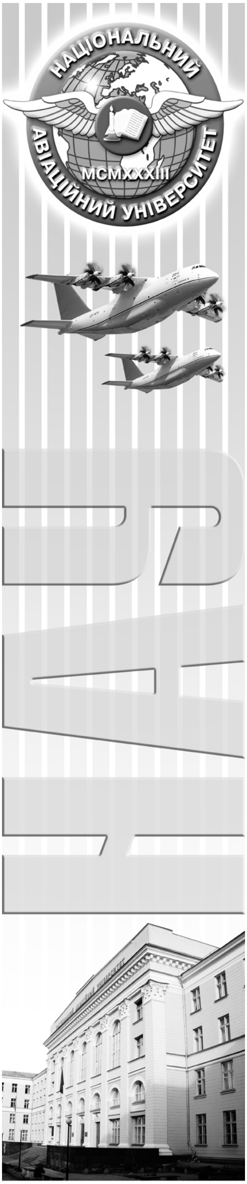

VIVERE!
VINCERE!
CREARE!

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Я.В. Крисак, І.О. Ластівка

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Фінансові потоки

Навчальний посібник

Київ 2009

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний авіаційний університет

Я.В. Крисак, І.О. Ластівка

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Фінансові потоки

Навчальний посібник

Київ
Видавництво Національного авіаційного університету
«НАУ-друк»
2009

УДК 330. 4 (075.8)
ББК У26 я7
К 825

Рецензенти: *П. І. Верченко* – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Київський національний економічний університет ім. Вадима Гетьмана);
О. В. Перегуда – канд. фіз.-мат. наук, доц. (Київський національний університет ім. Тараса Шевченка);
Є. О. Шквар – канд. техн. наук, доц. (Національний авіаційний університет)

Затверджено методично-редакційною радою Національного авіаційного університету (протокол № 13 від 25.05.2008 р.).

Крисак Я. В.

К 825 Фінансова математика. Фінансові потоки : навч. посіб. / Я.В.Крисак, І.О.Ластівка – К. : Вид-во Нац. авіац. ун-ту «НАУ-друк», 2009. – 88 с.

ISBN 978-966-598-551-8

Навчальний посібник підготовлено відповідно до навчальної програми дисципліни «Фінансова математика».

Посібник містить вісім розділів, у кожному з яких стисло викладено теоретичні відомості і широко подано приклади і задачі з розв’язаннями, а також наведено запитання та вправи з відповідями для самоперевірки.

Для студентів економічних спеціальностей усіх форм навчання.

УДК 330. 4 (075.8)
ББК У26 я7

ISBN 978-966-598-551-8

Зміст

ВСТУП

Фінансова математика розв'язує широке коло задач, пов'язаних із прийняттям найкращого, з фінансової точки зору найвигіднішого рішення в складній економічній ситуації. За допомогою фінансової математики розраховується можливий прибуток і збиток певної фінансової операції, виконується аналіз багатоваріантних ситуацій, пов'язаних із фінансовою, інвестиційною і комерційною діяльністю суб'єктів ринку. Сьогодні апаратом фінансової математики користуються фінансові аналітики, менеджери, акціонери, інвестори та інші учасники ринку.

Фінансова математика – це наука, яка вивчає методи обчислення вартісних і часових параметрів фінансових, інвестиційних і торгівельних операцій з урахуванням часу, інфляції, валютних курсів, відсотків та інших юридичних і фактичних умов виконання договорів.

Як і в будь-якій науці, у фінансовій математиці є цікаві ідеї. Серед них ідеї Марковіца і Глобіна про складання оптимального портфеля цінних паперів. Щоб краще зрозуміти ідею оптимального портфеля, розглянемо такий приклад. Маючи 1 млн. гривень, Ви бажаєте купити на ці гроші цінні папери: облігації, акції та інші інструменти фондового ринку. Звичайно, Ви сподіваєтесь на максимальний прибуток при мінімальному ризиці. Тому структура ризикових цінних паперів Вашого портфеля повинна повторювати структуру великого ринку цих паперів. Якщо на великому ринку 5 % усіх ризикових паперів складають акції й облігації певної компанії, то й у Вашому портфелі серед ризикових папери цієї компанії повинні становити таку ж частину. Якщо в інвестора більша частина безризикових паперів, то відповідно менший дохід, менший ризик і навпаки.

Кількісний фінансовий аналіз сформувався на стику фінансової науки і математики. *Предметом вивчення фінансової математики* є гроші, цінні папери, різні операції з ними на фінансовому ринку. Методи розрахунку взяті з математики. Вони можуть бути елементарними, складними і дуже складними, які потребують залучення професійних математиків.

Оволодіння апаратом фінансової математики вимагає загального кругозору практично в усіх галузях економічної науки. Даний курс потребує знань у галузі економіки, фінансів, теорії грошей і цінних паперів.

Цей посібник складається з восьми розділів фінансової математики, основою яких є «математична» база – методи розрахунків, дослідження впливів окремих факторів, залежність між параметрами фінансових операцій.

Так, у першому розділі розглянуто основи фінансової математики – фактор часу в фінансовому аналізі, відсотки та схеми нарахування відсотків. Другий розділ ознайомлює з усіма методами нарахування та дисконтування за допомогою простих відсотків. У третьому та четвертому розділах розглянуто питання, пов'язані з нарахуванням за складними відсотках, співвідношення відсоткових ставок. Ці ж питання розглядаються у п'ятому розділі, але з урахуванням інфляції.

Шостий та сьомий розділи розкривають проблеми кількісного аналізу різних фінансових потоків платежів. З потоками платежів на практиці зустрічаються дуже часто, коли за умовою фінансової операції вони розподілені в часі. Без знань кількісних співвідношень між показниками, які характеризують потоки платежів, неможливо опанувати механізм будь-якої довготермінової фінансової операції.

Завершує посібник восьмий розділ, присвячений оцінюванню ефективності інвестицій та визначенню очікуваної норми дохідності об'єктів інвестування.

Посібник містить достатню кількість числових прикладів із розв'язаннями. Кожний розділ завершується питаннями та задачами для самоперевірки знань, які відповідають типовим програмам навчання фахівців з питань фондового ринку.

Розділ 1. ***ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ФІНАНСОВОЇ МАТЕМАТИКИ***

1.1. *Фактор часу у фінансових операціях*

Одним із основних факторів, які впливають на результати фінансової операції, чи не на першому місці є фактор часу. У його основі лежить принцип нерівноцінності грошей у різні календарні періоди. Однакові суми грошей «зараз» і «потім» оцінюються порізному. При рівності в номінальній кількості сум $S(t_1)$ і $S(t_2)$ $(t_1 < t_2)$ реальна купівельна спроможність цих сум буде різною і, як правило, вона буде більшою у суми $S(t_1)$, ніж у суми $S(t_2)$.

Економічний зміст такого явища пов'язаний з виконанням грішми своїх функцій як грошей і капіталу. Так, виробничі інвестиції дозволяють у майбутньому не тільки повернути втрачені кошти, але й одержати прибуток. Цей феномен отримав назву *часова вартість грошей*. Інший фактор, що впливає на переваги грошей «сьогодні» і «завтра», це невизначеність майбутнього і повя'заний з цим ризик.

Фактор часу, особливо в довготермінових фінансових операціях, відіграє більшу роль, ніж розміри грошових сум. Вплив фактора часу багаторазово підсилюється в період інфляції.

Отже, концепція вартості грошей у часі ґрунтується на тому, що вартість грошей із плином часу змінюється за рахунок існування на фінансовому ринку певної форми дохідності інвестицій.

