застосовуємо підстановку $1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3$. Тоді $x = (t^3-1)^4$, $dx = 4(t^3-1)^3 3t^2 dt$ і

$$\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}} dx = \int (t^3-1)^{-2} t \cdot 4(t^3-1)^3 3t^2 dt =$$

$$= 12\int t^3(t^3-1)dt = 12\int (t^6 - t^3)dt = 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C =$$

$$= \frac{12}{7}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(1+\sqrt[4]{x})^4} + C. \quad ▶$$

Вираз вигляду

$$R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}),$$

де R – раціональна функція; a, b, c – дійсні числа, називають **квадратичною ірраціональністю**. Інтеграл від квадратичної ірраціональності

$$\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$$

знаходять за допомогою підстановок Ейлера:

1) якщо рівняння $ax^2+bx+c=0$ не має дійсних коренів, то робимо заміну

$$t = \sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a}, \ a > 0;$$

2) якщо ж $ax^2+bx+c = a(x-x_1)(x-x_2)$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $ax^2+bx+c=0$, то ефективною є підстановка

$$t = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-x_1}.$$

Приклад 8. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}}$.

◀ Оскільки рівняння $x^2-6x+13=0$ не має дійсних коренів, то треба зробити підстановку

$$t = \sqrt{x^2-6x+13} + x.$$

Тоді $(t-x)^2 = (\sqrt{x^2-6x+13})^2$ або $t^2-2tx+x^2 = x^2-6x+13$. Звідси випливає, що $x = \dfrac{t^2-13}{2t-6}$, $dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{t^2-6t+13}{(t-3)^2}dt$, $\sqrt{x^2-6x+13} = \dfrac{t^2-6t+13}{2(t-3)}$. Отже, інтеграл набуде вигляду

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+13}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2-6t+13}{(t-3)^2}\frac{2(t-3)}{t^2-6t+13}dt =$$

$$= \int \frac{dt}{t-3} = \ln|t-3| + C = \ln|x+\sqrt{x^2-6x+13}| + C, \quad x \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

Зауваження. Часто інтеграл від найпростішої квадратичної ірраціональності

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

за допомогою доповнення квадратного тричлена ax^2+bx+c до повного квадрата зводять до одного з трьох інтегралів

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}}, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} \quad \text{або} \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} .$$

Приклад 9. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x-x^2}}$.

◀ Маємо

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\frac{5}{4}-(x+\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{d(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{\sqrt{5}}{2})^2-(x+\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{d(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}})}{\sqrt{1-(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}})^2}} =$$

$$= \left| t = \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C =$$

$$= \arcsin \frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{2}} + C = \arcsin \frac{2x+1}{\sqrt{5}} + C,\ x \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right). \ ▶$$

3.3. Інтегрування тригонометричних функцій

У застосуваннях важливе значення мають інтеграли вигляду

$$\int \sin^m x \cos^n x dx, \tag{12}$$

де $\{m,n\} \subset \mathbb{Z}_+$.

Розрізняють два випадки: 1) принаймні один з показників m чи n – непарне число; 2) обидва показники m і n – парні числа.

У першому випадку інтеграл (12) знаходиться безпосередньо, якщо: 1) функцію з непарним степенем розкласти у добуток, де один із множників першого степеня; 2) виразити за допомогою основної тригонометричної тотожності $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ множник з парним степенем, який залишився, через другу функцію.

У другому випадку для знаходження інтеграла (12) використовують формули подвійного аргументу

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}, \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x.$$

Приклад 10. Знайти інтеграл $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.

◀ Маємо

$$\int \sin^3 x \cos^2 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \sin x dx =$$

$$= -\int (1-\cos^2 x)\cos^2 x d\cos x = -\int (\cos^2 x - \cos^4 x) d\cos x =$$

$$= -\int \cos^2 x d\cos x + \int \cos^4 x d\cos x = \frac{-\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

Приклад 11. Знайти інтеграл $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

◀ Подамо інтеграл у вигляді

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x(1+\cos 2x)dx = \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16}\int (1-\cos 4x)dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d\sin 2x = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \blacktriangleright$$

При знаходженні інтегралів вигляду

$$\int \sin mx \sin nx dx, \quad \int \cos mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx$$

використовують тригонометричні формули

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)).$$

Приклад 12. Знайти інтеграл $\int \sin x \sin 5x dx$.

◀ Маємо

$$\int \sin x \sin 5x dx = \frac{1}{2}\int (\cos 4x - \cos 6x)dx =$$

$$= \frac{1}{8}\sin 4x - \frac{1}{12}\sin 6x + C, \quad x \in \mathbb{R}. \quad ▶$$

Інтеграли вигляду

$$\int R(\sin x, \cos x)dx, \tag{13}$$

де $R(x, y)$ – раціональна функція змінних x і y, зводяться до інтегралів від раціональних функцій за допомогою **універсальної тригонометричної підстановки** $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi; \pi)$. Оскільки

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},$$

то

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Крім того, $x = 2\operatorname{arctg} t$, $dx = \dfrac{2dt}{1+t^2}$, а тому

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Останній інтеграл виражається через елементарні функції, тому й інтеграл (13) зводиться до інтегрування елементарних функцій.

Приклад 13. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5}$.

◀ Підінтегральна функція раціонально залежить від $\sin x$ і $\cos x$, а тому зробимо підстановку $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi; \pi)$. Тоді

$$\int \frac{dx}{4\cos x + 3\sin x + 5} = 2\int \frac{dt}{\left(4\frac{1-t^2}{1+t^2} + 3\frac{2t}{1+t^2} + 5\right)(1+t^2)} =$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2 + 6t + 9} = 2\int \frac{d(t+3)}{(t+3)^2} = -\frac{2}{t+3} + C = -\frac{2}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 3} + C. \quad ▶$$

Універсальна підстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $x \in (-\pi; \pi)$, у багатьох випадках приводить до складних обчислень, бо при її застосуванні $\sin x$ і $\cos x$ виражаються через t за допомогою раціональних дробів, що містять t^2.

У деяких частинних випадках знаходження інтегралів вигляду (13) можна значно спростити.

1) Якщо $R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція відносно $\sin x$, тобто $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то інтеграл (13) раціоналізується підстановкою $t = \cos x$.

2) Якщо $R(\sin x, \cos x)$ – непарна функція відносно $\cos x$, тобто $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$, то інтеграл (13) раціоналізується підстановкою $t = \sin x$.

3) Якщо $R(\sin x, \cos x)$ – парна функція відносно $\sin x$ і $\cos x$, тобто $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$, то зручно зробити підстановку $t = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$.

Приклад 14. Знайти інтеграл $\int \frac{(\sin x + \sin^3 x)dx}{\cos 2x}$.

◀ Оскільки підінтегральна функція непарна відносно $\sin x$, то покладемо $t = \cos x$. Тоді $\cos 2x = 2 = \cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$ $dt = -\sin x dx$, а тому

$$\int \frac{(1+\sin^2 x)\sin x dx}{\cos 2x} = -\int \frac{(2-t^2)dt}{2t^2 - 1} = \frac{1}{2}\int \frac{2t^2 - 4}{2t^2 - 1}dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2t^2-1)-3}{2t^2-1}dt = \frac{1}{2}\int dt - \frac{3}{2}\int \frac{dt}{2t^2-1} = \frac{t}{2} - \frac{3}{2\sqrt{2}}\int \frac{d(\sqrt{2}t)}{(\sqrt{2}t)^2-1} =$$

$$= \frac{t}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}t-1}{\sqrt{2}t+1}\right| + C =$$

$$= \frac{\cos x}{2} - \frac{3}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right| + C. \quad ▶$$

Приклад 15. Знайти інтеграл $\int \frac{\cos^3 + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}dx$.

◀ Підінтегральна функція непарна відносно $\cos x$, а тому зробимо підстановку $t = \sin x$. Тоді $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$, $\cos x dx = dt$, а тому

$$\int \frac{\cos^2 x(1+\cos^2 x)\cos x}{\sin^2 x(1+\sin^2 x)}dx = \int \frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t^2)}dt =$$

$$\left|\frac{(1-t^2)(2-t^2)}{t^2(1+t^2)} = 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{1+t^2}\right| = \int dt + 2\int \frac{dt}{t^2} - 6\int \frac{dt}{1+t^2} =$$

$$= t - \frac{2}{t} - 6\operatorname{arctg} t + C = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\operatorname{arctg}\sin x + C. \quad ▶$$

Приклад 16. Знайти інтеграл $\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x}$.

◀ Оскільки підінтегральна функція є парною відносно $\sin x$ і $\cos x$, то зробимо підстановку $t = \operatorname{tg} x$, $x \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$. Тоді $x = \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{dt}{1+t^2}$, $\sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}$, а тому

$$\int \frac{dx}{1-5\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(1-\frac{5t^2}{1+t^2}\right)(1+t^2)} = \int \frac{dt}{1-4t^2} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d(2t)}{(2t)^2-1} = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2t-1}{2t+1}\right| = -\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2\operatorname{tg} x-1}{2\operatorname{tg} x+1}\right| + C. \quad ▶$$

Вправи

1. Знайти інтеграл: 1) $\int x\sqrt{x}dx$; 2) $\displaystyle\int(2x^4 - 6x^5 + 3x^2 + 7)\,dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{x^3-3x+1}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\displaystyle\int(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 dx$; 5) $\displaystyle\int \frac{(1-x)^2}{x\sqrt{x}}dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{1+2x^2}{x^2(1+x^2)}dx$; 7) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos 2x + \sin^2 x}dx$; 8) $\displaystyle\int \frac{3\cdot 2^x - 2\cdot 3^x}{2^x}dx$; 9) $\displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos x\,dx$; 10) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\cos^2 x}dx$; 11) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$; 12) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$; 13) $\displaystyle\int \frac{1}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}dx$; 14) $\displaystyle\int 3^{x^3}x^2dx$; 15) $\displaystyle\int \frac{3^x}{\sqrt{1-9^x}}dx$.

2. Гранична ціна проданої продукції визначається формулою $C'(x) = x + 100$, де x – обсяг цієї продукції. Знайти загальну ціну проданої продукції, якщо ціна 100 одиниць продукції дорівнює 40 000 гр.од.?

3. Знайти функцію споживання f, якщо гранична схильність до споживання визначається рівністю $f'(x) = 0,5 + \dfrac{0,1}{\sqrt{x}}$, де x – національний доход, а споживання становить 85 гр.од., коли національний доход дорівнює 100 гр.од.

4. Використовуючи формулу заміни змінної, знайти інтеграл: 1) $\displaystyle\int \frac{1}{cos^2 5x}dx$; 2) $\displaystyle\int \sqrt[3]{5-6x}dx$; 3) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{3-4x^2}}dx$; 5) $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}}dx$; 7) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x\sqrt{1+\ln x}}dx$.

5. Застосовуючи інтегрування частинами, знайти інтеграл: 1) $\displaystyle\int x^2\cos x\,dx$; 2) $\displaystyle\int x2^{-x}dx$; 3) $\displaystyle\int \arcsin x\,dx$; 4) $\displaystyle\int (\ln x)^2 dx$; 5) $\displaystyle\int x(\operatorname{arctg} x)^2dx$; 6) $\displaystyle\int \cos(\ln x)dx$; 7) $\displaystyle\int \frac{x\cos x}{\sin^3 x}dx$.

6. Знайти інтеграл від раціональної функції: 1) $\displaystyle\int \frac{x-4}{(x-2)(x-3)}dx$; 2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+8}$; 3) $\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}dx$; 4) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+3x^2}dx$; 5) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+2)}dx$; 6) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}dx$; 7) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+9}dx$.

7. Знайти інтеграл від ірраціональної функції: 1) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{2x+1}+1}$;

2) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$; 3) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{3x+1}}dx$; 4) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; 5) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt[4]{x^3}}$;
6) $\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\frac{dx}{1-x}$; 7) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$.

8. Знайти інтеграл від тригонометричної функції:
1) $\int (1+2\cos x)^2 dx$; 2) $\int \sin^2 x\cos^3 x dx$; 3) $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$;
4) $\int \sin 3x \sin 5x dx$; 5) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx$; 6) $\int \sin x \sin 2x \sin 3x dx$;
7) $\int \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$; 8) $\int \frac{\sin^3+\sin^5 x}{\cos^2 x+\cos^4 x}dx$.

Відповіді

1. 1) $\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}+C$; 2) $\frac{2}{5}x^5-x^6+x^3+7x+C$; 3) $\frac{2}{7}x^3\sqrt[3]{x}-2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C$; 4) $\frac{x^2}{2}-2x+\ln|x|+C$; 5) $\frac{2x^2-12x-6}{\sqrt[3]{x}}+C$; 6) $\operatorname{arctg} x-\frac{1}{x}+C$; 7) $\operatorname{tg} x+C$; 8) $3x-2\left(\frac{3}{2}\right)^x\frac{1}{\ln 3/2}+C$; 9) $\frac{2}{3}\sin x\sqrt{\sin x}+C$; 10) $\frac{1}{\cos x}+C$; 11) $-\ln|\cos x|+C$; 12) $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}+C$; 13) $-\frac{1}{\arcsin x}+C$; 14) $\frac{3^{x^3}}{3\ln 3}+C$; 15) $\frac{1}{\ln 3}\arcsin 3^x+C$. **2.** $C(x)=\frac{x^2}{2}+100x+25000$. **3.** $f(x)=0,5x+0,2\sqrt{x}+33$. **4.** 1) $\frac{1}{5}\operatorname{tg} 5x+C$; 2) $-\frac{1}{8}(5-6x)^{4/3}+C$; 3) $2e^{\sqrt{x}}+C$; 4) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{2x}{\sqrt{3}}+C$; 5) $2\left(\frac{1}{3}\sqrt{(e^x+1)^3}-\sqrt{e^x+1}\right)+C$; 6) $-\sqrt{1+2\cos x}+C$; 7) $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+C$. **5.** 1) $x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$; 2) $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}+C$; 3) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$; 4) $x((\ln|x|-1)^2+1)+C$; 5) $\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$; 6) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C$; 7) $-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sin^2 x}+\operatorname{ctg} x\right)+C$. **6.** 1) $\ln\frac{(x-2)^2}{C(x-3)}$; 2) $\frac{1}{24}\ln\frac{(x+2)^2}{x^2-2x+4}+\frac{1}{4\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+C$; 3) $x+3\ln|x-3|-3\ln|x-$

$2| + C$; 4) $-\dfrac{1}{3x} - \dfrac{1}{3\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{3}} + C$; 5) $\dfrac{1}{4} \ln \dfrac{x^2}{x^2+2} + C$; 6) $\ln \dfrac{Cx^3(x-1)}{x+1}$; 7) $\dfrac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{arctg} \dfrac{x+2}{\sqrt{5}} + C$. **7.** 1) $\dfrac{2x+1}{12}(2\sqrt{2x+1}-3)+C$; 2) $2\sqrt{x} - \ln(1+\sqrt{x}) + C$; 3) $\dfrac{x+2}{5}\sqrt[3]{(3x+1)^2} + C$; 4) $x - 2\sqrt{x} + \ln(\sqrt{x}+1)^2 + C$; 5) $\ln\left|\dfrac{\sqrt[4]{x}-1}{\sqrt[4]{x}+1}\right| - 2\operatorname{arctg}\sqrt[4]{x} + C$; 6) $2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}} + C$; 7) $\dfrac{x}{4\sqrt{4+x^2}} + C$.

8. 1) $3x + 4\sin x + \sin 2x + C$; 2) $\dfrac{\sin^3 x}{3} - \dfrac{\sin^5 x}{5} + C$; 3) $\dfrac{x}{16} - \dfrac{\sin 4x}{64} + \dfrac{\sin^3 2x}{48} + C$; 4) $\dfrac{1}{4}\sin 2x - \dfrac{1}{16}\sin 8x + C$; 5) $\dfrac{1}{\cos x} + \cos x + C$; 6) $\dfrac{1}{24}\cos 6x - \dfrac{1}{16}\cos 4x - \dfrac{1}{8}\cos 2x + C$; 7) $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} - 1\right) + C$.

Визначений інтеграл

1. Визначений інтеграл, його основні властивості та методи інтегрування

1.1. Поняття визначеного інтеграла та його основні властивості

Нехай функція f визначена й неперервна на відрізку $[a;b]$, де $a < b$, а F – деяка її первісна, тобто $F'(x) = f(x), x \in [a;b]$. Пізніше буде доведено, що для неперервної на відрізку $[a;b]$ функції завжди існує первісна.

Означення. *Визначеним інтегралом*

$$\int_a^b f(x)dx \tag{1}$$

від неперервної функції f на відрізку $[a;b]$ називається різниця значень первісної для функції f у точках b та a, тобто

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Числа a і b називають відповідно **нижньою і верхньою межею** інтегрування, а відрізок $[a;b]$ – **проміжком інтегрування**. Формулу (2) називають **формулою Ньютона-Лейбніца**. При $a = b$ вважають, що

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Різницю $F(b) - F(a)$ коротко записують так: $F(x)\Big|_b^a$. Тому формулу (2) часто подають у вигляді

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b. \tag{2'}$$

У формулі (2) F – це деяка первісна для функції f на відрізку $[a;b]$. Доведемо, що визначений інтеграл не залежить від того, яку первісну для підінтегральної функції f взято у формулі (2). Нехай F і Φ – дві різні первісні функції для f на відрізку $[a;b]$. Згідно з основною властивістю первісних $\Phi(x) = F(x)+C$, $x \in [a;b]$. Звідси випливає, що

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a),$$

тобто ця різниця не залежить від C, а отже, є однаковою для довільної первісної.

Приклад 1. Обчислити $\int\limits_2^4 x^2 dx$.

◀ Маємо, що $\int x^2 dx = \frac{x^2}{3} + C$, а тому

$$\int\limits_2^4 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Bigg|_2^4 = \frac{4^3}{3} - \frac{2^3}{3} = \frac{1}{3}(64 - 8) = \frac{56}{3}. \blacktriangleright$$

Приклад 2. Обчислити $\int\limits_1^3 e^{2x} dx$.

◀ Оскільки $\int e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2} + C$, то

$$\int\limits_1^2 e^{2x} dx = \frac{e^{2x}}{2}\Bigg|_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e^2) = \frac{e^2}{2}(e^2 - 1). \quad \blacktriangleright$$

Розглянемо основні властивості визначеного інтеграла.

Властивість 1. *Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю, тобто*

$$\int\limits_a^a f(x)dx = 0.$$

◀ Ця властивість міститься в означенні визначеного інтеграла. У той же час її можна одержати з формули Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_a^a f(x)dx = F(a) - F(a) = 0. \quad \blacktriangleright$$

Властивість 2. *Величина визначеного інтеграла не залежить від позначення змінної інтегрування, тобто*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt. \tag{3}$$

◀ Оскільки $F'(x) = f(x), x \in [a;b]$ і $F'(t) = f(t)$, $t \in [a;b]$, то $F(x)\Big|_a^b = F(t)\Big|_a^b$. Звідси випливає (3). ▶

Властивість 3. *Сталий множник можна виносити за знак визначеного інтеграла, тобто*

$$\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx.$$

◀ Нехай $F'(x) = f(x)$, $x \in [a;b]$. Тоді $(AF(x))' = AF'(x) = Af(x)$, тобто $AF(x)$ є первісною для $Af(x)$ на $[a;b]$. Тому

$$\int_a^b Af(x)dx = AF(x)\Big|_a^b = A(F(b) - F(a)) = A\int_a^b f(x)dx. \ ▶$$

Властивість 4. *Визначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від цих функцій, тобто*

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx. \tag{4}$$

◀ Якщо $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, $x \in [a;b]$, то $(F(x) \pm G(x))' = f(x) \pm g(x), x \in [a;b]$. Звідси випливає, що

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = (F(x) \pm G(x))\Big|_a^b = (F(b) \pm G(b)) -$$

$$-(F(a) \pm G(a)) = (F(b) - F(a)) \pm (G(b) - G(a)) =$$

$$= \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx. \quad \blacktriangleright$$

Властивість 5. *Якщо відрізок інтегрування розбити на частини, то інтеграл по всьому відрізку дорівнює сумі визначених інтегралів по його частинах, тобто якщо* $c \in [a; b]$, *то*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx.$$

$\blacktriangleleft$ Оскільки $F'(x) = f(x), x \in [a; b]$, то $\int\limits_a^c f(x)dx = F(c) - F(a)$, а $\int\limits_c^b f(x)dx = F(b) - F(c)$. Додавши ці інтеграли, одержимо

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx. \quad \blacktriangleright$$

Властивість 6. *При перестановці меж інтегрування абсолютна величина визначеного інтеграла не змінюється, а змінюється лише його знак, тобто*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx.$$

$\blacktriangleleft$ Нехай $F'(x) = f(x), x \in [a; b]$. Тоді $\int\limits_b^a f(x)dx = F(a) - F(b) =$
$= -(F(b) - F(a)) = -\int\limits_a^b f(x)dx.$ $\blacktriangleright$

Властивість 7 (теорема про середнє). *Визначений інтеграл від неперервної функції дорівнює добутку довжини відрізка* *інтегрування на значення підінтегральної функції у певній точці* ξ *всередині його, тобто*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a), \quad \xi \in (a;b).$$

◀ Згідно з теоремою Лагранжа $F(b) - F(a) = F'(\xi)(b-a) = f(\xi)(b-a), \xi \in (a;b)$, тому $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = f(\xi)(b-a)$ ▶.

Властивість 8. *Якщо* $a < b$, f *– неперервна і* $f(x) \geq 0$ *на відрізку* $[a;b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

◀ Скориставшись властивістю 7, матимемо

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a) \geq 0. \quad ▶$$

Властивість 9. *Якщо* $a < b$, *функції* f *і* g *неперервні на* $[a;b]$ *і, крім того,* $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a;b]$, *то*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

◀ Оскільки $g(x) - f(x) \geq 0$, $x \in [a;b]$, то згідно з властивостями 4 і 8

$$0 \leq \int_a^b (g(x) - f(x))dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx,$$

звідки й випливає властивість 9. ▶

Властивість 10. *Нехай* m *– найменше, а* M *– найбільше значення неперервної функції* f *на* $[a;b]$. *Тоді правильні нерівності*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

◀ Ця властивість випливає з того, що $m \le f(x) \le M$, $x \in [a;b]$, властивості 9 і рівності $\int\limits_a^b dx = b - a$. ▶

Приклад 3. Обчислити $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x}\right) dx$.

◀ Маємо

$$\int_1^2 (\frac{4}{x} - 5x^4 + 2\sqrt{x})dx = 4\int_1^2 \frac{dx}{x} - 5\int_1^2 x^4 dx + 2\int_1^2 x^{\frac{1}{2}} dx =$$

$$= 4\ln x\Big|_1^2 - 5\,\frac{x^5}{5}\Big|_1^2 + 2\,\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^2 = 4(\ln 2 - \ln 1) - (2^5 - 1) + \frac{4}{3}(2^{\frac{3}{2}} - 1) =$$

$$= 4\ln 2 - 31 + \frac{8\sqrt{2}}{3} - \frac{4}{3} = 4\ln 2 - \frac{97}{3} + \frac{8}{3}\sqrt{2}. \quad ▶$$

1.2. Визначений інтеграл із змінною верхньою межею

Нехай f – неперервна на $[a;b]$, а F – її первісна. Розглянемо інтеграл

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a), \quad x \in [a;b].$$

Якщо змінювати x, то змінюватиметься і цей інтеграл, тобто він є функцією від x, визначеною на $[a;b]$, яку ми позначимо через $\Phi(x)$. Отже,

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad x \in [a;b]. \tag{5}$$

Інтеграл (5) називається **інтегралом із змінною верхньою межею**.

Теорема 1. *Якщо функція f неперервна на $[a;b]$, то інтеграл із змінною верхньою межею Φ є диференційовною функцією на $[a;b]$, причому*

$$\Phi'(x) = f(x), \quad x \in [a;b]. \tag{6}$$

◀ Маємо

$$\Phi'(x) = (\int_a^x f(t)dt)' = (F(x) - F(a))' = F'(x) - 0 =$$

$$= f(x), x \in [a;b]. \quad ▶$$

Рівність (6) означає, що похідна від інтеграла (5) по змінній верхній межі дорівнює значенню підінтегральної функції у точці верхньої межі. Тому функція Φ є первісною для неперервної функції f на відрізку $[a;b]$.

Наслідок. *Якщо функція f неперервна на відрізку $[a;b]$, то вона має первісну на ньому.*

1.3. Методи інтегрування частинами і заміни змінної

Теорема 2. *Нехай функції u і v мають неперервні похідні на відрізку $[a;b]$. Тоді правильна формула*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu \tag{7}$$

або

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx. \tag{8}$$

◀ Оскільки функція uv є первісною для функції $(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x), \quad x \in [a;b]$, то згідно з формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int_a^b (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b.$$

Якщо скористатися властивістю 4 визначеного інтеграла, то одержимо

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx = (u(x)v(x))\Big|_a^b, \qquad (9)$$

звідки випливає рівність (8). Згідно з означенням диференціала $du = u'(x)dx$, $dv = v'(x)dx$, а тому з (9) отримуємо (7). ▶

Приклад 4. Обчислити $\int_e^{e^2} \ln x dx$.

◀ Скористаємося формулою (7):

$$\int_e^{e^2} \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, du = \frac{dx}{x}; \\ dv = dx, v = x \end{vmatrix} = (x \ln x)\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} x\frac{dx}{x} =$$

$$= (x \ln x)\Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} dx = (e^2 \ln e^2 - e \ln e) - (e^2 - e) =$$

$$= 2e^2 \ln e - e \ln e - e^2 + e = 2e^2 - e - e^2 + e = e^2. \quad ▶$$

Як і у випадку невизначеного інтеграла, успіх у застосуванні формули (7) залежить від правильного вибору u і dv.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\int_0^{\pi} x \sin x dx$.

◀ Маємо

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx = \begin{vmatrix} u = x, du = dx, \\ dv = \sin x dx, v = \int \sin x dx = -\cos x \end{vmatrix} =$$

$$= (-x\cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x)dx = (-x\cos x)\Big|_0^{\pi} + \sin x\Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\pi\cos\pi + 0\ \cos 0 + \sin\pi - \sin 0 = -\pi(-1) = \pi. \quad ▶$$

Приклад 6. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{arctg} 3x dx$.

◀ Очевидно, що

$$\int\limits_0^{\frac{1}{3}} \operatorname{arctg} 3x dx = \left| \begin{matrix} u = \operatorname{arctg} 3x, du = \frac{3dx}{1+(3x)^2}, \\ dv = dx, v = x \end{matrix} \right| = (x \operatorname{arctg} 3x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} -$$

$$- \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{3x dx}{1+(3x)^2} = (x \operatorname{arctg} 3x)\Bigg|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6} \int\limits_0^{\frac{1}{3}} \frac{d(1+9x^2)}{1+9x^2} =$$

$$= (x \operatorname{arctg} 3x)\Big|_0^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{6} \ln(1+9x^2)\Big|_0^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{1}{3} \operatorname{arctg} 1 - 0 \ \operatorname{arctg} 0 \right) -$$

$$- \frac{1}{6}(\ln(1+9\ \frac{1}{9}) - \ln(1+0)) = \frac{1}{3}\ \frac{\pi}{4} - \frac{1}{6} \ln 2 = \frac{1}{12}(\pi - \ln 4). \blacktriangleright$$

Теорема 3. *Нехай: 1) $f(x)$ – неперервна функція на відрізку $[a;b]$; 2) функція $\varphi(t)$ – диференційовна на $[\alpha;\beta]$, причому $\varphi'(t)$ неперервна на цьому відрізку; 3) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$. Тоді правильна формула*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \tag{10}$$

◀ Нехай F – деяка первісна для f на $[a;b]$, тобто $F'(x) = f(x)$, $x \in [a;b]$. Тоді згідно з правилом диференціювання складеної функції маємо

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t), \quad t \in [\alpha;\beta].$$

З цієї рівності випливає, що функція $F(\varphi(t))$ є первісною для функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$, яка неперервна на відрізку $[\alpha;\beta]$. За формулою Ньютона-Лейбніца

$$\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

З цієї рівності й випливає правильність формули (10). ▶

Формулу (10) називають **формулою заміни змінної** або **підстановки у визначеному інтегралі**.

Зазначимо, що при обчисленні визначеного інтеграла за допомогою заміни змінної не треба повертатися до старої змінної, як при знаходженні невизначеного інтеграла, оскільки визначений інтеграл – це число, яке згідно з формулою (10) дорівнює значенню кожного з інтегралів. При заміні змінної у визначеномі інтегралі треба знайти нові межі інтегрування та виконати необхідні перетворення підінтегрального виразу.

Приклад 7. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx$.

◀ Оскільки умови теореми 3 виконуються, то

$$\int\limits_0^{\pi/2} \cos^3 x \sin x dx = \left| \begin{array}{c} t = \cos x, \\ dt = -\sin x dx, \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} x & 0 & \pi/2 \\ \hline t & 1 & 0 \end{array} \right| =$$

$$= -\int\limits_1^0 t^3 dt = \int\limits_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\Big|_1^0 = \frac{1}{4}. \blacktriangleright$$

Приклад 8. Обчислити інтеграл $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx$.

