

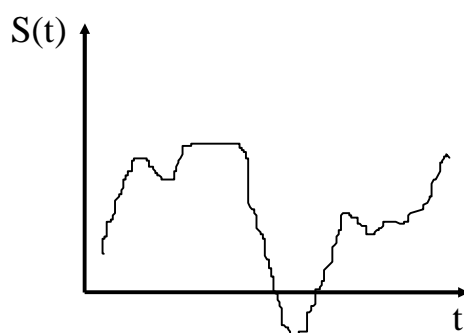
# I. Теория сигналов.

## 1.1. Классификация сигналов.

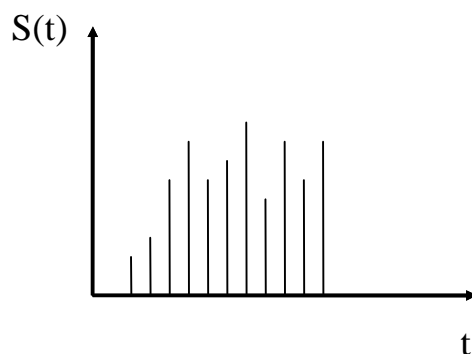
Электрическим сигналом  $S(t)$  называют изменение электрического заряда, или тока, или напряжения во времени.

Различают следующие виды сигналов:

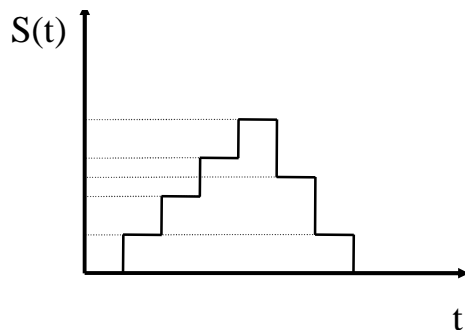
1. сигналы, произвольные по величине и непрерывные во времени. Сюда относят аналоговые сигналы (без разрывов) и континуальные сигналы (с разрывами) ;



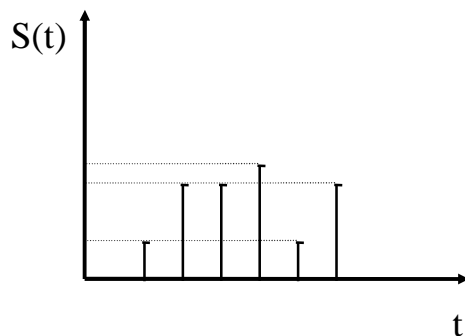
2. сигналы произвольные по величине и дискретные во времени (дискретные сигналы) ;



3. сигналы квантованные по величине и непрерывные во времени (квантованные сигналы) ;



4. сигналы, квантованные по величине и дискретные во времени (цифровые сигналы) ;



Все четыре разновидности сигналов называются детерминированными, если мгновенное значение сигнала можно заранее предсказать в любой момент времени с вероятностью 1, т.е. абсолютно достоверно. К таким сигналам относятся, в основном, управляющие сигналы и несущие колебания. Если же мгновенное значение сигнала заранее неизвестно и может быть предсказано с вероятностью  $< 1$ , то такие сигналы называются случайными. Как правило, все информационные колебания являются случайными. Сюда могут быть отнесены все четыре разновидности сигналов.

К случайным сигналам относят также шумовые колебания, представляющие собой суперпозицию различных случайных сигналов.

Для описания детерминированных сигналов используют амплитудно - временные характеристики и представления в виде суперпозиции простых колебаний.

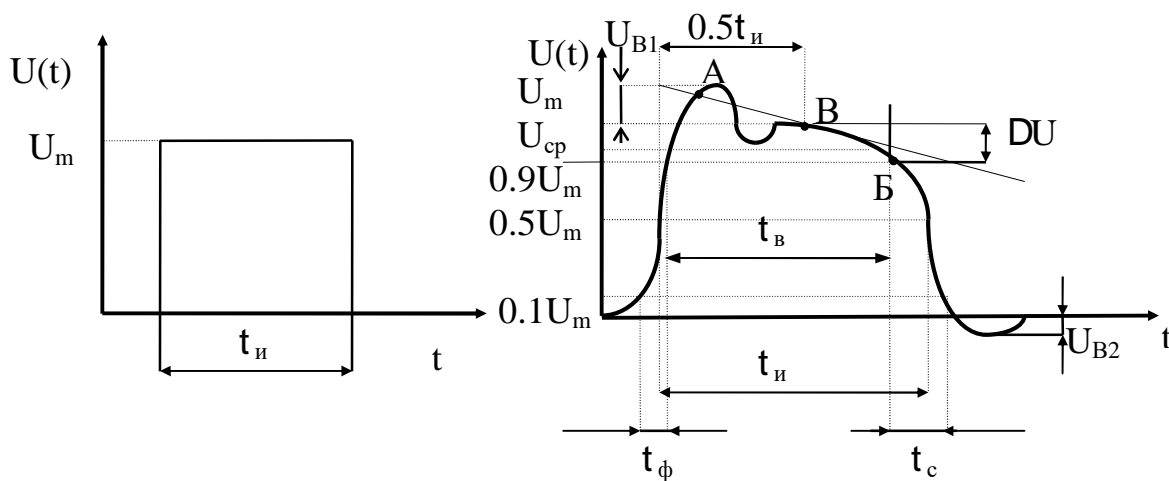
Для описания случайных сигналов применяют методы теории вероятности и математической статистики; случайные сигналы моделируют детерминированными сигналами.

Изучение теории сигналов обычно начинают с изучения свойств и математических моделей детерминированных сигналов, которые потом дополняют различными статистическими методами.

## **1.2. Амплитудно - временные параметры детерминированных сигналов.**

Рассмотрим график зависимости напряжения от времени, представляющий собой прямоугольный импульс с различными отклонениями от идеальной формы. На его примере рассмотрим некоторые возможные параметры,

используемые для описания различных сигналов в амплитудно - временных координатах.

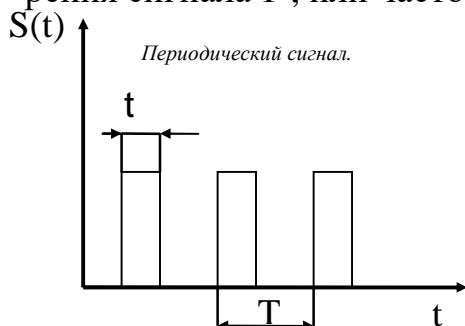


*Импульс идеальной формы.*

*Импульс реальной формы.*

- $U_m$ - амплитуда импульса ;
- $U_{ср}$ - средняя амплитуда импульса ;
- $U_{B1}$ - выброс фронта ;
- $U_{B2}$ - выброс среза ;
- $DU$ - скол вершины ;
- $t_{и}$ - длительность импульса ;
- $t_{ф}$ - длительность фронта ;
- $t_{ср}$ - длительность среза ;
- $t_B$ - длительность вершины ;

У сигналов другой формы могут исключаться и добавляться некоторые параметры. Кроме сигналов в виде одиночных импульсов, как здесь рассмотренный, широко применяются периодически повторяемые сигналы. В этом случае к набору рассмотренных параметров добавляется период повторения сигнала  $T$ , или частота повторения  $F = 1/T$  или  $\omega = 2\pi F$ .

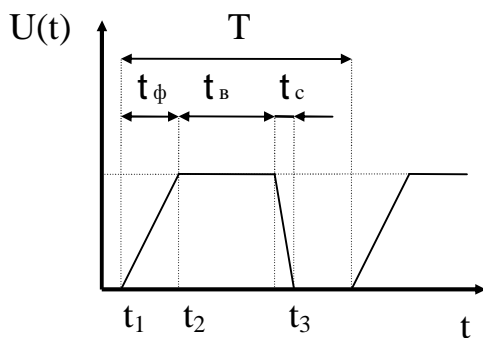


Кроме того часто используется обобщенный параметр периодической последовательности импульсов называемый скважностью :  $Q = T/t_u$ , или коэффициент заполнения, определяемый как

$$K_{зан} = 1/Q.$$

Используя упомянутые параметры сигналов, составляют их математические модели. При этом очень широко используется метод кусочной аппрок-

симации, когда на каждом конкретном отрезке времени  $t_1, t_2$  мгновенное значение сигнала, описывают некоторой функцией. В качестве последней широко используется линейная функция  $U=kt$ , где  $k=const$ . В этом случае метод называют методом кусочно - линейной аппроксимации. Например, математическая модель периодического трансцендального сигнала с помощью этого метода может быть записана следующим образом :



$$U(t) = U(t + nt), n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$U(t) = \begin{cases} \frac{U_m}{t_\phi}(t - t_1), & t_1 \leq t \leq t_2 \\ U_m, & t_2 \leq t \leq t_3 \\ -\frac{U_m}{t_c}(t_4 - t), & t_3 \leq t \leq t_4 \\ 0, & t_4 \leq t \leq T \end{cases}$$

### 1.3 Спектральный анализ и синтез детерминированных сигналов.

Методы кусочной аппроксимации и другие методы аналитического описания сигналов не решают в полном объеме задач математического моделирования сложных сигналов, и, следовательно, задач прохождения сигналов через различные цепи. В некоторой степени эти проблемы разрешаются с помощью спектральной теории сигналов.

#### 1.3.1. Элементы обобщенной спектральной теории сигналов.

##### а) Основные определения и понятия.

Обобщенной спектральной теорией называют совокупность методов представления сигналов в виде суммы ортогональных составляющих

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k y_{k,t} \hat{I} [t_1, t_2] \quad (1)$$

Наибольшее распространение получили методы, использующие представления сигналов в виде колебаний ( т.е. функций времени ) и спектрального разложения на синусоидальные и косинусоидальные составляющие ( это преобразования Фурье ). Обобщенная спектральная теория исследует общие закономерности спектрального анализа для систем базисных функций и рассматривает особенности выбора базисных систем при решении задач передачи и обработки сигналов. Представление (1) называют разложением сигнала по системе базисных функций. К системе базисных функций предъявляют следующие требования : для любого сигнала ряд (1) должен сходиться; функции  $y_k(t)$  должны иметь простую аналитическую форму; коэффициенты  $a_k$  должны вычисляться относительно просто. Этим трем условиям удовлетворяют системы ортогональных функций. Условие ортогональности функций

$$\int_{t_1}^{t_2} y_i(t) y_k(t) dt = 0, i \neq k \quad (2)$$

При  $i=k$

$$\int_{t_1}^{t_2} y_k^2(t) dt = c_k \quad (3)$$

Число  $c_k$  называют нормой базисной функции  $y_k(t)$ . Нормированная базисная функция

$$j_k(t) = y_k(t) / \sqrt{c_k} \quad (4)$$

Система нормированных базисных функций  $\{j_k(t)\}$ , удовлетворяющая одновременно и условию ортогональности, и условию нормировки

$$\int_{t_1}^{t_2} j_i(t) j_k(t) dt = d_{ik} \quad (5)$$

где

$$d_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ 1, & i = k \end{cases},$$

называется ортонормированной.

Если под  $y_i$  или  $y_k$  понимать ток или напряжение, то равенство (3) имеет смысл энергии сигнала, выделенной сигналом  $y_k$  на сопротивлении 1 Ом за время  $(t_2 - t_1)$ , а равенство (2) имеет смысл энергии взаимодействия сигналов  $y_i$  и  $y_k$ . Отсюда следует физический смысл понятий ортогональности и нормы функций: ортогональные сигналы не взаимодействуют между собой, а энергия нормированного сигнала равна 1.

#### б) Определение коэффициентов.

Рассмотрим, как определяют коэффициенты  $a_k$  при разложении сигнала по системе ортонормированных функций. Представим сигнал

$$S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k j_k(t), t \in [t_1, t_2] \quad (6)$$

Умножив обе части (6) на  $j_i(t)$  и проинтегрировав на интервале  $[t_1, t_2]$  получим

$$\int_{t_1}^{t_2} S(t) j_i(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{t_1}^{t_2} j_k(t) j_i(t) dt \quad (*)$$

Из условия ортонормированности функций (5) следует, что в правой части соотношения (\*) все интегралы при  $i \neq k$  будут равны нулю, а при  $i = k$  один из них равен единице. Поскольку знак суммы в правой части (\*) при этом исчезает, то

$$a_k = \int_{t_1}^{t_2} S(t) j_k(t) dt \quad (7)$$

Ортогональные разложения (6) называют обобщенным рядом Фурье, а коэффициенты (7) - обобщенным коэффициентом Фурье.

Ортонормированные функции удовлетворяют трем условиям: они должны иметь простую аналитическую форму; для любого сигнала ряд должен сходиться; коэффициенты  $a_k$  должны вычисляться относительно просто.

Выбор базисных ортонормированных функций - одна из ответственных задач и ее решение существенно зависит от характера преобразований сигналов в системе. Коэффициенты  $a_k$  представляют собой эффективные значения со-

ставляющих спектра (обобщенных гармоник), поэтому выделяемая на сопротивлении 1 Ом средняя мощность сигнала равна :

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^2 \int_{t_1}^{t_2} \cos^2 k t dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k^2}{t_2 - t_1} \quad (8)$$

Соотношение (8) называют равенством Парсеваля. Из него следует, что мощность сигнала равна сумме мощностей всех составляющих спектра.

### в) Минимизация погрешности разложения.

Определим коэффициенты, минимизирующие погрешность ортогонального разложения. Используем для этого понятие среднеквадратичной погрешности :

$$e^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [S(t) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k t]^2 dt \quad (9)$$

Для минимизации  $e^2$  необходимо решить систему уравнений вида

$$\frac{\partial e^2}{\partial a_k} = 0, k = 0, 1, 2, 3, 4, \dots \quad (**)$$

Для этого, при условии  $\frac{\partial e^2}{\partial a_k} > 0$  необходимо найти из решения  $a_{konm}$ , подставить значения этих коэффициентов в (9) и определить

$$e_{\min}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt - \sum_{k=0}^{\infty} a_{kOPT}^2 / (t_2 - t_1) \quad (10)$$

Эту задачу решил Фурье. Он показал, что оптимальными будут коэффициенты, определяемые по соотношению (7) ; если число членов ряда  $n < \infty$  , то имеется некоторая среднеквадратическая погрешность , из-за которой

$$\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} S^2(t) dt > \sum_{k=0}^n a_{kOPT}^2 / (t_1 - t_2) \text{ и } e_{\min}^2 > 0 \quad (11)$$

если же  $n \rightarrow \infty$  , то это неравенство выражается в равенство Парсеваля (8) и, следовательно,  $e_{\min}^2 \rightarrow 0$ .

Таким образом, бесконечный ряд дает адекватное в среднеквадратическом смысле ортонормированное разложение сигнала.

### г) Выбор числа членов ряда.

Для реальных сигналов всегда можно указать такое число  $n$  (обычно не-большое), при котором 80..... 90% мощности заключено в составляющих спектра с номерами  $n^3 k$ . Поэтому ряды, используемые на практике, конечны, а число членов ряда определяет допустимые среднеквадратические погрешности. Относительную погрешность разложения определяют как отношение  $DR(n)$  ошибки аппроксимации к мощности  $P$  самого сигнала :

$$d(n) = \frac{DP(n)}{P} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k^2}{\sum_{k=0}^{\infty} a_k^2} \quad (12)$$

Ошибка аппроксимации, т.е. величина  $DR(n)$  - это та часть мощности, которая оказывается за пределами используемой полосы частот и не учитывается при восстановлении сигнала. По допустимой относительной погрешности  $d_0$  из соотношения  $d(n) = d_0$  нетрудно определить число  $n$  удерживаемых членов ряда.

### д) Базисные сигналы.

В качестве базисных используют системы ортогональных функций Бесселя, Хаара, Уолша, системы ортогональных полиномов Лежандра, Чебышева, Эрмита, Лаггера и др. Примеры ортогональных разложений по таким функциям рассмотрим позднее. Реальные сигналы всегда ограничены во времени и имеют неограниченный спектр. Для удобства изучения сигналы часто рассматривают не на конечном интервале времени  $[t_1, t_2]$ , а на полубесконечном  $[0, \infty]$  или на бесконечном  $[-\infty, \infty]$ . Для определенности начало отсчета совмещают с началом сигнала или с серединой. Если сигнал имеет конечную длительность, то его рассматривают на интервале  $[0, T]$  или  $[-T/2, T/2]$ .

Реальные сигналы случайны. Несмотря на это в теории часто рассматривают сигналы, полностью известные в любой момент. Такие сигналы называют детерминированными. Теория детерминированных сигналов, как теория первого приближения, удобна для решения простейших задач и полезна для развития теории случайных процессов.

### е) Взаимная энергия и взаимная мощность.

Для изучения взаимосвязей сигналов используют два основных понятия: - взаимная энергия сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$

$$E_{12} = \int_{-T/2}^{T/2} S_1(t) S_2(t) dt, \quad (13)$$

- взаимная мощность сигналов  $S_1(t)$  и  $S_2(t)$



$$P_{12} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S_1(t) S_2(t) dt \quad (14).$$

ж) Условия ортогональности и когерентности.

Различают сигналы ортогональные по энергии, когда  $E_{12}=0$  и ортогональные по мощности, когда  $P_{12}=0$ . Для ортогональных сигналов средняя мощность и энергия суммы обладают свойством аддитивности (т.е. значение величины, соответствующее целому объекту, равно сумме значений величин, соответствующих его частям при любом разбиении объекта на части). Это свойство записывается в виде соотношений:

$$P = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [S_1(t) + S_2(t)]^2 dt = P_1 + P_2$$

$$E = \int_{-T/2}^{T/2} [S_1(t) + S_2(t)]^2 dt = E_1 + E_2.$$

Сигналы, ортогональные по мощности, образуют более широкий класс, частью которого являются сигналы ортогональные по энергии, поскольку первые привязаны к конечным интервалам времени.

Из ортогональности по энергии следует ортогональность по мощности, но не наоборот, поскольку понятие ортогональности по энергии является более общим. Только на конечном интервале времени  $T < \infty$  условия ортогональности по мощности и по энергии выполняются одновременно. Следовательно, ортогональность сигналов тесно связана с интервалом их определения.

Взаимные энергия и мощность характеризуют степень сходства сигналов. Если два сигнала полностью совпадают, то  $P_{12}=P_{21}=P$ , где  $P$  - мощность любого из сигналов ( $S_1$  или  $S_2$ ).

Такие сигналы называются полностью когерентными. Для ортогональных по мощности сигналов  $P_{12}=P_{21}=0$ , следовательно ортогональные сигналы полностью некогерентны. Если  $0 < P_{12} < P$  или  $0 < P_{21} < P$ , то сигналы называют частично - когерентным.

з) ортогональность постоянной и переменной составляющих.

Большое значение имеет ортогональность постоянной  $S_0$  и переменной  $S_{1,n}$  составляющих любого сигнала  $S(t) = S_0 + S_{1,n}(t)$ , где постоянная составляющая определяется как среднее значение сигнала на интервале  $[0, T]$ -

$$S_0 = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt, \text{ а переменная составляющая } S_{1,n}(t) = S(t) - S_0.$$

Взаимная энергия постоянной и переменной составляющих

$$E_{0,1,n} = \int_0^T [S(t) - S_0] S_0 dt = S_0 \underbrace{\int_0^T S(t) dt}_0 - S_0^2 \underbrace{\int_0^T dt}_T = S_0^2 T - S_0^2 T = 0.$$

Следовательно, составляющие  $S_0$  и  $S_{1,n}$ , ортогональны. Из их ортогональности следует, что среднее значение переменной составляющей

$$\frac{1}{T} \int_0^T S_{1,n}(t) dt = \frac{1}{T} \underbrace{\int_0^T S(t) dt}_0 - \frac{1}{T} S_0 \underbrace{\int_0^T dt}_T = 0,$$

и что их прохождение через различные цепи может рассматриваться отдельно, а результат определяться простым суммированием.

### 1.3.2. Примеры базисных функций и полиномов.

#### а) Гармонические функции.

Из математики известны периодические функции  $\sin$  и  $\cos$ , описывающие гармонические колебания. Положим, что эти функции являются ортогональными и, одновременно, определим норму этих функций. Для этого воспользуемся соотношениями (2) и (3):

$$\int_{-T/2}^{T/2} \sin k\omega_0 t^* \sin i\omega_0 t dt = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ T/2, & i = k \end{cases} \quad (15)$$

где  $T=2\pi/\omega_0$  - период гармонического колебания, а  $k=0,1,2,\dots$ ,  $i=0,1,2,\dots$  - целые числа. Равенства, аналогичные (15) имеют место как для функции  $\sin$ , так и для  $\cos$ , поскольку  $\sin \omega t = \cos(\omega t - \pi/2)$ , а также для случая, когда, например,  $y_i(t) = \sin i\omega_0 t$ , а  $y_k(t) = \cos k\omega_0 t$ . Из (15) следует, что обе гармонические функции являются ортогональными с нормой  $c_k = T/2$ , определяемой периодом их повторения. Следовательно, система ортонормированных гармонических функций согласно (4) будет иметь вид:

$$j_k(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{T}} \sin k\omega_0 t, \\ \sqrt{\frac{2}{T}} \cos k\omega_0 t, \end{cases} \quad (16)$$

На основании соотношений (6) и (7) любой периодический сигнал  $S(t) = S(t+T)$  может быть представлен рядом из функций (16)

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\omega_0 t + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin k\omega_0 t, \quad (17)$$

$$\text{где} \quad \begin{aligned} a_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \cos k\omega_0 t dt, \\ b_k &= \frac{2}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} S(t) \sin k\omega_0 t dt, \end{aligned} \quad k=0,1,2,3... \quad (18)$$

Ряд (17) называют тригонометрическим рядом Фурье с коэффициентами (18). Его можно представить и в других формах.

Если объединить функции  $\sin$  и  $\cos$  одной частоты в выражении (17), то это дает следующее его представление:

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(k\omega_0 t - a_k), \quad (19)$$

$$\text{где} \quad A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}; \quad a_k = \arctg \frac{b_k}{a_k} \quad (20)$$

В частном случае четной периодической функции, когда  $S(t) = S(-t)$  из (18) следует, что  $b_k = 0$ , следовательно, и  $a_k = 0$ , и сигнал  $S(t)$  раскладывается только по косинусам. В случае же нечетной функции, когда  $S(-t) = -S(t)$ , имеем  $a_k = 0$ ,  $a_k = \pi/2$  и ряд состоит только из синусоидальных гармоник.

Из сказанного следует, что периодические колебания полностью определяются коэффициентами всех гармоник. Т.е. амплитуды и фазы гармоник, зависящие от значений частоты, кратных основной частоте (частоте повторения сигнала  $S(t)$ ), дают эквивалентное представление периодических функций времени в частотной области.

#### б) экспоненциальные функции.

В ряде случаев, например, в теории цепей, удобнее иметь дело с комплексной или экспоненциальной формой ряда Фурье (т.е. ряда вида (6), выраженного через экспоненциальные функции комплексного переменного, определенные на интервале  $T$ , являющемся периодом повторения сигнала  $S(t)$ ). Чтобы не повторяться в доказательстве условий ортонормированности для периодических экспоненциальных функций комплексного переменного, искомое разложение получим исходя из тригонометрического ряда Фурье. Для этого в выражении (17) представим функции  $\sin$  и  $\cos$  через экспоненты от мнимого аргумента по формуле Эйлера :

$$\begin{aligned} a_k \cos k\omega_0 t &= \frac{a_k}{2} (e^{jk\omega_0 t} + e^{-jk\omega_0 t}) \\ b_k \sin k\omega_0 t &= \frac{b_k}{2} (e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}). \end{aligned}$$

После группировки слагаемых и преобразований получим :

$$S(t) = \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \dot{\mathbf{a}} (A_k e^{jk\omega_0 t} + A_k^* e^{-jk\omega_0 t}) \quad (21)$$

Здесь

$$\dot{A}_k = a_k - jb_k = A_k e^{-ja_k} \quad (22)$$

- комплексная амплитуда k-й гармоники, а

$$\dot{A}_k^* = a_k + jb_k = A_k e^{ja_k} \quad (23)$$

- ее комплексно-сопряженная величина.

Если обозначить сопряженную амплитуду через комплексную амплитуду с отрицательным индексом

$$\dot{A}_k^* = a_k + jb_k = \dot{A}_{-k},$$

то обе суммы в (21) можно заменить суммированием по одной экспоненте при изменении индекса k от  $-\infty$  до  $+\infty$  (включая ноль).

В результате получим ряд Фурье в комплексной форме :

$$S(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{a}} \frac{\dot{A}_k}{2} e^{jk\omega_0 t} \quad (24)$$

Для комплексных коэффициентов экспоненциального ряда Фурье после подстановки (22) и (23) в (18) находим

$$\dot{A}_k = \frac{2}{T} \oint_{-T/2}^{T/2} S(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = A_k(jk\omega_0 t), \quad (25)$$

где  $\dot{A}_0 = a_0$ .

Комплексные коэффициенты ряда Фурье, определяемые ими амплитуды и начальные фазы гармоник, или амплитуды косинусных и синусных гармоник связаны соотношением

$$\dot{A}_k = A(k\omega_0)e^{-ja(k\omega_0)} = a(k\omega_0) - jb(k\omega_0),$$

и являются функциями равноотстоящих дискретных значений частоты, кратных частоте повторения сигнала ( $k$ - коэффициент кратности). Комплексные коэффициенты, рассматриваемые как функции частоты, называют комплексным дискретным спектром; их составляющие, изображаемые графически в зависимости от дискретных значений частоты, т.е.  $A(k\omega_0)$  и  $a(k\omega_0)$ - амплитудным и фазовым дискретным спектром, а составляющие  $a(k\omega_0)$  и  $b(k\omega_0)$  - вещественным и мнимым дискретным спектром. Графики дискретных спектров состоят из отрезков вертикальных линий, пропорциональных значениям составляющих и расположенных в точках  $k\omega_0$ . Следовательно, периодические функции времени имеют дискретный или линейчатый частотный спектр. Вид этого спектра наглядно позволяет судить о свойствах периодической функции времени. Например, по скорости уменьшения амплитудного спектра можно судить о степени гладкости периодических функций, а по наличию или отсутствию гармоник на высоких частотах - есть ли участки с быстрыми изменениями.

Заметим, что амплитудный и фазовый спектры, равные

$$A(k\omega_0) = [a^2(k\omega_0) + b^2(k\omega_0)]^{1/2}, a(k\omega_0) = \text{arctg} \frac{b(k\omega_0)}{a(k\omega_0)},$$

являются, соответственно, четной и нечетной функциями частоты.

#### в) Разложение по функциям Хаара.

Систему ортонормированных функций Хаара  $\{c_n(x)\}$  можно использовать в качестве базисной при разложении в равномерно сходящийся ряд Фурье любой функции, непрерывной на отрезке  $[0,1]$

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n(x)$$

$$\text{где } a_k = \int_0^1 S(x) c_k(x) dx.$$

При использовании функций Хаара в качестве базисных для аппроксимации сигналов  $S(t)$  на отрезке  $[0, T]$  многочленами Фурье безразмерный аргумент  $x$  функций Хаара необходимо заменить на  $ct$ , где коэффициент  $c = 1/T$  задает необходимый временной масштаб функций и имеет размерность времени в минус первой степени.

В определении функций Хаара используется понятие двоичных отрезков. Отрезки, которые можно получить делением отрезка  $[0,1]$  на  $2^n$  равных частей, называются двоичными. Эти отрезки считаются замкнутыми слева и открытыми справа, если их правый конец отличен от единицы. Если правый конец отрезка равен единице, то отрезок считается замкнутым и справа.

Таким образом, двоичные отрезки - это  $[0,1]$ ,  $[0,1/2[$ ,  $[1/2,1]$ ,  $[0,1/4[$ ,  $[1/4,1/2[$ ,  $[1/2,3/4[$ ,  $[3/4,1]$ ,  $[0,1/8[$ ... Отрезки  $[1/4,3/4[$  или  $[5/8,7/8[$  двоичными не считаются, т.к. они не являются следствием разбиения на  $2^n$  частей.

Для двоичных отрезков введем следующее обозначение :

$$I_{n,m} = [(m-1)/2^{n-1}, m/2^{n-1}[ \quad (26)$$

где  $m$  меняется от 1 до  $2^n$ , а  $n = 1, 2, \dots$  (конечно, при  $m = 2^{n-1}$  надо считать  $I_{n,m}$  замкнутым также справа, поскольку в этом случае  $m/2^{n-1} = 1$ ).

Для каждого  $n$  выполняется условие  $I_{n1} + I_{n2} + I_{n3} + \dots + I_{n2^{n-1}} = [0,1]$ .

Наряду с двойной нумерацией используют простую нумерацию, полагая  $I_{nm} = I_k$ , где  $k = 2^{n-1} + m$ . Правда, при такой нумерации  $m = 2, 3, \dots$  (отрезок  $n = 1$  отсутствует). Левую и правую половины  $I_{nm}$  условимся обозначать  $I_{nm}^-$  и  $I_{nm}^+$ , так, что

$$I_{nm}^- + I_{nm}^+ = I_{nm}$$

т.е. в качестве начала отсчета выбираем середину отрезка.

Систему функций Хаара  $\{c_n(x)\}$  удобно строить группами : группа номер  $n$  содержит  $2^{n-1}$  функций  $\{c_n(x)\}$ ,  $m = 1, 2, 3, \dots, 2^{n-1}$ ,  $n = \text{const}$  причем первая функция  $c_1(x) = 1$  остается вне групп.

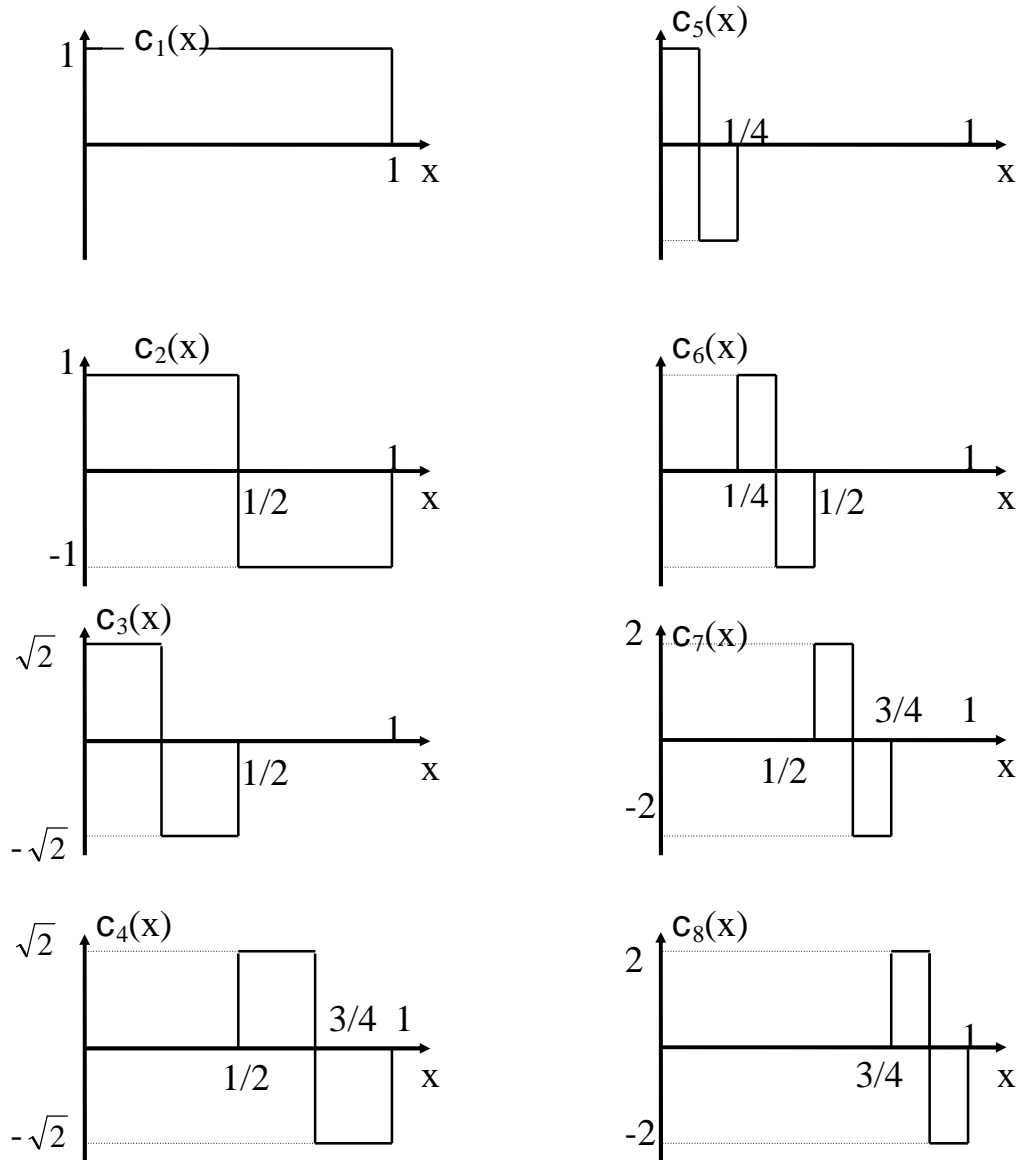
По определению функции Хаара задаются соотношением

$$c_{nm}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in I_{nm}^-; \\ 1/2 & \text{при } x \in I_{nm}^+; \\ 0 & \text{при } x \notin I_{nm}. \end{cases} \quad (27)$$

Напомним, что номер функции в разложении Фурье  $k = 2^{n-1} + m$ .

Особенностью функций Хаара является сравнительная простота их получения (генерирования в разноразмерных устройствах). Базисную систему функций Хаара целесообразно использовать для анализа и синтеза импульсных сигналов конечной длительности.

Ниже изображены первые восемь функций этой системы.



#### г) Разложение по полиномам Лаггера.

Для анализа сигналов сложной формы целесообразно выбирать систему функций, обеспечивающую наиболее быструю сходимость ряда Фурье, (т.е. требующую наименьшего числа членов ряда для заданной точности представления колебания).

Сигналы, аналитические выражения которых описываются полиномами или произведениями полиномов на экспоненциальные функции, удобно аппроксимировать ортогональными полиномами (или функциями) Лаггера.

Полиномы Лаггера являются решением специальных дифференциальных уравнений второго порядка и определяются следующим образом :

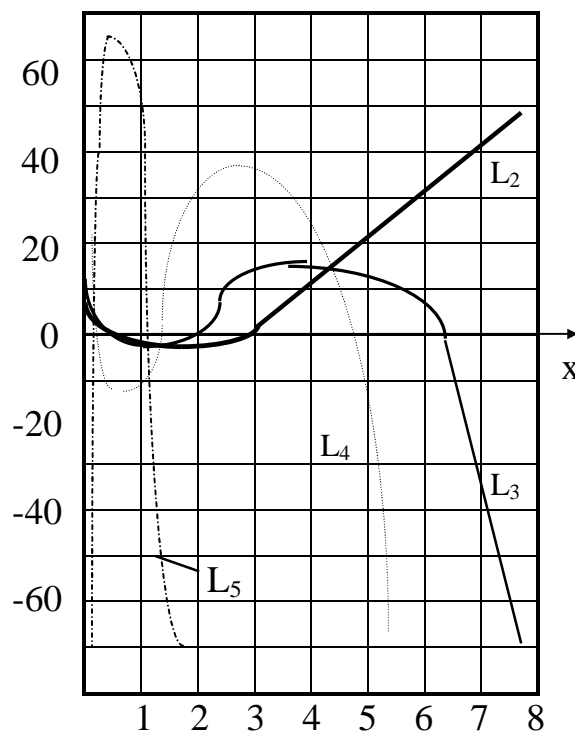
$$L_k(x) = (-1)^k e^x \frac{d^k}{dx^k} (x^k e^{-x}), (x \geq 0) \quad (28)$$

При этом  $L_{k+1} = (x - 2k - 1)L_k(x) - n^2 L_{k-1}(t)$ .

Первые 10 порядков полиномов Лаггера имеют вид ( при  $k \geq 1$ ):

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1; \quad L_1(x) = -x + 1; \quad L_2(x) = x^2 - 4x + 2; \quad L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6; \quad L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24; \\ L_5(x) &= x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120; \quad L_6(x) = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2400x^3 + 5400x^2 - 4320x + 720; \\ L_7(x) &= -x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7350x^4 - 29400x^3 + 52920x^2 - 35820x + 5040; \\ L_8(x) &= x^8 - 64x^7 + 1568x^6 - 8816x^5 + 117600x^4 - 376320x^3 + 564480x^2 - 322560x + 40320; \\ L_9(x) &= -x^9 + 81x^8 - 2592x^7 + 42336x^6 - 381024x^5 + 1905120x^4 - 5080320x^3 + 6531840x^2 - 3265920x + 362880. \end{aligned}$$

Свойство полинома Лаггера  $L_n(0) = k!$ . Графики полиномов приведены на след. рис.



Полиномы Лаггера ортогональны с весом  $P(x) = e^{-x}$ , поскольку только при наличии сомножителя, выполняется условие ортогональности.

$$\int_0^{\infty} L_n(x) L_m(x) e^{-x} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ (n!)^2, & n = m \end{cases}$$

Следовательно, ортонормированную систему на интервале  $[0, \infty[$  образуют функции

$$\mathbf{l}_n(x) = \frac{1}{k!} e^{-x/2} L_k(x), \quad (29)$$

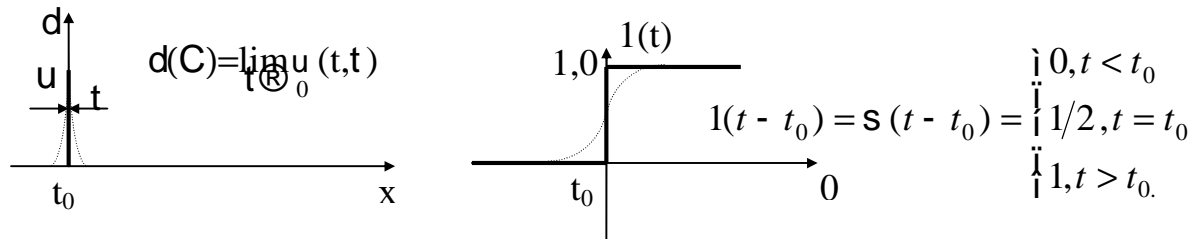
обладающие свойством  $\mathbf{l}_n(0) = 1$ .



Многочлены вида (29) называют функциями Лаггера. Они образуют полную систему ортонормированных функций. Если в формуле (6) принять  $j_k = 1_k$ , то коэффициенты этого ряда  $a_k$  можно вычислить по формуле (7).

При аппроксимации функций времени безразмерный аргумент  $x$  функций Лаггера должен быть заменен на  $ct$ , где коэффициент задает необходимый временной масштаб функций и имеет размерность времени в минус первой степени.

На практике функции Лаггера часто применяют для исследования скачков сигнала, описываемых  $d$ -функций и функций Хевисайда :

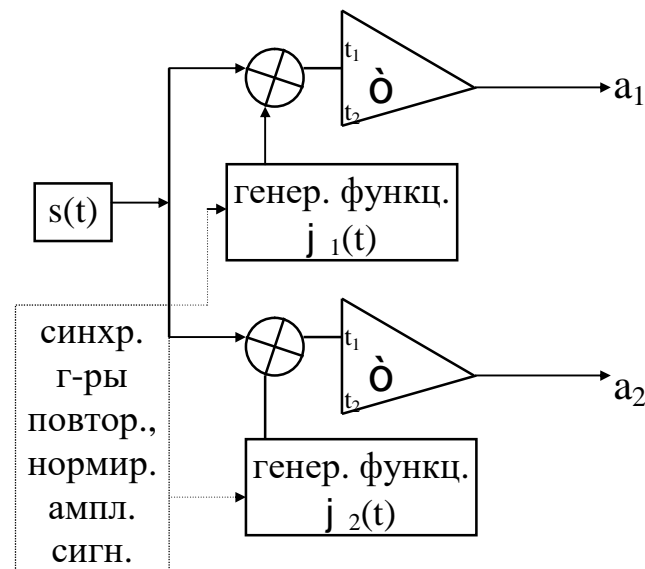


Эти функции часто применяют для описания процесса включения чего-либо.

### 1.3.3. Спектральный анализ сигналов.

#### а) безфильтровый (алгоритмический) метод.

Рассмотрим структурную схему устройства для экспериментального определения коэффициентов разложения аналогового сигнала в обобщенный ряд Фурье (6) по заданной системе ортонормированных базисных функций :



Основными элементами здесь являются генераторы тех базисных функций, по которым производится разложение. Анализируемый сигнал одновременно подается на совокупность множительных звеньев, осуществляющих пе-

ремножение этого сигнала и соответствующей базисной функции. С выходов перемножителей сигналы поступают на интеграторы.

При таком методе обработки сигнала в конце промежутка времени интегрирования на выходе каждого интегратора возникает неизменный во времени уровень, величина которого в соответствии с формулой (7) в точности равна тому или иному коэффициенту обобщенного ряда Фурье.

Работоспособность системы в целом будет зависеть от того, насколько точно удастся воссоздать базисные функции, а также от совершенства функционирования перемножителей и интеграторов.

Система, реализующая безфильтровый метод спектрального анализа, важна и в прикладном, и в теоретическом смысле. Анализируя ее еще раз убеждаемся, что вся информация, заключенная в сигнале, может быть представлена в виде хотя и бесконечной, но все же счетной совокупности чисел  $a_k$ .

#### б) фильтровый метод.

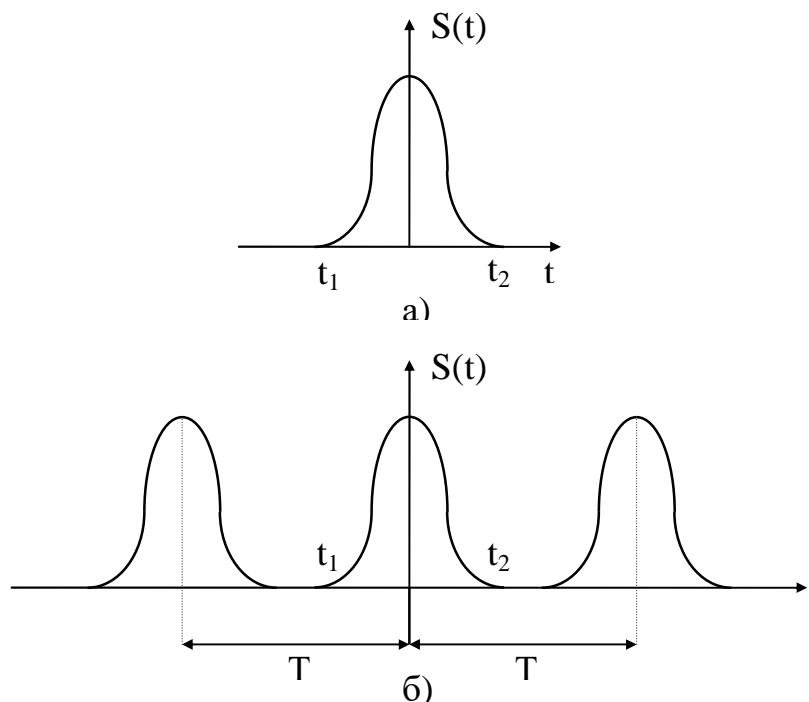
Основан на использовании явления резонанса в высокодобротном контуре. Если на вход такого контура подать периодический сигнал, у которого одна из гармоник спектра вида (19) имеет частоту, совпадающую с резонансной частотой контура, то на выходе контура практически выделится только эта гармоника. При этом выделение гармоники тем лучше, чем меньше полоса пропускания контура по сравнению с частотным интервалом между соседними гармониками анализируемого сигнала.

### 1.3.4. Особенности спектрального представления непериодических сигналов .

#### а) Разложение в ряд Фурье.

Рассмотрим некоторую функцию, отличную от нуля в интервале времени от  $t_1$  до  $t_2$ . Этой функцией описывается непериодическое колебание  $S(t)$  (рис. а) . Поскольку не известен период повторения, то непосредственно в ряд Фурье по дискретным составляющим колебание  $S(t)$  разложить нельзя. Чтобы разрешить эту проблему функцию  $S(t)$  следует представить в виде периодического колебания  $V(t)$  с периодом  $T \neq 0$  (рис. б). В этом случае  $V(t)$  и  $S(t)$  связаны между собой соотношением

$$V(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} S(t + mT) \quad (30)$$



Формула (30) - есть представление непериодического колебания  $S(t)$  в виде периодического колебания  $V(t)$ .

Последнее уже может быть представлено рядом Фурье, например, с помощью экспоненциальных функций комплексного аргумента :

$$V(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k e^{j\omega_k t}, \quad (31)$$

$$\text{где} \quad A_k = \frac{1}{T} \oint V(t) e^{-j\omega_k t}, \quad (32)$$

$$\omega_k = k\omega_0 = 2\pi k / T.$$

С учетом (31) и (32) из (30) имеем :

$$\lim_{m \rightarrow -\infty} S(t + mT) = \lim_{k \rightarrow -\infty} \int_{-T/2}^{T/2} V(t) e^{-j\omega_k t} dt e^{j\omega_k t} \frac{\omega_0}{2\pi} \quad (33)$$

Ряд (33) определяет периодическую функцию  $V(t)$ , полученную повторением функции  $S(t)$  с периодом  $T$ . Если период образованной последовательности  $T \rightarrow \infty$ , то все импульсы, кроме исходного, “уйдут” в бесконечность и периодическая последовательность  $V(t)$  станет одиночным импульсом  $S(t)$ . Это означает, что предел левой части (33) при  $T \rightarrow \infty$  есть функция  $S(t)$  :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow -\infty} S(t + mT) = S(t) \quad (34)$$

Рассмотрим правую часть (34) при  $T \rightarrow \infty$ . Очевидно, что частота основной гармоники ряда Фурье будет стремиться к нулю, т.к.  $\omega_0 = 2\pi/T$ , а  $T \rightarrow \infty$ . При этом соседние спектральные составляющие ряда Фурье будут сближаться и при  $T \rightarrow \infty$  станут сколь угодно близкими друг к другу ( $\omega_{k+1} - \omega_k = \omega_0 \rightarrow 0$ ), т.е. дискретный спектр станет сплошным. Поэтому в формуле (33) можно заменить  $\omega_k$  на текущую частоту,  $\omega$ ,  $\omega_0$  - на  $d\omega$ , а сумму на интеграл. Таким образом, при  $T \rightarrow \infty$  от ряда Фурье в виде (33), переходим к двойному интегралу и с учетом (34) запишем :

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt e^{j\omega t} d\omega \quad (35)$$

Внутренний интеграл обозначают обычно

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(t) e^{-j\omega t} dt \quad (36)$$

и называют спектральной плотностью или спектральной характеристикой непериодического сигнала. Как видно она зависит только от формы сигнала  $S(t)$ . Формулу (36) называют прямым преобразованием Фурье и она позволяет по форме сигнала определить его спектральную характеристику.

С учетом (36) из (35) получаем

$$S(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (37)$$

Эту формулу называют обратным преобразованием Фурье. Она позволяет по форме спектральной характеристики восстанавливать исходный сигнал.

Формулы (36) и (37) называют еще парой преобразований. Фурье и в этом случае обозначают :  $S(t) \hat{=} \dot{S}(w)$ .

Комплексная функция  $\dot{S}(w)$  может быть записана в виде  $\dot{S}(w) = S(w)e^{j\varphi(w)}$ . Модуль спектральной плотности  $S(w)$  называют АЧХ непериодического сигнала, а фазу  $\varphi(w)$  - его ФЧХ.

По физическому смыслу величина  $2S(w)$  есть амплитуда колебания с частотой  $w$  отнесенная к полосе частот в 1Гц. Т.к. формулы коэффициентов ряда Фурье и спектральной плотности отличаются только множителем  $1/T$ , то модуль спектральной плотности импульса и огибающая дискретного сигнала периодической последовательности таких импульсов совпадают по форме.

#### б) Распределение энергии в спектре непериодического колебания.

Раньше для периодического колебания мы ввели понятие средней мощности, определяемой как количество энергии, приносимой сигналом за конечный интервал времени или период колебания. Если же колебание непериодическое, то его период  $T \rightarrow \infty$  и средняя мощность такого колебания равна нулю. Поэтому для характеристики непериодических колебаний вводят другую величину - спектральную плотность энергии колебания, т.е. энергии, приходящейся на единицу полосы частот.

Для вывода соотношения для спектральной плотности воспользуемся соотношением, которое устанавливает связь между произведением двух сигналов  $f(t)$  и  $g(t)$  и их спектральными плотностями, соответственно  $\dot{F}(w)$  и  $\dot{G}(w)$ .

В математике оно известно как теорема Парсеваля, согласно которой “если интегралы  $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt$  и  $\int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt$  существуют, то

$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{F}^*(w) \dot{G}(w)dw$ , где  $\dot{F}^*(w)$  - величина, комплексно - сопряженная  $\dot{F}(w)$ ”.

Предположим теперь, что  $f(t)$  и  $g(t)$  представляют собой одно и то же колебание  $S(t)$ , т.е.

$$f(t)=g(t)=S(t)$$

В соответствии с формулой (8) интеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t)dt = \mathcal{E}$  определяет энергию колебания  $S(t)$ , а произведение спектральных плотностей сигнала

$$\dot{S}(w) \dot{S}^*(w) = S^2(w)$$

равно квадрату модуля спектральной плотности этого колебания. С учетом теоремы Парсеваля приходим к соотношению для энергии непериодического колебания :

$$\mathcal{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}^2(w) dw = \int_0^{\infty} S^2(w) dw \quad (38)$$

Это соотношение устанавливает связь между энергией непериодического колебания и модулем его спектральной плотности. По аналогии с формулой (8) его называют равенством Парсеваля.

Величину  $(1/\pi)S^2(w)=d\mathcal{E}/dw$  называют спектральной плотностью энергии колебания ( имеет смысл энергии, приходящейся на единицу полосы частот).

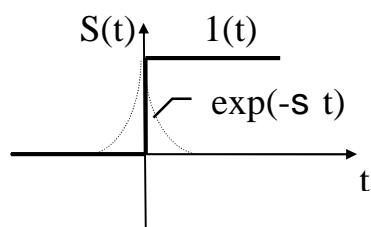
### 1.3.5. Исследование сигналов с помощью преобразований Лапласа.

Для разложения в ряд Фурье периодические и непериодические функции должны удовлетворять условию абсолютной интегрируемости :

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty.$$

Однако, на практике встречаются важные функции, не удовлетворяющие этому требованию, например, функция Хевисайда  $1(t)$ , или пакет из нескольких колебаний, включенных на некоторое время.

Для осуществления спектрального анализа таких функций используются различные приемы. Наиболее распространенный из них - это введение множителя сходимости, когда неинтегрируемая функция приближенного заменяется похожей интегрируемой, в пределе стремящейся к требуемой.



Например, функция  $1(t)$  заменяется плавным экспоненциальным переходом и получается одиночный импульс, который раскладывают в ряд Фурье. Затем совершают предельный переход -  $s \rightarrow 0$ ,  $e^{-st} \rightarrow 1$  при всех  $t$ , а  $t \rightarrow 0$ . В таком виде этот метод не является общим для всех функций.

Развитием этого метода в свете разложения Фурье, является переход к комплексной частоте : вместо частоты  $w$  вводится параметр  $p=s+jw$ , при

этом параметр  $S$ , как увидим позднее, является параметром множителя сходимости:  $e^{-s_1 t}$ . Для удобства реализации такого перехода примем, что функция сигнала  $S(t)$ , определенная при  $t \in \mathbb{R}$ , состоит из двух функций:

$$S(t) = S_+(t) + S_-(t), \quad (33)$$

где  $S_+(t)$  определена при  $t > 0$ ,  
а  $S_-(t)$  - при  $t < 0$ .

Обращаясь к паре преобразований Фурье (35) и (36) совершим переход от  $\omega$  к  $p$  сначала для функции  $S_+(t)$ . Для этого домножим  $S_+(t)$  на  $e^{-s_1 t}$ , где  $s_1 > 0$  выберем таким образом, чтобы обеспечивалась абсолютная интегрируемость функции  $e^{s_1 t} S_+(t)$  в пределах  $0 < t < \infty$ .