Урахування чинника часу у фінансових операціях зумовило появу понять теперішньої та майбутньої вартості грошей.

1.2. *Відсотки, відсоткові ставки*

Під відсотковими грішми або відсотками розуміють абсолютну величину прибутковості від наданих грошей у борг. Коли гроші даються в борг, то сума, що повертається, завжди більша за позикову. У цій різниці грошей враховується змінювана з часом вартість грошей, а також плата за користування позикою.

Для кількісного порівняння теперішньої і майбутньої вартості грошей у фінансовій теорії використовують спеціальний інструмент – відсоткову ставку, за допомогою якої відбувається порівняння теперішньої і майбутньої вартості активів. Відсоткова ставка, або просто відсоток, використовується як вимір прибутковості фінансової операції.

За словами відомого економіста Пола Хеше «…відсоток є ціна, яку люди сплачують за те, щоб одержати ресурси зараз, замість того, щоб чекати доти, доки вони заробляти ці гроші, на які ці ресурси можна купити».

Слово «відсоток», латинською «procentum», означає «на сотню» (або «від сотні»). З математичної точки зору 1 % від N є сота доля числа N, а символ % означає 1/100.

Наприклад, 15 % числа N – це $\frac{N}{100}\cdot 15 = 0,15\cdot N.$

З точки зору фінансової математики, «відсоток» є плата за використання грошей однієї особи (кредитора) іншою особою (дебітором, позичальником), виражена в сотих долях від теперішньої суми. Відсоткові ставки, як правило, задають у вигляді десяткових дробів із заданою точністю або звичайних дробів – тоді з точністю до $\frac{1}{16}$ або $\frac{1}{32}$.

Нарахування відсотків переважно здійснюють дискретно, приймаючи за періоди рік, півріччя, квартал, місяць.

У теорії фінансових розрахунків застосовують ще й неперервне нарахування відсотків.

Відсотки (сума доходу) сплачують кредиторові або відразу після їх нарахування, або приєднують до суми боргу.

У фінансових розрахунках застосовують різні способи нарахування відсотків, отже, різні види відсоткових ставок. Головна розбіжність полягає в часі, на момент якого відбувається нарахування відсотків. Якщо відсотки нараховуються в кінці кожного періоду їх нарахування, то такий спосіб нарахування відсотків називають *рекурсивним (позичковим, звичайним)*, із застосуванням відсоткової ставки i, яка визначається за формулою

$$i = \frac{S-K}{K} = \frac{I}{K}. \tag{1.1}$$

Якщо відсотки нараховуються (з одночасним вирахуванням) від суми кредиту на початку періоду їх нарахування, то такий спосіб нарахування відсотків називають *антисипативним (авансовим, обліковим)* із застосуванням облікової ставки d, яка визначається за формулою

$$d = \frac{S - K}{S} = \frac{I}{S}. \qquad (1.2)$$

Величини, отримані за формулами (1.1) і (1.2), змінюються від 0 до 1 включно. У формулах (1.1) і (1.2) введені такі позначення:

K – теперішня сума (кредит);

S – нарощена сума (борг);

I – відсоток в абсолютному виразі (у грошових одиницях), (рис. 1.1).

Інколи у формулі (1.2) різницю $S - K$ позначають літерою D – дисконт.

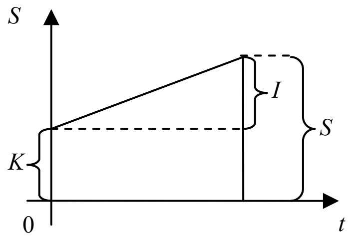

Рис. 1.1

Обидва способи нарахування відсотків можуть обчислюватись за двома схемами:

– за схемою простих відсотків, при якій відсотки нараховуються кожного періоду тільки на початковий капітал K. База нарахування не змінюється;

– за схемою складних відсотків, при якій відсотки нараховуються кожного періоду на початковий капітал і на відсоткові гроші, нараховані попередніми періодами нарахувань. База нарахування після кожного періоду змінюється.

Позичкові i та авансові d відсотки можуть нараховуватись за схемою простих або складних відсотків (рис.1.2).

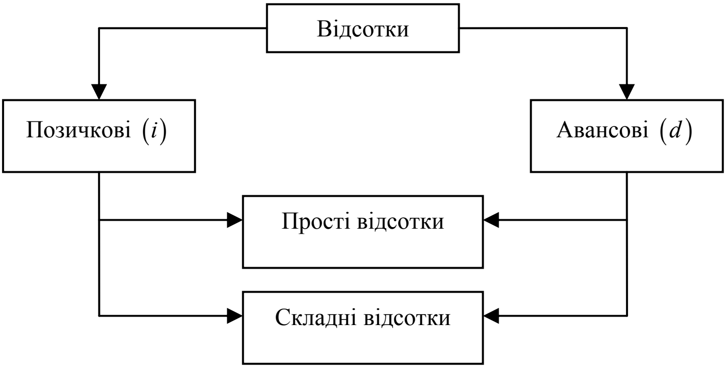

Рис. 1.2

Обчислення майбутньої вартості грошей за допомогою нарахування відсотків називається *нарощуванням грошей*. Обернена операція – визначення теперішньої вартості майбутніх грошей – називається *дисконтуванням.*

1.3. Прогресії

При розрахунках фінансових операцій використовують арифметичну та геометричну прогресії. Тому варто пригадати матеріал зі шкільної алгебри.

Числова послідовність $a_1, a_2, ..., a_n = \{a_n\}$ – називається *арифметичною прогресією*, якщо кожний наступний її елемент, починаючи з другого, збільшується на одне й те саме число d, $d \neq 0$. Число d називають *різницею прогресії*. При $d > 0$ прогресія зростаюча, при $d < 0$ – спадна. Отже,

$$a_1 = a_1;$$

$$a_2 = a_1 + d;$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d;$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d;$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d.$$

Властивості арифметичної прогресії:

$-a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \ldots = a_k + a_{n-(k-1)}$;

$-a_k = \dfrac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}$.

Сума n елементів арифметичної прогресії:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n = \frac{a_1 + (n-1)d}{2}. \qquad (1.3)$$

Числова послідовність $b_1, b_2, \ldots, b_n = \{b_n\}$ називається *геометричною прогресією*, якщо кожний наступний її елемент, починаючи з другого, дорівнює попередньому, помноженому на одне й те ж саме число $q\left(q \neq \pm 1; 0\right)$, яке називається *знаменником прогресії*. Виходячи з визначення,

$b_1 = b_1$;

$b_2 = b_1 q$;

$b_3 = b_2 q = b_1 q^2$;

$b_4 = b_3 q = b_1 q^3$;

...

$b_n = b_{n-1} q = b_1 q^{n-1}$.

Властивість геометричної прогресії:

– $b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_k b_{n-(k-1)}$;

– $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$.

Сума n елементів геометричної прогресії

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q}. \qquad (1.4)$$

Якщо n прямує до ∞ і $|q| < 1,\ q \neq 0,$ то геометрична прогресія називається нескінченно спадною геометричною прогресією, і сума її елементів визначається за формулою

$$S = \frac{b_1}{1-q}. \qquad (1.5)$$

Запитання та вправи для самоперевірки

1. Поясніть, який вплив має час у фінансових операціях.
2. Сформулюйте поняття відсотка і відсоткових грошей.
3. Дайте визначення відсоткової ставки.
4. Які є види відсоткових ставок?
5. Дайте визначення арифметичної прогресії та сформу-люйте її властивості.
6. Дайте визначення геометричної прогресії та сформу-люйте її властивості.
7. Обчисліть a_1 і d арифметичної прогресії, якщо:

$$\begin{cases} a_5 + a_{11} = 62 \\ a_n + a_1 = 12. \end{cases}$$

(Відповідь: $a_1 = 3,\ d = 4$)

8. Скільки необхідно взяти елементів прогресії 10, 15, 20, …, щоб їх сума дорівнювала 2475?