◀ Для того щоб позбутися ірраціональності, зробимо заміну змінної $t = \sqrt{x}$. Тоді $x = t^2$, $dx = 2tdt$, $\begin{array}{c|cc} x & 4 & 9 \\ \hline t & 2 & 3 \end{array}$. Умови теореми 3 виконуються, а тому

$$\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} dx = \int\limits_2^3 \frac{t \cdot 2tdt}{t-1} = 2\int\limits_2^3 \frac{t^2 dt}{t-1} = 2\int\limits_2^3 \frac{(t^2-1)+1}{t-1} dt =$$

$$= 2\left(\int\limits_2^3 (t+1)dt + \int\limits_2^3 \frac{dt}{t-1}\right) = 2\left(\left(\frac{t^2}{2}+t\right)\Big|_2^3 + \ln(t-1)\Big|_2^3\right) =$$

$$= 2\left(\frac{9}{2} + 3 - 2 - 2 + \ln 2 - \ln 1\right) = 2\left(\frac{9}{2} - 1 + \ln 2\right) =$$

$$= 2\left(\frac{7}{2} + \ln 2\right) = 7 + 2\ln 2. \ \blacktriangleright$$

1.4. Визначений інтеграл як границя інтегральної суми

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена й неперервна на $[a;b]$. Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ на n частин точками

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Позначимо через Δx_i довжину відрізка $[x_{i-1}; x_i]$, тобто $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Візьмемо на $[x_{i-1}; x_i]$ довільну точку ξ_i і складемо суму $\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n$ або

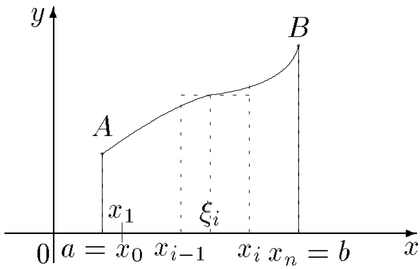
$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{11}$$

Цю суму називають **інтегральною сумою** для функції f, що відповідає заданому розбиттю сегмента $[a;b]$ на частини і заданому вибору точки $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Якщо існує границя σ при $\Delta \equiv \max \Delta x_i \to 0$ і не залежить від способу розбиття відрізка $[a;b]$ на частини і вибору точок ξ_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, то її називають **визначеним інтегралом від функції f на** $[a;b]$ і позначають символом $\int\limits_a^b f(x)dx$.

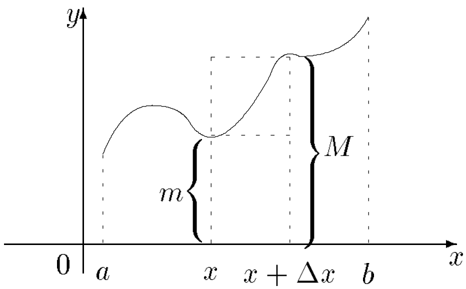
Отже,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{12}$$



Нехай $f(x) \geq 0, x \in [a;b]$. Розглянемо фігуру, яка обмежена зверху графіком функції $y = f(x)$, знизу – відрізком $[a;b]$, з боків – прямими $x = a$ і $x = b$. Ця фігура називається **криволінійною трапецією**.

Очевидно, що площа криволінійної трапеції дорівнює наближено інтегральній сумі σ, бо кожну елементарну криволінійну трапецію з основою $[x_{i-1}; x_i]$ можна замінити прямокутником з основою Δx_i і висотою $f(\xi_i)$, площа якого $f(\xi_i)\Delta x_i$. З іншого боку, якщо ми розглянемо криволінійну трапецію з основою $[a;x]$ і позначимо її площу через $S(x)$, то, надавши приросту Δx, одержимо, що $S(x)$ набуде приросту $\Delta S = S(x + \Delta x) - S(x)$.



Якщо $M = \max\limits_{[x;x+\Delta x]} f(x)$, $m = \min\limits_{[x;x+\Delta x]} f(x)$, то

$$m\Delta x \leq \Delta S \leq M\Delta x \quad \text{або} \quad m \leq \frac{\Delta S}{\Delta x} \leq M.$$

Нехай $\Delta x \to 0$, тоді m і M прямують до $f(x)$, а тому

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x),$$

тобто $S'(x) = f(x), x \in [a;b]$. Це означає, що

$$S(x) = \int\limits_a^x f(t)dt. \tag{13}$$

Якщо $x = b$, то з (13) одержимо, що площа усієї криволінійної трапеції

$$S = \int\limits_a^b f(t)dt.$$

Оскільки інтеграл із змінною верхньою межею $\int\limits_a^x f(t)dt$ від неперервної на $[a;b]$ функції f є однією із первісних для неї, то будь-яка інша первісна $F(x)$ записується у вигляді

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt + C. \tag{14}$$

Якщо підставити в (14) $x = a$ і $x = b$, то дістанемо, що $C = F(a)$ і тому

$$\int\limits_a^b f(t)dt = F(b) - F(a),$$

тобто формулу Ньютона-Лейбніца. Отже, обидва означення визначеного інтеграла є еквівалентними.

2. Невласні інтеграли

При означенні інтеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ припускалося, що: 1) проміжок інтегрування $[a;b]$ скінченний; 2) підінтегральна функція f визначена і неперервна на $[a;b]$. Такий інтеграл часто називають **власним**. Якщо ж порушується одна з цих умов, то символ (1) називають **невласним визначеним інтегралом**.

З'ясуємо зміст цього нового поняття для двох найпростіших випадків.

2.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування

Нехай функція f неперервна на проміжку $[a;+\infty)$. Тоді вона інтегровна на кожному скінченному проміжку $[a;b]$, тобто існує інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

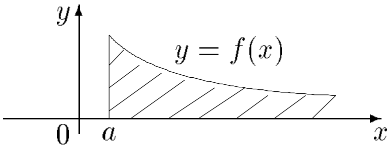
Під **невласним інтегралом**

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx \tag{15}$$

розумітимемо границю

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{16}$$

Якщо границя в (16) існує, то невласний інтеграл (15) називається **збіжним** і його значення визначається формулою (16). Якщо ж ця границя не існує або є нескінченною, то рівність (16) втрачає зміст, а невласний інтеграл називається **розбіжним** і йому не надають жодного числового значення. Якщо f невід'ємна на $[a;+\infty)$, то невласний інтеграл (15) є площею криволінійної фігури, обмеженої графіком функції $y = f(x)$, віссю Ox і прямою $x = a$.



Нехай f має первісну F на $[a; +\infty)$, тобто $F'(x) = f(x)$, $x \in [a; +\infty)$. Тоді

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to+\infty} (F(b) - F(a)).$$

Якщо ввести умовне позначення $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$, то дістанемо для збіжного невласного інтеграла (15) узагальнену формулу Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(+\infty) - F(a),$$

де $F'(x) = f(x)$, $x \in [a; +\infty)$, причому невласний інтеграл збіжний тоді й тільки тоді, коли існує скінченна границя $\lim\limits_{b\to+\infty} F(b) = F(+\infty)$.

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$.

◀ Згідно з означенням

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_0^b \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} x \Big|_0^b =$$

$$= \lim_{b\to+\infty} (\operatorname{arctg} b - \operatorname{arctg} 0) = \lim_{b\to+\infty} \operatorname{arctg} b = \frac{\pi}{2}. \blacktriangleright$$

Аналогічно, як у випадку означення (16), можна розглянути невласний інтеграл з іншим нескінченним проміжком інтегрування, а саме:

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty} \int_a^b f(x)dx.$$

Можна також розглядати невласний інтеграл з нескінченними нижньою і верхньою межами $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. Для цього візьмемо довільну точку c. Вона розіб'є числову вісь на дві півосі $(-\infty; c]$ і $(c; +\infty)$. Якщо існують невласні інтеграли $\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx$ і $\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx$, то кажуть, що існує й невласний інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$. У цьому випадку покладають

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_{c}^{+\infty} f(x)dx.$$

Можна довести, що величина $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ не залежить від вибору точки c.

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$, якщо він збіжний, або довести його розбіжність.

◀ Маємо

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{b\to+\infty} 2\sqrt{x}\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to+\infty} (2\sqrt{b} - 2) = \infty.$$

Отже, інтеграл розбігається. ▶

Приклад 3. Обчислити невласний інтеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos 2x dx$, якщо він збіжний, або довести його розбіжність.

◀ Оскільки $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos 2x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \cos 2x dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{\sin 2x}{2}\Big|_{0}^{b} = \lim\limits_{b\to+\infty} \frac{\sin 2b}{2}$, то інтеграл розбігається, бо відповідна границя не існує. ▶

2.2. Невласні інтеграли від необмежених функцій

Нехай функція f визначена на проміжку $[a;b)$. Точку b називатимемо **особливою**, якщо функція f не обмежена в довільному околі цієї точки, але обмежена на будь-якому відрізку, що міститься в $[a;b)$. Нехай функція f неперервна на $[a;b)$, а точка b є особливою. Очевидно, що f інтегровна на відрізку $[a;b-\varepsilon]$, де $\varepsilon > 0$, а тому існує інтеграл $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$. Тоді якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то її беремо за невласний інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ від необмеженої функції f. Отже,

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \qquad (17)$$

У цьому випадку кажуть, що невласний інтеграл (17) **збігається**. Якщо ж границя не існує або нескінченна, то інтеграл (17) **розбігається**. Аналогічно, якщо $x = a$ – особлива точка, то невласний інтеграл визначається так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Якщо ж $x = c$ – єдина внутрішня особлива точка на відрізку $[a;b]$, то покладаємо

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx \qquad (18)$$

за умови, що обидва невласні інтеграли справа збігаються.

Якщо особливих точок на відрізку $[a;b]$ декілька, то відрізок розбивають так, щоб у кожному відрізку розбиття було не більше однієї особливої точки, і використовують означення (18).

Якщо F – первісна для функції f, то покладемо $F(a+0) = \lim\limits_{\varepsilon_1\to 0+0} F(a+\varepsilon_1)$, $F(b-0) = \lim\limits_{\varepsilon_2\to 0+0} F(b-\varepsilon_2)$, якщо ці границі існують. Тоді аналогом формули Ньютона-Лейбніца для збіжних невласних інтегралів, у яких особливими точками є точки $x = a$ і $x = b$, буде формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b-0) - F(a+0).$$

У випадку неперервної функції F одержимо формулу, яка за формою повністю збігається з формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \tag{19}$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$, якщо він існує, або довести його розбіжність.

◀ Підінтегрльна функція $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ має єдину особливу точку $x = 0$ на проміжку інтегрування $(0;1]$. Первісною для цієї функції є, наприклад, функція $F(x) = 2\sqrt{x}$, яка неперервна на цьому проміжку. За формулою (19) маємо:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_0^1 = 2 - 0 = 2.$$

Отже, зазначений невласний інтеграл збігається і дорівнює 2. ▶

Приклад 5. Обчислити інтеграл $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$, якщо він збіжний, або довести його розбіжність.

◀ Підінтегральна функція $f(x) = \dfrac{1}{x}$ має на проміжку інтегрування $(0;1]$ єдину особливу точку $x = 0$. Первісною для неї є, наприклад, функція $F(x) = \ln x$. Тому маємо

$$\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln x\Big|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon\to 0+0} (\ln 1 - \ln\varepsilon) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon\to 0+0} \ln\varepsilon = +\infty.$$

Отже, зазначений невласний інтеграл розбігається. ▶

3. Застосування визначеного інтеграла

3.1. Обчислення площі плоскої фігури

У підрозділі 1.4 цього розділу ми довели, що для неперервної невід'ємної функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, **визначений інтеграл від функції f по відрізку $[a; b]$ визначає площу криволінійної трапеції** $aABb$ (рис. 1), тобто

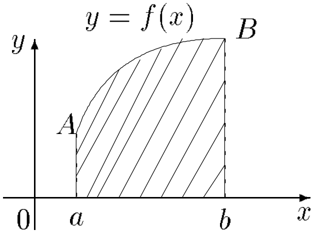


Рис. 1

$$S = \int_a^b f(x)dx. \tag{20}$$

Очевидно, що коли $f(x) \le 0$, $x \in [a; b]$, то

$$S = -\int_a^b f(x)dx.$$

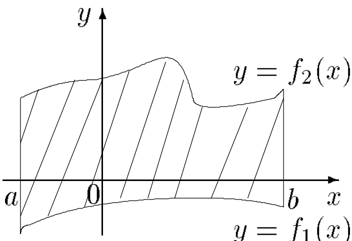


Рис. 2

Якщо розглянути область, яка обмежена двома неперервними лініями (рис. 2) $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і двома прямими $x = a$ і $x = b$, то одержимо

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

При цьому умова невід'ємності функцій f_1 і f_2 необов'язкова.

Приклад 1. Знайти площу фігури, обмеженої параболою $y = x^2 + 1$ і прямою $x + y - 3 = 0$.

◀ Спочатку побудуємо фігуру, площу якої шукаємо (рис. 3).

Далі знайдемо точки перетину заданих ліній. Маємо $3 - x = x^2 + 1$, звідки $x^2 + x - 2 = 0$, тобто $x_1 = -2$, $x_2 = 1$. Тому межі інтегрування такі: $a = -2$, $b = 1$.

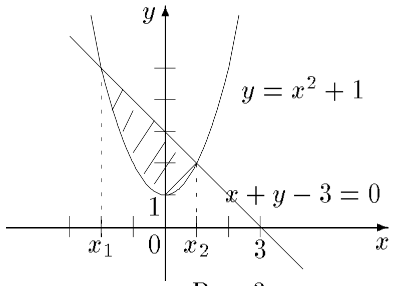


Рис. 3

Отже,

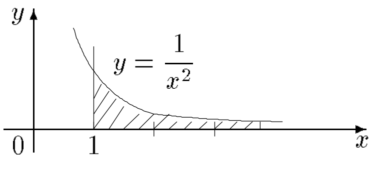
$$S = \int_{-2}^{1} ((3 - x) - (x^2 + 1))dx = \int_{-2}^{1} (2 - x - x^2)dx =$$

$$= \left(2x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1} = \left(2 - \frac{1^2}{2} - \frac{1^3}{3}\right) -$$

$$- \left(2(-2) - \frac{(-2)^2}{2} - \frac{(-2)^3}{3}\right) = 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(-4 - 2 + \frac{8}{3}\right) =$$

$$= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 6 - \frac{8}{3} = 5 - \frac{1}{2} = \frac{9}{2}. \blacktriangleright$$

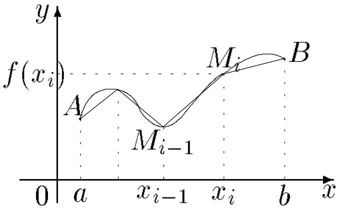
Приклад 2. Знайти площу фігури, яка обмежена кривою $y = \dfrac{1}{x^2}$, віссю Ox, прямою $x = 1$, і лежить правіше від цієї прямої.



◀ З рисунка видно, що $a = 1$, $b = +\infty$. Тому

$$S = \int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_{1}^{b} = \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1. \blacktriangleright$$

3.2. Довжина дуги кривої



Під довжиною дуги $\breve{AB}$ розумітимемо границю, до якої прямує довжина ламаної, вписаної в цю дугу, коли число ланок ламаної необмежено зростає, а довжина найбільшої ланки прямує до нуля.

Нехай дуга $\breve{AB}$ задана рівнянням $y = f(x)$, $x \in [a; b]$, де f і f' – неперервні на $[a; b]$ функції. Доведемо, що вона має скінченну довжину.

Розіб'ємо дугу $\breve{AB}$ точками $A = M_0$, M_1, ..., M_{i-1}, M_i, ..., $M_n = B$ на n частин. Нехай $M_i(x_i,\, y_i)$, де $y_i = f(x_i)$. Тоді довжина ланки $M_{i-1}M_i$ ламаної, вписаної в дугу $\breve{AB}$, дорівнює

$$|M_{i-1}M_i| = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2} = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2},$$

де $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1} = f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\Delta x_i$, $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$.

Отже, $|M_{i-1}M_i| = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i$. Тому довжина всієї ламаної дорівнює

$$\bar{l} = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\Delta x_i.$$

Вираз справа у цій рівності є інтегральною сумою для функції $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ на відрізку $[a; b]$. Якщо перейти до границі при $\Delta \equiv \max\limits_i \Delta x_i \to 0$, то дістанемо формулу для обчислення довжини дуги $\breve{AB}$:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Приклад 3. Обчислити довжину дуги напівкубічної параболи $y = x^{3/2}$, якщо $0 \le x \le 5$.

◀ Оскільки $y' = \dfrac{3}{2}x^{1/2}$, то

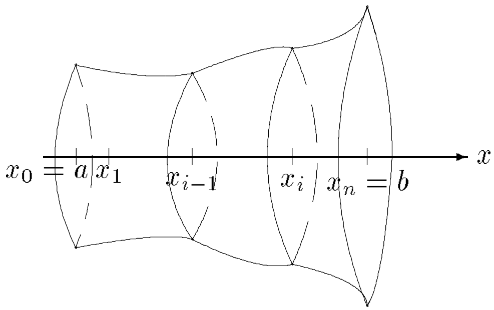
$$l = \int_0^5 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{1/2}\right)^2}dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x dx} =$$

$$= \frac{4}{9}\int_0^5 \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{1/2} d\left(1 + \frac{9}{4}x\right) = \frac{4}{9}\frac{\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{3/2}}{3/2}\Bigg|_0^5 =$$

$$= \frac{8}{27}\left(\left(1 + \frac{45}{4}\right)^{3/2} - 1\right) = \frac{335}{27}. \blacktriangleright$$

3.3. Обчислення об'єму тіла за площею поперечного перерізу

Нехай відомий закон зміни площі поперечного перерізу тіла. Під поперечним перерізом розумітимемо переріз тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox. Треба знайти об'єм V заданого тіла.



Якщо $S(x)$ – площа поперечного перерізу, то вважатимемо її неперервною функцією на $[a; b]$.

Поділимо відрізок $[a; b]$ на n частин точками $a = x_0$, x_1, ..., $x_n = b$ і через точки поділу проведемо площини, перпендикулярні до осі Ox. У результаті тіло розіб'ється на n шарів, кожний з яких можна вважати циліндром. Оскільки об'єм i-го шару наближено дорівнює $S(\xi_i)\Delta x_i$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, то для об'єму V дістанемо наближене значення

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i,$$

де справа маємо інтегральну суму для неперервної функції S на відрізку $[a; b]$.

Якщо $\Delta \equiv \max\limits_i \Delta x_i \to 0$, то одержимо, що

$$V = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{n} S(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b S(x)dx.$$

Отже, $$V = \int_a^b S(x)dx.$$

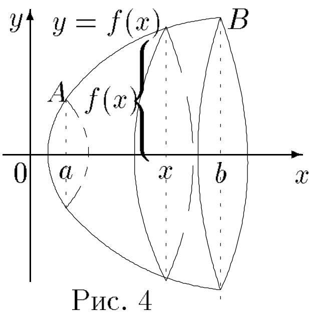


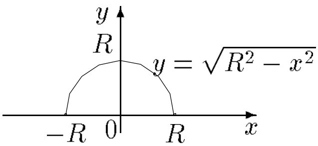
Рис. 4

Розглянемо тепер задачу про знаходження об'єму тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої графіком невід'ємної функції $y = f(x)$, $x \in [a; b]$), відрізком $[a; b]$ осі Ox і прямими $x = a$ і $x = b$ (рис. 4). Очевидно, що $S(x) = \pi(f(x))^2$.

Тому об'єм тіла обертання

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx. \tag{21}$$

Приклад 4. Знайти об'єм кулі радіуса R.



◀ Розглянемо кулю як тіло обертання навколо осі Ox півкруга радіуса R з центром в початку координат. Згідно з формулою (21), маємо

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}. \blacktriangleright$$

Приклад 5. Знайти об'єм тіла обертання навколо осі Ox фігури, обмеженої лініями $y = x^2$ і $y = \sqrt{x}$.

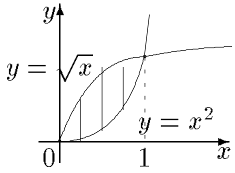


Рис. 5

◀ Шуканий об'єм тіла обертання дорівнює різниці об'ємів, утворених обертанням криволінійних трапецій, обмежених зверху відповідно графіками функцій $y = \sqrt{x}$ і $y = x^2$ (рис. 5).

Межі інтегрування знайдемо, розв'язавши рівняння $\sqrt{x} = x^2$. Корені цього рівняння $x_1 = 0$, $x_2 = 1$.

Згідно з формулою (21)

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{x})^2 dx - \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x dx - \pi \int_0^1 x^4 dx =$$

$$= \pi \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \pi \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) = \frac{3\pi}{10}. \blacktriangleright$$

3.4. Деякі застосування визначеного інтеграла в економіці

3.4.1. Граничні витрати. В економічних дослідженнях часто розглядають **граничні величини**, тобто для заданої величини, визначеної деякою функцією $y = f(x)$, $x \in X$, розглядають її похідну $f'(x)$, $x \in X$. Наприклад, якщо f є функцією витрат, яка залежить від обсягу x товару, то **граничні витрати** визначатимуться похідною $f'(x)$. Її економічний зміст – це витрати на виробництво наступної одиниці товару. У багатьох випадках треба знаходити функцію витрат за заданою функцією граничних витрат.

Приклад 6. Відома функція граничних витрат $f'(x) = 3x^2 - 48x + 202$, $x \in [1;20]$. Знайти функцію витрат f і обчислити витрати при випуску 10 одиниць товару, якщо витрати на виробництво першої одиниці товару становлять 100 гр.од.

◀ Функцію витрат знаходимо інтегруванням

$$f(x) = \int\limits_1^x f'(t)dt + C, \quad x \in [1;20],$$

де стала C визначається з умови $f(1) = 100$. Маємо

$$f(x) = \int\limits_1^x (3t^2 - 48t + 202)dt + C = (t^3 - 24t^2 + 202t)\Big|_1^x + C =$$

$$= (x^3 - 24x^2 + 202x) - (1 - 24 + 202) + C.$$

Оскільки $f(1) = 100$, то звідси одержуємо $100 = C$, а тому

$$f(x) = x^3 - 24x^2 + 202x - 79, \quad x \in [1;20].$$

Підставивши $x = 10$ в одержану формулу, одержуємо шукане значення

$$f(10) = 10^3 - 24 \cdot 10^2 + 202 \cdot 10 - 79 = 541 \text{ гр.од.} ▶$$

3.4.2. Капітал. Розглянемо задачу про **знаходження капіталу** (основних фондів) за відомими чистими інвестиціями. Під чистими інвестиціями (капіталовкладеннями) розуміємо загальні інвестиції, здійснювані в економіці протягом певного проміжку часу (найчастіше року) без інвестицій, які йдуть на відшкодування основних фондів (капіталу). Отже, за одиницю часу капітал збільшується на величину чистих інвестицій. Позначимо капітал, який залежить від часу t через $K(t)$, а чисті інвестиції – через $I(t)$. Тоді описане вище можна подати у вигляді рівності $I(t) = K'(t)$.

Якщо треба знайти приріст капіталу за період часу від t_1 до t_2, тобто величину $\Delta K = K(t_2) - K(t_1)$, то, скориставшись означенням визначеного інтеграла, матимемо

$$\Delta K = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)dt.$$

Приклад 7. Відомо, що чисті інвестиції визначаються формулою $I(t) = 9000\sqrt{t}$. Знайти приріст капіталу за чотири роки.

◀ Маємо $\quad \Delta K = K(4) - K(0) = \int\limits_0^4 9000\sqrt{t}dt = 9000 \cdot \frac{2}{3}t^{3/2}\Big|_0^4 =$

$= 9000 \cdot \frac{2}{3}(4^{3/2} - 0) = 9000\frac{2}{3} \cdot 8 = 48000.$ ▶

3.4.3. Функція Коба-Дугласа. Функцією Коба-Дугласа називається виробнича функція, яка описує залежність обсягу q випуску продукції від витрат капіталу x_1 і трудових ресурсів x_2, яка має вигляд $q = b_0 x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, де b_0 – параметр продуктивності конкретної технології, $0 < \alpha < 1$ – частка капіталу в доході. Якщо витрати капіталу сталі, а витрати трудових ресурсів залежать від часу, то функція Коба-Дугласа має, зокрема, вигляд $q(t) = (\alpha t + \beta)e^{\chi t}$, де α, β, χ – параметри задачі. У цьому випадку обсяг продукції, яка випускається за проміжок часу від $t_1 = 0$ до $t_2 = T$, дорівнює

$$Q = \int\limits_0^T (\alpha t + \beta)e^{\chi t}dt. \tag{22}$$

Приклад 8. Знайти обсяг продукції, виробленої фірмою за 2 роки, якщо функція Коба-Дугласа $q(t) = (1 + 2t)e^{3t}$.

◀ Згідно з формулою (22)

$$Q = \int\limits_0^2 (1 + 2t)e^{3t}dt.$$

Інтегруючи частинами, одержуємо

$$Q = \begin{vmatrix} u = 1 + 2t, du = 2dt \\ dv = e^{3t}dt, v = \frac{1}{3}e^{3t} \end{vmatrix} = \frac{1}{3}(1 + 2t)e^{3t}\Big|_0^2 - \frac{2}{3}\int\limits_0^2 e^{3t}dt =$$

$$= \frac{1}{3}(5e^6 - 1) - \frac{2}{9}e^{3t}\Big|_0^2 = \frac{1}{3}(5e^6 - 1) - \frac{2}{9}e^6 + \frac{2}{9} =$$

$$= \frac{13}{9}e^6 - \frac{1}{9} \approx 582,619 \text{ гр.од.}$$ ▶

3.4.4. Денний виробіток. Розглянемо питання знаходження денного виробітку на конкретному прикладі.

Приклад 9. Знайти денний виробіток P за восьмигодинний робочий день, якщо продуктивність праці впродовж дня змінюється за законом $p(t) = -0,2t^2 + 1,6t + 3$, де t – час в годинах.

◀ Вважатимемо, що продуктивність праці p є неперервною функцією аргументу t на відрізку $[0; 8]$, а тому денний виробіток P можна виразити визначеним інтегралом

$$P = \int_0^8 p(t)dt.$$

Отже,
$$P = \int_0^8 (-0,2t^2 + 1,6t + 3)dt = \left(-0,2\frac{t^3}{3} + \frac{1,6t^2}{2} + 3t\right)\Bigg|_0^8 =$$

$$= -0,2 \cdot \frac{8^3}{3} + 0,8 \cdot 8^2 + 3 \cdot 8 = -34,13 + 51,2 + 24 = 41,07. \blacktriangleright$$

3.4.5. Залежність відсотка доходів від відсотка осіб. Залежність відсотка доходів від відсотка осіб, які його мають, описується функцією, графік якої називають **кривою Лоренца** (крива OBA на рис. 6).

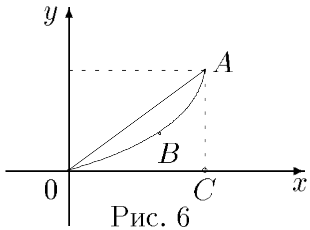


Рис. 6

Досліджуючи цю криву, можна оцінити ступінь нерівності при розподілі доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива Лоренца вироджується в пряму (бісектрису OA), тому відношення площі фігури OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца до площі трикутника OAC (**коефіцієнт Джіні**), характеризує ступінь нерівності в розподілі доходів населення.

Приклад 10. Крива Лоренца визначається рівнянням $y = 1 - \sqrt{1-x^2}$, де x – кількість населення, y – величина доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

◀ Очевидно, що коефіцієнт Джіні (див. рис. 6)

$$K = \frac{S_{OAB}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - \frac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} = 1 - 2S_{OBAC}, \text{ оскільки } S_{\Delta OAC} = \frac{1}{2}.$$

$$S_{OBAC} = \int\limits_0^1 (1 - \sqrt{1-x^2})dx = \int\limits_0^1 dx - \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx =$$

$$= x\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{c} x = \sin t, dx = \cos t, \\ \begin{array}{c|cc} x & 0 & 1 \\ \hline t & 0 & \pi/2 \end{array} \end{array} \right| =$$

$$= 1 - \int\limits_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = 1 - \int\limits_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2}dt = 1 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} + 0\right) = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Отже,

$$K = 1 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \approx 0,57.$$

Досить велике значення K вказує на те, що доходи серед населення розподіляються нерівномірно. ▶

3.4.6. Дисконтна вартість грошового потоку. За кінцевою величиною K_t грошового потоку у момент часу t треба знайти його початкову величину, коли відома відсоткова ставка p.

Якщо відсотки прості, то $K_t = K_0(1+rt)$, де $r = \frac{p}{100}$ – питома відсоткова ставка. Тоді $K_0 = \frac{K_t}{1+rt}$. У випадку складних відсотків $K_t = K_0(1+rt)^t$ і тому $K_0 = \frac{K_t}{(1+rt)^t}$. При неперервному нарахуванні відсотків кінцева сума $K_t = K_0 e^{rt}$. Якщо суму K_t вважати функцією часу $f(t)$, то дисконтована сума на момент часу t становитиме $K_0 = f(t)e^{-rt}$.