Тогда после подстановки  $p = s_1 + j\omega$  выражение (35) можно привести к виду

$$e^{s_1 t} S_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{s_1 - j\infty}^{s_1 + j\infty} S_+ \frac{p - s_1}{j} e^{(p - s_1)t} dp,$$

откуда

$$S_+(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{s_1 - j\infty}^{s_1 + j\infty} L_{S_+}(p) e^{pt} dp, \quad (40)$$

$$\text{где } L_{S_+}(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{s_1 t} S_+(t) dt = \int_0^{\infty} S_+(t) e^{-(p - s_1)t} dt = \int_0^{\infty} S_+(t) e^{-pt} dt. \quad (41)$$

Выражение (41) называется преобразованием Лапласа функции  $S_+(t)$  (или прямым преобразованием Лапласа).

Соотношение (40) по аналогии с выражением (35) часто называют обратным преобразованием Лапласа.

Для функции  $S_-(t)$  все точно также. Для всей функции

$$\begin{aligned} S(t) &= S_+(t) + S_-(t) \\ L_S(p) &= L_{S_+}(p) + L_{S_-}(p) \end{aligned} \quad (42)$$

$$\text{и} \quad S(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{s_1 - j\infty}^{s_1 + j\infty} L_{S_+}(p) e^{pt} dp + \frac{1}{2\pi j} \oint_{s_1 - j\infty}^{s_1 + j\infty} L_{S_-}(p) e^{pt} dp \quad (43)$$

Пара соотношений (42) и (43) называются двухсторонними преобразованиями Лапласа.

Введение множителя сходимости  $p$  позволяет изменить путь интегрирования функции  $S(t)$  так, что ее полюса (точки, где  $S(t) dt \rightarrow \infty$ ) оказываются внутри контура интегрирования и не влияют на величину интеграла.

Метод преобразования Лапласа широко применяется в теории сигналов при спектральном анализе неинтегрируемых функций.

## 1.4. Ортогональные разложения Котельникова для непрерывных сигналов.

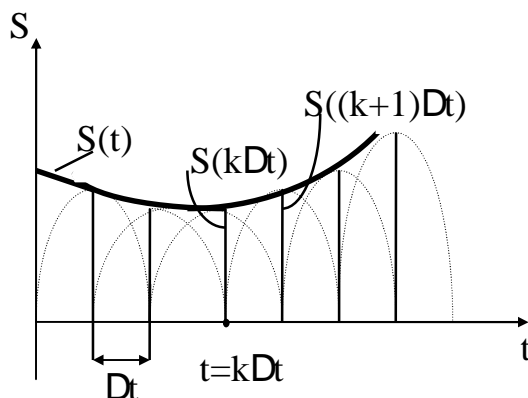
### 1.4.1. Сигналы с ограниченными и полосовыми спектрами.

С целью упрощения задач анализа сигналов в инженерных расчетах учитывают только ту часть спектра, в которой сосредоточено до 80...95% энергии сигнала. Поэтому чаще всего большинство сигналов рассматривают как сигналы с ограниченными спектрами. Для их анализа наряду с разложением Фурье широко применяют разложение Котельникова.

Рассмотрим основные особенности этого разложения.

Ортогональное разложение Котельникова для непрерывных сигналов с ограниченными спектрами позволяет представлять их в виде импульсных последовательностей (см. рис.) Теоретической основой разложения служит теорема Котельникова (теорема отсчетов): любая непрерывная функция  $S(t)$ , не содержащая частот выше  $F$ , полностью определяется последовательностью значений в моменты, отстоящие друг от друга на время  $Dt=1/2F$ .

Общее число отсчетов  $n$  для сигнала длительностью  $T$  будет равно  $n=T/Dt=2FT=n$ . Число  $n$  называют базой сигнала.



Для сигнала  $S(t)$ , спектр которого лежит в интервале  $[0, F]$ , ортогональное разложение Котельникова имеет вид

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S(kDt) \frac{\sin 2\pi F(t - kDt)}{2\pi F(t - kDt)}, \quad (44)$$

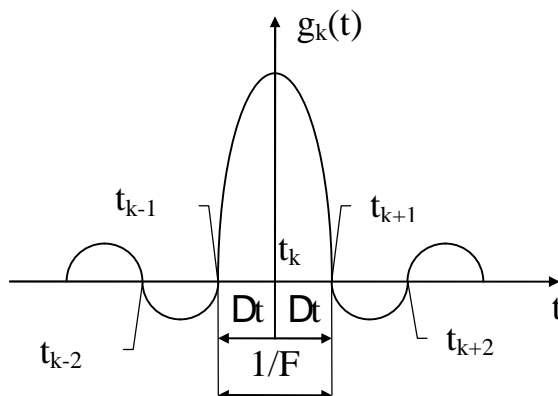
где  $S(kDt)=S_k$  - отсчет сигнала в момент времени  $t_k$  ;  $[\sin 2\pi F(t-kDt)]/[2\pi F(t-kDt)]$  - базисная система ортогональных функций с общей нормой  $1/2F$ ;  $Dt=1/2F$ -интервал дискретизации, равный норме базисных функций. Функция  $g_k=[\sin 2\pi F(t-kDt)]/[2\pi F(t-kDt)]$  называют



функциями отсчетов, а значения  $S(kDt)$  - отсчетами. График функции отсчетов имеет следующий вид (см. рис.).

Ортогональность функций отсчетов проверяют путем вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2\pi F(t - kDt) \sin 2\pi F(t - jDt)}{2\pi F(t - kDt) 2\pi F(t - jDt)} dt = \begin{cases} F/2, & j = k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$



Интервал дискретизации не превышает половины периода наиболее высокой частоты спектра сигнала, что уменьшает число членов в данном разложении по сравнению с разложением Фурье при одинаковой точности аппроксимации. Точность аппроксимации так же как и в случае разложения Фурье определяется равенством (12). При этом мощность сигнала, через заданную последовательность временных выборок, выражается равенством Парсеваля (формула (8)):

$$\text{- энергия сигнала } E = \int_{-\infty}^{\infty} S^2(t) dt = \frac{1}{2F} \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k^2 \quad (45)$$

- мощность сигнала за период колебания

$$P = \frac{E}{T} = \frac{1}{2FT} \sum_{k=0}^{2FT} S_k^2. \quad (46)$$

Из последнего выражения следует, что средняя за период  $T$  мощность непрерывного сигнала равна среднему квадрату выборки. Усреднение производится по всем интервалам, число которых  $2FT$ .

Достоинства ортогонального разложения Котельникова следующие : базисная система ортогональных функций выбрана так, что ряд (44) носит формальный характер, т.е. в любой момент отсчета  $t_k$  он дает одно значение  $S_k$ , остальные составляющие ряда вырождаются в нуль; коэффициенты ряда (44) можно не вычислять; их определяют путем измерения значений сигнала или из его аналитической формы ; зная длительность сигнала  $T$  и

граничную частоту  $F$ , определяют требуемое число отсчетов  $n=2FT$  и энергию сигнала из (45); относительная простота реализации как разложения (т.е. дискретизации) непрерывного сигнала в импульсную последовательность, так и последующего его восстановления.

Остановимся более подробно на последней особенности. Для этого рассмотрим физический смысл разложения Котельникова. Каждый член суммы (44) представляет собой отклик идеального фильтра нижних частот  $g_k$  (см. рис.) с частотой среза  $F$  на очень короткий импульс, приходящий в момент  $t_k=kDt$  и имеющий площадь  $S(kDt)$ . Поэтому при дискретной передаче сигнала  $S(t)$  с ограниченным спектром необходимо через равные интервалы времени  $Dt$  брать отсчеты мгновенных значений сигнала и передавать по каналу последовательность достаточно коротких импульсов длительностью  $t$ , причем  $t/Dt \ll 1$ . Амплитуду импульсов  $A_k$  в момент времени  $t_k=kDt$  выбирают так, чтобы  $A_k t = S(kDt) = S_k$ . В приемном устройстве выделенная последовательность видеоимпульсов пропускается через фильтр нижних частот, на выходе которого восстанавливается переданный непрерывный сигнал. Длительность импульсов  $t$  может быть сколь угодно малой, но выбирают ее исходя из полосы прозрачности канала связи. Частота дискретизации (тактовая частота) равна  $2F$ .

#### 1.4.2. Сигналы с полосовыми спектрами.

Если сигнал  $S(t)$  непрерывный, имеет полосовой спектр с шириной  $DF_1=f_1-f_2$ , то его можно представить в виде ортогонального разложения следующего вида :

$$S(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} S_k \frac{\sin p DF_1 (t - k/DF_1)}{p DF_1 (t - k/DF_1)} \cos \left( w_0 t - \frac{k}{DF_1} + j \right) \quad (46)$$

где  $w_0=2p(f_1+f_2)/2$  - среднее значение угловой частоты спектра сигнала;  $Dt=1/2DF_1$ ;  $S(k/DF_1)$ ;  $j(k/DF_1)$  - отсчеты амплитуды и фазы сигнала в моменты  $t_k=kDt$ . Из формулы видно, что для сигналов с полосовыми спектрами необходимо через интервал дискретизации отсчитывать мгновенные значения не только амплитуд, но и фаз. Так, в частности, дискретизируют однополосные колебания - сигналы с полосовыми спектрами.

Основные особенности ортогонального разложения Котельникова вида (46) следующие : базисная система включает совокупность ортогональных функций отсчетов, каждая из которых представляет собой модулированное по амплитуде колебание с несущей частотой  $w_0$  и огибающей, определяемой функцией  $g_k(t)$ ; помимо отсчетов амплитуд берутся отсчеты фаз; если длительность сигнала  $T$ , то число отсчетных точек  $n=T/Dt=2TDF_1$ .

В целом, все ортогональные разложения Котельникова - теоретическая основа большинства методов дискретной передачи непрерывных сигналов. Они позволяют с единых позиций рассматривать передачу как дискретных, так и непрерывных сигналов.

### 1.4.3. Теорема отсчетов в частотной области.

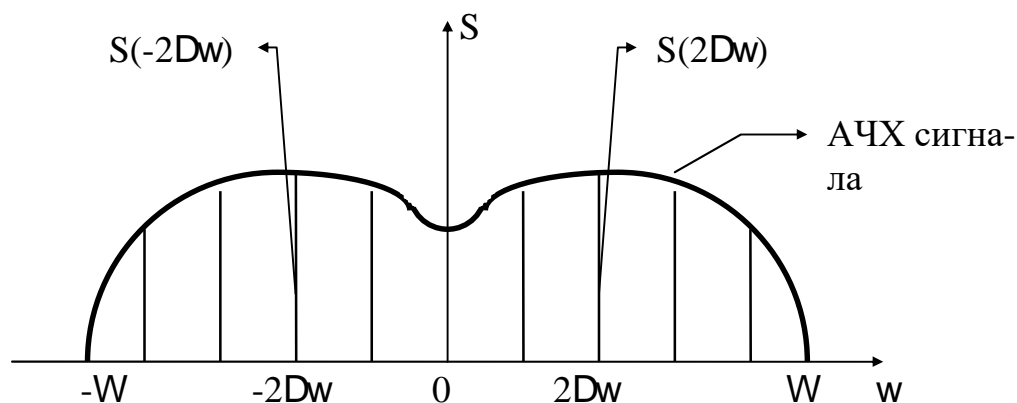
При анализе сигналов с непрерывными спектрами часто бывает необходимо представить сигнал с помощью частотных выборок спектральной функции  $\dot{S}(w)$ , а не временных выборок функции  $S(t)$ .

Для функции  $\dot{S}(w)$  можно составить ряд, аналогичный выражению (44), на основании взаимной заменяемости переменных  $t$  и  $w$  в паре преобразований Фурье (36), (37). Применительно к выражению (44) это означает, что  $t$  следует заменить на  $w$ ,  $2W=2pF$  на  $T$ ,  $Dt=1/2F$  на  $Dw=2p/T$ .

Таким образом получаем

$$\dot{S}(w) = \overset{u}{\underset{k=-u}{\overset{\circ}{\mathbf{a}}}} \dot{S}(kDw) \frac{\sin \frac{T}{2}(w - kDw)}{\frac{T}{2}(w - kDw)} = \overset{u}{\underset{k=-u}{\overset{\circ}{\mathbf{a}}}} \dot{S}(k \frac{2p}{T}) \frac{\sin \frac{T}{2}(w - k \frac{2p}{T})}{\frac{T}{2}(w - k \frac{2p}{T})} \quad (47)$$

Расстановка частотных выборок иллюстрируется следующим рисунком.



Если ранее временной интервал между двумя соседними выборками не должен был превышать  $2p/2W$ , то теперь частотный интервал не должен превышать  $2p/T$ . При ширине спектра  $2W$ , охватывающей область частот  $-W < w < W$ , число выборок равно  $2W/Dw = 2FT$ , т.е. как и при представлении сигнала рядом (44).

В общем случае выборки  $\dot{S}(k2p/T)$  являются комплексными числами и в каждой отсчетной точке на оси частот должны быть заданы два параметра - действительная и мнимая части  $\dot{S}(k2p/T)$ , или модуль и аргу-

мент. Таким образом общее число параметров получается вдвое большим, чем при временном представлении сигнала, когда выборки  $S(k/2F)$  - действительные числа. Избыточность представления сигнала в частотной области легко устраняется, если учесть, что  $\dot{S}(k2p / T)$  и  $\dot{S}(-k2p / T)$  являются комплексно-сопряженными функциями, так что задание одной из них однозначно определяет другую. Таким образом, спектр сигнала полностью характеризуется совокупностью комплексных выборок, взятых только в области положительных частот, и число независимых параметров  $N=2FT$ , как и при представлении сигнала во временной области.

## 1.5. Корреляция и спектральные характеристики случайных сигналов и помех.

Корреляционные и спектральные характеристики случайных процессов составляют предмет статистической радиотехники. Здесь же мы кратко систематизируем сведения о характеристиках случайных процессов, которые необходимы для понимания дальнейшего материала.

### 1.5.1. Корреляционные функции.

Под корреляцией понимают вероятностную зависимость между величинами, которая возникает тогда, когда одна из величин зависит не только от другой, но и от ряда случайных факторов, или когда среди условий, от которых зависят и та, и другая величины, имеются общие для них обоих условия.

Зависимости такого рода можно описать или при помощи корреляционных таблиц, или с помощью корреляционных функций. Под автокорреляционной функцией  $K(t_1, t_2)$  понимают взаимосвязь (т.е. корреляцию) значений  $X(t_1) = X_1$  и  $X(t_2) = X_2$  случайного процесса  $X(t)$  в моменты  $t_1$  и  $t_2$ , определяемую равенством :

$$K(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (X_1 - m_1)(X_2 - m_2) f_2(X_1, X_2, t_1, t_2) dX_1 dX_2, \quad (48)$$

где  $m_i = \int_{-\infty}^{\infty} X_i f_1(X_i, t_i) dX_i$  - математическое ожидание процесса в моменты  $t_i$ ;

$f_i(X_i, t_i), f_2(X_1, X_2, t_1, t_2)$  - одномерная и двумерная плотности распределения  $X(t)$ .

Если  $K(t_1, t_2)$ , сечения  $X_1$  и  $X_2$  не коррелированы. Для стационарных случайных процессов  $m_1 = m_2 = m$ , а корреляционная функция зависит только от  $t = t_1 - t_2$ , т.е.

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (X_1 - m)(X_2 - m) f_2(X_1, X_2, t) dX_1 dX_2 \quad (49)$$

Часто используют нормированную корреляционную функцию  $r(t) = K(t)/K(0)$ , где  $K(0) = D$  - дисперсия процесса, характеризующая рассеяние (разброс) корреляционной функции. Функция  $r(t)$  обладает сле-

дующими свойствами :  $r(t)=r(-t)$ ;  $r(0)=1$ ;  $r(0)^3/r(t)$ , если  $m=0$  и  $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = 0$ .

Интегральной характеристикой времени корреляции сечений процесса служит интервал корреляции

$$Dt = 2 \int_0^{\infty} |r(t)| dt \quad (50)$$

Если сечения отстоят друг от друга на расстояние, большее  $Dt$ , при расчетах их считают некоррелированными. Операцию определения корреляционных функций с помощью интегралов (48) и (49) называют усреднением по множеству (по ансамблю). Обозначим ее через  $M[\cdot]$ . Например, (49) удобно сокращенно записывать так :  $K(t)=M[(X_1-m)(X_2-m)]$ .

### 1.5.2. Экспериментальная оценка характеристик случайных сигналов.

В экспериментальных исследованиях характеристики случайных процессов получают усреднением по времени. Эту операцию обозначим через  $\langle \cdot \rangle$ . Оценка математического ожидания процесса по  $j$ -й реализации длительностью  $T$  будет

$$m_j^*(T) = \langle X_j(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} X_j(t) dt \quad (51)$$

Оценка корреляционной функции будет

$$\begin{aligned} K_j^*(t, T) &= \langle [X_j(t) - m^*][X_j(t+t) - m^*] \rangle = \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [X_j(t) - m^*][X_j(t+t) - m^*] dt \end{aligned} \quad (52)$$

Звездочка указывает, что оценки - случайные величины, зависящие от номера выбранной реализации  $j$  и длительности интервала наблюдения  $T$ .

### 1.5.3. Эргодичность сигналов.

Стационарные случайные процессы ( процессы, вероятностные характеристики которых не зависят от времени  $t$  и зависят только от интервала  $t_2-t_1$ ), у которых средние по времени совпадают со средними по множеству, называют эргодическими, а такое свойство процессов - эргодичностью. Например, для эргодических процессов при любом  $j$  с вероятностью единица выполняются условия

$$M[X(t)] = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle X_j(t) \rangle, j = 1, 2, 3, \dots, \quad (53)$$

$$M[(X_1 - m)(X_2 - m)] = \lim \langle [X_j(t) - m^*][X_j(t + \tau) - m^*] \rangle.$$

Эргодичность процессов имеет важное значение потому, что наблюдение за большим числом реализаций случайного процесса можно заменить наблюдением за одной, по достаточно продолжительной реализацией. Полученные таким образом характеристики процесса (математическое ожидание, дисперсия, корреляционная функция, спектральная плотность и др.) будут с достаточной точностью совпадать с теми, которые получают путем обработки большого числа реализаций.

#### 1.5.4. Преобразования Хинчина - Винера.

Корреляционные и спектральные характеристики случайного процесса связаны соотношениями Хинчина - Винера :

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T K(t) \cos \omega t dt, \quad (54)$$

$$K(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T S(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S(\omega) \cos \omega t d\omega, \quad (55)$$

где  $S(\omega)$  - спектральная плотность случайного процесса.

Эти соотношения являются преобразованиями Фурье для случайных процессов. Особенность их в том, что в интегралах фигурируют не процессы, а их корреляционные функции. Из (54), (55) следует, что дисперсия процесса

$$D = K(0) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T S(\omega) d\omega \quad (56)$$

Интегральной характеристикой спектральной плотности процесса служит ширина спектра

$$\Delta \omega = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{S_m} \int_0^T S(\omega) d\omega = \Delta \omega / S_m, \quad (57)$$

где  $S_m$  - максимальное значение  $S(\omega)$ . Интеграл (57) - это основание прямоугольника с высотой  $S_m$ , площадь которого равна площади под кривой  $S(\omega)$ .

**1.5.5. Взаимно - корреляционные функции и взаимные спектральные плотности сигналов** используют наряду с корреляционной функцией и спектральной плотностью. Взаимно - корреляционная функция двух процессов  $X_1(t)$  и  $X_2(t)$

$$K_{12}(t) = M[(X_1(t) - m_1)[X_2(t + \tau) - m_2]], \quad (58)$$

где  $m_1$  и  $m_2$  - математические ожидания этих процессов.

Взаимная спектральная плотность

$$S_{1,2}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{1,2}(t) e^{-j\omega t} dt = 2 \int_0^{\infty} K_{1,2}(t) \cos \omega t dt \quad (59)$$

Если взаимные характеристики полученные усреднением по множеству, совпадают с таковыми, полученными усреднением по времени, то процессы называют совместно - эргодическими.

## 1.6. Модели случайных сигналов и помех.

### 1.6.1. Телеграфный сигнал.

Так называют случайную последовательность прямоугольных положительных и отрицательных импульсов со случайными длительностями  $t_1$  и  $t_2$  и детерминированными амплитудами  $+S$  и  $-S$ . Если длительности импульсов распределены по показательным законам  $f_1(t_1) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 t_1}$  и  $f_2(t_2) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 t_2}$  с параметрами  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , то телеграфный сигнал является стационарным случайным процессом, который имеет показательную корреляционную функцию

$$K(t) = S^2 e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} = S^2 e^{-a t}, \quad (60)$$

где  $S^2$  - дисперсия процесса,  $a = \lambda_1 + \lambda_2$  - параметр, значения которого полностью определяют корреляционные и спектральные свойства телеграфного сигнала.

Телеграфный сигнал обладает важным свойством. Изменением  $a$  можно в широком диапазоне изменять корреляционные и спектральные характеристики процесса. Характеристики телеграфного сигнала при  $a \rightarrow 0$  приближаются к характеристикам постоянной составляющей, при  $a \rightarrow \infty$  - к характеристикам белого шума.

Определим интервал корреляции, спектральную плотность и ширину спектра телеграфного сигнала. Интервал корреляции определим по формуле (50) :

$$Dt = 2 \int_0^{\infty} \frac{K(t)}{S^2} dt = \frac{2}{a} \quad (61).$$

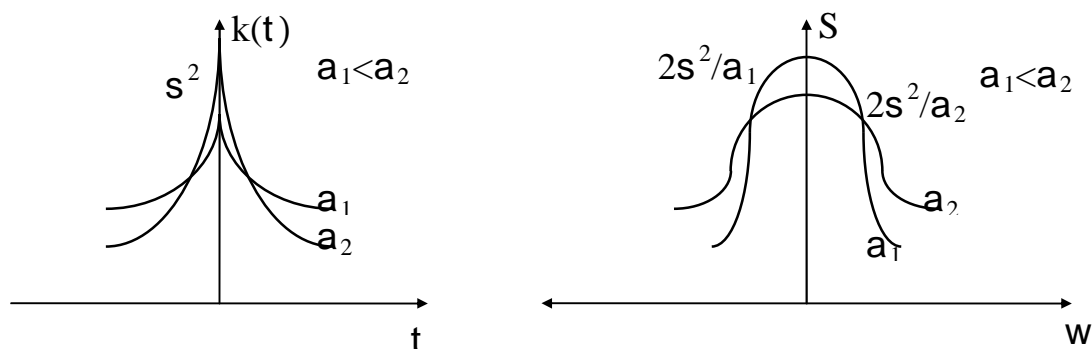
Из (61) следует, что чем больше  $a$ , тем меньше время корреляции процесса. При  $a \rightarrow 0$   $Dt \rightarrow \infty$  процесс вырождается в детерминированный, а при  $a \rightarrow \infty$   $Dt \rightarrow 0$  - в белый шум, у которого все сечения, в том числе и соседние, не коррелированы.



Спектральную плотность телеграфного сигнала определим с помощью (54) :

$$S(\omega) = 2s^2 \int_0^{\infty} e^{-a_1 t} \cos \omega t dt = \frac{4ps^2 p}{(2pa)^2 + \omega^2} \quad (62)$$

Графики функций  $K(t)$  и  $S(\omega)$  имеют вид :



В соответствии с (57) ширина спектра телеграфного сигнала

$$D\omega = \frac{a}{2s^2} \int_0^{\infty} \frac{2s^2 a}{(2pa)^2 + \omega^2} d\omega = ap, \quad DF_1 = \frac{D\omega}{2p} = \frac{a}{2}. \quad (63)$$

При  $a \rightarrow 0$   $D\omega \rightarrow 0$  процесс вырождается в постоянную составляющую, при  $a \rightarrow \infty$   $D\omega \rightarrow \infty$  - в белый шум, у которого спектральная плотность постоянна в широком диапазоне частот. Для телеграфного сигнала

$$D\omega DF_1 = 1 \quad (64)$$

Отсюда следует важный вывод, что спектр случайного процесса тем шире, чем меньше интервал корреляции процесса.

### 1.6.2. Белый шум.

Его используют как модель наиболее существенной помехи в каналах связи. Он является стационарным случайным процессом с постоянной спектральной плотностью  $S(\omega) = S_0$ . Название “белый шум” возникло по аналогии с применяемым в оптике белый свет, который содержит все цвета спектра и все спектральные составляющие которого имеют примерно одинаковую энергию. Определяя белый шум как предельное состояние телеграфного сигнала при  $a \rightarrow \infty$ , найдем его свойства. Умножим и разделим выражения для спектральной плотности телеграфного сигнала на  $a$ .

Введем спектральную плотность белого шума

$$S_0 = 2s^2/a, \quad (65)$$

$$\text{тогда} \quad S(\omega) = S_0(2pa)^2 / [(2pa)^2 + \omega^2] = S_0 / (1 + \omega^2/a^2). \quad (66)$$

Из (66) следует, что  $\lim_{a \rightarrow \infty} S(w) = S_0$ ; если  $s^2 \rightarrow \infty$ , то

$$\lim_{s^2, a \rightarrow \infty} (s^2 / a) = const.$$

Рассмотрим, как изменяются дисперсия и корреляционная функция телеграфного сигнала при  $a \rightarrow \infty$ . Используя (65) выразим через  $a$  дисперсию

$$s^2 = 0.5W_0a = S_0DF_1 \quad (67)$$

Спектральная плотность - это мощность процесса, которая приходится на 1Гц полосы частот, так как  $S_0 = s^2 / DF_1$ . Из (67) следует, что  $\lim_{a \rightarrow \infty} s^2 \rightarrow \infty$ , т.е. мощность белого шума не ограничена. Подставив значения мощности из (65) в (60), получим

$$K(t) = 0.5 S_0 a e^{-a|t|} \quad (68)$$

Т.к.  $\lim_{a \rightarrow \infty} a e^{-a|t|} \rightarrow 0$  при  $|t| \neq 0$ , то и  $\lim_{a \rightarrow \infty, |t| \neq 0} K(t) \rightarrow 0$ . При  $|t| \rightarrow 0$  д.б.  $a \rightarrow \infty$ , но так как  $a|t| = const$ , след  $\lim_{a \rightarrow \infty, |t| \rightarrow 0} K(t) \rightarrow \infty$  поскольку  $S_0 \rightarrow \infty$  при  $a \rightarrow \infty$ .

Поэтому корреляционную функцию в окрестностях точки  $t=0$  аппроксимируют дельта - функцией и записывают

$$K(t) = 0.5 S_0 \delta(t) \quad (69)$$

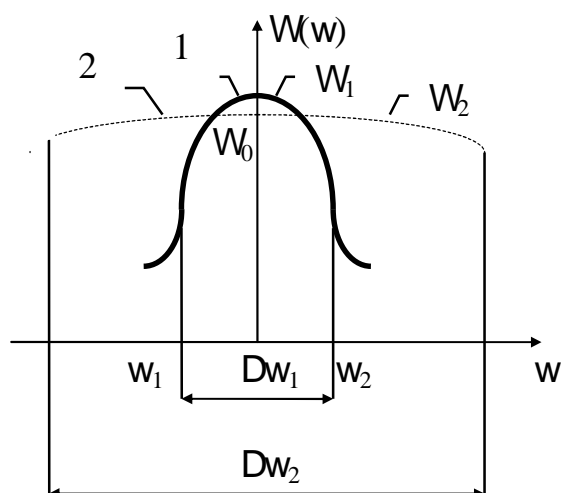
Определим спектральную плотность белого шума через  $K(t)$

$$S(w) = 2 \int_0^\infty \frac{S_0}{2} \delta(t) \cos wt dt = S_0 \quad (70)$$

Таким образом, белый шум обладает следующими свойствами : его спектральная плотность постоянна, составляющие при любых  $|t| \neq 0$  не коррелированы, дисперсия бесконечна. Многие помехи в технике связи, вычислительной технике и других областях рассматриваются как белый шум. К таким помехам относят флуктуационные шумы, помехи в многоканальных системах и сетях связи, и др. Белый шум - понятие идеализированное. Не существует источников сигналов и помех, которые могли бы обеспечить бесконечную мощность, а также генерировать реализации процессов с некоррелированными близкими отсчетами. Этой идеализацией можно пользоваться, если действие помехи с шириной спектра  $\Delta w_2$  рассматривают в полосе частот  $\Delta w_1$  полезного сигнала или системы и соблюдается условие

$$\Delta w_1 / \Delta w_2 < 1 \quad (71)$$

а спектральная плотность помехи  $W_2(w)$  изменяется на интервале  $\Delta w_1$ . На следующем рисунке эти условия иллюстрируют графики спектральных характеристик сигнала и помехи.



Характеристиками помехи как белого шума служат спектральная плотность  $S_0$  и средняя мощность в полосе частот сигнала

$$s^2 = S_0 DF_I = S_0 Dw_1 / 2p \quad (72)$$

Частотные составляющие помехи, которые лежат за пределами полосы пропускания системы, в инженерных расчетах можно не учитывать.

### 1.6.3. Гауссовский процесс.

Случайный процесс, для которого  $n$ -мерная плотность распределения

$$f_n(\overline{x_1}, \overline{x_n}; \overline{t_1}, \overline{t_n}) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi s^2)^n A}} \exp \left\{ -\frac{1}{2s^2 A} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n A_{ik} X_i X_k \right\} \quad (73)$$

называют гауссовским. Здесь

$$A = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{vmatrix} - \text{определитель};$$

$s^2$  - дисперсия;  $m=0$ ;  $R_{ik}=K(t_i, t_k)$ ;  $A_{ik}$  - алгебраическое дополнение  $R_{ik}$  в  $A$ . Для стационарного процесса  $R_{ik}=R_{ki}$ , где  $t=t_k-t_i$ . Поэтому для гауссовского процесса по корреляционной функции можно определить плотность распределения любого порядка. Первые два значения плотности распределения

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi s^2}} e^{-x^2/2s^2}, x \in (-\infty, \infty), \quad (74)$$

$$f_2(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi s^2 \sqrt{1-p^2(t)}} \exp \left\{ -\frac{x_1^2 + x_2^2 + 2p(t)x_1 x_2}{2s^2 [1-p^2(t)]} \right\} \quad (75)$$

### 1.6.4. Гауссовский белый шум.

Если гауссовский процесс является белым шумом, все  $n$  сечений его не коррелированы,  $A_{ik}=I$ ,  $A=I$ ,  $R_{ik}=R_{ki}=\delta_{ik}s^2$ , ( $\delta_{ik}$  - символ Кронекера). По-

этому плотность распределения N-го порядка определяют как произведение из  $n$  одномерных плотностей распределения

$$f_n(\overline{x_1, x_n}; \overline{t_1, t_n}) = \prod_{i=1}^n f(x_i, t_i) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi s^2)^n}} \exp\left\{-\frac{1}{2s^2} \sum_{i=1}^n x_i^2\right\} \quad (76)$$

Распределенное по закону Гаусса колебание образуется в результате сложения большого числа независимых или слабокоррелированных случайных колебаний.

## 1.7. Узкополосные и аналитические сигналы.

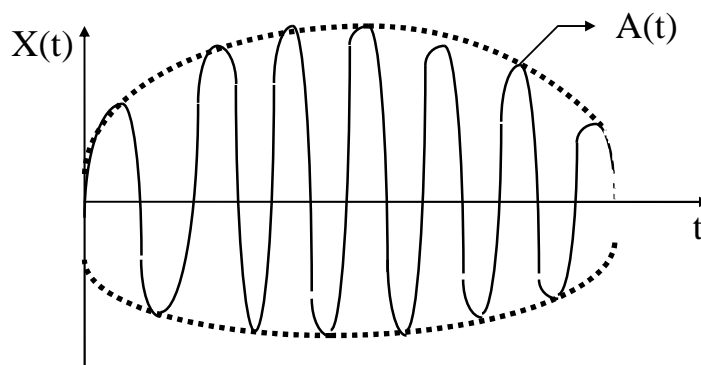
### 1.7.1. Определение узкополосного процесса.

Узкополосные и аналитические сигналы широко используют как модели реальных сигналов и помех. Процесс называют узкополосным, если

$$\Delta\omega/\omega_0 \ll 1, \quad (77)$$

где  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$  - ширина спектра ;  $\omega_0 = (\omega_2 + \omega_1)/2$  - средняя частота.

Узкополосные процессы могут быть реализованы на выходе устройств, работающих на высоких и промежуточных частотах. На экране осциллографа эти реализации имеют вид синусоиды с медленно меняющейся амплитудой и частотой. ( см. рис.)



### 1.7.2. Формы математических моделей.

Используют две равноценные формы аналитического представления узкополосных процессов в виде : амплитудно-частотно-модулированного колебания

$$X(t) = A(t) \cos[\omega_0 t + \Phi(t)], \quad (78)$$

где  $A(t)$  - огибающая,  $\Phi(t)$  - фаза ;

суммы двух амплитудно-модулированных колебаний

$$X(t) = A(t) \cos \omega_0 t + b(t) \sin \omega_0 t \quad (79)$$

$$\text{где } a(t) = A(t) \cos \Phi(t), \quad b(t) = A(t) \sin \Phi(t), \quad (80)$$

$$A(t) = \sqrt{a^2(t) + b^2(t)}, \quad \Phi(t) = \arctg[b(t)/a(t)]. \quad (81)$$

Выбор формы представления связан с выбором системы координат : в полярной применяют представление (80) и (81) устанавливают связь между характеристиками узкополосного процесса в полярной и декартовой системах координат.

Представление (79) можно рассматривать и как частный случай ортогонального разложения (используется всего одна гармоника). В то же время введение зависимости коэффициентов разложения от времени позволяет получить ряд полезных для описания модулированных сигналов свойств. Составляющую  $a(t)$  называют синфазной, а  $b(t)$  - квадратурной (говорят, что  $a(t)$  и  $b(t)$  находятся в квадратуре). Функции  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $A(t)$  и  $\Phi(t)$  - медленно меняющиеся по отношению к гармоническому колебанию с частотой  $\omega_0$ . Функции  $a(t)$  и  $b(t)$  можно рассматривать и как ортогональные составляющие комплексной огибающей

$$\dot{A}(t) = a(t) + jb(t) = A(t)e^{jF(t)}, \quad (82)$$

а в более общем случае узкополосный процесс  $X(t)$  - как вещественную часть комплексной функции :

$$\dot{X}(t) = X(t) + j\dot{X}(t) = A(t)\exp\{j[F(t) + \omega_0 t]\}, \quad (83)$$

где

$$\begin{aligned} X(t) &= \operatorname{Re} \left\{ \dot{X}(t) \right\} = A(t) \cos[F(t) + \omega_0 t] \\ \dot{X}(t) &= \operatorname{Im} \left\{ \dot{X}(t) \right\} = A(t) \sin[F(t) + \omega_0 t] \end{aligned} \quad (84)$$

Комплексная форма записи узкополосного процесса (83) - обобщение символической записи гармонических колебаний, в которой  $A$  и  $\Phi$  рассматривают не как постоянные величины, а как функции времени.

### 1.7.3. Аналитические сигналы.

Если  $X(t)$  и  $\dot{X}(t)$  составляют пару преобразований Гильберта

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{X(t)}{t - \tau} d\tau, \quad X(t) = -\frac{1}{\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \frac{\dot{X}(\tau)}{t - \tau} d\tau, \quad t = t_2 - t_1 \quad (85)$$

то сигнал  $\dot{X}(t)$  называют аналитическим. Если сигнал  $X(t)$  имеет непрерывный спектр

$$S(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (86)$$

то спектр сопряженной функции  $\dot{X}(t)$

$$\dot{S}(j\omega) = [-j \operatorname{sign} \omega] S(j\omega), \quad (87)$$

где знаковая функция  $\text{sign} w = \begin{cases} 1, w > 0, \\ 0, w = 0, \\ -1, w < 0. \end{cases}$

Прямое преобразование Гильберта можно рассматривать как результат прохождения  $X(t)$  через линейный четырехполосник, сдвигающий фазу всех составляющих спектра на угол  $-\pi/2$ . Комплексная частотная и импульсная характеристики такого четырехполосника, соответственно, равны

$$K(j\omega) = -j \text{sign} \omega, \quad g(t) = 1/\pi t \quad (88)$$

Следовательно спектр аналитического сигнала  $\dot{X}(t)$

$$S_{\dot{X}}(j\omega) = \begin{cases} 2S(j\omega), \omega > 0 \\ S(0), \omega = 0 \\ 0, \omega < 0 \end{cases} \quad (89)$$

односторонний и существует только в области положительных частот. Это удобное свойство.

#### 1.7.4. Условие ортогональности сигналов в усиленном смысле.

Аналитические сигналы называют ортогональными в усиленном смысле, если справедливо условие

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{X}_i(t) \dot{X}_j^*(t) dt = 0, \quad i \neq j, \quad (90)$$

где  $*$ ) означают величину, комплексно - сопряженную с  $\dot{X}_j(t)$ .

Условие (90) равносильно совместному выполнению двух условий

$$\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{X}_i(t) X_j(t) dt = 0, \quad \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \dot{X}_i(t) \dot{X}_j^*(t) dt = 0, \quad i \neq j,$$

Из (87) следует, что спектры и корреляционные функции случайных процессов  $X(t)$  и  $\dot{X}(t)$  одинаковы. Взаимный энергетический спектр  $S_{12}(\omega) = iS(\omega)$ , а взаимно - корреляционная функция

$$K_{12}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty S(\omega) \sin \omega t d\omega \quad (91)$$

#### 1.7.5. Корреляционная функция узкополосного процесса.

Рассмотрим как она определяется применительно к процессу, спектральная плотность которого равномерна на интервале  $[\omega_1, \omega_2]$  и для всех частот полосы  $D\omega = \omega_2 - \omega_1$ , равна  $S$ .

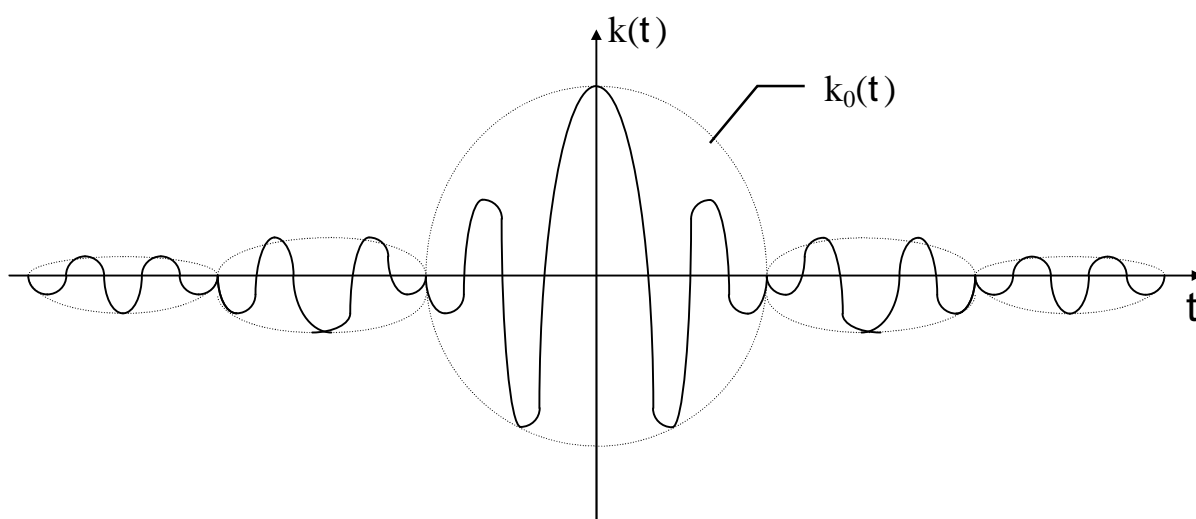
Используя (54), получим

$$K(t) = \frac{1}{p} \int_{w_1}^{w_2} S \cos wt dw = \frac{S}{pt} (\sin w_2 t - \sin w_1 t) = \frac{DwS}{p} \frac{\sin(Dwt/2)}{Dwt/2} \cos w_0 t =$$

$$= Dr_0(t) \cos w_0 t, \quad (92)$$

где  $D$  - дисперсия процесса,  $r_0(t) = K_0(t)/D_0$  - нормированная корреляционная функция огибающей;  $K_0(t)$  - корреляционная функция огибающей.

На рис. показан график корреляционной функции (92). Из сказанного следует важный вывод: для определения корреляционной функции узкополосного процесса необходимо найти корреляционную функцию огибающей и умножить ее на  $\cos w_0 t$



### 1.8. Выводы.

1. Обобщенной спектральной теорией сигналов называют совокупность методов их аналитического представления в виде ряда (1). Это одна из наиболее удобных форм описания сигналов для анализа линейных и нелинейных систем. Обобщенная спектральная теория исследует основные закономерности спектрального анализа, общие для различных систем базисных функций и ставит задачи оптимального выбора этих систем для успешного решения задач передачи и обработки сигналов.

2. Ортогональные разложения Котельникова (44), (46) для непрерывных сигналов с ограниченными и полосовыми спектрами, так же как и преобразования Фурье для периодических и непериодических сигналов, являются для практики важными частными случаями обобщенного ряда Фурье (6), примерами применения обобщенной спектральной теории. Ряды Котельникова позволяют представить непрерывные сигналы в виде дискретных последовательностей импульсов, отстоящих друг от друга на интервал дискретизации. Этот интервал полностью определяется верхней граничной частотой для сигналов с ограниченным спектром и шириной спектра для сигналов с полосовыми спектрами.



Наиболее важным для практики свойством рядов Котельникова является относительно простая реализация дискретизации и восстановления непрерывных сигналов. Поэтому ортогональные разложения Котельникова служат основой построения дискретных методов передачи непрерывных сигналов. Во многих случаях они позволяют с единых позиций рассматривать передачу дискретных и непрерывных сигналов.

3. При решении задач теории информации и передачи сигналов широко используют такие характеристики сигналов, как корреляционная функция, спектральная плотность распределения мощности, дисперсия, интервал корреляции, ширина спектра, взаимокорреляционная функция двух сигналов и взаимная спектральная плотность распределения мощности двух процессов.

Корреляционная функция показывает характер статистической связи двух значений случайного процесса, отстоящих друг от друга на интервал времени. Для определения таких функций используют операции усреднения по множеству (49) и времени (52). Связь между корреляционными и спектральными характеристиками случайного процесса устанавливают преобразования Ханчина - Винера (54) и (55), которые являются аналогом преобразований Фурье для детерминированного процесса.

4. Для моделирования случайных сигналов и помех часто используют телеграфный сигнал - случайный процесс с показательной корреляционной функцией (60), белый шум, гауссовский процесс и гауссовский белый шум. Случайный процесс с показательной корреляционной функцией обладает полезной особенностью. Изменяя единственный параметр  $a$  в (60), можно в широких пределах изменять корреляционные и спектральные свойства процесса. При  $a \rightarrow 0$  процесс вырождается в детерминированный, при  $a \rightarrow \infty$  - в белый шум. Белый шум является стационарным случайным процессом с постоянной спектральной плотностью мощности на всех частотах, его используют как модель наиболее тяжелого вида помех. Гауссовским называют процесс, который имеет нормальное распределение мгновенных значений (72). Нормально распределенное колебание образуется в результате сложения большого числа независимых или слобокоррелированных случайных колебаний. Белый шум, у которого распределение мгновенных значений является нормальным, называют гауссовским.

5. Как вид ортогональных разложений можно рассматривать представление реальных сигналов и помех в виде узкополосных (78), (79) и аналитических (83) сигналов. Особенность такого представления в том, что коэффициенты разложения есть функции времени. Процесс называют узкополосным, если ширина его спектра относительно мала по сравнению со средней частотой спектра (77). Понятие об аналитических сигналах основано на обобщении символической записи гармонических колебаний в комплексной форме. Спектр аналитического сигнала существует только в

области положительных частот. Корреляционная функция узкополосного процесса (92) равна произведению корреляционной функции огибающей (см. (78) ) на  $\cos \omega_0 t$ , где  $\omega_0$  - средняя частота спектра процесса.

## Управление информационными параметрами сигналов .

### 1.9. Классификация методов модуляции.

*Надо сказать что такое модуляция и для чего она нужна.*

Исследование видов модуляции необходимо для определения свойств каналов, сокращения избыточности модулированных сигналов и улучшения использования мощности передатчиков, определения потенциальной помехоустойчивости, помех соседним каналам и успешного решения проблем электромагнитной совместимости радиосистем ; разработки оптимальных методов реализации.

Идеальная непрерывная модуляция - это перенос спектра полезного сигнала в область более высоких частот без нелинейных, частотных и фазовых искажений. Если полезный сигнал представить в виде узкополосного процесса

$$U(t)=A(t)\cos[w_0t+\Phi(t)], \quad (1)$$

то в идеальном случае модулированный сигнал

$$S(t)=A(t)\cos[w_1t+\Phi(t)], \quad (2)$$

где  $w_1=w_0+w_2$  - средняя частота сигнала-переносчика.

Из (1) и (2) следует, что при идеальной модуляции законы распределения огибающей и фазы узкополосного сигнала не должны изменяться, изменяется только средняя частота. Корреляционная функция огибающей не изменяется, а частота “косинусоидального заполнения” корреляционной функции модулированного сигнала равна  $w_1$ . Спектр модулированного сигнала смещается в область средней частоты  $w_1$ , но не изменяет своей формы. Реально модуляция сопровождается нелинейными, частотными и фазовыми искажениями. Поэтому, как правило, ширина спектра модулированных сигналов больше ширины спектра полезных сигналов, искажаются законы распределения огибающей и фазы, изменяются формы корреляционных функций и спектральных плотностей. Если полезный сигнал - случайный стационарный процесс, а сигнал - переносчик - гармоническое колебание, то модулированный сигнал будет нестационарным случайным процессом, корреляционная функция и спектральная плотность которого зависят от текущего момента времени.

Для определения средних спектральных и корреляционных характеристик модулированного сигнала необходимо применять операцию усреднения но необходимо применять операцию усреднения по времени. В этом более общем случае соотношения Хинчина - Винера принимают вид

$$S_I(w)=2 \int\limits_0^{\infty} \langle K(t, t) \rangle \cos wt dt \quad (3)$$

$$K_1(t) = \frac{1}{P_0} \overline{\langle S(w, t) \rangle} \cos wt \, dw, \quad (4)$$

где  $S_1(w)$ ,  $K_1(t)$  - средняя спектральная плотность и средняя корреляционная функция модулированного сигнала.

Корреляционные функции, спектральные плотности, законы распределения огибающей и фазы модулированных сигналов получают по заданным оператором модуляции, корреляционным функциям или спектральным плотностям, законам распределения огибающих и фаз полезного сигнала и переносчика.

Для классификации видов модуляции удобно использовать следующие признаки : характер полезного сигнала и переносчика ( детерминированный процесс, случайный стационарный процесс, случайный нестационарный процесс); сигналов (аналоговые, дискретные); информационного параметра (амплитуда, частота, фаза, длительность, период и т.д.) и др. В простейшем случае учитывают всего два признака : модулирующего сигнала и переносчика. Условно введем следующие классы модулирующих сигналов  $U(t)$  :

- А - детерминированные непрерывнозначные процессы;
- В - детерминированные дискретные последовательности;
- С - случайные стационарные непрерывнозначные процессы;
- Д - случайные стационарные последовательности ;
- Е - случайные нестационарные непрерывнозначные процессы ;
- Ф - случайные нестационарные последовательности ;
- Г - дискретные случайные стационарные последовательности ;
- Н - дискретные случайные нестационарные последовательности ( см. ГОСТ 2187 - 76 ).

Аналогично введем классы переносчиков  $X(t)$  и для удобства записи обозначим их цифрами 1 - 8. В соответствии с введенными обозначениями класс А1 включает все непрерывные виды модуляции, в которых полезные сигналы и переносчики являются детерминированными непрерывными процессами ; класс В1 - все виды модуляции, в которых каждый сигнал рассматривают как детерминированную импульсную последовательность, а переносчик - как детерминированный непрерывный сигнал.

Аналогично объединяют в классы остальные виды модуляции. В теории передачи информации и передачи сигналов основное внимание уделяют тем классам модуляции, в которых полезные сигналы рассматривают как случайные. Это обусловлено тем, что детерминированные сигналы не несут информации. Далее, в процессе составления описания, рассматривают корреляционные и спектральные характеристики модулированных случайных сигналов.

### 1.10. Корреляционные и спектральные характеристики модулированных сигналов.

Особенности определения корреляционных и спектральных характеристик модулированных сигналов рассмотрим для непрерывных видов модуляции. Для других видов эти характеристики изучаются аналогично. Для многих видов непрерывной модуляции модулированный сигнал можно рассматривать как узкополосный процесс вида (2). Поэтому характеристики модулированного сигнала изучают методами, изложенными в разделе “Узкополосные сигналы”. Покажем, как определяют корреляционную функцию и спектральную плотность модулированного сигнала. Применяя операцию усреднения по времени к корреляционной функции

$$K(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} S(t)S(t-t)dt \approx \int_{-\infty}^{\infty} S(t)S(t-t)dt,$$

и выражая  $\cos[w_1 t + \Phi(t)]$  в формуле (2) через показательные функции по формуле Эйлера, находим

$$K(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(t) 0.5 \left\{ e^{j[w_1 t + F(t)]} + e^{-j[w_1 t + F(t)]} \right\} A(t-t) 0.5 \left\{ e^{j[w_1(t-t) + F(t-t)]} + e^{-j[w_1(t-t) + F(t-t)]} \right\} dt$$

После перемножения функций, стоящих под интегралами получим

$$\begin{aligned} K(t) = & \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} A(t)A(t-t) \exp\{j[w_1 t + F(t) + F(t-t)]\} \exp(2jw_1 t) dt + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} A(t)A(t-t) \exp\{-j[w_1 t + F(t) - F(t-t)]\} \exp(-2jw_1 t) dt + \\ & + \int_{-\infty}^{\infty} A(t)A(t-t) \exp\{j[w_1 t + F(t-t) + F(t)]\} + \exp\{-j[w_1 t + F(t-t) + F(t)]\} dt \end{aligned}$$

В первых двух интегралах множители  $\exp(2jw_1 t)$  и  $\exp(-2jw_1 t)$  являются быстроизменяющимися по сравнению с функциями  $A(t), A(t-t), \Phi(t), \Phi(t-t)$ , поэтому значениями этих интегралов можно пренебречь по сравнению со значением третьего интеграла. Следовательно,

$$K(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} A(t)A(t-t) \cos[w_1 t + F(t-t) - F(t)] dt \quad (5)$$

Выражение (5) - основное для определения корреляционных функций модулированных сигналов при различных видах непрерывной модуляции.