(Відповідь: $n = 30$)

9. П’ятий елемент арифметичної прогресії, який є середнім, дорівнює 10. Знайдіть суму всіх елементів прогресії.

(Відповідь: 90)

10. Знайдіть номер елемента геометричної прогресії n, якщо $b_n = 162,\ b_1 = 2,\ q = 3$.

(Відповідь: $n = 5$)

11. Знайдіть номер елемента геометричної прогресії 0,1; 0,3, що дорівнює 218,7.

(Відповідь: $n = 8$)

12. Знайдіть суму перших 10 елементів геометричної прогресії 3; 15; … .

(Відповідь: $S = \frac{3}{4}\left(5^{10} - 1\right)$)

Розділ 2. **ПРОСТІ ВІДСОТКИ**

2.1. Формула нарощення

Як було зазначено вище, дохід I – це ціна, яку необхідно сплатити за використання грошей. Кількість грошей, узятих у позику або інвестованих, визначається як «капітал» або «теперішня сума» K. Через певний термін часу t позичальник повинен сплатити капітал разом з відсотками. Дохід із капіталу визначають у грошових одиницях, а обчислюють у вигляді відсотків i від початкового капіталу.

Теперішня сума разом із прибутком утворюють нарощену суму S (боргу, депозиту, інвестиції). Нарощена сума визначається добутком теперішньої суми на множник нарощення, який показує, у скільки разів нарощена сума більша за теперішню.

Оскільки прості відсотки нараховують на теперішню суму, то нарощена сума за t періодів нарахувань буде такою:

$$S = K + \overbrace{K \cdot i + \ldots + K \cdot i}^{t \text{ років (періодів)}} = K + K \cdot t \cdot i = K\left(1 + ti\right). \qquad (2.1)$$

Дохід I за t років обчислюється за формулою $I = Kti$.

Формула (2.1) – це формула простих відсотків, а множник $\left(1+ti\right)$ – множник нарощення простих відсотків. Графік росту за простими відсотками зображено на рис. 2.1.

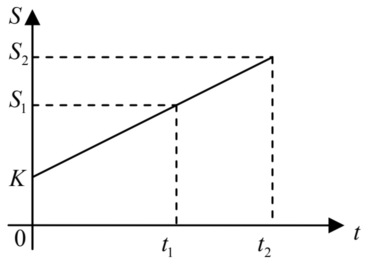

Рис. 2.1

Якщо відсоткову ставку або термін дії позики збільшити в k разів, то множник нарощення однаково збільшиться в $\dfrac{1+kti}{1+ti}$ разів.

При зміні відсоткової ставки, наприклад, упродовж t_1 періодів i_1, упродовж t_2 періодів i_2 і т. д. нарощена сума дорівнює

$$S = K\left(1 + t_1 i_1 + t_2 i_2 + ... + t_k i_k\right) = K\left(1 + \sum_{j=1}^{k} t_j i_j\right),$$

причому термін дії кредиту $t = \sum_{j=1}^{k} t_j$.

Приклад 2.1. Асоціація підприємств отримала у банку позику 30 000 грн на 6 місяців під 8 % річних простих відсотків. Визначити дохід банку та суму боргу.

Розв'язання.

Дохід банку

$$I = Ki\frac{t}{T} = 30000 \cdot 0,08 \cdot \frac{1}{2} = 12000 \text{ грн.}$$

Сума боргу

$$S = K\left(1 + i\frac{t}{T}\right) = 30000\left(1 + 0,08 \cdot \frac{1}{2}\right) = 31200 \text{ грн,}$$

або ж дохід банку

$$I = S - K = 31200 - 30000 = 1200 \text{ грн.}$$

Відсоткова ставка, як правило, задається на рік. Якщо термін дії позики менше року, необхідно визначити, яка частина річного відсотка сплачується кредитору. Аналогічна проблема виникає в тих випадках, коли термін позики менше періоду нарахувань відсотків.

Якщо термін дії фінансової операції t (кількість днів), а T – кількість днів у році, то нарощена сума

$$S = K\left(1 + \frac{t}{T}i\right). \tag{2.2}$$

При розрахунку відсотків беруть кількість днів у році наближено $T = 360$ днів (12 місяців по 30 днів) або точно $T = 365$ чи 366 днів.

Якщо $T = 360$, то отримуємо звичайні або комерційні відсотки, при $T = 365$ (366) отримуємо точні відсотки.

Залежно від вибору t і T можуть застосовувати на практиці три варіанти простих відсотків:

1. Англійська практика (точні відсотки з точною кількістю днів позики). Цей варіант дає найточніші відсотки. День видачі позики і день погашення вважається одним днем (Англія, США, Україна).

2. Французька практика (звичайні відсотки з точною кількістю днів позики). $T = 360$, t – фактична кількість днів. У цьому випадку відсотки стають більшими, ніж у першому, тому що знаменник дробу дорівнює 360 (Франція, Бельгія, Швейцарія).

3. Німецька практика (звичайні відсотки з наближеною кількістю днів позики). Місяць прирівнюється до 30 днів (Німеччина, Швеція, Данія).

При нарахуванні відсотків на неповний період їх нарахування за формулою (2.1) t буде дорівнювати частині періоду нарахування. Якщо період дорівнює року, а відсотки нараховуються щоквартально, $t = \frac{1}{4}$, якщо період дорівнює кварталові, а відсотки нараховуються щомісяця, $t = \frac{1}{3}$.

Приклад 2.2. Кредит у розмірі 1 млн грн виданий на період з 20 січня по 5 жовтня під 18 %. Обчислити суму боргу за англійською практикою.

Розв'язання. Англійська практика нарахування відсотків – це точні відсотки з точною кількістю днів позики $\left(\frac{365}{365}\right)$.

Точна кількість днів позики за умовою задачі – 258 .

$$S = K\left(1 + \frac{t}{T}i\right) = 1000000\left(1 + \frac{258}{365} \cdot 0{,}18\right) = 1127233 \text{ грн.}$$

2.2. Дисконтування за простими відсотками. Нарощення за обліковою ставкою

Обчислення теперішньої вартості майбутніх грошей називається *дисконтуванням*. Термін «дисконтування» використовується в широкому значенні – як засіб визначення вартості майбутніх сум на більш ранній момент часу. Такий спосіб ще називають зведенням вартісних показників, як правило, до початкового моменту часу.

Залежно від відсоткової ставки застосовують два методи дисконтування – математичне дисконтування і банківський облік.

Математичне дисконтування – це обернена задача до нарощення теперішньої суми. Тобто,

$$K = \frac{S}{1+ti} = S \cdot \frac{1}{1+ti}.$$

Дріб $\frac{1}{1+ti}$ називають дисконтним множником.

Для короткотермінових кредитів

$$K = \frac{S}{1+\frac{t}{T}i}.$$

Приклад 2.3. Виданий шестимісячний вексель з завершеною вартістю 24000 грн. Яка сума була видана в борг при відсотковій ставці 12 % річних?

Розв'язання.

$$K = \frac{S}{1+\frac{t}{T}i} = \frac{24000}{1+0{,}5\cdot 0{,}12} = 22641{,}51 \text{ грн.}$$

Банківський облік. На практиці частіше використовують банківський облік дисконтування цінного паперу в достроковій його реалізації для власника, а для банку – у придбанні нижче номіналу і визначенні його вартості на даний момент часу.