Повна дисконтована сума за час t обчислюється за формулою

$$K_d = \int\limits_0^t f(\tau)e^{-r\tau}d\tau. \tag{23}$$

Приклад 11. Під будівництво певного об'єкту виділено неперервний грошовий потік, який визначається функцією $f(t) = -t^2 + 20t + 5$ (мільярд гр.од./год) протягом 20 років з річною відсотковою ставкою $p = 5\%$. Знайти дисконтовану вартість цього потоку.

◀ Згідно з формулою (23) маємо

$$K_d = \int\limits_0^{20} (-t^2 + 20t + 5)e^{-0,05t}dt.$$

Для спрощення обчислень зробимо спочатку заміну змінної

$$\tau = -0,05t, \quad t = -20\tau, \quad dt = -20d\tau, \quad \begin{array}{c|cc} t & 0 & 20 \\ \hline \tau & 0 & -1 \end{array}.$$

Тоді

$$K_d = -20\int\limits_0^{-1}(-400\tau^2 - 400\tau + 5)e^{\tau}d\tau = 20\int\limits_{-1}^{0}(-400\tau^2 - 400\tau + 5)e^{\tau}d\tau =$$

$$= \left| \begin{array}{c} u = -400\tau^2 - 400\tau + 5, du = (-800\tau - 400)d\tau, \\ dv = e^{\tau}d\tau, \qquad\qquad v = e^{\tau} \end{array} \right| =$$

$$= 20\left((-400\tau^2 - 400\tau + 5)e^{\tau}\Big|_{-1}^{0} + \int\limits_{-1}^{0}(800\tau + 400)e^{\tau}d\tau \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 800\tau + 400, du = 800d\tau, \\ dv = e^{\tau}d\tau, \qquad\qquad v = e^{\tau} \end{array} \right| = 20\left(5 - 5e^{-1} + (800\tau + 400)e^{\tau}\Big|_{-1}^{0} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-1}^{0} 800e^{\tau}d\tau \right) = 20\left(5 - 5e^{-1} + 400 - (-800 + 400)e^{-1} - 800e^{\tau}\Big|_{-1}^{0} \right) =$$

$$= 20\left(5 - 5e^{-1} + 400 + 400e^{-1} - 800 + 800e^{-1}\right) = 20(-395 + 1195e^{-1}) =$$

$$= 20(-395 + 1195 \cdot 0.3679) = 892,8 \text{ мільярда гр.од.} \blacktriangleright$$

Якщо грошовий потік не припиняється ніколи, наприклад, у випадку експлуатації земельної ділянки, r – неперервна питома відсоткова ставка, а $f(t)$ – відповідна рента на момент часу t, то дисконтовану вартість земельної ділянки знаходять за формулою

$$K_d = \int_0^{\infty} f(t)e^{-rt}dt.$$

Приклад 12. Нехай $f(t) = 5e^{-0,7t}$ (млн. гр.од./год) – рента, одержувана від земельної ділянки, $p = 10\%$ – відсоткова ставка. Знайти дисконтовану суму.

◀ Маємо

$$K_d = \int_0^{\infty} 5e^{-0,7t}\ e^{-0,1t}dt = 5\int_0^{\infty} e^{-0,8t}dt =$$

$$= \lim_{b\to\infty} 5\int_0^{b} e^{-0,8t}dt = 5\lim_{b\to\infty}\left(\left.\frac{e^{-0,8t}}{-0,8}\right|_0^b\right) =$$

$$= 5\lim_{b\to\infty}\left(\frac{e^{-0,8b}}{-0,8} + \frac{1}{0,8}\right) = \frac{5}{0,8} = 6,25 \text{ (млн. гр.од.)}. \blacktriangleright$$

3.4.7. Максимізація прибутку стосовно часу. Нехай $P(x)$ – функція доходу, $\Pi(x)$ – функція прибутку, $S(x)$ – функція сумарних витрат, а x – час, тоді

$$\Pi(x) = P(x) - S(x).$$

Очевидно, що екстремум цієї функції можливий у момент часу, коли $\Pi'(x) = 0$ або $P'(x) = S'(x)$.

Якщо x_1 – момент часу, для якого $\Pi'(x_1) = 0$, то сумарний прибуток за проміжок часу $[0, x_1]$ знаходимо за формулою

$$\Pi(x_1) = \int_0^{x_1} \Pi'(x)dx = \int_0^{x_1} (P'(x) - S'(x))dx.$$

На рис. 7 $\Pi(x_1)$ – це площа заштрихованої фігури.

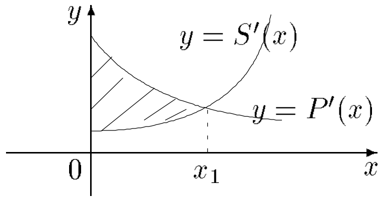


Рис. 7

Приклад 13. Нехай граничні витрати $S'(x)$ і граничний доход $P'(x)$ підприємства визначаються формулами

$$S'(x) = 5 + 2x^{2/3}, \quad P'(x) = 17 - x^{2/3},$$

де S і P вимірюються мільйонами гривень, а x – роками.

Знайти, як довго підприємство залишалось прибутковим, та знайти сумарний прибуток, одержаний за цей період.

◀ Оптимальний час прибутковості підприємства знайдемо з умови $S'(x) = P'(x)$:

$$5 + 2x^{2/3} = 17 - x^{2/3}, \quad 12 = 3x^{2/3}, \quad x^{2/3} = 4, \quad x_1 = \sqrt{4^3} = 8.$$

Звідси випливає, що підприємство було прибутковим 8 років. За цей час одержано прибуток

$$\Pi(8) = \int_0^8 (P'(x) - S'(x))dx = \int_0^8 (17 - x^{2/3} - 5 - 2x^{2/3})dx =$$

$$= \int_0^8 (12 - 3x^{2/3})dx = (12x - \frac{9}{5}x^{5/3})\Big|_0^8 = 12 \cdot 8 - \frac{9}{5}8^{5/3} =$$

$$= 96 - \frac{9}{5} \cdot 32 = 96 - 57,6 = 38,4 \text{ (млн. гр.од.)} \blacktriangleright$$

3.5. Робота змінної сили

Робота змінної сили f, що діє вздовж осі Ox на відрізку $[a;b]$, виражається інтегралом

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Приклад 14. Яку роботу треба виконати, щоб розтягнути пружину на 4 см, якщо від навантаження в 1 Н вона розтягується на 1 см?

◀ Згідно із законом Гука сила f H, яка розтягує пружину на x м, дорівнює $f(x) = kx$. Коефіцієнт пропорційності k знайдемо з умови $f(0,01) = 1$ Н, тобто $k \cdot 0,01 = 1$, звідки $k = 100$. Отже, $f(x) = 100x$. Тому

$$A = \int_0^{0,04} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 50\ (0,04)^2 = 0,08 \text{ Дж.} \ ▶$$

Вправи

1. Обчислити визначений інтеграл: 1) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^4}\right) dx$; 2) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$;

3) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; 4) $\int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) dx$; 5) $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}$; 6) $\int_1^e \ln^2 x dx$;

7) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx$; 8) $\int_0^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x dx$; 9) $\int_1^3 \frac{dx}{x+x^2}$; 10) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$;

11) $\int_0^1 \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}} dx$; 12) $\int_0^{\pi/4} \operatorname{tg}^3 x dx$; 13) $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx$; 14) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt[4]{\sin^3 x}} dx$;

15) $\int_0^1 x e^x dx$.

2. Обчислити інтеграл або встановити його розбіжність:

1) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}} dx$; 2) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} dx$; 3) $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$; 4) $\int_2^6 \frac{dx}{\sqrt[3]{(4-x)^2}}$; 5) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+x}$;

6) $\int\limits_1^\infty \frac{\operatorname{arctg} x}{x^2}dx$; 7) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$; 8) $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; 9) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$;
10) $\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x^2}dx$.

3. Знайти площу фігури, обмеженої лініями: 1) $y = 4 - x^2$, $y = 0$; 2) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$; 3) $y = \ln x$, $y = e$, $y = 0$; 4) $y = \frac{1}{x}$, $x = 1$, $x = 3$; 5) $y = \operatorname{tg} x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$; 6) $y = \frac{1}{1+x^2}$, $y = 0$; 7) $y = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$, $x \in (1; e]$.

4. Обчислити об'єм тіла, утвореного при обертанні навколо відповідної осі фігури, обмеженої кривими: 1) $y = 1-x^2$, $y = 0$, $x = 0$ навколо осі Ox; 2) $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$ навколо осі Ox; 3) $y = \frac{x^2}{2} + 2x + 2$, $y = 2$ навколо осі Oy; 4) $y = e^x$, $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ навколо осі Ox; 5) $y = \sqrt{x}$, $y = x$ навколо осі Ox; 6) $y = e^{-x}$, $x \in [0; +\infty)$ навколо осі Ox; 7) $y = xe^{-x^2}$, $x > 0$ навколо її асимптоти.

5. Знайти довжину дуги кривої: 1) $y^2 = x^3$, якщо $0 \le x \le 5$; 2) $y = 2\sqrt{x^3}$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 11$; 3) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, $x \in [0; 1]$; 4) $y = \ln\cos x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right]$; 5) $y = \ln\sin x$ при $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$.

6. Знайти вартість перевезення M тонн вантажу залізницею на відстань l км за умови, що вартість y перевезення однієї тонни зменшується на a гр.од. на кожному наступному кілометрі.

7. Чисті інвестиції визначаються формулою $I(t) = 7000\sqrt{t}$. Знайти значення t, при якому приріст капіталу становитиме 50000 гр.од.

8. Продуктивність праці робітника протягом дня визначається формулою $f(t) = -0,00625t^2 + 0,05t + 0,5$ (гр.од./год.), де t – час від початку роботи, $0 \le t \le 8$. Знайти функцію $u(t)$, $t \in [0; 8]$, яка дає обсяг продукції (у вартісному виразі) і його величину за робочий день.

9. Знайти дисконтований доход за три роки при річній ставці 8% і початковому вкладі 10 млрд. гр.од., якщо передбачається збільшувати щорічно капіталовкладення на 1 млрд. гр.од.

10. Знайти середній час, затрачений на освоєння одного виробу в період становлення виробництва від 100 до 121 виробу, якщо затрати часу на виготовлення виробу визначаються функцією $t = \frac{600}{\sqrt{x}}$, де x –

порядковий номер виробу.

11. Швидкості зміни видатків та прибутків підприємства після початку його діяльності визначаються формулами: $S'(t) = 4 + 3t^{2/3}$ та $P'(t) = 24 - 2t^{2/3}$, де S і P вимірюються мільйонами гривень, а t – роками. Визначити, як довго підприємство було прибутковим, та знайти сумарний прибуток, одержаний за цей час.

12. Крива Лоренца визначається рівнянням $y = 0,94x^2 + 0,06x$. Знайти коофіцієнт Джіні, а також частину податку, яку сплачують 50 % населення

13. Кількість y електроенергії, що споживається містом, виражається формулою

$$y = \begin{cases} 1, & \text{якщо } t < 6, \\ a + b\sin\dfrac{\pi}{18}(t-6), & \text{якщо } t \geq 6, \end{cases}$$

де t – час доби. Знайти добове споживання електроенергії при $a = 15000$ кВт, $b = 12000$ кВт.

14. Вартість перевезення однієї тонни вантажу на один кілометр (тариф перевезення) задається функцією $f(x) = \dfrac{10}{x+2}$ (гр.од./км). Знайти витрати на перевезення однієї тонни вантажу на відстань 20 км.

15. Знайти середнє значення витрат $K(x) = 6x^2+4x+1$, виражених у гривнях, якщо обсяг продукції x змінюється від 0 до 5 одиниць. Вказати обсяг продукції, при якому витрати набувають середнього значення.

16. Компанія повинна обрати одну з двох можливих стратегій розвитку: 1) вкласти 10 млн. гр.од. у нове обладнання і одержувати 3 млн. гр.од. прибутку щорічно протягом 10 років; 2) закупити на 15 млн. гр.од. досконаліше обладнання, яке дасть змогу одержувати 5 млн. гр.од. прибутку щороку протягом 7 років. Яку стратегію розвитку слід обрати компанії, якщо мінімальна облікова ставка дорівнює 10 % річних?

17. Нехай $f(t) = 5000e^{0,04t}$ – величина доходного потоку від роботи підприємства. Знайти майбутню вартість цього доходного потоку, якщо відсотки нараховуються неперервно впродовж п'яти років при відсотковій ставці 12%.

18. Електропоїзд, вийшовши із залізничної станції, їде з прискоренням $a = f(t)$, де t – час перебування в дорозі. Витрати електроенергії (в КВт/год) на рух електропоїзда задаються формулою $M = \int\limits_0^t f(\tau)d\tau$.

Обчислити витрати електроенергії впродовж перших трьох годин руху, якщо $f(t) = te^{t^2}$.

19. Яку роботу треба виконати для того, щоб тіло масою m підняти з поверхні Землі, радіус якої R, на висоту h? Чому дорівнює робота, коли тіло віддаляється у нескінченність? (Вказівка: скористатися тим, що сила $F(x) = mg\dfrac{R^2}{x^2}$, де x – відстань маси m від центра Землі, а $A = \int\limits_R^{R^2} f(x)dx$).

Відповіді

1. 1) $\dfrac{21}{8}$; 2) $\dfrac{\pi}{4}$; 2) $\dfrac{\pi}{6}$; 4) $\dfrac{17}{6}$; 5) $2-\ln 2$; 6) $e-2$; 7) $\dfrac{\pi^2}{4}-2$; 8) $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}}-\ln 2$; 9) $\ln\dfrac{3}{2}$; 10) $2\ln 2-1$; 11) $\dfrac{1}{2}\left(\operatorname{arctg} e^2-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 12) $\dfrac{1-\ln 2}{2}$; 13) $\dfrac{1}{3}$; 14) $4-2\sqrt[4]{8}$; 15) 1. **2.** 1) розбігається; 2) 1; 3) 1; 4) $6\sqrt[3]{2}$; 5) $\ln 2$; 6) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\ln 2}{2}$; 7) $\dfrac{17}{6}$; 8) 2; 9) 6; 10) 1. **3.** 1) $\dfrac{32}{3}$; 2) $8\ln 2$; 3) 1; 4) $\ln 3$; 5) $\ln 2$; 6) π; 7) 2.

4. 1) $\dfrac{8\pi}{15}$; 2) 12π; 3) $\dfrac{64\pi}{3}$; 4) $\dfrac{\pi(e^2-1)}{2}$; 5) $\dfrac{\pi}{6}$; 6) 2π; 7) 2π.

5. 1) $\dfrac{670}{27}$; 2) 74; 3) $\dfrac{e-e^{-1}}{2} \approx 1,17$; 4) $\dfrac{1}{2}\ln 3$; 5) $\ln 3$.

6. $Ml\left(y-\frac{al}{2}\right)$. **7.** $t_0 = (10,71)^{2/3} \approx 4,86$. **8.** $u(t) = \int\limits_0^t f(\tau d\tau)$, $u(8) \approx 4,533$ гр.од. **9.** $K_d = 30,3$ млрд. гр.од. ($f(t) = 10+t$, $r = 0,08$). **10.** $t_{\text{сер}} = \dfrac{1}{x_2-x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, $t_{\text{сер}} = \dfrac{400}{7} \approx 57,2$ хв. **11.** $t_0 = 8$; 64 млн. гр.од. **12.** $K = 0,314$; 26,5%. **13.** 797500 кВт.год. **14.** $10\ln 11 \approx 23,98$ гр.од. **15.** $K(\xi) = 61$, $\xi = \dfrac{-1+\sqrt{91}}{3} \approx 2,846$. **16.** $P_1 = 8{,}964$ млн. гр.од., $P_2 = 10{,}17$ млн. гр.од.; друга стратегія доцільніша. **17.** 37546,648 гр.од. **18.** $(e^9-1)/2$ кВт.год. **19.** $mg\dfrac{Rh}{R+h}$; mgR.

Функції багатьох змінних. Диференціальне числення функцій багатьох змінних

1. Поняття функції багатьох змінних

1.1. Означення та основні властивості функцій багатьох змінних

До цих пір ми розглядали функції, які залежать від однієї змінної. У цьому розділі ми вивчатимемо функції, які залежать від декількох змінних. Розглянемо конкретні приклади.

Приклад 1. Площа S прямокутника залежить від довжини його основи x_1 і висоти x_2, тобто

$$S = x_1 x_2. \tag{1}$$

Маємо, що парі $(x_1; x_2)$ додатних чисел x_1 і x_2 за формулою (1) відповідає певне значення S.

Приклад 2. Об'єм паралелепіпеда з довжинами ребер x_1, x_2 і x_3 виражається формулою

$$V = x_1 x_2 x_3,$$

тобто є функцією трьох змінних.

Нехай Ω – множина пар $(x_1; x_2)$ дійсних чисел, а X – певна множина дійсних чисел. Якщо кожній парі значень $(x_1; x_2) \in \Omega$ ставиться у відповідність одне певне значення $z \in X$, то z називають **функцією двох незалежних змінних** x_1 **і** x_2 й позначають символом

$$z = f(x_1, x_2).$$

Множина Ω називається **областю визначення** функції z, а множина X – **множиною її значень**. Очевидно, що $X = \{z \in \mathbb{R} \,|\, z = f(x_1, x_2), (x_1; x_2) \in \Omega\}$.

Оскільки кожній парі чисел $(x_1; x_2)$ відповідає єдина точка $x = (x_1; x_2)$ площини Ox_1x_2, і, навпаки, кожній точці $x = (x_1; x_2)$ відповідає єдина пара чисел $(x_1; x_2)$, то функцію двох змінних можна розглядати як функцію точки $x = (x_1; x_2)$ або $M(x_1; x_2)$.

Тому замість $f(x_1, x_2)$ писатимемо $f(x)$ або $f(M)$. У цьому випадку областю визначення функції є певна множина точок площини Ox_1x_2.

Подібно до того, як функція $y = f(x)$, $x \in X$, геометрично зображується графіком, можна геометрично тлумачити і функцію $z = f(x_1, x_2)$, $(x_1; x_2) \in \Omega$. Ставлячи у відповідність кожній точці $(x_1; x_2) \in \Omega$ аплікату $z = f(x_1, x_2)$, дістанемо сукупність точок $(x_1; x_2; z)$ тривимірного простору $\mathbb{R}^3$ – найчастіше деяку поверхню. Тому рівність $z = f(x_1, x_2)$, $(x_1; x_2) \in \Omega$, називають **рівнянням поверхні**. Отже, **графіком функції двох змінних** називається множина точок простору $\mathbb{R}^3$ вигляду

$$\Gamma_f = \{(x_1; x_2; z) \,|\, z = f(x_1, x_2),\, (x_1; x_2) \in \Omega\}.$$

Як і у випадку функції однієї змінної, способи задання функції двох змінних є різні: табличний, графічний, аналітичний і словесний. Якщо функція двох змінних задана за допомогою аналітичного виразу без будь-яких додаткових умов, то областю її визначення вважатимемо множину всіх таких точок площини Ox_1x_2, для яких цей вираз має зміст і дає дійсне значення функції.

Приклад 3. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$ і побудувати її графік.

◀ Оскільки вираз $\sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$ визначений, коли $R^2 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0$,

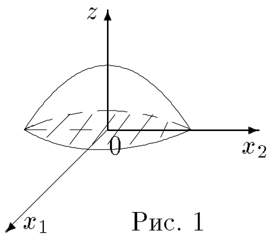


Рис. 1

то областю визначення цієї функції є множина точок площини, для яких $x_1^2 + x_2^2 \leq R^2$. Маємо круг з центром у точці $(0; 0)$, радіус якого R. Графіком функції $z = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$ є верхня половина сфери $x_1^2 + x_2^2 + z^2 = R^2$ (рис. 1). ▶

Очевидно, що графік функції двох змінних складніший об'єкт, ніж графік функції однієї змінної. У той же час поверхня в просторі володіє меншою наочністю, ніж лінія на площині. Тому у випадку двох змінних бажано використовувати очевидніші зображення. До них належать, зокрема, **лінії рівня**.

Поряд з позначеннями x_1 і x_2 незалежних змінних, вживатимемо також позначення x, y і тоді функцію записуватимемо у вигляді $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$, або $z = f(M)$, $M \in \Omega$.

Лінією рівня функції двох змінних $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$, називається множина точок площини, для яких значення функції одне й те саме і дорівнює C, тобто $f(x, y) = C$. Як правило, лінії рівня, які відповідають різним значенням сталої величини C, проектуються на одну площину, наприклад, на координатну площину Oxy. Тоді їх зручніше аналізувати і з їхньою допомогою досліджувати складний характер поверхні, яка описується функцією $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$. Отже, лінії рівня функції $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$, – це сім'я кривих на координатній площині Oxy, що описуються рівнянням

$$f(x, y) = C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Як правило, беруть арифметичну прогресію чисел C_i з різницею h; тоді за взаємним розміщенням ліній рівня можна уявити форму поверхні, яка описується функцією $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$. Там, де функція змінюється швидше, лінії рівня скупчуються, а там, де поверхня полога, лінії рівня розміщуються рідше.

Приклад 4. Побудувати лінії рівня функції $z = x^2 + y^2 - 2y$.

◀ Лінія рівня $z = C$ – це крива на площині Oxy, задана рівнянням $x^2 + y^2 - 2y = C$ або $x^2 + (y-1)^2 = C+1$. Маємо рівняння кола з центром у точці $(0; 1)$ і радіусом $\sqrt{C+1}$ (рис. 2), якщо $C > -1$.

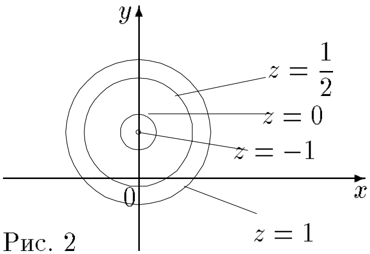


Рис. 2

Точка $(0; 1)$ – вироджена лінія рівня, яка відповідає мінімальному значенню функції z, що досягається в точці $(0; 1)$. Лінії рівня – концентричні кола, радіуси яких збільшуються зі зростанням C, а відстані між лініями рівня з однаковим кроком – зменшуються з віддаленням від центра (рис. 2). ▶

Ми розглянули детально поняття функції двох змінних та її області визначення. На практиці зустрічаються функції трьох й більшого числа змінних.

Дамо означення функції трьох змінних. Нехай $\Omega = \{(x_1; x_2; x_3) \,|\, x_i \in \mathbb{R}, i \in \{1,\ 2,\ 3\}\}$, $X \subset \mathbb{R}$. **Функцією трьох змінних** називається правило, за яким кожній трійці чисел (точці) $(x_1; x_2; x_3) \in \Omega$ відповідає одне число $u \in X$. При цьому x_1, x_2 і x_3 називаються **незалежними змінними (аргументами)**, u – **залежною змінною (функцією)**, множина Ω – **областю визначення** функції, а X – **множина значень** функції, тобто $X = \{u \in \mathbb{R} \,|\, u = f(x_1, x_2, x_3), (x_1; x_2; x_3) \in \Omega\}$.

Функції трьох змінних позначаються так само, як і функції однієї або двох змінних: $u = f(x_1, x_2, x_3)$, $w = w(x_1, x_2, x_3)$ і т.д. Функцію трьох змінних $u = f(x_1, x_2, x_3)$ можна розглядати як функцію точки $x = (x_1; x_2; x_3)$ або $M(x_1; x_2; x_3)$, що має координати $(x_1; x_2; x_3)$ у просторовій декартовій системі координат Ox_1, x_2x_3, а саме $u = f(x)$. Поряд з позначенням $u = f(x_1, x_2, x_3)$ вживатимемо також позначення $u = f(x, y, z)$

Приклад 5. Знайти область визначення функції $u = \ln(1 - x^2 - y^2 - z^2)$.

◀ Заданий вираз має зміст тоді й тільки тоді, коли $1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$, або $x^2 + y^2 + z^2 < 1$. Отже, областю визначення функції є внутрішність кулі (відкрита куля) одиничного радіуса з центром у початку координат. ▶

Аналогічно можна ввести поняття функції n змінних. Областю визначення функції n змінних є деяка множина Ω, яка складається з сукупностей $(x_1; x_2; \ldots, x_n)$ дійсних чисел. Позначення функції n змінних аналогічні позначенням функціям двох і трьох змінних: $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $u = u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для збереження геометричної термінології функцію n змінних $u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при $n > 3$ також розглядатимемо як функцію точки $x = (x_1; x_2; \ldots, x_n)$ n-вимірного простору $\mathbb{R}^n$ і позначатимемо символом $u = f(x)$, $x \in \Omega$, або $u = f(M)$, $M \in \Omega$.

1.2. Границя функції багатьох змінних. Неперервність функції. Точки розриву

При вивченні границі функції однієї змінної $y = f(x)$ було введено поняття околу точки x^0. Під околом точки x^0 розуміли довільний інтервал $(a; b)$, який містить цю точку. Для означення границі функції двох змінних $z = f(x)$ введемо поняття околу точки $x^0 \in \mathbb{R}^2$.

Околом точки $x^0 = (x_1^0; x_2^0)$ називається внутрішність круга з центром у цій точці. Якщо радіус круга дорівнює δ, то такий окіл називають **δ-околом точки** x^0.

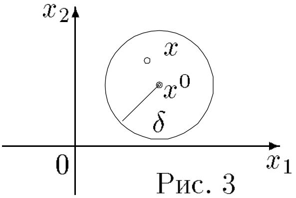


Рис. 3

Очевидно, що довільна точка x, яка належить δ-околу точки x^0, знаходиться від цієї точки на відстані, меншій за δ (рис. 3).

Число b називається **границею функції двох змінних** $z = f(x)$ **при** $x \to x^0$, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує такий δ-окіл точки x^0, що для довільної точки x цього околу (за винятком, можливо, самої точки x^0) правильна нерівність $|f(x) - b| < \varepsilon$. При цьому пишуть

$$\lim_{x \to x^0} f(x) = b \quad \text{або} \quad \lim_{\substack{x_1 \to x_1^0 \\ x_2 \to x_2^0}} f(x_1, x_2) = b.$$

Функція двох змінних називається **нескінченно малою** в точці x^0, якщо її границя в цій точці дорівнює нулю.

Зауважимо, що коли число b є границею функції $z = f(x)$, то, як випливає з означення границі, різниця $f(x) - b = \alpha(x)$ є нескінченно малою при $x \to x^0$.

Приклад 6. Знайти $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$.

◀ Маємо

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1} = \left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = \rho^2, \\ (x; y) \to (0; 0) \Leftrightarrow \rho \to 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\sqrt{\rho^2+1}-1} = \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2(\sqrt{\rho^2+1}+1)}{\rho^2+1-1} =$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{\rho^2}{\rho^2}(\sqrt{\rho^2+1}+1) = \lim_{\rho\to 0}(\sqrt{\rho^2+1}+1) = 1+1 = 2. \blacktriangleright$$

Приклад 7. Знайти $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$.

$\blacktriangleleft$ Розглянемо випадки прямування точки $(x; y)$ різними шляхами до точки $(0; 0)$.

Нехай $y = 0$, а $x \to 0$. Тоді

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2-0}{x^2+0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Якщо ж $x = 0$, а $y \to 0$, то

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{0-y^2}{0+y^2} = \lim_{y\to 0}\left(-\frac{y^2}{y^2}\right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1.$$

Оскільки ці границі різні, то це означає, що функція не має границі. $\blacktriangleright$

Функція багатьох змінних $z = f(x)$, $x \in \Omega$, називається **неперервною в точці** x^0, якщо: 1) $x^0 \in \Omega$, 2) існує $\lim\limits_{x\to x^0} f(x)$, 3) $\lim\limits_{x\to x^0} f(x) = f(x^0)$.

Зауважимо, що функція f, яка неперервна в точці x^0, повинна бути визначеною як у цій точці, так і в деякому її околі (у супротивному випадку не можна було б здійснити перехід до границі). Точка x^0, в якій функція декількох змінних $z = f(x)$ неперервна, називається **точкою неперервності цієї функції**.

Для неперервних функцій правильне твердження.

Теорема 1. *Якщо функції f і g неперервні в точці x^0, то в цій точці будуть неперервними функції $f \pm g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ $(g(x^0) \neq 0)$.*

За допомогою цієї теореми легко доводиться неперервність многочлена від двох незалежних змінних у будь-якій точці площини Ox_1x_2, неперервність дробово-раціональної функції в усіх точках площини, крім нулів знаменника.

Точка x^0 називається **точкою розриву** функції f, якщо вона належить області визначення функції або її межі і не є точкою неперервності.

Приклад 8. Знайти точки розриву функції $z = \dfrac{1}{2x+y+1}$.

◀ Функція визначена і неперервна скрізь у $\mathbb{R}^2$, крім тих точок, координати яких задовольняють рівняння $2x+y+1=0$. Зазначена пряма є межею області визначення функції. Кожна точка цієї прямої є точкою розриву функції. Справді, нехай $(x_0; y_0)$ – довільна точка на прямій $2x+y+1=0$, тобто $2x_0+y_0+1=0$. Тоді $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \dfrac{1}{2x+y+1} = \infty$. ▶

Приклад 9. Дослідити на неперервність функцію

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & x^2+y^2 \neq 0, \\ 1, & x^2+y^2 = 0. \end{cases}$$

◀ Якщо $x^2+y^2 \neq 0$, то f неперервна як раціональна функція, коли знаменник не дорівнює нулю. Тому треба перевірити на неперервність задану функцію в точці $(0;0)$. У прикладі 2 доведено, що $\lim\limits_{(x,y)\to(0;0)} f(x,y)$ не існує, а це означає, що f розривна в точці $(0;0)$. ▶

Функція f називається **неперервною на множині** Ω, якщо вона неперервна у кожній точці цієї множини.