Рассмотрим в качестве примера балансную модуляцию случайным процессом  $U(t)$  с корреляционной функцией  $K_U(t) = De^{-a^{1/4} t^{1/2}}$  гармонического

колебания с единичной амплитудой  $X(t) = \cos \omega_0 t$ . В этом случае  $S(t) = U(t) \cos \omega_0 t$  и интеграл (5) принимает простой вид:

$$K(t) = \frac{1}{2} \cos \omega_0 t \int_{-\infty}^{\infty} U(t) U(t - \tau) d\tau.$$

Интеграл в правой части - корреляционная функция  $K_1(t)$  огибающей  $U(t)$ , а  $(\cos \omega_0 t)/2$  - корреляционная функция  $K_2(t)$  гармонического колебания. Поэтому, как и следовало ожидать (см. раздел “Узкополосные колебания”), корреляционная функция гармонического колебания, балансно-модулированного случайным процессом, равна

$$K(t) = K_1(t) K_2(t) = 0.5 D e^{-a|t|^{1/2}} \cos \omega_0 t \quad (6)$$

Спектральная плотность гармонического колебания, балансно-модулированного случайным процессом, определим с помощью соотношения Хинчина-Винера (54) :

$$\begin{aligned} S(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D}{2} e^{-a|t|^{1/2}} \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{D}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|^{1/2}} 0.5(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{D}{4} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t[-j(\omega_0 + \omega) + 2pa]} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{t[-j(\omega_0 - \omega) - 2pa]} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{t[-j(\omega_0 + \omega) + 2pa]} dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{t[j(\omega_0 - \omega) - 2pa]} dt = \\ &= \frac{D}{4} \left[ \frac{1}{j(\omega_0 - \omega) + 2pa} - \frac{1}{j(\omega_0 - \omega) - 2pa} + \frac{1}{-j(\omega_0 + \omega) + 2pa} - \frac{1}{j(\omega_0 + \omega) - 2pa} \right] \end{aligned}$$

Окончательно имеем :

$$S(\omega) = \frac{2paD}{2} \left[ \frac{1}{(\omega_0 + \omega)^2 + (2pa)^2} + \frac{1}{(\omega_0 + \omega)^2 - (2pa)^2} \right] \quad (7).$$

Следовательно, спектр гармонического колебания, балансно-модулированного случайным процессом, имеет две боковые полосы частот в областях  $\omega_0$  и  $-\omega_0$ . Если на основе балансно-модулированного сигнала образовать аналитический сигнал  $\dot{S}(t) = [U(t) \cos \omega_0 t + jU(t) \sin \omega_0 t] \sqrt{2}$ , его спектральная плотность будет лежать только в области положительных частот :

$$S_0(\omega) = \frac{2paD}{(2pa)^2 + (\omega_0 - \omega)^2}, \omega \geq 0 \quad (8)$$

С учетом (56) и (57) ширина спектра аналитического модулированного сигнала

$$D\omega = \frac{1}{S_{m0}} \int_{m0}^{\infty} S_0(\omega) d\omega = \frac{pD}{S_0(\omega_0)} = \frac{paD}{D} = ap \quad (9)$$

Следовательно, спектр аналитического модулированного сигнала имеет такую же ширину, что и спектр полезного сигнала, (см. телеграфный сигнал), но он расположен в области  $\omega_0$ . Использование (9) позволяет определить условие узкополосности модулированного сигнала ( $D\omega/\omega_0 \ll 1$ ) через параметры корреляционных функций полезного сигнала и переносчика :

$$a\rho/\omega_0 = a/2F_0 \ll 1, \quad (10)$$

где  $F_0$  - средняя линейная частота переносчика.

Если для балансно-модулированного сигнала условие (10) выполняется, он может рассматриваться как узкополосный со средней частотой  $F_0$ . Таким образом, алгоритм определения корреляционной функции и спектральной плотности модулированных сигналов прост : для конкретных видов модуляции необходимо вычислить интеграл (5) и с помощью соотношения Хинчина-Винера определить спектральную плотность. Однако для многих видов модуляции реализация этого алгоритма наталкивается на трудности вычислительного характера.

### 1.11. Выводы.

1. Анализ видов модуляции и характеристик модулированных сигналов выполняют для согласования характеристик сигналов и каналов, сокращения естественной избыточности сигналов, определения потенциальной помехоустойчивости, определения помех соседним каналам. Модулированные сигналы являются нестационарными случайными процессами, их характеристики необходимо получать путем последовательного применения операций усреднения по множеству и по времени. Для определения корреляционной функции и спектральной плотности используют обобщенные соотношения Хинчина-Винера (3) и (4). Способ классификации охватывает все виды непрерывной, дискретной и цифровой модуляции и позволяет разрабатывать новые виды, полезные для развития теории информации и передачи сигналов.

2. Для анализа корреляционных и спектральных характеристик модулированных сигналов необходимо знать корреляционные и спектральные характеристики модулирующих сигналов и переносчиков, а также структуру и параметры оператора модуляции. Спектральную плотность модулированного сигнала получают из соотношения Хинчина-Винера (3) по его корреляционной функции. Упростить определение корреляционной функции позволяет представление модулированного сигнала в виде узкополосного процесса. Корреляционная функция балансно-модулированного ВЧ колебания равна произведению корреляционных функций огибающей и ВЧ сигнала.

## 2. Прохождение сигналов через линейные цепи с постоянными параметрами.

### 2.1. Определение линейной цепи.

#### *Добавить параметры и спектры модулированных сигналов.*

Электрическая цепь осуществляет преобразование сигналов, поступающих на ее вход. Поэтому в самом общем случае математическую модель цепи можно задать в виде соотношения между входным воздействием  $S_{ex}(t)$  и выходной реакцией  $S_{exl}(t)$  :

$$S_{exl}(t) = TS_{ex}(t),$$

где  $T$  - оператор цепи.

На основании фундаментальных свойств оператора можно сделать заключение о наиболее существенных свойствах цепей.

1. Если оператор цепи  $T$  не зависит от амплитуды воздействия, то цепь называется линейной. Для такой цепи справедлив принцип суперпозиции, отражающей независимость действия нескольких входных воздействий :

$$T[S_{ex1}(t) + S_{ex2}(t) + \dots + S_{exn}(t)] = TS_{ex1}(t) + TS_{ex2}(t) + \dots + TS_{exn}(t) \quad (1)$$

Очевидно, что при линейном преобразовании сигналов в спектре отклика нет колебаний с частотами, отличными от частот спектра воздействий.

Класс линейных цепей образуют как пассивные цепи, состоящие из резисторов, конденсаторов, индуктивностей, так и активные цепи, включающие еще и транзисторы, лампы и т.п. Но в любой комбинации этих элементов их параметры не должны зависеть от амплитуды воздействия.

2. Если сдвиг входного сигнала во времени приводит к такому же сдвигу выходного сигнала, т.е.

$$S_{exl}(t \pm t_0) = TS_{ex}(t \pm t_0), \quad (2)$$

то цепь называют стационарной. Свойство стационарности не распространяется на цепи, содержащие элементы с переменными во времени параметрами (индуктивности, конденсаторы и т.п.).

### 2.2. Дельта - функция - как пример пробного сигнала.

Для анализа прохождения сигналов через электрические цепи широко используются пробные сигналы, обладающие какими - либо характерными свойствами. Такой функцией, в частности, является дельта-функция  $d(t)$ , обращающаяся в ноль при  $t \neq 0$  и в бесконечность при  $t=0$ , так, что

$$\oint_{-\infty}^{\infty} d(t) dt = 1 \quad (3).$$



Этому определению удовлетворяет, например, прямоугольный импульс длительностью  $t_u$ , амплитуда которого обратно пропорциональна его длительности  $1/t_u$ . При  $t_u \rightarrow 0$  амплитуда импульса бесконечно растет, а площадь остается постоянной - равной единице. Действительно, если

$$f(t, t_u) = \begin{cases} 1/t_u, & |t| < t_u/2, \\ 0, & |t| > t_u/2, \end{cases}$$

то дельта-функцию можно определить как  $\delta(t) = \lim_{t_u \rightarrow 0} f(t, t_u)$

При этом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \lim_{t_u \rightarrow 0} \int_{-t_u/2}^{t_u/2} f(t, t_u) dt = \frac{1}{t_u} \int_{-t_u/2}^{t_u/2} dt = 1$$

В более общем случае дельта-функцию можно записать в виде

$$\delta(t - t_0) = \begin{cases} \infty, & t = t_0 \\ 0, & t \neq t_0 \end{cases} \quad (4)$$

Спектральную плотность дельта-импульса  $\delta(t)$  найдем с помощью прямого преобразования Фурье :

$$S(\omega) = A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = A \quad (5)$$

На основании определения дельта-функции интервал интегрирования в формуле (5) можно сделать сколь угодно малым, лишь бы он включал в себя момент  $t=0$ . В пределе он может быть устремлен к нулю и подынтегральная функция  $e^{j\omega t}$  примет значение, равное единице. Таким образом  $S(\omega) = A$ . Следовательно, спектральная плотность дельта-импульса имеет равномерный частотный спектр. ФЧХ дельта-импульса равна нулю для всех частот. Это означает, что все гармонические составляющие начинаются с одной фазы и образуют бесконечный пик при  $t=0$ .

По определению, дельта-функция обладает свойством, которое может быть выражено соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0), \quad (6)$$

Его называют фильтрующим свойством дельта-функции, согласно которому интеграл от произведения произвольной функции на  $\delta(t-t_0)$  равен значению этой функции в точке  $t=t_0$ .

На основании обратного преобразования Фурье выразим дельта-функцию через ее спектр :

$$d(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(w) e^{j\omega t} d\omega = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega \quad (7)$$

По аналогии с (7) можно ввести дельта-функцию аргумента  $w$

$$d(w) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} dt \quad (8)$$

В (8) знак показателя экспоненты не влияет на значение интеграла, поскольку  $e^{\pm j\omega t} = \cos \omega t \pm j \sin \omega t$  и независимо от знака интеграл от нечетной функции  $\sin$  на симметричном интервале интегрирования равен нулю. Поэтому можно записать

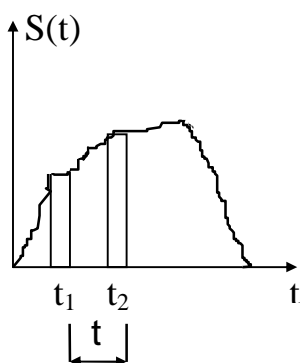
$$d(w) = \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt \quad (9)$$

### 2.3. Временной и спектральный методы анализа передачи сигналов через линейные цепи.

Пусть на вход линейной стационарной цепи подан сигнал  $S_{ex}(t)$ . На основании определений дельта-функции и ее фильтрующего свойства входной сигнал может быть представлен в виде интеграла

$$S_{ex}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{BX}(t) d(t - t) dt, \quad (10)$$

поскольку он является предельным выражением суммы, которой входной сигнал представляется как бесконечная последовательность дельта-импульсов, смещенных друг относительно друга на время  $t$ . Амплитуда импульсов равна значению сигнала в те же моменты времени  $t$  (см. рис.)



Такой метод аналитического моделирования сигналов называется методом интеграла наложения (на последовательность пробных импульсов накладывается информац. сигнал).

Если установить реакцию цепи на отдельный дельта-импульс, то в силу линейности и стационарности цепи можно просуммировать отдельные реакции и получить выходной отклик на любое входное воздействие. Поэтому вводят импульсную характеристику цепи  $h(t)$ , являющуюся выходным откликом на входной дельта-импульс. Таким образом, выходная ре-

акция  $S_{\text{вых}}(t)$  на произвольное входное воздействие может быть представлена интегралом

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(t) h(t - \tau) d\tau \quad (11)$$

Из (11) следует, что сигнал на выходе цепи  $S_{\text{вых}}(t)$  в момент  $t$  получается суммированием мгновенных значений входного сигнала  $S_{\text{BX}}(t)$  с весом  $h(t - \tau)$  за все предыдущее время с начала сигнала. Импульсная характеристика и метод интеграла наложения являются основными понятиями при исследовании прохождения сигналов через линейные цепи методом интеграла наложения.

Соотношение (11) может быть записано также в виде

$$S_{\text{вых}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(t - \tau) h(\tau) d\tau \quad (12)$$

Представим входной сигнал в виде интеграла Фурье

$$S_{\text{BX}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Если сделать подстановку  $t = t' - \tau$  (а потом отбросить штрих у  $t$ ), то можно записать, что

$$S_{\text{BX}}(t - \tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(\omega) e^{j\omega(t - \tau)} d\omega.$$

Подставив это выражение в (12) и изменив порядок интегрирования, получим

$$\begin{aligned} S_{\text{BX}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(\omega) e^{j\omega(t - \tau)} d\omega h(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(\omega) \left( \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \right) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{\text{BX}}(\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{aligned} \quad (13)$$

Внутренний интеграл является комплексной функцией частоты. Обозначим его как

$$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-j\omega \tau} d\tau \quad \text{и} \quad h(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega \tau} d\omega \quad (14)$$

$K(j\omega)$  является прямым преобразованием Фурье для импульсной функции цепи. Его функции называют частотным коэффициентом передачи цепи (или комплексной частотной характеристикой).

Частотному коэффициенту передачи можно дать и другие эквивалентные толкования. Одно из них получается в результате подстановки (14) в (13) :

$$S_{\text{вых}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_{\text{BX}}(\omega) \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (15)$$

Как видно, полученное выражение совпадает с обратным преобразованием Фурье для спектра выходного сигнала, поскольку

$$\dot{S}_{\text{BX}}(\omega) \dot{K}(j\omega) = \dot{S}_{\text{БВХ}}(\omega), \quad (16)$$

или, другими словами, частотный коэффициент передачи есть множитель пропорциональности между спектральными плотностями входного и выходного сигналов. Отсюда возникло название метода анализа прохождения сигналов через линейные цепи, основанного на использовании частотного коэффициента передачи, как спектрального метода.

Практически частотный коэффициент передачи удобнее вычислять пользуясь другим его определением. Для этого рассмотрим в качестве входного сигнала гармоническое колебание в комплексной форме :

$S_{\text{BX}}(t) = \dot{S}_{\text{BXm}} e^{j\omega t}$ . Гармоническое колебание, сдвинутое во времени  $S_{\text{BX}}(t-t) = \dot{S}_{\text{BXm}} e^{j\omega t} e^{-j\omega t}$ . Подставив это выражение в (12), вынося из под интеграла функции, не зависящие от переменной интегрирования и перегруппировав члены, получим :

$$S_{\text{BX}}(t) = \dot{S}_{\text{BXm}} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{h}(t) e^{-j\omega t} dt \cdot e^{j\omega t} = \dot{S}_{\text{BXm}} e^{j\omega t}.$$

Здесь интеграл есть частотный коэффициент передачи. Таким образом,  $\dot{S}_{\text{BXm}} \dot{K}(j\omega) = \dot{S}_{\text{БВХm}}$ , откуда

$$\dot{K}(j\omega) = \frac{\dot{S}_{\text{БВХm}}}{\dot{S}_{\text{BXm}}}, \quad (17)$$

и, следовательно, коэффициент передачи равен отношению комплексных амплитуд гармонических колебаний на выходе и входе линейной цепи. Частотный коэффициент передачи обычно записывают в показательной форме

$$\dot{K}(j\omega) = K(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = \frac{S_{\text{БВХm}}}{S_{\text{BXm}}} e^{j(\varphi_{\text{БВХ}} - \varphi_{\text{ВХ}})} \quad (18)$$

где  $K(\omega) = |\dot{K}(j\omega)|$  - амплитудно-частотная характеристика цепи (АЧХ)  $\varphi(\omega) = \varphi_{\text{ВЫХ}} - \varphi_{\text{ВХ}}$  - фазочастотная характеристика цепи (ФЧХ).

Из соотношения (12) следует еще один метод практического определения импульсной характеристики  $h(t)$  :

$$h(t) = \frac{dS_{bIX}(t) / dt}{S_{BX}(t - t)}, \quad (19)$$

где  $t$  - время анализа,  $dS_{bIX}(t) / dt$  - скорость изменения выходного сигнала  $S_{BX}(t)$  в течении времени анализа  $t$ ,  $S_{BX}(t - t)$  - значения входного сигнала в течении времени анализа  $t$ .

Таким образом, импульсная характеристика характеризует скорость изменения выходного сигнала за время анализа по отношению к мгновенным значениям входного сигнала в течении этого же интервала времени. Для ее определения достаточно знать форму входного и выходного сигналов за время действия пробного сигнала. Отсюда понятно и введение понятия пробного сигнала.

## 2.4. Особенности анализа радиосигналов в избирательных цепях.

При решении задач о прохождении сигналов через электрические цепи основное внимание уделяют изменениям информационных параметров сигналов, поскольку это связано с проблемой сохранения информации, переносимой сигналами. В случаях, когда информация заложена непосредственно в форме сигнала (случай простых сигналов) задача сохранения информации сводится к задаче сохранения формы (или спектра) сигнала.

Иначе дело обстоит с радиосигналом, в котором информация заключена в одном из нескольких параметров высокочастотного колебания. Не обязательно сохранять полностью структуру этого колебания; достаточно лишь сохранить закон изменения того параметра, в котором заключена информация. Так, в случае амплитудно-модулированного колебания, важно передать огибающую амплитуд, а некоторое изменение частоты или несущее колебание, не имеющее существенного значения, при анализе можно не учитывать. При передаче радиосигналов с угловой модуляцией, наоборот, основное внимание следует уделить точному воспроизведению закона изменения частоты и фазы, а изменением амплитуды можно пренебречь.

Эти особенности радиосигналов открывают путь к некоторому упрощению методов анализа их передачи через линейные цепи. Возможность упрощения особенно существенна, когда радиосигнал представляет собой узкополосный процесс, а цепь - узкополосную систему. Это как раз и характерно для реальных радиосигналов и реальных радиочепей.

а) Приближенный спектральный метод. Пусть цепь представляет собой избирательную систему, передаточная функция  $\dot{K}(j\omega)$  которой имеет максимум вблизи частот  $\omega_p$  и  $(-\omega_p)$ . И пусть на ее входе действует высокочастотное модулированное колебание  $S(t)$  спектральная характеристика которого имеет два максимума вблизи частот  $\omega_0$  и  $(-\omega_0)$ . В общем случае резонансная частота цепи  $\omega_p$  не совпадает с центральной частотой сигнала  $\omega_0$ , т.е. имеет место расстройка

$$\Delta\omega = \omega_0 - \omega_p \quad (20)$$

которая является величиной того же порядка, что и полоса пропускания цепи.

Составим выражение для сигнала на выходе цепи. Если входной сигнал имеет гармоническое заполнение, т.е.  $S(t) = A(t)\cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ , то вы-

кладки значительно упрощаются при использовании понятия аналитического сигнала:

$$Z(t) = \dot{A}(t)e^{j\omega_0 t} \quad (21)$$

Спектральная функция этого сигнала  $\dot{Z}(\omega)$  существует только в области положительных частот, поэтому при определении аналитического сигнала на выходе цепи следует исходить из выражения:

$$Z_{BbIX}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \dot{Z}(\omega) \dot{k}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (22)$$

Спектральные функции высокочастотного модулированного колебания  $S(t) - \dot{S}(\omega)$  и аналитического сигнала  $Z(t) - \dot{Z}(\omega)$  при  $\omega > 0$  связаны соотношением  $\dot{Z}(\omega) = 2\dot{S}(\omega)$ , причем при  $\omega > 0$   $\dot{S}(\omega) = \frac{1}{2}\dot{S}_A(\omega - \omega_0)$ , где  $\dot{S}_A(\omega - \omega_0)$  - спектральная функция огибающей.

Следовательно  $\dot{Z}(\omega) = \dot{S}_A(\omega - \omega_0)$ .

Подставляя это выражение в (22), получаем

$$Z_{BbIX} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \dot{S}_A(\omega - \omega_0) \dot{k}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (23)$$

Введем переменную  $W = \omega - \omega_0$ . Тогда

$$Z_{BbIX}(t) = \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \dot{S}_A(W) \dot{k}[j(\omega_0 + W)] e^{j\omega t} dW e^{j\omega_0 t} \quad (24)$$

Из сопоставления (24) с (21) видно, что выражение, стоящее в фигурных скобках соответствует комплексной огибающей выходного колебания:

Дальнейшее упрощение анализа вытекает из свойств передаточной функции резонансных цепей, обладающих сильно выраженной частотной избирательностью: Модуль коэффициента передачи  $\dot{k}(j\omega)$  быстро убывает при удалении  $\omega$  от резонансной частоты. Поэтому передаточную функцию целесообразно выражать в виде функции расстройки частоты  $\omega$  относительно резонансной частоты  $\omega_p$ :

$$\dot{k}(j\omega) = \dot{k}[j(\omega_0 + W)] = \dot{k}[j(\omega_p + D\omega + W)] = \dot{k}_1[j(D\omega + W)] \quad (26)$$

где постоянный параметр расстройки  $D\omega = \omega_0 - \omega_p$ . Т.к. при  $W = -\omega_0$   $\dot{k}_1 \rightarrow 0$ , нижний предел интегрирования в (25) можно заменить на  $-\infty$ . При этом оно принимает вид:

$$\dot{A}_{BbIX}(t) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \dot{S}(W) \dot{k}_1[j(DW + W)] e^{jWt} dW. \quad (27)$$

Это выражение ничем не отличается от обычного интеграла Фурье, определяющего оригинал по заданной спектральной плотности огибающей  $\dot{S}(W)$  и передаточной функции  $\dot{k}_1[j(DW + W)]$ .

Заменив  $jW$  на  $p$ , получим выражение в форме обратного преобразования Лапласа :

$$\dot{A}_{BbIX}(t) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{c-j\infty}^{c+j\infty} \dot{S}_A(p) \dot{k}[jDW + p] e^{pt} dp \quad (28)$$

Таким образом, анализ передачи узкополосного высокочастотного колебания через избирательную цепь по существу сводится к анализу изменений, претерпеваемых комплексной огибающей входного сигнала. После нахождения  $A_{\text{облх}}(t)$  и  $q_{\text{облх}}(t)$  для выходного аналитического сигнала можно будет написать следующее выражение :

$$Z_{\text{облх}}(t) = A_{\text{облх}} e^{j[\omega_0 t + q_{\text{облх}}(t)]} \quad (29)$$

$$\text{откуда} \quad S_{\text{облх}}(t) = A_{\text{облх}}(t) \cos[\omega_0 t + q_{\text{облх}}(t)] \quad (30)$$

Вычисления, связанные с определением  $\dot{A}_{BbIX}(t)$  по формуле (28), значительно проще, чем при непосредственном определении  $S_{\text{облх}}(t)$  с помощью обратного преобразования Лапласа, так как переход от  $\dot{S}(W)$  к  $\dot{S}_A(W)$  и от  $\dot{k}(p)$  к  $\dot{k}_1(jW + p)$  сокращает число особых точек подынтегральной функции.

#### б) Упрощенный метод интеграла наложения. (Метод огибающей).

Упрощение спектрального метода было достигнуто упрощением передаточной функции избирательной цепи  $\dot{k}(jW)$ . Аналогично метод интеграла наложения можно упростить укорочением импульсной характеристики  $h(t)$ , тесно связанной с передаточной функцией  $\dot{k}(jW)$ .

Основываясь на общем выражении

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} \dot{k}(jW) e^{jWt} dW$$

и переходя к аналитической функции  $Z_h(t)$ , соответствующей физической функции  $h(t)$ , находим



$$Z_h(t) = \frac{1}{p_0} \dot{\ddot{O}}_{k_1}^{\cdot} (j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (31)$$

Заменим переменную  $\omega = \omega_0 + W$ . Тогда с учетом формулы (26) и после замены нижнего предела  $-\omega_0$  на  $-\infty$  получим

$$Z_h(t) = \frac{1}{p_{-\infty}} \dot{\ddot{O}}_{k_1}^{\cdot} [j(D\omega + W)] e^{jWt} \ddot{y} e^{j\omega_0 t}$$

С другой стороны, представив искомую импульсную характеристику в виде узкополосной функции

$$h(t) = H(t) \cos[\omega_0 t + g_h(t)]$$

имеем :

$$Z_h(t) = H(t) e^{j[\omega_0 t + g_h(t)]} = H(t) e^{jg_h(t)} e^{j\omega_0 t} = \dot{H}(t) e^{j\omega_0 t}. \quad (33)$$

Из сравнения (32) и (33) непосредственно вытекает равенство, определяющее комплексную огибающую импульсной характеристики  $h(t)$  :

$$\dot{H}(t) = H(t) e^{jg_h(t)} = 2 \frac{1}{2p_{-\infty}} \dot{\ddot{O}}_{k_1}^{\cdot} [j(D\omega + W)] e^{jWt} dt \quad (34)$$

Применение этого выражения упрощает вычисление импульсной характеристики  $h(t)$ .

Обратимся теперь к (27). Используя правило, согласно которому произведению двух спектров  $\dot{F}(j\omega) \dot{G}(j\omega) = \dot{S}(j\omega)$  соответствует функция времени  $S(t)$ , являющаяся сверткой функций  $f(t)$  и  $g(t)$  :

$$S(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(y) g(t-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{f}(t-y) g(y) dy = \frac{1}{2p_{-\infty}} \dot{\ddot{O}}_{k_1}^{\cdot} \dot{F}(j\omega) \dot{G}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (35)$$

где  $y$  - временной интервал, в течении которого одновременно существуют функции  $f(t)$  и  $g(t)$ , из (27) можем определить  $\dot{A}_{BbIX}(t)$  в виде свертки двух функций времени, соответствующих спектральным функциям  $\dot{S}_A(W)$  и  $\dot{k}_1[j(D\omega + W)]$ . Первой из этих функций соответствует  $\dot{A}(t)$ , а второй, как это следует из (34) -  $\frac{1}{2} \dot{H}(t)$ . Следовательно

$$\dot{A}_{BbIX}(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(y) \dot{H}(t-y) dy = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{A}(y) H(t-y) e^{j[q(y) + g_h(t-y)]} dy \quad (36)$$

Это выражение является общим, пригодным для любых избирательных цепей и любых узкополосных сигналов. В тех случаях, когда свободные колебания характеризуются постоянной частотой заполнения, как, например, в одиночном колебательном контуре,  $g_h(t)$  вырождается в постоянную фазу и выражение (36) существенно упрощается. То же самое отно-

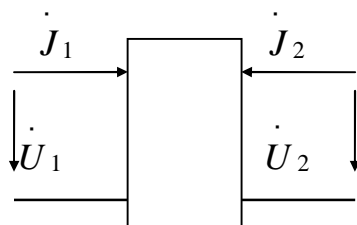
сится и к сигналам с немодулированной частотой заполнения, когда  $q(t)$  обращается в постоянную величину.

Метод интеграла наложения эффективен в тех случаях, когда временные характеристики сигналов или цепей (или тех и других) оказываются более простыми, чем спектральные. Такое положение имеет место, например, при анализе прохождения ЧМ сигналов.

### 3. Линейные радиоэлектронные цепи с постоянными параметрами.

#### 3.1. Линейные пассивные четырехполюсники и их основные характеристики.

Кроме методов, основанных на определении импульсных и переходных характеристик, для анализа свойств линейных цепей широко применяют матричный метод. Его использование основывается на том, что для описания свойств сколь угодно сложной цепи достаточно знать зависимость между ее внешними напряжениями и токами. В этом случае сложная цепь заменяется эквивалентным четырехполюсником. Такой четырехполюсник эквивалентен данной цепи в том смысле, что токи и напряжения на его внешних зажимах тоже равны соответствующим значениям в реальной цепи.



Между входными и выходными комплексными амплитудами токов и напряжений может быть установлена зависимость в виде системы двух уравнений. Максимальное число пар уравнений равно шести. Из них наиболее употребимы четыре.

1. Если в качестве независимых переменных выбраны токи  $\dot{J}_1$  и  $\dot{J}_2$ , то их связь с  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  устанавливается парой уравнений

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{J}_1 Z_{11} + \dot{J}_2 Z_{12}, \\ \dot{U}_2 &= \dot{J}_1 Z_{21} + \dot{J}_2 Z_{22}\end{aligned}\quad (1)$$

Система (1) может быть записана в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \end{pmatrix}\quad (2)$$

Элементы матрицы называются  $Z$ -параметрами. Положем, что они являются полными сопротивлениями холостого хода четырехполюсника. На основании (1) можем записать :

$$Z_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_1}, \text{ при } \dot{J}_2 = 0; Z_{22} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{J}_2}, \text{ при } \dot{J}_1 = 0; Z_{12} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_2}, \text{ при } \dot{J}_1 = 0;$$

$$Z_{21} = \frac{\dot{U}_2}{\dot{J}_1}, \text{ при } \dot{J}_2 = 0$$

Отсюда следует, что  $Z_{11}$  - входное сопротивление четырехполюсника при разомкнутом выходе (“холостой ход”);  $Z_{22}$  - выходное сопротивление четырехполюсника при разомкнутом входе;  $Z_{12}$  - сопротивление передачи от входа к выходу при разомкнутом входе;  $Z_{21}$  - сопротивление передачи от выхода к входу при разомкнутом выходе.

Среди четырехполюсников часто встречаются взаимные (обратимые), для которых  $Z_{12} = Z_{21}$ . Если четырехполюсник обладает симметрией, то  $Z_{11} = Z_{22}$ . Таким образом, обратимый симметричный четырехполюсник имеет два независимых  $Z$ -параметра:  $Z_{11}, Z_{22}$ .

2. Если в качестве независимых переменных выбраны напряжения  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$ , то связь с токами  $\dot{J}_1$  и  $\dot{J}_2$  устанавливается с помощью матрицы проводимостей:

$$\begin{pmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{J}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} \quad (2)$$

Коэффициенты матрицы ( $g$ -параметры) являются полными проводимостями короткого замыкания четырехполюсника. При коротком замыкании входа  $\dot{U}_1=0$ , при КЗ выхода -  $\dot{U}_2=0$ . Подставляя поочередно эти условия в (2), находим, что  $y_{11}$  и  $y_{22}$  - входная и выходная проводимости;  $y_{12}, y_{21}$  - проводимости передачи при КЗ выхода или входа.

3. Матрица  $h$ -параметров связывает напряжение на входе и ток на выходе ( $\dot{U}_1, \dot{J}_2$ ) с током на входе и напряжением на выходе ( $\dot{J}_1, \dot{U}_2$ ):

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{J}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{J}_1 \\ \dot{U}_2 \end{pmatrix} \quad (3)$$

В режиме ХХ на входе и КЗ на выходе из (3) найдем:

$$h_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad - \text{ полное входное сопротивление четырехполюсника при}$$

$K3$  выхода;

$$h_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{J}_1=0} \quad - \text{ обратный коэффициент передачи по напряжению (от}$$

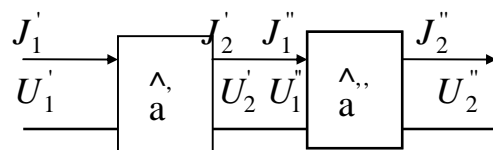
выхода по входу) при  $XX$  на входе ;

$$h_{21} = \left. \frac{\dot{J}_2}{\dot{J}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad - \text{ коэффициент передачи по току (от входа к выходу) при}$$

$K3$  выхода ;

$$h_{22} = \left. \frac{\dot{J}_2}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{J}_1=0} \quad - \text{ выходная проводимость при } XX \text{ на входе.}$$

4. Матрица передачи (  $a$ -матрица ) связывает входные ток и напряжение (  $\dot{J}_1, \dot{U}_1$  ) с выходными током и напряжением (  $\dot{J}_2, \dot{U}_2$  ). Но при использовании  $a$ -матрицы изменяют направление выходного тока на противоположное. Это создает определенные удобства при описании каскадного соединения четырехполюсников ( см. рис.)



В соответствии с определением  $a$ -матрицы имеем :

$$\begin{pmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{J}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{U}_2 \\ -\dot{J}_2 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Элементы  $a$ -матрицы определяются из (4) при  $XX$  и  $K3$  на выходе :

$$a_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{J}_2=0} \quad - \text{ обратный коэффициент передачи по напряжению при}$$

$XX$  на выходе;

$$a_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_1} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad - \text{сопротивление передачи от входа к выходу при КЗ вы-}$$

хода ;

$$a_{21} = \left. \frac{\dot{J}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{J}_2=0} \quad - \text{проводимость передачи от входа к выходу при КЗ вы-}$$

хода ;

$$a_{22} = \left. \frac{\dot{J}_1}{\dot{J}_2} \right|_{\dot{U}_2=0} \quad - \text{обратный коэффициент передачи по току при КЗ выхо-}$$

да.

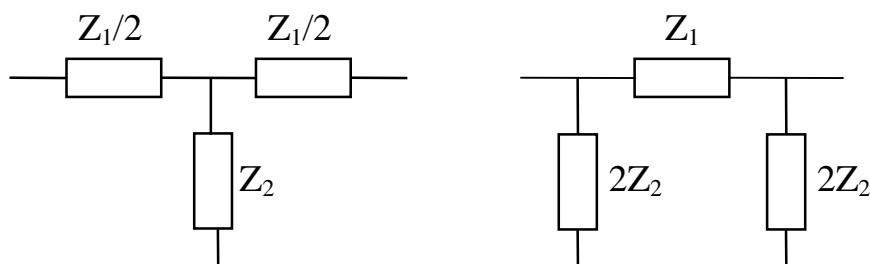
Определитель а-матрицы взаимного четырехполюсника ( $Z_{12}=Z_{21}$ )  
 $\det a = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1$ .

Т.к. один и тот же четырехполюсник может быть описан любой из рассмотренных матриц ( системой параметров), то между соответствующими параметрами существует простая дробно - линейная связь. Например, элементы  $\hat{h}$ -матрицы и  $\hat{Z}$ -матрицы связаны соотношениями :

$$h_{11} = \frac{\det \hat{Z}}{Z_{22}}; \quad h_{12} = \frac{Z_{12}}{Z_{22}}; \quad h_{21} = - \frac{Z_{21}}{Z_{22}}; \quad h_{22} = \frac{1}{Z_{22}}. \quad (5)$$

### Эквивалентные схемы четырехполюсников.

В соответствии с уравнениями (1) - (4) произвольную цепь можно привести к сравнительно простой, (состоящей из 2-х или 3-х сопротивлений) эквивалентной цепи, в которой внешние токи и напряжения совпадают с внешними токами и напряжениями реальной цепи. Для взаимных и симметричных четырехполюсников наиболее часто используют Т - и П-образные схемы (см. рис.).



Использование удвоенных сопротивлений в параллельных ветвях упрощает анализ при исследовании каскадных соединений. Т - П-образные схемы, будучи моделями одного и того же четырехполюсника, эквивалентны между собой.

### Характеристические параметры четырехполюсников.

Независимыми характеристическими параметрами четырехполюсников являются характеристическое сопротивление  $Z_0$  и коэффициент расширения  $g$

По определению, характеристическое сопротивление

$$Z_0 = \sqrt{Z_{BXX} Z_{BXX}} \quad (6)$$

где  $Z_{BXX}$  и  $Z_{BXX}$  - входные сопротивления четырехполюсника в режиме ХХ и КЗ выхода.

При  $\dot{J}_2 = 0$  из (4) имеем  $Z_{BXX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_1} = \frac{a_{11}}{a_{12}}$ ; а при

$\dot{U}_2 = 0, Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_1} = \frac{a_{12}}{a_{22}}$ . Подставляя эти соотношения в (6) получим:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{a_{11}a_{12}}{a_{21}a_{22}}}$$

Для симметричного четырехполюсника ( $a_{11}=a_{22}$ ) характеристическое сопротивление

$$Z_0 = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} \quad (7)$$

Замечательное свойство характеристического сопротивления состоит в том, что если симметричный четырехполюсник нагружен на сопротивление  $Z_0$ , то его входное сопротивление тоже равно  $Z_0$ . Для доказательства этого утверждения сначала найдем формулу входного сопротивления четырехполюсника  $Z_{BX}$ , нагруженного на произвольное сопротивление  $Z_H$ . Из (4) следует, что

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_1} = (a_{11} \dot{U}_2 + a_{12} \dot{J}_2) / (a_{21} \dot{U}_2 + a_{22} \dot{J}_2)$$

так как  $Z_H = \frac{\dot{U}_2}{\dot{J}_2}$ , то

$$Z_{BX} = (a_{11}Z_H + a_{12}) / (a_{21}Z_H + a_{22}) \quad (8)$$

Примем, что четырехполюсник симметричный и нагружен на  $Z_0 = Z_H = \sqrt{a_{12} / a_{21}}$ . Подставляя это в (8) и учитывая  $a_{11} = a_{22}$ , получаем

$$Z_{BX} = \frac{a_{11} \sqrt{a_{12} / a_{21}} + a_{12}}{a_{21} \sqrt{a_{12} / a_{21}} + a_{22}} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} \frac{a_{11} + \sqrt{a_{12} a_{21}}}{a_{11} + \sqrt{a_{12} a_{21}}} = \sqrt{\frac{a_{12}}{a_{21}}} = Z_0.$$

Это свойство очень полезно, например, при проектировании кабельных линий соединяющих антенну и приемник.

Коэффициент распространения  $\dot{g}$  определяется как логарифм обратного коэффициента передачи по напряжению при условии, что четырехполюсник нагружен на характеристическое сопротивление

$$\dot{g} \Big|_{Z_H=Z_0} = \ln \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \quad (9)$$

из (9) следует, что

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = e^{-\dot{g}} \quad (10)$$

Т.к.  $Z_H = Z_0$ , то на основании свойства характеристического сопротивления  $Z_{BX} = Z_0$  для напряжений на входе и выходе четырехполюсника можно записать :

$$\dot{U}_2 = \dot{J}_2 Z_0 \text{ и } \dot{U}_1 = \dot{J}_1 Z_0.$$

Подставляя эти соотношения в (10), находим

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} = \frac{\dot{J}_2}{\dot{J}_1} = e^{-\dot{g}} \quad (11)$$

Таким образом, коэффициент распространения характеризует передающие свойства четырехполюсника как по току, так и по напряжению.

Коэффициент распространения является комплексной величиной :  $\dot{g} = a + jb$  и, следовательно,  $e^{-\dot{g}} = e^{-a} e^{-jb}$ . Первый множитель характеризует затухание сигнала, прошедшего через четырехполюсник, второй - изменение фазы сигнала. Поэтому  $a$  называют коэффициентом затухания, а  $b$  - коэффициентом фазы четырехполюсника.

Можно показать, что между элементами  $a$ -матрицы и характеристическими параметрами четырехполюсника  $Z_0$  и  $\dot{g}$  существует следующая связь:

$$a_{22} = a_{11} = ch\dot{g}, \quad a_{12} = Z_0 sh\dot{g}, \quad a_{21} = \frac{1}{Z_0} sh\dot{g} \quad (12)$$



Тогда система уравнений вида (4) для взаимного симметричного четырехполюсника принимает вид :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= \dot{U}_2 ch\dot{g} + Z_0 \dot{J}_2 sh\dot{g} \\ \dot{J}_1 &= \frac{\dot{U}_2}{Z_0} sh\dot{g} + \dot{J}_2 ch\dot{g} \end{aligned} \quad (13)$$

Найдем связь между элементами матрицы  $\hat{a}$  и сопротивлениями, образующими эквивалентные Т - П-образные цепи. Для разомкнутых П - и Т-цепей имеем

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \quad (14)$$

В соответствии с (4)  $a_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{J}_2=0}$ . Поэтому на основании (14) и (12)

можно записать, что

$$a_{11} = 1 + Z_1 / (2Z_2) = ch\dot{g} \quad (15)$$

где  $Z_1$  и  $Z_2$  - соответственно сопротивление в горизонтальном и вертикальном плечах Т - или П-цепи.

Учитывая, что

$$sh(\dot{g}/2) = \sqrt{(ch\dot{g} - 1)/2},$$

из (15) находим более простое соотношение

$$sh(\dot{g}/2) = \sqrt{Z_1 / (4Z_2)} \quad (16)$$

Это соотношение очень полезно при исследовании процесса прохождения сигналов через различные фильтры.

### 3.2. Характеристики линейных активных четырехполюсников.

Активной называют цепь, коэффициент передачи мощности которой больше единицы. С точки зрения закона сохранения энергии такое возможно, если в цепи действует дополнительный источник энергии, энергия которого преобразуется в энергию выходного сигнала. Преобразование осуществляется с помощью транзисторов, электронных ламп и других элементов, называемых активными. Эквивалентное представление цепи определяется режимом работы активного элемента. Для малых амплитуд переменного сигнала характеристики активных элементов практически линейны. В этом случае активную цепь можно представить линейным четырехполюсником. Принято считать, что большинство активных четырехполюсников невзаимны, то есть  $Z_{12} \neq Z_{21}$ . (см. § 3.1).

На входе активных четырехполюсников действуют источники управляющих (входных) сигналов, а к выходу подключено сопротивление нагрузки  $Z_H$ . Под выходным напряжением при этом подразумевается падение напряжения на сопротивлении нагрузки. Для удобства выкладок мы будем считать, что падение напряжения на нагрузке  $\dot{U}_H$  равно по значению и противоположно по знаку напряжению  $\dot{U}_2$  на выходных зажимах четырехполюсника.

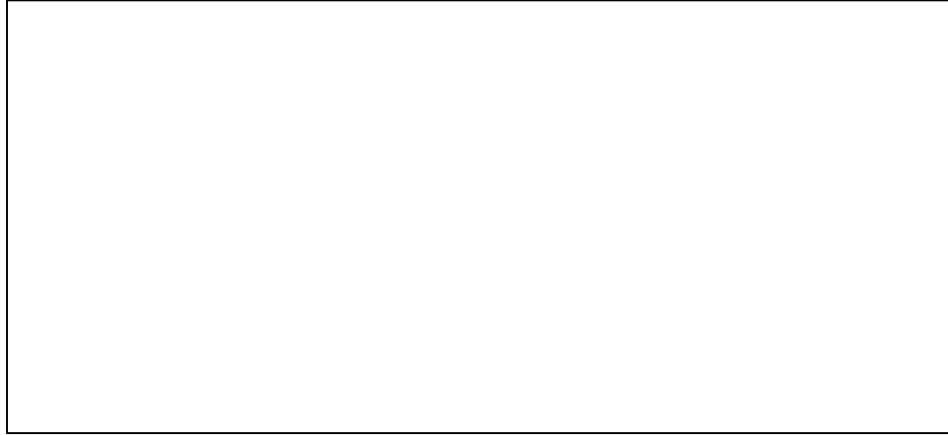
Все основные свойства активных линейных цепей - основные параметры, эффекты обратной связи, критерии устойчивости цепей с обратной связью - мы будем рассматривать на основе ранее изложенной теории линейного четырехполюсника.

Для вывода соотношений, описывающих основные характеристики линейных активных цепей, запишем соотношение (3) линейного четырехполюсника в виде :

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{J}_1 h_{11} + \dot{U}_2 h_{12} \\ \dot{J}_2 = \dot{J}_1 h_{21} + \dot{U}_2 h_{22} \end{cases} \quad (17)$$

Соотношение (17) является системой уравнений контурных токов, в качестве которых выступают входной и выходной токи, заданные своими амплитудами. На рисунке изображена эквивалентная схема четырехполюсника, построенная в соответствии с уравнениями (17). В этой схеме с помощью источника напряжения  $\dot{U}_2 h_{12}$  учтено влияние напряжения  $\dot{U}_2$

на величину  $\dot{U}_1$ , а с помощью источника тока  $\dot{J}_1 h_{21}$  - влияние входного тока на ток  $\dot{J}_2$ .



Т.к.  $\dot{U}_2 = -\dot{J}_2 \dot{Z}_H$ , то второе уравнение (17) примет вид  $\dot{J}_2 = \dot{J}_1 h_{21} - \dot{J}_2 h_{22} \dot{Z}_H$ , откуда для частотного коэффициента передачи по току

$$\dot{K}_J = \dot{J}_1 / \dot{J}_2 = h_{21} / (h_{22} \dot{Z}_H), \quad (18)$$

где  $h_{22}' = h_{22} + 1 / \dot{Z}_H$ .

Частотный коэффициент передачи по напряжению  $\dot{K}_U = -\dot{U}_H / \dot{U}_1$  найдем исключив ток  $\dot{J}_1$  из первого уравнения (17) и используя (18):

$$\dot{K}_U = -h_{21} / D h', \quad (19)$$

где  $D h' = h_{11} h_{22}' - h_{12} h_{21}$ .

Коэффициенты передачи (18) и (19) можно рассматривать как коэффициенты усиления по току и напряжению активного четырехполюсника.

Входное сопротивление активного четырехполюсника найдем из первого уравнения (17) с учетом (18)

$$Z_{BX} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{J}_1} = h_{11} - \frac{h_{21} h_{12}}{h_{22}'} \quad (22)$$

Выходное сопротивление  $Z_{bIX}$  - сопротивление на разомкнутых выходных зажимах четырехполюсника при подключенном по входу источнике сигнала с внутренним сопротивлением  $R_G$  (т.е. полагая, что  $\dot{U}_1 = U_G - \dot{J}_1 R_G$ ) - найдем из второго уравнения (17)

$$\frac{1}{\dot{Z}_{BbIX}} = \dot{y}_{BbIX} = \frac{\dot{J}_2}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{J}_1}{\dot{U}_2} + h_{22}$$

При  $U_I=0$ ,  $\dot{J}_1 = \dot{U}_2 h_{12} / (h_{11} + R_G) = U_2 h_{12} / h'_{11}$ , где  $h'_{11} = h_{11} + R_G$ .

Окончательно для  $\dot{y}_{BbIX}$  получаем

$$\dot{y}_{BbIX} = h_{22} + h_{12} h_{21} / h'_{11} \quad (22)$$

Полученные соотношения заметно упрощаются при условии  $Z_H^{-1} \gg h_{22}$ :

$$\begin{aligned} \dot{K}_J @h_{21}, \quad Z_{BX} @h_{11}, \\ \dot{K}_U = - h_{21} \frac{\dot{Z}_H}{\dot{Z}_{BX}} = - \dot{K}_J \frac{\dot{Z}_H}{\dot{Z}_{BX}} \end{aligned} \quad (22)$$

Рассмотрим теперь, что представляют собой  $h$ -параметры активного четырехполюсника. Для этого запишем первое уравнение системы (17) в виде функциональной зависимости  $\dot{U}_1 = F(\dot{J}_1, \dot{U}_2)$ . Используя разложение в ряд Тейлора по малым приращениям входного тока  $D\dot{J}_1$  и выходного напряжения  $D\dot{U}_2$ , найдем вызывающее их приращение входного напряжения  $D\dot{U}_1$ , в виде

$$D\dot{U}_1 = \left. \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial \dot{J}_1} \right|_{\dot{U}_2=const} D\dot{J}_1 + \left. \frac{\partial \dot{U}_1}{\partial \dot{U}_2} \right|_{\dot{J}_1=const} D\dot{U}_2$$

Сравнив полученное соотношение с первым уравнением (17), запишем

$$h_{11} = \left. \frac{d\dot{U}_1}{d\dot{J}_1} \right|_{\dot{U}_2=const}, \quad h_{12} = \left. \frac{d\dot{U}_1}{d\dot{U}_2} \right|_{\dot{J}_1=const}. \quad (23)$$

Малыми приращениями являются малые переменные токи и напряжения. Таким образом, для малых сигналов параметры  $h_{11}$ ,  $h_{12}$  и очевидно,  $h_{22}$  и  $h_{21}$  являются дифференциальными и представляют собой наклон характеристик  $U_1(J_1)$  и  $U_1(U_2)$  вокруг заданной рабочей точки. Эти характеристики для активных элементов не являются линейными, поэтому система уравнений справедлива, строго говоря, при исчезающе малой амплитуде входных воздействий. Тем не менее положение рабочей точки может быть выбрано таким образом, что, в довольно широкой области вблизи

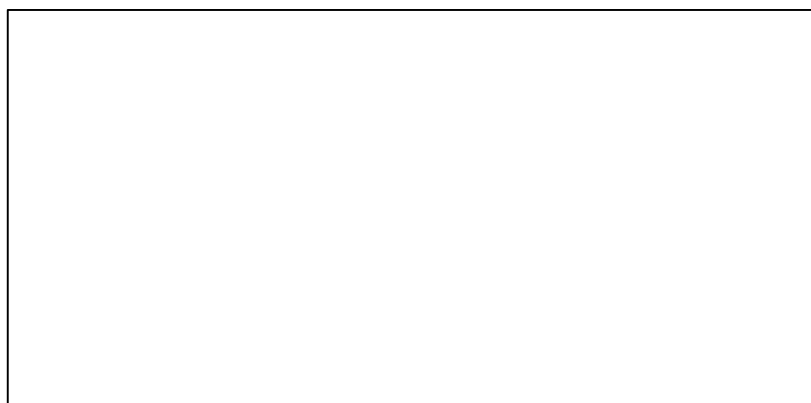
нее, характеристики могут считаться линейными с достаточной степенью точности. На практике считают, что  $h$ -параметры относятся к переменным малым напряжениям и токам.

#### Самостоятельно

1. Вывести соотношения вида (23) для  $h_{22}$  и  $h_{21}$ .
2. Получить соотношения вида (22) и (23) для системы  $Z$ - и  $y$ -параметров.

### **3.3. Транзисторный усилитель - как пример активного линейного четырехполюсника.**

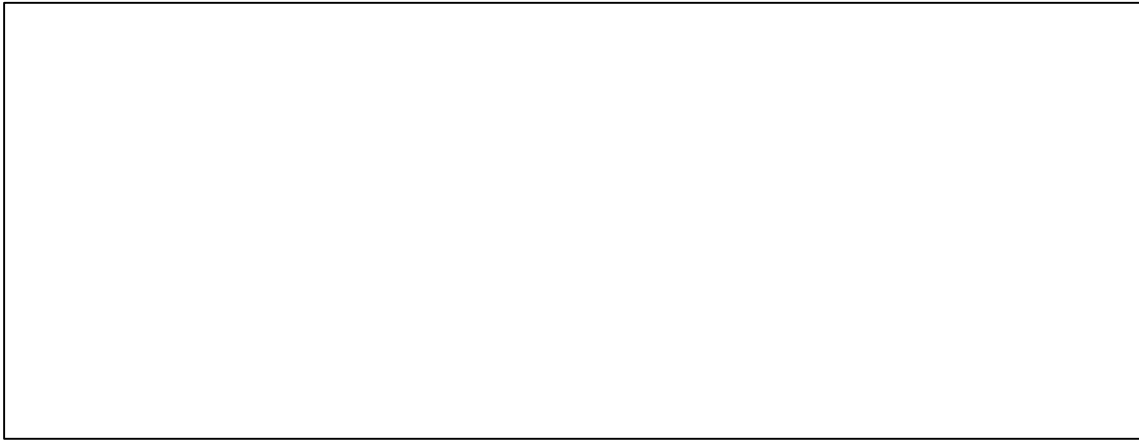
На рис. приведена полная схема усилительного каскада, собранного по схеме с ОЭ. Выделим из этой схемы только те элементы, которые определяют её функциональное назначение.



Для этого придется отбросить емкость  $C_1$  как принадлежащую выходной цепи предыдущего каскада, цепь  $R_3$ ,  $C_3$ , назначение которой состоит в задании начального положения рабочей точки на ВАХ транзистора и цепь  $R_1$ ,  $R_2$ , служащую для температурной стабилизации начального положения рабочей точки. Таким образом, приходим к следующей схеме, все элементы которой принципиально необходимы для функционирования устройства в качестве усилителя. Используя матричный метод для активного линейного четырехполюсника, проанализируем свойства этой схемы.



Для анализа свойств усилителя как активного четырехполюсника составим эквивалентные схемы его входной и выходной цепей (см. рис).



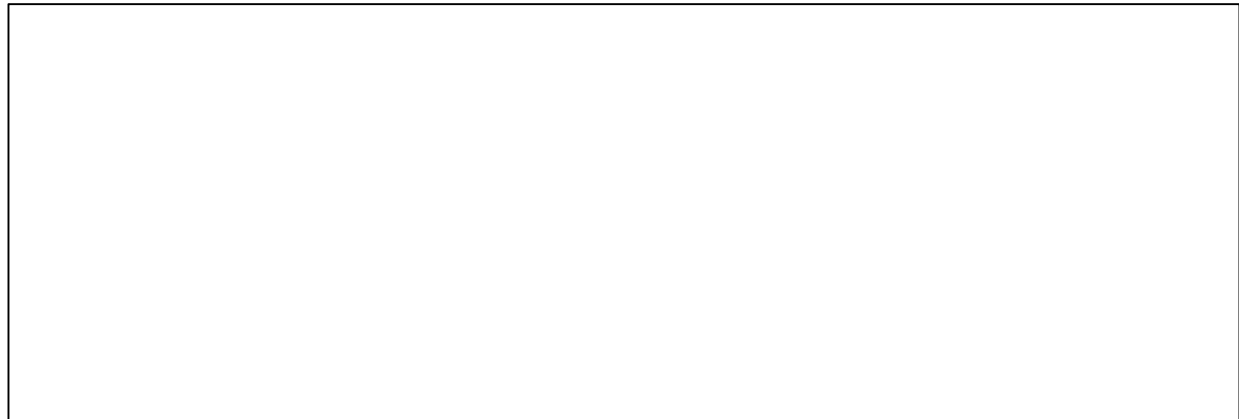
Выходная часть эквивалентной схемы эквивалентна реальной схеме только при работе на переменном токе, когда из-за наличия большой емкости блока питания переменные потенциалы точек 1 и 2 можно считать одинаковыми. По сравнению с эквивалентной схемой обобщенного активного четырехполюсника в рассматриваемой схеме изменилось определение нагрузочного сопротивления четырехполюсника. Введем здесь сопротивление  $\dot{Z}_H$ , эквивалентное сопротивлению  $\dot{Z}_H$  в той схеме. Оно будет равно :

$$\dot{Z}_H = \frac{\dot{Z}_K (1 + j\omega C_p \dot{Z}_H)}{(1 - \omega^2 C_p C_{bblx} \dot{Z}_K \dot{Z}_H) + j\omega [C_p (\dot{Z}_K + \dot{Z}_H) + C_{bblx} \dot{Z}_K]} \quad (24)$$

При таком представлении обе схемы одинаковы и для оценки свойств усилителя можно воспользоваться формулами (22) при условии, что проводимость  $(\dot{Z}_H)^{-1} \gg h_{22}$ , т.е. что свойства четырехполюсника, в основном, определяются свойствами его нагрузки, а свойства активного элемента описываются его h-параметрами.