У даному випадку відсотки нараховують на суму, що підлягає оплаті наприкінці терміну фінансової операції. При цьому застосовується облікова ставка. Розмір дисконту або суми обліку дорівнює Std, тоді

$$K = S - Std = S(1 - td), \tag{2.3}$$

де t – термін від моменту обліку до дати погашення векселя, $(1 - td)$ – дисконтний множник.

Для визначення суми, яку необхідно внести в вексель, якщо задана теперішня сума боргу, використовують формулу нарощення

$$S = K \cdot \frac{1}{1 - td}, \tag{2.4}$$

де $\frac{1}{1 - td}$ – множник нарощення.

Отже, можна зробити такі висновки:

а) для позичкових відсотків i обчислення нарощеної суми є прямою задачею, формула (2.1), а дисконтування є оберненою задачею, формула (2.2);

б) для авансових відсотків d дисконтування, формула (2.3), – пряма задача, і обернена, формула (2.4) – обчислення нарощення.

І, нарешті, слід підкреслити, що облікова ставка дає більш швидкий ріст суми боргу, ніж позичкова ставка при $d = i$.

Приклад 2.4. Банком виданий тримісячний обліковий вексель на суму 15000 грн. Ставка обліку 12 %. Яку суму отримав дебітор і яку суму заробить банк?

Розв'язання. Дебітор отримав у банку суму

$$K = S(1 - dt) = 15000\left(1 - 0{,}12 \cdot \frac{1}{4}\right) = 15000(1 - 0{,}03) = 14550 \text{ грн.}$$

Банк заробить дисконт

$$D = S \cdot d \cdot t = 15000 \cdot 0{,}12 \cdot \frac{1}{4} = 450 \text{ грн або ж}$$

$$D = S - K = 15000 - 14550 = 450 \text{ грн.}$$

2.3. Обчислення параметрів позики

При розробці контрактів інколи виникає необхідність визначити термін позики і розмір відсоткової ставки.

Термін позики визначається з формул (2.1) і (2.2) відповідно для ставок i, d в роках:

$$t = \frac{S-K}{Ki};$$

$$t = \frac{S-K}{Sd}.$$

У днях:

$$t = \frac{S-K}{Ki} \cdot T;$$

$$t = \frac{S-K}{Sd} \cdot T.$$

Для порівняння контрактів за їх дохідністю, обчислюються відсоткові ставки, які визначають також із формул (2.1) і (2.2):

$$i = \frac{S-K}{Kt}; \; i = \frac{S-K}{Kt} \cdot T;$$

$$d = \frac{S-K}{St}; \; i = \frac{S-K}{St} \cdot T.$$

Приклад 2.5. У контракті передбачено погашення боргу на суму 110 тис. грн через 120 днів. Теперішня сума боргу 90 тис. грн $\left(\frac{365}{360}\right)$. Визначте дохідність операції для кредитора у вигляді відсоткових ставок i та d .

Розв'язання.

$$i = \frac{S-K}{K \cdot t} \cdot T = \frac{110-90}{90 \cdot 120} \cdot 360 = 0,(6), \text{ або } 66{,}67\%;$$

$$d = \frac{S-K}{S \cdot t} \cdot T = \frac{110-90}{110 \cdot 120} \cdot 360 = 0{,}5454, \text{ або } 54{,}54\%.$$

Запитання та вправи для самоперевірки

1. Виведіть формулу для обчислення нарощеної суми простих позичкових відсотків.

2. Які є способи нарахування короткотермінових кредитів?

3. Запишіть формулу нарощеної суми зі змінною відсотковою ставкою.

4. Запишіть формули для обчислення нарощеної суми за схемою простих облікових відсотків.

5. Що таке дисконтування за простими відсотками?

6. Якими є прямі та обернені задачі для відсоткових ставок i та d ?

7. Початковий внесок на депозит складає 3000 грн. Використовуючи англійську практику, розрахуйте, якою буде сума на рахунку через 47 днів, якщо нараховуються прості відсотки 30 % річних.

(Відповідь: 3115,89 грн)

8. Що є вигіднішим для вкладника, віддати суму 1000 грн на 6 місяців, плануючи отримати 1700 грн, чи на 8 місяців, щоб отримати 1800 грн?

(Відповідь: вигідніше віддати на 6 місяців)

9. Яку суму грошей необхідно позичити на півроку під 18 % на місяць, щоб одержати 12000 грн?

(Відповідь: 5769 грн)

10. Річна ставка простих відсотків – 12,5 %. Через скільки років теперішня сума подвоїться?

(Відповідь: через 8 років)

Розділ 3. ***СКЛАДНІ ВІДСОТКИ***

3.1. Нарощення за ставкою складних відсотків

У середньо- та довготермінових фінансово-кредитних операціях розрахунки ведуть за правилом складних відсотків, коли відсотки приєднуються до суми боргу. База для нарахування складних відсотків із кожним періодом нарахування збільшується. Після першого року нарощена сума становитиме $K + K_1 = K(1+i)$.

Після другого року $K(1+i)+K(1+i)i = K(1+i)(1+i) = K(1+i)^2$ і т. д. В кінці t-го року нарощена сума становитиме

$$S = K(1+i)^t. \tag{3.1}$$

Відсотки за цей же термін будуть такими:

$$I = S - K = K\left[(1+i)^t - 1\right].$$

Зростання нарощеної суми за складними відсотками відбувається за правилом геометричної прогресії $b_1 = K$, а $q = (1+i)$. Графік зміни нарощеної суми за складними відсотками зображено на рис. 3.1.

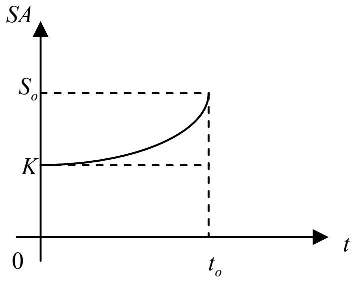

Рис. 3.1

Величина $(1+i)^t$ є множником нарощення за складними відсотками. Значення даного множника для цілих t наведені в таблицях складних відсотків.

Приклад 3.1. Початковий капітал у розмірі 2000 грн покладено на депозит під 4 % річних на 4 роки. Обчисліть дохід від депозиту.

Розв'язання. Спочатку обчислимо нарощену суму:

$$S = K\left(1+i\right)^{t} = 2000\left(1+0,04\right)^{4} = 2339,6 \text{ грн.}$$

Дохід від депозиту становитиме

$$I = S - K = 2339,6 - 2000 = 339,6 \text{ грн.}$$

Якщо застосовується змінна відсоткова ставка, то множник нарощення є добутком частинних множників

$$S = K\left(1+i_1\right)^{t_1}\left(1+i_1\right)^{t_2}...\left(1+i_k\right)^{t_k} = K\prod_{j=1}^{k}\left(1+i_j\right)^{t_j}, \quad (3.2)$$

де $i_1, i_2, ..., i_k$ – послідовні значення ставок за відповідні періоди $t_1, t_2, ..., t_k$.

Приклад 3.2. Підприємство отримало кредит на суму 100 млн грн терміном на 5 років на таких умовах за схемою складних відсотків:

– перший рік відсоткова ставка 10,5 %;

– другий рік – 12 %;

– для третього року і наступних років – 12, 75 %.

Визначте суму боргу наприкінці терміну позики.