Якщо назвати **повним приростом** функції f у точці x^0 величину $\Delta f = f(x) - f(x^0)$ або $\Delta f = f(x_1,x_2) - f(x_1^0,x_2^0)$, то означення неперервності функції f у точці x^0 можна сформулювати так: *функція f називається неперервною в точці x^0, якщо її повний приріст у цій точці є нескінченно малою функцією, тобто*

$$\lim_{x\to x^0} \Delta f = \lim_{x\to x^0} (f(x) - f(x^0)) = 0$$

або

$$\lim_{\substack{\Delta x_1\to 0\\ \Delta x_2\to 0}} \Delta f = 0, \ \textit{де}\ \Delta x_1 = x_1 - x_1^0, \ \ \Delta x_2 = x_2 - x_2^0.$$

Неперервні функції багатьох змінних мають в основному ті самі властивості, що й неперервні функції однієї змінної.

2. Диференціальне числення функції багатьох змінних

2.1. Частинні похідні функції багатьох змінних

Розглянемо функцію двох змінних $z = f(x, y)$, $(x; y) \in \Omega$. Зафіксуємо один з її аргументів, наприклад, y, поклавши $y = y_0$. Тоді функція $f(x, y_0)$ буде функцією однієї змінної x. Якщо x надати в точці x_0 приросту Δx, то

$$\Delta_x z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

називається **частинним приростом** по x функції f у точці $(x_0; y_0)$. Границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

називається **частинною похідною першого порядку** функції $z = f(x, y)$ по x у точці $(x_0; y_0)$ і позначається символом $\dfrac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$, або $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, або $z'_x(x_0, y_0)$, або $f'_x(x_0, y_0)$.

Отже,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Аналогічно

$$\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}.$$

З цього означення випливає, що частинна похідна функції двох змінних по окремому аргументу є границею відношення частинного приросту функції до приросту аргументу, який спричинив цей приріст, коли приріст аргументу прямує до нуля. Отже, кожна частинна похідна є фактично похідною функції однієї змінної:

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = f'_x(x, y)$, де $y = const$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = f'_y(x, y)$, де $x = const$. Тому при обчисленні частинних похідних можна користуватися відомими правилами і формулами диференціювання функції однієї змінної, вважаючи при цьому другу змінну сталою.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції $z = x^2y - 3y^2 + 5x$.

◀ Диференціюємо функцію спочатку по x, вважаючи y фіксованою величиною, а потім повторюємо це саме, міняючи місцями x і y. Одержуємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + 5, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 - 6y. \quad ▶$$

Приклад 2. Відомо, що виробнича функція Кобба-Дугласа має вигляд $f = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$, де x_1 – витрати капіталу, x_2 – витрати трудових ресурсів, $A > 0$ – параметр продуктивності конкретної технології, $0 < \alpha < 1$ – частка капіталу в доході. Знайти граничні показники обсягу випуску продукції f при зміні одного із факторів: витрат капіталу x_1 або величини трудових ресурсів x_2.

◀ Граничні витрати – це частинні похідні від функції Кобба-Дугласа по змінній x_1 і x_2 відповідно:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = A(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}.$$

Доведемо, що у функції Кобба-Дугласа показники степенів α і $1-\alpha$ є відповідно коефіцієнтами еластичності $E_{x_1}(f)$ і $E_{x_2}(f)$ по кожному із аргументів. Справді,

$$E_{x_1}(f) = \frac{x_1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{x_1}{Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}}A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha} = \alpha,$$

$$E_{x_2}(f) = \frac{x_2}{f}\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{x_2}{Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}}A(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha} = 1-\alpha. \quad ▶$$

Зауваження. Часто еластичності функції $z = f(x, y)$ по x і y записують у вигляді

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x} = x\frac{\partial(\ln z)}{\partial x},$$

$$E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} = y\frac{\partial(\ln z)}{\partial y}.$$

Приклад 3. Знайти коефіцієнти еластичності по x і y функції $z = x^y$ у точці $(2; 3)$.

◀ Маємо

$$E_x(z) = x\frac{\partial}{\partial x}(\ln x^y) = x\frac{\partial}{\partial x}(y\ln x) = xy\frac{1}{x} = y,$$

$$E_y(z) = y\frac{\partial}{\partial y}(\ln x^y) = y\frac{\partial}{\partial y}(y\ln x) = y\cdot\ln x.$$

Тому

$$E_x(z(2;3)) = 3, \quad E_y(z(2;3)) = 3\ln 2. \quad ▶$$

У підрозділі 1.1 цього розділу ми ввели поняття лінії рівня. Для характеристики напрямку і величини максимальної швидкості зростання функції в точці використовується поняття **градієнта**.

Градієнтом функції $z = f(x, y)$**,** $(x; y) \in \Omega$, **у точці** $(x_0; y_0) \in \Omega$ називається вектор, координати якого дорівнюють відповідно частинним похідним $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ у точці $(x_0; y_0)$.

Для позначення градієнта користуються символом

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(x_0; y_0) = \left(\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}; \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}\right).$$

Приклад 4. Знайти градієнт і його модуль для функції $z = \dfrac{xy}{x+y+1}$ у точці $(0; 1)$.

◀ Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y(x+y+1) - xy}{(x+y+1)^2} = \frac{y(y+1)}{(x+y+1)^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x(x+y+1) - xy}{(x+y+1)^2} = \frac{x(x+1)}{(x+y+1)^2},$$

а тому

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(x; y) = \left(\frac{y(y+1)}{(x+y+1)^2}; \frac{x(x+1)}{(x+y+1)^2}\right).$$

При $x = 0$ і $y = 1$ дістаємо

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, z(0; 1) = \left(\frac{2}{2^2}; \frac{0}{2^2}\right) = \left(\frac{1}{2}; 0\right),$$

$$|\overrightarrow{\text{grad}}\, z(0;1)| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{1}{2}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 5. Знайти градієнт і його модуль для функції $u = x^2 + y^2 - z^2$ у точці $(1;1;-2)$.

$\blacktriangleleft$ Оскільки $\dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \dfrac{\partial u}{\partial z} = -2z$, то

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u(x;y;z) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}; \frac{\partial u}{\partial y}; \frac{\partial u}{\partial z}\right) = (2x; 2y; -2z).$$

Підставивши в цей вираз координати точки $(1;1;-2)$, дістанемо

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, u(1;1;-2) = (2;2;4), \quad |\overrightarrow{\text{grad}}\, u(1;1;-2)| =$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2 + (-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}. \quad \blacktriangleright$$

Частинні похідні функції багатьох змінних є функціями тих самих змінних. Вони, у свою чергу, можуть мати частинні похідні, які називаються **другими частинними похідними**, або **частинними похідними другого порядку** функції.

Наприклад, функція $z = f(x, y)$ двох змінних має чотири частинні похідні другого порядку $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, які визначаться так:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Похідні $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають **мішаними частинними похідними другого порядку**, а $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ – **чистими частинними похідними другого порядку**.

Приклад 6. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = x^2 y^2$.

◀ Послідовно диференціюючи, одержуємо:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2xy^2\right) = 2y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy^2\right) = 4xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^2y\right) = 4xy,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2y\right) = 2x^2. \quad ▶$$

У цьому прикладі маємо, що мішані другі похідні однакові. Цей результат не випадковий. Доведено, що мішані неперервні в області Ω похідні збігаються, тобто

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \quad (x; y) \in \Omega.$$

Аналогічно вводиться поняття частинної похідної довільного порядку. Наприклад,

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right), \quad \frac{\partial^4 z}{\partial x \partial y^3} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}\right) \quad \text{і т.п.}$$

Приклад 7. Для функції $z = e^{xy^2}$ знайти $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$.

◀ Маємо $\dfrac{\partial z}{\partial x} = e^{xy^2} y^2$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{xy^2} y^4$. Тоді $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right) = \dfrac{\partial}{\partial y}(e^{xy^2} y^4) = e^{xy^2} 2xy^5 + e^{xy^2} 4y^3 = 2y^3 e^{xy^2}(xy^2 + 2)$. ▶

2.2. Повний диференціал. Диференціали вищих порядків

Розглянемо функцію $z = f(x, y)$, яка визначена в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Припустимо, що існують частинні похідні $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial z}{\partial y}$. Вирази вигляду $\frac{\partial z}{\partial x}dx$ і $\frac{\partial z}{\partial y}dy$ називають **частинними диференціалами** і позначають відповідно символами $d_x z$ і $d_y z$, тобто

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx \quad d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Сума частинних диференціалів

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \tag{2}$$

називається **повним диференціалом функції** двох змінних.

Приклад 8. Знайти повний диференціал функції $z = \ln(x + y^2)$.

◀ Маємо $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x+y^2}$, а тому згідно з (2)

$$dz = \frac{1}{x+y^2}dx + \frac{2y}{x+y^2}dy. \quad ▶$$

Функція $z = f(x, y)$ називається **диференційовною в точці** $(x_0; y_0)$, якщо її повний приріст у цій точці можна зобразити у вигляді

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + \alpha(\Delta x, \Delta y)\Delta x + \beta(\Delta x, \Delta y)\Delta y,$$

де A і B – деякі числа, а $\alpha(\Delta x, \Delta y)$ і $\beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Доведено, що *існування неперервних частинних похідних* $\frac{\partial z}{\partial x}$ *і* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *в області* Ω *є достатньою умовою диференційовності функції в заданій області, причому* $A = \frac{\partial z}{\partial x}$, $B = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Як і у випадку функції однієї змінної, з диференційовності функції двох змінних випливає її неперервність, але не навпаки.

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна, то її повний приріст записується у вигляді

$$\Delta z = dz + \alpha\Delta x + \beta\Delta y,$$

де α і β – нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

Приклад 9. Знайти, на яку величину треба змінити у функції Кобба-Дугласа $f = Ax_1^{\alpha}x_2^{1-\alpha}$ обсяг капіталу x_1, щоб при зміні трудових ресурсів на величину Δx_2 випуск продукції залишався незмінним.

◀ Знайдемо частинні похідні функції f :

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = A(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}.$$

Згідно з умовою функція f повинна бути сталою, а тому диференціал цієї функції дорівнює нулю, тобто $df = 0$ або

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 = 0. \tag{3}$$

Оскільки $dx_1 = \Delta x_1$, $dx_2 = \Delta x_2$, то рівність (3) має вигляд

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\Delta x_2 = 0.$$

Звідси одержуємо, що

$$\Delta x_1 = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_2}}{\frac{\partial f}{\partial x_1}}\Delta x_2 \quad \text{або} \quad \Delta x_1 = -\frac{A(1-\alpha)x_1^{\alpha}x_2^{-\alpha}}{A\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^{1-\alpha}}\Delta x_2.$$

Отже,

$$\Delta x_1 = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x_1}{x_2}\Delta x_2.$$

Якщо поділити обидві частини на x_1, то дістанемо

$$\frac{\Delta x_1}{x_1} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{\Delta x_2}{x_2}. \tag{4}$$

Звідси випливає, що для компенсації зміни ресурсу праці на 1% треба змінити ресурс капіталу на $-\dfrac{1-\alpha}{\alpha}\%$.

З формули (4) випливає, що

$$\frac{\Delta x_1}{\Delta x_2} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x_1}{x_2}$$

або

$$\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{1-\alpha}{\alpha}\frac{x_1}{x_2}. \tag{5}$$

Рівність (5) називається **граничною нормою** заміни трудових ресурсів x_2 капіталом x_1. ▶

Часто повний диференціал dz, який визначається формулою (2), називають **диференціалом першого порядку**. Для зручності домовимося позначати диференціали не тільки символом d, але й символом δ (наприклад, δx, δy, δz).

Нехай функції $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ диференційовні в точці $(x;y)$. Розглядатимемо dx і dy у виразі (2) для dz як сталі множники. Тоді функція dz є диференційовною функцією змінних x і y і її диференціал має вигляд

$$\delta(dz) = \delta\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right)\delta x + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right)\delta y. \qquad (6)$$

Диференціал $\delta(dz)$ від диференціала dz у точці $(x;y)$, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається **диференціалом другого порядку** функції f у точці $(x;y)$ і позначається символом d^2z. У свою чергу, диференціал $\delta(d^2z)$ від d^2z, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається **диференціалом третього порядку** функції f і позначається символом d^3z і т.д. Диференціал $\delta(d^{n-1}z)$ від диференціала $d^{n-1}z$, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається **диференціалом n-го порядку (або n-м диференціалом)** функції $z = f(x,y)$ у точці $(x;y)$ і позначається символом d^nz.

Отже,

$$d^nz = \delta(d^{n-1}z)\Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}}.$$

При знаходженні другого та наступних диференціалів обчислення $\delta(dz)$ й прирівнювання $\delta x = dx$, $\delta y = dy$ здійснюють одночасно.

За допомогою формули (6) знайдемо вираз для d^2z:

$$d^2z = \delta(dz)|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \right.$$

$$+\frac{\partial f}{\partial y}dy\Big)\,dy = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dydx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Якщо $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$ і $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ неперервні, то вони однакові, а тому

$$d^2z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Аналогічно,

$$d^3z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(dx)^3 + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2\partial y}(dx)^2dy + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2}dx(dy)^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(dy)^3.$$

Другий, третій та наступні диференціали можна записати символічно у вигляді

$$d^2z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f(x,y),$$

$$d^3z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 f(x,y),$$

....

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y).$$

Приклад 10. Знайти d^2z для функції $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

◀ Маємо $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$.

Отже,

$$d^2z = \frac{-2xy(dx)^2 + 2(x^2-y^2)dxdy + 2xy(dy)^2}{(x^2+y^2)^2}. \quad ▶$$

3. Екстремум функції багатьох змінних

3.1. Необхідні та достатні умови існування екстремуму

Поняття максимуму й мінімуму для функції багатьох змінних вводяться аналогічно, як і для функції однієї змінної. Розглянемо ці поняття для випадку функції двох змінних.

Нехай функція двох змінних $z = f(x, y)$ задана в області $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

Функція двох змінних $z = f(x, y)$ **має в точці** $(x_0; y_0) \in \Omega$ **максимум (мінімум)**, якщо існує такий окіл $U(x_0; y_0) \subset \Omega$ цієї точки, що для всіх точок $(x; y)$ з цього околу виконується нерівність $f(x, y) \leq f(x_0, y_0)$ $(f(x, y) \geq f(x_0, y_0))$.

Точка $(x_0; y_0)$, в якій функція f має максимум (мінімум), називається **точкою максимуму (мінімуму)**.

Згідно з означенням **локального екстремуму** (максимуму або мінімуму) повний приріст функції $\Delta z = f(x, y) - f(x_0, y_0)$ задовольняє в околі точки $(x_0; y_0)$ одну з умов :

$\Delta z \leq 0$, якщо $(x_0; y_0)$ – точка локального максимуму;

$\Delta z \geq 0$, якщо $(x_0; y_0)$ – точка локального мінімуму.

Теорема 1 (необхідна умова екстремуму). *Якщо функція $f(x, y)$ має частинні похідні першого порядку в точці локального екстремуму $(x_0; y_0)$, то* $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$.

◀ Частинна похідна функції $z = f(x, y)$ по x в точці $(x_0; y_0)$ є похідною функції однієї змінної $\varphi(x) = f(x, y_0)$ в точці $x = x_0$. Оскільки в цій точці функція φ має екстремум, то $\varphi'(x_0) = 0$. Очевидно, що $\varphi'(x_0) = \dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}$, а тому $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0$. Аналогічно можна довести, що $\dfrac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$. ▶

Отже, перетворення в нуль у точці $(x_0; y_0)$ частинних похідних першого порядку функції $z = f(x, y)$, якщо вони існують, є **необхідною** умовою існування в точці $(x_0; y_0)$ екстремуму цієї функції.

Зауважимо, що функція може мати екстремум також в тих точках, де принаймні одна з частинних похідних не існує.

Точки, в яких перші частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ перетворюються в нуль або не існують, називаються **критичними або стаціонарними точками** цієї функції.

Приклад 1. Знайти критичні точки функції $z = x^3 - 3x + y^4 - 2y^2$.

◀ Маємо
$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 - 4y.$$

Тоді із системи рівнянь
$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} \equiv 3x^2 - 3 = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} \equiv 4y^3 - 4y = 0 \end{cases}$$
знаходимо критичні точки. З першого рівняння одержуємо $x = \pm 1$, а з другого – $y = 0, \pm 1$. Отже, є шість стаціонарних точок $(1;0)$, $(1;1)$, $(1;-1)$, $(-1;0)$, $(-1;1)$, $(-1;-1)$. ▶

Умови теореми 1 не є достатніми умовами існування екстремуму. Наприклад, для функції $f(x,y) = x^2 - y^2$, $(x;y) \in \mathbb{R}^2$, частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю в точці (0; 0), але ця точка не є точкою локального екстремуму. Справді, в довільному околі точки (0; 0) існують точки вигляду $(x;0)$, в яких $f(x,0) > f(0,0)$. Тому (0; 0) не є точкою локального максимуму. Аналогічно в довільному околі точки (0; 0) існують точки вигляду $(0;y)$, у яких $f(0,y) < f(0,0)$. Тому (0; 0) не є точкою локального мінімуму.

Теорема 2 (достатні умови екстремуму). *Нехай функція $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні другого порядку в деякому околі стаціонарної точки $(x_0;y_0)$. Покладемо*
$$\Delta(x_0;y_0) = \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2}\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y}\right)^2.$$

Тоді:

1) якщо $\Delta(x_0;y_0) > 0$, то в точці $(x_0;y_0)$ функція має локальний екстремум, причому при $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} < 0$ – локальний максимум, а при $\dfrac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} > 0$ – локальний мінімум;

2) якщо $\Delta(x_0;y_0) < 0$, то в точці $(x_0;y_0)$ немає екстремуму;

3) якщо $\Delta(x_0;y_0) = 0$, то точка $(x_0;y_0)$ може бути, а може й не бути точкою екстремуму.

Приклад 2. Дослідити на локальний екстремум функцію

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 30x - 18y, \quad (x;y) \in \mathbb{R}^2.$$

◀ Маємо $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 30$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 18y$. Тоді із системи рівнянь

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = 3 \end{cases}$$

одержуємо, додаючи й віднімаючи ці рівняння

$$\begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = 16, \\ x^2 - 2xy + y^2 = 4, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x + y = \pm 4, \\ x - y = \pm 2. \end{cases}$$

Розв'язавши останню систему, знаходимо чотири стаціонарні точки: 1) $(3;1)$; 2) $(1;3)$; 3) $(-1;-3)$; 4) $(-3;-1)$.

Тепер знайдемо другі частинні похідні

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

і складемо вираз $\Delta(x;y)$ для кожної зі стаціонарних точок:

1) $\dfrac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x^2} = 6 \cdot 3 = 18$, $\dfrac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x \partial y} = 6 \cdot 1 = 6$, $\dfrac{\partial^2 f(3,1)}{\partial y^2} = 6 \cdot 3 = 18$,

$$\Delta(3;1) = 18 \cdot 18 - 6^2 = 288 > 0;$$

2) $\dfrac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x^2} = 6 \cdot 1 = 6$, $\dfrac{\partial^2 f(1,3)}{\partial x \partial y} = 6 \cdot 3 = 18$, $\dfrac{\partial^2 f(1,3)}{\partial y^2} = 6 \cdot 1 = 6$,

$$\Delta(1;3) = 6 \cdot 6 - 18^2 = -288 < 0;$$

3) $\dfrac{\partial^2 f(-1,-3)}{\partial x^2} = 6\cdot(-1) = -6$, $\dfrac{\partial^2 f(-1,-3)}{\partial x \partial y} = 6\cdot(-3) = -18$, $\dfrac{\partial^2 f(-1,-3)}{\partial y^2} = 6\cdot(-1) = -6$,

$$\Delta(-1;-3) = (-6)^2 - (-18)^2 = -288 < 0;$$

4) $\dfrac{\partial^2 f(-3,-1)}{\partial x^2} = 6\cdot(-3) = -18$, $\dfrac{\partial^2 f(-3,-1)}{\partial x \partial y} = 6\cdot(-1) = -6$, $\dfrac{\partial^2 f(-3,-1)}{\partial y^2} = 6\cdot(-3) = -18$,

$$\Delta(-3;-1) = (-18)\cdot(-18) - (-6)^2 = 288 > 0.$$

Отже, задана функція має два екстремуми, а саме:

у точці $(3;1)$ – мінімум, бо $\dfrac{\partial^2 f(3,1)}{\partial x^2} > 0$, $f_{\min} = f(3,1) = 3^3 + 3\cdot 3\cdot 1^2 - 30\cdot 3 - 18\cdot 1 = -72$;

у точці $(-3;-1)$ – максимум, бо $\dfrac{\partial^2 f(-3,-1)}{\partial x^2} < 0$, $f_{\max} = (-3)^3 + 3\cdot(-3)\cdot(-1)^2 - 30\cdot(-3) - 18\cdot(-1) = 72$.

Оскільки $\Delta(1;3)$ і $\Delta(-1;-3)$ від'ємні, то в точках $(1;3)$ і $(-1;-3)$ функція екстремуму не має. ▶

Зауваження. Якщо функція $z = f(x,y)$ неперервна в обмеженій замкненій області Ω, то вона досягає в цій області своїх найбільшого й найменшого значень. У випадку диференційовної в Ω функції для знаходження найбільшого й найменшого значень f треба знайти стаціонарні точки і обчислити значення функції в цих точках, а також її найбільші та найменші значення на межі області Ω.

Приклад 3. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = \dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2}$ у крузі одиничного радіуса з центром у початку координат.

◀ Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{(1+y^2)^2}.$$

Із системи рівнянь

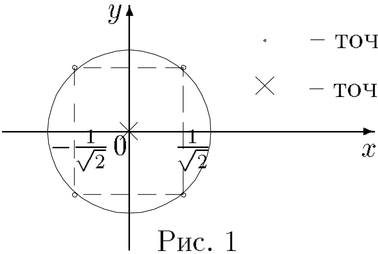
$$\frac{\partial z}{\partial x} \equiv -\frac{2x}{(1+x^2)^2} = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} \equiv -\frac{2y}{(1+y^2)^2} = 0$$

одержуємо, що стаціонарною точкою є $(0;0)$ і $z(0,0)=\dfrac{1}{1+0}+\dfrac{1}{1+0}=2$.

Знайдемо критичні точки на межі області – колі, що визначається рівнянням $x^2+y^2=1$. Підставивши $y^2=1-x^2$ у функцію z, дістанемо функцію однієї змінної $\widetilde{z}=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2-x^2}=\dfrac{3}{2+x^2-x^4}$, де $x\in[-1;1]$. Дослідимо цю функцію на екстремум.

Знайдемо похідну $\widetilde{z}'=\dfrac{2x(2x^2-1)}{(2+x^2-x^4)^2}$ і прирівняємо її до нуля. Тоді одержимо критичні точки на межі області: $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Обчислимо значення функції $\widetilde{z}$ у цих точках, а також на кінцях $x=\pm1$ відрізка $[-1;1]$: $\widetilde{z}(-1)=\widetilde{z}(1)=\dfrac{3}{2}$, $\widetilde{z}(0)=\dfrac{3}{2}$, $\widetilde{z}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\widetilde{z}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{4}{3}$.

Тепер серед значень $z(0,0)=2$, $\widetilde{z}(-1)=\widetilde{z}(1)=\dfrac{3}{2}$; $\widetilde{z}(0)=\dfrac{3}{2}$; $\widetilde{z}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\widetilde{z}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{4}{3}$ вибираємо найбільше та найменше. Отже, $\max\limits_{x^2+y^2\le1}z(x,y)=z(0,0)=2$, $\min\limits_{x^2+y^2\le1}z(x,y)=z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=$ $z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=z\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{4}{3}$ (рис. 1)



· – точки найменшого значення,

× – точка найбільшого значення.

▶

Рис. 1

3.2. Умовний екстремум

У багатьох прикладних задачах виникає необхідність досліджувати функцію багатьох змінних на екстремум за умови, що незалежні змінні задовольняють деякі додаткові умови, які називаються **умовами зв'язку**. Такого типу екстремум називають **умовним**.

Приклад 4. Знайти екстремум функції $z = x^2 + y^2$, якщо $x + y - 1 = 0$.

◀ З умови зв'язку $x + y - 1 = 0$ знайдемо $y = 1 - x$. Підставивши цей вираз у функцію z, дістанемо $\widetilde{z} = x^2 + (1-x)^2$ або $\widetilde{z} = 2x^2 - 2x + 1$. Тоді $\widetilde{z}' = 4(x - 1/2)$, $\widetilde{z}'' = 4$. Звідси випливає, що в точці $x = \dfrac{1}{2}$ функція $\widetilde{z}$ має мінімум і $\widetilde{z}_{\min} = \dfrac{1}{2}$. Отже, функція $z = x^2 + y^2$ за умови, що $x + y - 1 = 0$ має мінімум (умовний мінімум) в точці $\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$ і $z_{\min} = z\left(\dfrac{1}{2}; \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$. Очевидно, що безумовний екстремум – це мінімум у точці $(0;0)$ і $z_{\min} = 0$ (рис. 2). ▶

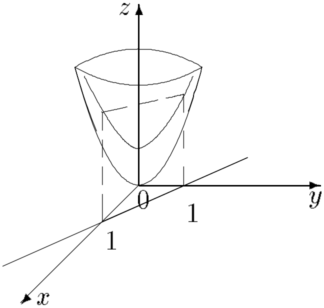


Рис. 2

При розв'язуванні цієї задачі ми звели умовний екстремум до безумовного, виразивши з умови зв'язку одну змінну через іншу, що не завжди можливо.

Тому для розв'язання задач знаходження умовного екстремуму розроблено спеціальний метод – метод множників Лагранжа.

Розглянемо задачу про дослідження на екстремум функції

$$u = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{7}$$

при обмеженнях

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \varphi_2(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad m < n. \end{cases} \tag{8}$$

Функція f має умовний максимум (мінімум) у точці $x^0 = (x_1^0; x_2^0; \ldots; x_n^0)$, якщо існує такий окіл точки x^0, що для всіх його точок x, які задовольняють рівняння зв'язку (8), виконується нерівність $f(x^0) \geq f(x)$ $(f(x^0) \leq f(x))$.

Задача знаходження умовного екстремуму зводиться до дослідження на звичайний екстремум **функції Лагранжа**

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) +$$
$$+ \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

де числа λ_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, називаються **множниками Лагранжа**. Вважатимемо, що функції f, φ_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, неперервні разом зі своїми частинними похідними другого порядку.

Необхідні умови екстремуму функції виражаються системою $n + m$ рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\partial x_j} = 0, \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \\ \dfrac{\partial L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)}{\partial \lambda_i} \equiv \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) = 0, \\ \qquad\qquad i \in \{1, \ldots, m\}, \end{cases} \tag{9}$$

з яких знаходимо x_1, ..., x_n та λ_1, ..., λ_m – координати точки, в якій можливий умовний екстремум.

Достатні умови умовного екстремуму пов'язані з вивченням знаку другого диференціала функції Лагранжа $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0; dx_1, \ldots, dx_n)$ для кожної системи значень x_1^0, ..., x_n^0; λ_1^0, ..., λ_m^0, одержуваної з (9) за умови, що dx_1, dx_2, ..., dx_n задовольняють рівняння

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \varphi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{\partial x_k} dx_k = 0, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{10}$$

при $dx_1^2 + \ldots + dx_n^2 \neq 0$. Доведено, що функція f має умовний максимум у точці $M_0(x_1^0; \ldots; x_n^0)$, якщо для довільних значень dx_1, ..., dx_n, які задовольняють умови (10) і не дорівнюють нулю одночасно, виконується нерівність $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0; dx_1, \ldots, dx_n) < 0$ і умовний мінімум, якщо за цих умов $d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0; dx_1, \ldots, dx_n) > 0$.

Цей другий диференціал можна обчислювати за формулою

$$d^2L(x_1^0, \ldots, x_n^0; \lambda_1^0, \ldots, \lambda_m^0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j,$$

$d\lambda_i = 0$, оскільки λ_i – число, $i \in \{1, \ldots, m\}$, а $dx_1, \ldots, dx_n$ зв'язані співвідношеннями (10).

У випадку функції $z = f(x, y)$ з рівнянням зв'язку $\varphi(x, y) = 0$ функція Лагранжа має вигляд

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y).$$

Система (9) складається з трьох рівнянь:

$$\frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial L(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0, \quad \varphi(x, y) = 0.$$

Нехай x_0, y_0, λ_0 – будь-який розв'язок цієї системи і

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 0 & \dfrac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 L(x_0, y_0; \lambda_0)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L(x_0, y_0; \lambda_0)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial\varphi(x_0, y_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 L(x_0, y_0; \lambda_0)}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L(x_0, y_0; \lambda_0)}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta < 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці $(x_0; y_0)$ умовний максимум, а якщо $\Delta > 0$ – умовний мінімум.