Дальнейший анализ предполагает конкретизацию нагрузки  $\dot{Z}_H$ . Прежде чем приступить к этому оценим, как связаны h-параметры активного четырехполюсника с ВАХ биполярного транзистора, включенного по схеме с ОЭ.

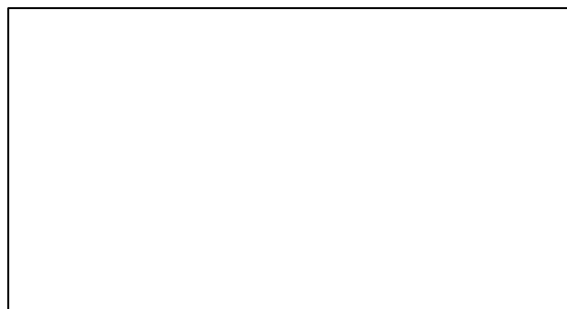
На рисунке приведены входные, выходные и проходные ВАХ биполярного транзистора.



На этих характеристиках ток  $J_B$  и напряжение  $U_{BЭ}$  тождественны току  $\dot{J}_1$  и напряжению  $\dot{U}_1$  активного четырехполюсника, а  $\dot{J}_K$  и  $\dot{U}_{d'}$  соответственно его параметрам  $\dot{J}_2$  и  $\dot{U}_2$ . На основании формул (23) h-параметры активного четырехполюсника и ВАХ транзистора в схеме с ОЭ будут связаны следующими соотношениями :

$$h_{11} = \left. \frac{DU_{d'}}{DJ_d} \right|_{U_{k'} = const}; h_{21} = \left. \frac{DJ_k}{DJ_d} \right|_{U_{k'} = const} = b; h_{12} = \left. \frac{DU_{d'}}{DU_{k'}} \right|_{J_d = const}; h_{22} = \left. \frac{DJ_k}{DU_{k'}} \right|_{J_d = const} \quad (25)$$

Идентичность определения формул (25), (23) и (3) позволяет утверждать, что для описания параметров линейного усилителя возможно применение матричного метода. Иногда входную и проходную хар-ки транзисторов объединяют в одну : зависимость  $J_k = f(U_{BЭ}) / U_{kЭ = const}$ , см.рис., и вводят параметр  $S = DJ_k / DU_{BЭ} / DJ_{BЭ = const}$ , называемый крутизной. В этом случае источник тока  $J = h_{21} J_1$  в выходной цепи экв. схемы четырехполюсника заменяется эквивалентным по величине источником тока  $J = S \dot{U}_1$ . Действительно, так как  $h_{21} J_1 = \frac{DJ_k}{DJ_d} J_d = \frac{DJ_k / DU_{d'}}{DJ_d / DU_{d'}} J_d = S \dot{Z}_{BX} J_1 = S \dot{U}_1$ , эти источники эквивалентны друг другу.

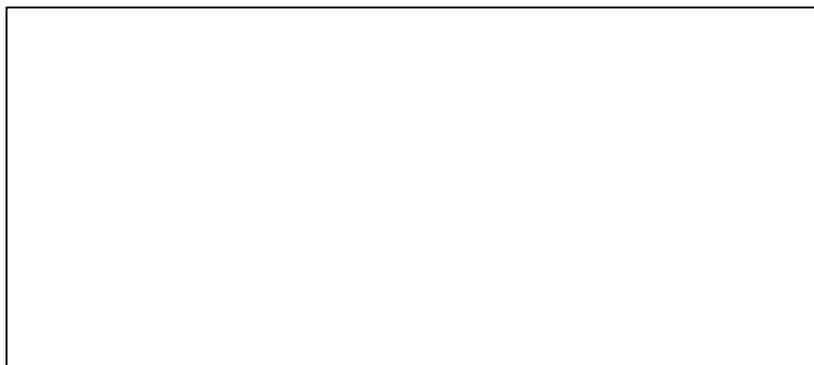


### 3.4. Частотные свойства усилителей.

Из возможных классификационных свойств усилителей выделяют два основных : по виду связи между каскадами и по виду коллекторной нагрузки  $\dot{Z}_k$ . Используя разработанную модель активного четырехполюсника рассмотрим свойства апериодического ( $\dot{Z}_k = R_k$ ) и резонансного ( $\dot{Z}_k^{-1} = j(\omega C - 1/\omega L)$ ) усилителей с резистивно-емкостной связью между каскадами.

#### а) Апериодический усилитель.

Эквивалентная схема выходной цепи такого усилителя имеет вид (см. рис.). Влияние входной цепи, в первом приближении, учтено источником тока  $SU_{блх}$ . Частотные свойства будем анализировать, используя понятие  $\dot{K}_U = \dot{U}_{блх} / \dot{U}_{вх}$ .



Для получения зависимости  $\dot{K}_U = f(\omega)$  выразим  $\dot{U}_{блх}$  через  $\dot{U}_{вх}$ . Для этого определим сначала напряжение  $U_1$ , на зажимах 1 - 1, создаваемое током  $SU_{блх}$ . Оно равно падению напряжения на сопротивление, эквивалентом параллельно - последовательной цепи, расположенной справа от режимов 1 - 1. Обозначим это сопротивление  $Z_{экв}$  и вычислим его :

$$Z_{экв} = \frac{1}{h_{22} + j\omega C_{блх} + R_K^{-1} + [R_H + 1/(j\omega C_P)]^{-1}}, \quad (27)$$

$$\text{Тогда } \dot{U}_{11} = SU_{вх} Z_{кв}. \quad (28)$$

Напряжение на выходе усилителя, на зажимах 2 - 2 будет равно

$$\dot{U}_{блх} = - \dot{U}_{11} \frac{R_H}{R_H + 1/(j\omega C_P)} = - \dot{U}_{11} \frac{j\omega t_H}{1 + j\omega t_H}, \quad (29)$$



где  $t_H = R_H C_2$  - постоянная времени нагрузочной цепи. На основании соотношений (26) , (29) находим частотный коэффициент передачи

$$\dot{K}_U(j\omega) = \frac{\dot{U}_{BbIX}}{\dot{U}_{BX}} = -SZ_{KB} \frac{j\omega t_H}{1 + j\omega t_H} \quad (30)$$

Проанализируем соотношение (30). Анализ удобно разделить на независимый анализ в области нижних, средних и верхних частот.

В области нижних частот ( $\omega \rightarrow 0$ ) сопротивление разделительного конденсатора  $1/\omega C_P$  больше, чем сопротивление  $R_H$ , следовательно,  $\omega t_H \ll 1$ . Влиянием проводимости  $\omega C_{BbIX}$  и  $[R_H + 1/(\omega C_2)]^{-1}$  в (30) можно пренебречь. Поэтому модуль выражения (30) принимает вид (при  $R_k^{-1} \gg h_{22}$ ).

$$K_U(\omega) \approx SR_K \omega t_H \quad (31)$$

В области средних частот, где  $R_H \gg 1/\omega C_P$ , следовательно,  $\omega t_H \gg 1$ ; проводимость  $\omega C_{BbIX}$  по-прежнему мала. Формула (30) еще больше упрощается:

$$K_U(\omega) = K_{max} = SR_K \quad (32)$$

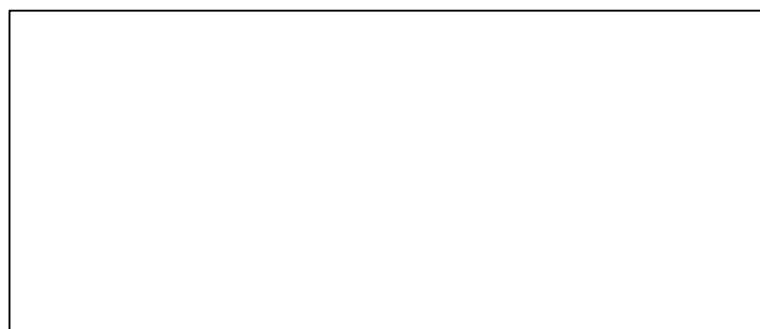
В области высоких частот проводимость  $\omega C_{BbIX}$  соизмерима с  $R_k^{-1}$ , и (30) принимает вид :

$$K_U(\omega) \approx K_{max} / \sqrt{1 + (\omega t_b)^2}, \quad (33)$$

где  $t_b = R_K C_{BbIX}$ . На очень высоких частотах, соответствующих условно  $\omega C_{BbIX} \gg R_k^{-1}$ , (33) упрощается :

$$K_U(\omega) \approx K_{max} / (\omega t_b) \quad (34)$$

Ниже построена АЧХ апериодического усилителя.



Полоса частот, внутри которой  $K^3 0.7 K_{max}$ , называется полосой пропускания усилителя. Как следует из формулы (31) и (34) она равна

$$2\Delta\omega = \frac{1}{t_B} - \frac{1}{t_H} = \omega_B - \omega_H \quad (35)$$

б) Резонансный усилитель ( линейный режим ).

От резистивного усилителя отличается только видом нагрузочной цепи (см. рис.).

В данном случае нагрузкой является параллельный колебательный контур и шунтирующее его сопротивление нагрузки каскада ( $R_H$ ).

Для упрощения задачи будем считать, что шунтирующее действие  $R_H$  велико и, поэтому, собственными потерями в контуре можно пренебречь. Кроме этого, можно пренебречь влиянием  $C_p$ , поскольку резонансные усилители работают, как правило, на высоких частотах и поэтому  $1/\omega C \ll R_H$ .

С учетом принятых упрощений, полная проводимость нагрузки источника тока  $SU_{bлх}$  будет равна

$$\dot{y}_H = h_{22} + (1/R_H) + j(\omega C - 1/\omega L)$$

Ранее принято, что  $h_{22} \ll (1/R_H)$ , поэтому пренебрежем и влиянием  $h_{22}$ :

$$\dot{y}_H = (1/R_H)[1 + jR_H(\omega C - 1/\omega L)].$$

Учитывая, что  $1/\omega C = \omega_0^2$ , и  $L/C = p^2$ , последнее соотношение принимает вид :

$$\dot{y}_H \approx \frac{1}{R_H} \left( 1 + j \frac{R_H}{p} \frac{2D\omega}{\omega_0} \right)$$

где  $\frac{R_H}{p} \frac{2D\omega}{\omega_0} = Q \frac{2D\omega}{\omega_0} = x$  - обобщенная расстройка,

$Q$  - добротность контура.

Таким образом, полная проводимость нагрузки источника тока  $SU_{блх}$  будет равна :  $\dot{y}_H \approx \frac{1}{R_H} (1 + jx)$ . (36)

Запишем выражение для комплексного коэффициента передачи, учтя, что ранее было пренебрежено влиянием емкости  $C_p$  :

$$\dot{K}_U(j\omega) = - \frac{U_{BbIX}}{U_{BX}} = \frac{S U_{BbIX}}{y_H} \frac{1}{U_{BX}} = - \frac{R_H S}{1 + jx} = \frac{K_{\max}}{\sqrt{1 + x^2}} e^{j[j(x) + p]}, \quad (37)$$

где  $K_{\max}$  - максимальное значение модуля частотного коэффициента передачи на резонансной частоте контура ( $x=0$ ) ;  $j = (x)$  - фазочастотная характеристика контура.

В формуле (37) соотношение  $[R_H/(1+jx)]$  определяет комплексное сопротивление контура с учетом внешних потерь в виде  $R_H$ . Оно же определяет частотные свойства коэффициента передачи  $\dot{K}_{\max}(j\omega)$ . Таким образом, АЧХ резонансного усилителя совпадает с АЧХ контура, образующего нагрузочную цепь.

Отметим еще две особенности : 1. выходная емкость транзистора компенсируется (учитывается) при настройке контура в резонансе ;

2. на сопротивлении нагрузки не расходуется мощность источника питания, поэтому оно может быть выбрано очень большим, что обеспечивает высокое усиление на частотах, близких к резонансной.

#### Самостоятельно

Используя обратное преобразование Фурье для комплексной передаточной функции определить импульсные характеристики апериодического и резонансного усилителей

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

Проанализировать вид полученных зависимостей с точки зрения инерционности схем.

### **3.5. Свойства и характеристики активных линейных цепей с обратной связью.**

#### а) Сущность и типы обратной связи.

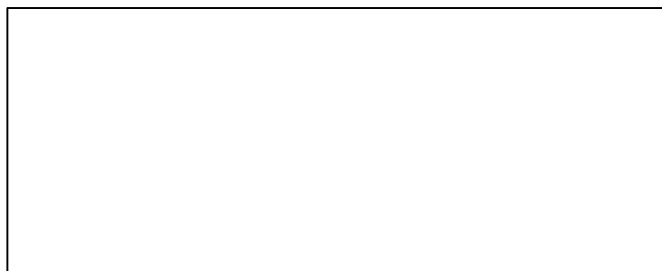
Одной из характерных черт любого электронного устройства является наличие или отсутствие обратной связи, т.е. связи, определяющей передачу на его вход части сигнала с его же выхода. Наличие такой связи может быть обусловлено следующими факторами:

1. физическими свойствами и конструктивными особенностями применяемых активных элементов. Это, так называемая, внутренняя обратная связь. (см. параметр  $h_{12}$ ) ;

2. неудачным расположением и монтажом различных элементов схемы, когда паразитные емкостные и индуктивные связи создают путь для передачи сигнала с выхода на вход. Это, так называемые паразитные обратные связи ;

3. специальными цепями, когда путь для передачи сигнала с выхода на вход устройства создается умышленно, для придания устройству нужных свойств. Это, так называемая, внешняя обратная связь.

Четырехполюсник, охваченный обратной связью, можно представить в виде основного четырехполюсника (без обратной связи) с коэффициентом передачи  $\dot{K}_1$  и четырехполюсника обратной связи с коэффициентом передачи  $\dot{K}_{oc}$ . При этом вход последнего присоединен к выходу, а выход - ко входу основного четырехполюсника (см. рис.)



При сложении сигналов от источника  $\dot{U}_{вх}$  с колебаниями, поступающими через цепь обратной связи, образуется результирующий сигнал на входе основного четырехполюсника. Он больше по величине чем  $U_{вх}$ , если оба этих сигнала складываются в фазе, и меньше, если в противофазе. В первом случае имеет место положительная обратная связь, во втором - отрицательная обратная связь.

Практическое совпадение или противоположность фаз возможны только в ограниченном диапазоне частот, т.к. фазовый сдвиг из-за наличия реактивностей зависит от частоты. Из этого следует, что обратная связь, отрицательная на одних частотах, может быть положительной на других при одном и том же четырехполюснике обратной связи.

Оба четырехполюсника ( $\dot{K}$  и  $\dot{K}_{oc}$ ) составляют кольцевую цепь, которую называют петлей обратной связи. Внутри этой петли различают четыре способа соединения этих четырехполюсников.

### 1. Последовательная обратная связь по току.

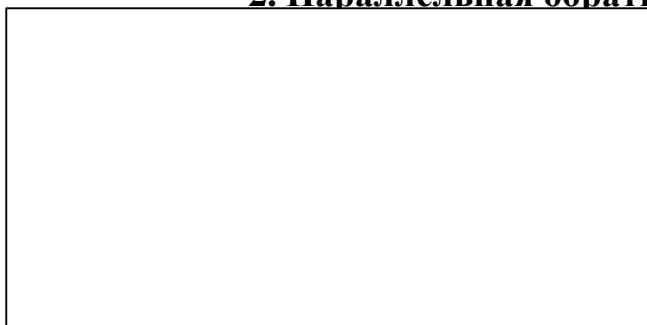
Здесь основной четырехполюсник и четырехполюсник обратной связи соединены последовательно: с одной стороны последовательно соединены источник усиливаемого сигнала  $U_{вх}$ , вход основного четырехполюсника  $\dot{K}$  и выход четырехполюсника обратной связи  $\dot{K}_{oc}$ ; с другой стороны последовательно соединены нагрузка  $\dot{Z}_н$ , выход четырехполюсника  $\dot{K}$  и

вход четырехполюсника  $\dot{K}_{OC}$ . По первому контуру протекает общий ток  $\dot{J}_1$ , по второму -  $\dot{J}_2$ .



В этом случае  $\dot{U}_{OC}$  зависит только от  $\dot{J}_2$ , поскольку  $\dot{U}_{OC} = \dot{K}_{OC} \dot{Z}_{BXOC} \dot{J}_2$ . Поэтому связь называется ОС по току. В том, что  $\dot{U}_{OC} = f(\dot{J}_2)$  убеждает и анализ этой зависимости: при  $\dot{Z}_H \neq 0$  и  $\dot{U}_{OC} \neq 0$ , то есть обратная связь исчезает.

## 2. Параллельная обратная связь по напряжению.



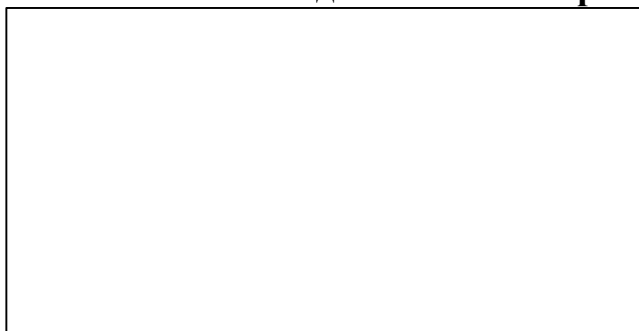
Здесь четырехполюсники соединены параллельно. Влияние обратной связи проявляется через ток во входной цепи четырехполюсника:  $\dot{J}_1 = \dot{J}_{BX} + \dot{J}_{OC}$ .

Ток  $\dot{J}_{OC}$  здесь зависит только от выходного напряжения:

$$\begin{aligned} \dot{J}_{OC} &= \dot{U}_{OC} / (\dot{Z}_{BbIXOC} \parallel \dot{Z}_{BX}) = \\ &= \dot{K}_{OC} \dot{U}_{BbIX} / (\dot{Z}_{BbIXOC} \parallel \dot{Z}_{BX}) \end{aligned}$$

При  $\dot{Z}_H \neq 0$ ,  $\dot{U}_{BbIX} \neq 0$  и  $\dot{J}_{OC} \neq 0$ , то есть обратная связь исчезает.

## 3. Последовательная обратная связь по напряжению.



Четырехполюсники соединены параллельно-последовательно

$$\dot{U}_{OC} = \dot{K}_{OC} \dot{U}_{BbIX}, \text{ то есть}$$

зависит только от  $\dot{U}_{BbIX}$ : при  $\dot{Z}_H \neq 0$ ,  $\dot{U}_{BbIX} \neq 0$  и  $\dot{J}_{OC} \neq 0$ .

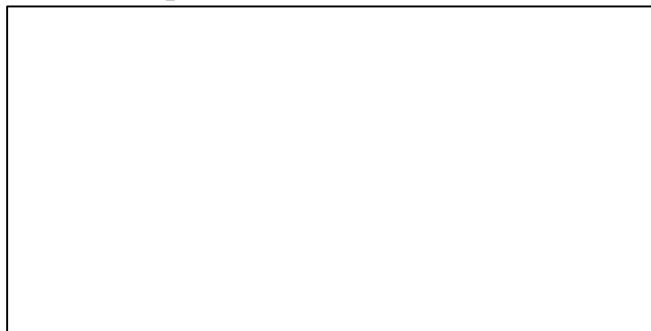
#### 4. Параллельная ОС по току.

Четырехполюсники соединены параллельно-последовательно. При этом  $\dot{J}_1 = \dot{J}_{BX} - \dot{J}_{OC}$ , а

$$\dot{J}_{OC} = \dot{K}_{OC} \dot{U}_{BbIX} / (\dot{Z}_{BbIXOC} \parallel \dot{Z}_{BX}) =$$

$$= \dot{K}_{OC} (\dot{Z}_H / \dot{Z}_{BbIXOC} \parallel \dot{Z}_{BX}) \dot{J}_2$$

зависит только от тока  $\dot{J}_2$ : при  $\dot{Z}_H \neq \infty$ ,  $\dot{J}_2 \neq 0$  и  $\dot{J}_{OC} \neq 0$ , то есть ОС исчезает.



Это простейшие виды ОС. На их основе можно создать различные смешанные, например, такой вид ОС, в котором  $\dot{U}_{OC}$  одновременно зависит и от  $\dot{U}_{BbIX}$  и от  $\dot{J}_H$ . При этом используется несколько цепей ОС.

Внешнюю ОС, создаваемую с помощью специальной цепи, всегда можно отнести к тому или иному виду, зная способ соединения четырехполюсников. Для внутренней или паразитной ОС такой определенности обычно нет и, поэтому, ее трудно учитывать и анализировать.

Оценим как зависит передаточная функция четырехполюсника от способа соединения входов схемы  $\dot{K}$  и схемы  $\dot{K}_{OC}$ . При этом будем считать, что от способа соединения их выходов свойства  $\dot{K}_0$  мало зависят, поскольку  $\dot{U}_{BbIX}$  и  $\dot{J}_{BbIX}$  линейно связаны между собой законом Ома через  $\dot{Z}_H$ .

Рассмотрим случай последовательной обратной связи по напряжению и определим коэффициент передачи четырехполюсника, охваченного ОС. Поскольку зависимыми параметрами в данном случае являются входное напряжение и выходной ток, то для описания системы используют систему уравнений вида (3). Если принять, что матрица  $h = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{vmatrix}$  описывает

свойства четырехполосника  $K$ , а матрица  $h_{OC} = \begin{vmatrix} h_{11}^* & h_{12}^* \\ h_{21}^* & h_{22}^* \end{vmatrix}$  - свойства четырехполосника  $K_{OC}$ , то матрица

$$h_0 = \begin{vmatrix} h_{11} + h_{11}^* & h_{12} + h_{12}^* \\ h_{21} + h_{21}^* & h_{22} + h_{22}^* \end{vmatrix} \quad (38)$$

описывает новый четырехполосник  $K_0$ , образованный в результате последовательно-параллельного соединения четырехполосников  $K$  и  $K_{OC}$ . Зная новые значения  $h$ -параметров можно воспользоваться формулами (22) для определения характеристик четырехполосника, охваченного последовательной обратной связью по напряжению.

Рассмотрим, как изменяются свойства четырехполосника, охваченного обратной связью  $H$ -типа. Для этого выразим его коэффициент передачи по напряжению  $K_0$  через коэффициенты  $K$  и  $K_{OC}$ .

$$\text{По определению} \quad K_0 = \dot{U}_{BbIX} / \dot{U}_{BX} \quad (39)$$

$$\text{Напряжение} \quad \dot{U}_{BbIX} = K(\dot{U}_{BX} + \dot{U}_{OC}) \quad (40)$$

$$\text{Напряжение} \quad \dot{U}_{OC} = K_{OC} \dot{U}_{BbIX} \quad (41)$$

Исключая из (39) и (40)  $\dot{U}_{OC}$  и решая полученное уравнение относительно  $\dot{U}_{BbIX}$ , находим:

$$\dot{U}_{BbIX} = \dot{U}_{BX} \frac{K}{1 - K K_{OC}}$$

Откуда, с учетом (39), получаем

$$K_0 = \frac{K}{1 - K K_{OC}} \quad (42)$$

Если обратная связь отрицательная, что соответствует условию  $K_0 < K$ , то это возможно только в случае, если  $(1 - K_0 K) > 1$ , или, если  $(-K K_{OC}) > 0$ . Если  $K K_{OC} \geq 1$ , то формула (42) теряет смысл и ее следует анализировать специальными методами.

Рассмотрим аналогичным образом случай параллельной ОС по напряжению. Свойства схемы теперь будут определяться системой уравнений вида (2), поскольку зависимыми параметрами теперь являются токи

$\dot{J}_1$  и  $\dot{J}_2$ . Результирующее соединение, т.е. четырехполюсник охваченный обратной связью, описывается суммарными у-параметрами

$$\dot{y}_0 = \begin{vmatrix} y_{11} + y_{11}^* & y_{12} + y_{12}^* \\ y_{21} + y_{21}^* & y_{22} + y_{22}^* \end{vmatrix} \quad (43)$$

Используя эти новые у-параметры можно определить все характеристики четырехполюсника, используя формулы типа (22).

Для сравнения с предыдущей схемой выразим коэффициент передачи по напряжению  $K_0$  через коэффициенты  $\dot{K}$  и  $\dot{K}_{OC}$ .

По определению

$$\dot{K}_{OC} = \dot{U}_{BbIX} / \dot{U}_{BX}^0, \quad (*)$$

где  $\dot{U}_{BX}^0$  - входное напряжение от источника сигнала.

$$\dot{U}_{BX}^0 = \dot{J}_{BX} Z_{BX}^0 = (\dot{J}_1 - \dot{J}_{OC}) Z_{BX}^0 = (\dot{J}_1 + \dot{J}_{OC}) \frac{1}{y_{BX} + y_{OC}},$$

$Z_{BX}^0 = Z_{BX} \parallel Z_{OCbIX}$  - входное сопротивление четырехполюсника  $\dot{K}_0$ ,

где  $y_{BX}$  - входная проводимость четырехполюсника  $\dot{K}$ , а  $y_{OC}$  - выходная проводимость четырехполюсника  $\dot{K}_{OC}$ .

Поскольку ток  $\dot{J}_1$  не протекает через цепь  $y_{OC}$ , а ток  $\dot{J}_2$  не протекает через цепь  $y_{BX}$ , то  $\dot{y}_{OC} / \dot{J}_1 = 0$  и  $y_1 / \dot{J}_{OC} = 0$ , и последнее соотношение принимает вид

$$\dot{U}_{BX}^0 = \dot{U}_{BX} - \dot{U}_{OC}, \quad (44)$$

где  $\dot{U}_{BX}$  - входное напряжение четырехполюсника  $\dot{K}$ , а  $\dot{U}_{OC}$  - выходное напряжение четырехполюсника  $\dot{K}_{OC}$ . Физический смысл представления (44) заключается в том, что в результате параллельного соединения четырехполюсников  $\dot{K}$  и  $\dot{K}_{OC}$  по входу четырехполюсника  $\dot{K}$  входное сопротивление четырехполюсника  $\dot{K}_0$  может быть представлено как входное сопротивление четырехполюсника  $\dot{K}$  и уменьшающего его слагаемого от четырехполюсника  $\dot{K}_{OC}$ , что при постоянном входном напряжении соответствует увеличению тока через источник входного сигнала за счет подключения цепи ОС.



Подставляя (44) в (\*) находим

$$\dot{K}_0 = \frac{U_{BbIX}}{U_{BX} - U_{OC}} = \frac{U_{BbIX} / U_{BX}}{1 - \frac{U_{BbIX}}{U_{BX}} \frac{U_{OC}}{U_{BbIX}}} = \frac{\dot{K}}{1 - \dot{K} \dot{K}_{OC}} \quad (45)$$

Полная идентичность формул (45) и (42) указывает на их универсальность: это соотношение определяет коэффициент передачи замкнутой системы с обратной связью независимо от способа соединения четырехполюсников. Произведение  $\dot{H} = \dot{K} \dot{K}_{OC}$  называется петлевым коэффициентом передачи цепи ОС (или коэффициентом передачи разомкнутой цепи ОС).

Если под четырехполюсником  $\dot{K}$  понимать усилитель, то формула вида (45) описывает коэффициент передачи усилителя с ОС. Переходя в (45) к модулям, и учитывая инвертирующие свойства усилителя без ОС, для усилителя с ООС получаем

$$K_0 = - \frac{K}{1 + KK_{OC}} \quad (46)$$

Из (46) следует, что введение ООС всегда уменьшает  $K_0$  по сравнению с  $K$ . Кроме этого, учитывая трансцендальный характер зависимости  $K(\omega)$ , нетрудно показать, что увеличение  $K_{OC}$  приводит к увеличению полосы пропускания в усилителях с ООС.

### **б) Стабильность коэффициента передачи замкнутой системы с ОС**

Из формул вида (42), (45) следует, что если при  $\dot{K} \dot{K}_{OC} \rightarrow 1$  усиление всей цепи стремится к бесконечности. Это означает, что цепь становится неустойчивой - какие угодно малые флуктуации тока или напряжения в цепи приводят к ее самовозбуждению. При чистой ООС такого явления не наблюдается. Рассмотрим, как влияет ОС на стабильность работы усилителя. Будем считать, что коэффициенты  $\dot{K}$  и  $\dot{K}_{OC}$  являются действительными величинами:  $K, K_{OC}$ . В этом случае формулы (42), (45) принимают вид

$$K_0 = \frac{K}{1 - KK_{OC}} \quad (47)$$

Исследуем стабильность коэффициента усиления замкнутой цепи.

Как следует из (47),  $K_0$  является функцией двух независимых величин:  $K$  и  $K_{OC}$ , то есть  $K_0 = F(K, K_{OC})$ . Поэтому отклонение значений  $K$  и  $K_{OC}$ , соот-

ветственно, на  $DK$  и  $DK_{OC}$  от своих средних значений функционально связано с отклонением  $DK_0$  от среднего значения  $K_0$ . Причиной изменения усиления усилителя и коэффициента передачи цепи обратной связи могут быть флуктуации напряжения источников питания, температурные колебания параметров транзисторов и другие причины. Значения  $DK/K$  и  $DK_{OC}/K_{OC}$  дают количественную оценку относительной стабильности усилителя и цепи ОС.

Используя разложение в ряд Тейлора, находим

$$DK_0 = \frac{\partial F}{\partial K} DK + \frac{\partial F}{\partial K_{OC}} DK_{OC}.$$

Полученное соотношение можно трактовать как независимое влияние нестабильности усилителя и цепи ОС на нестабильность усилителя, охваченного ОС.

Вычислив производные функции  $F(K, K_{OC})$ , заданной формулой (47), находим

$$DK_0 = \frac{1}{(1 - KK_{OC})^2} DK + \frac{K^2 DK_{OC}}{(1 - KK_{OC})^2}.$$

Перейдем к относительным величинам. Для этого обе части полученного равенства поделим на  $K_0$ . С учетом (47) находим

$$\frac{DK_0}{K_0} = \frac{1}{1 - KK_{OC}} \frac{DK}{K} + \frac{K DK_{OC}}{1 - KK_{OC}}.$$

Из этого выражения видно, что изменение усиления при наличии ОС может сильно отличаться от усиления при отсутствии ОС. Количественно это отличие определяется модулем и знаком петлевого коэффициента усиления  $KK_{OC}$ . Если обратная связь отрицательная ( $KK_{OC} < 0$ ), а произведение  $|KK_{OC}| \gg 1$ , то

$$\frac{DK_0}{K_0} = \frac{1}{|KK_{OC}|} \frac{DK}{K} - \frac{DK_{OC}}{K_{OC}}.$$

Как видно, отрицательная обратная связь в  $KK_{OC}$  раз улучшает стабильность усилителя и не влияет на стабильность цепи ОС. Отсюда следует важный практический вывод: при использовании ООС надо уделять особое внимание стабильности цепи ОС. Практически это вполне достижимо, так как элементами цепи ОС обычно являются устойчивые пассивные элементы ( $R, C$ ), а все основные дестабилизирующие факторы связаны с усилителем, но сильно подавляются ООС.

Таким образом, усилитель с ООС характеризуется существенно более высокой стабильностью работы. Очевидно также, что ООС, повышая стабильность усиления в  $KK_{OC}$  раз, во столько же раз уменьшает коэффициент усиления.

Аналогичным образом можно провести учет неустойчивости ФЧХ усилителя и цепи ОС на работу усилителя. Этот анализ позволяет сделать вывод, что неустойчивость фазового сдвига, вносимого усилителем, так же подавляется ООС. А неустойчивость фазового сдвига в цепи ОС может привести к возрастанию неустойчивости схемы в целом, поскольку цепь ООС может превратиться в цепь ПОС.

#### **в) Устойчивость линейных активных цепей с обратной связью.**

Физический смысл понятия “устойчивая работа активной цепи” состоит в том, что устойчивая цепь после прекращения действия внешних возмущений возвращается в исходное состояние. В противном случае любое внешнее возмущение приводит к развивающимся во времени колебательным процессам вплоть до генерации. Следовательно, в устойчивой активной цепи переходные процессы должны быть затухающими.

Возможны, по крайней мере, два пути анализа устойчивости :

- исследование переходного процесса замкнутой цепи
- исследование частотной зависимости петлевого коэффициента усиления цепи обратной связи.

Первый путь приводит к, так называемому, алгебраическому критерию устойчивости, второй - к частотному. Очевидно, что оба метода взаимосвязанны.

### **1. Алгебраический критерий устойчивости.**

Из теории электрических цепей известно, что напряжения или токи на входе и выходе произвольной линейной цепи связаны между собой дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n U_{BbIX}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{BbIX}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dU_{BbIX}}{dt} + a_0 U_{BbIX} = \\ = b_m \frac{d^m U_{BX}}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} U_{BX}}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{dU_{BX}}{dt} + b_0 U_{BX}, \end{aligned} \quad (48)$$

где  $m, n$  - целые числа, определяющие порядок уравнения (или порядок цепи) ;

$a_n, b_m$  - постоянные вещественные числа.

Пример цепи первого порядка - РС — ФНЧ и РС — ФВЧ.

Проблема устойчивости сводится к анализу зависимости выходного напряжения от времени при  $U_{BX}=0$ . В этом случае анализируют только собственные колебания, то есть колебания, которые принципиально могут существовать в цепи. Но это не означает, что они обязательно возникают в реальной цепи при  $U_{BX}=0$ .

Полагая в (48)  $U_{BX}=0$ , получим однородное дифференциальное уравнение, решением которого являются собственные колебания цепи:

$$a_n \frac{d^n U_{BbIX}}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} U_{BbIX}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dU_{BbIX}}{dt} + a_0 U_{BbIX} = 0 \quad (49)$$

Решением (49) являются функции вида  $e^{p_i t}$ , где  $p_i$  - корни характеристического уравнения вида

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0 = 0 \quad (50)$$

Поэтому общее решение однородного уравнения (50) является линейной комбинацией экспоненциальных функций :

$$U_{BbIX} = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t} \quad (51)$$

Корни характеристического уравнения могут быть комплексными, вещественными или мнимыми. Условию устойчивости удовлетворяют только отрицательные вещественные корни или комплексные корни с отрицательной вещественной частью. Первые описывают апериодические изменения напряжения, вторые - затухающие колебания. Следовательно, эти корни соответствуют физическому критерию устойчивости, который гласит, что собственные колебания цепи должны быть затухающими. Таким образом, для устойчивой работы цепи необходимо, чтобы корни характеристического уравнения замкнутой цепи находились в левой полуплоскости комплексного переменного  $P$ , что, в свою очередь, соответствует отрицательной вещественной части всех корней характеристического уравнения.

Теперь рассмотрим уравнение (48) с иной позиции. Колебаниям в цепях можно соотнести изображение по Лапласу. Запишем соответствие между оригиналом и изображением :

$$\begin{aligned} U_{BX}(t) &, U_{BX}(p), \\ U_{BbIX}(t) &, U_{BbIX}(p), \\ p &= s + j\omega \end{aligned}$$

Вычислив преобразование Лапласа для обеих частей уравнения (48), получим

$$(a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0) U_{BbIX}(p) = \\ = (b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0) U_{BX}(p),$$

откуда находим коэффициент передачи в операторной форме

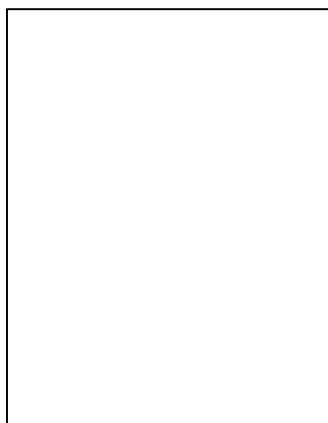
$$K(p) = \frac{b_m p^m + b_{m-1} p^{m-1} + \dots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p + a_0} \quad (52)$$

Знаменатель этой дроби совпадает с характеристическим уравнением (50). Поэтому корни уравнения  $p_i$  можно рассматривать как полюса операторного коэффициента передачи. Тогда критерий устойчивости замкнутой цепи можно сформулировать следующим образом : все полюса коэффициента передачи замкнутой цепи должны находиться в левой полуплоскости плоскости комплексной частоты  $p$ .

## 2. Частотный критерий устойчивости ( критерий Найквиста).

Алгебраический критерий устойчивости работы усилителя равносильно требованию, что модуль петлевого коэффициента усиления не должен обращаться в единицу в правой полуплоскости плоскости  $p$ . В этом случае в правой полуплоскости нет и полюсов функции  $K(p)$ .

Для дальнейшего анализа учета ФЧХ петли ОС необходимо установить взаимно-однозначное соответствие плоскости комплексного переменного  $p = s + j\omega$  и плоскости  $\dot{H}(p) = U(s, \omega) + jn(s, \omega)$ . Правая полуплоскость плоскости  $p$  ограничена мнимой осью ( $j\omega$ ) и полуокружностью радиуса  $R \rightarrow \infty$  [ $|R| = \sqrt{s^2 - \omega^2}$ ].



При движении вдоль мнимой оси от  $j\omega$  до  $-j\omega$  функция  $\dot{H}(p) = \dot{K}(p) \dot{K}_{OC}(p)$  плоскости  $H$  отображается кривой, вид которой определяется функциональной зависимостью  $\dot{H}(j\omega)$ . Следовательно мнимая ось плоскости  $p$  отображается на плоскости  $H$  в кривую, заданную уравнением  $\dot{H}(j\omega) = \dot{K}(j\omega) \dot{K}_{OC}(j\omega) = U(\omega) + jn(\omega)$

или

$$U(\omega) = K(\omega) K_{OC}(\omega) \cos[j_k(\omega) + j_{OC}(\omega)],$$

$$n(\omega) = K(\omega) + K_{OC}(\omega) \sin[j_k(\omega) + j_{OC}(\omega)],$$

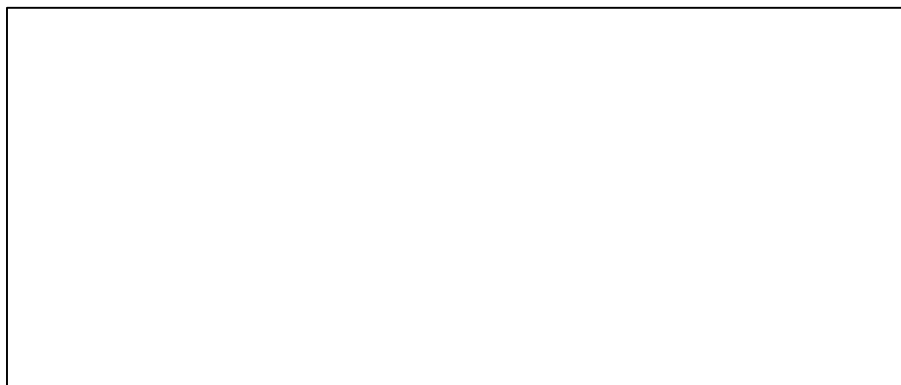
где  $j_k(\omega)$ ,  $j_{oc}(\omega)$  - фазочастотные характеристики усилителя и цепи ОС.

На контуре бесконечно большого радиуса функции  $\dot{H}(p)$  стремится к нулю. Действительно,  $R \gg \omega$  означает  $p \gg j\omega$ , а в этом случае в числителе и знаменателе формулы (52) имеет смысл сохранять только члены высшего порядка (так как  $p^n \gg p^{n-1} \gg \dots$ ;  $p^m \gg p^{m-1} \gg \dots$ ). Поэтому на окружности  $R \gg \omega$  функция  $\dot{K}(p)$  примет вид  $\dot{K}(p) = \frac{b_m}{a_n} p^{(m-n)}$ . При  $n > m$  функция

$\dot{K}(p)$ , а следовательно и  $\dot{H}(p)$  стремятся к нулю при  $R \gg \omega$ . Таким образом, полуокружность бесконечно большого радиуса на плоскости  $p$  отображается в точку начала координат на плоскости  $H$ . Следовательно, поведение  $\dot{H}(p)$  однозначно определяется замкнутой кривой  $\dot{H}(j\omega)$  на плоскости  $H$ . В соответствии с правилом обхода контуров движение вдоль мнимой оси (сверху вниз) соответствует обходу замкнутой кривой  $\dot{H}(j\omega)$  при изменении частоты от  $+\infty$  до  $-\infty$ . При этом вся правая полуплоскость плоскости  $p$  отображается во внутреннюю область замкнутой кривой  $\dot{H}(j\omega)$ .

Отсюда следует, что активная цепь устойчива, если ее петлевой коэффициент усиления не охватывает точку  $(1+j0)$ . В противном случае цепь неустойчива.

Это условие называют критерием устойчивости Найквиста, а кривую  $\dot{H}(j\omega)$  называют диаграммой Найквиста (см. рис.).



Исходя из критерия Найквиста, обычно используют сравнительно простой способ определения частотной области устойчивости работы усилителя. Для устойчивости работы усилителя необходимо, чтобы в полосе рабочих частот выполнялось условие  $K(\omega)K_{oc}(\omega) < 1$  при  $j_k(\omega) + j_{oc}(\omega) = 2p$ .

На рисунке приведены АЧХ и ФЧХ устойчивой и неустойчивой цепей

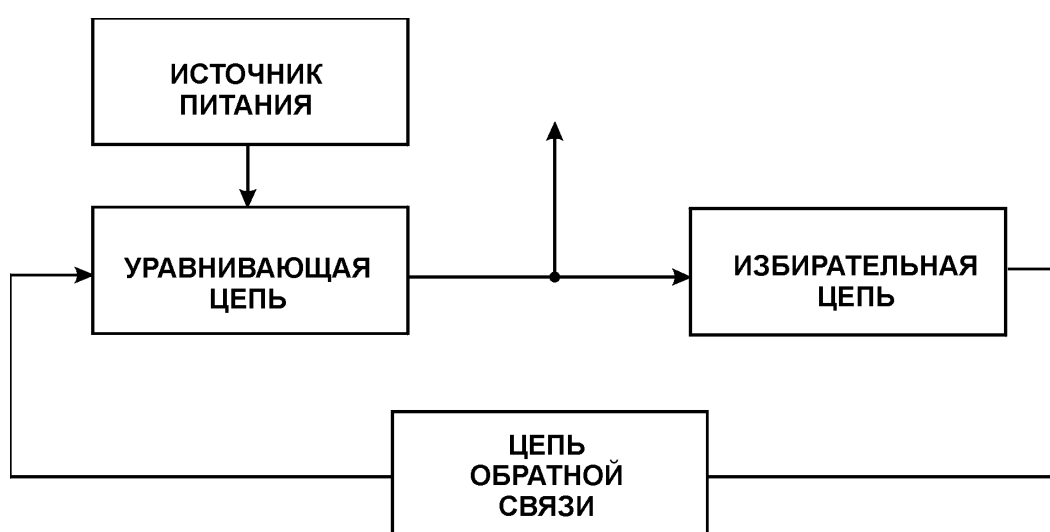


## 1. Генерирование колебаний в электрических цепях

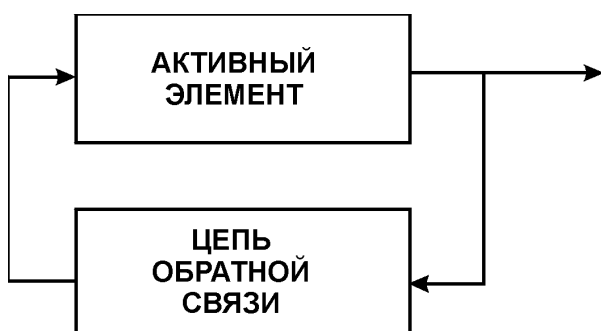
### 4.1. Автоколебательная система - устройство с ОС.

В цепях, содержащих обратные связи, могут возникнуть изменяющиеся во времени электрические токи без воздействия на эти цепи внешних управляющих сигналов. Такие цепи называют автоколебательными системами, а колебания - автоколебаниями.

Типичная структура автоколебательной системы - это структура с обратной связью, в которой часть выходного сигнала возвращается на вход через цепь обратной связи (см. рис.).



В наиболее общем случае колебательная система включает источник питания, энергия которого, в конечном случае, и преобразуется в энергию колебаний, цепь управления этим преобразованием, избирательную цепь, служащую для отфильтровывания нужных колебаний, и цепь обратной связи. При анализе таких систем, как правило, источник питания рассматривают как составную часть управляющей цепи (активный управляющий элемент, например, усилитель), а избирательную цепь как составную часть либо активного элемента (колебательный контур в составе резонансного усилителя), либо цепи обратной связи (RC - автогенератором гармонических колебаний, мультивибратора и т.д.). Таким образом анализ колебательной системы сводится к анализу активной цепи с обратной связью (см. рис.).



С электротехнической точки зрения активный элемент колебательной системы является нелинейным четырехполюсником, коэффициент передачи которого зависит от действующих в его цепях токов и



напряжений, а цепь обратной связи - линейным четырехполусником. Эти свойства элементов системы определяют ее принцип действия.

Действительно, при соответствующем выборе параметров система с обратной связью становится неустойчивой. При этом малые амплитуды любых колебаний, существующих в системе, например, тепловых или коммутационных колебаний, начинают возрастать. С ростом амплитуды коэффициент передачи активного элемента, как правило, уменьшается, и при некотором его значении нарастание амплитуды колебаний прекращается. Установившееся значение называется стационарным.

При анализе и расчете автоколебательных систем - автогенераторов решают две основные задачи:

1. определение условий при которых, устройство с обратной связью становится неустойчивым, т.е. самовозбуждается;
2. определение амплитуды и частоты автоколебаний в стационарном режиме.

Наиболее сложной является вторая задача, в которой исследуется нелинейная система с обратной связью в режиме больших амплитуд, когда нелинейностью пренебречь нельзя. Первую же задачу решить относительно несложно, поскольку при малых амплитудах автоколебания на начальном этапе процесса нелинейный активный элемент может быть эквивалентно заменен линейной схемой замещения, такой как, например, у обычного линейного усилителя с ОС. Некоторые сведения об условиях самовозбуждения можно получить даже в общем случае, не рассматривая конкретной схемы автогенератора.

Действительно, коэффициент передачи по напряжению линейного четырехполусника, охваченного обратной связью, определяется формулой:

$$K_0 = \frac{K}{1 - K K_{\text{ос}}}$$

где  $K$  - коэффициент передачи активного элемента автогенератора, а  $K_{\text{ос}}$  - коэффициент передачи по цепи обратной связи.

В соответствии с алгебраическим критерием устойчивости система становится неустойчивой когда петлевой коэффициент передачи:

$$1 - K K_{\text{ос}} = 0 \tag{1}$$

В силу комплексности величины, входящих в (1), это соотношение разлагается на два условия:

- условие баланса амплитуд

$$K = K_{\text{ос}} \tag{2}$$

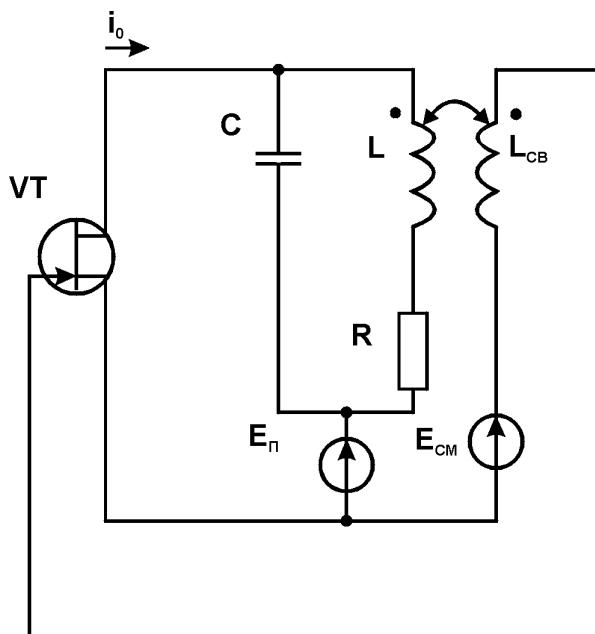
- и условие баланса фаз

$$j\hat{E} + j\hat{I}_{\hat{N}} = 2np \quad (3).$$

Первое из них свидетельствует о том, что автоколебания в системе возможны, если активный элемент компенсирует все потери энергии в системе, включая нагрузку; второе условие требует, чтобы при этом колебания на входе и выходе петли обратной связи были синфазными.

В общем случае параметры  $\hat{E}$ ,  $\hat{I}_{\hat{N}}$ ,  $j\hat{E}$  и  $j\hat{I}_{\hat{N}}$  зависят от частоты. Поэтому условия (2) и (3) обычно выполняются или только для одной частоты или в достаточно узком диапазоне частот. Чтобы ответить на вопрос “на какой частоте возможны колебания?”, необходимо анализировать конкретную схему.

#### 4.2. Самовозбуждение LC - автогенератора гармонических колебаний.



Рассмотрим схему, в которой при определенных условиях могут возникать и существовать автоколебания. Схема содержащая полевой транзистор, колебательный контур и индуктивную цепь обратной связи. Будем считать, что ток стока транзистора связан с напряжением затвористок нелинейной зависимостью  $i_0 = I(U_{зи})$ .

В колебательном контуре уравнения, связывающие ток в емкости  $i_C$  с током  $i_L$  записывается в виде системы:

$$i_0 = i_C + i_L;$$

$$i_C = C \frac{dU_C}{dt}; \quad L \frac{di_L}{dt} + R i_L =$$

$$C \frac{dU_C}{dt} = -i_L + i_0; \quad L \frac{di_L}{dt} = -R i_L$$

или как одно уравнение

$$L \times C \frac{d^2 i_L}{dt^2} + R \times C \frac{di_L}{dt} + i_L = i_0.$$

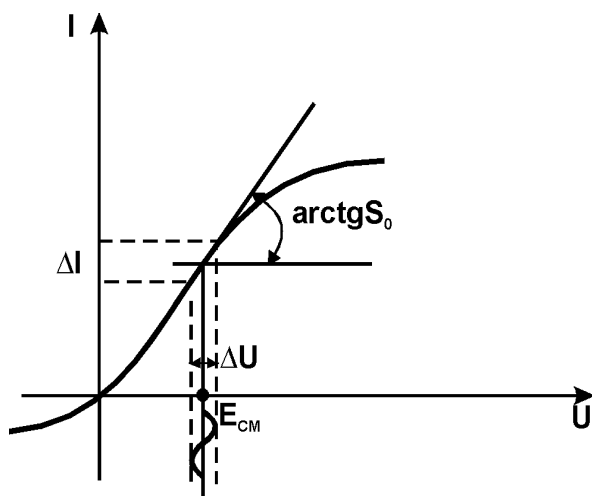
Для цепи обратной связи имеем

$$U = U_{\text{св}}(t) = M \frac{di_L}{dt} + E_{\text{нл}}.$$

Следовательно, полную систему уравнений цепи можно записать таким образом:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di_L}{dt} + \frac{1}{L \times C} i_L = \frac{1}{L \times C} I_{\text{св}} E_{\text{нл}} + M \frac{di_L}{dt} \ddot{\varphi}, \quad (4)$$

или в развернутом виде:



$$\begin{aligned} \ddot{N} \frac{dU_c}{dt} &= -i_L + i_0; \\ L \frac{di_L}{dt} &= -R i_L + U_c; \\ M \frac{di_L}{dt} &= -U + E_{\text{св}}; \quad I(U) = i_0 \end{aligned}$$

После включения источников постоянного напряжения в цепи начинается заряд емкости и протекания тока в индуктивности, причем начальные значения  $i_L(t)$  и  $U_c(t)$  весьма малы. Напряжение  $U(t)$  при этом также будет незначительно отличаться от  $E_{\text{св}}$  и зависимость  $I(U)$  может быть существенно упрощена.