Розв'язання. Скористаємось формулою (3.2):

$$S = K\prod_{j=1}^{k}\left(1+i_j\right)^{t_j} = 100\cdot 1{,}15\cdot 1{,}12\cdot 1{,}1275^{3} = 177{,}39 \text{ млн грн.}$$

3.2. *Нарахування відсотків m разів упродовж року*

Зазвичай за відсотковий період береться один рік. Якщо відсотки нараховуються m разів на рік, то відбивається m-кратне нарахування відсотків.

Нехай річна ставка дорівнює j. Кількість періодів нарахувань на рік – m. Кожного разу відсотки нараховуються за ставкою j/m. При цьому ставку j називають *номінальною ставкою*. Формула нарощення буде такою:

$$S = K\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt}. \qquad (3.3)$$

Номінальна ставка не дає можливості зрозуміти, яка ж реальна прибутковість фінансової операції у вигляді повних річних відсотків. У такому випадку вводиться поняття ефективної відсоткової (дійсної) ставки i.

Ефективна ставка – це річна ставка складних відсотків, яка дає такий самий фінансовий результат, як і при m-разовому нарахуванні відсотків за ставкою j/m.

Виведемо співвідношення між номінальною й ефективною ставками позичкових відсотків, виходячи з умови рівності множників нарощення:

$$(1 + i)^t = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt}.$$

Звідси визначаємо ефективну ставку по заданій номінальній і навпаки:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1;$$

$$j = \left(\sqrt[m]{1 + i} - 1\right) \cdot m.$$

Якщо термін фінансової операції визначається не в роках, а в днях або місяцях, а період нарахування відсотків один рік, то

$$S = K\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m\frac{t}{T}}.$$

Якщо загальна кількість періодів нарахування не є цілим числом, то для цілого числа періодів використовується формула складних відсотків, а для залишку, як правило, - формула простих відсотків. Тобто, якщо $m \cdot t$ – ціле, а ℓ – частина періоду нарахування, то

$$S = K\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt} \cdot \left(1 + \ell\frac{j}{m}\right).$$

Приклад 3.3. У банк покладено 10000 грн на 8 % річних. Обчисліть кінцеву суму капіталу через 10 років, якщо відсотки нараховуються: а) щороку, б) через півроку.

Розв'язання.

а) $S = K(1+i)^t = 10000(1+0{,}008)^{10} = 21589{,}2$ (грн);

б) $S = K\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mt} = 10000\left(1+\dfrac{0{,}08}{2}\right)^{20} = 21911{,}2$ (грн).

3.3. Дисконтування по ставці складних відсотків

Для математичного дисконтування необхідно вираз (3.1) розв'язати відносно K :

$$K = \frac{S}{(1+i)^t} = S \cdot v^t,$$

де

$$v^t = (1+i)^{-t} = \frac{1}{(1+i)^t}.$$

Величину v називають дисконтним множником, значення якого задається таблицями.

Приклад 3.4. На одному з рахунків у банку протягом 10 років накопичено 10000 грн. Яка теперішня сума грошей була на рахунку, якщо відсоткова ставка 5 %?

Розв'язання.

$K = S(1+i)^{-t} = 10000 \cdot (1+0{,}05)^{-10} = 10000 \cdot 0{,}6139 = 6139$ грн.

За умови що, відсотки нараховуються m разів на рік, отримаємо

$$K = \frac{S}{\left(1+\dfrac{j}{m}\right)^{mt}} = Sv^{mt},$$

де

$$v^{mt} = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{-mt}.$$

Дисконтування за складною обліковою ставкою відбувається за формулою

$$K = S\left(1-d\right)^{t}, \tag{3.4}$$

де d – річна облікова ставка.

Приклад 3.5. Фінансовий інструмент на суму 5 млн грн, термін платежу настає через 5 років, проданий з дисконтом за складною ставкою 15 % річних. Обчислити суму дисконту.

Розв'язання.

$K = S\left(1-d\right)^{t} = 5\left(1-0{,}15\right)^{5} = 5\cdot 0{,}85^{5} = 2218526{,}56$ грн;

$D = S - K = 5000000 - 2218526{,}56 = 2781473{,}44$ грн.

Дисконтування може відбуватись m разів на рік, у такому випадку

$$K = S\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mt}, \tag{3.5}$$

де f – номінальна річна облікова ставка.

Ефективна облікова ставка d визначається з рівності дисконтних множників:

$$\left(1-d\right)^{t} = \left(1-\frac{f}{m}\right)^{mt},$$

звідси

$$d = 1-\left(1-\frac{f}{m}\right)^{m},$$

а

$$f = m\left(1-\sqrt[m]{1-d}\right).$$

Ефективна облікова ставка при $m>1$ менша за номінальну.

Нарощення за складною обліковою ставкою визначається з формул (3.4) і (3.5):

$$S = \frac{K}{\left(1-d\right)^{t}},$$

$$S = \frac{K}{\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mt}}.$$

Приклад 3.6. Фінансовий інструмент на суму 5 млн грн, термін платежу настає через 5 років. Обчисліть теперішню вартість, отриману при щоквартальному дисконтуванні за номінальною обліковою ставкою 15 % та ефективну облікову ставку.

Розв'язання.

$$K = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{mt} = 5\left(1 - \frac{0,15}{4}\right)^{20} = 2,328 \text{ (млн грн)};$$

$$d = 1 - \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{m} = 1 - \left(1 - \frac{0,15}{4}\right)^{4} = 0,142 \ (14,2\%).$$

3.4. Обчислення параметрів позики при складних відсотках. Порівняння зростання за складними та простими відсотками

Термін позики визначимо з формул нарощення та дисконтування. При нарощенні за складною річною ставкою i за номінальною ставкою j на основі формул (3.1) і (3.3) маємо

$$t = \frac{\ln \frac{S}{K}}{\ln(1+i)},$$

$$t = \frac{\ln \frac{S}{K}}{m \cdot \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right)}.$$

Приклад 3.7. Через скільки років нарахування за правилом складних відсотків теперішня сума збільшиться удвічі при відсотковій ставці 8 %?

Розв'язання.

$$t = \frac{\ln \frac{S}{K}}{\ln(1+i)} = \frac{\ln 2}{\ln 1,08} = 9 \text{ років}.$$

При дисконтуванні за складною річною обліковою ставкою d і за номінальною обліковою ставкою f з формул (3.4) і (3.5) отримаємо

$$t = \frac{\ln \frac{S}{K}}{\ln(1-d)},$$

$$t = \frac{\ln \frac{S}{K}}{m \cdot \ln\left(1 - \frac{f}{m}\right)}.$$

Величини відсоткових ставок i, j, d, f отримаємо з пов'язаних між собою рівностей S і K.

При нарощенні за складною річною ставкою відсотків i та за номінальною ставкою j з формул (3.4) і (3.5) маємо

$$i = \sqrt[t]{S/K} - 1,$$

$$j = m\left(\sqrt[mt]{S/K} - 1\right).$$

При дисконтуванні за складною обліковою ставкою з формул (3.4) і (3.5) отримаємо

$$d = 1 - \sqrt[t]{K/S},$$

$$f = m\left(1 - \sqrt[mt]{K/S}\right).$$

Щоб порівняти зростання нарощення за різними схемами нарахування відсотків, достатньо прирівняти відповідні множники нарощення. При однакових значеннях відсоткових ставок співвідношення цих множників суттєво залежить від терміну. Так, в одній і тій самій часовій базі знаходимо такі співвідношення:

– для $t < 1$ (року) прості відсотки більші за складні:

$$(1+ti) > (1+i)^t,$$

– для $t > 1$ складні відсотки більші за прості:

$$\left(1+ti\right)<\left(1+i\right)^t,$$

– для $t=1$ множники нарощення однакові:

$$\left(1+ti\right)=\left(1+i\right)^t.$$

Графічну інтерпретацію співвідношення множників нарощення подано на рис. 3.2.