Приклад 5. Знайти умовний екстремум функції $z = x + 2y$, якщо $x^2 + y^2 = 5$.

◀ Складемо функцію Лагранжа: $L(x, y; \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$. Маємо $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x$, $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y$, а тому система (9) набуває вигляду

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0, \\ 2 + 2\lambda y = 0, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Ця система має два розв'язки: $x_1 = -1$, $y_1 = -2$, $\lambda_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = 1$, $y_2 = 2$, $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

Маємо $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda$, $\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda$, тому $d^2L = 2\lambda(dx^2 + dy^2)$.

Оскільки $d^2L > 0$ при $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, то функція має умовний мінімум у точці $(-1;-2)$ і $z_{\min} = -5$. При $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ отримуємо $d^2L < 0$, а це означає, що функція має умовний максимум у точці $(1;2)$ і $z_{\max} = 5$.

Здійснимо це розв'язування по-іншому. Нехай $\varphi(x,y) = x^2 + y^2 - 5$. Тоді $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = 2y$. Очевидно, що $\frac{\partial \varphi(-1,-2)}{\partial x} = -2$, $\frac{\partial \varphi(-1,-2)}{\partial y} = -4$, $\frac{\partial^2 L(-1,-2;\frac{1}{2})}{\partial x^2} = 1$, $\frac{\partial^2 L(-1,-2;\frac{1}{2})}{\partial x \partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 L(-1,-2;\frac{1}{2})}{\partial y^2} = 1$, а тому

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 20 > 0,$$

тобто функція має умовний мінімум у точці $(-1;-2)$. Аналогічно для точки $(1;2)$ і $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -20 < 0,$$

тобто $(1;\ 2)$ є точкою умовного максимуму. ▶

Приклад 6. Фірма виробляє два види товарів S_1 і S_2 у кількостях відповідно x_1 і x_2. Функція витрат має вигляд $C = 10x_1 + x_1x_2 + 10x_2$, а функції попиту на зазначені товари мають відповідно вигляд $p_1 = 50 - x_1 + x_2$ і $p_2 = 30 + 2x_1 - x_2$. Крім того, фірма зв'язана обмеженням $x_1 + x_2 = 15$. Знайти максимальний прибуток, який одержить фірма при реалізації товарів S_1 і S_2.

◀ Відомо, що прибуток $\Pi(x_1,x_2) = P_1 + P_2 - C = p_1x_1 + p_2x_2 - C = (50 - x_1 + x_2)x_1 + (30 + 2x_1 - x_2)x_2 - 10x_1 - x_1x_2 - 10x_2 = 40x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 + 20x_2 - x_2^2$.

Отже, треба дослідити на екстремум функцію $\Pi(x_1,x_2) = 40x_1 - x_1^2 + 2x_1x_2 + 20x_2 - x_2^2$ за умови, що $x_1 + x_2 = 15$.

З умови зв'язку $x_1 + x_2 = 15$ виразимо x_2 через x_1 і підставимо у функцію П: $x_2 = 15 - x_1$, $\widetilde{\Pi} = 40x_1 - x_1^2 + 2x_1(15 - x_1) + 20(15 - x_1) - (15 - x_1)^2 = 80x_1 - 4x_1^2 + 75$.

Дослідимо функцію $\widetilde{\Pi}$ на безумовний (звичайний) екстремум. Маємо $\widetilde{\Pi}'(x_1) = 80 - 8x_1$. Прирівнявши цю похідну до нуля, дістанемо, що $x_1^0 = 10$. Оскільки $\widetilde{\Pi}''(x_1) = -8 < 0$, то у цій точці x_1^0 функція $\widetilde{\Pi}$ досягає максимуму, причому $\widetilde{\Pi}_{\max} = \widetilde{\Pi}(10) = 80 \cdot 10 - 4 \cdot 10^2 + 75 = 475$.

Звідси випливає, що функція П має максимум у точці $(10; 5)$ і $\Pi_{\max} = 475$. ▶

Вправи

1. Знайти область визначення функції:
1) $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1}$; 2) $z = \sqrt{xy}$; 3) $z = \arccos \dfrac{y}{x}$;
4) $z = \ln(x + y)$; 5) $z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$; 6) $u = \arcsin \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$;
7) $u = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{y}} + \dfrac{1}{\sqrt{z}}$.

2. Знайти границю:
1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} (1 + xy)^{\frac{2}{x^2 + xy}}$; 2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} (1 + x^2y^2)^{-\frac{1}{x^2 + y^2}}$;
3) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{2 - \sqrt{xy + 4}}{xy}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 2}} \dfrac{\sin xy}{x}$; 5) $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ y \to 0}} (\cos xy)^{\frac{1}{x^2 y^2}}$.

3. Знайти частинні похідні першого порядку функції:
1) $z = x^3y - y^3x$; 2) $u = (5x^2y - y^3 + 7)^3$;
3) $z = \ln(x + \sqrt{x^2 + y^2})$; 4) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}$;
5) $z = 2^{x^2 - y}$; 6) $z = (1 + x^3)^y$; 7) $u = \left(\dfrac{x}{y}\right)^z$;
8) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$; 9) $u = x^{\frac{y}{z}}$; 10) $u = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{y}{x}}$.

4. Знайти градієнт і його модуль для поданих функцій у вказаних точках:
1) $z = 4 - x^2 - y^2$, $M_0(1; 2)$; 2) $u = x^2 + y^2 - z^2$, $M_0(1; -1; 2)$;
3) $u = xyz$, $M_0(3; -1; 2)$; 4) $u = \operatorname{tg} x - x + 3\sin y - \sin^3 y + z + \operatorname{ctg} z$, $M_0\left(\dfrac{\pi}{4}; \dfrac{\pi}{3}; \dfrac{\pi}{2}\right)$.

5. Для поданої нижче функції знайти похідні вказаного порядку:
1) $z = e^{xy^2}$, $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$; 2) $z = \operatorname{arctg} \dfrac{x + y}{1 - xy}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; 3) $z = x^{2y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$,

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; 4) $z = e^x(\sin x + x\cos y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$.

6. Знайти: 1) закон зміни виробничої функції $z = f(x, y)$ стосовно кожного з факторів x та y; 2) еластичність виробничої функції щодо кожного з факторів та коефіцієнти еластичності при $x = 1$, $y = 1$. Розглянути випадки: а) $f(x, y) = e^{xy}$; б) $z = \ln(x^3 + 2y^3)$.

7. Знайти диференціали першого і другого порядків для функції: 1) $z = x^3y^3$; 2) $z = \left(\frac{y}{x}\right)^2$; 3) $z = 2^{xy}$; 4) $u = xy + yz + xz$; 5) $u = \sin(x + y + z)$.

8. Знайти екстремум функції:
1) $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$; 2) $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$;
3) $z = 2xy - 4x - 2y$; 4) $z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;
5) $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$; 6) $z = x^3 - y^3 - 3xy$.

9. Знайти умовний екстремум функції: 1) $z = xy$ за умови $2x + 3y - 5 = 0$; 2) $z = xy^2$, якщо $x + 2y = 1$; 3) $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$, якщо $x + y + 3 = 0$.

10. Річні видатки підприємства виражаються функцією $f(x_1, x_2) = 1 + 9x_1 + 64x_2 + \dfrac{36}{x_1} + \dfrac{4}{x_2}$. За яких значень x_1 і x_2 ці видатки будуть мінімальними? Знайти коефіцієнти еластичності f при $x_1 = 1$, $x_2 = 1$.

11. Виробнича функція для деякої фірми має вигляд $f = 4x_1x_2 + x_2^2$, де x_1 – капітал, x_2 – праця. Витрати на одиницю капіталу становлять 1 гр.од., а на одиницю праці – 2 гр.од. Знайти обсяги витрат на капітал і працю, за яких випуск продукції буде максимальним, якщо $x_1 + 2x_2 = 105$.

Відповіді

1. 1) $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |x| \le 1; |y| \ge 1\}$; 2) $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, xy \ge 0\}$; 3) $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, |y| \le |x|, x \ne 0\}$; 4) $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2 \,\big|\, y > -x\}$; 5) $\mathbb{R}^2$; 6) $\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x^2 + y^2 + z^2 \ge 0\}$; 7) $\{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \,\big|\, x > 0,\ y > 0,\ z > 0\}$.

2. 1) e^2; 2) 1; 3) $-\dfrac{1}{4}$; 4) 2; 5) $e^{-\frac{1}{2}}$.

3. 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y - y^3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^3 - 3y^2x$; 2) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 30xy(5x^2y - y^3 + 7)^2$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3(5x^2y - y^3 + 7)^2(5x^2 - 3y^2)$; 3) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} =$

$\dfrac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$; 4) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}$; 5) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x\ln 2\cdot 2^{x^2-y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=-\ln 2\cdot 2^{x^2-y}$; 6) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2y(1+x^3)^{y-1}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=(1+x^3)^y\ln(1+x^3)$; 7) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=-\dfrac{z}{y}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z\ln\dfrac{x}{y}$; 8) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 9) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{y}{z}x^{\frac{y}{z}}-1$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}=-\dfrac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$; 10) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{y}{x^2}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{1}{x}3^{-\frac{y}{x}}\ln 3$.

4. 1) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,z=(-2;-4)$, $|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,z|=2\sqrt{5}$; 2) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=(2;-2;-4)$, $|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u|=2\sqrt{6}$; 3) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=(-2;6;-3)$, $|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u|=7$;
4) $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u=\left(1;\dfrac{3}{8}\right)$, $|\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,u|=\dfrac{\sqrt{73}}{8}$.

5. 1) $2y^3(2+xy^2)e^{xy^2}$; 2) 0; 3) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2y(2y-1)x^{2y-2}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=2x^{2y-1}(1+2y\ln x)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=4x^{2y}\ln^2 x$; 4) $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=e^x(\sin y+2\cos y+x\cos y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=e^x(\cos y-\sin y-x\sin y)$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-e^x(\sin y+x\cos y)$.

6. а) 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=ye^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=xe^{xy}$; 2) $E_x(z)=xy$, $E_x(z)|_{(1;1)}=1$, $E_y(z)=xy$, $E_y(z)|_{(1;1)}=1$;

б) 1) $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{3x^2}{x^3+2y^3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{6y^2}{x^3+2y^3}$; 2) $E_x(z)=\dfrac{3x^3}{x^3+2y^3}\dfrac{1}{\ln(x^3+2y^3)}$, $E_x(z)|_{(1;1)}=\dfrac{1}{\ln 3}$, $E_y(z)=\dfrac{6y^3}{x^3+2y^3}\dfrac{1}{\ln(x^3+2y^3)}$, $E_y(z)|_{(1;1)}=\dfrac{2}{\ln 3}$.

7. 1) $dz=3x^2y^4dx+4x^3y^3dy$, $d^2z=6xy^2(y^2dx^2+4xydxdy+2x^2dy^2)$; 2) $dz=-\dfrac{2y}{x^3}(ydx-xdy)$, $d^2z=\dfrac{2}{x^4}(3y^2dx^2-4yxdxdy+x^2dy^2)$; 3) $dz=2^{xy}\ln 2(ydx+xdy)$, $d^2z=2^{xy}\ln 2(y^2\ln 2dx^2+2(1+xy\ln 2)dxdy+x^2\ln 2dy^2)$; 4) $du=(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$, $d^2u=2(dxdy+dydz+dzdx)$; 5) $du=\cos(x+y+z)(dx+dy+dz)$, $d^2u=-\sin(x+y+z)(dx+dy+dz)^2$.

8. 1) $z_{\min} = z(0,3) = -9$; 2) $z_{\min} = z(1,2) = -7$; 3) не існує; 4) $z_{\min} = z(0,0) = 0$; 5) $z_{\min} = z\left(0, -\dfrac{2}{3}\right) = -\dfrac{4}{3}$, у стаціонарній точці $\left(2; -\dfrac{2}{3}\right)$ екстремуму немає; 6) $z_{\max} = z\,(-1,1) = 1$.

9. 1) $z_{\max} = z\left(\dfrac{5}{4}, \dfrac{5}{6}\right) = \dfrac{25}{24}$; 2) $z_{\min} = z(1,0) = 0$, $z_{\max} = z\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$; 3) $z_{\min} = z\left(-\dfrac{3}{2}, -\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{19}{4}$.

10. $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{1}{4}$, $\min f = f\left(2;, \dfrac{1}{4}\right) = 69$, $E_{x_1}(f)|_{(1;1)} \approx -0,237$, $E_{x_2}(f)|_{(1;1)} \approx 0,526$.

11. $x_1 = 45$, $x_2 = 30$, $f_{\max} = 6300$ гр.од.

Числові та функціональні ряди

1. Числові ряди

1.1. Поняття числового ряду

Нехай задано числову послідовність $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$. Вираз вигляду

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{1}$$

називається **числовим рядом** або просто **рядом**.

Числа a_1, a_2, ..., a_n, ... називаються **членами** ряду, а число a_n з довільним номером n – **загальним членом ряду.**

Сума n перших членів ряду називається **n-ою частинною сумою ряду**:

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Оскільки число членів ряду нескінченне, то частинні суми утворюють послідовність $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Ряд (1) називається **збіжним**, якщо послідовність його частинних сум $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ збігається до деякого числа S, яке називається **сумою ряду**. Символічно це записується так:

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \quad \text{або} \quad S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Якщо ж послідовність $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ розбігається, то ряд (1) називається **розбіжним**.

Приклад 1. Знайти суму ряду

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots$$

◀ Розглянемо n-у частинну суму ряду

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Після розкриття дужок всі доданки, крім першого й останнього, взаємно знищуються, і в результаті одержуємо, що $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Тоді

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n-1}\right) = 1.$$

Отже, ряд збіжний і його сума дорівнює одиниці. ▶

Приклад 2. Дослідити на збіжність ряд $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} + \ldots$, $a \neq 0$, який називається **геометричним**.

◀ Частинна сума S_n цього ряду при $q \neq 1$ має вигляд

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} = \frac{a - aq^n}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}q^n.$$

Звідси випливає, що:

1) при $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{1-q} - \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a}{1-q}q^n = \dfrac{a}{1-q}$, тобто ряд збіжний і його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$, бо $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$;

2) якщо $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a}{1-q} - \dfrac{a}{1-q}q^n\right) = \infty$, бо $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$;

3) якщо $q = 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} na = \infty$, отже, ряд розбігається. Якщо ж $q = -1$, то ряд набуде вигляду $a - a + a - a + \ldots$. Частинні суми цього ряду мають вигляд $S_1 = a$, $S_2 = 0$, $S_3 = a$, $S_4 = 0$, $\ldots$. Тому границя частинних сум не існує і ряд розбігається й у цьому випадку.

Отже, геометричний ряд збігається при $|q| < 1$ і розбігається при $|q| \geq 1$. ▶

1.2. Властивості збіжних рядів

Теорема 1. *Якщо ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ збігається і його сума S, а c – деяке число, то збігається також ряд $ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots$ і його сума дорівнює cS.*

◀ Нехай S_n – n-а частинна сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, а $\widetilde{S}_n$ – n-а частинна сума ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$. Тоді

$$\widetilde{S}_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n = c(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) = cS_n.$$

Перейшовши до границі при $n \to \infty$, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty} \widetilde{S}_n = \lim_{n\to\infty} cS_n = c \lim_{n\to\infty} S_n = cS,$$

тобто послідовність частинних сум $\{\widetilde{S}_n, n \in \mathbb{N}\}$ збігається до числа cS. ▶

Теорема 2. *Якщо ряди* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *і* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ *збігаються, а їхні суми дорівнюють відповідно* S *і* $\overline{S}$, *то й ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ *збігається і його сума дорівнює* $S \pm \overline{S}$.

◀ Якщо позначити через S_n, $\overline{S}_n$ і σ_n частинні суми відповідно рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, то $\sigma_n = S_n \pm \overline{S}_n$, а тому

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} (S_n \pm \overline{S}_n) = \lim_{n\to\infty} S_n \pm \lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = S \pm \overline{S}. \quad ▶$$

Теорема 3. *Якщо збігається ряд (1), то збігається і ряд*

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n, \tag{3}$$

і навпаки, із збіжності ряду (3) випливає збіжність ряду (1).

◀ Ця теорема стверджує, що на збіжність ряду не впливає відкидання скінченного числа його перших членів.

Нехай ряд (1) збігається і його сумою є S, тобто $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$. Якщо $\sigma_{n,m}$ – n-а частинна сума ряду (3), то

$$S_{n+m} = S_m + \sigma_{n,m}. \tag{4}$$

Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{n,m} = \lim_{n\to\infty} (S_{n+m} - S_m) = \lim_{n\to\infty} S_{n+m} - S_m = S - S_m,$$

а це означає, що ряд (3) збігається і його сумою є $r_m = S - S_m$.

Припустимо, що ряд (3) збігається, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{n,m} = r_m$. Тоді з (4) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} S_{n+m} = \lim_{n\to\infty} (S_m + \sigma_{n,m}) = S_m + r_m,$$

а це означає збіжність ряду (1). ▶

1.3. Необхідна умова збіжності ряду

При розгляді рядів виникають такі задачі: 1) дослідити ряд на збіжність; 2) знаючи, що ряд збігається, знайти його суму. Розв'язуватимемо в основному першу задачу.

Теорема 4. *Якщо ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *збігається, то*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \tag{5}$$

а також

$$\lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}) = 0. \tag{6}$$

◀ Оскільки ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, то

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S, \ \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S, \ \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0$$

$$\text{і} \qquad \lim_{n\to\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + a_{2n}) = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) =$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_{2n} - \lim_{n\to\infty} S_n = S - S = 0. \quad ▶$$

Умови (5), (6) називаються **необхідними умовами** збіжності ряду.

Наслідок 1. *Якщо загальний член ряду не прямує до нуля, тобто* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *розбігається.*

Наслідок 2. *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} a_{n+k} \neq 0$, *то ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *розбігається.*

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

який називається **гармонічним**.

◀ Маємо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$, тобто необхідна умова (5) збіжності ряду виконується. Доведемо, що цей ряд розбігається. Перевіримо, чи виконується умова (6):

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n} - S_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}\right) \geq$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Отже, ряд розбігається. ▶

З теореми 4 випливає, що коли загальний член ряду прямує до нуля, то ще не можна зробити висновок про збіжність цього ряду. Необхідне додаткове дослідження, яке можна провести за допомогою певних умов (ознак) збіжності ряду.

Якщо ж для деякого ряду його загальний член не прямує до нуля, то згідно з наслідком можна зразу сказати, що такий ряд розбігається.

1.4. Ряди з невід'ємними членами

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, де $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$. Очевидно, що

$$S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \geq S_n, n \in \mathbb{N},$$

тобто послідовність частинних сум заданого ряду є неспадною. Оскільки необхідною й достатньою умовою збіжності монотонної послідовності є її обмеженість, а саме обмеженість зверху неспадної послідовності, то звідси випливає необхідна і достатня умова збіжності ряду з невід'ємними членами.

Теорема 5. *Для того щоб ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *з невід'ємними членами збігався, необхідно й достатньо, щоб послідовність частинних сум цього ряду була обмеженою.*

Розглянемо декілька ознак, які дають достатні умови збіжності ряду.

Теорема 6 (перша ознака порівняння). *Якщо є два ряди з невід'ємними членами:*

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \tag{7}$$

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{8}$$

причому

$$a_n \leq b_n, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

то із збіжності ряду (8) випливає збіжність ряду (7), а з розбіжності ряду (7) – розбіжність ряду (8).

◀ Позначимо відповідно через S_n і $\overline{S}_n$ частинні суми рядів (7) і (8). Тоді з нерівності (9) випливає, що $S_n \leq \overline{S}_n$, $n \in \mathbb{N}$. Якщо ряд (8) збігається, то згідно з теоремою 5 послідовність його частинних сум $\{\overline{S}_n, n \in \mathbb{N}\}$ обмежена зверху, тобто $\overline{S}_n \leq M$, $n \in \mathbb{N}$, а тоді й $S_n \leq \overline{S}_n \leq M$. Звідси випливає, що ряд (7) збігається. Якщо ж ряд (7) розбігається, то послідовність $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ необмежена зверху, тоді й послідовність $\{\overline{S}_n, n \in \mathbb{N}\}$ є необмеженою зверху, а тому ряд (8) розбігається. ▶

Приклад 4. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots . \tag{10}$$

◀ Порівняємо цей ряд із збіжним рядом, що розглянутий у прикладі 1:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)n} + \ldots .$$

Оскільки $\dfrac{1}{n^2} \le \dfrac{1}{(n-1)n}$, $\quad n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, то згідно з теоремою 6 ряд (10) збіжний. ▶

Приклад 5. Довести розбіжність ряду

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots . \tag{11}$$

◀ Порівнюватимемо заданий ряд з гармонічним рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

який розбіжний.

Маємо $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \ge \dfrac{1}{n}$, $\quad n \in \mathbb{N}$, а тому ряд (11) розбігається. ▶

Теорема 7 (друга ознака порівняння). *Якщо для рядів (7) і (8) з додатними членами існує відмінна від нуля скінченна границя*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = K,$$

то ряди (7) і (8) збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад 6. Дослідити на збіжність ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3+3n^2+5n+1}. \tag{12}$$

◀ Оскільки загальний член ряду прямує до нуля при $n \to \infty$ як $\dfrac{1}{n^2}$, то порівнюватимемо його з рядом (10), який збіжний.

Маємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2n+3}{n^3+3n^2+5n+1}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2(2n+3)}{n^3+3n^2+5n+1} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3\left(2+\dfrac{3}{n}\right)}{n^3\left(1+\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}+\dfrac{1}{n^3}\right)} = \frac{2}{1} = 2,$$

а тому ряд (12) збігається. ▶

Теорема 8 (ознака Даламбера). *Нехай всі члени ряду* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *додатні і*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Тоді: 1) якщо $l < 1$*, то ряд збігається; 2) якщо* $l > 1$*, то ряд розбігається; 3) якщо ж* $l = 1$*, то ряд може бути як збіжним, так і розбіжним.*

Приклад 7. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \ldots + \frac{n}{2^n} + \ldots .$$

◀ Маємо $a_n = \dfrac{n}{2^n}$, $a_{n+1} = \dfrac{n+1}{2^{n+1}}$. Тоді

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2^{n+1}} : \frac{n}{2^n} = \frac{(n+1)2^n}{n2^{n+1}} = \frac{1}{2}\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

і

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2} < 1.$$

Отже, ряд збіжний. ▶

Приклад 8. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{2}{1} + \frac{4}{16} + \frac{8}{81} + \ldots + \frac{2^n}{n^4} + \ldots .$$

◀ Очевидно, що $a_n = \dfrac{2^n}{n^4}$, $a_{n+1} = \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)^4}$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^4} : \frac{2^n}{n^4} = \frac{2^{n+1}n^4}{(n+1)^4 \cdot 2^n} = \frac{2n^4}{(n+1)^4} = \frac{2}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^4}.$$

Тому

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^4} = 2 > 1$$

і ряд розбіжний. ▶

1.5. Знакозмінні ряди

До цих пір ми розглядали ряди з невід'ємними членами. У цьому пункті ми розглянемо ряди, які містять як від'ємні, так і додатні члени. Такі ряди називаються **знакозмінними**.

Вивчення знакозмінних рядів розпочнемо з частинного випадку рядів, у яких знаки їхніх членів чергуються, тобто рядів, де за кожним додатним членом йде від'ємний, а за кожним від'ємним – додатний. Для зручності вважатимемо, що перший член такого ряду додатний. Тоді ряд, знаки членів якого чергуються, можна подати у вигляді

$$p_1 - p_2 + p_3 - \ldots + (-1)^{n-1}p_n + \ldots, \tag{13}$$

де $p_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 9 (ознака Лейбніца). *Якщо виконуються умови: 1) $p_{n+1} < p_n$, $n \in \mathbb{N}$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$, то ряд (13) збігається, причому його сума додатна і не перевищує першого члена ряду.*

◀ Розглянемо частинну суму ряду з парним числом членів

$$S_{2n} = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \ldots + p_{2n-1} - p_{2n} =$$

$$= (p_1 - p_2) + (p_3 - p_4) + \ldots + (p_{2n-1} - p_{2n}).$$

Усі доданки в дужках додатні, тому послідовність частинних сум $\{S_{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ є зростаючою. Доведемо, що вона обмежена. Для цього подамо S_{2n} у вигляді

$$S_{2n} = p_1 - (p_2 - p_3) - (p_4 - p_5) - \ldots - (p_{2n-2} - p_{2n-1}) - p_{2n} < p_1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отже, послідовність $\{S_{2n}, n \in \mathbb{N}\}$ зростаюча й обмежена, а тому має скінченну границю $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n} = S$, причому $S \le p_1$.

Доведемо, що й послідовність частинних сум непарного числа членів має ту саму границю S. Справді, $S_{2n+1} = S_{2n} + p_{2n+1}$. Перейшовши в цій рівності до границі при $n \to \infty$ і скориставшись другою умовою теореми, одержимо

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} (S_{2n} + p_{2n+1}) = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} p_{2n+1} = S + 0 = S.$$

Звідси випливає, що послідовність частинних сум $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ ряду (13) збігається до S. Це означає, що ряд (13) збігається і його сума $S \leq p_1$. ▶

Наслідок. *Якщо за суму ряду Лейбніца взяти суму його n перших членів, то похибка при цьому за абсолютною величиною не перевищить першого з відкинутих членів.*

Приклад 9. Дослідити на збіжність ряд

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \ldots .$$

◀ Маємо $p_n = \dfrac{1}{n}$, $p_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$. Оскільки $p_n = \dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1} = p_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, а $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, то з теореми 9 випливає, що ряд збіжний. ▶

Приклад 10. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 3^2} + \frac{1}{3\cdot 4^2} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n(n+1)^2} + \ldots .$$

◀ Перевіримо виконання умов ознаки Лейбніца:

1) $p_n = \dfrac{1}{n(n+1)^2} > \dfrac{1}{(n+1)(n+2)^2} = p_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n(n+1)^2} = 0$.

Отже, ряд збігається. ▶

Тепер розглянемо довільний знакозмінний ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \tag{14}$$

де числа a_1, a_2, ..., a_n, ... можуть бути як додатними, так і від'ємними, причому розміщення додатних і від'ємних членів у ряді довільне.

Поряд з рядом (14) розглядатимемо ряд, складений з абсолютних величин членів заданого ряду:

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \tag{15}$$

Якщо ряд (15) збігається, то збігається і ряд (14). У цьому випадку кажуть, що ряд (14) збігається **абсолютно**. Якщо ж ряд (14) збігається, а ряд (15) розбігається, то ряд (14) називають **умовно збіжним**.

Приклад 11. Дослідити на збіжність ряд

$$1-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\dots\,.$$

◀ Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{7^2}+\dots\,.$$

Цей ряд є збіжним, що доведено в прикладі 4. Звідси випливає, що наш ряд збігається абсолютно. ▶

Приклад 12. Дослідити на збіжність ряд

$$1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots\,.$$

◀ Ряд з абсолютних величин

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$$

розбігається, як доведено в прикладі 5. У той же час вихідний ряд збігається, бо виконуються умови теореми 9. Це означає, що ряд збігається умовно. ▶

Серед знакозмінних рядів абсолютно збіжні ряди займають особливе місце. Це пояснюється тим, що такі ряди мають властивості скінченних сум: можна переставляти місцями члени ряду, додавати та віднімати їх, а також перемножувати ці ряди.

Умовно збіжні ряди таких властивостей не мають. Наприклад, доведено, що, переставляючи члени умовно збіжного ряду, можна одержати ряд, сума якого дорівнюватиме будь-якому заданому числу (**теорема Рімана**).

2. Функціональні ряди

2.1. Поняття про функціональний ряд. Область збіжності функціонального ряду

Тут ми розглядатимемо ряди, членами яких є функції, визначені на проміжку X числової осі:

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{16}$$

які називаються **функціональними**.

Візьмемо довільне $x_0 \in X$ і розглянемо ряд

$$u_1(x_0) + u_2(x_0) + \ldots + u_n(x_0) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0). \tag{17}$$

Цей числовий ряд може збігатися або розбігатися. Якщо він збігається, то точка x_0 називається **точкою збіжності** функціонального ряду (16). Якщо ж ряд (17) розбігається, то точка x_0 називається **точкою розбіжності** функціонального ряду. Сукупність X_1 усіх точок збіжності функціонального ряду називається **областю його збіжності**. Очевидно, що $X_1 \subset X$.

Частинна сума функціонального ряду, тобто сума перших його n членів

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x)$$

є функцією змінної x.