Пусть  $I(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + \dots$  (см. рис.). Так как

$$i \frac{di_L}{dt} = DU = U - E_{\text{св}},$$

то

$$\begin{aligned} I(DU) &= a_0 + a_1(E_{\text{св}} + DU) + a_2(E_{\text{св}} + DU)^2 + \dots = \\ &= a_0 + a_1 E_{\text{св}} + a_2 E_{\text{св}}^2 + \dots + a_1 DU + 2a_2 E_{\text{св}} DU + a_2 DU^2 + \dots \end{aligned}$$

Если принять, что

$$|DU| \ll |E_{\text{св}}| \quad \text{è} \quad |Di_0| = |i_0(t) - I(E_{\text{св}})| \ll I(E_{\text{св}}),$$

то можно линеаризовать зависимость  $i_C(t) - I(E_{CM}) = a_1 DU = S_0 DU$ , где  $S_0$  - начальная крутизна, равная тангенсу угла наклона касательной к графику  $I(U)$  в точке  $U = E_{CM}$ .

Дифференциальное уравнение для тока  $Di_L = [i_L(t) - I(E_{CM})]$  будет таким:

$$\frac{d^2 Di_L}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d Di_L}{dt} + \frac{1}{L \times C} Di_L = \frac{1}{L \times C} S_0 \times M \frac{d Di_L}{dt},$$

или

$$\frac{d^2 Di_L}{dt^2} + \frac{1}{L} \times \frac{R}{C} - \frac{S_0 \times M}{C} \frac{d Di_L}{dt} + \frac{1}{L \times C} Di_L = 0, \quad (6).$$

Обозначим  $a_{\dot{\gamma}} = \frac{1}{2 \times L} \times \frac{R}{C} - \frac{S_0 \times M}{C} \frac{d}{dt}$ . Тогда уравнение (6) можно записать в виде:

$$\frac{d^2 Di_L}{dt^2} + 2 \times a_{\dot{\gamma}} \frac{d Di_L}{dt} + \frac{1}{L \times C} Di_L = 0.$$

Это линеаризованное уравнение колебательного процесса в автогенераторе на стадии возникновения и нарастания колебаний. Его решения определяет закон суммирования амплитуды колебаний:

$$Di_L = A \times e^{-a_{\dot{\gamma}} \times t} \cos(\omega \times t + j)$$

и их частоту

$$\omega = \left[ 1 / (LC - a_{\dot{\gamma}}^2) \right]^{1/2}$$

Начальные значения амплитуды и фазы колебаний можно найти из начальных условий. Но в рассматриваемом случае исходными следует считать случайными флуктуациями токов и напряжений, поэтому особого значения определения их величины не имеет.

Более важным является другое. Если  $a_{\dot{\gamma}} > 0$ , то какой бы ни была начальная флуктуация тока, процесс в цепи будет затухать. Если же  $a_{\dot{\gamma}} < 0$ , то сколько угодно малая начальная флуктуация тока будет нарастать с течением времени.

В первом случае цепь является устойчивой. Корни характеристического уравнения

$$\delta_{1,2} = -a_{\dot{\gamma}} \pm \sqrt{a_{\dot{\gamma}}^2 - 1/LC}$$

имеют отрицательную действительную часть.

Во втором случае цепь неустойчива. Неустойчивость может привести к автоколебаниям в цепи. Условием возникновения автоколебаний является положительность действительной части корней характеристического уравнения цепи. Рассмотрим физический смысл условия неустойчивости. Согласно уравнения (6), для возникновения автоколебаний необходимо иметь  $a_3 < 0$ , т.е.

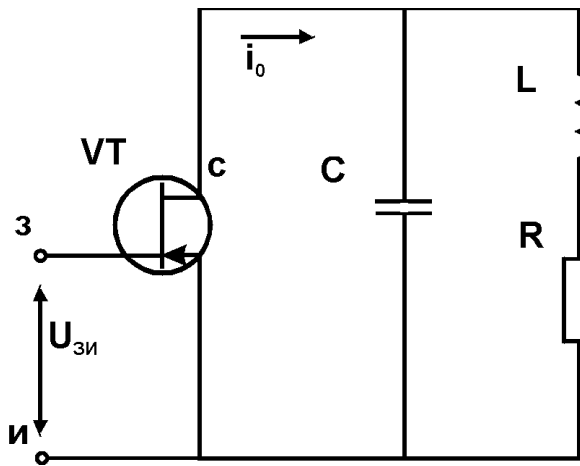
$$\frac{1}{2} \frac{a_{CR}}{L} - \frac{S_0 > M}{C} \frac{\ddot{\phi}}{\dot{\phi}} < 0, \quad \text{т.е.} \quad R < \frac{S_0 > M}{C}.$$

Сопротивление потерь в цепи, т.е. превращение энергии колебаний в теплоту, должно быть меньше некоторого значения, обусловленного крутизной характеристики активного элемента и коэффициентом обратной связи. Очевидно, что это условие эквивалентно условию баланса амплитуд вида (2). Фазовое условие существования автоколебаний вида (3) в данном анализе трансформировалось в выражение для частоты колебаний.

Полученное уравнение (6) справедливо только для малых приращений  $i_L(t)$ . Поэтому решение в виде растущей экспоненты справедливо для цепи только на начальном этапе развития процесса автоколебаний. Амплитуда этих колебаний будет возрастать не бесконечно, а достигнет некоторого стационарного значения. Для расчета стационарной амплитуды и частоты колебаний в установившемся режиме используют другой метод, называемый гармонической линеаризацией.

#### **4.3. Анализ стационарного режима автогенератора методом гармонической линеаризации**

В методе гармонической линеаризации нелинейный резистивный четырехполюсник, включая и избирательный фильтр, заменяется некоторым эквивалентным линейным четырехполюсником с комплексной частотной характеристикой, зависящей от амплитуды входного сигнала. Рассмотрим, как осуществляется такая замена.



Пусть имеется цепь, состоящая из полевого транзистора с колебательным контуром, включенным в цепь стока (см. рис.). Как и прежде нелинейная зависимость тока стока от напряжения затвор-исток задается многочленом  $i_0 = I(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + \dots$

Можно показать (см. след. Раздел), что если напряжение затвор-исток гармоническое  $U_{зи} = U_0 \cos(\omega_0 t + j_0)$ , то ток истока будет

определять гармоники с частотами  $\omega_i = i\omega_0$ :

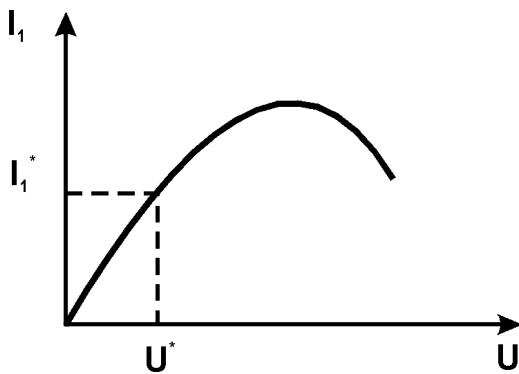
$$i_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} I_i \cos(i\omega_0 t + j_i)$$

Если колебательный контур настроен на частоту первой гармоники  $\omega_i = \omega_0 = \omega_p = 1/\sqrt{LC}$ , то на частоте  $\omega_0$  сопротивление контура  $Z(\omega_0) \gg \rho \times Q$ ,  $\rho = \sqrt{L/C}$ . На частотах  $[(0, 2, 3 \dots n) \omega_0]$ , сопротивление контура будет близко нулю. При этом ток в индуктивности  $I_{mL} \gg I_1 \rho > Q / (\omega_0 L) \gg I_1 Q$ , где  $I_1$  - амплитуда первой гармоники тока в нелинейном элементе. В свою очередь, амплитуда тока первой гармоники в

нелинейном элементе зависит от вида характеристики этого элемента  $I(U)$ , т.е. от коэффициентов  $a_1, a_3, a_5 \dots$  и т.д., и от амплитуды входного сигнала  $U$ . Поэтому

$$I_1 = I_1(a_1, a_3, a_5 \dots, U).$$

Эта зависимость для заданного нелинейного элемента называется колебательной характеристикой. Для нелинейного четырехполюсника описываемого многочленом третьей степени, колебательная характеристика имеет следующий вид:



(см. рис.).

Учитывая сказанное и принимая в качестве входного сигнала гармоническое колебание для тока стока будем иметь:

$$i_0(t) = Q_0 + \frac{1}{2} a_2 U^3 + a_1 U \cos \omega_0 t + \frac{3}{4} a_3 U^3 \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} a_2 U^2 \cos 2\omega_0 t + \frac{1}{4} a_3 U^3 \cos 3\omega_0 t.$$

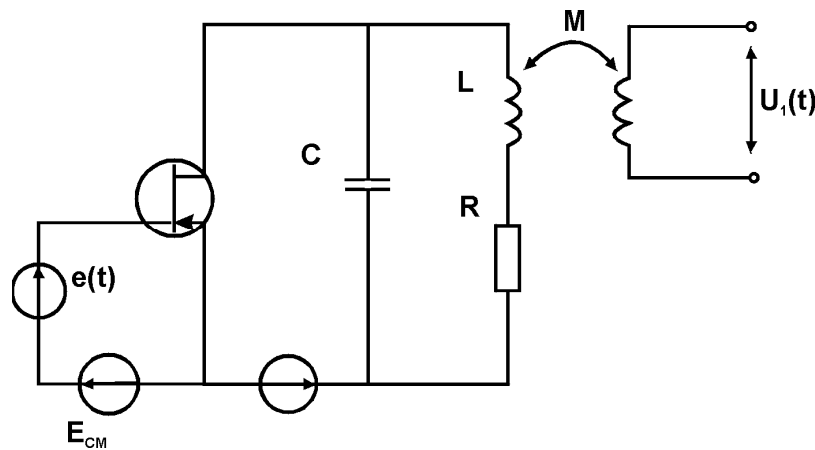
Относительно первой гармоники получаем

$$I_1(U) = a_1 U + \frac{3}{4} a_3 U^3 = K(U) \times U,$$

где  $K(U) = a_1 + 3a_3 U^2 / 4$  - коэффициент передачи (крутизна ВАХ) нелинейного безынерционного элемента на первой гармонике (проводимость).

Таким образом, для каждой конкретной точки  $U^* = \text{const}$  колебательной характеристики (для которой  $K(U^*) = \text{const}$ ), зависимость тока первой гармоники от входного напряжения имеет линейный характер  $I_1^* = K^* U^*$ .

Вернемся к схеме рассматриваемого автогенератора гармонических колебаний. Разомкнем цепь обратной связи и подключим по входу транзистора независимый источник гармонического напряжения  $e(t)$  (см. рис.).



Пусть  $e(t) = U \cos \omega_0 t$ ,  $\omega_0 = \omega_p = 1 / \sqrt{LC}$ . Тогда, согласно методу гармонической линеаризации ток в индуктивности  $i_L(t) = I_1 \times Q = I_1(U) \times Q \cos(\omega_0 t + j_1)$ , где  $j_1$  - сдвиг фазы между напряжением  $U_1$  и током  $i_L$ . Напряжение  $U_1(t) = M di_L / dt = Q \times M \times \omega_0 I_1(U) \cos(\omega_0 t + j_1 + \pi / 2)$ . Предположим, что амплитуда этого напряжения равна амплитуде входного напряжения, т.е.  $U = Q \times M \times \omega_0 I_1(U)$ , а  $j_1 + \pi / 2 = 2n\pi$ . Тогда, если мгновенно отключить внешний источник  $e(t)$  и замкнуть обратную связь, то колебания в цепи будут продолжаться, как будто бы ничего не изменилось. Это условие стационарного режима: при обходе по петле обратной связи амплитуда остается неизменной, а сдвиг фаз кратен  $2\pi$ .

Первое условие, как и ранее, является условием баланса амплитуд, второе - условием баланса фаз:

$$K(U) \times K_{oc}(\omega_0) = 1 \quad (7)$$

$$j_k(w_0) + j_{oc}(w_0) = 2\pi n \quad (8)$$

Здесь  $K(U)$  - коэффициент передачи (крутизна ВАХ) безынерционного нелинейного элемента по первой гармонике;  $K_{oc}(w_0)$  - коэффициент передачи цепи обратной связи;  $j_k$  - фазовый сдвиг нелинейного элемента, а  $j_{oc}(w_0)$  - фазовый сдвиг в цепи обратной связи.

Из уравнений (7) и (8) определяется стационарная амплитуда  $U$  и стационарная частота  $w_0$  колебаний. Для рассматриваемой цепи имеем:

$$U = Q \times M \times w_0 (Q_1 + \frac{1}{4} a_3 U^2) U;$$

$$Q \times M \times w_0 (a_1 + \frac{1}{4} a_3 U^2) = 1$$

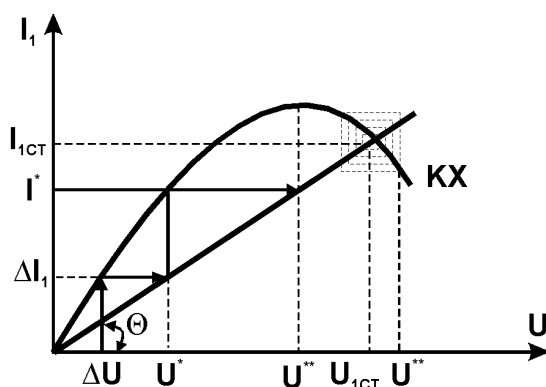
$$U_{ст} = \sqrt{\frac{4}{Q \times M \times w_0} (1 - Q \times M \times w_0 \times a_1)};$$

$$\text{Аñëè } j_1 \gg \pi / 2; \quad \text{òí } w_0 = w_p = 1 / \sqrt{LC}.$$

#### 4.4 Графический метод анализа стационарного режима.

Понятие колебательной характеристики линейной цепи позволяет определить стационарную амплитуду в цепи с обратной связью графическим методом.

По определению, колебательная характеристика есть зависимость амплитуды первой гармоники выходного тока  $I_1$  нелинейного элемента от амплитуды  $U$  входного гармонического напряжения. Поэтому для графического решения уравнения баланса амплитуд необходима характеристика обратной связи, представляющая собой зависимость амплитуды напряжения обратной связи  $U$  от амплитуды тока  $I_1$ . Поскольку цепь обратной связи линейная, искомая зависимость представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Угол наклона ее зависит от способа реализации обратной связи. В нашем случае



представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Угол наклона ее зависит от способа реализации обратной связи. В нашем случае  $U = Q \times M \times w_0 I_1(U)$  и  $U = \arctg M \times Q \times w_0$  и прямой обратной связи (см. рис.). Графики будут иметь две точки пересечения: начало координат и некоторую точку  $U_{ст}, I_{ст}$ .

Эти точки соответствуют двум возможным стационарным состояниям цепи: первая - отсутствию колебаний, вторая - стационарным автоколебаниям с



амплитудой  $U_{CT}$ . Покажем, что первая точка является неустойчивой. Пусть имеется небольшая начальная флуктуация  $\Delta U$ . Ей будет соответствовать появление тока с амплитудой первой гармоники  $\Delta I_1$ . Этот ток создает в цепи обратной связи напряжение  $U^*$ , которое приведет к появлению тока  $I^*$  и т.д. Таким образом, малая начальная флуктуация  $\Delta U$  приведет к установлению стационарной ненулевой амплитуды колебаний.

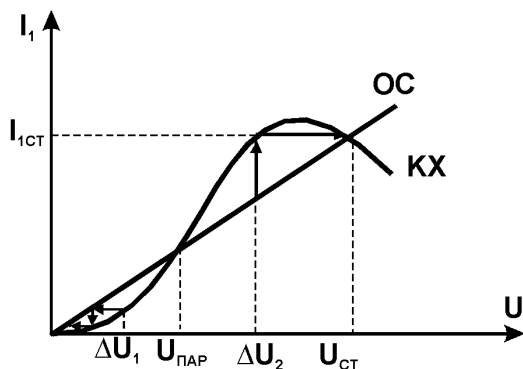
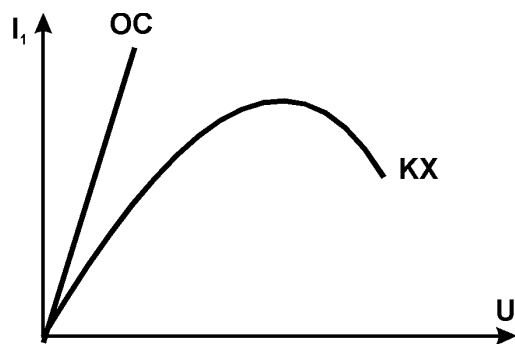
Для того, чтобы нулевая точка была неустойчивой, прямая обратной связи должна проходить в начале координат ниже графика колебательной характеристики:

$$\operatorname{ctg} Q > \left. \frac{dI_1}{dU} \right|_{U=0} = S_0;$$

$$\Leftrightarrow 1 / (Q \times M \times \omega_0) > S_0; \quad Q = p / R; \quad M \times S_0 / C > R.$$

Это условие самовозбуждения было уже получено из анализа корней характеристического многочлена дифференциального уравнения цепи.

Рассмотренная цепь считается находящейся в мягком режиме самовозбуждения, когда колебания возникает при  $\Delta U \rightarrow 0$ . Очевидно (из построений), что точка  $U_{CT}$ ,  $I_{CT}$  является устойчивой, поскольку любые  $\Delta U$  приводят к ее возврату в прежнее положение.



Расположение линии обратной связи по отношению к колебательной характеристике может быть и иным (см. рис.). В этом случае стационарный режим будет при нулевой амплитуде. В цепи, не возникает автоколебаний при любых отклонениях  $\Delta U$ .

Если график колебательной характеристики  $I_1(U)$  имеет S-образную форму (см. след. Рис.), но начальная точка будет устойчивой, однако цепь может самовозбуждаться, если в ней возникнет начальная флуктуация  $\Delta U > U_{ПАР}$ . Режим, когда начальная точка является устойчивой, но существует пороговое значение флуктуаций, превышение которого приводит к самовозбуждению, называется жестким режимом возбуждения генератора.

Таким образом, нелинейная цепь может вести себя по разному при малых и сильных внешних воздействиях. Если по линеаризованному дифференциальному уравнению можно установить устойчивость или неустойчивость цепи

“в малом”, то анализ колебательной характеристики совместно с прямой обратной связи позволяет провести анализ устойчивости “ в большом” и определить возможность существования жесткого режима возбуждения.

Метод гармонической линеаризации пригоден для анализа цепей с узкополосными фильтрами - колебательными контурами с высокой добротностью. Если же фильтр не является таким контуром, то автоколебания будут возникать не только на первой гармонике, но и на других ( $\omega = n\omega_0$ ). При этом ..... колебаний будет негармонической. Для анализа процессов в таких цепях используют метод уравнений состояния и их численное интегрирование.

#### 4.5. Анализ автоколебаний методом уравнений состояния

Уравнение (4), получение для автоколебательной цепи, эквивалентно системе уравнений первого порядка:

$$\begin{aligned} di_L(t) / dt &= V(t) \\ dV(t) / dt &= -\frac{R}{L} V(t) - \frac{1}{LC} i_L(t) + \frac{1}{LC} I(E_{CM} + M \times V(t)) \end{aligned} \quad (9)$$

Такое представление уравнений цепи соответствует уравнениям состояния.

В силу нелинейного характера функции  $I(U)$  найти решение (9) аналитически нельзя. Для анализа процессов применяют численные методы интегрирования систем дифференциальных уравнений - численное моделирование.

Простейший подход состоит в приближенной замене производной от функции  $f(t)$ :

$$\frac{df}{dt} = \frac{f(t + Dt) - f(t)}{Dt}.$$

Обозначим  $t_n = n \times Dt$ ;  $i_L(t_n) = i_{Ln}$ ;  $V(t_n) = V_n$ , получим

$$\begin{aligned} i_{L(n+1)} &= Dt \times V_n + i_{Ln} \\ V_{n+1} &= \frac{1}{e} \left( 1 - \frac{R}{L} Dt \right) V_n - \frac{Dt}{LC} i_{Ln} + \frac{Dt}{LC} I(E_{CM} + M \times V_n) \end{aligned} \quad (10)$$

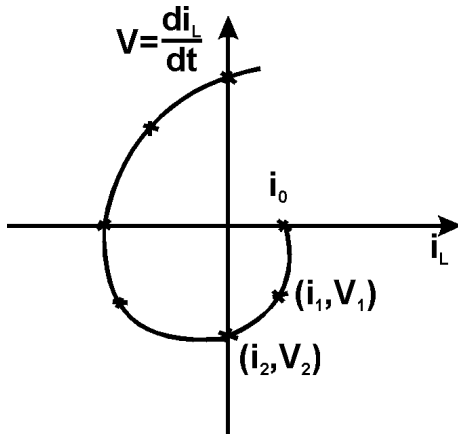
Предположим, что известна начальная флуктуация  $i_L(0)=i_0$ ;  $V(0)=0$ . Поскольку функция  $I(U)$  может быть вычислена для любых значений аргумента, подставляя в (10), получаем:

$$i_{L1} = 0 + i_0$$

$$V_1 \gg \frac{Dt}{LC} i_0 + \frac{Dt}{LC} I(E_{CM})$$

Теперь, подставив полученные значения снова в (10), найдем  $i_{L2}$ ,  $V_2$  и т.д. Этот метод приближенного решения носит название метода Эйлера.

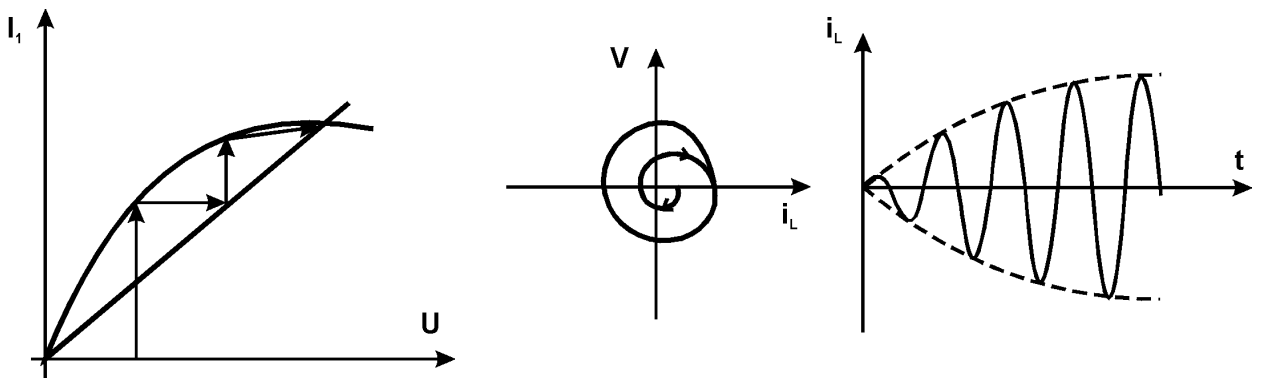
Решение системы уравнений вида (10) может быть представлено графически на плоскости состояния (см. рис.).



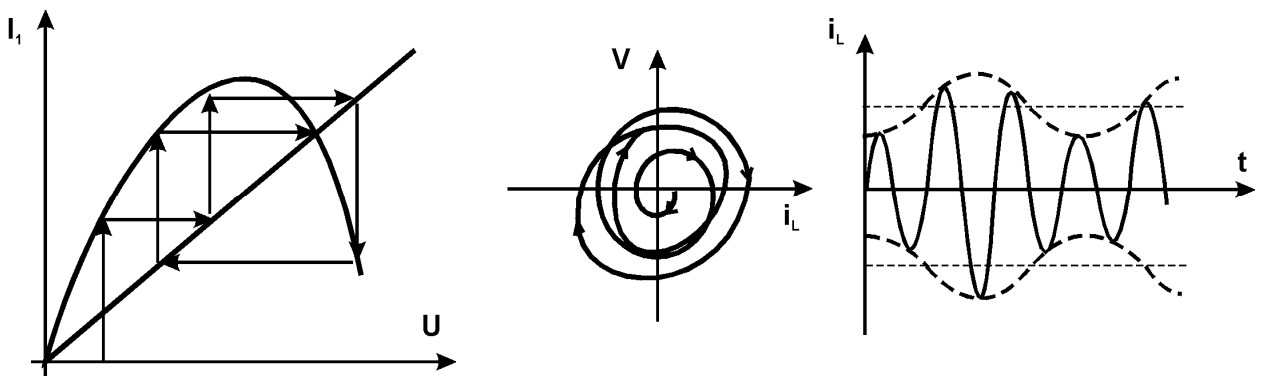
Рассмотрение процессов в автоколебательных цепях на плоскости состояния часто оказывается более наглядным, чем в другой форме.

Рассмотрим примеры, показывающие взаимосвязь характеристики и линии ОС с траекторией на плоскости состояния и осциллограммы процессов, полученных численным решением уравнений состояния.

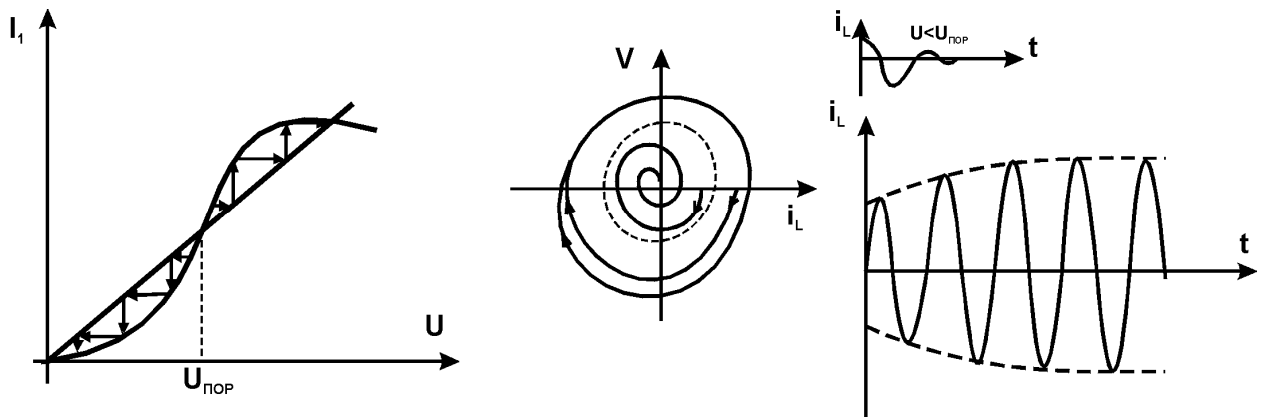
1. Автоколебательная цепь в мягком режиме самовозбуждения с монотонным установлением амплитуды.



2. Мягкий режим самовозбуждения с немонотонным установлением амплитуды



### 3. Жесткий режим с монотонным установлением колебаний



#### 4.6. RC - автогенераторы гармонических колебаний

Гармонические колебания можно получить в системах, не содержащих колебательного контура. Выделение колебания нужной частоты здесь осно-

вано на том, что условия самовозбуждения (2) и (3) в ряде случаев могут выполнять только на одной частоте.

Рассмотрим вариант такой системы (см. рис.) состоящий из усилителя с коэффициентом передачи  $\dot{K}$  и цепи обратной связи с коэффициентом передачи  $\dot{K}_{oc}$ .

Чтобы воспользоваться формами (2) и (3) примем, что  $\dot{K} = \dot{K} > \dot{a}^{ip}$  и определим  $\dot{K}_{oc}$ . Для этого воспользуемся методом контурных токов, в соответствии с которым составим систему уравнений, связывающих

$$\dot{U}_1 \text{ и } \dot{U}_2 (\dot{K}_{oc} = \dot{U}_1 / \dot{U}_2):$$

$$\begin{aligned} (R + 1/j\omega C)\dot{I}_1 - (1/j\omega C)\dot{I}_2 &= \dot{U}_2 \\ - (1/j\omega C)\dot{I}_1 + (R + 2/j\omega C)\dot{I}_2 - (1/j\omega C)\dot{I}_3 &= 0 \\ - (1/j\omega C)\dot{I}_2 + (R + 2/j\omega C)\dot{I}_3 &= 0 \end{aligned}$$

решая эту систему относительно  $\dot{I}_3$ , находим

$$\dot{I}_3 = \frac{-\dot{U}_2 j\omega C}{[S(\omega RC)^2 - 1] + j[(\omega RC)^3 - 6\omega RC]}.$$

Так как  $U_1 = I_3 / j\omega C$ , то

$$K_{oc} = \frac{I_3 / j\omega C}{U_2} = \frac{-1}{[S(\omega RC)^2 - 1] + j[(\omega RC)^3 - 6\omega RC]} = (11)$$

$$= K_{oc} e^{j\varphi(\omega)}$$

Так как фазовый сдвиг, вносимый усилителем, составляет  $\rho$  рад, то условие самовозбуждения (3) будет выполнено, если  $j_{oc}(\omega) = \arctg(\text{Im} \hat{E}_{1\bar{N}} / \text{Re} \hat{E}_{1\bar{N}}) = \rho$ .

Как следует из (11) последнее выполняется при условии

$$\omega \times R \times C [(\omega \times R \times C)^2 - 6] = 0.$$

Откуда для частоты генерации находим:

$$\omega_{\bar{A}} = \sqrt{6} / RC. (12)$$

Подставляя (12) в (11) находим значения модуля передаточной функции:

$$\hat{E}_{1\bar{N}}(\omega) = \frac{1}{5(\omega_{\bar{A}} RC)^2 - 1} = \frac{1}{29} (13)$$

Используя (13) в (2) находим коэффициент усиления усилителя, при котором возможна генерация:

$$\hat{E}_3 \frac{1}{\hat{E}_{1\bar{N}}} = 29.$$

Аналогичным образом анализируется и другие схемы RC - автогенераторов.

## 5. Анализ нелинейных цепей

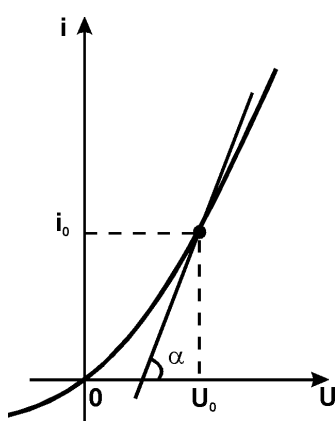
### 5.1. Общие понятия об элементах нелинейных цепей

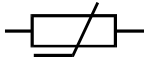
Цепи, которые изучались ранее, относятся к классу линейных цепей. Параметры элементов этих цепей - сопротивления, индуктивностей, емкостей - не зависят от значений приложенных к ним напряжений или протекающих через них токов.

В действительности любой реальный элемент таким постоянством не обладает и линейная теория оказывается справедливой только в определенных пределах значений напряжений и токов. Существует также обширный класс исключительно важных элементов и устройств, параметры, которых существенно зависят от токов или напряжений. Такие элементы называются нелинейными. Им нельзя приписать какой-то постоянный параметр даже при изменении переменных в ограниченном диапазоне. Для количественного описания свойств нелинейных элементов необходимо задавать зависимости, называемые характеристиками. Рассмотрим в общем виде характеристики основных нелинейных идеализированных элементов.

### 5.2. Модели нелинейных элементов

**5.2.1 Нелинейный резистивный элемент (НЭ)** полностью определяется зависимостью между током  $i$  и напряжением  $U$  (т.е. ВАХ):  
 $i=i(U)$  или  $U=U(i)$ . Резистивный НЭ



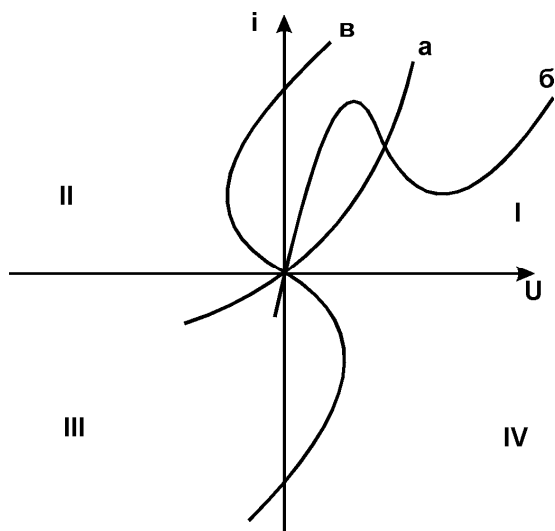
обозначается: . Одна из форм ВАХ может быть, например, такой (см. рис.).

Определить нелинейный резистивный элемент - значит задать его вольтамперную характеристику полностью. В каждой точке ВАХ, заданной конкретным значением напряжения и тока  $U=U_0$ ,  $i=i(U_0)=i_0$ , можно ввести понятие статического сопротивления

$$R_{ст}(U_0) = U_0 / i_0,$$

и динамического (дифференциального) сопротивления, равного котангенсу угла наклона касательной к ВАХ в данной точке: (см. рис.)

$$r_g = \left. \frac{dU}{di} \right|_{i=i_0} = \operatorname{tg} \alpha$$

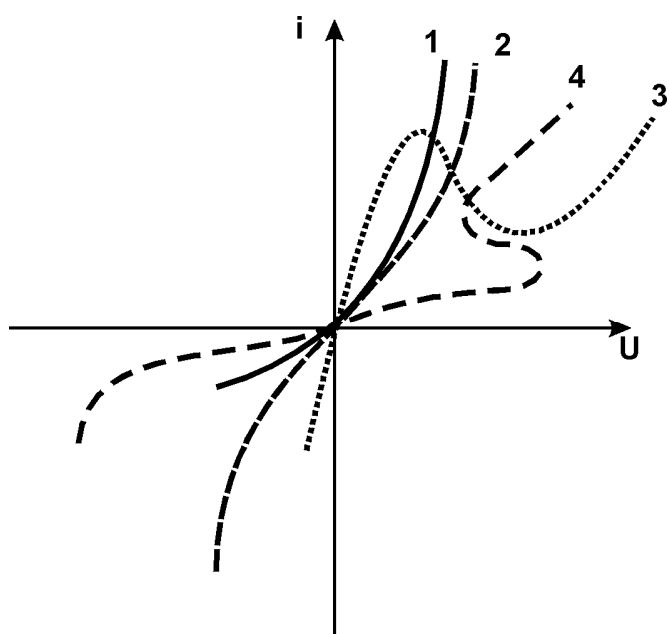


Общая классификация видов ВАХ резистивных НЭ рассматривает их свойства по положению ВАХ по квадрантам в плоскости  $(U, i)$ , (см. рис.). Если график располагается только в первом и третьем квадрантах, то ВАХ относится к пассивному элементу, поскольку потребляемая мощность  $P = U \cdot i \geq 0$  (а, б). Для пассивного элемента  $i(0) = 0$ . Если же часть графика попадает во второй, или в четвертый квадрант, то говорят, что элемент является активным (в). Это означает, что в его цепи есть источник электрической энергии.



Другим общим свойством резистивных НЭ является монотонность или немонотонность ВАХ.

Немонотонные ВАХ имеют знакопеременное дифференциальное сопротивление. На предыдущем рисунке показаны три типа ВАХ по монотонности: а - монотонная, б - N - образная, в - S - образная.

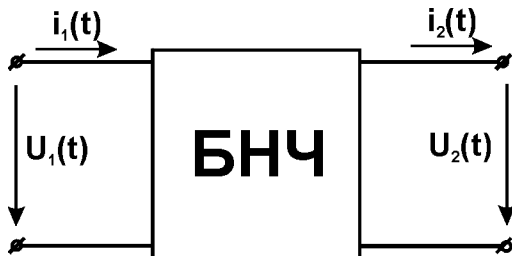


Монотонность ВАХ играет особую роль при анализе цепей, поскольку при решении уравнений приходится оперировать зависимостями  $U = U(i)$  и наоборот  $i = i(U)$ . Зависимость, обратная к монотонной, также монотонная и особых проблем при обращении не возникает. Для немонотонных зависимостей необходимо решать уравнения с многозначными функциями. Геометрически, обращение монотонной ВАХ соответствует симметричному отражению графика около биссектрисы первого - третьего квадрантов (см. рис.).

Реально в качестве резистивных НЭ используются диоды (1), варисторы (2), туннельные диоды (3), денисторы (4) (см. след. рис.).

## 5.2.2 Безынерционные нелинейные четырехполюсники

Четырехполюсники, на полюсах которых мгновенные значения токов и напряжений полностью задаются функциями двух переменных  $x_1$  и  $x_2$ , отражающих мгновенные значения токов и напряжений на других полюсах  $[F_1(x_1, x_2), F_2(x_1, x_2)]$ , называют безынерционными нелинейными четырехполюсниками (см. рис.) (БНЧ).



БНЧ могут быть описаны уравнениями, отражающими зависимости токов от напряжений на полюсах:

$$i_1(t) = F_1^Y \frac{d}{dt} U_1(t), \quad U_2(t) \frac{d}{dt}$$

$$i_2(t) = F_2^Y \frac{d}{dt} U_1(t), \quad U_2(t) \frac{d}{dt}$$

или напряжений от токов:

$$U_1(t) = F_1^Y \frac{d}{dt} i_1(t), \quad i_2(t) \frac{d}{dt}$$

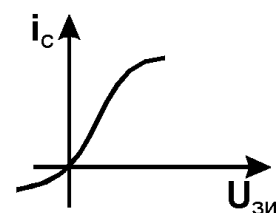
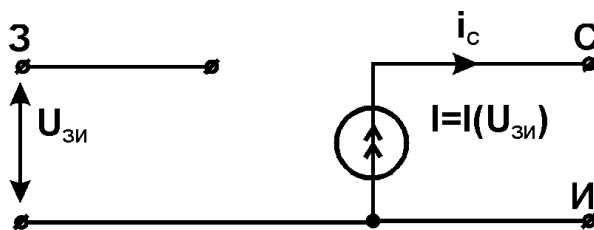
$$U_2(t) = F_2^Y \frac{d}{dt} i_1(t), \quad i_2(t) \frac{d}{dt}$$

либо уравнениям смешанного типа

$$i_1(t) = F_1 \frac{d}{dt} U_1(t), \quad i_2(t) \frac{d}{dt}$$

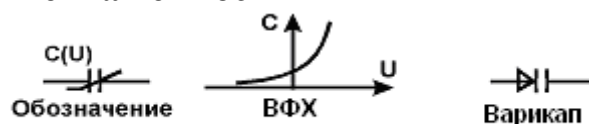
$$U_2(t) = F_2 \frac{d}{dt} U_1(t), \quad i_2(t) \frac{d}{dt}$$

Реальными объектами, которые могут быть описаны как БНЧ, являются, например, биполярный и полевой транзисторы.



Идеализированными моделями БНЧ являются управляемые источники с нелинейными коэффициентами передачи, например, идеализированная модель полевого транзистора (см. рис.), в которой зависимость тока стока от напряжения затвор-исток представляется некоторой нелинейной функцией  $I(U)$  ( $i_c = i_c(U_{зи})$ ).

## 5.2.3. Нелинейная емкость





В нелинейной емкости, условное обозначение которой показано на рис., накопленный заряд зависит от приложенного напряжения нелинейным образом:  $q=q(u)$ . Если определить временную зависимость тока  $i(t)$ , протекающего через нелинейную емкость под воздействием напряжения  $U(t)$  то, поскольку  $i(t)=dq/dt$ , дифференцируя сложную функцию, получаем

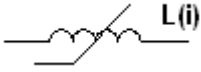
$$i(t) = \frac{dq}{dU} \times \frac{dU}{dt}$$

Функцию  $C(U)=dq/dU$  называют вольт-фазовой характеристикой (см. рис.). С учетом этого модель нелинейной емкости имеет вид

$$i = C(U) \times \frac{dU}{dt}$$

К реальным объектам, моделями которых являются нелинейные емкости, относится, например, варикап (обозначение - см. рис.).

#### 5.2.4. Нелинейная индуктивность.

Обозначение - 

Нелинейная индуктивность, определяется исключительно связью потока сцепления  $\Psi$  и тока  $i$ :  $\Psi=\Psi(i)$ .

Поскольку напряжение индукции, возникающее при изменении магнитного поля, равно производной от потока сцепления:  $U(t)=d\Psi/dt$ , то дифференцируя  $\Psi$  как сложную функцию, получаем

$$U(t) = \frac{d\Psi}{di} \times \frac{di}{dt} = L(i) \frac{di}{dt}$$

Величина  $L(i)$  называется нелинейной индуктивностью.

Нелинейными индуктивностями описываются катушки с ферромагнитными сердечниками.

### 5.3. Аналог цепей с безынерционными элементами

#### 5.3.1. Общие сведения

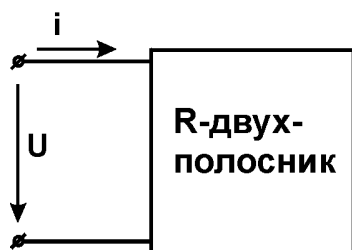
Цепи, не содержащие емкостей и индуктивностей, т.е. энергоемких элементов, называются резистивными. Их математическими моделями являются системы нелинейных уравнений.

В общем случае также уравнения не решаются аналитически. Для их решения используют графоаналитический и численный методы.

Обычно при анализе нелинейных резистивных цепей рассматривают задачу в такой формулировке.

Задана цепь с известными характеристиками НЭ, параметры линейных элементов и параметрами источников постоянного напряжения и тока. Пусть на входе цепи действует один источник переменного сигнала  $S(t)$ , действующем на входе цепи. Требуется найти реакцию цепи  $y(t)$ : т.е. напряжение или ток на ее входе (1) или выходе (2).

Если сигнал напряжения а отклик ток, то цепь можно рассматривать как двухполюсник (рис. а), если это пара напряжений или пара токов, то как четырехполюсник (рис. б).



$$S(t) = U(t); S(t) = i(t)$$

$$S(t) = U_1(t); S(t) = i_1(t); S(t) = i_1(t)$$

$$y(t) = i(t); y(t) = U(t)$$

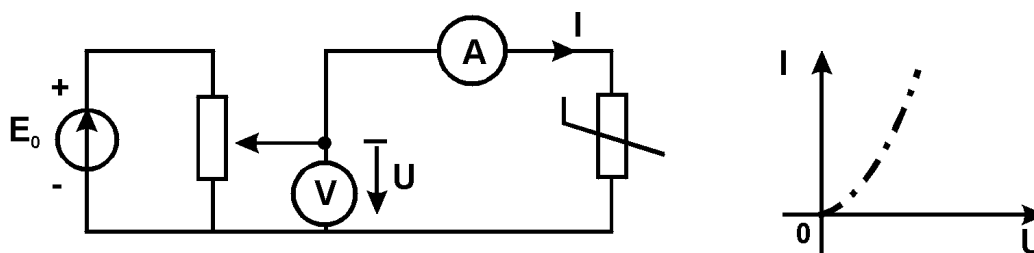
$$y(t) = U_2(t); y(t) = i_2(t); y(t) = U_2(t)$$

а)

б)

Выходной характеристикой резистивного двухполюсника называют зависимость мгновенного значения реакции на входе  $y(t)$  от мгновенного значения входного сигнала  $S(t)$ , т.е. функцию  $y=y(S)$ . Чаще всего эту функцию называют и передаточной характеристикой резистивного двухполюсника, и определяют последующую зависимость мгновенного значения реакции на выходе  $y(t)$  от мгновенного значения входного сигнала  $S(t)$ , т.е. функцию  $y(s)$ , т.е. это одно и то же. Эти характеристики можно измерить экспериментально, подключив в качестве  $S(t)$  источник регулируемого напряжения (тока) и регистрируя значения выходной величины в зависимости от входной.

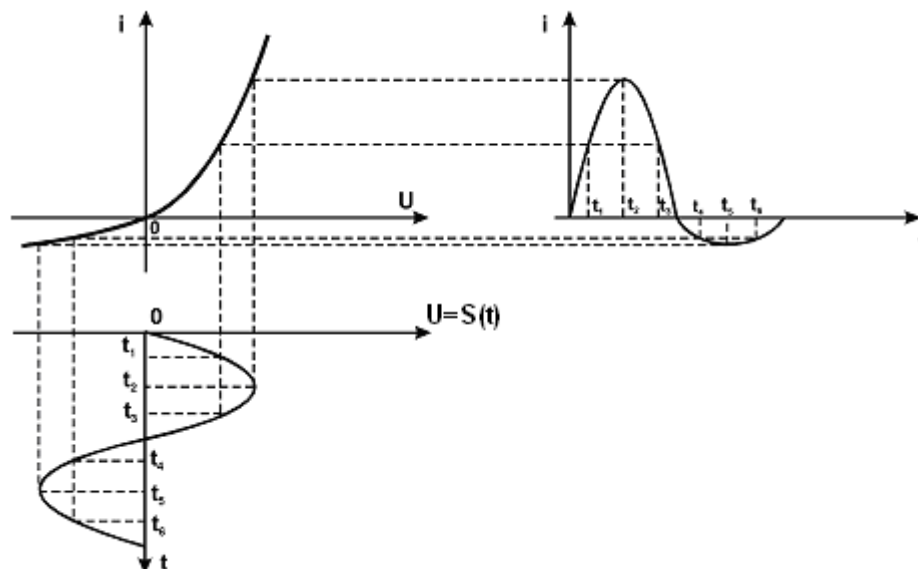
На рис. показана схема и результат экспериментального измерения ВАХ НЭ (двухполюсника).



### 5.3.2. Графический метод анализа

Рассмотрим применение графического метода на примере анализа процесса прохождения тока через диод с ВАХ, показанной на рис.

Решение начинают с построения характеристики нелинейного элемента в системе координат вход-выход. В данном случае этой характеристикой является ВАХ, входной величиной - напряжение на двухполюснике, а выходной величиной - ток через него. Теперь необходимо построить график входного процесса (здесь напряжения) как зависимость от времени и



расположить оси координат согласованно с осью входных величин. При этом ось времени оказывается направленной вниз. Далее, справа строят оси системы координат для получения графика выходного процесса. Ось входной величины (в данном случае тока) располагается также согласованно по отношению к осям ВАХ. Выберем произвольный момент времени  $t_1$  и отложим соответствующую ему точку на осях  $t$  входной и выходной величины. Спроецируем точку, соответствующую мгновенному значению входного напряжения, на график ВАХ и проведем горизонтальную прямую до пересечения с перпендикуляром к оси  $t$  в точку  $t_1$  графика выходного процесса. Это будет первая точка, показывающая мгновенное значение выходного тока в момент времени  $t_1$ . Аналогично, в другие моменты времени, точки с графика входного процесса переносят в систему координат для выходного процесса. В результате получают весь график выходного тока.

### 5.3.3. Графоаналитический метод

Графический метод прост, но громоздок и не точен при получении количественных результатов. Для количественных оценок используют аппроксимацию графических входных или передаточных характеристик аналитически заданными функциями. Такой метод называется графоаналитическим. Наиболее типична аппроксимация многочленами:

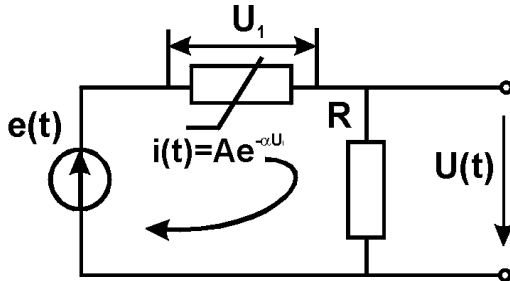
$$y(S) = a_0 + a_1 S^2 + \dots + a_n S^n$$

Если известны коэффициенты аппроксимирующего многочлена для характеристики безынерционного нелинейного четырехполюсника, то выходной сигнал находят простой подставкой:

$$y(t) = a_0 + a_1[S(t)] + a_2[S(t)]^2 + \dots + a_n[S(t)]^n$$

### 5.3.4. Численные методы

Если для безынерционного нелинейного четырехполюсника нельзя или очень трудно задать графически входную или передаточную характеристику, то графический и графоаналитический методы неприменимы. В этих случаях составляют полную систему уравнений цепи по законам Кирхгофа и Ома и исходят ее численные методы.



Поясним этот подход на примере. Пусть задана резистивная цепь, схема которой приведена на рис. Составим уравнение цепи

$$U(t) = R \times i(t) = R \times [U_1(t)] = R \times A e^{-a[e(t) - U(t)]};$$

или

$$U(t) = R \times A e^{-a[e(t) - U(t)]} - U(t) = 0$$

Это нелинейное уравнение, решить которое относительно  $U(t)$  можно для любого значения  $e(t)$  методами простым итераций, методом Ньютона или любым другим методом численного решения нелинейных уравнений.

## 5.4. Преобразование спектров сигналов в нелинейных цепях и его практическое применение.

### 5.4.1. Общие положения

Одним из важнейших свойств нелинейных цепей является преобразование спектра входных сигналов. Оно заключается в том, что при действии на входе цепи гармонического или импульсного сигнала, состоящего из суммы нескольких гармонических колебаний различных частот, реакция (т.е. ток или напряжение любой ветви) будет содержать не только гармоники воздействия, но и новые гармоники, которых нет во входном сигнале.

Такое свойство преобразование спектра принципиально невозможно в линейных цепях с постоянными параметрами (RLC - цепях). Там токи и напряжения в любой ветви состоят только из гармоник, содержащихся во входном сигнале.

Пусть задана нелинейная резистивная цепь с передаточной (или входной) характеристикой, заданной в виде степенного полинома. Пусть это, например, ВАХ в виде:

$$i(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2 + \dots + a_n U^n \quad (1)$$

Рассмотрим сначала действия на цепь гармонического сигнала

$$U(t) = U \cos(\omega t + j_u) \quad (2)$$

Подставим (2) в (1), получаем

$$i(t) = a_0 + a_1 U \cos(\omega t + j_u) + a_2 U^2 \cos^2(\omega t + j_u) + \dots$$

Из тригонометрии известно, что

$$\cos^2(\omega t + j_u) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2(\omega t + j_u);$$

$$\cos^3(\omega t + j_u) = \frac{3}{4} \cos(\omega t + j_u) + \frac{1}{4} \cos 3(\omega t + j_u).$$

Как видно, гармоническая функция степени  $n$  эквивалентна сумме функций кратных частот, причем четная степень содержит только четные гармоники, нечетная - только нечетные. Очевидно, что наибольшая частота гармоник, равная  $n\omega$ , определяется старшей степенью полинома характеристики цепи:

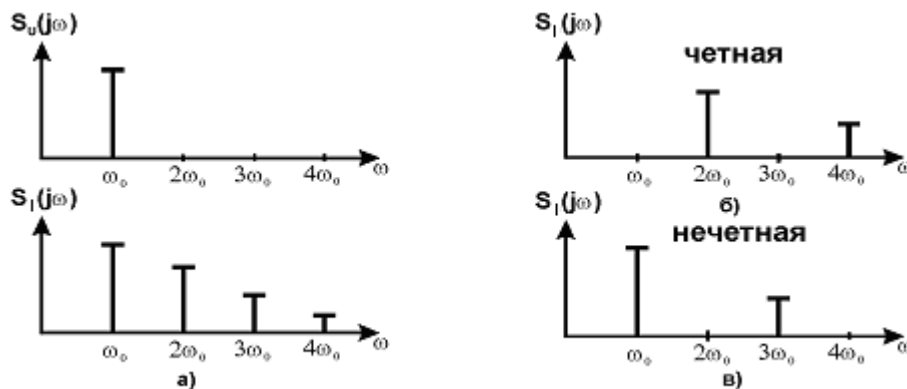
$$i(t) = a_0 + a_1 U \cos(\omega t + j_n) + \frac{a_2 U^2}{2} \cos 2(\omega t + j_n) + \\ + \frac{3a_3 U^3}{4} \cos(\omega t + j_n) + \frac{a_3 U^3}{4} \cos 3(\omega t + j_n) + \dots$$

В общем виде можно записать

$$i(t) = I_0 + \sum_{l=1}^n I_l \cos(l\omega t + j_l);$$

$$I_l = \begin{cases} f_1(a_0, \dots, a_{2i}, \dots, U^2, U^4, \dots), & l - \text{четные} \\ f_2(a_1, \dots, a_{2i+1}, \dots, U, U^3, \dots), & l - \text{нечетные} \end{cases}$$

На рис. изображен дискретный спектр входного и выходного сигналов для нелинейности общего вида (а), четной (б) и нечетной (в) функций  $i(U)$ .