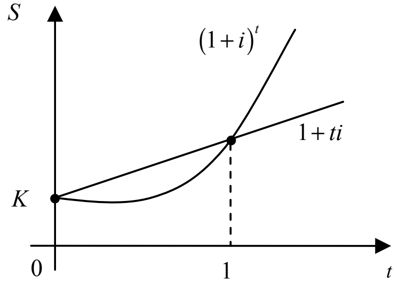

Рис. 3.2

3.5. Неперервне нарощення і дисконтування

Неперервне нарощення і дисконтування застосовується в теорії фінансів та в аналізі складних фінансових проблем, наприклад, в інвестиційному або фінансовому проектуванні.

При неперервному нарощенні використовують особливий вид відсоткової ставки δ – сили зростання. Вона може бути сталою або змінюватись у часі.

Стала сила росту. Розглянемо формулу нарощення при нарахуванні відсотків m разів у році з номінальною ставкою j

$$S=K\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}.$$

Нехай $m\to\infty$, тоді

$$S=K\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}=K\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m/j}\right)^{\frac{m}{j}\cdot jt}=K\cdot e^{jt}=Ke^{\delta t}, \quad (3.6)$$

де e – основа натурального логарифму, δ – сила зростання.

Прирівнявши множники нарощення при дискретному та неперервному нарахуванні відсотків, отримаємо функціональні залежності між i та δ:

$$\left(1+i\right)^t = e^{\delta t},$$

$$\delta = \ln\left(1+i\right),$$

$$i = e^{\delta} - 1.$$

Розв'язавши рівність (3.6), спочатку відносно t, потім – δ, отримаємо термін кредиту $t = \dfrac{\ln \frac{S}{K}}{\delta}$ і розмір сили зростання $\delta = \dfrac{\ln \frac{S}{K}}{t}$.

Приклад 3.8. Теперішня сума, на яку нараховуються неперервні відсотки з силою росту 10 % упродовж п'яти років, дорівнює 2 млн грн. Обчислити нарощену суму.

Розв'язання.

$$S = K \cdot e^{\delta t} = 2000000 \cdot e^{0,1 \cdot 5} = 3297744,25 \text{ грн.}$$

Обчислимо дискретну відсоткову ставку, еквівалентну силі зростання 10 %, як

$$i = e^{0,1} - 1 \approx 0,10317,$$

відповідно нарощена сума становитиме

$$S = K\left(+i\right)^t = 2000000\left(1+0,10517\right)^5 = 3297744,25 \text{ грн.}$$

Дисконтний множник на основі сили росту при математичному дисконтуванні можна визначити, якщо рівність (3.6) розв'язати відносно K:

$$K = S \cdot e^{-\delta t}.$$

Дисконтний множник дорівнює $e^{-\delta t}$.

Змінна сила зростання. Розглянемо випадок, коли сила зростання задана у вигляді неперервної функції часу $\delta = f\left(t\right)$. Тоді нарощена і дисконтна суми визначатимуться так:

$$S = Ke^{\int_0^{t_o} f(t)dt}\ ;\ K = Se^{-\int_0^{t_o} f(t)dt}.$$

Наприклад, якщо $\delta = \delta_0 + \alpha t$, де δ_0 – початкове значення сили зростання, α – приріст сили зростання за одиницю часу, то:

$$S = Ke^{\int_0^{t_o} (\delta_0 + \alpha t)dt} = Ke^{\delta_0 t_0 + \frac{\alpha t_0^2}{2}}.$$

Запитання та вправи для самоперевірки

1. Виведіть формулу нарощення за схемою складних позичкових відсотків.

2. Виведіть формули для обчислення теперішньої вартості майбутніх сум для складних позичкових і авансових відсотків.

3. Дайте визначення поняття «множник нарощення»? Що він показує?

4. Що таке номінальна відсоткова ставка?

5. Що таке ефективна відсоткова ставка?

6. Виведіть формулу зв'язку між номінальною та ефективною ставками для позичкових і авансових відсотків.

7. Виведіть формули для обчислення терміну позики і величини відсоткової ставки для позичкових і авансових відсотків.

8. Виведіть формули для обчислення неперервного нарощення і дисконтування.

9. Визначте нарощену суму через 5,5 років за умови, що теперішня сума в розмірі 10000 грн розміщена в банку під 26 % річних.
(Відповідь: 35888,80 грн)

10. Яку суму необхідно вкласти, щоб через 3 роки і 3 місяці мати 18800 грн, якщо відсотки нараховуються за такою схемою: перший рік – 21 %, наступні два роки – 18 % і за решту часу – 6 % за ставкою складних відсотків? (Відповідь: 10943,9 грн)

11. Банк може забезпечити прибутковість по внесках населення – 12 % річних. Яку номінальну ставку він повинен оголосити, якщо капіталізація відсотків відбувається щоквартально?
(Відповідь: 11,5%)

12. За який термін у роках сума 75 млн грн досягне 200 млн грн при нарахуванні відсотків по складній ставці 15 % на рік і щоквартально?
(Відповідь: 7,02 роки; 6,66 роки)

13. На суму 2 млн грн нараховуються неперервні відсотки з силою зростання 10 %, $t = 5$ років. Визначити нарощену суму, дискретну річну відсоткову ставку і по ній визначити нарощену суму.
(Відповідь: 3297744,25 грн, i =0,10517)

Розділ 4. ***СПІВВІДНОШЕННЯ ВІДСОТКОВИХ СТАВОК. ПОДАТКИ***

4.1. Еквівалентність відсоткових ставок

Принцип еквівалентності лежить в основі багатьох методів математичного фінансового аналізу. Він застосовується при порівнянні умов різних контрактів, визначенні ефективності фінансово-кредитної операції, беззбиткової заміни одного виду відсоткової ставки на іншу.

Розглянемо таку економічну ситуацію, коли відсоткові ставки, які використовуються при різних контрактах, дають однаковий кінцевий результат.

Еквівалентними відсотковими ставками ми будемо називати такі значення відсоткових ставок різного виду, застосування яких при певних початкових умовах дає однаковий фінансовий результат.

Для знаходження певних значень еквівалентних відсоткових ставок або їх співвідношень необхідно записати рівняння еквівалентності. Як правило, береться величина, яка визначається за допомогою різних відсоткових ставок. Цією величиною може бути множник нарощення або дисконтування, теперішня або нарощена суми платежів.

На основі рівності двох виразів для даної величини записується рівняння еквівалентності, із якого отримуємо залежність між відсотковими ставками різного виду. Таким методом ми користувались і раніше при визначенні ефективної відсоткової ставки.