З означення області збіжності функціонального ряду випливає, що для довільної точки x цієї області існує границя послідовності частинних сум $\{S_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ при $n \to \infty$. У точках, які не належать області збіжності, послідовність частинних сум $\{S_n(x), n \in \mathbb{N}\}$ не має границі. Зрозуміло, що сумою S функціонального ряду є функція змінної x, яка визначена в області збіжності ряду. У цьому випадку пишуть

$$S(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots\ , \quad x \in X_1.$$

Приклад 1. Знайти область збіжності ряду

$$\sin x + \sin^2 x + \ldots + \sin^n x + \ldots .$$

◀ Очевидно, що для будь-яких x таких, що $|\sin x| < 1$, заданий ряд збігається, бо це геометричний ряд з $|q| < 1$. При $x = \pm\frac{\pi k}{2}$, $k \in \{1, 3, 5, \ldots\}$ ряд розбігається. Отже, областю збіжності цього ряду є $x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm\frac{\pi k}{2}\}$, $k \in \{1, 3, 5, \ldots\}$. ▶

2.2. Степеневі ряди

2.2.1. Степеневий ряд і його область збіжності. Ряд вигляду

$$c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{18}$$

називається **степеневим**.

Числа c_0, c_1, ..., c_n, ... називаються **коефіцієнтами степеневого ряду.**

З'ясуємо, який вигляд має область збіжності степеневого ряду (18). Розглянемо знакододатний ряд, складений з абсолютних величин членів цього ряду

$$|c_0| + |c_1 x| + |c_2 x^2| + \ldots + |c_n x^n| + \ldots \tag{19}$$

і застосуємо для його дослідження на збіжність ознаку Даламбера. Для цього знайдемо границю відношення наступного члена $a_{n+1} = |c_{n+1} x^{n+1}|$ до попереднього $a_n = |c_n x^n|$ при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1} x^{n+1}|}{|c_n x^n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}||x^{n+1}|}{|c_n||x^n|} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}.$$

Припустимо, що існує границя $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \neq 0$. Позначимо її через $\frac{1}{R}$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{1}{R}$. Тоді $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x|\frac{1}{R}$.

З ознаки Даламбера випливає, що коли $\frac{|x|}{R} < 1$, тобто $|x| < R$, то ряд (19) збігається, а отже, збігається і ряд (18), причому абсолютно. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x|\frac{1}{R} > 1$, то ряд (19) розбігається. Оскільки в цьому випадку для всіх достатньо великих n члени ряду (19) зростають, то загальний член $a_n = |c_n x^n|$ не прямує до нуля при $n \to \infty$. Отже, не прямує до нуля і загальний член ряду (18). Тому для всіх значень x, які задовольняють нерівність $|x| > R$, степеневий ряд (18) розбігається.

Якщо, нарешті, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|}{R} = 1$, тобто $|x| = R$, то тоді ознаку Даламбера не можна застосувати і як ряд (19), так і ряд (18), може збігатися або розбігатися.

Отже, в припущенні, що $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ існує і не дорівнює нулю, доведена така теорема.

Теорема 1. *Областю збіжності степеневого ряду*

$$c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots$$

є інтервал $(-R; R)$, до якого, в залежності від конкретних випадків, треба долучити крайні точки $-R$ і R. У кожній точці інтервалу $(-R; R)$ ряд збігається абсолютно.

Інтервал $(-R; R)$ називається **інтервалом збіжності** степеневого ряду, а число R – **радіусом збіжності.**

Очевидно, що будь-який степеневий ряд (18) збігається при $x = 0$, оскільки при $x = 0$ маємо числовий ряд $c_0 + 0 + 0 + \ldots + 0 + \ldots$. Якщо інших точок збіжності немає, то у цьому випадку вважатимемо, що радіус збіжності $R = 0$. Якщо степеневий ряд збігається у всіх точках числової осі, то вважатимемо, що радіус збіжності $R = \infty$.

З викладеного вище випливає, що радіус збіжності R можна знайти за формулою

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|}.$$

Приклад 2. Знайти область збіжності ряду

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + \frac{x^n}{n} + \ldots .$$

◀ Знайдемо радіус збіжності заданого ряду $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. Звідси випливає, що інтервалом збіжності є $(-1; 1)$. Дослідимо заданий ряд на збіжність у точках $x = -1$ і $x = 1$.

При $x = 1$ маємо гармонічний ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots,$$

який розбігається (приклад 3, підрозділ 1.1 цього розділу).

Якщо ж $x = -1$, то одержимо ряд

$$-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (1-)^n \frac{1}{n} + \ldots,$$

який збігається (приклад 9, підрозділ 1.5 цього розділу).

Отже, область збіжності ряду $[-1; 1)$. ▶

Приклад 3. Знайти область збіжності ряду

$$1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots .$$

◀ Оскільки

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n!}}{\frac{1}{(n+1)!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!(n+1)}{n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} (n+1) = \infty,$$

то наш ряд збігається на $(-\infty; +\infty)$. ▶

2.2.2. Властивості степеневих рядів. Розглянемо ряд (18), що збігається на інтервалі $(-R; R)$, де R – його радіус збіжності. Тоді кожному $x_0 \in (-R; R)$ відповідає сума $f(x_0)$ числового ряду

$$c_0 + c_1 x_0 + c_2 x_0^2 + \ldots + c_n x_0^n + \ldots .$$

Звідси випливає, що сума степеневого ряду є функцією x на проміжку $(-R; R)$:

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots \ . \tag{20}$$

У цьому випадку кажуть, що степеневий ряд збігається до функції f на проміжку $(-R; R)$ або, що функція f розкладається в степеневий ряд на $(-R; R)$.

Доведено [10], що сума f степеневого ряду (18) є неперервною і диференційовною функцією на всьому інтервалі збіжності.

Наведемо без доведення деякі теореми про властивості степеневих рядів.

Теорема 2 (про почленне диференціювання степеневого ряду). *Нехай функція f розкладається на інтервалі $(-R; R)$ в степеневий ряд (20). Розглянемо степеневий ряд*

$$c_1 + 2c_2 x + \ldots + nc_n x^{n-1} + \ldots, \tag{21}$$

одержаний почленним диференціюванням ряду (20). Тоді:

1) ряд (21) має той самий радіус збіжності R, що й ряд (20);

2) сума ряду (21) дорівнює $f'(x)$, $x \in (-R; R)$.

Застосовуючи теорему 2 повторно, дістанемо, що друга похідна $f''(x)$ також існує і дорівнює сумі ряду, одержаного двократним диференціюванням ряду (20). Аналогічні висновки можна зробити для третьої похідної і т.д.

Отже, функція f, яка розкладається в степеневий ряд (20) на інтервалі $(-R; R)$, нескінченно диференційовна на цьому інтервалі. Розклад в степеневий ряд довільної похідної одержується почленним диференціюванням ряду (20). При цьому радіуси збіжності відповідних рядів дорівнюють радіусу збіжності ряду (20).

Теорема 3 (про почленне інтегрування степеневого ряду). *Якщо функція f розкладається в степеневий ряд на інтервалі $(-R; R)$, то вона інтегровна на цьому інтервалі. При цьому інтеграл від суми ряду дорівнює сумі інтегралів від членів ряду.*

Іншими словами, якщо $[x_1; x_2] \subset (-R; R)$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots)dx =$$

$$= \int_{x_1}^{x_2} c_0 dx + \int_{x_1}^{x_2} c_1 x dx + \int_{x_1}^{x_2} c_2 x^2 dx + \ldots + \int_{x_1}^{x_2} c_n x^n dx + \ldots .$$

Важливим є інтегрування степеневого ряду по відрізку $[0; x]$, де $|x| < R$:

$$\int_0^x f(t)dt = c_0 x + \frac{c_1 x^2}{2} + \frac{c_2 x^3}{3} + \ldots + \frac{c_n x^{n+1}}{n+1} + \ldots .$$

Цей ряд має той самий радіус збіжності, що й ряд (20).

Зауважимо, що часто розглядають степеневий ряд загального вигляду

$$c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \ldots + c_n(x - x_0)^n + \ldots = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n, \tag{22}$$

який заміною $x - x_0 = y$ зводиться до ряду (18).

Якщо функція f є сумою ряду (22), то кажуть, що вона розкладається в ряд за степенями $(x - x_0)$.

2.3. Розклад функції у степеневий ряд

Для застосування важливим є вміння розкладати функцію f у степеневий ряд на відрізку $[-r; r]$ або інтервалі $(-r; r)$, де $r > 0$.

При цьому треба дати відповідь на такі два запитання:

1) чи можна задану функцію подати на всьому відрізку у вигляді суми певного степеневого ряду?

2) якщо так, то як знайти цей ряд?

Спочатку дамо відповідь на друге запитання. Припустимо, що функція f на відрізку $[-r; r]$ розкладена в степеневий ряд

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots . \tag{23}$$

Знайдемо коефіцієнти c_0, c_1, ..., c_n, ... цього ряду.

З попереднього пункту відомо, що степеневий ряд (23) можна почленно диференціювати довільну кількість разів на відрізку $[-r; r]$. Тому для будь-якого $x \in (-r; r)$ маємо

$$f'(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \ldots,$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 \cdot c_2 + 3 \cdot 2 \cdot c_3 x + 4 \cdot 3 \cdot c_4 x^2 + \ldots,$$

$$f^{(3)}(x) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot c_4 x + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ,$$

$$f^{(n)}(x) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n + \ldots, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Поклавши в цих рівностях, а також у розкладі (23) $x = 0$, дістанемо $f(0) = c_0$, $f'(0) = c_1$, $f''(0) = 2 \cdot 1 \cdot c_2$, $f^{(3)}(0) = 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_3$, ..., $f^{(n)}(0) = n(n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot c_n$, $n \in \mathbb{N}$. Звідси одержуємо формулу

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Підставивши знайдені коефіцієнти в (23), матимемо

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots . \qquad (24)$$

Рівність (24) називається **рядом Маклорена** або **рядом Тейлора з центром у точці $x_0 = 0$ для функції f.**

Отже, якщо функція f розкладається в степеневий ряд у деякому околі точки $x_0 = 0$, то цей ряд є рядом Маклорена.

Нехай f – довільна нескінченно диференційовна функція. Для неї можна скласти ряд Маклорена

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots . \qquad (25)$$

З'ясуємо, за яких умов сума цього ряду збігається з функцією f. Для цього розглянемо формулу Маклорена для функції $f(x)$:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x),$$

де залишковий член

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad -x < c < 0 \quad \text{або} \quad 0 < c < x.$$

Якщо позначити через $S_n(x)$ n-ну частинну суму ряду Маклорена (25), то формулу Маклорена можна подати у вигляді

$$f(x) = S_n(x) + R_{n+1}(x).$$

Звідси випливає, що рівність (24) правильна тоді й тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x) = f(x)$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = \lim\limits_{n\to\infty}(f(x) - S_n(x)) = 0$, $x \in (-r; r)$.

У багатьох випадках зручно користуватися теоремою, яка дає достатні умови розкладу функцій в ряд Маклорена.

Теорема 4. *Нехай функція f визначена і нескінченно диференційовна на інтервалі $(-r; r)$. Якщо існує стала M така, що*

$$|f^{(n)}(x)| \le M, \quad n \in \mathbb{Z}_+, x \in (-r; r),$$

то на цьому інтервалі ряд Маклорена збігається до функції f.

Розглянемо розклад деяких елементарних функцій у ряд Маклорена.

1. Розклад у степеневий ряд функції $f(x) = e^x$.

◀ Оскільки $f^{(n)}(x) = (e^x)^{(n)} = e^x$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $|f^{(n)}x)| = e^x < e^r$ на довільному інтервалі $(-r; r) \subset \mathbb{R}$. Згідно з теоремою 4 функція e^x є сумою свого ряду Маклорена при $x \in (-r; r)$, а отже, для будь-якого довільного $x \in \mathbb{R}$, бо r – довільне. Маємо, що $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$, $n \in \mathbb{Z}_+$, тому ряд Маклорена для функції $f(x) = e^x$ має вигляд

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad ▶ \tag{26}$$

2. Розклад у ряд Маклорена функцій $f(x) = \sin x$ і $f(x) = \cos x$.

◀ Оскільки $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, то $|f^{(n)}(x)| = \left|\sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)\right| \le 1$, $x \in (-r; r)$, де r – довільне дійсне число. Отже, виконуються умови теореми 4, а це означає, що для будь-якого x функція $f(x) = \sin x$ є сумою свого ряду Маклорена.

При $x = 0$ маємо, що $f(0) = \sin 0 = 0$, $f'(0) = \cos 0 = 1$, $f''(0) = -\sin 0 = 0$, ..., тобто всі похідні парного порядку дорівнюють нулю, а непарного – $(-1)^n$, $n \in \mathbb{Z}_+$.

Звідси випливає, що ряд Маклорена для $f(x) = \sin x$ має вигляд

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Ряд для $f(x) = \cos x$ одержується з цього ряду почленним диференціюванням:

$$\cos x = (\sin x)' = (x)' - \left(\frac{x^3}{3!}\right)' + \left(\frac{x^5}{5!}\right)' - \ldots + \left((-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)' + \ldots$$

або

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

3. Розклад функцій $f(x) = \ln(1 + x)$ і $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

◀ Розглянемо геометричний ряд

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots$$

Відомо (приклад 2, підрозділ 1.1 цього розділу), що при $|x| < 1$ заданий ряд збігається і його сума дорівнює $\dfrac{1}{1-x}$. Отже,

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots, \quad |x| < 1, \tag{27}$$

тобто (27) є розкладом функції $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ в степеневий ряд при $|x| < 1$. Зробимо в (27) заміну змінної $x = -t$:

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots \ . \tag{28}$$

Проінтегрувавши (28) у межах від 0 до x, $|x| < 1$, дістанемо

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{1+t} = \int\limits_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \ldots + (-1)^n t^n + \ldots\right) dt$$

або

$$\ln(1+t)\big|_0^x = \left(t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{t^{n+1}}{n+1} + \ldots\right)\Bigg|_0^x.$$

Звідси одержуємо розклад функції $f(x) = \ln(1+x)$ у степеневий ряд

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots, \quad |x| < 1. \quad (29)$$

Можна довести, що розклад (29) правильний і при $x = 1$.

Знайдемо тепер розклад функції $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Для цього підставимо в рівність (27) $x = -t^2$ і проінтегруємо по t від 0 до x. Тоді матимемо розклад

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots, \quad (30)$$

який правильний при $|x| < 1$. Очевидно, що одержаний ряд збігається і в точках $x = -1$ й $x = 1$ і тому рівність (30) є правильною і для цих x. ▶

4. Розклад функції $f(x) = (1+x)^\alpha$.

◀ Нехай $f(x) = (1+x)^\alpha$, де α – довільне дійсне число. Тоді маємо $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, $f^{(3)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(1+x)^{\alpha-3}$, ..., $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$, ... Поклавши $x = 0$ в усі ці формули, одержимо $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$, $f''(0) = \alpha(\alpha-1)$, $f^{(3)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)$, ..., $f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)$ .... Підставивши вирази для похідних в ряд Маклорена (24), дістанемо

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots +$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (31)$$

Легко переконатися, що радіус збіжності цього ряду дорівнює одиниці, тобто ряд (31) збігається при $|x| < 1$, і рівність (31) правильна для цих x.

Для натуральних $\alpha = m$ права частина рівності (31) перетворюється в многочлен, а сама рівність – у формулу бінома Ньютона:
$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + x^m. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 4. Розкласти в степеневий ряд функцію $f(x) = e^{-x^2}$.

$\blacktriangleleft$ Скористаємося розкладом у степеневий ряд функції $f(t) = e^t$:
$$e^t = 1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \ldots + \frac{t^n}{n!} + \ldots, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Замінюючи в цій формулі t на $-x^2$, дістаємо
$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 5. Обчислити наближено з точністю до 0,0001:

1) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}}$; 2) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$.

$\blacktriangleleft$ 1) Для обчислення $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}} = e^{-\frac{3}{5}}$ запишемо ряд (26) при $x = -\dfrac{3}{5}$, яке належить області збіжності $(-\infty; +\infty)$:
$$e^{-\frac{3}{5}} = 1 - \frac{3}{5} + \frac{3^2}{5^2 2!} - \frac{3^3}{5^3 3!} + \ldots + \frac{(-1)^n 3^n}{5^n n!} + \ldots =$$
$$= 1 - 0,6 + 0,18 - 0,036 + 0,0054 - 0,000648 + 0,0000648 - \ldots .$$

Взявши перші шість членів розкладу на підставі наслідку з ознаки Лейбніца, ми одержимо похибку, яка менша від першого з відкинутих членів, тобто $|R_7| < 0,0000648 < 0,0001$.

Отже, $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e^3}} \approx 1 - 0,6 + 0,18 - 0,036 + 0,0054 - 0,000648 = 0,548752 \approx 0,5488$.

2) Інтеграл $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx$ не обчислюється точно, а тому обчислимо його наближено.

Замінивши x на $-x$ в розкладі (26), одержимо

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + \ldots .$$

Помножимо цей ряд на $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x}e^{-x} = x^{\frac{1}{2}}e^{-x} = x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{n!} + \ldots$$

і проінтегруємо в інтервалі $(0;1)$, який належить інтервалу збіжності ряду $(-\infty;\infty)$. Тоді матимемо

$$\int_0^1 \sqrt{x}e^{-x}dx = \int_0^1 x^{1/2}dx - \int_0^1 x^{3/2}dx + \ldots + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{n+\frac{1}{2}}}{n!}dx + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^1 - \frac{2}{5}x^{5/2}\Big|_0^1 + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+\frac{3}{2}}\frac{x^{n+\frac{3}{2}}}{n!}\Bigg|_0^1 + \ldots =$$

$$= \frac{2}{3} - \frac{2}{5} + \ldots + \frac{(-1)^n \cdot 2}{(2n+3)n!} + \ldots = 0,66667 - 0,40000 + 0,14286 -$$

$$-0,03704 + 0,00758 - 0,00128 + 0,00018 - \ldots \approx 0,37897 \approx 0,3790.$$

Оцінка похибки обчислення проводиться аналогічно як і у випадку 1) цього прикладу. ▶

Приклад 6. Обчислити $\ln 1,6$, взявши три члени розкладу функції в степеневий ряд.

◀ Скористаємося розкладом (29):

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots,$$

де $x = 0,6 \in (-1;1]$, обмежившись трьома членами ряду. Маємо

$$\ln 1,6 \approx 0,6 - \frac{0,6^2}{2} + \frac{0,6^3}{3} = 0,6(1 - 0,3 + 0,12) = 0,492.$$

Похибка, яку ми при цьому робимо, оцінюється так:

$$|R_4| < \frac{(0,6)^4}{4} = \frac{0,1296}{4} = 0,0324. \quad ▶$$

Вправи

1. Знайти суму ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n)(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.

2. Дослідити на збіжність ряд, застосувавши ознаку порівняння:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$; 3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{n}{n^4+1}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n+2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$.

3. За ознакою Даламбера дослідити на збіжність ряд:

1) $\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}+\ldots$; 2) $\frac{2}{2}+\frac{2\cdot 3}{2\cdot 4}+\ldots+\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}+\ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{3^n}$; 5) $\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{5}{\sqrt{2\cdot 3^2}}+\frac{9}{\sqrt{3\cdot 3^3}}+\ldots+\frac{4n-3}{\sqrt{n\cdot 3^n}}+\ldots$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$; 7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n(2n+1)}$.

4. Дослідити на збіжність знакозмінний ряд:

1) $1-\frac{1}{3}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}+\ldots$;

2) $\frac{1}{2}-\frac{2}{2^2+1}+\frac{3}{3^2+1}-\frac{4}{4^2+1}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{n}{n^2+1}+\ldots$;

3) $1,1-1,01+1,001-1,0001+\ldots+(-1)^{n-1}\left(1+\frac{1}{10^n}\right)+\ldots$;

4) $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}+\ldots$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\sin\frac{\pi n}{3}}{2\sqrt{n^3+1}}$; 6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)}{4^n}$;

7) $1-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}}+\ldots(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n-1}}+\ldots$.

5. Знайти область збіжності степеневого ряду:

1) $(x-2)+\frac{1}{2^2}(x-2)^2+\frac{1}{3^2}(x-2)^3+\ldots$;

2) $1!(x-5)+2!(x-5)^2+3!(x-5)^3+\ldots$;

3) $\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+1)^n}{n\cdot 3^n}$.

6. Розкласти в степеневий ряд за степенями x функцію:

1) $f(x)=3^x$, $x\in\mathbb{R}$; 2) $f(x)=\cos^2 x$, $x\in\mathbb{R}$;

3) $f(x)=\frac{e^x-1}{x}$, $x\in\mathbb{R}$; 4) $f(x)=x\ln(1+x^2)$, $x\in(-1;1)$;

5) $f(x)=\sin\frac{x}{2}$, $x\in\mathbb{R}$.

7. Обчислити наближено з точністю до 0,0001:

1) $\ln 1,1$; 2) $\sin 0,4$; 3) $\int\limits_0^1\cos\sqrt{x}dx$.

Відповіді

1. 1) $\frac{3}{4}$; 2) $\frac{1}{3}$; 3) $\frac{23}{90}$; 4) $\frac{1}{2}$; 5) 1.

2. 1) збігається; 2) розбігається; 3) збігається; 4) розбігається; 5) розбігається.

3. 1) збігається; 2) збігається; 3) розбігається; 4) збігається; 5) збігається; 6) розбігається; 7) розбігається.

4. 1) збігається умовно; 2) збігається умовно; 3) розбігається; 4) збігається абсолютно; 5) збігається абсолютно; 6) збігається абсолютно; 7) збігається умовно.

5. 1) $[1;3]$; 2) $\{5\}$; 3) $\mathbb{R}$; 4) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{3};\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$; 5) $[-4;2)$.

6. 1) $1+x\ln 3+\frac{x^2\ln^2 3}{2!}+\frac{x^3\ln^3 3}{3!}+\ldots$, $x\in\mathbb{R}$;

2) $1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\frac{2^5}{6!}x^6+\ldots$, $x\in\mathbb{R}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}$, $x\in\mathbb{R}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)!}$, $x\in\mathbb{R}$.

7. 1) 0,0953; 2) 0,3894; 3) 0,7635.

Диференціальні рівняння

1. Основні поняття про диференціальні рівняння

При розв'язуванні багатьох прикладних задач і вивченні закономірностей суспільних процесів одержують математичні моделі, в основі яких лежать диференціальні рівняння. **Диференціальним** називається рівняння, яке зв'язує незалежну змінну або змінні, шукану функцію та похідні різних порядків від цієї функції. При цьому рівняння може не містити в явному вигляді незалежну змінну (змінні) і шукану функцію, але обов'язково повинно містити одну або декілька похідних шуканої функції.

Якщо шукана функція залежить від однієї змінної, то диференціальне рівняння називається **звичайним**, якщо ж від декількох – то **рівнянням з частинними похідними**. Ми розглядатимемо тут тільки звичайні диференціальні рівняння.

У загальному випадку диференціальне рівняння можна записати у вигляді

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \qquad (1)$$

де F – відома функція від $n+2$ змінних, $n \in \mathbb{N}$, при цьому порядок n старшої похідної, яка входить у (1), називається **порядком** диференціального рівняння. Наприклад, рівняння $y' = 3x^2$, $y' - \sqrt{y} = 0$ – першого порядку; рівняння $y'' + \omega^2 y = 0$, $y'' - x^2 = y$ – другого порядку; рівняння $y^{(4)} + y'' \ln x = x$ – четвертого порядку.

Розв'язком диференціального рівняння (1) називається функція $y = \varphi(x)$, яка визначена і неперервна разом зі своїми похідними до порядку рівняння на проміжку X і така, що при підстановці її в рівняння перетворює його в тотожність

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n)}(x)) = 0, \quad x \in X.$$

Задача про знаходження розв'язку диференціального рівняння називається **задачею інтегрування** заданого диференціального рівняння. Графік розв'язку диференціального рівняння називається **інтегральною кривою**.

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = x^2$.

◀ Розв'язати рівняння означає, що треба знайти функцію y, похідна якої дорівнює x^2. З інтегрального числення відомо, що такою функцією є $y = \dfrac{x^3}{3} + C$, де $C \in \mathbb{R}$. ▶

З цього прикладу видно, що розв'язок рівняння визначається неоднозначно, тобто диференціальне рівняння визначає сім'ю інтегральних ліній на площині. Для виділення конкретного розв'язку треба задати додаткову умову. В цьому випадку такою умовою є $y(x_0) = y_0$ або умова того, що інтегральна лінія проходить через задану точку $(x_0; y_0)$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння (1) n-го порядку називається вираз

$$y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n), \tag{2}$$

який є функцією змінної x і n довільних сталих C_1, C_2, ..., C_n і такий, що при відповідному виборі цих сталих з (2) одержуємо будь-який розв'язок рівняння (1), який належить до певного класу.

Частинним розв'язком диференціального рівняння називається розв'язок, який одержується із загального розв'язку при конкретних числових значеннях сталих C_1, C_2, ..., C_n.

У наступних пунктах ми уточнимо поняття загального і частинного розв'язків диференціального рівняння, а також наведемо приклади математичних моделей деяких явищ, які описуються диференціальними рівняннями.

2. Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку зв'язує незалежну змінну, шукану функцію та її першу похідну. В загальному випадку його можна записати у вигляді

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

де x – незалежна змінна, y – шукана функція, y' – її похідна, а F – відома функція своїх аргументів.

Рівняння (3) може не містити в явному вигляді x і y, але обов'язково містить y'. Розв'язуючи рівняння (3), якщо це можливо, відносно y' дістанемо

$$y' = f(x, y). \tag{4}$$

Рівняння (4) називається **рівнянням першого порядку, розв'язаним відносно похідної**.

Розв'язком диференціального рівняння першого порядку називається функція $y = \varphi(x)$, яка неперервна разом із своєю похідною на проміжку X, і при підстановці її в рівняння перетворює його в тотожність, тобто

$$F(x, \varphi(x), \varphi'(x)) = 0, \quad x \in X.$$

Як випливає з прикладу 1 з попереднього підрозділу, сукупність розв'язків диференціального рівняння першого порядку містить довільну сталу, змінюючи яку, ми одержуватимемо різні розв'язки заданого рівняння. Для виділення з цієї множини конкретного розв'язку треба задати додаткову умову, а саме:

$$y(x_0) = 0 \quad \text{або} \quad y(x)|_{x=x_0} = y_0. \tag{5}$$

Ця умова називається **початковою умовою**.

У теорії диференціальних рівнянь основною задачею є питання про існування та єдиність розв'язку. Відповідь на нього дає твердження.

Теорема Коші. *Якщо права частина* f *рівняння (4) та її частинна похідна* $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ *визначені й неперервні в області* Ω *зміни* x *і* y, *то задача (4), (5) має єдиний розв'язок* $y = \varphi(x)$, *якщо* $(x_0; y_0) \in \Omega$.

Геометрично це означає, що через кожну внутрішню точку $(x_0; y_0)$ області Ω проходить єдина інтегральна крива.

Задача (4), (5), тобто задача, в якій треба знайти розв'язок рівняння (4), що задовольняє початкову умову (5), називається **задачею Коші**. Якщо умови теореми Коші не виконуються у деяких точках $(x; y)$, то ці точки називаються **особливими точками диференціального рівняння**. У цих точках є розривною або функція f, або її частинна похідна $\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Через кожну таку точку може проходити декілька інтегральних кривих або не проходити жодна.

Дамо означення загального й частинного розв'язків рівняння (4), права частина f якого задовольняє у деякій області Ω умови теореми Коші. Функція $y = \varphi(x, C)$ називається **загальним розв'язком** рівняння (4) в області Ω, якщо вона задовольняє умови:

1) при будь-яких значеннях сталої C, що належать певній числовій множині, функція $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння (4);

2) яка б не була точка $(x_0; y_0) \in \Omega$, існує єдине значення сталої $C = C_0$ таке, що розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ задовольняє початкову умову (5).

Значення $C = C_0$ знаходять з умови $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Будь-який розв'язок $y = \varphi(x, C_0)$ рівняння (4), який одержується із загального розв'зку $y = \varphi(x, C)$ при конкретному значення $C = C_0$, називається **частинним розв'язком**.

Якщо загальний розв'язок диференціального рівняння знайдено у вигляді, не розв'язаному відносно y, тобто у вигляді $\Phi(x, y, C) = 0$, то він називається **загальним інтегралом диференціального рівняння**.

Перейдемо тепер до розгляду методів знаходження розв'язків диференціальних рівнянь першого порядку. Взагалі не існує єдиного методу розв'язування рівняння (4) для довільної правої частини f. Тому розглянемо методи розв'язування (методи інтегрування) цього рівняння лише у деяких частинних випадках, коли їхні розв'язки виражаються через елементарні функції або інтеграли від них.

2.1. Рівняння з відокремлюваними змінними та звідні до них

Диференціальне рівняння першого порядку називається **рівнянням з відокремлюваними змінними**, якщо його можна подати у вигляді

$$y' = f_1(x) f_2(y). \tag{6}$$

Права частина рівняння (6) є добутком двох множників, кожний з яких є функцією тільки одного аргументу.

Метод інтегрування рівняння з відокремлюваними змінними полягає в такому.

Перепишемо рівняння (6) у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) f_2(y). \tag{7}$$

Помножимо обидві частини (7) на dx і поділимо обидві частини на $f_2(y) \neq 0$, тоді одержимо

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x) dx. \tag{8}$$

У цьому рівнянні змінна x входить у праву частину, а змінна y – тільки в ліву, тобто змінні відокремлені.