Рассмотрим теперь действие на цепь сигнала, состоящего из суммы двух гармонических функций с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$U = U_1 + U_2 = U_1 \cos(\omega_1 t + j_1) + U_2 \cos(\omega_2 t + j_2)$$

Реакция цепи будет состоять из суммы степеней двучленов

$$i = a_0 + a_1(U_1 + U_2) + a_2(U_1 + U_2)^2 + \dots + a_n(U_1 + U_2)^n$$

При  $n=2, 3$  степени двучленов будут таким

$$(U_1 + U_2)^2 = U_1^2 + 2U_1 U_2 + U_2^2;$$

$$(U_1 + U_2)^3 = U_1^3 + 3U_1 U_2^2 + 3U_1^2 U_2 + U_2^3$$

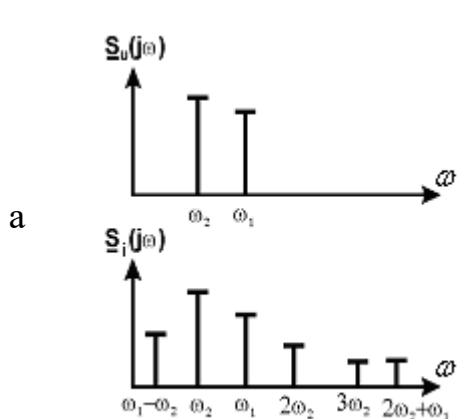
В отличие от воздействия одного сигнала при воздействии сигнала в виде суммы двух функций в отклике имеются еще и дополнительные

слагаемые в виде произведения степеней ( $U_1^{(n-m)}U_2^m$ ), где  $m=1,2,\dots,n$ . При этом все степени гармонических функций дают суммы гармоник кратных частот.

Произведения двух гармонических функций дают гармонические функции с частотами, равными разностям и суммам частот сомножителей. В качестве первого приближения можно записать

$$\begin{aligned} U_1 U_2 &= U_1 U_2 \cos(\omega_1 t + j_1) \cos(\omega_2 t + j_2) = \\ &= \frac{1}{2} U_1 U_2 \{ \cos[(\omega_1 - \omega_2)t + (j_1 - j_2)] + \cos[(\omega_1 + \omega_2)t + (j_1 + j_2)] \}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U_1 U_2^2 &= U_1 U_2^2 \cos(\omega_1 t + j_1) \cos^2(\omega_2 t + j_2) = \\ &= \frac{1}{2} U_1 U_2^2 \left\{ \cos(\omega_1 t + j_1) + \frac{1}{2} \cos[(\omega_1 - 2\omega_2)t + (j_1 - 2j_2)] + \frac{1}{2} \cos[(\omega_1 + 2\omega_2)t + (j_1 + 2j_2)] \right\}; \end{aligned}$$



Таким образом, в произведении степеней имеем в общем случае частоты  $\omega_{mn} = \pm m \omega_1 \pm n \omega_2$ ,  $m=1, 2, \dots, n$ . Колебания с частотами  $\omega_{mn}$  называется комбинационными, сумма  $|m| + |n|$  - порядком комбинационного колебания.

Спектр сигнала на выходе безынерционного нелинейного четырехполюсника в случае действия на него четырехполюсника в случае сигналов на входе суммы двух гармонических сигналов приведен на следующем рисунке.

Таким образом в общем случае при действии суммы двух гармонических сигналов отклик цепи содержит колебания комбинационных частот

$$i(t) = \sum_m \sum_n I_{mn} \cos[(m\omega_1 - n\omega_2)t + j_{mn}] \quad n, m = 0, 1, 2, \dots \quad (3)$$

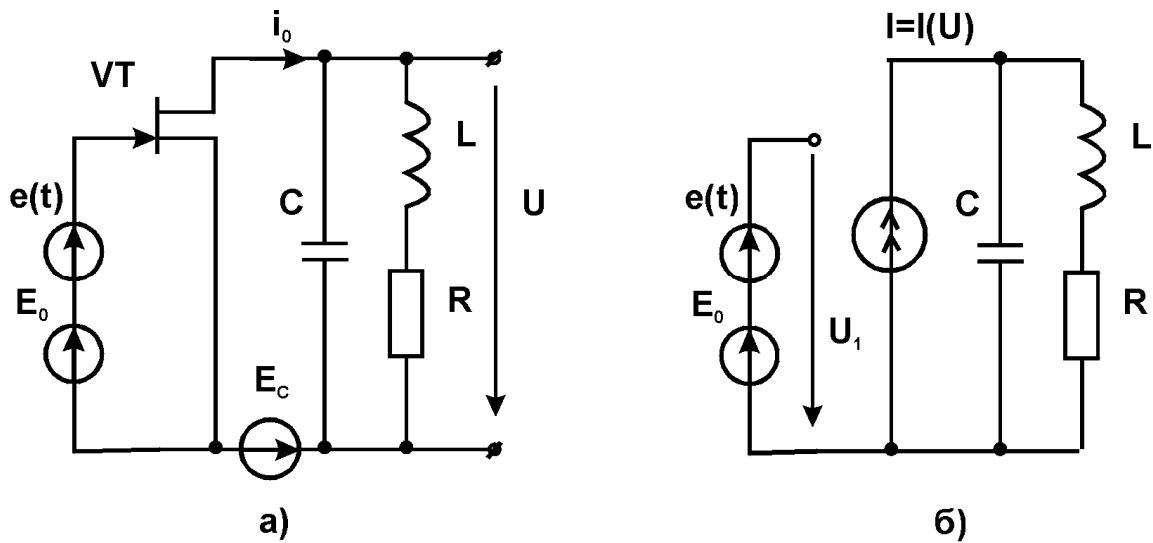
Появление в спектре выходного сигнала нелинейного элемента составляющих, которых не было во входном сигнале, широко используют в технике.

Важнейшими применениями этого явления являются умножение частоты, модуляция и детерминирование (демодуляция). Во всех устройствах, в которых производится эти преобразования, нелинейные элементы используются совместно с линейными цепями - фильтрами.

#### 5.4.2. Умножение частоты

Умножение частоты осуществляют преобразование вида:  $A \cos \omega_0 t \rightarrow B \cos n \omega_0 t$ . Такие устройства представляют собой соединение нелинейного элемента и полосового фильтра, настроенного в резонанс на частоту выделяемой гармоники. Могут быть построены, например, на базе

резонансного усилителя, работающего в режиме с отсечкой тока стока (см. рис.)



Пусть  $e(t) = U_0 \cos \omega_0 t$ . Найдем сначала ток  $i_0(t)$ . Допустим, что нелинейная характеристика полевого транзистора описывается квадратичным полиномом

$$I(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2$$

Тогда

$$\begin{aligned} i_0(t) &= I[U(t)] = a_0 + a_1(U_0 \cos \omega_0 t + E_0) + a_2(U_0 \cos \omega_0 t + E_0)^2 = \\ &= a_0 + a_1 U_0 \cos \omega_0 t + a_1 E_0 + \frac{1}{2} a_2 U_0^2 + \frac{1}{2} a_2 U_0^2 \cos 2\omega_0 t + \\ &\quad + 2a_2 U_0 E_0 \cos \omega_0 t + a_2 E_0^2 \end{aligned}$$

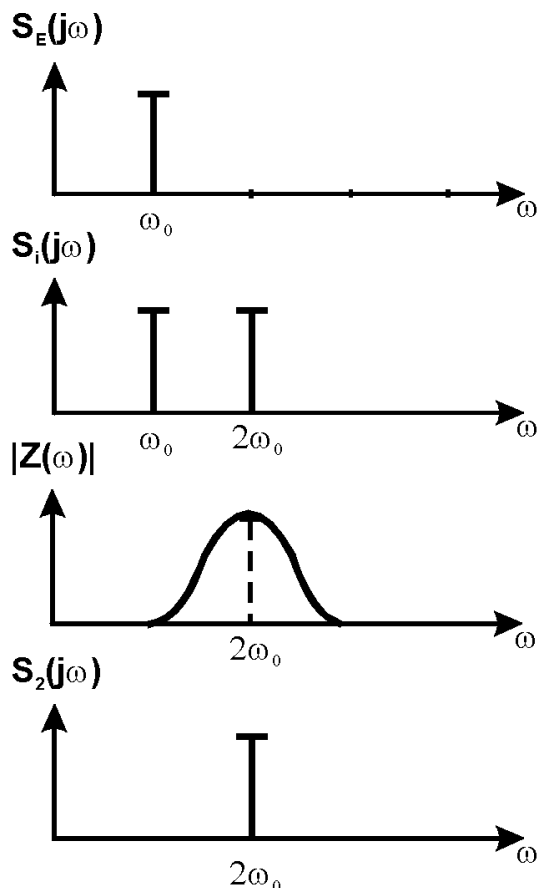
Выберем  $E_0$  так, чтобы в отсутствии входного переменного сигнала ток был равен нулю, т. е. чтобы

$$a_0 + a_1 E_0 + \frac{1}{2} U_0^2 a_2 + a_2 E_0^2 = 0$$

Тогда при действии переменного напряжения ток будет равен:

$$i_0(t) = (a_1 U_0 + 2a_2 U_0 E_0) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} a_2 U_0^2 \cos 2\omega_0 t$$

Рассмотрим спектры входного сигнала  $e(t)$  и ток  $i_0(t)$ , последний состоит из двух гармоник. Падение напряжения на контуре, как на любом линейном двухполюснике, может быть рассчитано в частотной области:



$$\mathcal{F}_2(\omega) = \mathcal{F}_i(\omega) \mathcal{Z}(\omega);$$

$$|\mathcal{F}_2(\omega)| = |\mathcal{Z}(\omega)| |\mathcal{F}_i(\omega)|$$

Сопротивление параллельного RLC контура описывается соотношением:

$$\mathcal{Z}(\omega) = \frac{R + j\omega L}{1 - \omega^2 LC + j\omega RC};$$

$$|\mathcal{Z}(\omega)| = \frac{(R^2 + \omega^2 L^2)^{1/2}}{[(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2 R^2 C^2]^{1/2}}$$

Зависимость  $|\mathcal{Z}(\omega)|$  при малых отклонениях  $R/L$ , т.е. при большой добротности  $Q = \sqrt{L/C} / R$  и  $(\sqrt{LC})^{-1} = 2\omega_0 = \omega_p$  имеет явно выраженный избирательный характер (см. рис.). Так для частоты  $\omega_0$  имеем  $|\mathcal{Z}(\omega)| \gg 0$  и  $\mathcal{F}_2(\omega_0) \gg 0$ . На резонансной частоте  $\omega_p = 2\omega_0$  получаем

$$|\bar{Z}(2\omega_0)| = \sqrt{\frac{R^2 + (2\omega_0)^2 L^2}{(2\omega_0)^2 R^2 C^2}} \gg \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \gg Q \times r,$$

где  $r = \sqrt{L/C}$  - характеристическое сопротивление. Следовательно спектр выходного сигнала будет содержать одну гармонику с частотой  $2\omega_0$ :

$$|\mathcal{F}_2(2\omega_0)| \gg Q \times \frac{1}{2} a_2 U_0^2$$

Если требуется умножение частоты на 3, т.е.  $n=3$ , то необходимо иметь нелинейность  $I(U)$  не ниже многочлена 3-го порядка и настраивать RLC-контур на частоту  $3\omega_0$ . Аналогично для умножения на  $n$  требуется порядок нелинейности не ниже  $n$ .

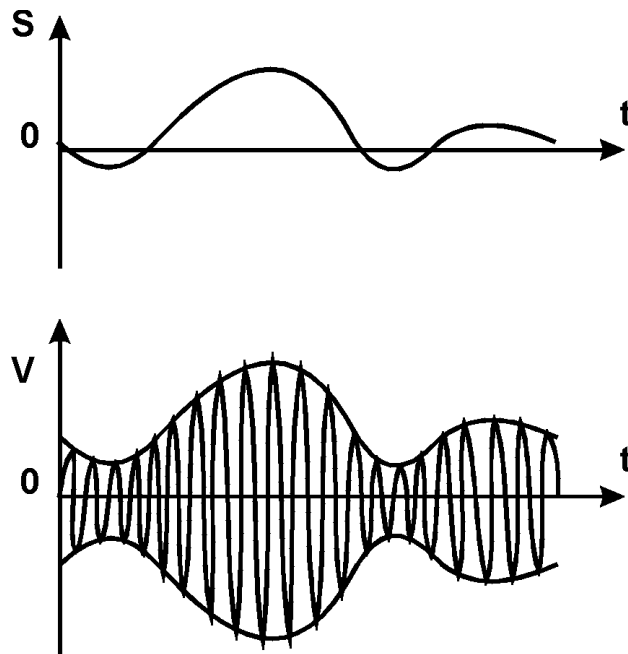
#### 5.4. Амплитудная модуляция

Амплитудные модуляторы производят преобразования вида  $S(t) \otimes A[1 + m \times S(t)] \cos \omega_0 t$ . Процесс амплитудной модуляции состоит в преобразовании “медленного” сигнала  $S(t)$ , называемого модулирующим, в быстро осциллирующий сигнал, амплитуда которого меняется по закону  $S(t)$ :

$$V(t) = A \cos \omega_0 t + m \frac{S(t)}{S_{\max}} \dot{V} \cos(\omega_0 t + j)$$

Здесь  $A \cos \omega_0 t$  - функция, называемая несущим колебанием,  $m$  - коэффициент модуляции ( $m \leq 1$ ), где  $m = \frac{S_{\max}}{A}$ ;  $S_{\max} = \max |S(t)|$ , где  $S(t)$  - информационная функция.





Например, если  $S(t)$  - сигнал вида (см. рис.), то соответствующий ему АМ-сигнал имеет вид следующего графика (см. рис.).

Определим спектр амплитудно-модулированного колебания.

Пусть АМ-колебание описывается функцией  $V(t)=f(t)\cos\omega_0 t$ . На основании прямого преобразования Фурье спектр этой функции будет содержать 2 группы гармоник: суммарной и разностной частот

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_V(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \omega_0 t e^{-j\omega t} dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) (e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}) e^{-j\omega t} dt = \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{F}_f(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \mathcal{F}_f(\omega + \omega_0) \quad (*)\end{aligned}$$

Поскольку по определению в выражении  $\mathcal{F}_f(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt$  есть спектр функции  $f(t)$ , то формула (\*) означает, что при АМ-модуляции спектр НЧ колебания переносится в область ВЧ колебания и раздваивается.

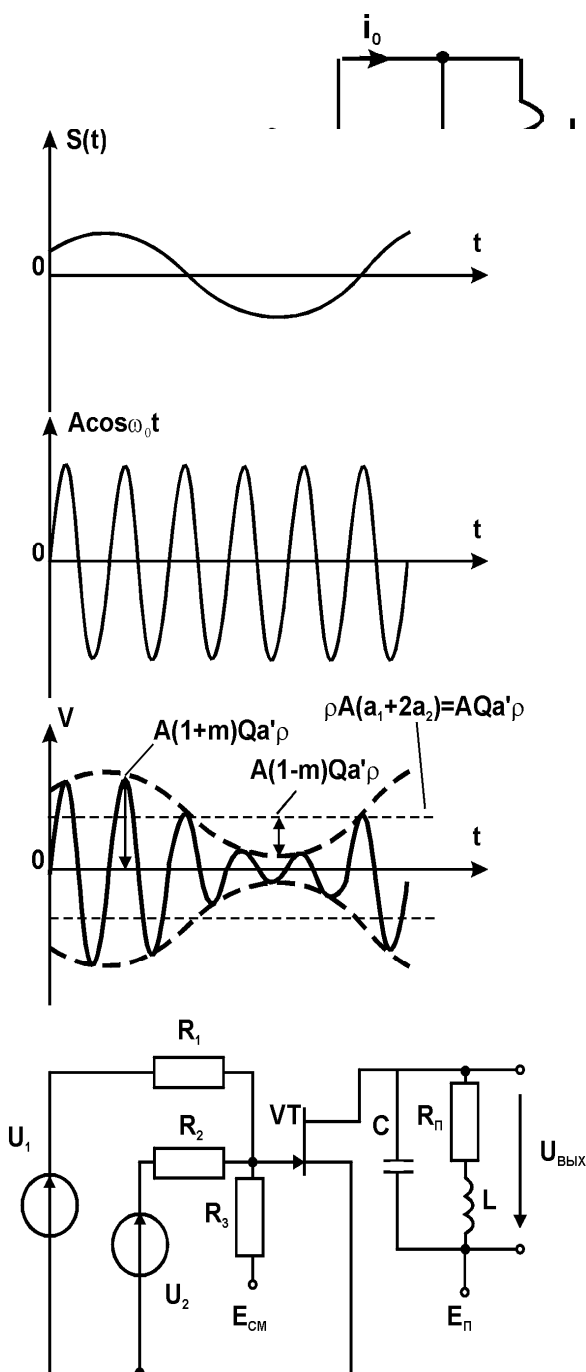
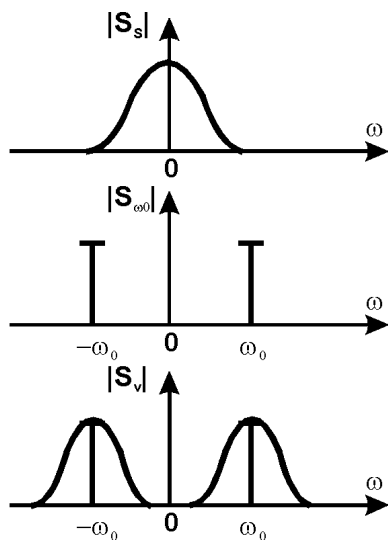
В нашем случае  $f(t) = A + AmS(t)$ , где  $S(t) = S(t)/Sm$ . Спектр такой функции состоит из двух частей:  $\mathcal{F}_f(\omega) = 2\pi Ad(\omega) + Am\mathcal{F}_S(\omega)$  (\*\*). Следовательно, на основании формулы (\*), спектр АМ-колебания будет иметь вид:

$$\bar{S}_V(\omega) = \pi Ad(\omega + \omega_0) + \pi Ad(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} Am\mathcal{F}_S(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} Am\mathcal{F}_S(\omega + \omega_0)$$

На рис. Изображены спектры модулирующего сигнала, несущего и АМ-колебания. Как видно, в результате модуляции спектр информационного сигнала переносится в область несущего колебания.

Процесс амплитудной модуляции является типичным преобразованием спектра сигнала  $S(t)$  и может быть осуществлен только в цепи с нелинейным элементом. Поскольку получение АМ-колебания требует двух сигналов: модулирующего  $S(t)$  и несущего  $A\cos\omega_0 t$ , на нелинейный элемент должна действовать сумма этих сигналов.

Включенный последовательно с нелинейным элементом линейный полосовой фильтр (ПФ) – например колебательный контур, настроенный на несущую частоту  $\omega_0$ , - выделяет полосу частот, соответствующую АМ-колебанию (см. рис.).



Проанализируем эту модель.

Пусть ВАХ безынерционного нелинейного элемента описывается многочленом второй степени  $I(U) = a_0 + a_1 U + a_2 U^2$ .

Определим входной ток полосового фильтра:

$$\begin{aligned} i(t) &= a_0 + a_1 [S(t) + A \cos \omega_0 t] + a_2 [S(t) + A \cos \omega_0 t]^2 = \\ &= a_0 + a_1 S(t) + A a_1 \cos \omega_0 t + a_2 S^2(t) + 2 a_2 S(t) \cos \omega_0 t + \frac{1}{2} a_2 A^2 \cos 2 \omega_0 t = \\ &= a_0 + a_1 S(t) + a_2 S^2(t) + \frac{1}{2} a_2 A^2 + \\ &+ A [a_1 + 2 a_2 S(t)] \cos \omega_0 t + a_2 A^2 \cos 2 \omega_0 t \end{aligned}$$

Рассмотрим спектральный состав тока, полагая что резонансная частота контура  $\omega_0$  можно больше максимальной частоты  $\omega_{\max}$  в спектре  $S(t)$  (см. пред. рис.). На этом рис. НЧ спектр  $S_1$  обусловлен постоянной составляющей  $a_0 + \frac{1}{2} a_2 A^2$  и членами с  $S(t)$  и  $S^2(t)$ , а спектры  $S_2$  и  $S_3$  образуются сигналами, пропорциональными  $\cos \omega_0 t$  и  $\cos 2 \omega_0 t$ , соответственно. Если теперь принять, что полоса пропускания полосового фильтра сосредоточена вблизи  $\omega_0$  (пунктир на графике), то он будет выделять колебание, пропорциональное  $\cos \omega_0 t$ , которое и представляет собой АМ-колебание.

Таким образом АМ-колебания получаются путем нелинейного сложения сигнала модуляции  $S(t)$  и несущего колебания. В результате получается выходное напряжение следующего вида.

$$a\phi = (a_1 + 2a_2) |Q|$$

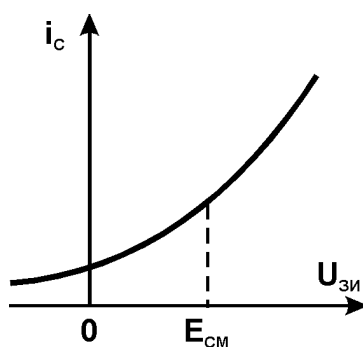
Практической схемой, осуществляющей процесс АМ-модуляции, является например следующая схема на полевом транзисторе и предварительным

сложением модулирующего и несущего колебаний.

Напряжение между затвором и источником  $U_{зи}$  вычисляется по формуле, полученной на основании законов Кирхгофа в предположении, что  $R_{BX VT} \otimes \neq$  :

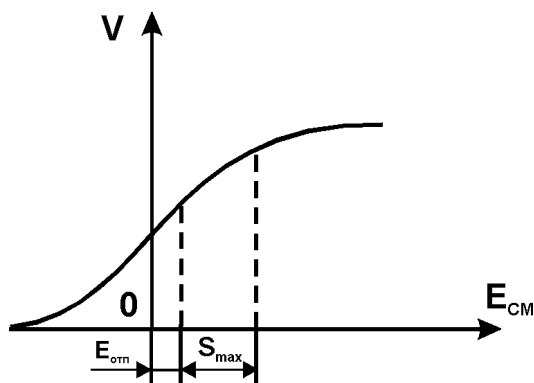
$$U_{зи} = \frac{R_3 R_2 U_1 + R_3 R_1 U_2}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} + E_{см}$$

Подбором значений сопротивлений  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  и напряжения смещения  $E_{см}$  осуществляется выбор рабочей точки на передаточной характеристике транзистора (см. рис. 2). Наилучшим считается такое положение рабочей точки, когда коэффициенты разложения ВАХ в окрестности этой точки обеспечивают максимальное значение коэффициента модуляции по первой гармонике выходного тока.



Модулированный сигнал получается как падение напряжение на колебательном контуре, параметры должны обеспечивать центральную частоту  $\omega_p = 1/\sqrt{L/C} = \omega_0$ . Сопротивление потерь  $R_{\Pi}$  должно быть таким, чтобы добротность  $Q = \sqrt{L/C}/R_n$  цепи была достаточно большой, такой, чтобы полоса пропускания контура  $2\Delta\omega \ll \omega_0$  (несущей частоты). С другой стороны, спектр модуляционного сигнала не должен искажаться, должно  $W_m < \Delta\omega$ , где  $2W_m$  - ширина спектра модуляционного колебания. Используя равенство  $2\Delta\omega = \omega_0/Q$ , получаем неравенства для выбора параметров колебательного контура  $L$ ,  $C$ ,  $R_{\Pi}$ :

$$2W_m < R_n / L; \quad R_n \ll \sqrt{L/C}$$



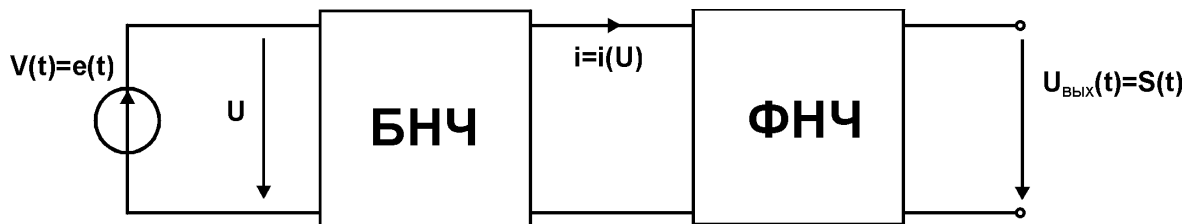
Коэффициенты  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , ..., определяющие вид нелинейной характеристики транзистора, зависят от выбора постоянного смещения на затворе, задаваемого сопротивлением  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$   $E_{см}$ . При изменении этого напряжения будет меняться амплитуда  $a_1 A_Q$  выходного напряжения  $V(t)$ . Зависимость амплитуды первой гармоники тока на выходе нелинейного элемента (или

падение напряжения на колебательном контуре на первой гармонике) от поданного напряжения смещения, называют статической модуляционной характеристикой (см. рис.). Величину  $E_{опт}$ , оптимальную для рабочего модулятора, выбирают в середине линейного участка статической модуляционной характеристики. Амплитуда сигнала  $S_{max}$  не должна выходить за пределы линейного участка модуляционной характеристики.

Статическая модуляционная характеристика – это не проходящая ВАХ транзистора.

### 5.5. Детектирование АМ-колебаний

Процесс, обратной модуляции, называется демодуляцией или детектированием. При детектировании по колебанию  $V(t) = A[1 + mS(t)]\cos\omega_0 t$  необходимо восстановить сигнал  $S(t)$ . Устройство, реализующее эту операцию, называют амплитудным демодулятором или детектором. При детектировании следует преобразовать сигнал  $V(t)$  так, чтобы потом можно было выделить сигнал  $S(t)$ . Такое преобразование можно осуществить с помощью безынерционного нелинейного четырехполюсника с последующей низкочастотной фильтрацией (см. рис.).



Предположим, что ВАХ БНЧ описывается квадратичной параболой:

$$i(U) = a_1 U + a_2 U^2$$

Тогда

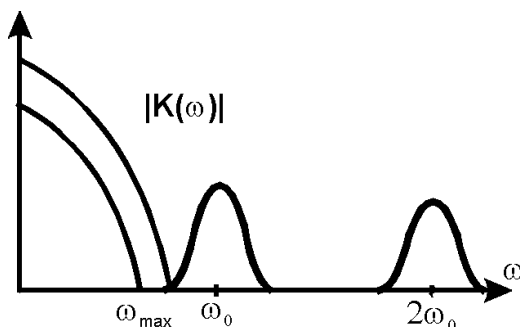
$$i(t) = a_1 \{A[1 + mS(t)]\cos\omega_0 t\} + a_2 \{A[1 + mS(t)]\cos\omega_0 t\}^2;$$

$$i(t) = a_1 A \cos\omega_0 t + a_1 m S(t) A \cos\omega_0 t + a_2 A^2 [1 + mS(t)]^2$$

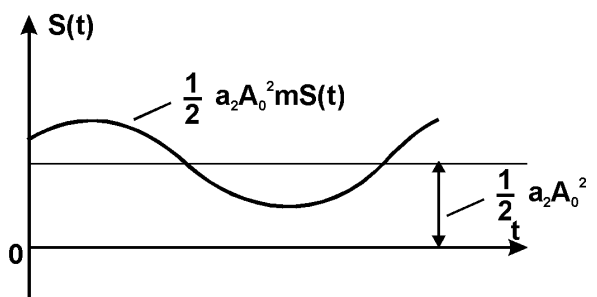
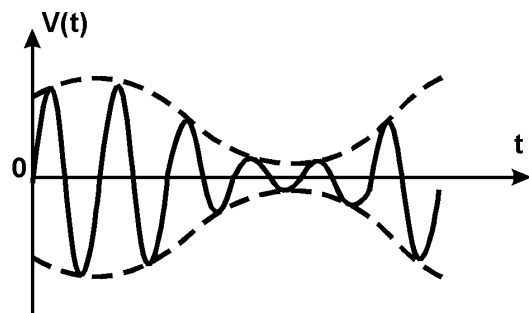
или

$$= \frac{a_1 A}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\omega_0 t + \frac{a_2 A^2}{2} = A a_1 \cos\omega_0 t + a_1 m S(t) \cos\omega_0 t + \frac{1}{2} a_2 A^2 +$$

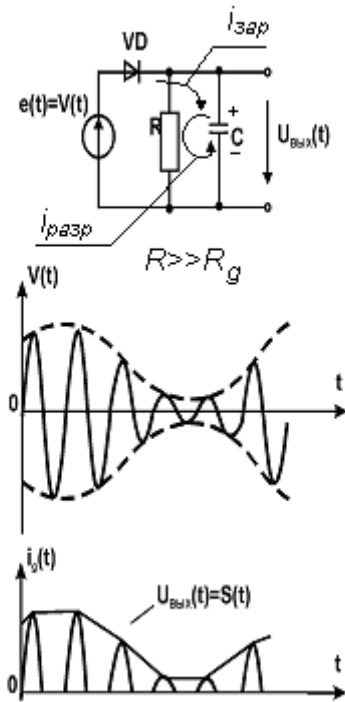
$$+ a_2 A^2 S(t) + \frac{1}{2} a_2 A^2 m^2 S(t) + \frac{1}{2} A^2 [1 + mS(t)] \cos 2\omega_0 t$$



Как видно в спектре этого тока присутствует полезная составляющая тока  $S(t)$ , которая может быть выделена фильтром нижних частот. На рис. приведен спектральный состав тока при условии, что в спектре сигнала  $S(t)$  максимальная частота  $\omega_{\max} \ll \omega_0$ . В полосе



пропускания ФНЧ могут попасть составляющие, пропорциональные  $S^2(t)$  (пунктир на рис.). Однако при малых  $m$  ими можно пренебречь.



Фильтр нижних частот отфильтровывает все высшие частоты в спектре тока и на его выходе имеется сигнал, пропорциональный  $S(t)$  с точностью до постоянной составляющей (см. рис.). Постоянная составляющая может быть легко отфильтрована последовательным включением емкости на выходе ФНЧ.

Простейшей критической схемой АМ-детектора может служить диодный детектор (см. рис.). Здесь в качестве ФНЧ используется RC - цепь. Токи всех высших гармоник протекают через емкость, не создавая сколько-нибудь заметного падения напряжения на ней, и  $U_{\text{вых}}(t)$  будет пропорционально  $S(t)$  (см. след. рис.). Заметим, что не всякий нелинейный элемент пригоден для детектирования,

например, нельзя использовать только нечетные нелинейности (почему? - самостоятельно).

## 6. Анализ параметрических цепей

### 5.1. Общие понятия о параметрических цепях

Электрические системы, в которых хотя бы один из параметров ( $R$ ,  $L$  или  $C$ ) является переменным во времени, называется цепями с переменными параметрами, называется цепями с переменными параметрами, или параметрическими цепями. Если параметры зависят только от времени и не зависят от режима работы (т.е.  $t_i$  или  $U$ ), система является линейной.

С помощью параметрических систем, в которых переменным является активное сопротивление, могут осуществляться, например, такие преобразования сигналов: детектирование, выпрямление, амплитудная модуляция, преобразование частоты и др.

В цепях с переменными реактивными элементами, способными запасать и отдавать энергию, при определенных условиях могут происходить усиление и генерация колебаний. Это связано с появлением в системе отрицательного сопротивления, описывающего формально физический процесс внесения энергии в колебательную систему за счет работы сил, изменяющих параметр. Появление отрицательного сопротивления свидетельствует о наличии параметрической регенерации колебаний данной частоты. Под регенерацией понимается процесс частотного восполнения (восстановления) теряемой в системе энергии.

Математическое описание процессов, происходящих в параметрических цепях, сводится к линейным алгебраическим или дифференциальным уравнением с переменными (во времени) коэффициентами. В силу линейности цепей, связь между входными и выходными сигналами в них определяется с помощью импульсной характеристики  $g(t)$  (метод интеграла наложения) или с помощью комплексной передаточной функции  $K(j\omega)$ .

### 6.2. Импульсная характеристика и передаточная функция параметрической цепи

Для определения импульсной характеристики  $g(t, t)$ , где  $t$  - время воздействия,  $t$  - время появления и действия отклика, непосредственно по заданным параметрам цепи необходимо использовать дифференциальное уравнение цепи.

Чтобы проанализировать методику нахождения  $g(t, t)$ , рассмотрим простую цепь, описываемую уравнением первого порядка

$$a_1(t) \frac{dy(t)}{dt} + a_0(t)y(t) = f(t), \quad (1)$$

где  $f(t)$  - воздействие,  $y(t)$  - отклик.

По определению импульсная характеристика является откликом цепи на одиночный дельта-импульс  $\delta(t - t)$ , подаваемый на вход в момент  $t = t$ . Из

этого определения следует, что если в правой части уравнения (1) положить  $f(t) = d(t - t)$ , то в левой части можно принять  $y(t) = d(t, t)$ .

Таким образом приходим к уравнению

$$a_1(t) \frac{dg(t, t)}{dt} + a_0(t) g(t, t) = f(t - t) \quad (2)$$

Т.к. правая часть (2) равна нулю всюду, кроме точки  $t=t$ , функцию  $g(t)$  можно искать в виде решения однородного дифференциального уравнения

$$a_1(t) \frac{dg(t, t)}{dt} + a_0(t) g(t, t) = 0 \quad (3)$$

при начальных условиях, вытекающих из уравнения (2), а также из условия, что к моменту приложения импульса  $d(t - t)$  в цепи отсутствуют токи и напряжения.

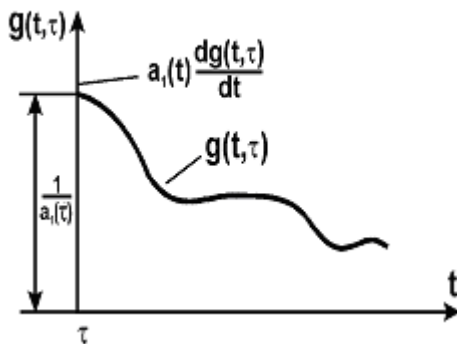
В уравнении (3) переменные разделяются:

$$\frac{dg}{g} + \frac{a_0(t)}{a_1(t)} dt = \frac{dg}{g} + P(t) dt = 0.$$

Откуда

$$g(t, t) = g(t = t) e^{-\int P(t) dt}, \quad (4)$$

где  $g(t = t)$  - значения импульсной характеристики в момент воздействия.



Импульсная характеристика по уравнению (2)

Для определения начального значения  $g(t = t)$  вернемся к исходному уравнению (2). Из него следует, что в точке  $t = t$  функция  $g(t)$  должна совершить скачок на величину  $1/a_1(x)$ , (см. рис.), поскольку только при этом условии первое слагаемое в уравнении (2),  $a_1(t)[dg/dt]$ , может образовывать дельта-функцию  $d(t - t)$ .

Т.к. при  $t < t$   $g(t, t) = 0$ , то в момент  $t = t$

$$g(t = t) = \frac{1}{a_1(t)} \quad (5)$$

Заменяя в (4) неопределенный интеграл определенным с переменным верхним пределом интегрирования, получаем соотношения для определения импульсной характеристики:

$$g(t, t) = g(t = t) \exp \int_t^t P(t) dt = \frac{1}{a_1(t)} \exp \int_t^t \frac{a_0(t)}{a_1(t)} dt \quad (6)$$

Зная импульсную характеристику, нетрудно определить передаточную функцию линейной параметрической цепи, поскольку обе оси связаны парой преобразования Фурье:

$$K(j\omega, t) = \int_{-\infty}^{\infty} g_1(t, a) e^{-j\omega a} da, \quad (7)$$

где  $a = t - t$  - задержка сигнала. Функция  $g_1(t, a)$  получается из функции  $g(t, t)$  заменой  $t = t - a$ .

Наряду с выражением (7) можно получить еще одно определение передаточной функции, в котором импульсная характеристика  $g_1(t, a)$  не фигурирует. Для этого используем обратное преобразование Фурье для отклика  $S_{\text{ВЫХ}}(t)$ :

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{K}(j\omega, t) e^{j\omega t} d\omega \quad (8)$$

Для случая, когда входной сигнал является гармоническим колебанием  $S(t) = \cos \omega_0 t$ . Соответствующий  $S(t)$  аналитический сигнал есть  $Z(t) = e^{j\omega_0 t}$ .

Спектральная плотность этого сигнала  $\dot{Z}(j\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$ .

Подставляя  $\dot{Z}(j\omega)$  вместо  $\dot{S}(j\omega)$  в формулу (8), получаем:

$$Z_{\text{ВЫХ}}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) \dot{K}(j\omega, t) e^{j\omega t} d\omega = \dot{K}(j\omega_0, t) e^{j\omega_0 t}$$

Отсюда находим

$$\dot{K}(j\omega_0, t) = Z_{\text{ВЫХ}}(t) / e^{j\omega_0 t} \quad (9)$$

Здесь  $Z_{\text{ВЫХ}}(t)$  - аналитический сигнал, соответствующий выходному сигналу  $S_{\text{ВЫХ}}(t)$ .

Таким образом, выходной сигнал при гармоническом воздействии

$$S_{\text{ВЫХ}}(t) = \text{Re} Z_{\text{ВЫХ}}(t) = \text{Re} [\dot{K}(j\omega_0, t) e^{j\omega_0 t}] \quad (10)$$

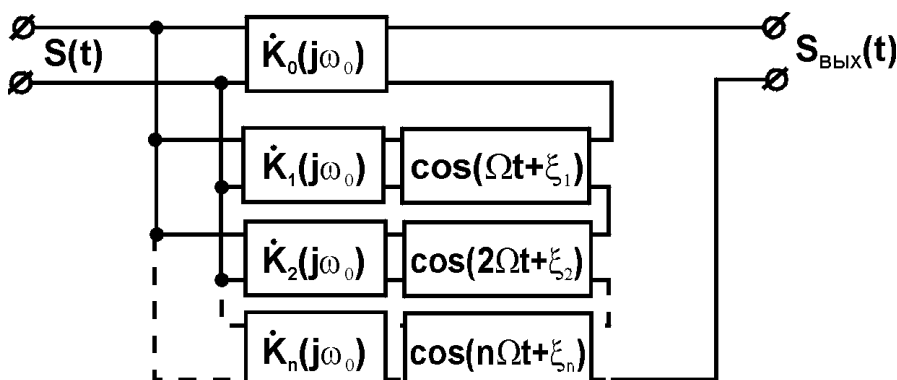
определяется также, как и для любых других линейных цепей.

Если передаточная функция  $K(j\omega_0, t)$  изменяется во времени по передаточному закону с основной частотой  $\Omega$ , то ее можно представить в виде ряда Фурье

$$\dot{K}(j\omega_0, t) = \dot{K}_0(j\omega_0) + \dot{K}_1(j\omega_0) \cos(\Omega t + \xi_1) + \dot{K}_2(j\omega_0) \cos(2\Omega t + \xi_2) + \dots \quad (11)$$

где  $\dot{K}_0(j\omega_0), \dot{K}_n(j\omega_0)$  - не зависящие от времени коэффициенты, в общем случае комплексные, которые можно трактовать как передаточные функции некоторых четырехполюсников с постоянными параметрами. Произведение  $\dot{K}_n(j\omega_0) \cos(n\Omega t + \xi_n)$  можно рассматривать как передаточную функцию каскадного (последовательного) соединения двух четырехполюсников: одного с передаточной функцией  $\dot{K}_n(j\omega_0)$ , не зависящей от времени, и второго с передаточной функцией  $\cos(n\Omega t + \xi_n)$ , изменяющейся во времени, но не зависящей от частоты  $\omega_0$  входного сигнала.

Основываясь на выражении (11), любую параметрическую цепь с периодически изменяющимися параметрами можно представить в виде следующей эквивалентной схемы:



Откуда понятен процесс образования новых частот в спектре выходного сигнала



В соответствии с (9) аналитический сигнал на входе будет равен

$$Z_{BbLX}(t) = \mathcal{K}(j\omega_0, t)e^{j\omega_0 t} = \mathcal{K}_0(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} + \mathcal{K}_1(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} \cdot \cos(Wt + x_1) + \mathcal{K}_2(j\omega_0)e^{j\omega_0 t} \cos(2Wt + x_2) + \dots = \mathcal{K}_0(j\omega_0)e^{j(\omega_0 t + j_0)} + \mathcal{K}_1(j\omega_0)e^{j(\omega_0 t + j_1)} \cos(Wt + x_1) + \mathcal{K}_2(j\omega_0)e^{j(\omega_0 t + j_2)} \cos(2Wt + x_2) + \dots \quad (12)$$

здесь  $j_0, j_1, j_2 \dots$  - фазовые характеристики четырехполюсников  $\mathcal{K}_0(j\omega_0), \mathcal{K}_1(j\omega_0), \mathcal{K}_2(j\omega_0), \dots$ .

Переходя к вещественному сигналу на выходе, получаем

$$S_{BbLX}(t) = \text{Re } Z_{BbLX}(t) = K_0(\omega_0) \cos(\omega_0 t + j_0) + K_1(\omega_0) \cos(\omega_0 t + j_1) \cos(Wt + x_1) + K_2(\omega_0) \cos(\omega_0 t + j_2) \cdot \cos(2Wt + x_2) + \dots = K_0(\omega) \cos(\omega_0 t + j_0) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} K_n(\omega_0) \cdot \{\cos[(\omega_0 \pm nW)t + j_n \pm x_n]\} \quad (13)$$

Этот результат указывает на следующее свойство цепи с переменными параметрами: при изменении передаточной функции по любому сложному, по периодическому закону с основной частотой  $W$  гармонический выходной сигнал с частотой  $\omega_0$  образует на выходе цепи спектр, содержащий частоты  $\omega, \omega_0 \pm W, \omega_0 \pm 2W$  и т.д.

Если на входе цепи подается сложный сигнал, то все сказанное выше относится к каждой из частот  $\omega$  и входного спектра. Разумеется, что в линейной параметрической цепи никакого взаимодействия между отдельными компонентами входного спектра не существует (принцип суперпозиции), и на входе цепи не возникает частот вида  $n\omega_1 \pm m\omega_2$ , где  $\omega_1$  и  $\omega_2$  - различные частоты входного сигнала.

### 6.3. Энергетика цепей с параметрическими реактивными элементами

Рассмотрим процессы, происходящие в цепи, содержащей конденсатор, емкость которого является функцией приложенного напряжения. Как элемент радиотехнических цепей параметрических конденсаторов не существует. В качестве параметрического конденсатора обычно применяются нелинейные конденсаторы. Модель параметрического конденсатора получается из модели нелинейного конденсатора путем замены  $C(U)$  на  $C(t)$ . Рассмотрим как это реализуется. Пусть на нелинейный конденсатор подано колебание высокой частоты  $U_{HK}(t)$ , амплитуда которого достаточна для того, чтобы вызвать заметную модуляцию емкости в соответствии с законом  $C(U)$ . Будем называть это модулирующее колебание колебанием накачки и будем считать, что оно гармоническое, т.е.  $U_{HK}(t) = U_{mHK} \cos(\omega_{HK} t + j_{HK})$ . Найдем закон изменения емкости от времени, т.е. зависимость  $C(t)$ .

Вольт-кулонную характеристику нелинейного конденсатора можно аппроксимировать степенным полиномом, причем приемлемая точность аппроксимации в большинстве случаев получается при полиномах второй степени. Поэтому запишем аппроксимирующий полином в виде:  $q = b_1 U_{HK} + b_2 U_{HK}^2$ , т.к.  $C(U) = q(U)/U$ , то, сделав соответствующие подстановки, найдем

$$C(t) = b_1 \frac{\dot{q}}{\dot{U}} + \frac{b_2}{b_1} U_{mHK} \cos(\omega_{HK} t + j_{HK}) \frac{\dot{U}}{U} \quad (14)$$

Коэффициент  $b_1$  равен дифференциальной емкости  $C_0$  в начальной рабочей точке, заданной напряжением смещения  $U_0$ . Множитель перед косинусом имеет смысл коэффициента, характеризующего глубину изменения емкости: обозначим его  $m_C = (b_2/b_1) U_{mHK} = DC/C_0$ . С учетом этих обозначений соотношение (14) представляет собой зависимость емкости конденсатора изменяющейся во времени по гармоническому закону с частотой накачки:

$$C(t) = C_0 [1 + m_C \cos(\omega_{HK} t + j_{HK})] \quad (15)$$

Это и есть модель параметрического конденсатора, полученная из модели нелинейного конденсатора путем замены зависимости  $C(U)$  зависимостью  $C(t)$ .

Рассмотрим процесс в цепи, образованной источником сигнала  $U_C(t) = U_{mC} \cos(\omega_C t + j_C)$  и параметрическим конденсатором емкостью (15). Будем считать, что амплитуда сигнала мала:  $U_{mC} \ll U_{mHK}$ . Поэтому для напряжения сигнала емкость  $C$  можно считать линейной, т.е. в вольт-кулонной характеристике можно ограничиться только первым слагаемым.

Найдем ток, протекающий через конденсатор:

$$i(t) = \frac{dq(U)}{dt} = \frac{d[C(U_{HK}) U_C]}{dt} = C(U_{HK}) \frac{dU_C}{dt} + U_C \frac{dC(U_{HK})}{dt} \quad (15)$$

Подставив в это выражение соответствующие величины, после преобразования получим:

$$i(t) = -\omega_C C_0 [1 + m_C \cos(\omega_{HK} t + j_{HK})] U_{mC} \sin(\omega_C t + j_C) - \\ - \omega_{HK} C_0 [1 + m_C \cos(\omega_{HK} t + j_{HK})] U_{mC} m_C \sin(\omega_C t + j_C)$$

Преобразуя произведения  $\sin a \cos b$  по известным тригонометрическим формулам, получаем:

$$i(t) = -\omega_C C_0 U_{mC} \sin(\omega_C t + j_C) + \frac{m_C C_0 U_{mC}}{2} (\omega_C - \omega_{HK}) \cdot \\ \cdot \sin[(\omega_{HK} - \omega_C)t + j_{HK} - j_C] - \frac{m_C C_0 U_{mC}}{2} (\omega_C + \omega_{HK}) \cdot \\ \cdot \sin[(\omega_{HK} + \omega_C)t + j_{HK} + j_C] \quad (16)$$

Как видно из (16) в спектре тока, протекающего через параметрический конденсатор, помимо составляющей на частоте сигнала  $\omega_C$  содержатся гармоники разностной  $(\omega_{HK} - \omega_C)$  и суммарной  $(\omega_{HK} + \omega_C)$  частот. Рассмотрим процесс преобразования энергии в этой цепи.

Средняя мощность в рассматриваемой цепи равна мгновенной мощности, усредненной за период сигнала:

$$P_{CP} = \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} U_c(t)i(t)dt = f_c E_c, \quad (17)$$

где  $E_c = \int_0^{T_c} U_c(t)i(t)dt$  - энергия сигнала,  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi}$ .

Прямое интегрирование (17) с учетом (16) достаточно громоздко. Поэтому выделим вначале такую составляющую тока (16), которая дает среднюю мощность отличную от нуля, а затем вычислим и среднюю мощность.

Гармоника тока на частоте сигнала является обычной реактивной составляющей тока, протекающего через конденсатор. Она находится в квадратуре с напряжением сигнала ( $\dot{U}_c \wedge \dot{i}_{\omega_c}$ ) и не создает средней мощности. Гармоника тока суммарной частоты тоже не дает  $P_{cp} \neq 0$  на частоте  $\omega_c$ , т.к. нет самого колебания. И только на гармоника разностной частоты, и при одном только условии  $\omega_{HK} = 2\omega_c$ , может создать полную мощность на частоте сигнала. Обозначим ее  $P_{c\text{cp}}$  и на основании (16) и (17) найдем

$$\begin{aligned} P_{c\text{cp}} &= \frac{1}{T_c} \int_0^{T_c} U_{mc}^2 \frac{\omega_{HK} C_0 m_c}{2} \sin(\omega_c t + j_{HK} - j_c) \cos \omega_c t dt = \\ &= \frac{m_c \omega_c C_0 U_{mc}^2}{4} \sin(2j_c - j_{HK}) \end{aligned} \quad (18)$$

Как следует из (18) средняя мощность в цепи может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от соотношения фазовых углов напряжений сигнала и накачки. При положительной мощности цепь потребляет от источника сигнала мощность, которая рассеивается в конденсаторе. Отрицательную мощность трактуют как мощность, поступающую в цепь от источника накачки, которая может не только скомпенсировать потери на частотах сигнала, но и привести к росту мощности сигнала на выходе цепи.

Таким образом, параметрический конденсатор может выполнять функцию активного элемента - усилителя мощности. Из (18) также следует, что по аналогии с обычным резистором, потребляющим активную мощность, параметрический конденсатор может быть заменен отрицательным сопротивлением, вносимым в цепь. Его значение можно найти из условия  $P_{c\text{cp}} = U_{mc}^2 / (2R_{BH})$ . Сравнивая последнее соотношение с (18), находим, что  $R_{BH} = [m_c \omega_c C_0 \sin(2j_c - j_{HK})]^{-1}$  и зависит только от фазовых соотношений между напряжениями сигнала и накачки.

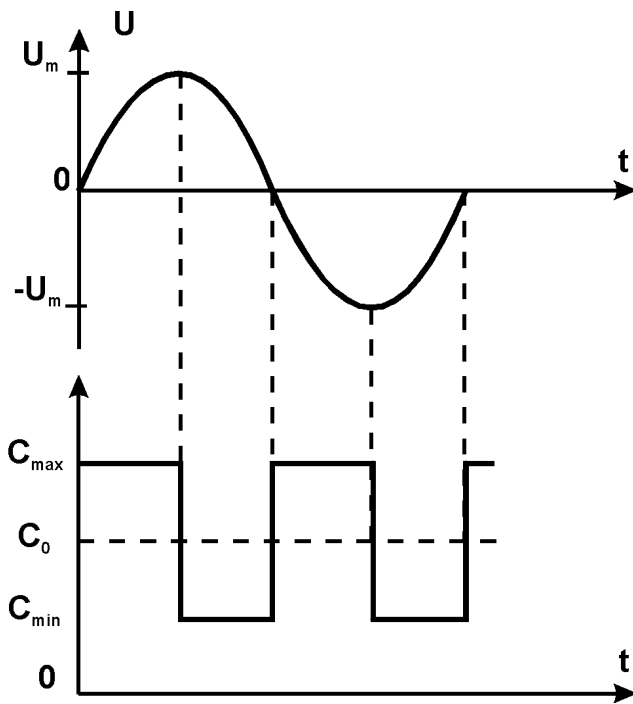
Полученный эффект связанный с перекачкой энергии от источника  $U_{HK}$  в сигнал достаточно неожидан, и поэтому рассмотрим физику явления.

#### 6.4. Параметрический резонанс.

Существуют явления, при которых, также как и при действии гармонического сигнала на колебательный контур, результат внешнего воздействия называется зависимым от частоты этого воздействия. Эти

явления объединяют понятием “резонанс” в более широком смысле, и применительно к колебательным цепям, содержащим параметрический конденсатор, говорят о параметрическом резонансе.

Рассмотрим в качестве примера явления, происходящие в колебательном контуре с параметрическим конденсатором при воздействии



на конденсатор напряжения накачки в виде прямоугольных импульсов с частотой следования, равной удвоенной частоте собственных колебаний контура. Допустим, что между частотой собственных колебаний и изменением емкости  $C$  существует жесткая синхронизация: в моменты времени, когда напряжение на конденсаторе достигает экстремума, емкость скачком уменьшается: в моменты времени, когда напряжение становится равным нулю, емкость скачком увеличивается на ту же величину (см. рис.).