Далі розглянемо співвідношення еквівалентності відповідних ставок:

– між простою $i_{\text{П}}$ і складною $i_{\text{С}}$ ставками

$$1 + ti_{\text{П}} = \left(1 + i_{\text{С}}\right)^{t},$$

$$i_{\text{П}} = \frac{\left(1 + i_{\text{С}}\right)^{t} - 1}{t},$$

$$i_{\text{С}} = \sqrt[t]{1 + ti_{\text{П}}} - 1;$$

– між простими відсотковими ставками $i_{\text{П}}$ і $d_{\text{П}}$

$$1 + ti_{\text{П}} = \frac{1}{1 - td_{\text{П}}},$$

$$i_{\text{П}} = \frac{d_{\text{П}}}{1 - td_{\text{П}}},$$

$$d_{\text{П}} = \frac{i_{\text{П}}}{1 - ti_{\text{П}}},$$

де t – термін у роках;

– між простою $i_{\text{П}}$ і номінальною j ставками

$$1 + ti_{\text{П}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt},$$

$$i_{\text{П}} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt} - 1}{t},$$

$$j = m\left(\sqrt[mt]{1 + ti_{\text{П}}} - 1\right);$$

– між простою обліковою $d_{\text{П}}$ і складною $i_{\text{С}}$ ставками

$$\frac{1}{1 - td_{\text{П}}} = \left(1 + i_{\text{С}}\right)^{t},$$

$$d_{\text{П}} = \frac{1 - \left(1 + i\right)^{-t}}{t},$$

$$i_{\text{С}} = \sqrt[t]{1 \big/ \left(1 - td_{\text{П}}\right)} - 1;$$

– між простою обліковою $d_{\text{П}}$ і номінальною j ставками

$$\frac{1}{1 - td_{\text{П}}} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt},$$

$$d_{\Pi} = \frac{1 - \left(1 + {}^{j}\!/\!_{m}\right)^{-mt}}{t},$$

$$j = \left(\sqrt[mt]{{}^{1}\!/\!_{\left(1 - td_{\Pi}\right)}} - 1 \right) m;$$

– між складною i_{C} і номінальною j ставками

$$\left(1 + i_{\text{C}}\right)^{t} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt},$$

$$i_{\text{C}} = \left(1 + {}^{j}\!/\!_{m}\right)^{m} - 1,$$

$$j = m\left(\sqrt[m]{1 + i_{C}} - 1\right);$$

– між складними ставками i_{C} і d_{C}

$$\left(1 + i_{\text{C}}\right)^{t} = \frac{1}{\left(1 - d_{\text{C}}\right)^{t}},$$

$$i_{\text{C}} = \frac{d_{\text{C}}}{1 - d_{\text{C}}},$$

$$d_{\text{C}} = \frac{i_{\text{C}}}{1 - i_{\text{C}}};$$

– між силою зростання δ і номінальною j ставкою

$$e^{\delta t} = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{mt},$$

$$j = m\left(e^{\delta m} - 1\right),$$

$$\delta = m \cdot \ln\left(1 + \frac{j}{m}\right);$$

– між силою зростання δ і обліковою складною d_{C} ставкою

$$e^{\delta t} = \frac{1}{(1-d_C)^t},$$

$$\delta = -\ln(1-d_\text{C}),$$

$$d_\text{C} = 1 - e^{-\delta}.$$

Приклад 4.1. Якою складною річною відсотковою ставкою можна замінити в контракті просту відсоткову ставку 18 %, не змінюючи фінансового результату, якщо термін операції 580 днів, відсотки точні?

Розв'язання.

$$i_\text{C} = \sqrt[\frac{t}{T}]{1+\frac{t}{T}i} - 1 = \sqrt[\frac{580}{365}]{1+\frac{580}{365}\cdot 0{,}18} - 1 =$$

$$= \left(1+\frac{580\cdot 0{,}18}{365}\right)^{\frac{365}{580}} - 1 = 0{,}1715; \quad (17{,}15\%).$$

Приклад 4.2. Дохідність фінансової операції повинна становити 24 % річних. Який повинен бути розмір номінальної ставки при нарахуванні відсотків щомісяця, щоквартально?

Розв'язання.

$$j = m\left(\sqrt[m]{1+i} - 1\right) = 12\left(\sqrt[12]{1+0,24} - 1\right) = 0,217; \quad (j = 21{,}7\%);$$

$$j = 4\left(\sqrt[4]{1,24} - 1\right) = 0,221; \quad (j = 22{,}1\%.)$$

Приклад 4.3. Обчисліть силу зростання, яка б замінила щоквартальне нарахування відсотків за номінальною відсотковою ставкою 20 %, не змінюючи фінансовий результат контракту.

Розв'язання.

$$\delta = m\ln\left(1+\frac{j}{m}\right) = 4\cdot\ln\left(1+\frac{0{,}2}{4}\right) = 0{,}19516; \text{ тобто } \delta = 19{,}516\%.$$

4.2. Середні відсоткові ставки

Якщо розмір відсоткової ставки змінюється в часі, то всі ставки такої фінансової операції можна замінити середньою, яка не змінить результати нарощення чи дисконтування.

Нехай є терміни $t_1, t_2, ..., t_n$. Шукану середню відсоткову ставку $\bar{i}$ знайдемо, прирівнявши множники нарощення:

$$1+\bar{i}t=1+\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot i_k .$$

Звідси отримаємо

$$\bar{i}=\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot i_k}{t},$$

де $t=\sum_{k=1}^{n} t_k$ – загальний термін фінансової операції.

Приклад 4.4. Контракт передбачає, що перших два роки відсоткова ставка простих відсотків – 20 %, наступних три роки – 22 % і останні п'ять років – 25 %. Обчислити середню відсоткову ставку.

Розв'язання.

$$\bar{i}=\frac{\sum_{k=1}^{t} t_k \cdot i_k}{t}=\frac{0,2\cdot 2+0,22\cdot 3+0,25\cdot 5}{10}=0,231, \text{ тобто } \bar{i}=23,1\%.$$

Прирівнявши множники нарощення за обліковими простими ставками, аналогічно визначаємо середню облікову ставку $\bar{d}$:

$$\bar{d}=\frac{\sum_{k=1}^{n} t_k \cdot d_k}{t}.$$

Для складних, змінних у часі, ставок середню відсоткову ставку визначимо з рівності

$$\left(1+\bar{i}\right)^{t}=\prod_{k=1}^{n}\left(1+i_k\right)^{t_k}.$$

Отримаємо

$$\bar{i} = \sqrt[t]{\prod_{k=1}^{n}\left(1+i_k\right)} - 1,$$

де символ $\prod_{k=1}^{n}$ – означає добуток n-співмножників.

Приклад 4.5. Перших два роки кредиту застосовувалась відсоткова ставка складних відсотків – 15 %, наступних три роки вона становила 20 %. Обчислити середню відсоткову ставку.

Розв'язання.

$\bar{i} = \sqrt[t]{\prod_{k=1}^{t}\left(1+i_k\right)^{t_k}} - 1 = \sqrt[5]{\left(1{,}15\right)^2 \cdot \left(1{,}2\right)^3} - 1 = 0{,}1797;$ тобто $\bar{i} = 17{,}97$ %.

Визначимо середню відсоткову ставку в споріднених фінансових операціях за умови, що змінюється відсоткова ставка і сума позик, а термін фінансових операцій не змінюється. Шукану середню відсоткову ставку визначимо з умови рівності нарощених сум для простих відсотків:

$$\sum_{k=1}^{n} K_k\left(1+t\bar{i}\right) = \sum_{k=1}^{n} K_k\left(1+ti_k\right),$$

звідси маємо

$$\bar{i} = \frac{\sum_{k=1}^{n} K_k i_k}{\sum_{k=1}^{n} K_k}. \qquad (4.1)$$

Для складних відсотків аналогічно середню відсоткову ставку визначаємо з рівності

$$\sum_{k=1}^{n} K_k\left(1+\bar{i}\right)^t = \sum_{k=1}^{n} K_k\left(1+i_k\right)^{t_k},$$

звідси отримаємо

$$\bar{i} = \sqrt[t]{\frac{\sum_{k=1}^{n} K_k \left(1 + i_k\right)^{t_k}}{\sum_{k=1}^{n} K_k}} - 1. \qquad (4.2)$$

Формули (4.1) і (4.2), застосовують лише за умови однакових термінів позик. За інших умов розв'язок такої задачі ускладнюється.