Припустимо, що ми знайшли розв'язок $y(x)$ рівняння (7). Якщо цю функцію підставити в (8), то одержимо тотожність, де два диференціали дорівнюють один другому, тільки в правій частині диференціал виражений через x, а в лівій – через y. Оскільки диференціали однакові, то їхні невизначені інтеграли відрізняються на сталу величину, тобто, інтегруючи зліва по змінній y, а справа по змінній x, дістанемо

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C, \tag{9}$$

де C – довільна стала. Тут і далі знак інтеграла означає взяття первісної від підінтегральної функції.

Вираз (9) є загальним інтегралом рівняння (6). У диференціальних рівняннях символ невизначеного інтеграла означає одну із первісних, а не сукупність усіх первісних.

Очевидно, що коли f_1 неперервна на $[a; b]$, а f_2 – неперервна на $[c; d]$ і $f_2(y) \neq 0$, $y \in [c; d]$, то інтеграли у формулі (9) існують.

Зауваження. При діленні обох частин рівняння (6) на $f_2(y)$ ми могли втратити розв'язки, при яких $f_2(y) = 0$. Справді, якщо $f_2(y_0) = 0$, то $y = y_0$ є розв'язком рівняння (6).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $y' = \dfrac{y}{x}$.

◀ Запишемо рівняння у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x}$ і відокремимо змінні. Тоді дістанемо рівняння $\dfrac{dy}{y} = \dfrac{dx}{x}$.

Інтегруючи обидві частини цього рівняння (праву по x, а ліву по y), одержуємо

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

або

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|.$$

Потенціюючи, отримуємо $|y| = |C_1||x|$, що еквівалентне рівності $y = \pm C_1 x$. Покладаючи $\pm C_1 = C$, остаточно матимемо

$$y = Cx, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Це сукупність розв'язків заданого рівняння, але тут не міститься розв'язок $y = 0$, який ми втратили при відокремленні змінних. Його можна включити в цю сукупність, якщо вважати, що C набуває також значення $C = 0$. Тоді загальним розв'язком рівняння є $y = Cx, C \in \mathbb{R}$. ▶

Приклад 2. Тіло охололо за 10 хв. від 100^0 до 60^0. Температура оточуючого середовища стала і дорівнює 10^0. Знайти, через скільки хвилин температура тіла дорівнюватиме 20^0.

◀ Позначимо через $f(t)$ температуру тіла в момент часу t, тоді швидкість зміни температури дорівнює $\dfrac{df(t)}{dt}$. Оскільки швидкість охолодження пропорційна різниці температур тіла й оточуючого середовища, то дістанемо рівняння

$$\frac{df}{dt} = k(f - 10),$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Отже, маємо диференціальне рівняння першого порядку з відокремлюваними змінними.

Відокремивши змінні, матимемо $\dfrac{df}{f-10} = kdt$.

Інтегруючи, дістаємо:

$$\ln|f - 10| = kt + |ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$|f - 10| = C_1 e^{kt}, \quad f - 10 = \pm C_1 e^{kt}.$$

Якщо позначити $\pm C_1$ через C, то одержимо загальний розв'язок заданого рівняння

$$f = 10 + Ce^{kt}, \quad \text{де } C \in \mathbb{R}.$$

Для виділення частинного розв'язку скористаємося початковою умовою $f(0) = 100^0$, тоді $Ce^{k \cdot 0} + 10 = 100$, звідки $C = 90$. Отже, частинним розв'язком є функція $f(t) = 10 + 90e^{kt}$.

Цей розв'язок містить невідомий множник k. Скористаємося додатковою умовою: $f(10) = 60^0$. Тоді $60 = 10 + 90e^{kt}$, звідки $e^{10k} = \dfrac{5}{9}$. Отже, шуканий розв'язок рівняння має вигляд

$$f(t) = 90\left(e^{10k}\right)^{\frac{t}{10}} + 10 = 90\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{t}{10}} + 10.$$

Для відповіді на питання, через який час тіло охолоне до 20^0, дістанемо рівняння

$$20 = 90\left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{t}{10}} + 10 \quad \text{або} \quad \left(\frac{5}{9}\right)^{\frac{t}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Прологарифмувавши, одержимо $t = \dfrac{10 \lg 9}{\lg 9 - \lg 5} \approx 37,4$. ▶

Приклад 3. Скласти математичну модель природного росту випуску продукції і знайти функцію, що описує цей ріст.

◀ Нехай певна продукція продається за фіксованою ціною p. Позначимо через $f(t)$ кількість продукції, реалізованої на момент часу t. Тоді на цей момент матимемо дохід, що дорівнює $pf(t)$. Нехай частина вказаного доходу витрачається на інвестиції у виробництво зазаначеної продукції, тобто

$$I(t) = mpf(t), \tag{10}$$

де m – норма інвестицій, $0 < m < 1$.

Якщо припустити, що ринок не насичений, тобто продукція реалізується повністю, то в результаті розширення виробництва буде одержано дохід, частина якого знову використовуватиметься для збільшення випуску продукції. Це приведе до зростання швидкості випуску (акселерації), причому швидкість випуску пропорційна збільшенню інвестицій, тобто

$$f'(t) = lI(t), \tag{11}$$

де $\dfrac{1}{l}$ – норма акселерації. Підставивши (11) у (10), дістанемо

$$f'(t) = kf(t), \tag{12}$$

де $k = lmp$. Отже, процес природного росту випуску продукції описується диференціальним рівнянням (12), яке є рівнянням з відокремлюваними змінними.

Оскільки в початковий момент часу t_0 випуск продукції дорівнював f_0, то маємо початкову умову

$$f(t_0) = f_0. \tag{13}$$

Задача (12), (13) є математичною моделлю природного росту випуску продукції.

Знайдемо загальний розв'язок рівняння (12), відокремивши змінні та проінтегрувавши одержану рівність:

$$\frac{df}{f} = kdt, \quad \int \frac{df}{f} = k \int dt + \ln |C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$\ln |f| = kt + \ln |C_1|, \quad f(t) = \pm C_1 e^{kt}$$

або

$$f(t) = Ce^{kt}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{14}$$

Якщо задовольнити цією функцією умову (13), то одержимо рівняння для знаходження C:

$$f_0 = Ce^{kt}, \quad \text{звідки } C = f_0 e^{-kt_0}.$$

Підставивши значення C у (14), отримаємо розв'язок задачі (12), (13):

$$f(t) = f_0 e^{k(t-t_0)}. \blacktriangleright \tag{15}$$

Зауваження. Математичні моделі мають властивість загальності. Зокрема, формулою (15) описуються процес розмноження бактерій, процес радіоактивного розпаду та інші явища й процеси.

Приклад 4 (модель економічного росту Домара). Нехай $K(t)$ – обсяг обігових коштів на момент часу t, а $I(t)$ – швидкість грошового потоку, тобто $I(t) = \dfrac{dK(t)}{dt}$. Очевидно, що $I(t)$ впливає як на сукупний попит $y(t)$, так і на його зміну. Вважатимемо, що величина попиту $y(t)$ пропорційна швидкості грошового потоку, а величина вартості товарів $f(t)$, які можна виробити (економічний потенціал), пропорційна обсягу обігових коштів $K(t)$. Крім того, припустимо, що $y(t) = f(t)$, тобто весь економічний потенціал f повністю використовується. Скласти математичну модель економічного росту.

$\blacktriangleleft$ Згідно з умовою $y = \dfrac{1}{s}I$, тому $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{s}\dfrac{dI}{dt}$, де s – гранична величина накопичення, а $f(t) = \rho K(t)$, і, отже, $\dfrac{df}{dt} = \rho\dfrac{dK}{dt}$ або $\dfrac{df}{dt} = \rho I$. Оскільки $y(t) = f(t)$, то $\dfrac{dy(t)}{dt} = \dfrac{df(t)}{dt}$. Тому $\dfrac{1}{s}\dfrac{dI(t)}{dt} = \rho I(t)$.

Маємо диференціальне рівняння

$$\frac{dI(t)}{dt} = \rho s I(t),$$

яке описує зазначений економічний процес.

Проінтегруємо це рівняння:

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = \rho s dt, \quad \int \frac{dI(t)}{I(t)} = \int \rho s dt + C_1,$$

$\ln|I(t)| = \rho st + \ln|C|$, $C \neq 0$. Тому, якщо врахувати розв'язок $I(t) = 0$, матимемо, що сукупність розв'язків визначається формулою

$$I(t) = Ce^{\rho st}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Якщо відома швидкість грошового потоку в початковий момент часу $I(0) = I_0$, то одержимо, що

$$I_0 = Ce^{0 \cdot t} \quad \text{або} \quad I_0 = C.$$

Тоді

$$I(t) = I_0 e^{\rho st}, \quad t \geq 0,$$

тобто для підтримання рівноваги між обсягом товарів, що виробляються, і сукупним попитом на них швидкість грошового потоку повинна зростати за експоненціальним законом. ▶

До рівнянь з відокремлюваними змінними зводиться рівняння вигляду

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{16}$$

яке називається **однорідним**.

Запишемо рівняння (16) у вигляді $\dfrac{dy}{dx} = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$ і зробимо заміну

$$\frac{y}{x} = z. \tag{17}$$

Тоді $y = zx$, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dz}{dx}x + z$, а тому рівняння набуде вигляду

$$\frac{dz}{dx}x + z = \varphi(z) \quad \text{або} \quad \frac{dz}{dx}\, x = \varphi(z) - z.$$

Відокремимо змінні $\dfrac{dz}{\varphi(z) - z} = \dfrac{dx}{x}$, $\quad \varphi(z) - z \not\equiv 0$,
і проінтегруємо обидві частини цієї рівності:

$$\int \frac{dz}{\varphi(z) - z} = \ln|x| + C. \tag{18}$$

Обчисливши інтеграл у лівій частині (18), і повернувшись до змінної y, дістанемо загальний розв'язок рівняння (16). При цьому треба також перевірити, чи не втрачено розв'язок, коли $\varphi(z) - z = 0$.

Приклад 5. Розв'язати рівняння $(xy + y^2)dx - x^2 dy = 0$.
◀ Запишемо рівняння у вигляді

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + y^2}{x^2} \quad \text{або} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Зробивши заміну $y = z\ x$, $y' = z'\ x + z$, дістанемо рівняння

$$\frac{dz}{dx}\ x + z = z + z^2, \quad \text{тобто} \quad \frac{dz}{dx}\ x = z^2.$$

Відокремивши змінні й проінтегрувавши, матимемо

$$\frac{dz}{z^2} = \frac{dx}{x}, \quad z \neq 0, \quad \int \frac{dz}{z^2} = \int \frac{dx}{x} + \ln|C|, \quad C \neq 0,$$

$$-\frac{1}{z} = \ln|x| + \ln|C|, \quad -\frac{1}{z} = \ln|Cx|, \quad C \neq 0.$$

Якщо повернутись до змінної y, то одержимо сукупність розв'язків нашого рівняння.

Оскільки при відокремленні змінних ми ділили на z, то могли втратити розв'язок $z = 0$ або $y = 0$. Підставивши $y = 0$ у вихідне рівняння, одержимо тотожність, а це означає, що $y = 0$ є розв'язком рівняння. Цей розв'язок не міститься у сукупності $y = -\dfrac{x}{\ln|Cx|}$, $C \neq 0$, а тому його треба дописати. Отже, загальний розв'язок рівняння

$$y = -\frac{x}{\ln|Cx|}, \quad C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad y = 0. \quad ▶$$

2.2. Лінійні рівняння першого порядку

Диференціальне рівняння першого порядку називається **лінійним**, якщо його можна записати у вигляді

$$y' = p(x)y + q(x), \tag{19}$$

де $p(x)$ і $q(x)$ – задані функції, які визначені й неперервні на відрізку $[a;b]$.

Назва рівняння пояснюється тим, що невідома функція y та її похідна y' входять у рівняння лінійно, тобто у першому степені.

Якщо $q(x) = 0$, $x \in [a;b]$, то рівняння (19) називається **лінійним однорідним** рівнянням, якщо ж $q(x) \neq 0$, $x \in [a;b]$, то – **лінійним неоднорідним**.

Для знаходження загального розв'язку рівняння (19) скористаємося **методом варіації довільної сталої**.

Розглянемо спочатку лінійне однорідне рівняння

$$y' = p(x)y, \tag{20}$$

яке є рівнянням з відокремлюваними змінними. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо

$$\frac{dy}{y} = p(x)dx, \quad \ln|y| = \int p(x)dx + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$y = C_1 e^{\int p(x)dx}, \quad C_1 \neq 0.$$

Оскільки, відокремлюючи змінні, ми втратили розв'язок $y = 0$, то сукупність розв'язків рівняння (20) має вигляд

$$y = Ce^{\int p(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (19) у формулі (21) замість сталої C візьмемо деяку диференційовну функцію $z(x)$:

$$y = z(x)e^{\int p(x)dx}. \tag{22}$$

Очевидно, що (22) буде розв'язком рівняння (19), коли

$$z'(x)e^{\int p(x)dx} + z(x)e^{\int p(x)dx} \cdot p(x) = p(x)z(x)e^{\int p(x)dx} + q(x)$$

або

$$z'(x) = q(x)e^{-\int p(x)dx}.$$

Звідси, проінтегрувавши, дістанемо

$$z(x) = \int q(x)e^{-\int p(x)dx} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}.$$

Якщо підставити знайдену функцію z в (22), то одержимо загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$y = C_2 e^{\int p(x)dx} + \left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\right) e^{\int p(x)dx}, \quad C_2 \in \mathbb{R}. \qquad (23)$$

З формули (23) випливає, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння є сумою загального розв'язку $C_2 e^{\int p(x)dx}$ відповідного лінійного рівняння (20) і частинного розв'язку $\left(\int q(x)e^{-\int p(x)dx}dx\right) e^{\int p(x)dx}$ лінійного неоднорідного рівняння (19).

Приклад 6. Розв'язати рівняння $y' + 3y = e^{2x}$.

◀ Розв'яжемо спочатку відповідне лінійне однорідне рівняння $y' + 3y = 0$. Відокремлюючи змінні та інтегруючи, дістаємо:

$$\frac{dy}{y} = -3dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -3\int dx + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$\ln|y| = -3x + \ln|C_1|, \quad y = C_1 e^{-3x},\ C_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Оскільки ми, відокремлюючи змінні, ділили на $y = 0$, то щоб не втратити розв'язок $y = 0$, вважатимемо, що C_1 може дорівнювати нулю, тобто $y = Ce^{-3x}, \quad C \in \mathbb{R}$.

Шукатимемо загальний розв'язок вихідного рівняння у вигляді $y = z(x)e^{-3x}$. Після підстановки цієї функції в рівняння, одержимо

$$z'(x)e^{-3x} - z(x)e^{-3x} \cdot 3 + 3z(x)e^{-3x} = e^{2x} \quad \text{або} \quad z'(x) = e^{5x}.$$

Звідси випливає, що $z(x) = \dfrac{1}{5}e^{5x} + C_2, \quad C_2 \in \mathbb{R}$. Отже, загальний розв'язок рівняння $y = C_2 e^{-3x} + \frac{1}{5}e^{2x},\ C_2 \in \mathbb{R}$. ▶

До лінійного рівняння зводиться рівняння вигляду

$$y' = p(x)y + q(x)y^{\alpha}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,\ 1\}, \qquad (24)$$

яке називається **рівнянням Бернуллі**.

Якщо $\alpha = 0$, то рівняння Бернуллі перетворюється у лінійне рівняння (19), а при $\alpha = 1$ воно переходить у рівняння з відокремлюваними змінними.

Вважаючи, що $y \neq 0$, $\alpha \neq 0$, $\alpha \neq 1$, поділимо обидві частини рівняння (21) на y^{α}. Тоді дістанемо рівняння

$$y^{-\alpha} y' = p(x) y^{1-\alpha} + q(x). \tag{25}$$

Зробимо підстановку $z(x) = y^{1-\alpha}$. Оскільки $z'(x) = (1-\alpha) y^{-\alpha} \cdot y'$, то рівняння (25) набуде вигляду

$$z'(x) = p(x)(1-\alpha) z(x) + (1-\alpha) q(x),$$

а це означає, що рівняння (24) зведено до лінійного рівняння.

Приклад 7. Розв'язати рівняння $xy'(x) = y(x) + y^2(x)$.

◀ Запишемо рівняння у вигляді $y'(x) = \dfrac{1}{x} y(x) + \dfrac{1}{x} y^2(x)$.

Це рівняння Бернуллі, де $\alpha = 2$. Тому зробимо заміну $z = \dfrac{1}{y}$. Тоді $z' = -\dfrac{1}{y^2} y'$, а отже, рівняння набуде вигляду $z' + \dfrac{z}{x} = -\dfrac{1}{x}$.

Відповідне однорідне рівняння $z' + \dfrac{z}{x} = 0$ має загальний розв'язок $z(x) = \dfrac{C}{x}$, $C \in \mathbb{R}$. Розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $z(x) = \dfrac{C(x)}{x}$. Тоді $z' = \dfrac{C'(x)}{x} - \dfrac{C(x)}{x^2}$, а тому матимемо рівняння для знаходження C:

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = -\frac{1}{x} \quad \text{або} \quad C'(x) = -1.$$

Звідси випливає, що $C(x) = -x + C_1$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Отже, $z(x) = \dfrac{C_1}{x} - 1$. Оскільки $z = \dfrac{1}{y}$, то $\dfrac{1}{y} = \dfrac{C_1}{x} - 1$ або $y = \dfrac{x}{C_1 - x}$, $C_1 \in \mathbb{R}$. Це і є загальний розв'язок заданого рівняння. ▶

3. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

3.1. Загальна теорія лінійних диференціальних рівнянь

Диференціальне рівняння вигляду

$$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = b(x) \tag{26}$$

називається **лінійним диференціальним рівнянням другого порядку**. Тут коефіцієнти рівняння $a_0(x)$, $a_1(x)$, $a_2(x)$ і вільний член $b(x)$ – задані функції аргументу x. Вважатимемо, що a_0, a_1, a_2 і b – неперервні функції на $[a;b]$ і $a_0(x) \neq 0$, $x \in [a;b]$. Поділимо рівняння (26) на $a_0(x)$ і введемо позначення $\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)} = p(x)$, $\dfrac{a_2(x)}{a_0(x)} = q(x)$, $\dfrac{b(x)}{a_0(x)} = f(x)$. Тоді рівняння набуде вигляду

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{27}$$

Якщо $f(x) \equiv 0$, $x \in [a;b]$, то рівняння (27) називається **лінійним однорідним** і воно має вигляд

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{28}$$

Якщо ж $f(x) \neq 0$, $x \in [a;b]$, то рівняння (27) називається **лінійним неоднорідним рівнянням**.

Відповідь на питання про існування та єдиності розв'язку рівняння (26), який задовольняє початкові умови

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \tag{29}$$

дає **теорема Коші**: *якщо коефіцієнти a_0, a_1, a_2 і права частина b лінійного рівняння (26) неперервні на відрізку $[a;b]$, причому коефіцієнт a_0 не перетворюється в нуль у жодній точці цього відрізка, то якими б не були початкові умови (29), де $x_0 \in (a;b)$,* *існує єдиний розв'язок рівняння (26), який задовольняє початкові умови (29).*

При побудові загального розв'язку рівняння (26) важливу роль відіграє поняття лінійно незалежних розв'язків рівняння.

Два розв'язки y_1 і y_2 рівняння (28) називаються **лінійно залежними на відрізку** $[a;b]$, якщо існують числа α_1 і α_2 такі, що $\alpha_1^2+\alpha_2^2\neq 0$ і

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)=0, \quad x\in[a;b]. \tag{30}$$

Якщо ж рівність (30) виконується тоді й тільки тоді, коли $\alpha_1=0$ і $\alpha_2=0$, то розв'язки y_1 і y_2 називаються **лінійно незалежними**.

Виникає запитання, як можна перевірити, чи є частинні розв'язки y_1 і y_2 лінійно незалежними на відрізку $[a;b]$, тобто утворюють **фундаментальну систему** розв'язків рівняння. Це можна зробити за допомогою **визначника Вронського**

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

Правильними є такі твердження:

1) *якщо функції y_1 і y_2 лінійно залежні на відрізку $[a;b]$, то визначник Вронського дорівнює нулю на цьому відрізку;*

2) *якщо лінійно незалежні функції y_1 і y_2 є розв'язками лінійного однорідного рівняння (28) з неперервними на відрізку $[a;b]$ коефіцієнтами, то визначник Вронського $W(x)$ не може перетворитися в нуль у жодній точці заданого відрізка.*

Приклад 1. Довести, що функції $y_1=e^{k_1x}$ і $y_2=e^{k_2x}$ лінійно незалежні на довільному відрізку числової осі при $k_1\neq k_2$.

◀ Припустимо, що ці функції лінійно залежні на відрізку $[a;b]$, тобто

$$\alpha_1 e^{k_1x}+\alpha_2 e^{k_2x}=0, \quad x\in[a;b],$$

де, наприклад, $\alpha_2\neq 0$. Тоді

$$e^{(k_2-k_1)x}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2}, \quad x\in[a;b].$$

Продиференціювавши цю рівність, одержимо, що $(k_2-k_1)e^{(k_2-k_1)x}=0$, $x\in[a;b]$, а це неможливо, оскільки $k_1\neq k_2$, $e^{(k_2-k_1)x}\neq 0$, $x\in[a;b]$. ▶

Аналогічно можна довести, що: 1) функції $y_1 = e^{kx}$, $y_2 = xe^{kx}$ лінійно незалежні на довільному відрізку $[a;b] \subset \mathbb{R}$; 2) функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$ лінійно незалежні на довільному відрізку $[a;b] \subset \mathbb{R}$, $\{k,\alpha,\beta\} \subset \mathbb{R}$.

Очевидно, що коли функції y_1 і y_2 лінійно незалежні на $[a;b]$, то жодна з цих функцій не дорівнює тотожно нулю на цьому відрізку.

Виявляється, що для одержання загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку досить мати два будь-які лінійно незалежні розв'язки цього рівняння.

Теорема 1. *Якщо y_1 і y_2 – довільні лінійно незалежні розв'язки лінійного однорідного рівняння другого порядку (28), то його загальним розв'язком є функція*

$$y = C_1y_1 + C_2y_2, \tag{31}$$

де C_1 і C_2 – довільні сталі.

◀ Доведемо, що функція, яка визначається формулою (31), є розв'язком рівняння (28). Підставивши (31) в (28), матимемо

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + p(x)(C_1y + C_2y)' + q(x)(C_1y_1 + C_2y_2) =$$
$$= C_1(y_1'' + p(x)y_1' + q(x)y_1) + C_2(y_2'' + p(x)y_2' + q(x)y_2) =$$
$$= C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 0 = 0.$$

Можна довести, що формула (31) визначає всі розв'язки рівняння (28). ▶.

Відповідь на те, яка конструкція загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (27), дає твердження.

Теорема 2. *Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння (27) є сумою його частинного розв'язку і загального розв'язку відповідного лінійного однорідного рівняння (28), тобто*

$$y_{\text{з.н.}} = y_{\text{з.о.}} + y_{\text{ч.н.}}. \tag{32}$$

◀ Нехай $y_{\text{ч.н.}} \equiv \widetilde{y}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння (27), тобто

$$\widetilde{y}'' + p(x)\widetilde{y}' + q(x)\widetilde{y} = f(x). \tag{33}$$

Зробимо в рівнянні (27) заміну

$$y = z + \widetilde{y}. \tag{34}$$

Тоді матимемо

$$\widetilde{y}'' + p(x)\widetilde{y}' + q(x)\widetilde{y} + z'' + p(x)z' + q(x)z = f(x),$$

або згідно з (33)

$$z'' + p(x)z' + q(x)z = 0. \tag{35}$$

Отже, розв'язування рівняння (27) ми звели до розв'язування рівняння (35), яке з точністю до позначень збігається з рівнянням (28). Оскільки загальним розв'язком рівняння (35) є функція (31), то одержимо, що загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння (27) має вигляд

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \widetilde{y},$$

де y_1, y_2 – лінійно незалежні розв'язки рівняння (28) або (35). ▶

З теорем 1 і 2 випливає, що для знаходження загального розв'язку лінійного неоднорідного рівняння (27) треба знайти два лінійно незалежні розв'язки відповідного однорідного рівняння (28) і деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння (27). Доведено, що для лінійного однорідного рівняння (28) з неперервними на відрізку $[a; b]$ коефіцієнтами завжди існують два лінійно незалежні розв'язки заданого рівняння. Для лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами лінійно незалежні розв'язки знаходяться відносно просто.

3.2. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо рівняння

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{36}$$

де p і q – сталі.

Шукатимемо частинні розв'язки рівняння (36) у вигляді

$$y = e^{\lambda x}. \tag{37}$$

Диференціюючи цю функцію двічі й підставляючи вирази $y = e^{\lambda x}$, $y' = \lambda e^{\lambda x}$ і $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ у рівняння (36), дістанемо рівність

$$e^{\lambda x}(\lambda^2 + p\lambda + q) = 0.$$

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, то, скоротивши на $e^{\lambda x}$, одержимо квадратне рівняння

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0. \tag{38}$$

Рівняння (38) називається **характеристичним рівнянням** для диференціального рівняння (36). З цього рівняння визначаються ті значення λ, при яких функція $e^{\lambda x}$ є розв'язком рівняння (36).

Характеристичне рівняння є рівнянням другого степеня і, отже, має два корені. Ці корені можуть бути або дійсними різними, або дійсними й рівними, або комплексно спряженими.

Розглянемо, який вигляд має **фундаментальна система** частинних розв'язків, тобто сукупність лінійно незалежних частинних розв'язків, у кожному з цих випадків.

I. Корені характеристичного рівняння (38) дійсні та різні: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. У цьому випадку згідно з формулою (37) знаходимо два частинні розв'язки $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ і $y_2 = e^{\lambda_2 x}$. Ці два розв'язки лінійно незалежні (приклад 1, підрозділ 3.1 цього розділу), а тому вони утворюють фундаментальну систему. Тоді загальний розв'язок, як випливає з теореми 1, має вигляд

$$y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x},\ \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

II. Корені характеристичного рівняння (38) кратні, тобто $\lambda = \lambda_2$. У цьому випадку, скориставшись формулою (37), дістанемо тільки один частинний розв'язок $y_1 = e^{\lambda_1 x}$. За другий частинний розв'язок візьмемо функцію $y_2 = xe^{\lambda_1 x}$, яка лінійно незалежна з y_1 на будь-якому відрізку $[a;b]$ числової осі. Отже, ці функції утворюють фундаментальну систему частинних розв'язків. Тому загальний розв'язок рівняння (36) має вигляд

$$y = (C_1 + C_2 x)e^{\lambda_1 x},\ \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

III. Дискримінант характеристичного рівняння $\dfrac{p^2}{4} - q < 0$. Тоді воно має комплексні корені $\lambda_1 = -\dfrac{p}{2} + i\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$, $\lambda_2 = -\dfrac{p}{2} - i\sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$, де $i = \sqrt{-1}$.

Для зручності позначимо $\alpha = -\dfrac{p}{2}$, $\beta = \sqrt{q - \dfrac{p^2}{4}}$. Тоді $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$. У цьому випадку фундаментальною системою розв'язків рівняння є функції $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$. Тому загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$y = e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x),\ \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y'' + 7y' - 8y = 0$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 7\lambda - 8 = 0$ має корені $\lambda_1 = -8$, $\lambda_2 = 1$, а тому фундаментальна система розв'язків $y_1 = e^{-8x}$, $y_2 = e^{x}$. Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$y = C_1 e^{-8x} + C_2 e^{x},\ \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad ▶$$

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння $y'' + 6y' + 9y = 0$, який задовольняє початкові умови $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

◀ Спочатку знайдемо загальний розв'язок рівняння. Для цього складемо характеристичне рівняння $\lambda^2 + 6\lambda + 9 = 0$, що має корені $\lambda_1 = \lambda_2 = -3$. Тоді загальним розв'язком є

$$y = e^{-3x}(C_1 + C_2 x),\ \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Сталі C_1 і C_2 знайдемо, скориставшись початковими умовами. Оскільки

$$y' = -3e^{-3x}(C_1 + C_2 x) + C_2 e^{-3x},$$

то маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ -3C_1 + C_2 = 2, \end{cases}$$

звідки $C_1 = 0$, $C_2 = 2$.

Шуканим розв'язком є $y = 2xe^{-3x}$. ▶

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + 10y = 0$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 0$ має корені

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-10} = 1 \pm \sqrt{9}\sqrt{-1} = 1 \pm 3i.$$

Фундаментальна система частинних розв'язків $y_1 = e^x \cos 3x$, $y_2 = e^x \sin 3x$. Тоді загальний розв'язок має вигляд

$$y = e^x(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x),\ \{C_1,\, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad ▶$$

Приклад 5. Розв'язати рівняння $y'' + 2y = 0$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^2 + 2 = 0$ має корені $\lambda_1 = \sqrt{-2} = i\sqrt{2}$, $\lambda_2 = -\sqrt{-2} = -i\sqrt{2}$. Тут $\alpha = 0$, $\beta = \sqrt{2}$. Фундаментальна система розв'язків $y_1 = \cos\sqrt{2}x$, $y_2 = \sin\sqrt{2}x$. Загальний розв'язок рівняння

$$y = C_1 \cos\sqrt{2}x + C_2 \sin\sqrt{2}x,\ \{C_1,\, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad ▶$$

3.3. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Розглянемо тепер рівняння

$$y'' + py' + qy = f(x), \tag{39}$$

де p, q – дійсні числа, а f – неперервна функція на відрізку $[a; b]$. Як відомо з попереднього, загальний розв'язок рівняння (39) є сумою частинного розв'язку неоднорідного рівняння й загального розв'язку відповідного однорідного рівняння. Загальний розв'язок однорідного рівняння ми вміємо знаходити, а тому залишилося розглянути питання знаходження частинного розв'язку лінійного неоднорідного рівняння. Якщо права частина f рівняння (39) многочлен, або показникова функція, або тригонометрична функція $\cos\beta x$ чи $\sin\beta x$, або лінійна комбінація цих функцій, то частинний розв'язок можна знайти за допомогою **методу невизначених коефіцієнтів**.