Энергия, запасенная конденсатором, равна  $E = q^2 / 2C$ . При малом приращении емкости  $\Delta C \ll C_0$  приращение энергии

$$\Delta E \approx - \frac{q^2}{2C_0^2} \Delta C = - E_{\max} \frac{\Delta C}{C_0} \quad (19)$$

(линейно зависит от приращения емкости)

Максимальная энергия, запасенная параметрическим конденсатором, равна

$$E_{\max} = \frac{1}{2} U_m^2 C_{\max} = \frac{1}{2} U_m^2 C_0 + \frac{\Delta C}{2} \frac{U_m^2}{C_0} \approx \frac{1}{2} U_m^2 C_0$$

Из графиков и формулы (19) следует, что за период собственных колебаний контур дважды получает дополнительную энергию от источника накачки в моменты экстремальных значений напряжения на конденсаторе. Обозначим эту дополнительную энергию накачки  $E_{HK}$ , и, в соответствии с формулой (19), запишем

$$E_{HK} = 2\Delta E = 2E_{\max} \frac{\Delta C}{C_0} \approx U_m^2 \Delta C \quad (20)$$

Как известно, эквивалентное сопротивление контура при резонансе активно и для параллельного контура равно  $R_{\text{ЭКВ}} = r Q$ , где  $Q$  - добротность, а  $r = \sqrt{L/C}$  - характеристическое сопротивление контура. Энергия, рассматриваемая в контуре за период собственных колебаний, равна

$$E_{РАСС} = T \frac{U_m^2}{2R_{эже}} = \frac{U_m^2 T}{2r Q} \quad (21)$$

Сравнивая рассеиваемую энергию (21) с накачиваемой в контур (20), можно заключить, что в контуре колебания либо не возникают, либо они нарастают неограниченно. первое происходит, если  $E_{РАСС} > E_{НК}$ ; второе - если  $E_{РАСС} < E_{НК}$ . Другими словами, колебания нарастают, если коэффициент модуляции емкости больше некоторого критического значения. Из (20) и (21) также следует, что для возникновения параметрического резонанса необходимо, чтобы выполнить условие

$$DC/C_0^3 T / (2r Q C_0).$$

Подставив сюда  $r = \sqrt{L/C_0}$  и  $T = 2\pi \sqrt{LC_0}$ , получим

$$DC/C_0^3 \pi Q.$$

Оно и определяет критическое значение  $\Delta C$ .

Поясним полученный результат. Каждый раз, когда емкость уменьшается, конденсатор заряжен и энергия источника накачки затрачивается на увеличение электрической энергии контура. Каждый раз, когда емкость увеличивается, конденсатор разряжен и изменение емкости происходит без затрат полезной энергии.

Таким образом в цепях с реактивными параметрическими элементами энергия накачки может преобразовываться в энергию сигнала.

### **6.5. Баланс мощностей в параметрических цепях.**

Рассматриваемая модель параметрической цепи реально представляет собой нелинейную цепь. А в цепи, содержащей нелинейный конденсатор, под воздействием напряжения генератора накачки и напряжения генератора сигнала, возникают колебания комбинационных частот  $w_K = mw_C + nw_{НК}$ .

Чтобы представить себе как перераспределяется энергия информационного сигнала и сигнала накачки между комбинационным колебанием рассмотрим следующую цепь.

Пусть параллельно нелинейному конденсатору включены три цепи: цепь накачки, цепь сигнала и колебательный контур. Последний называют холостым контуром. Контур настроен на одну из комбинационных частот  $w_K$ , и, поэтому, можно принять, что других комбинационных колебаний не существует. Сумма средних мощностей колебаний сигнала  $P_C$ , накачки  $P_{НК}$  и комбинационной частоты  $P_K$  должна быть равна нулю (закон сохранения энергии):

$$P_C + P_{НК} + P_K = 0 \quad (21)$$

Переходя в (21) от средних мощностей к энергиям в соответствии с (17) получим:  $w_C E_C + w_{НК} E_{НК} + w_K E_K = 0$ . Подставляя сюда  $w_K = mw_C + nw_{НК}$ , находим, что

$$w_C (E_C + mE_K) + w_{НК} (E_{НК} + nE_K) = 0 \quad (22)$$

Равенство (22) при произвольных  $W_C$  и  $w_{HK}$  выполняется, если каждое слагаемое равно нулю (поскольку они не связаны общей частотой):

$$E_C + mE_K = 0$$

$$E_{HK} + nE_K = 0$$

Переходя от энергии к средним мощностям получаем:

$$\begin{aligned} P_C / w_C + mP_K / (mw_C + nw_{HK}) &= 0 \\ P_{HK} / w_{HK} + mP_K / (mw_C + nw_{HK}) &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

Уравнения (23) выражают закон сохранения энергии в параметрических цепях. Их называют уравнениями Мэнли-Роу. И они являются частным случаем общей теоремы Мэнли-Роу о балансе мощностей в спектре колебания параметрической цепи, содержащей реактивную нелинейность (емкость или индуктивность). Теорема записывается в виде:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{m \times P_{mn}}{mw_C + nw_{HK}} &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{m \times P_{mn}}{mw_C + nw_{HK}} &= 0 \end{aligned}$$

Они определяют законы распределения энергии сигнала накачки между гармониками выходного сигнала

Здесь  $P_{mn}$  - средняя мощность колебания на комбинационной частоте  $mw_1 + nw_0$ .

Запишем уравнения Мэнли-Роу для частного вида цепи, в которой существуют колебания только на четырех частотах:

$$w_C, w_{HK}, w_+ = w_{HK} + w_C, w_- = w_{HK} - w_C.$$

Для этого в (23) необходимо задать две пары значений  $m$  и  $n$ :  $m=1, n=1$  и  $m=-1, n=1$ .

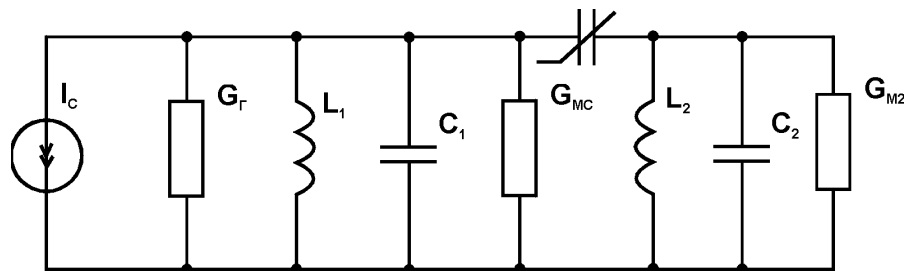
Тогда

$$\begin{aligned} \frac{P_{HK}}{w_{HK}} + \frac{P_+}{w_+} + \frac{P_-}{w_-} &= 0 \\ \frac{P_C}{w_C} + \frac{P_+}{w_+} - \frac{P_-}{w_-} &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

Эти формулы и устанавливают количественные соотношения (баланс) между мощностями колебаний различных частот.

## 6.6. Параметрические усилители

На основании принципа параметрического резонанса строятся параметрические усилители. Различают три наиболее важных режима усиления: 1) с преобразованием частоты “вверх”; 2) с преобразованием частоты “вниз”; 3) регенеративный вырожденный режим.



Первые два режима реализованы в двухканальном усилителе, схема которого приведена на рис. Усилитель содержит два контура: сигнальный ( $L_1 C_1$ ), настроенный на частоту  $\omega_c$ , и выходной ( $L_2 C_2$ ), настроенный на одну из комбинационных частот ( $\omega_+$  или  $\omega_-$ ). Режим с преобразованием частоты “вверх” или “вниз” определяется частотой настройки выходного контура. На рис. также обозначены:  $G_{HC}$  - проводимость нагрузки сигнального контура,  $G_{H2}$  - проводимость нагрузки холостого контура.

**6.6.1. В усилителе с преобразованием частоты “вверх”** выходной контур настраивается на суммарную частоту  $\omega_+ = \omega_{HK} + \omega_c$  и соотношение (24) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{P_{HK}}{\omega_{HK}} + \frac{P_+}{\omega_+} &= 0 \\ \frac{P_c}{\omega_c} + \frac{P_+}{\omega_+} &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Так как всегда  $P_+ > 0$  ( $P_+$  - мощность выделяемая в нагрузке), то из (25) следует  $P_{HK} < 0$  и  $P_c < 0$ . Это означает, что оба генератора (и сигнала, и накачки) отдают мощность в выходной контур. Из второго уравнения (25) вытекает, что максимально возможный коэффициент усиления в рассматриваемом режиме равен  $K_p = -P_+ / P_c = \omega_+ / \omega_c$ .

Усилители такого типа имеют ограниченное применение, поскольку на высоких частотах (там где и используется параметрические усилители) трудно обеспечить большое значение отношения  $\omega_+ / \omega_c$ . Достоинством такого режима усиления является высокая устойчивость работы усиления.

**6.6.2. В усилителе с преобразованием частоты “вниз”** выходной контур подстраивается на резонансную частоту  $\omega_- = \omega_{HK} - \omega_c$  и уравнение (24) принимает вид:

$$\begin{aligned} \frac{P_c}{\omega_c} - \frac{P_-}{\omega_-} &= 0 \\ \frac{P_{HK}}{\omega_{HK}} - \frac{P_-}{\omega_-} &= 0 \end{aligned} \quad (26)$$

Как видно из первого равенства (26), мощности  $P_c$  и  $P_-$  положительные, поскольку мощность, потребляемая нагрузкой -  $P > 0$ . Это означает, что часть мощности генератора накачки поступает в сигнальный контур и компенсирует часть теряемой в ней мощности, т.е. в усилителе происходит

регенерация на частоте сигнала. Из (26) нельзя получить коэффициент усиления, поскольку  $P_C$  включает не только мощность, потребляемую нагрузкой, но и часть мощности, возникающей за счет регенерации. Тем не менее, записав первое уравнение (26) в виде  $P_1 = P_C \omega_1 / \omega_C$ , можно утверждать, что усиление будет тем больше, чем больше отношение  $\omega_1 / \omega_C$ .

Усилители данного типа неустойчивы в работе, так как в сигнальный контур поступает мощность даже в отсутствие сигнала, что при определенных условиях может привести к самовозбуждению.

**6.6.3. Одиночный регенеративный усилитель** является частным случаем усилителя с преобразованием частоты “вниз”.

В этом усилителе частота накачки равна удвоенной частоте сигнала  $\omega_{HK} = 2\omega_C$ , а разностная частота - частоте сигнала  $\omega_1 = \omega_C$  поэтому отпадает необходимость в отдельном контуре, настроенном на разностную частоту. Двухконтурная схема “вырождается” в одноконтурную, откуда происходит название “вырожденный” режим. Если условие  $\omega_{HK} = 2\omega_C$  выполняется строго, в контуре выделяется одно усиленное колебание, по амплитуде равное сумме колебаний на частоте сигнала и разностной частоте. Такой режим работы называется синхронным. Как было показано, он зависит от фазовых соотношений колебаний накачки и сигнала.

В реальных условиях невозможно точно выполнить условие синхронизации. Поэтому одноконтурный регенеративный усилитель всегда работает в асинхронном режиме, когда  $\omega_1 - \omega_C = \Delta\omega \neq 0$ . При этом величина  $2j_{HK} - j_C$  становится функцией времени, поскольку получает случайную добавку  $\Delta\omega t$ . Вносимое сопротивление, определяемое формулой (18), также становится случайной функцией времени и, как следствие, возникают случайные изменения усиления. Это является серьезным недостатком одноконтурных усилителей.

Параметрические усилители применяются в диапазоне частот от сотен МГц до десятков ГГц. Они имеют относительно узкую полосу пропускания 1...3% и за счет этого, а также из-за отсутствия дробового эффекта, присущего активным элементам, низкий уровень шумов.



## 7. Фильтрация сигналов на фоне помех.

### 7.1. Задачи и методы фильтрации

Электрическим фильтром называется пассивный четырехполюсник пропускающий электрические сигналы некоторой полосы частот без существенного ослабления или с усилением, а колебания вне этой полосы частот - с большим ослаблением. Такие устройства применяются для выделения полезных сигналов на фоне помех. Задача фильтрации формулируется следующим образом.

Если на вход линейного фильтра поступает смесь сигнала и помехи

$$X(t) = S(t) + x_n(t), \quad (1)$$

то проблема состоит в том, как наилучшим образом выделить сигнал из этой смеси, т.е. как создать оптимальный фильтр. Известными считаются статические характеристики (т.е. спектр или корреляционная функция) функции  $x(t)$ , представляющей собой смесь сигнала и помехи. Искомой является периодическая функция оптимального фильтра.

Задача об оптимальной фильтрации решается по-разному в зависимости от того смысла, который вкладывается в понятие оптимальности. Рассмотрим три наиболее важных случая оптимальной фильтрации.

1. Форма сигнала известна. От фильтра требуется только сохранение полученного сообщения, заключенного в сигнале, т.е. сохранение неискаженным помехой информационного параметра сигнала и не требуется сохранение формы. Такая задача может быть поставлена при фильтрации сигналов, форма которых известна на приемной стороне (например, обнаружение сигнала в радиотелеграфии и радиолокации). Фильтр при этом называют оптимальным, если в некоторый момент времени  $t_0$  на его выходе обеспечивается максимальное отношение сигнала к среднеквадратическому значению напряжения шума. Такой фильтр может быть интегратором, поскольку речь идет о типовом значении полезного сигнала. При этом он должен лучше пропускать те частоты, на которых больше интенсивность спектральных составляющих сигнала и меньше интенсивность помех.

Для передаточной функции только оптимального фильтра теория дает следующие выражения:

$$K(j\omega) = ae^{-j\omega t_0} \frac{S^*(j\omega)}{G_n(\omega)} \quad (2)$$

где  $a$  - некоторая постоянная;

$S^*(j\omega) = S(-j\omega)$  - величина, комплексно сопряженная амплитудному спектру сигнала;

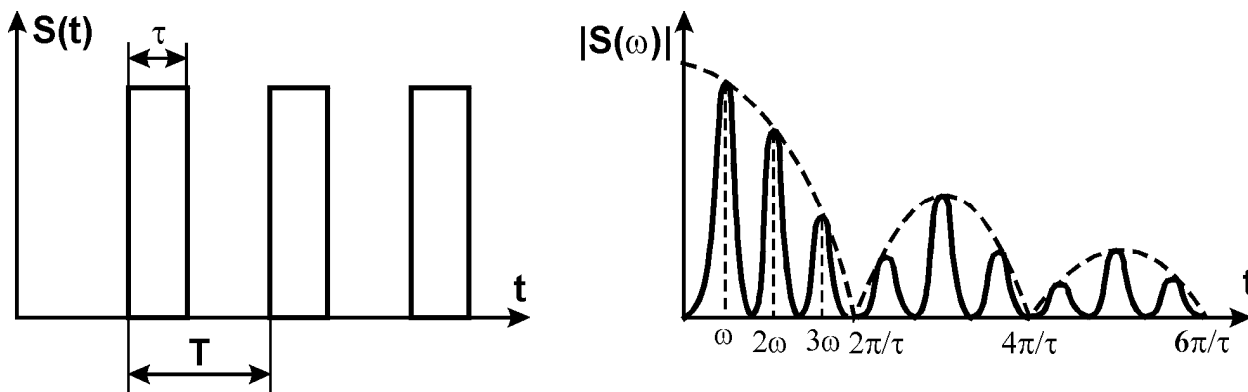
$G_n(\omega)$  - спектр мощности помехи.

В случае помехи с равномерным спектром частная характеристика оптимального фильтра с точностью до постоянного множителя совпадает с амплитудным спектром сигнала:

$$|K(j\omega)| = a_1 |S(j\omega)|, \quad a_1 = \text{const} \quad (3)$$

Отсюда специфическое название подобных оптимальных фильтров - согласованные фильтры (т.е. согласованные с сигналом).

Например, при приеме сигнала в виде передаточной повторяющихся импульсов, спектр каждого из которых состоит из отдельных узких полос



(см. рис.), фильтр должен пропускать лишь эти полосы.

Рассматриваемый сигнал пройдет через такой фильтр без искажений, а мощность помехи уменьшится, т.к. она будет складываться из мощностей лишь тех спектральных составляющих помехи, которые попадут в полосу прозрачности фильтра. Такой фильтр для приема последовательностей импульсов получил название гребенчатого фильтра. Его применение приводит к тем большему увеличению превышения сигнала над помехой, чем уже полоса прозрачности фильтра. В свою очередь полосы прозрачности могут быть сделаны тем более узкими, чем больше характер последовательности приближается к периодическому закону (в этом случае полосы спектра превращаются в линии). Но приближение к периодическому сигналу, т.е. достаточно многократное его повторение, эквивалентное увеличению длительности сигнала. Таким образом, согласованная фильтрация повышает помехоустойчивость как бы за счет увеличения длительности полезного сигнала.

2. Форма сигнала неизвестна, а от фильтра требуется ее сохранения. Например, фильтрация после детектора должна обеспечивать наилучшее воспроизведение на фоне шума не одного или нескольких параметров сигнала, а всего сигнала  $S(t)$ . В этом случае в качестве критерия оптимальности (точности воспроизведения сигнала) удобно принять среднеквадратичную ошибку, т.е. средний квадрат отклонения воспроизведенного сигнала от периодического. если сигнал и помеха являются независимыми и стационарными случайными процессами, то частотная характеристика такого оптимального фильтра, обеспечивающего

минимальную среднеквадратичную ошибку, определяется спектрами мощности сигналом  $P_C(\omega)$  и помехи  $G_{\Pi}(\omega)$ .

$$|K(j\omega)| = \frac{P_C(\omega)}{P_C(\omega) + G_{\Pi}(\omega)} = \frac{1}{1 + \frac{G_{\Pi}(\omega)}{P_C(\omega)}} \quad (4)$$

Фильтр ослабляет те спектральные составляющие, которые сильнее поражены помехой, и для которых больше отношение  $G_{\Pi}(\omega)/P_C(\omega)$ . А на тех частотах, где помеха отсутствует  $G_{\Pi}(\omega) \ll P_C(\omega)$ , коэффициент передачи  $K \rightarrow 1$ .

3. Выделение длительного периодического сигнала из его смеси с помехой может быть осуществлено путем исследования функции корреляции этой смеси. Корреляционный фильтр, осуществляющий такое исследование, содержит блок переключения и блок усреднения (интегратор).

При взаимокорреляционной фильтрации, когда фильтр, располагая образцом сигнала, определяет функцию взаимной корреляции между принятой смесью  $X(t)$  и образцом сигнала  $S(t)$  (в данном случае речь идет только о констатации факта наличия сигнала):

$$K(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [S(t) + x(t)][S(t+t) + x(t+t)] dt = K_{cc}(t) + K_{n,n}(t)$$

Если сигнал и помеха некоррелированы, то  $K_{n,n}(t) = 0$  и напряжения  $K_{cc}(t)$  будет свидетельствовать о наличии сигнала в смеси.

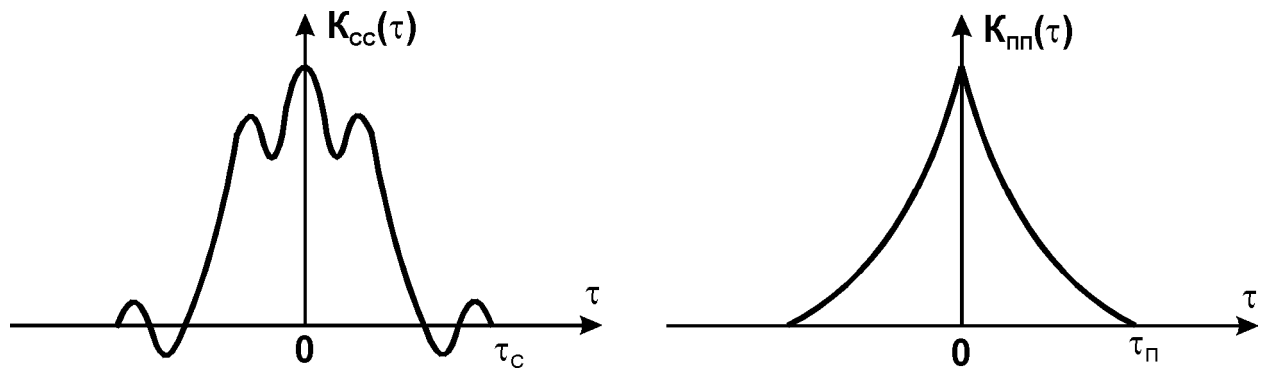
Автокорреляционная фильтра используется при отсутствии определенных сведений о форме сигнала. Фильтр в этом случае определяет автокорреляционную функцию смеси:

$$\begin{aligned} K(t) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T [S(t) + x(t)][S(t+t) + x(t+t)] dt = \\ &= K_{cc}(t) + K_{nn}(t) + K_{cn}(t) + K_{nc}(t) \end{aligned}$$

При отсутствии корреляции между сигналом и помехой последние два слагаемых исчезнут. Что касается оставшихся двух слагаемых, то первое из них может носить черты периодичности, т.к. является автокорреляционной функцией сигнала близкого к периодическому, а второе обращается в ноль, если сдвиг  $t$  больше интервала корреляции помехи  $t_{\Pi}$ . Таким образом, при достаточно большом сдвиге  $t$  и времени усреднения  $T$  наличие напряжения  $K_{cc}(t)$  на выходе коррелятора свидетельствует о наличии периодического сигнала в смеси.

Однако реальные сигналы связи не являются периодическими и ограничены некоторой длительностью  $t_c$ . Следовательно, при  $t > t_c$  автокорреляционная функция сигнала становится равной нулю (см. рис.). С другой стороны, интервал корреляции помехи  $t_{\Pi}$  возрастает тем больше, чем большему ограничению подвергается спектр помехи в фильтре, поскольку помеха приобретает характер периодичности. При оптимальной фильтрации

до коррелометра  $t_{\Pi}$  может превысить  $t_c$  и корреляционная фильтрация не даст никакого эффекта.



Таким образом, автокорреляционная фильтрация эффективна только в том случае, если  $t_c > t_{\Pi}$ , т.е. при широкой полосе пропускания фильтровых цепей и достаточно длительных сигналов. Повышение помехоустойчивости сигнала по длительности над помехой.

## 7.2. *Согласованная фильтрация заданного сигнала*

### 7.2.1. Методика анализа.

Для задачи обнаружения сигнала в шумах наибольшее распространение получил критерий максимума отношения сигнал-шум (помеха) на выходе фильтра. Фильтры, отвечающие этому критерию, называются согласованными.

Требования к фильтру, максимизирующему отношение сигнал-помеха, можно сформулировать следующим образом. Пусть на вход фильтра подается аддитивная смесь сигнала  $S(t)$  и шума  $x(t)$ :  $X(t) = S(t) + x(t)$ . Сигнал полностью известен. Это означает, что заданы его форма и положение на оси времени. Шум представляет собой вероятностный процесс с заданными статистическими характеристиками. Требуется синтезировать фильтр, обеспечивающий получение на выходе наибольшего возможного отношения пикового значения сигнала к среднеквадратичному значению шума. При этом не ставится условие сохранения формы сигнала, т.к. для обнаружения его в шумах форма значения не имеет.

Для уяснения сути согласованной фильтрации сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда на входе фильтра с равномерной АЧХ имеется лишь один полезный сигнал  $S(t)$  с известным спектром  $S(j\omega) = S(\omega)e^{j\int s(\omega)}$ . Требуется найти ФЧХ фильтра, при которой обеспечивается максимализация типа сигнала на выходе фильтра. Такая постановка задачи равносильна задаче максимизации пика сигнала при заданной энергии входного сигнала, поскольку спектральная плотность  $S(\omega)$  полностью определяет его энергию и не меняется фильтром, а любое

изменение фазовых соотношений в спектре тем более не меняет энергии сигнала. Равенство  $S_{ex}(\omega) = S_{blix}(\omega)$  означает, что  $\hat{u} = const$ , т.е.  $\neq K(\omega)$ .

Представим выходной сигнал в виде:

$$S_{blix}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (4)$$

где  $K(j\omega) = K_0 e^{j\int \kappa(\omega) d\omega}$  - передаточная функция (5) четырехполюсника с искомой ФЧХ  $\int \kappa(\omega)$  и равномерной АЧХ  $K_0 = const$ .

Таким образом

$$\begin{aligned} S_{blix}(t) &= \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(j\omega) e^{j[\omega t + \int \kappa(\omega) d\omega]} d\omega = \\ &= \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega) e^{j[\omega t + \int \kappa(\omega) d\omega]} d\omega \end{aligned} \quad (6)$$

Основываясь на очевидном неравенстве

$$\int_a^b \hat{S}(t) dt \leq \int_a^b |\hat{S}(t)| dt \quad (7)$$

и учитывая, что  $|e^{j[\omega t + \int \kappa(\omega) d\omega]}| = 1$ , можно составить следующее неравенство:

$$S_{blix}(t) \leq \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{S}(j\omega)| d\omega \quad (8)$$

Это неравенство определяет верхний предел мгновенного значения колебания  $S_{blix}(t)$  при заданном спектре входного сигнала. Максимизация пика выходного колебания получается при обращении неравенства (8) в равенство, а для этого необходимо, как это следует из сопоставления выражения (6) и (8), обеспечить определенное соотношение между фазовой характеристикой фильтра  $\int \kappa(\omega)$  и фазовой характеристикой спектра  $\int \kappa_s(\omega)$  входного сигнала.

Допустим, что выходной сигнал достигает максимума в момент  $t_0$  (пока еще неопределенный). Тогда выражение (6) дает

$$S_{blix \max}(t) = S_{blix}(t_0) = \frac{K_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{S}(\omega) e^{j[\omega t_0 + \int \kappa(\omega) d\omega]} d\omega \quad (9)$$

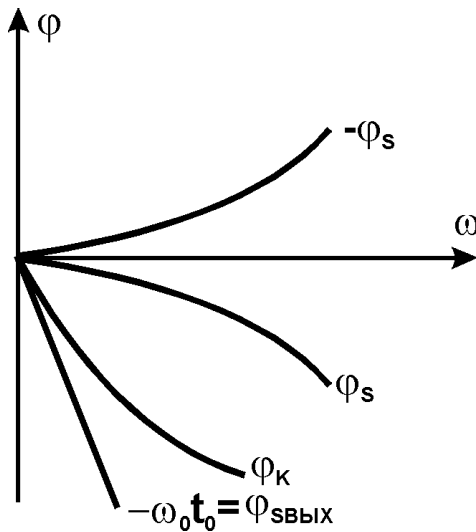
а условие обращения неравенства (8) в равенство сводится к следующему:

$$\begin{aligned} \omega t_0 + \int \kappa_s(\omega) d\omega + \int \kappa(\omega) d\omega &= 0 \\ \text{или} \\ \int \kappa(\omega) d\omega &= -[\int \kappa_s(\omega) d\omega + \omega t_0] \end{aligned} \quad (10)$$

Это соотношение называют условием компенсации начальных фаз в спектре сигнала, поскольку первое слагаемое в правой части (10) компенсирует фазовую характеристику  $\int \kappa_s(\omega)$  входного спектра  $S(j\omega)$ . В результате прохождения сигнала через фильтр с фазовой характеристикой  $\int \kappa(\omega)$  сложение всех компонентов спектра, скорректированных по фазе, образует пик выходного сигнала в момент  $t=t_0$ .

$$\int \kappa_{blix}(\omega) d\omega = \int \kappa_s(\omega) d\omega + \int \kappa(\omega) d\omega = \int \kappa_s(\omega) d\omega + [-\int \kappa_s(\omega) d\omega - \omega t_0] = -\omega t_0 \quad (11)$$

Соотношение (11) показывает, что только при линейной фазовой характеристике  $S_{\text{вых}}$  имеет пик, т.к.  $\cos n\omega_1(t-t_0)=1$  при  $t=0$



Связь между фазовой характеристикой  $j_s(\omega)$ , компенсирующей ее характеристикой  $[-j_s(\omega)]$  и полной фазовой характеристикой фильтра  $j_{\kappa}(\omega) = -[j_s(\omega) + \omega t_0]$  видна из следующего рисунка. После прохождения через фильтр спектр выходного сигнала будет иметь фазовую характеристику.

Нелинейность фазовой характеристики  $\varphi_s$  означает, что гармоники задерживаются по-разному и следовательно не могут образовать тах в момент  $t_0$ . При линейной фазовой характеристике в момент  $t_0$  все гармоники имеют одинаковую фазу,

поскольку гармоническая функция  $\cos n\omega_1(t-t_0)$ , при  $t=t_0$ , всегда обращается в единицу.

Поскольку для образования пика требуется использование всей энергии сигнала, а это возможно не ранее окончания действия входного сигнала, задержка  $t_0$  не может быть меньше, чем полная длительность сигнала.

Введем теперь помеху на входе фильтра. При равномерном энергетическом спектре помехи (белый шум)  $W(\omega)=W_0=\text{const}$  - фильтр с равномерной АЧХ неприменим, т.к. мощность помехи на выходе достигает очень большой величины.

Для отыскания оптимальной передаточной функции, максимизирующей отношение сигнал-помеха на выходе фильтра, составим выражение для сигнала и шума сначала отдельно, а затем в виде их отношения.

Типовое значение сигнала определим выражением

$$S_{\text{ВЫХ max}}(t) = S_{\text{ВЫХ}}(t_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \quad (12)$$

Среднеквадратическое значение помехи на выходе фильтра

$$s = \sqrt{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) K^2(\omega) d\omega} = \sqrt{\frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(\omega) d\omega}$$

где,  $W$  - спектр энергии шума.

Следовательно, отношение пикового значения сигнала к среднеквадратичному значению помехи на выходе фильтра будет равно:

$$\frac{S_{\text{ВЫХ}}(t_0)}{s} = \frac{\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|}{\sqrt{\frac{W_0}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K^2(j\omega) d\omega}} \quad (13)$$

Воспользуемся известным неравенством Шварца

$$\left| \int_a^b F_1(j\omega) F_2(j\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_a^b |F_1(j\omega)|^2 d\omega \int_a^b |F_2(j\omega)|^2 d\omega \quad (14)$$

Это неравенство обращается в равенство только при выполнении условия

$$F_2(j\omega) = A F_1^*(j\omega) \quad (15)$$

где  $A$  - произвольная константа.

Приравнявая  $S(j\omega) = F_1(j\omega)$ , а  $K(j\omega)e^{j\omega t_0} = F_2(j\omega)$ , выражение (14) принимает вид

$$\left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega) K(j\omega) e^{j\omega t_0} d\omega \right|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega \quad (16)$$

Следовательно, определяемое выражением (13) величина  $S_{BBLX}(t_0)/s$  отвечает условию

$$\begin{aligned} \frac{S_{BBLX}(t_0)}{s} &= \frac{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega}{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |K(j\omega)|^2 d\omega} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{W_0}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |S(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (17)$$

Учитывая, что выражение в квадратных скобках есть полная энергия входного сигнала, запишем последнее (17) в форме

$$S_{BBLX}(t_0)/s \leq \sqrt{W_0} \quad (18)$$

Из (15) следует, что это неравенство обращается в равенство при выполнении условия  $K(j\omega)e^{j\omega t_0} = A S^*(j\omega)$ , поэтому

$$K(j\omega) = A S^*(j\omega) e^{-j\omega t_0} \quad (19)$$

Полученное выражение полностью определяет периодическую функцию, максимизированную отношение сигнал-помеха на выходе фильтра.

Учитывая, что  $S(j\omega) = S(\omega)e^{j\omega t_0}$ , а комплексно-сопряженная функция  $S^*(j\omega) = S(\omega)e^{-j\omega t_0}$ , (19) примет вид:

$$K(j\omega) = K(\omega)e^{j\omega t_0} = A S(\omega)e^{-j\omega t_0} \quad (20)$$

Из этого отношения вытекают два условия для фазовой и амплитудной характеристик согласованного фильтра:

$$\varphi_K(\omega) = -\varphi_S(\omega) + \omega t_0, \quad (21)$$

и

$$K(\omega) = A S(\omega) \quad (22)$$

В тех случаях, когда под комплексной передаточной функцией подразумевается безразмерная величина (например, отношение комплексных амплитуд выходного и входного напряжения), коэффициент  $A$  должен иметь размерность, обратную спектральной плотности сигнала.

Физический смысл условий (21), (22) следующий.

Первое из них, совпадающее с (10) и определяющее компенсацию начальных фаз в спектре сигнала, было истолковано выше. Соотношение (22), устанавливающее, что модуль передаточной функции  $K(j\omega)$  должен по своей форме совпадать с модулем спектральной плотности сигнала  $S(\omega)$ , также легко поддается физическому истолкованию. При АЧХ  $K(\omega)$ , отвечающей условию (22), фильтр пропускает спектральные составляющие шума неравномерно: ослабление шума тем больше, чем меньше модуль  $S(\omega)$ .

Ослабление сигнала из-за неравномерности  $K(\omega)$  выражено в меньшей степени, чем ослабление шума, поскольку уменьшение  $K(\omega)$  имеет место для спектральных составляющих, вклад которых в величину типа сигнала сравнительно мал. В результате получается ослабление шума относительно сигнала. В сочетании с фазовой компенсацией спектра сигнала (на дисперсию выходного шума эта компенсация не оказывает влияния), это и приводит к максимизации отношения сигнал/помеха на выходе фильтра.

## 7.2.2 Импульсная характеристика согласованного фильтра. Физическая осуществимость.

Тот факт, что коэффициент передачи согласованного фильтра  $K(j\omega)$  является функцией комплексно сопряженной по отношению к спектру сигнала  $S(j\omega)$ , указывает на существование связи и между временными характеристиками сигнала и фильтра. Для выявления этой связи найдем импульсную характеристику согласованного фильтра. Последняя связана с комплексной передаточной функцией парой преобразований Фурье. На этом основании имеем

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S^*(j\omega) e^{j\omega(t-t_0)} d\omega \quad (23)$$

Учитывая, что  $S^*(j\omega) = S(-j\omega)$ , то переходя к новой переменной  $\omega_1 = -\omega$ , получим

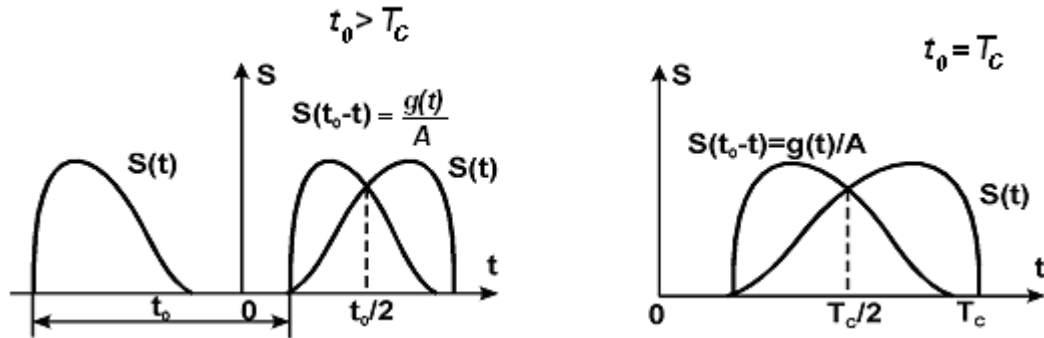
$$g(t) = - \frac{A}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega_1) e^{-j\omega_1(t-t_0)} d\omega_1 = A \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(j\omega_1) e^{j\omega_1(t-t_0)} d\omega_1 \quad (24)$$

Правая часть этого выражения есть функция  $AS(t-t_0)$ . Следовательно, если задан сигнал  $S(t)$ , то импульсная характеристика согласованного фильтра

$$g(t) = AS(t-t_0) \quad (25)$$



Рассмотрим графическую интерпретацию формулы (25) (см. рис.).



Кривая  $S(-t)$  является зеркальным отражением заданного сигнала  $S(t)$  с осью ординат в качестве оси симметрии. Функция  $S(t_0 - t)$ , представляющая собой функцию  $S(-t)$  сдвинутую вправо на  $t_0 = t$ , тоже зеркальна относительно  $S(t)$ , но с осью симметрии  $t = t_0/2$ . (рис. 1). На рис. 2 показано аналогичное построение, когда отсчет времени ведется от начала сигнала.

Импульсная характеристика физической цепи не может начинаться при  $t < 0$ , поскольку отклик не может появиться ранее воздействия. Поэтому задержка  $t_0$  не может быть меньше  $T_c$ . Следовательно, только при  $t \geq T_c$  может быть использована вся энергия сигнала для создания максимального пика в точке  $t = t_0$ . Отсюда очевидно, что увеличение  $t_0$  сверх  $T_c$  не влияет на величину пика выходного сигнала, а просто сдвигает его вправо (в сторону запаздывания).

С другой стороны, условие  $t_0 \geq T_c$  накладывает на сигнал  $S(t)$  требование, чтобы длительность его  $T_c$  была конечна. Только в этом случае, при конечной величине задержки  $t_0$  можно реализовать пик сигнала. Иными словами, применение согласованной фильтрации для максимизации отношения сигнал-помеха в рассматриваемом здесь смысле возможно только при импульсном сигнале, а также ограниченной по продолжительности пачке импульсов.

Рассмотрим подобный вопрос о физической осуществимости согласованного фильтра. Пусть задачи произвольный сигнал  $S(t)$ , которому соответствует импульсная характеристика согласованного фильтра  $g(t)$  и Фурье-преобразование от этой функции  $K(j\omega)$ , определяемые, соответственно, формулами (25) и (19). Вопрос ставится так: при каких условиях  $K(j\omega)$  может являться передаточной функцией физически осуществимого четырехполюсника?

Ответ на этот вопрос дает критерий осуществимости Пэли-Винера, согласно которому неравенство

$$\oint_0^\infty \frac{|\ln K(\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty \quad (26)$$

является необходимым условием, чтобы исполнительная функция  $K(w)$  могла быть модулем передаточной функции пассивной электрической цепи. Т.к.  $K(w) = AS(w)$ , то (26) можно записать в виде

$$\oint_0^{\infty} \frac{|\ln S(w)|}{1+w^2} dw < \infty \quad (27)$$

Отсюда следует, что необходимым условием физической осуществимости согласованного фильтра является сходимость материала (27). Это условие эквивалентно требованию, чтобы длительность сигнала была ограничена.

### 7.2.3. Сигнал и помеха на выходе согласованного фильтра

Для определения формы сигнала на выходе используем общее выражение

$$S_{BIX}(t) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} S(jw)K(jw)e^{jw t} dw$$

Подставив в него (19) получим

$$\begin{aligned} S_{BIX}(t) &= A \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} S(jw)S^*(jw)e^{jw t} e^{-jw t_0} dw = \\ &= A \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} S^2(w)e^{jw(t-t_0)} dw \end{aligned} \quad (28)$$

( $t=t_0$  – момент времени, когда сложение всех компонентов спектра выходного сигнала, по фазе, дает max выходной сигнал).

При  $t=t_0$  правая часть этого выражения переходит в энергию входного сигнала:

$$S_{BIX}(t_0) = A\mathcal{E} \quad (29)$$

где  $\mathcal{E}$  – энергия входного сигнала.

С другой стороны, из первой части (28), в которой фигурирует произведение  $S(jw)S^*(jw)e^{-jw t_0}$ , вытекает, что  $S_{BIX}(t)$  можно представить как свертку следующих двух функций времени:  $S(t)$  и  $S(t_0-t)$ . Таким образом, получаем

$$S_{BIX}(t) = A \oint_{-\infty}^{\infty} S(t-x)S(t_0-x)dx$$

Пологая  $t-x=y$ ,  $t_0-x=y-(t-t_0)$ , получаем

$$S_{BIX}(t) = A \oint_{-\infty}^{\infty} S(y)S[y-(t-t_0)]dy \quad (30)$$

где  $x$  и  $y$  имеют смысл времени на интервале, где  $S(t)$  и  $S(t_0-t)$  существуют одновременно.

Интеграл в правой части (30) является автокорреляционной функцией входного сигнала –  $B_S(t-t_0)$ .

Таким образом, приходим к важному выводу, что

$$S_{BIX}(t) = AB_S(t_0-t) \quad (31)$$

т.е., что сигнал на выходе согласованного фильтра с точностью до постоянного коэффициента  $A$  совпадает с автокорреляционной функцией входного сигнала.

Для составления функции  $S_{\text{ВЫХ}}(t)$  на заданной функции  $B_S(t)$  достаточно в последней  $t$  заменить на  $(t-t_0)$  и учесть коэффициент  $A$ . При  $t=t_0$ , т.е. при  $t=0$ , величина  $B_S(0)$  равна энергии сигнала. Следовательно, как и при спектральном рассмотрении, пиковое значение сигнала (сравнить с (29))

$$S_{\text{ВЫХ}}(t_0) = AB_S(0) = A\mathcal{E}$$

Рассмотрим теперь параметры и статистические характеристики шума на выходе согласованного фильтра. При действии белого шума закон распределения его плотности вероятности на выходе линейного фильтра остается таким же, как и на входе. Энергетический спектр шума на выходе фильтра равен

$$W_{\text{ВЫХ}}(w) = K^2(w)W_0$$

Следовательно, корреляционная функция шума на выходе согласовано фильтра

$$B_{\text{ВЫХ}}(t) = \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} W_{\text{ВЫХ}}(w) e^{j\omega t} d\omega = \frac{W_0}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} K^2(w) e^{j\omega t} d\omega$$

Подставляя  $K(w)=AS(w)$  и учитывая (28) и (31), в которых примем  $t-t_0=t$ , получаем

$$\begin{aligned} B_{\text{ВЫХ}}(t) &= A^2 W_0 \frac{1}{2\pi} \oint_{-\infty}^{\infty} S^2(w) e^{j\omega t} d\omega = A W_0 S_{\text{ВЫХ}}(t_0 + t) = \\ &= A W_0 A B_S(t) = A^2 W_0 B_S(t) \end{aligned} \quad (32)$$

Отсюда следует, что корреляционная функция шума на выходе согласованного фильтра по форме совпадает с корреляционной функцией входного сигнала (и, следовательно, с выходным сигналом).

Приравнивая  $t=0$ , находим дисперсию (среднюю мощность) шума на выходе

$$N = B_{\text{ВЫХ}}(0) = A^2 W_0 B_S(0) = A^2 W_0 \mathcal{E} \quad (33)$$

Составим отношение пикового значения сигнала  $S_{\text{ВЫХ}}(t_0)$  к среднеквадратическому значению шума -  $\sqrt{N}$ . В соответствии с формулами (29) и (33)

$$S_{\text{ВЫХ}}(t_0) / \sqrt{N} = A\mathcal{E} / A\sqrt{W_0 / \mathcal{E}} = \sqrt{\mathcal{E} / W_0} \quad (34)$$

Итак, при белом шуме отношение сигнал-шум на выходе фильтра, согласованного с сигналом, зависит только от энергии сигнала и энергетического спектра шума  $W_0$ . Из этого заключения следует, что при заданных энергии и ширине спектра сигналу можно придавать различную форму, выгодную для решения конкретной задачи. при этом амплитуда  $A_0$  и длительность сигнала  $T_C$  связаны очевидным соотношением

$$A_0^2 T_C = \text{const}$$

При измерении длительности сигнала следует обеспечить неизменной ширину его спектра. Это можно осуществить, введя внутриимпульсную модуляцию (частотную или амплитудную).

## 8. Основы цифровой обработки сигналов

### 8.1. Основные понятия

Под цифровой обработкой сигналов (ЦОС) понимают операции над дискретными во времени величинами (отсчетами сигналов). Дискретную величину, поступающую на вход устройства ЦОС в  $n$ -ый момент времени ( $n=0,1,2,\dots$ ), обозначим  $x(n)$ . Дискретную величину, получаемую на выходе устройства ЦОС в  $n$ -й момент времени, обозначим  $y(n)$ . Обычно входные величины поступают на устройство ЦОС и выдаются этим устройством с неизменным шагом  $\Delta$ . Тогда можно записать:

$$x(n)=x(n\Delta), y(n)=y(n\Delta).$$

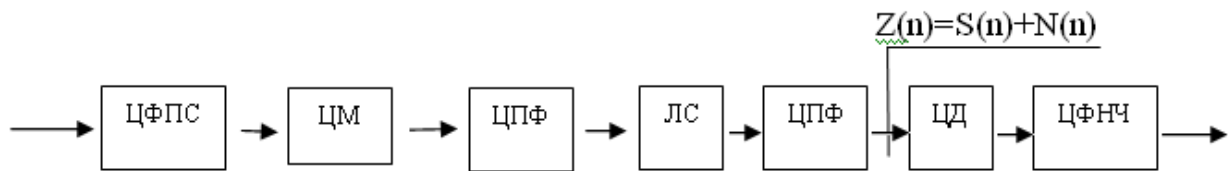
Чаще всего  $\Delta \leq 1/2F_v$  является шагом равномерной дискретизации непрерывного сигнала  $x(t)$ , поступающего на обработку.

Сигналы на входе и выходе современных ЦОС дискретны не только во времени, но и квантованы по уровню, т.е. являются цифровыми сигналами. Однако, в основном мы будем рассматривать работу ЦОС только с дискретными сигналами (так проще и нагляднее), а в конце этого раздела обсудим погрешности, возникающие в устройствах ЦОС из-за квантования дискретных сигналов по уровню.

ЦОС имеет ряд существенных преимуществ перед аналоговой обработкой сигналов:

- 1) Достигается значительно более высокая точность обработки сигналов по сложным алгоритмам;
- 2) Возможна гибкая оперативная перестройка алгоритмов обработки сигналов, обеспечивающая как создание многорежимных устройств, так и реализацию адаптивных (подстраивающихся) систем;
- 3) Достигается высокая технологичность изготовления устройств ЦОС, связанная с отсутствием необходимости настройки при изготовлении и регулировки в процессе эксплуатации;
- 4) Обеспечивается высокая степень совпадения и повторяемости характеристик реализованных устройств с расчетными характеристиками;
- 5) Существуют большие возможности автоматизации проектирования устройств;
- 6) Обеспечиваются высокостабильные эксплуатационные характеристики устройств ЦОС.

Структурно одноканальную систему передачи сообщений (как непрерывных, так и дискретных) с использованием устройств ЦОС на передаче и приеме можно представить следующим образом



Структурная схема передачи сообщений с использованием устройств ЦОС.

ЦФПС - цифровой формирователь первичного сигнала;

ЦМ - цифровой модулятор;

ЦПФ - цифровой полосовой фильтр;

ЦД - цифровой детектор (демодулятор);

ЦФНЧ - цифровой фильтр нижних частот;

ЛС - линия связи.

В системах передачи непрерывных сообщений (в том числе и цифровыми методами) помимо отмеченных на рисунке функций решаются и задачи цифрового компрессирования первичного сигнала на входе модулятора (сжатия динамического диапазона) и цифрового эспандирования (расширения динамического диапазона) сигналов на входе детектора.

Наиболее широкое применение нашли линейные устройства ЦОС, в которых сигналы входа и выхода связаны линейными соотношениями. Такими являются все фильтры в рассмотренной схеме, а также схемы ЦМ и ЦД, построенные на основе перемножения двух функций. Кроме того, практически все ЦФ являются стационарными устройствами (свойства не зависят от времени).

## 8.2. Спектр дискретного сигнала

Определим дискретный сигнал  $x_d(t)$  через совокупность отсчетов непрерывной функции  $x(t)$ :

$$x(k) = x(t = k\Delta) \quad (1)$$

Тогда сам дискретный сигнал можно записать в виде модели:

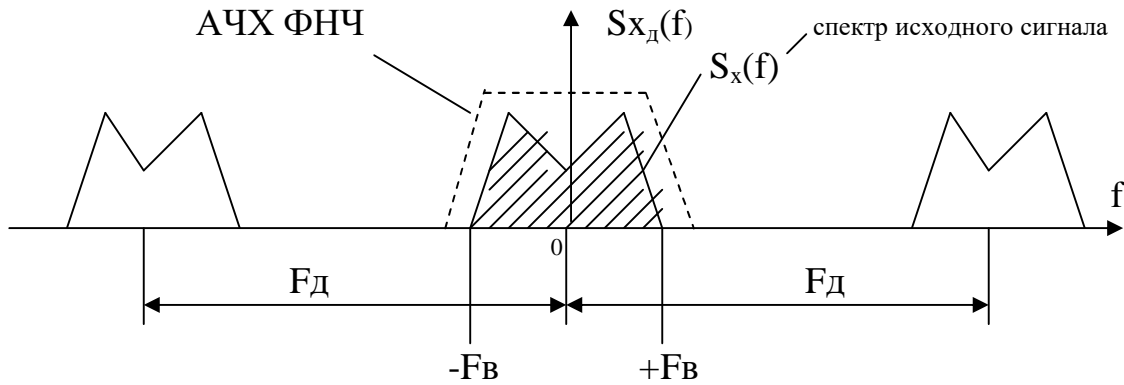
$$x_d(t) = x(t) f_n(t), \quad (2)$$

где  $f_n(t) = D \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kD)$  безразмерная периодическая (с периодом  $\Delta$ ) решетчатая функция.

Покажем, что дискретный сигнал (1) имеет спектр по Фурье вида:

$$\mathcal{F}_g(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathcal{F}_x(f - kF_d), \quad (3)$$

где  $\mathcal{F}_x(f)$  - спектр исходного непрерывного сигнала  $x(t)$ . Из (3) следует, что спектр дискретного сигнала повторяется с периодом частоты дискретизации  $F_d$  (см. рис.).



### Амплитудный спектр первичного дискретного сигнала

Из математики известно (задача Парсеваля), что спектр Фурье от произведения двух функций определяется сверткой спектров сомножителей где  $\dot{S}_n(f)$  -- спектр по Фурье периодической функции  $f_n(t)$  с периодом  $\Delta$ ,

$$\dot{S}_{x_d}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{S}_x(x) \dot{S}_n(f-x) dx \quad (4)$$

которую представили комплексным рядом Фурье:

$$f_n = D \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j2\pi \frac{kt}{D}}, \quad C_k = \frac{1}{D} \int_{-\frac{D}{2}}^{\frac{D}{2}} f(t) e^{-j2\pi \frac{kt}{D}} dt = \frac{1}{D}$$

(при интегрировании учтено фильтрующее свойство  $\delta$ -функции).

Спектральная плотность периодической функции

$$f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k e^{j2\pi \frac{kt}{D}}$$

определяется суммой  $\delta$ -функций:

$$\dot{S}_n(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \dot{a}_k \delta(f - kF_d), \quad F_d = \frac{1}{D} \quad (5)$$

С учетом (5) интегрирование (4) дает результат (3). Из спектра (3) можно без искажений восстановить спектр  $\dot{S}_x(f)$ , следовательно, и сам непрерывный сигнал  $x(t)$  только при условии, если отдельные копии спектра  $\dot{S}_x(f - kF_d)$  взаимно не пересекаются (см. предыдущий рис.). Это возможно, если  $F_d \geq 2F_B$  (или  $\Delta \leq 1/2F_B$ ). Восстановление осуществляют фильтром нижних частот, АЧХ которого показана на предыдущем рисунке пунктирной линией. Реализация такого фильтра тем проще, чем сильнее выполняется неравенство  $F_d \geq 2F_B$ .

Спектр дискретного сигнала можно определить не только по формуле (3), но и путем непосредственного применения прямого преобразования Фурье к функции (1). Это дает следующий результат:

Определим теперь спектр Фурье дискретного финитного

$$\dot{S}_{x_d}(f) = D \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-j2\pi f k D} \quad (6)$$

$$X_{\text{дф}}(t) = D \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{j2\pi k t / T}, \quad N = \frac{T}{D} \quad (7)$$

(непериодического) сигнала, определенного на интервале  $(0;T)$ . Такой финитный сигнал можно записать в виде:

Спектр сигнала (7) можно найти, если его периодически продолжить направо и налево с периодом  $T$ . Тогда получаем периодический сигнал  $X_{\text{дпер}}(t)$  совпадающий с  $X_{\text{дф}}(t)$  на интервале  $(0;T)$ , для которого комплексные амплитуды  $\dot{C}_n$  можно получить из (6) при  $\omega=2\pi n/T$  суммированием от  $k=0$  до  $k=N-1$  и с учетом сомножителя  $1/T$ :

$$\dot{C}_n = \frac{D}{T} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi n}{T} k D} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-j\frac{2\pi n k}{N}} \quad (8)$$

Формула (8) определяет коэффициенты дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Из нее следует, что при заданных  $N$  отсчетах  $x(k)$  существует  $N$  коэффициентов ДПФ ( $n=0,1,2,3,\dots,N-1$ ). Коэффициент  $\dot{C}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(k)$  определяет постоянную составляющую. При четном  $N$  из (8) следует для вещественных  $x(k)$ :

$$\dot{C}_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} (-1)^k x(k), \quad \dot{C}_{\frac{N}{2}+n} = \dot{C}_{\frac{N}{2}-n}^*, \quad n=1,2,\dots,\frac{N}{2}-1, \quad (9)$$

т.е. коэффициенты ДПФ, номера которых располагаются симметрично относительно  $N/2$ , образуют комплексно-сопряженные пары. Можно считать, что коэффициенты  $\dot{C}_{N/2}, \dot{C}_{N/2+2}, \dots, \dot{C}_{N-1}$  соответствуют отрицательным частотам. Число же амплитуд, образующих спектр ДПФ равно  $N/2$ . Это следует из теоремы отсчетов Котельникова при  $\Delta=1/2F_B$ . При таком условии спектр  $x_{\text{дпер}}(t)$  содержит  $F_B/(1/T)=T(2\Delta)=N/2$  амплитуд.