I. Права частина рівняння (39) $f(x) = P_n(x)$, де $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ – многочлен степеня n.

У цьому випадку частинний розв'язок $y_{\text{ч.н.}}(x) \equiv \widetilde{y}(x)$ шукатимемо у вигляді

$$\widetilde{y} = Q_n(x)x^r, \tag{40}$$

де Q_n – многочлен того самого степеня n, що й многочлен P_n, але з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють нулю. Для знаходження коефіцієнтів многочлена Q_n треба підставити (40) в (39) і прирівняти коефіцієнти при однакових степенях x справа й зліва в одержаній рівності.

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 2y' + y = x + 1$.

◀ Розглянемо відповідне однорідне рівняння $y'' - 2y' + y = 0$ і знайдемо корені характеристичного рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$. Маємо $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, а тому загальний розв'язок однорідного рівняння

$$y_{\text{з.о.}}(x) = (C_1 + C_2x)e^x, \ \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Оскільки права частина рівняння є многочленом першого степеня і серед коренів характеристичного рівняння немає нульових, то частинний розв'язок неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді

$$\widetilde{y} = (Ax + B)x^0 = Ax + B.$$

Підставимо цей вираз в неоднорідне рівняння і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$(Ax + B)'' - 2(Ax + B)' + (Ax + B) = x + 1,$$

$$-2A + Ax + B = x + 1 \quad \text{або} \quad Ax + (B - 2A) = x + 1,$$

звідки одержуємо, що

$$\begin{cases} A = 1, \\ B - 2A = 1, \end{cases} \quad \text{або} \quad A = 1, \quad B = 3.$$

Отже, частинним розв'язком неоднорідного рівняння є $\widetilde{y} = x + 3$, а тому його загальний розв'язок має вигляд

$$y = (C_1 + C_2 x)e^x + x + 3,\ \{C_1,\, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

Приклад 7. Відомо, що функція попиту $q = 3p'' - p' - 2p + 18$, а функція пропозицій $s = 4p'' + p' + 3p + 3$, де $p(t)$ – ціна товару, $p'(t)$ – тенденція формування ціни, $p''(t)$ – темп зміни ціни на момент часу t. Знайти залежність ціни p від часу t за умови, що попит і пропозиція зрівноважуються, а $p(0) = 4$, $p'(0) = 1$.

◀ Оскільки рівновага ринку характеризується рівністю $q = s$, то маємо рівняння

$$3p'' - p' - 2p + 18 = 4p'' + p' + 3p + 3$$

або

$$p'' + 2p' + 5p = 15.$$

Одержане рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням другого порядку зі сталими коефіцієнтами.

Розв'яжемо спочатку лінійне однорідне рівняння $p'' + 2p' + 5p = 0$. Оскільки коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ є $\lambda_{1,2} = -1 \pm 2i$, то загальний розв'язок рівняння має вигляд

$$p(t) = C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\sin 2t,\ \{C_1,\, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Частинний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $\widetilde{p} = A$. Після підстановки $\widetilde{p}$ в рівняння матимемо $5A = 15$, тобто $A = 3$, тому $\widetilde{p} = 3$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння

$$p(t) = C_1 e^{-t}\cos 2t + C_2 e^{-t}\sin 2t + 3,\ \{C_1,\, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Знайдемо сталі C_1, C_2, скориставшись початковими даними $p(0) = 4$, $p'(0) = 1$. Маємо $4 = C_1 + 3$ або $C_1 = 3$. Оскільки $p'(t) = -(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t)e^{-t} + (-2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t)e^{-t}$, то $1 = -C_1 + 2C_2$, і отже, $C_2 = 1$. Тому

$$p(t) = e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t) + 3. \quad \blacktriangleright$$

II. Права частина рівняння (39) $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, де P_n – многочлен степеня n, а коефіцієнт α у показнику – дійсне число.

У цьому випадку частинний розв'язок $\widetilde{y}$ неоднорідного рівняння треба шукати у вигляді

$$\widetilde{y} = Q_n(x) e^{\alpha x} \cdot x^r.$$

Тут Q_n – многочлен того самого степеня, що й многочлен P_n, але з невідомими коефіцієнтами, а r – число коренів характеристичного рівняння, які дорівнюють α.

Зауваження. При $\alpha = 0$ маємо випадок I, оскільки $f(x) = e^{0 \cdot x} P_n(x) = P_n(x)$.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 3y = xe^x$.

◀ Складаємо характеристичне рівняння і знаходимо його корені: $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.о.}} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}, \ \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}.$$

Оскільки серед коренів характеристичного рівняння є тільки один корінь $\lambda = \alpha = 1$, то $r = 1$ і частинний розв'язок $\widetilde{y}$ треба шукати у вигляді

$$\widetilde{y} = x(Ax + B)e^x = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Знаходимо $\widetilde{y}'$ і $\widetilde{y}''$: $\widetilde{y}' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$, $\widetilde{y}'' = 2Ae^x + 2(2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$. Підставляючи вирази для $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$ і $\widetilde{y}''$ у задане рівняння і скорочуючи на $e^x \neq 0$, одержуємо тотожність:

$$2A + 2(2Ax + B) + (Ax^2 + Bx) -$$

$$-4(2Ax + B) - 4(Ax^2 + Bx) + 3(Ax^2 + Bx) = x$$

або

$$-4Ax + 2A - 2B = x.$$

Прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях x, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} -4A = 1, \\ 2A - 2B = 0, \end{cases}$$

з якої знаходимо $A = -\frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Отже, $\widetilde{y} = -\frac{1}{4}(x^2 + x)e^x$. Тоді загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.н.}} = C_1 e^x + C_2 e^{3x} - \frac{1}{4}(x^2 + x)e^x, \ \{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

III. Права частина рівняння (39) $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + P_m(x)\sin\beta x)$, де P_n – многочлен степеня n, а P_m – многочлен степеня m.

У цьому випадку частинний розв'язок треба шукати у вигляді

$$y = x^r e^{\alpha x}(Q_s(x)\cos\beta x + R_s(x)\sin\beta x),$$

де Q_s і R_s – многочлени степеня $s = \max\{m, n\}$, а r – число коренів характеристичного рівняння, які збігаються з $\alpha \pm \beta i$.

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = 5\sin 2x$.

◀ Коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + 4 = 0$ є $\lambda_1 = 2i$ і $\lambda_2 = -2i$. Загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд $y_{\text{з.о.}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Права частина $f(x) = 5\sin 2x$ належить до розглядуваного типу, бо її можна записати у вигляді $f(x) = 0\cdot\cos 2x + 5\sin 2x$. Зауважимо, що $\alpha \pm \beta i = 0 \pm 2i$, і отже, $r = 1$, а $s = 0$. Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$\widetilde{y} = x(A\cos 2x + B\sin 2x).$$

Диференціюючи і підставляючи $\widetilde{y}$, $\widetilde{y}'$ і $\widetilde{y}''$ в неоднорідне рівняння, отримуємо

$$\widetilde{y}' = (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x)x + (A\cos 2x + B\sin 2x),$$

$$\widetilde{y}'' = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + (-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) +$$
$$+(-2A\sin 2x + 2B\cos 2x) = (-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x +$$
$$+(-4A\sin 2x + 4B\cos 2x);$$

$$(-4A\cos 2x - 4B\sin 2x)x + (-4A\sin 2x + 4B\cos 2x) +$$
$$+(4A\cos 2x + 4B\sin 2x)x = 5\sin 2x.$$

Після зведення подібних членів, дістанемо

$$-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 5\sin 2x.$$

Прирівнявши коефіцієнти при $\sin 2x$ і $\cos 2x$, одержимо

$$\begin{cases} -4A = 5, \\ 4B = 0, \end{cases}$$

звідки $A = -\dfrac{5}{4}$, $B = 0$. Отже, $y = -\dfrac{5}{4}x\cos 2x$, і загальний розв'язок неоднорідного рівняння запишеться у вигляді

$$y_{\text{з.н.}} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x - \frac{5}{4}x\cos 2x,\ \{C_1,\ C_2\} \subset \mathbb{R}. \quad \blacktriangleright$$

Зауваження 1. Якщо $\widetilde{y}_1$ – розв'язок рівняння

$$y'' + py' + qy = f_1(x),$$

а $\widetilde{y}_2$ – розв'язок рівняння

$$y'' + py' + qy = f_2(x),$$

то сума $\widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2$ є розв'язком рівняння

$$y'' + py' + qy = f_1(x) + f_2(x).$$

Зауваження 2. У випадку, коли права частина f не належить до попередніх типів, для знаходження частинного розв'язку неоднорідного рівняння використовують метод варіації сталих, який дозволяє знаходити частинний розв'язок неоднорідного рівняння за відомим загальним розв'язком однорідного рівняння.

Розглянемо лінійне неоднорідне рівняння (39). Нехай знайдено загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_{\text{з.о.}} = C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$, де y_1, y_2 – частинні розв'язки, які утворюють фундаментальну систему. Візьмемо в цьому розв'язку замість сталих C_1 і C_2 деякі функції z_1 і z_2 і підберемо їх так, щоб функція

$$\widetilde{y} = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x) \tag{41}$$

була розв'язком неоднорідного рівняння (39), тобто при підстановці (41) разом з $\widetilde{y}'$ і $\widetilde{y}''$ у рівняння (39) повинна одержатися тотожність.

Продиференціювавши $\widetilde{y}$ по x, дістанемо

$$\widetilde{y}' = z_1'(x)y_1(x) + z_2'(x)y_2(x) + z_1(x)y_1'(x) + z_2(x)y_2'(x). \tag{42}$$

Оскільки ми ввели дві невідомі функції z_1 і z_2, то для їхнього визначення треба мати два рівняння. За одне рівняння візьмемо таке:

$$z_1'(x)y_1(x) + z_2'(x)y_2(x) = 0. \tag{43}$$

Тоді вираз (42) для $\widetilde{y}'$ спроститься і набуде вигляду

$$\widetilde{y}' = z_1(x)y_1'(x) + z_2(x)y_2'(x). \tag{44}$$

Диференціюючи цю рівність ще раз, одержуємо

$$\widetilde{y}'' = z_1'(x)y_1'(x) + z_1(x)y_1''(x) + z_2'(x)y_2'(x) + z_2(x)y_2''(x). \tag{45}$$

Підставляючи (41), (44) і (45) у рівняння (39), дістаємо

$$(z_1'(x)y_1'(x) + z_1(x)y_1''(x) + z_2'(x)y_2'(x) + z_2(x)y_2''(x))+$$

$$+p(x)(z_1(x)y_1'(x)+z_2(x)y_2'(x))+q(x)(z_1(x)y_1(x)+z_2(x)y_2(x)) = f(x),$$

або, групуючи члени,

$$z_1(x)(y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x)) + z_2(x)(y_2''(x)+$$

$$+p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x)) + z_1'(x)y_1'(x) + z_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{46}$$

Оскільки функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ є розв'язками однорідного рівняння, то

$$\begin{matrix} y_1''(x) + p(x)y_1'(x) + q(x)y_1(x) = 0, \\ y_2''(x) + p(x)y_2'(x) + q(x)y_2(x) = 0, \end{matrix} \qquad x \in [a; b].$$

Тому рівність (46) набуде вигляду

$$z_1'(x)y_1'(x) + z_2'(x)y_2'(x) = f(x). \tag{47}$$

Рівняння (47) є другим рівнянням, яке повинні задовольняти функції z_1 і z_2.

Отже, для похідних від функцій $z_1(x)$ і $z_2(x)$ маємо систему рівнянь

$$\begin{cases} z_1'(x)y_1(x) + z_2'(x)y_2(x) = 0, \\ z_1'(x)y_1'(x) + z_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{48}$$

Визначником цієї системи є визначник Вронського

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix},$$

який не дорівнює нулю для $x \in [a;b]$, бо $y_1(x)$ і $y_2(x)$ – фундаментальна система розв'язків. Тому z_1' і z_2' визначаються з системи (48) однозначно: $z_1'(x) = \varphi_1(x)$, $z_2'(x) = \varphi_2(x)$. Проінтегрувавши ці рівності, знайдемо z_1 і z_2 і підставимо їх в (41). У результаті матимемо частинний розв'язок рівняння (39).

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$.

◀ Характеристичне рівняння $\lambda^2+4 = 0$ має корені $\lambda_1 = 2i$, $\lambda_2 = -2i$, а тому фундаментальну систему утворюють функції $y_1(x) = \sin 2x$, $y_2(x) = \cos 2x$. Звідси випливає, що загальний розв'язок лінійного однорідного рівняння має вигляд $y_{\text{з.о.}} = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$, $\{C_1, C_2\} \subset \mathbb{R}$.

Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння згідно з формулою (41) запишемо у вигляді

$$\widetilde{y} = z_1(x)\sin 2x + z_2(x)\cos 2x. \tag{49}$$

Система (48) для знаходження $z_1'(x)$ і $z_2'(x)$ у цьому випадку є такою:

$$\begin{cases} z_1'(x)\sin 2x + z_2'(x)\cos 2x = 0, \\ 2z_1'(x)\cos 2x - 2z_2'(x)\sin 2x = \dfrac{1}{\cos 2x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему за формулами Крамера:

$$z_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \cos 2x \\ \dfrac{1}{\cos 2x} & -2\sin 2x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}} = \frac{-1}{-2(\sin^2 2x + \cos^2 2x)} = \frac{1}{2},$$

$$z_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \sin 2x & 0 \\ 2\cos 2x & \dfrac{1}{\cos 2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sin 2x & \cos 2x \\ 2\cos 2x & -2\sin 2x \end{vmatrix}} = \frac{\operatorname{tg} 2x}{-2(\sin^2 2x + \cos^2 2x)} =$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2x.$$

Інтегруючи, дістаємо $z_1(x) = \frac{1}{2}x$, $z_2(x) = \frac{1}{4}\ln|\cos 2x|$. Довільних сталих не пишемо, бо шукаємо частинний розв'язок.

Підставивши знайдені $z_1(x)$ і $z_2(x)$ у (49), отримуємо частинний розв'язок $\widetilde{y}$ заданого рівняння $\widetilde{y} = \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x \cdot \ln|\cos 2x|$.

Отже, загальний розв'язок неоднорідного рівняння має вигляд

$$y_{\text{з.н.}} = C_1\sin 2x + C_2\cos 2x + \frac{1}{2}x\sin 2x + \frac{1}{4}\cos 2x\ln|\cos 2x|,\ \{C_1,\ C_2\} \subset \mathbb{R}.\ \blacktriangleright$$

Вправи

1. Розв'язати рівняння з відокремлюваними змінними:
1) $xy' - y = 0$, якщо $y = 4$ при $x = -2$;
2) $yy' + x = 0$; 3) $x + xy + y'(y + xy) = 0$;
4) $x^2y' + y = 0$, $y = e$ при $x = 1$;
5) $(x+1)y' + xy = 0$;
6) $2y'\sqrt{x} = y$, $y = 1$ при $x = 4$;
7) $(1 + e^x)yy' = e^x$, $y = 1$ при $x = 0$;
8) $x^2y' + y^2 = 0$, $y = 1$ при $x = -1$;
9) $y' = (2y+1)\operatorname{ctg} x$, $y = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$;
10) $(1 + y^2)dx - xydy = 0$, $y = 1$ при $x = 2$.

2. Розв'язати однорідне рівняння:
1) $y' = \frac{y^2}{x^2} - \frac{y}{x}$; 2) $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}$, якщо $y = \frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{4}$;
3) $xy'\cos\frac{y}{x} = y\cos\frac{y}{x} - x$; 4) $y' = \frac{y}{x} - 1$;
5) $(x^2 + y^2)dx - 2xydy = 0$; 6) $(x - y)y - x^2y' = 0$;
7) $(x^2 + 2xy) + xyy' = 0$.

3. Розв'язати лінійне рівняння першого порядку:
1) $y' - \frac{3y}{x} = x$; 2) $xy' + y = \ln x + 1$;

3) $y' + \dfrac{2y}{x} = x^3$; 4) $y' + y = \cos x$;
5) $y' = x + y$; 6) $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$;
7) $y' - y = e^x$.

4. Розв'язати рівняння Бернуллі:
1) $xy' + y = -x^2y^2$; 2) $xy' - y = y^3$;
3) $y' + xy = xy^3$; 4) $xy' + 2y = x^5y^2$.

5. Нехай є N потенційних покупців певного товару. Після рекламного оголошення інформація про цей товар поширюється через спілкування покупців між собою. Враховуючи, що швидкість зміни числа покупців, які знають про товар, пропорційна як числу проінформованих про товар, так і числу покупців, які про нього нічого не знають, скласти математичну модель задачі і знайти закон залежності від часу числа проінформованих покупців .

6. Граничні і повні витрати виробництва задовольняють рівняння $y' - 4y + x = 0$. Знайти функцію y повних витрат, що задовольняє умову $y(0) = 0$.

7. Відомо, що ціна p на певний товар залежить від часу t, а попит q і пропозиція s визначаються формулами $q = 4p' - 2p + 39$, $s = 44p' + 2p - 1$. Знайти, якою повинна бути ціна p, щоб попит і пропозиція зрівноважувалися, якщо $p(0) = 1$.

8. За який проміжок часу відбудеться подвоєння сукупного суспільного продукту P, якщо його залежність від часу визначається рівнянням розширеного відтворення $\dfrac{dP}{dt} = 0,1P$.

9. Знайти обсяг реалізованої продукції $y(t)$ і його значення при $t = 2$, якщо відомо, що функція попиту має вигляд $p(y) = 3 - 2y$, норма акселерації $\dfrac{1}{l} = 1,5$, норма інвестицій $m = 0,6$, $y(0) = 1$.

10. Про попит обсягом x одиниць певного товару вартістю p за одиницю товару відомо, що $\dfrac{p}{x}\dfrac{dx}{dp} = \dfrac{x - 200}{x}$. Визначити функцію попиту вигляду $p = f(x)$, якщо $0 < x < 200$ і $p = 5$, коли $x = 190$.

11. Компанія має на складі 1680 приладів, причому вона виробляє 900, а реалізує 800 приладів щомісячно. Попит на продукцію знижується зі швидкістю 10 приладів на місяць. З якою швидкістю v повинно скорочуватись виробництво, щоб на складі через 12 місяців не залишилося жодного нереалізованого приладу?

12. Розв'язати рівняння:
1) $y'' - 4y' + 3y = 0$; 2) $y'' - 4y' + 4y = 0$;

3) $y'' - 8y' + 25y = 0$; 4) $y'' + 4y' = 0$;
5) $y'' + 2y' + 2y = 0$; 6) $y'' + 2y' + 5y = 0$;
7) $y'' + y = 0$; 8) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$;
9) $y'' + y' - 2y = -4$; 10) $y'' - 4y = 8x^3$;
11) $y'' - 2y' = 2e^x$; 12) $y'' + y' = xe^{-x}$;
13) $y'' - 5y' + 6y = 13\sin 3x$; 14) $y'' + y = x + 2e^x$;
15) $y'' + 3y' + 2y = \sin 2x + 2\cos 2x$.

13. Попит і пропозиція на певний товар визначаються співвідношеннями $q = 2p'' - p' - p + 15$, $s = 2p'' + p' + p + 5$, де p – ціна товару, p' – тенденція формування ціни, p'' – темп зміни ціни. Знайти залежність ціни від часу, за умови, що пропозиція і попит зрівноважені, а $p(0) = 6$, $q(0) = 10$, $s(0) = 10$.

14. Розв'язати подані нижче рівняння і згідно з початковими або крайовими умовами знайти частинний розв'язок:
1) $y''(x) - 4y'(x) + 3y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
2) $y''(x) + y'(x) - 6y(x) = 0$, $y(0) = 0$, $y(1) = 0$;
3) $y''(x) - 4y'(x) + 4y(x) = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
4) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 2$.

15. Знайти загальний роз'язок рівняння і розв'язати задачу Коші:
1) $y''(x) - y(x) = e^x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
2) $y''(x) - 6y'(x) + 9y(x) = e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$;
3) $y''(x) + y(x) = 2\cos x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 2$.

Відповіді

1. 1) $y = -2x$; 2) $x^2 + y^2 = C^2$; 3) $x + y = \ln C(x+1)(y+1)$; 4) $y = e^{1/x}$; 5) $y = C(x+1)e^{-x}$; 6) $y = e^{\sqrt{x}-2}$; 7) $y^2 = 2\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{2}(1+e^x)\right)$; 8) $\operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}$; 9) $y = 2\sin^2 x - \frac{1}{2}$; 10) $2y^2 = x^2 - 2$. **2.** 1) $y = \frac{2x}{1 - Cx^2}$; 2) $y = 2x \operatorname{arctg} x$; 3) $\sin\frac{y}{x} + \ln|x| = C$;
4) $y = x\ln\frac{C}{x}$; 5) $(x - C)^2 - y^2 = C^2$; 6) $x = Ce^{x/y}$; 7) $\ln|x + y| + \frac{x}{x+y} = C$. **3.** 1) $y = Cx^3 - x^2$; 2) $y = \ln x + 1 - \frac{\ln x}{x} + \frac{C}{x}$; 3) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x^2}$; 4) $y = Ce^{-x} + \frac{1}{2}(\cos x + \sin x)$; 5) $y = Ce^x - x - 1$; 6) $y = (x^2 + C)e^{-x^2}$; 7) $y = (x + C)e^x$. **4.** 1) $y(C_1 x + x^2) = 1$;

2) $y^{-2} = \dfrac{C}{x^2} - 1$; 3) $y^{-2} = Ce^{x^2} + 1$; 4) $y^{-1} = -\dfrac{x^5}{3} + Cx^2$. **5.** $\dfrac{dx}{dt} = kx(N-x)$, $x(0) = \dfrac{N}{\psi}$, $x = \dfrac{N}{1+(\psi-1)e^{-Nkt}}$. **6.** $y = \dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{16}e^{4x}$. **7.** $p = 10 - 9e^{t/10}$. **8.** $t = \dfrac{\ln 2}{0,1} \approx 7$ років. **9.** $y' = 0,4(3-2y)y$, $y(t) = \dfrac{3e^{1,2t}}{1+2e^{1,2t}}$, $y(2) = \dfrac{3e^{2,4}}{1+2e^{2,4}} \approx 1,43$. **10.** $p = 100 - 0,5x$.

11. $x(t) = 100t + \dfrac{(10-v)t^2}{2} + C$, $x(t) = 100t + \dfrac{(10-v)t^2}{2} + 1680$, $v = 50$ приладів за місяць. **Вказівка.** Якщо $x(t)$ – кількість приладів на складі за t місяців, то $\dfrac{dx(t)}{dt} = s(t) - p(t)$, де $s(t) = 900 - vt$, $p(t) = 800 - 10t$. Тому маємо диференціальне рівняння $\dfrac{dx}{dt} = 100 - (10-v)t$ та умови $x(0) = 1680$, $x(12) = 0$.

12. 1) $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$; 2) $y = (C_1 + C_2x)e^{2x}$;
3) $y = e^{4x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$; 4) $y = C_1 + C_2e^{-4x}$;
5) $y = e^{-x}(C_1\cos x + C_2\sin t)$; 6) $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$;
7) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$; 8) $y = e^x(C_1 + C_2x) + e^{2x}$;
9) $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + 2$; 10) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-2x} - 2x^3 - 3x$;
11) $y = C_1 + C_2e^{2x} - 2e^x$; 12) $y = C_1 + e^{-x}(C_2 - x - \dfrac{x^2}{2})$;
13) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \dfrac{1}{6}(5\cos 3x - \sin 3x)$;
14) $y = C_1\cos x + C_2\cos x + x + e^x$;
15) $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - 2x\right)$.

13. $p(t) = 5 + e^{-t}\cos t$.

14. 1) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{3x}$, $y(x) = \dfrac{3}{2}e^x - \dfrac{1}{2}e^{3x}$;
2) $y(x) = C_1e^{2x} + C_2e^{-3x}$, $y(x) = \dfrac{e^{2x} - e^{-3x}}{e^2 - e^{-3}}$;
3) $y(x) = C_1e^{2x} + C_2xe^{2x}$, $y(x) = e^{2x} - 2xe^{2x}$;
4) $y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x}$, $y(x) = 2(x-1)e^{3(x-1)}$.

15. 1) $y(x) = C_1e^x + C_2e^{-x} + \dfrac{x}{2}e^x$, $y(x) = \dfrac{x}{2}e^x + \dfrac{1}{4}e^x + \dfrac{3}{4}e^{-x}$;
2) $y(x) = C_1e^{3x} + C_2xe^{3x} + \dfrac{x^2}{2}e^{3x}$, $y(x) = \dfrac{x^2}{2}e^{3x} + xe^{3x}$;
3) $y(x) = C_1\cos x + C_2\sin x + x\sin x$, $y(x) = (x+2)\sin x + 5\cos x$.

Література

1. *Барковський В.В., Барковська Н.В.* Математика для економістів. Вища математика. – К.: Національна академія управління, 1999. – 399 с.

2. *Бугір М.К.* Математика для економістів. Навчальний посібник. – Тернопіль: Підручники і посібники, 1998. – 192 с.

3. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Высшая математика. Задачник. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

4. Высшая математика для экономистов: Учеб. пособие для вузов / Н.Ш.Кремер, Б.А.Путко, И.М.Тришин, М.Н.Фридман; Под ред. проф. Н.Ш.Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 439 с.

5. *Герасимович А.И., Рысюк Н.А.* Математический анализ: Справ. пособие. В 2 ч. Ч. 1. – Мн.: Выш. шк., 1989. – 287 с.

6. *Грисенко М.В.* Математика для економістів: Методи й моделі, приклади й задачі: Навч. посібник. – К.: Либідь, 2007. – 720 с.

7. *Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я.* Высшая математика в примерах и задачах, ч. 1. – М.: Высшая школа, 1980. – 320 с., ч. 2. – М.: Высшая школа, 1980. – 365 с.

8. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Аналитическая геометрия. – М.: Наука, 1968. – 232 с.

9. *Красс М.С.* Математика для экономических специальностей: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.

10. *Красс М.С., Чупрынов Б.П.* Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – М.: Дело, 2000. – 688 с.

11. *Кудрявцев В.А., Демидович Б.П.* Краткий курс высшей математики. – М.: Наука, 1989. – 656 с.

12. *Кулініч Г.Л., Максименко Л.О., Плахотник В.В., Призва Г.Й.* Вища математика: основні означення, приклади і задачі, ч. 1. – К.: Либідь, 1992. – 228 с.

13. *Лавренчук В.П., Готинчан Т.І., Дронь В.С., Кондур О.С.* Математика для економістів: теорія та застосування. Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз: Підручник. – 2-е вид., виправлене. – Чернівці: Чернівецький нац. ун-т, 2010. – 224 с.

14. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В.* Математика в экономике: Учебник: В 2-х ч. Ч. 1. – М.: Финансы и статистика, 2000. – 224 с.

15. *Солодовников А.С., Бабайцев В.А., Браилов А.В., Шандра И.Г.* Математика в экономике: Учебник: В 2-х ч. Ч. 2. – М.: Финансы и статистика, 1999. – 376 с.

16. *Тевяшев А.Д., Литвин О.Г.* Вища математика. Загальний курс: Збірник задач та вправ. – Харків: Рубікон, 1999. – 320 с.

17. *Шипачев В.С.* Высшая математика: Учебник для немат. спец. вузов. – М.: Высшая школа, 1985. – 471 с.

Предметний покажчик

Р

С

Зміст

Навчальне видання

Лавренчук Володимир Петрович,
Готинчан Тетяна Іванівна,
Дронь Віталій Сільвестрович,
Кондур Оксана Созонтівна

Вища математика.Курс лекцій

У трьох частинах

Частина I

Лінійна алгебра, аналітична геометрія, математичний аналіз

Навчальний посібник

Головний редактор: *Василь Головчак*
Літературне редагування: *Ольга Максимонько*
Комп'ютерна верстка: *Тетяна Готинчан*

Підп. до друку 04.05. 2011 р. Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Гарнітура "Times New Roman". Друк на ризографі. Вид. арк. 29. Зам. 46.
Наклад 300 прим.

ISBN 978-966-640-301-1

Видавець
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника
76000, м. Івано-Франківськ, вул. С. Бандери, 1, тел.: 71-56-22
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру від 12.12.2006, серія ДК 2718