При заданных  $\dot{C}_n$  ( $n=0,1,2,3,\dots,N-1$ ) функцию  $x(k)$  можно определить с помощью обратного преобразования Фурье (ОДПФ), представляя периодическую функцию  $x_{\text{дпер}}(t)$  с периодом  $T$  рядом Фурье:

$$X_{\text{дпер}}(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{C}_n e^{j\frac{2\pi n t}{T}} \quad (10)$$

Положив в (10)  $t=kD$ , получаем ОДПФ:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \dot{C}_n e^{j\frac{2\pi n k D}{T}} \quad (11)$$

Как прямое, так и обратное преобразование Фурье линейны.

### 8.3.Алгоритм быстрого преобразования Фурье

При вычислении  $N$  коэффициентов ДПФ согласно (8), или ОДПФ, согласно (11), надо выполнить  $N^2$  достаточно трудоемких операций умножения. При больших массивах  $N$  (порядок  $10^3$  и выше) использование (8) и (11) в реальном масштабе времени затруднительно из-за ограниченного



быстродействия вычислительных устройств. Задача существенно упрощается с применением алгоритмов быстрого преобразования Фурье (БПФ), которые сводят обработку заданного массива данных к обработке массивов с меньшим числом членов и, тем самым, существенно уменьшается требуемое число операций умножения.

Сущность одного из алгоритмов БПФ для вычисления коэффициентов  $\dot{C}_n$  для массива вещественных данных  $\{x(1)\}$ , объема  $N=2^r$ , где  $r$  - целое число, состоит в следующем.

Разобьем исходный массив данных  $\{x(1)\}$  на две части с четными и нечетными номерами:

$$\{x^1_q(1) = x^1(2k)\} \text{ и } \{x^1_{неч}(1) = x^1(2k+1)\}, \text{ где } k=0,1,2,\dots,N-1$$

Согласно (8) коэффициенты  $N \cdot \dot{C}_n$  на первом этапе разбиения равны:

$$\begin{aligned} C_n N &= \sum_{k=0}^{N/2-1} [x^1(2k)e^{-j\frac{4\pi nk}{N}} + x^1(2k+1)e^{-j\frac{4\pi n(2k+1)}{N}}] = \\ &= \sum_{k=0}^{N/2-1} x^1_{чет}(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N/2}} + W_N^n \sum_{k=0}^{N/2-1} x^1_{неч}(k)e^{-j\frac{2\pi nk}{N/2}} = \\ &= \mathcal{E}_{n чет} + W_N^n \mathcal{E}_{n неч}, \quad n=0,1,2,\dots,\frac{N}{2}-1, \quad W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}} \end{aligned} \quad (12)$$

Из (12) следует, что последовательности коэффициентов  $\dot{C}_{n чет}$  и  $\dot{C}_{n неч}$  обладают свойством периодичности с периодом  $N/2$ :

$$\mathcal{E}_{n чет} = \mathcal{E}_{n+\frac{N}{2} чет}, \quad \mathcal{E}_{n неч} = \mathcal{E}_{n+\frac{N}{2} неч}, \quad n=0,1,2,\dots,\frac{N}{2}-1 \quad (13)$$

Кроме того, для  $n > N/2$  множитель  $W_N^n$  в (12) можно представить в виде:

$$W_N^{n+\frac{N}{2}} = e^{-j\pi} W_N^n = -W_N^n, \quad n=0,1,2,\dots,\frac{N}{2}-1 \quad (14)$$

С учетом (12), (13) и (14) для всех  $n=0,1,2,3,\dots,N-1$  можно записать:

$$\mathcal{E}_N N = \mathcal{E}_{n неч}^1 \pm W_N^n \mathcal{E}_{n чет}^1 \quad (15)$$

Причем знак "-" соответствует значениям  $n=N/2, N/2+1,\dots,N-1$ . Подсчитаем, сколько требуется операций умножения при вычислении всех значений  $\dot{C}_n N$  по алгоритму (15). Для вычисления всех  $\dot{C}_{n чет}^1$  по (12) требуется  $(N/2)^2$  умножений. Столько же умножения требуется для вычисления всех  $\dot{C}_{n неч}^1$ . Кроме того, потребуется  $N$  умножений  $\dot{C}_{n неч}^1$  на число  $\pm W_N^n$ . Следовательно, потребуется  $2(N/2)^2 + N$  умножений. При больших  $N$  требуемое число умножений равно  $N^2/2 = N \log_2 N$  (при  $N=4$ ), что в 2 раза меньше, чем по алгоритму (8).

Четные отсчеты исходной последовательности  $X^1_{чет}(k)$  (их всего  $N/2$ ) разобьем далее на втором этапе разбиения на четные и нечетные компоненты  $x''(2k)$  и  $x''(2k+1)$  (их число равно  $N/4$ ). ДПФ последних обозначим  $\dot{C}''_{n чет}$  и  $\dot{C}''_{n неч}$ . Тогда можно написать:

$$\mathcal{E}_{n неч}^1 = \mathcal{E}_{n неч}'' + N_{N/2}^n \mathcal{E}_{n чет}^1, \quad n=0,1,2,\dots,N-1 \quad (16)$$

Аналогичное разбиение выполняется над нечетными отсчетами исходной последовательности  $X^1_{\text{неч}}(k)$ . Для вычисления всех  $\hat{C}_n N$  согласно формулам типа (16) (по массиву данных  $X^{\text{чет}}(k)$  и  $X^{\text{неч}}(k)$ )

потребуется число умножений  $\frac{N}{2} \log_2 N + \frac{N}{2}$  »  $N \log_2 N$  (при  $N=8$ ).

Процесс разбиений можно продолжать  $r$  раз до тех пор, пока не получится последовательность из одного элемента, ДПФ которого совпадает с самим элементом. Далее надо собрать результаты отдельных разбиений для вычисления суммарных значений  $\hat{C}_n N$ . Анализ показывает, что число операций умножения, необходимых для вычисления БПФ, не больше, чем  $Nr = N \log_2 N$ , что при больших  $N$  существенно меньше, чем  $N^2$ . БПФ по рассматриваемому методу осуществляют в следующем порядке. Сначала для получения желательного при обработке сигнала порядка следования отсчетов  $x(k)$ ,  $k=0,1,2,\dots,N-1$ , выполняется двоично-инверсная перестановка исходной последовательности  $x(q)$ ,  $q=0,1,\dots,N-1$ . Для этого записывают порядковые номера элементов  $x(q)$  в двоичном коде и инвертируют порядок следования разрядов. Новый порядок следования элементов  $x(k)$  определяется номерами, получаемыми после инверсии разрядов.

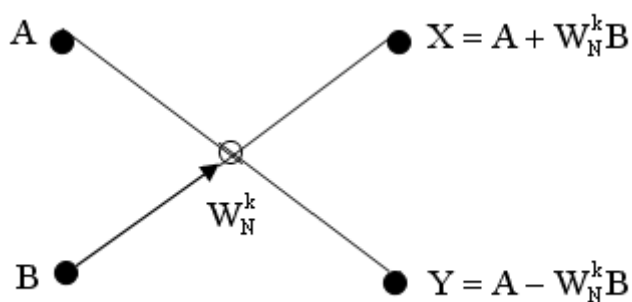
Пример для  $N=4$

$x(q)$			$x(k)$
0	00	00	0
1	01	10	2
2	10	01	1
3	11	11	3

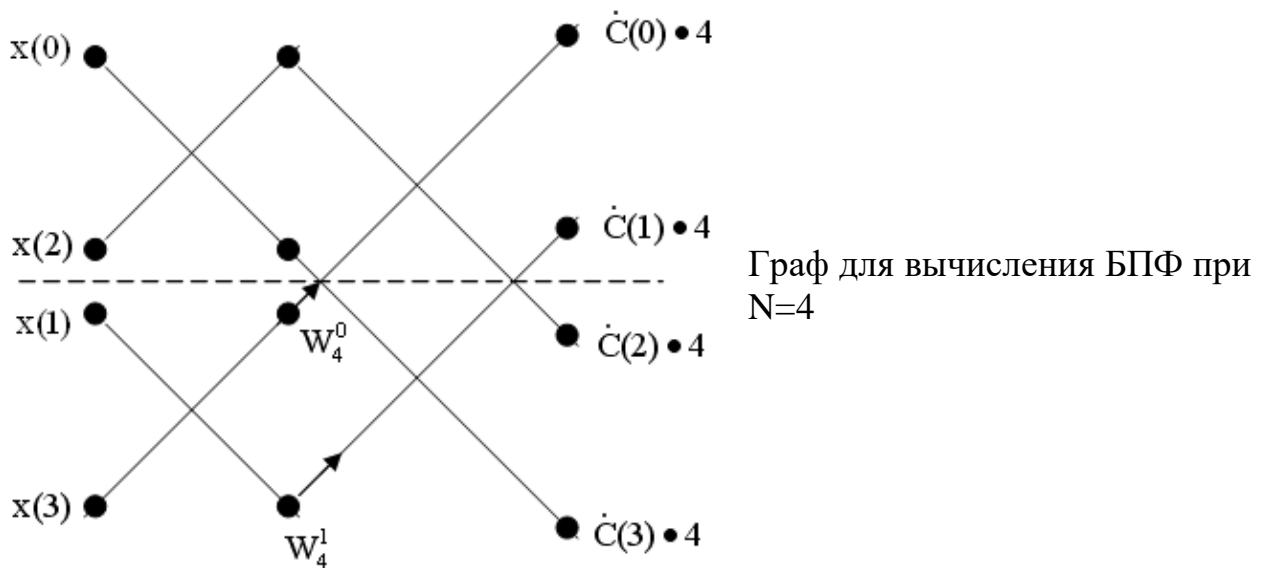
Новый порядок следования элементов следующий:  $x(0)$ ,  $x(2)$ ,  $x(1)$ ,  $x(3)$ . После этого поступают так: на первом этапе вычислений определяют 2-х точечные элементы ДПФ "новой" последовательности  $x(k)$ , объединяя попарно элементы этой последовательности; на втором этапе из 2-х точечных ДПФ получают 4-х точечные ДПФ, пользуясь основной операцией данного метода (об этом ниже); затем 4-х точечные ДПФ объединяются в 8-ми точечные и т.д.

Базовые операции показывают, как два входных числа  $A$  и  $B$  объединяются для получения двух выходных чисел  $X$  и  $Y$ . Для метода прореживания во времени базовая операция имеет вид:

- в графическом виде



Операция "бабочка", используемая при реализации алгоритма БПФ (стрелка означает умножение  $W_N^k$  на  $B$ ).



или в форме уравнений

$$\begin{aligned} X &= A + W_N^k B \\ Y &= A - W_N^k B \end{aligned} \quad (17)$$

При вычислении двухточечного ДПФ  $k=0$  и выходные числа  $X$  и  $Y$  определяются без операции умножения  $X=A+B$ ,  $Y=A-B$ .

Чтобы воспользоваться рассмотренной процедурой БДПФ для вычисления ОДПФ, запишем (11) в виде

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j \frac{2\pi kn}{N}} \quad (18)$$

\*) – комплексно-сопряженные числа.

Вводя массив данных  $x(n)$  (вместо  $x(n)$ ), можно найти сумму в (18) по изложенной выше методике БДПФ, а затем для нахождения  $x(k)$  найти комплексно-сопряженное значение полученного результата.

Существуют и другие методы вычисления БДПФ, т.е. другие методы группирования исходных данных  $x(k)$ .

#### 8.4. Временные и спектральные методы исследования линейных стационарных цифровых фильтров.

Подобно тому, как отклик аналоговой линейной стационарной системы  $y(t)$  на произвольное внешнее воздействие  $x(t)$  можно найти временным методом через импульсную характеристику системы  $g(t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) g(t - \tau) d\tau, \quad (19)$$

или спектральным методом через комплексный коэффициент  $G(w)$

передачи цепи, так и отклик линейного стационарного цифрового фильтра  $y(n)$  на произвольное внешнее воздействие  $x(n)$  можно найти через импульсную характеристику ЦФ  $g(n)$  или спектральным методом.

Выполнив в (19) дискретизацию по переменным  $t$  и  $t$ , положив  $t=kD$ ,  $t=mD$ , получаем цифровой аналог свертки (19):

$$y(m) = D \underset{k=-\infty}{\overset{\infty}{\mathbf{a}}} x(k)g(m-k) \quad (20)$$

где  $g(l)$ ,  $l=0,1,2,\dots,L$  – отсчеты импульсной характеристики ЦФ, т.е. отклика на единичный импульс  $(1,0,0,0,0,0,\dots)$ , поступающий на вход фильтра в момент времени  $t=0$ . Из условий реализуемости ЦФ надо принять

$$g(-1)=0, \quad l=1,2,\dots \quad (21)$$

Если входные отсчеты  $x(k)$  начинают поступать в момент  $t=0$ , то можно написать

$$y(m) = D \underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathbf{a}}} x(k)g(m-k) = D \underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathbf{a}}} g(k)x(m-k) \quad (22)$$

Из условия реализуемости ЦФ (21) следует, что суммирование в (22) фактически выполняется только при  $k \leq m$ :

$$y(m) = D \underset{k=0}{\overset{\infty}{\mathbf{a}}} x(k)g(m-k) \quad (23)$$

Если число входных отсчетов  $x(0), x(1), \dots, x(N-1)$  равно  $N$ , а число отсчетов импульсной характеристики ЦФ ( $g(0), g(1), \dots, g(L)$ ) равно  $(L+1)$ , то в (23)  $m$  принимает значения  $0, 1, 2, \dots, N_S-1$  ( $N_S=N+L$ ). Для нахождения одного значения  $y(m)$  в соответствии с (23) надо выполнить не более чем  $(L+1)$  операций умножения. Для нахождения всех значений  $y(m)$  надо выполнить примерно  $N_S (L+1)$  операций умножения.

Число операций можно существенно сократить, если использовать спектральный метод расчета ЦФ и методы БПФ. Чтобы это показать, напишем сначала дискретную свертку (23) в нормированном виде:

$$y(m) = \frac{1}{N_S} \underset{k=0}{\overset{N_S-1}{\mathbf{a}}} x(k)g(m-k) \quad (24)$$

Дополнив последовательность из  $N$  входных отсчетов  $x(k)$   $L$  нулями, представим  $x(k)$  через ОДПФ:

$$x(k) = \underset{n=0}{\overset{N_S-1}{\mathbf{a}}} \mathfrak{E}_{x,n} e^{j \frac{2\pi nk}{N_S}} \quad (25)$$

Дополнив последовательность из  $(Q+1)$  отсчетов импульсной характеристикой ЦФ  $(N+1)$  нулями, определим ОДПФ:

$$g(m-k) = \underset{l=0}{\overset{N_S-1}{\mathbf{a}}} \mathfrak{E}_{g,l} e^{j \frac{2\pi l(m-k)}{N_S}} \quad (26)$$

где  $\mathfrak{E}_{g,l}$  – коэффициенты ДПФ для импульсной характеристики ЦФ.

Подставляя (25) и (26) в (24), получаем:

$$y(m) = \frac{1}{N_S} \underset{n=0}{\overset{N_S-1}{\mathbf{a}}} \underset{l=0}{\overset{N_S-1}{\mathbf{a}}} \mathfrak{E}_{x,n} \mathfrak{E}_{g,l} e^{j \frac{2\pi qm}{N_S}} \underset{k=0}{\overset{N_S-1}{\mathbf{a}}} e^{j \frac{2\pi k(n-q)}{N_S}} \quad (27)$$

Справедливо условие

Равенство суммы  $N$  при  $n=1$  очевидно. Равенство же суммы нулю при  $n \neq 1$  объясняется тем, что в этом случае имеем сумму единичных векторов,

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{j \frac{2\pi k(n-1)}{N}} = \begin{cases} N, & \text{при } n=1 \\ 0, & \text{при } n \neq 1 \end{cases} \quad (28)$$

образующих в совокупности правильный  $N$ -угольник. Сумма эта, естественно, равна нулю.

С учетом (28) формула (27) принимает вид

$$y(m) = \sum_{n=0}^{N_g-1} \mathfrak{C}_{x,n} \mathfrak{C}_{d,n} e^{j \frac{2\pi m n}{N_s}} \quad (29)$$

Уравнение (29) определяет ОДПФ выходных отсчетов ЦФ, если ДПФ над этими отсчетами определяется произведением ДПФ входных отсчетов и отсчетов импульсной характеристики фильтра:

$$\mathfrak{C}_{y,n} = \mathfrak{C}_{x,n} \mathfrak{C}_{g,n} \quad (30)$$

Если методами БПФ найти спектральные компоненты  $\mathfrak{C}_{x,n}$  и  $\mathfrak{C}_{g,n}$  а затем и ОДПФ от их произведения  $\mathfrak{C}_{y,n} = \mathfrak{C}_{x,n} \mathfrak{C}_{g,n}$ , то можно при больших  $N$  существенно экономить в вычислительных операциях по сравнению с непосредственными вычислениями  $y(m)$  по формуле дискретной свертки.

## 8.5. Использование Z-преобразования в теории стационарных линейных цифровых фильтров.

Это преобразование можно получить из преобразования Лапласа или Фурье для дискретного сигнала  $x_g(t)$

Определим одностороннее преобразование Лапласа (для сигналов, определенных при  $t \geq 0$  для дискретного сигнала вида (1)):

$$F_{X_g}(p) = \int_0^{\infty} x_g(t) e^{-pt} dt = D \sum_{k=0}^{\infty} x(k) e^{-pkD} \quad (31)$$

При  $p = j\omega$  из (31) следует преобразование Фурье для дискретного сигнала.

Если обозначить:

$$z = e^{pD} \quad (32)$$

то преобразование Лапласа (31) переходит в Z-преобразование дискретного сигнала  $X_g(t)$ :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad (33)$$

Очевидно, что из преобразования Фурье дискретного сигнала  $X_g(t)$  при следует также Z-преобразование  $X(z)$ .

$$z = e^{-j\omega D} \quad (34)$$

Справедливо и обратное утверждение: из  $Z$ -преобразования  $X(z)$  дискретного сигнала (33) при  $z = e^{pD}$  следует его преобразование Лапласа. (Или из  $X(z)$  при  $z = e^{j\omega D}$  следует преобразование Фурье сигнала).

Если дискретный сигнал  $X_g(t)$  определен и при  $t < 0$ , то вместо (33) можно ввести более общее преобразование для такого сигнала:

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) e^{-k} \quad (35)$$

Следует оговорить сходимость  $X(z)$  при неограниченном числе слагаемых в (33) или (35). Отсчеты  $x(k)$  всегда удовлетворяют условию  $|x(k)| < CR^k$ ,  $k \geq 0$ ,  $C > 0$  и  $R > 0$  постоянные вещественные числа. Тогда (33) сходится при всех  $Z$ , для которых  $|z| > R$  (т.е. в кольцевой области с радиусом сходимости  $R$ ). В области сходимости  $X(z)$  представляет собой аналитическую функцию переменной  $z$ , не имеющую в этой области ни полюсов, ни существенно особых точек.

Для нахождения  $x(k)$  по  $X(z)$  (т.е. обратного  $Z$ -преобразования) умножим левую и правую части (33) на  $Z^{n-1}$

$$X(z)Z^{n-1} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) z^{n-1-k} \quad (36)$$

Возьмем от левой и правой частей (36) интеграл по  $z$  по замкнутому контуру в области аналитичности, охватывающей все полюсы функции  $X(z)z^{n-1}$ . Получим следующий результат:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz \quad (37)$$

Этот результат следует из теоремы Коши при интегрировании функции комплексного переменного  $z$ :

$$\oint z^n dz = \begin{cases} j 2\pi, & n = -1 \\ 0, & n \neq -1 \end{cases} \quad (38)$$

Наиболее важное свойство  $Z$ -преобразования связано со сдвигом сигнала во времени:

$$Y(z) = Z^{-1}X(z), \text{ если } y(k) = x(k-1) \quad (39)$$

Таким образом,  $Z$ -преобразование дискретного сигнала  $y(t)$ , у которого все отсчеты смещены на один такт (в сторону запаздывания) относительно дискретного сигнала  $X_g(t)$ , равно произведению  $z^{-1}$  на  $X(z)$ . Можно сказать, что  $z^{-1}$  является оператором сдвига на один такт в сторону запаздывания. Для доказательства (39) запишем  $Z$ -преобразование последовательности  $\{y(k)=x(k-1)\}$ :

Вводя переменную  $k-1=n$ , из (40) получим (39). Очевидно, если  $y(k)=x(k-n)$ , то  $Y(z)=z^{-1}X(z)$ .

$$Y(z) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k-1) z^{-1} \quad (40)$$

Рассмотрим дискретную свертку конечной протяженности  $1$ :

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^q x(k)g(1-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k)x(k-1) \quad (41)$$

Найдем Z-преобразование этой свертки:

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)g(1-k)z^{-l} = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} g(1-k)z^{-(1-k)} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(n)z^{-n} = X(z)G(z) \end{aligned} \quad (42)$$

Таким образом, свертка двух дискретных сигналов соответствует произведению их Z-преобразований.

Покажем, что импульсная характеристика ЦФ  $\{g(0), g(1)\dots g(1)\}$  является его откликом на единичный импульс  $(1,0,0,0,\dots)$ . Действительно, при воздействии единичного импульса формула (41) принимает вид:

$$y(1)=g(1), 1=0,1,2,\dots \quad (43)$$

Если импульсная характеристика ЦФ финитна, то

$$y(1)=0 \text{ при } 1=Q+1, \quad (44)$$

где  $(L+1)$ - число тактовых отрезков на интервале финитности.

Рассмотрим прохождение через линейный ЦФ гармонической последовательности вида  $x(t)=e^{j(\omega t + j)}$  или в дискретном виде:

$$x(k)=e^{j(\omega k D + j)} \quad (45)$$

Согласно формуле свертки (41) с учетом (45) находим выходной сигнал:

$$y(1) = e^{j} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{j\omega k D} g(1-k) = e^{j(\omega Q D + j)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(1-k) e^{-j\omega(1-k)D}$$

Введем над знаком суммы новый индекс суммирования  $q-k=n$  и учтем, что из соображений реализуемости  $g(n)=0$  при  $n<0$ . Тогда:

$$y(1) = e^{j(\omega Q D + j)} K_{цф}(f), \quad (46)$$

где

$$K_{цф}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)e^{-j\omega n D} \quad (47)$$

- комплексная передаточная характеристика ЦФ. Импульсная характеристика ЦФ в реальном масштабе времени будет иметь вид:

$$g_{цф}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)s(t - kD) \quad (48)$$

причем  $K_{цф}(f)$  является преобразованием Фурье от дискретного сигнала вида (48).

Как следует из (47),  $K_{цф}(f)$  является периодической функцией частоты дискретизации  $F_g=1/\Delta$  (как и спектр дискретного сигнала).

Если в (47) ввести переменную  $z=e^{j\omega D}$ , то получим Z-преобразование импульсной характеристики ЦФ:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k)z^{-k} \quad (49)$$

$H(z)$  называют системной функцией стационарного линейного ЦФ.

Из (42) при замене  $G(z)$  на  $H(z)$  видно, что системная функция ЦФ определяется как отношение  $Z$ -преобразования выходного сигнала фильтра к  $Z$ -преобразованию входного сигнала:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (50)$$

Если в системной функции ЦФ положить  $z = e^{j\omega D}$ , получим частотную характеристику ЦФ

$$K_{\text{цф}}(f) = H(z = e^{j\omega D}) \quad (51)$$

Таким образом, применение  $Z$ -преобразований позволяет проводить анализ цифровых фильтров теми же методами, что и анализ аналоговых линейных цепей.

## 8.6. Основы реализации цифровых фильтров.

В общем случае в линейном стационарном цифровом фильтре  $k$ -й выходной отсчет  $y(k)$  (в момент времени  $t=k\Delta$ ) линейно зависит от  $k$ -го входного отсчета  $x(k)$  и некоторого количества предшествующих отсчетов  $x(1)$  ( $1 < k$ ), а также от некоторого количества выходных отсчетов  $y(1)$  ( $1 < k$ ):

$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_Q x(k-Q) + b_1 y(k-1) + \dots + b_M y(k-M) \quad (52)$$

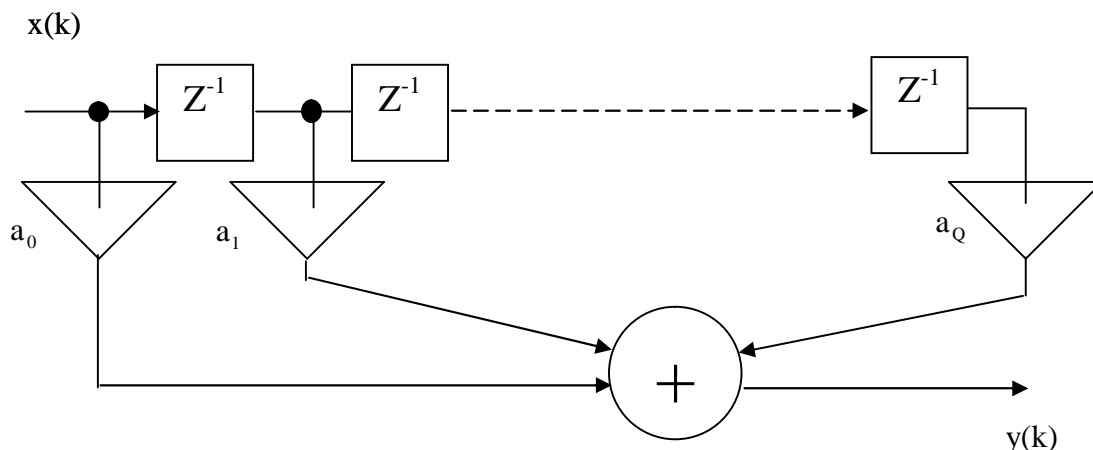
Числа  $L$  и  $M$  в разностном уравнении (52) называют соответственно относительной памятью ЦФ по входу и выходу. ЦФ с памятью по входу называются рекурсивным, а без такой памяти нерекурсивными.

Алгоритмы работы различных ЦФ отличаются параметрами  $Q$  и  $M$  и набором коэффициентов  $\{a_i\}$  и  $\{b_i\}$ . Рассмотрим сначала реализацию нерекурсивных ЦФ, когда все  $b_i=0$  (т.е.  $M=0$ ).

В этом случае разностное уравнение (52) принимает вид:

$$y(k) = a_0 x(k) + a_1 x(k-1) + \dots + a_Q x(k-Q) \quad (53)$$

Структурная схема ЦФ, реализующая алгоритм (53) приведена на следующем рисунке:





## Структурная схема построения нерекурсивного (трансверсального) ЦФ

Основными элементами ЦФ являются блоки задержки отсчетных значений на один тактовый интервал (условно обозначены символом  $z^{-1}$ ), а также масштабные блоки  $a_q$  (усилители). Сигналы с последних собираются в сумматор, образуя входной отсчет. Посредством разностного уравнения (53) можно построить лишь ЦФ с финитной (конечной) импульсной характеристикой  $\{g(0), g(1) \dots g(Q)\}$ . Если на вход схемы трансверсального типа подать единичный импульс  $(1, 0, 0, 0, \dots)$ , то по определению отклик ЦФ есть его импульсная характеристика  $g(t)$ . Это возможно лишь при условии, что в трансверсальном ЦФ отсчеты импульсной характеристики  $g(q)$  совпадают с коэффициентами  $a_\ell$ ,  $\ell=0, 1, 2, \dots, Q$ .

Взяв Z-преобразование от левой и правой частей (53) получаем:

$$Y(z) = X(z)[a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_Q z^{-Q}]$$

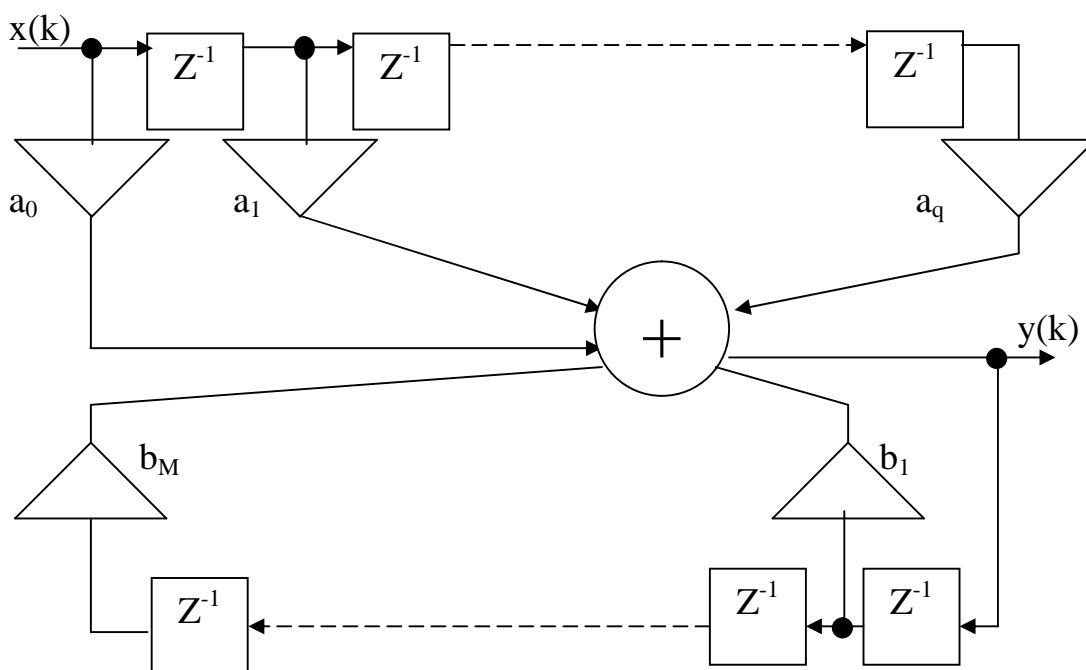
Тогда системная функция трансверсального фильтра будет иметь вид:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sum_{k=0}^Q a_k z^{-k} = \frac{a_0 z^Q + a_1 z^{Q-1} + \dots + a_Q}{z^Q} \quad (54)$$

Равенство (54) определяет дробно-рациональную функцию от  $Z$ . Она имеет  $L$ -кратный полюс при  $Z=0$  и  $L$  нулей, определяемых корнями полинома числителя формулы (54). Последние зависят от отсчетов импульсной характеристики ЦФ  $g(\ell)=a_\ell$ . Частотная характеристика трансверсального цифрового фильтра согласно (54) и (51) имеет вид:

$$K_{\text{цф}}(f) = \sum_{k=0}^Q a_k e^{-j\omega k D} \quad (55)$$

Рассмотрим теперь работу ЦФ, работающего по общему алгоритму (52).



## Структурная схема построения рекурсивного ЦФ.

Взяв Z-преобразование от левой и правой частей (52) получим:

$$Y(z) = X(z)(a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_Q z^{-Q}) + \\ + Y(z)(b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_M z^{-M})$$

Отсюда следует выражение для системной функции цифрового рекурсивного фильтра:

$$H(z) = \frac{\prod_{k=0}^L a_k z^{-k}}{1 - \prod_{k=1}^M b_k z^{-k}} = \frac{a_0 z^{M-L} (z^Q + \frac{a_1}{a_0} + \dots + \frac{a_Q}{a_0})}{z^M - b_1 z^{M-1} - \dots - b_M} \quad (56)$$

В реализуемых цифровых фильтрах обычно  $M > Q$ . При таких условиях дробно-рациональная функция (56) имеет на Z-плоскости: L нулей, определяемых корнями  $Z_{0i}$  уравнения:

$$z^L + \frac{a_1}{a_0} z^{L-1} + \dots + \frac{a_{L-1}}{a_0} + \frac{a_L}{a_0} = 0;$$

M-L-кратный ноль в точке  $Z=0$ ;

M полюсов, определяемых корнями  $Z_{ni}$  уравнения

$$z^M - b_1 z^{M-1} - \dots - b_{M-1} z - b_M = 0 \quad (57)$$

Если коэффициенты  $b_\ell$  ( $\ell=1, M$ ) вещественны, то корни уравнения (57) (т.е. полюса  $H(z)$ ) лежат либо на вещественной оси, либо образуют комплексно сопряженные пары.

Системной функции (56) соответствует частотная характеристика ЦФ:

$$K_{\text{цф}} = \frac{a_0 e^{j\omega D(M-L)} \prod_{i=1}^Q R_{0,i}}{\prod_{i=1}^M R_{0,i}}$$

где  $R_{0,i} = e^{j\omega D - z_{0,i}}$ ,  $R_{n,i} = e^{j\omega D - z_{n,i}}$

АЧХ фильтра (в децибелах) определяется формулой:

$$K_{\text{дб}}(\omega) = 20 \lg a_0 + \sum_{i=1}^Q \lg |R_{0,i}| - \sum_{i=1}^M \lg |R_{n,i}|$$

За счет наличия обратной связи рекурсивные ЦФ характеризуются нефинитной (длящейся неограниченно) импульсной характеристикой (откликом на единичный импульс  $(1, 0, 0, 0, \dots)$ ).

Система с обратной связью нуждается в исследовании на устойчивость. ЦФ устойчив, если  $|y_n|$  при  $n \rightarrow \infty$  не превышает некоторого положительного числа A, независимо от выбора начальных условий в схеме. Чтобы исследовать устойчивость схемы, надо исследовать поведение свободных колебаний, т.е. уравнение (52) при отсутствии внешнего воздействия:

$$y(k) - b_1 y(k-1) - b_2 y(k-2) - \dots - b_M y(k-M) = 0 \quad (58)$$

Известно, что отдельное свободное колебание в линейной стационарной системе определяется выражением. При  $t=k\Delta$ , имеем  $(e^{p^*t})^k$ . Обозначив  $e^{p^*t} = l$  решение уравнения (58) можно искать в виде:

$$y(k) = l^k \quad (59)$$

Подставляя (59) в (58) получаем характеристическое уравнение, определяющее  $\lambda$ :

$$l^M - b_1 l^{M-1} - \dots - b_M = 0 \quad (60)$$

Уравнение (60) совпадает с уравнением (57), которому удовлетворяют полюсы системной функции рекурсивного ЦФ (классический алгебраический критерий устойчивости Раунса-Гурвица).

При найденных корнях уравнения (60) или (57)  $\lambda_k = z_k$ ,  $k=1, M$ , общее решение уравнения (58) можно представить в виде:

$$y(k) = A_1 z_1^k + A_2 z_2^k + \dots + A_M z_M^k \quad (61)$$

где ограниченные коэффициенты  $A_1, A_2, \dots, A_M$  определяются начальными условиями.

Для момента времен с номером  $(k+1)$  из (61) следует:

$$y(k+1) = A_1 z_1^{k+1} + A_2 z_2^{k+1} + \dots + A_M z_M^{k+1} \quad (62)$$

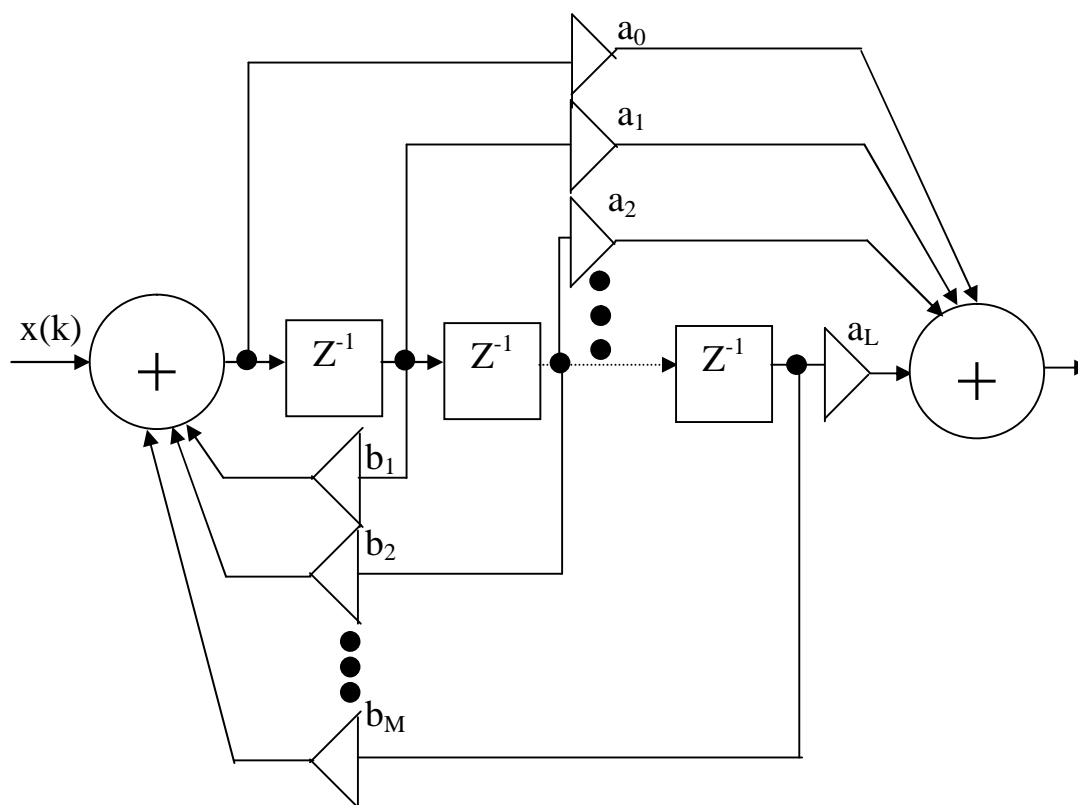
Если все полюса системной функции (56) удовлетворяют условию

$$|z_k| < 1, k = \overline{1, M}, \quad (63)$$

т.е. они лежат внутри единичного круга с центром в точке  $z=0$ , то на основании (61) и (62) можно прийти к заключению, что все свободные колебания во времени определяются членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии и фильтр будет устойчивым.

Недостатком рассмотренной схемы рекурсивного ЦФ является наличие отдельных элементов задержки для входных и выходных отсчетов.

Это недостаток устранен в так называемой канонической схеме рекурсивного ЦФ, использующего общие элементы задержки для входных и выходных отсчетов, при  $M=L$ .



### Каноническая схема реализации рекурсивного ЦФ

Каноническая схема идентична ранее рассмотренной схеме рекурсивного ЦФ. Чтобы это доказать, определим системную функцию ЦФ по канонической схеме. Обозначим значения дискретного отсчета в  $k$ -й момент времени на выходе первого сумматора через  $W(k)$ . Согласно схеме, очевидна справедливость уравнения

$$W(k) = x(k) + b_1 W(k-1) + b_2 W(k-2) + \dots + b_M W(k-M) \quad (64)$$

Дискретный сигнал на выходе второго сумматора в  $k$ -й момент времени

$$y(k) = a_0 W(k) + a_1 W(k-1) + \dots + a_Q W(k-Q) \quad (65)$$

Выполним  $Z$ -преобразование над правой и левой частями (64-65). Получим:

$$W(z)[1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - \dots - b_M z^{-M}] \quad (66)$$

$$Y(z) = W(z)[a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_Q z^{-Q}] \quad (67)$$

Приравняв значения  $W(z)$  из (66) и (67), имеем

$$\frac{X(z)}{1 - b_1 z^{-1} - \dots - b_M z^{-M}} = \frac{Y(z)}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_Q z^{-Q}}$$

Полученный результат не отличается от (56), что доказывает идентичность полной и канонической схем рекурсивного ЦФ.

## 8.7. Синтез цифровых фильтров.

Большое практическое значение имеют методы синтеза ЦФ с требуемым видом импульсной или частотной характеристик ЦФ. Рассмотрим некоторые приемы синтеза ЦФ по заданным характеристикам их аналоговых прототипов.

### 8.7.1. Синтез по заданной импульсной характеристики аналогового прототипа $g(t)$ .

ЦФ строится с импульсной характеристикой, которая является результатом дискретизации  $g(t)$ , т.е. ее  $k$ -й отсчет  $g(k) = g(k\Delta)$ . Если в импульсной характеристике ЦФ ограничится конечным числом слагаемых, получаем реализацию в виде трансверсального фильтра. При неограниченном числе компонент  $g(k)$  следует реализация в виде рекурсивного фильтра.

### 8.7.2. Синтез ЦФ по заданной частотной характеристике $\dot{K}(\omega)$ (или операторного коэффициента передачи $K(p)$ ).

Принципиально нельзя создать ЦФ, частотная характеристики которого  $\dot{K}_{\text{цф}}(\omega)$  повторяла бы частотную характеристику аналогового прототипа  $\dot{K}(\omega_a)$ , т.к.  $\dot{K}_{\text{цф}}(\omega)$  является периодической функцией частоты дискретизации  $\omega_g$ . Однако, можно потребовать, чтобы весь интервал частот  $\omega_a$ , характеризующий аналоговую цепь, был преобразован в отрезок частот  $\omega_{\text{ц}}$  ЦФ, на котором сохраняется форма характеристики  $\dot{K}(\omega_a)$ , причем

$$-\frac{\omega_g}{2} < \omega_{\text{ц}} < \frac{\omega_g}{2}$$

Если для перехода от  $p$ -плоскости (отображающей аналоговый прототип) к  $z$ -плоскости (отображающей цифровой фильтр) воспользоваться соотношением

$$z = e^{pD} \text{ или } p = \frac{1}{D} \ln z, \quad (69)$$

то формально мы от частотной характеристики аналогового эквивалента переходим к системной функции ЦФ. Однако, если  $p = \frac{1}{D} \ln z$  подставить в выражения для передаточной функции аналогового прототипа  $\dot{K}(p)$ , которая для цепей с сосредоточенными параметрами представляет собой отношение двух полиномов от  $P$  (дробно-рациональную функцию), получим физически нереализуемую системную функцию ЦФ, т.к. она не выражается отношением двух полиномов от  $z$ .

Надо найти такое преобразование  $P$  в  $Z$ , которое привело бы к реализуемому фильтру, но вместе с тем сохраняло бы основное свойство

преобразование (69): т.е. переводило бы точки мнимой оси на плоскости Р (точки  $j\omega$ ) в точки единичной окружности в  $z$ -плоскости.

Для синтеза ЦФ получило широкое распространение билинейное преобразование:

$$p = \frac{2z - 1}{Dz + 1} \quad (70)$$

Для выяснения сущности преобразования (70) положим  $z = e^{j\omega D}$ , т.е. комплексно-значные точки  $z$  лежат на единичной окружности и характеризуются аргументом (угловым сдвигом)  $\omega D$ . Тогда правая часть (70) принимает вид:

$$\frac{2z - 1}{Dz + 1} = - \frac{2 \frac{e^{j\omega D} - 1}{j\omega D} - j\sin(\omega D)}{D \frac{e^{j\omega D} - 1}{j\omega D} + j\sin(\omega D)} \quad (71)$$

Воспользовавшись формулами  $1 - \cos a = 2 \sin^2 \frac{a}{2}$ ,  $1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2}$ , (71) можно представить так:

$$\frac{2z - 1}{Dz + 1} = \frac{2}{D} \frac{e^{j\omega D} - 1}{e^{j\omega D} + 1} = j \frac{2}{D} \frac{e^{j\omega D} - 1}{e^{j\omega D} + 1}$$

Последнему соотношению, согласно (70) соответствует мнимая аналоговая часть вида  $j\omega_a$ , следовательно,

$$\omega_a = \frac{2}{D} \frac{e^{j\omega D} - 1}{e^{j\omega D} + 1} \quad (72)$$

При выполнении неравенства

$$\omega D \ll 1 \quad (73)$$

следует, что:

$$\omega_a \gg \omega D \quad (74)$$

В более общем случае надо учесть изменение масштаба по оси частот ЦФ.

## 8.8. Учет погрешности цифровой фильтрации из-за квантования сигнала по уровням.

Появление быстродействующих многоразрядных процессоров цифровой обработки сигналов самых различных типов сделало возможным производить цифровую обработку сигналов не только речи и вещания, но и телевидения. Однако, даже при такой совершенной технике необходимо учитывать погрешности работы ЦФ, обусловленную квантованием уровней сигналов.

Пусть  $x_{\max}$  и  $x_{\min}$  – наибольшее и наименьшее значение уровня сигнала на выходе аналого-цифрового преобразователя (АЦП). Если для квантования сигналов используется  $Q$  уровней, то при равномерном квантовании шаг квантования определяется соотношением

$$D_x = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{Q}$$

Квантованные отсчеты  $x_{\text{кв}}(k)$  описывают мгновенные значения аналогового дискретного сигнала  $x(k)$  с определенной погрешностью (с шумом квантования):  $\varepsilon(k) = x_{\text{кв}}(k) - x(k)$ . Эта погрешность уменьшается (по модулю) с уменьшением  $\Delta x$ . Будем считать, что квантователь работает по следующим правилам: в качестве дискретного принимается уровень, ближайший к истинному. Если действительный входной уровень  $x(k)$  находится в середине между дискретными номерами  $q$  и  $(q+1)$  – выбирается любой из них. При оговоренных условиях погрешность  $\varepsilon_{\text{вх}}(k)$  лежит в пределах

$$-\frac{\Delta x}{2} < e_{\text{вх}} < \frac{\Delta x}{2}$$

Чаще всего считается, что случайная погрешность  $E_{\text{вх}}$  (при различных  $k$ ) равномерно распределена на отрезке  $-\frac{\Delta x}{2}, \frac{\Delta x}{2}$ . Тогда

ее математическое ожидание (МО) равно нулю, а дисперсия

$$s_{\text{вх}}^2 = \overline{E_{\text{вх}}^2} = \frac{\Delta x^2}{12}$$

Определим погрешность работы линейного стационарного фильтра, обусловленную шумом квантования  $\varepsilon_{\text{вх}}(k)$ . Дискретный входной отсчет ЦФ, обусловленный шумом квантования  $\varepsilon_{\text{вх}}(k)$ , согласно (41) равен

$$e_{\text{вых}}(q) = \sum_{k=0}^{\infty} g(k) e_{\text{вх}}(q - k)$$

Математическое ожидание выходного шума  $\overline{E_{\text{вых}}} = 0$ . Для нахождения дисперсии выходного шума  $d_{\text{вых}}^{2e}$  предположим, что отдельные отсчеты входного шума  $E_{\text{вх}}(k)$  – независимые случайные величины с

равномерным распределением и дисперсией  $s_{\text{вх}}^2(k) = \frac{\Delta x^2}{12}$ . Тогда

$$s_{\text{вых}}^2 = \frac{\Delta x^2}{12} \sum_{k=0}^{\infty} g^2(k)$$

Выходной шум ЦФ, обусловленный квантованием сигнала, тем меньше, чем быстрее убывают отсчеты импульсной характеристики фильтра. Относительную погрешность ЦФ, обусловленную шумом квантования, можно определить так

$$d(k) = \frac{s_{\text{вых}}}{|y(k)|} = \frac{\Delta x}{\sqrt{12} y^2(k)} \sqrt{\sum_{k=0}^{\infty} g_k^2} \quad (75)$$

Оценим влияние шума квантования на работу цифрового перемножителя. Из-за шума квантования квантованные отсчеты входного и опорного сигналов можно записать в виде

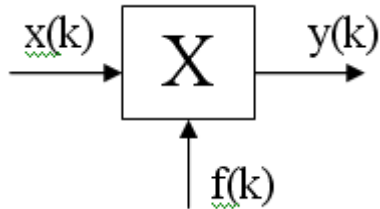


Схема цифрового  
перемножителя

Тогда

$$x_{\kappa\theta} = x(k) + e_x(k), \quad f_{\kappa\theta}(k) = f(K) + e_f(k).$$

$$f_{\kappa\theta}(K) \cdot x_{\kappa\theta}(K) = x(K)f(K) + x(K)e_f(K) + f(K)e_x(K) + e_x(K)e_f(K)$$

Ошибка цифрового перемножителя из-за шума квантования будет такой

$$E_{\text{вых}}(k) = x(k)E_f(k) + f(k)E_x(k) + E_x(k)E_f(k)$$

При сделанных ранее предположениях о шуме квантования математическое ожидание  $\overline{E_{\text{вых}}^2}(k)$ . Предполагая шумы квантования сигналов  $x(t)$  и  $f(t)$  независимыми стационарными случайными процессами, получаем для дисперсии выходного шума перемножителя следующее выражение

$$s_{\text{пер}}^2 = \overline{E_{\text{вых}}^2}(k) = x^2(k)\overline{E_f^2} + f^2(k)\overline{E_x^2}E_f^2$$

Если сигналы  $x(t)$  и  $f(t)$  квантуются с одинаковым шагом  $D_x = D_f = p$ , то

$$s_{\text{пер}}^2 = \frac{p^2}{12} [x^2(k) + f^2(k)] + \frac{p^2}{12(x^2(k) + f^2(k))}$$

Относительная погрешность работы цифрового перемножителя, обусловленная шумом квантования, будет такой

$$d_{\text{пер}} = \frac{s_{\text{пер}}}{x(k)f(k)} = \frac{1}{12} \frac{p^2}{x^2(k)f^2(k)} + \frac{p^2}{12(x^2(k) + f^2(k))} \cdot \frac{1}{x(k)f(k)}$$

## 8.9. Выводы.

1. Устройства ЦОС обладают рядом преимуществ перед устройствами обработки сигналов в непрерывном времени и широко применяются на практике в системах передачи как дискретных, так и непрерывных сообщений.
2. Наиболее широко применяются в системах связи линейные стационарные фильтры и перемножители.
3. Спектр Фурье дискретного сигнала является периодической функцией частоты дискретизации.
4. Линейчатый спектр дискретного (периодического) сигнала с числом отсчетов  $N$  определяется дискретным преобразованием Фурье (ДПФ). Число компонент такого спектра  $S_n$  равно  $N$ , а число амплитуд –  $N/2$ . По



спектральным компонентам  $\hat{S}_n$  дискретные отсчеты  $x(k)$  определяются через ОДПФ.

5. Существует методы быстрого преобразования Фурье, позволяющие существенно сократить число операций, выполняемых при расчете ЦФ спектральными методами.

6. При анализе и синтезе ЦФ широко используется

Z-преобразование для получения спектральных характеристик входного и выходного сигналов, и самого цифрового фильтра (его системной функции  $H(z)$ ). Обратным Z-преобразованием определяются временные характеристики входных и выходных сигналов, а также ЦФ.

7. Частотный коэффициент передачи ЦФ определяется системной функцией фильтра при  $z=e^{j\omega D}$ .

8. Линейные стационарные цифровые фильтры с финитной импульсной характеристикой реализуются трансверсальной схемой, а с неограниченной импульсной характеристикой – рекурсивной схемой (с обратной связью с выхода на вход).

9. Рекурсивные цифровые фильтры устойчивы, если все корни полинома знаменателя системной функции  $H(z)$  лежат внутри единичного круга с центром в начале координат.

10. ЦФ часто строятся по аналоговому эквиваленту. Находят применение методы синтеза ЦФ по заданной импульсной характеристике аналогового эквивалента, по заданному дифференциальному уравнению аналогового эквивалента, по заданной частотной характеристике аналогового эквивалента.

11. Выходной шум ЦФ, обусловленный квантованием, тем меньше, чем быстрее убывают отсчеты импульсной характеристики.

12. Выходной шум цифрового перемножителя зависит как от значений отсчетов перемножаемых сигналов, так и от их цифровых компонент.