4.3. Податки та відсотки

У деяких державах відсоткові гроші обкладаються податком, отже, прибутковість депозитної фінансової операції зменшується.

Нехай відсоткова ставка податку дорівнює r, а загальна сума податку – G. Якщо нараховуються прості відсотки на весь термін депозиту, то $G = K\,t\,i\,r$, а нарощена сума після сплати податку визначається за формулою:

$$\begin{aligned} S^t &= S - (S - K)r = (1 - r)S + Kr = \\ &= K(1 - r)(1 + ti) + Kr = K\left[1 + t(1 - r)i\right]. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Аналізуючи формулу (4.3), можна зробити висновок, що відсоткова ставка нарощення i зменшилась, фактично вона дорівнює $(1 - r)i.$

При нарощенні депозиту в довготермінових операціях за складними відсотками розмір податку на весь термін депозиту визначатиметься:

$$G = (S - K)r = \left[K(1 + i)^t - K\right]r = K \cdot r\left[(1 + i)^t - 1\right]. \qquad (4.4)$$

Відповідно, нарощена сума після сплати податку буде такою:

$$S^t = S - G = K(1 + i)^t - K \cdot r \cdot \left[(1 + i)^t - 1\right] = K\left[(1 - r)(1 + i)^t + r\right].$$

Якщо податок сплачується за кожний рік, то сума податку визначатиметься за тією ж формулою (4.4), але для платника податку має значення, коли він його сплачує.

Запитання та вправи для самоперевірки

1. Що означає поняття «еквівалентні відсоткові ставки»?

2. Виведіть формули еквівалентності між простими і складними відсотковими ставками.

3. Виведіть формули еквівалентності між силою зростання і складною відсотковою ставкою.

4. Виведіть формулу для середньої відсоткової ставки при простих відсотках.

5. Виведіть формулу для середньої відсоткової ставки при складних відсотках.

6. Як обчислюється податок на відсоткові гроші на весь термін депозиту?

7. Якою еквівалентною складною річною відсотковою ставкою можна замінити в контракті просту ставку

8. 20 %? Термін операції – півроку.

(Відповідь: 21 %)

9. Визначте, за який термін сума, покладена під 30 % складних річних відсотків, зросте у 5 разів.

(Відповідь: через 6,1 року)

10. Визначити середню відсоткову ставку позики протягом 5 років, якщо перших 2 роки застосовувалась складна ставка 15 %, а наступні 3 роки – 20 %.

(Відповідь: 17,974 %)

Розділ 5. ***ВРАХУВАННЯ ІНФЛЯЦІЇ У ФІНАНСОВИХ РОЗРАХУНКАХ***

5.1. Механізм інфляції

Інфляція характеризується знеціненням національної валюти, що рівнозначно зниженню її купівельної спроможності, внаслідок чого підвищуються ціни.

Інфляцію можна розглядати як дизбаланс між попитом та пропозицією, коли величина попиту перевищує величину пропозиції товару, внаслідок чого виникає надлишковий попит – дефіцит. Тому розрізняють інфляцію попиту й інфляцію витрат.

Інфляція попиту породжується випередженням попиту над пропозицією. Зміну попиту може спричинити:

— зміна споживчих витрат під впливом державних асигнувань на дотації, соціальної допомоги;

— зміна інвестиційних витрат населення, підприємств;

— збільшення обсягу чистого експорту.

За таких умов не може бути вироблена додаткова кількість продукції для компенсації надлишкового попиту, внаслідок чого зростають ціни.

Інфляція витрат породжується змушеним зростанням витрат. Ріст витрат обумовлюється такими причинами:

— дефіцитністю і ростом цін на первинні ресурси;

— зниженням ефективності виробництва;

— підвищенням податків і відрахувань.

Зростання витрат змушує виробників підвищувати ціни, щоб компенсувати додаткові витрати. Крім цього, підвищення сукупних витрат спричинює зменшення виробництва. Інфляційний процес при цьому розвивається у двох напрямках:

— відкрита інфляція, коли ціни постійно зростають;

— схована інфляція, що супроводжується державним контролем над цінами і зарплатою.

5.2. Показники інфляції

Інфляція має вирішальне значення при розрахунках у фінансових операціях. Нехай S_α – сума, купівельна спроможність якої з урахуванням інфляції дорівнює купівельній спроможності суми S без інфляції. Різницю між цими сумами позначимо

$$\Delta S = S_\alpha - S.$$

Відношення $\dfrac{\Delta S}{S}$, виражене у відсотках, називається *рівнем інфляції*.

Відносна величина рівня інфляції – *темп інфляції* α:

$$\alpha = \frac{\Delta S}{S}.$$

Темп інфляції подається в промілях. Вважається, що темп інфляції становить певну частину α на рік, якщо ті ж самі товари коштують наприкінці року в $(1+\alpha)$ разів більше, ніж на початку року. При цьому купівельна спроможність грошової одиниці зменшується в $(1+\alpha)$ разів.

Інфляція зменшує реальну відсоткову ставку, яка буде вже відсотковою ставкою в умовах інфляції, тобто

$$S_\alpha = S + \Delta S = S + S \cdot \alpha = S(1+\alpha). \qquad (5.1)$$

Множник $(1+\alpha)$ показує, у скільки разів S_α більше S, а це значить у стільки ж разів виросли ціни. Даний множник називають *індексом інфляції*

$$I_\alpha = 1 + \alpha.$$

Підвищення індексу інфляції за певний період, порівняно з таким же попереднім періодом, вказує на прискорення інфляції.

Нехай α – темп інфляції, сталий за певний період часу. Розглянемо суми, еквівалентні за купівельною спроможністю в різні періоди:

перший $S_\alpha^{(1)} = S(1+\alpha)$,

другий $S_{\alpha}^{(2)} = S\left(1+\alpha\right)^{2}$,

…

n-й $S_{\alpha}^{(t)} = S\left(1+\alpha\right)^{t}$.

Видно, що нарощення суми S при темпі інфляції α за період буде відбуватись за складною відсотковою ставкою. Через t періодів кінцева сума виросте відносно суми S у $\left(1+\alpha\right)^{t}$ разів, тому це необхідно враховувати в фінансових операціях.

Приклад 5.1. Нехай ціни щомісяця зростають на 5 %. Визначте річний рівень інфляції.

Розв'язання. Інколи за річний рівень інфляції приймають (спеціально):

$$5\ \%\cdot 12=60\ \%.$$

Тим часом, якщо рівень інфляції становить 5 % на місяць, ціни за місяць зростуть у (1+0,05)=1,05 рази. Відповідно, за рік ціни зростуть у $\left(1+0,05\right)^{12} = \left(1,05\right)^{12} = 1,8$ рази.

Таким чином, річний індекс інфляції становитиме 1,8, темп інфляції $1,8-1=0,8$, а рівень річної інфляції становитиме 80 %.

5.3. Нарахування відсотків в умовах інфляції

Розглянемо, у який спосіб нараховуються відсотки в умовах інфляції.

Якщо без інфляції теперішня сума K при заданій відсотковій ставці i перетвориться на суму S, то в умовах інфляції вона повинна перетворитися на суму S_{α}. Таке нарощення відбуватиметься за іншої відсоткової ставки, яка враховує інфляцію.

Введемо позначення відсоткових ставок, які враховують інфляцію:

i_{α} – відсоткова позичкова ставка;

d_{α} – облікова відсоткова ставка;

j_{α} – номінальна позичкова ставка;

f_{α} – номінальна облікова ставка.

Нехай задано річний темп інфляції α і просту відсоткову ставку i. Тоді для нарощеної суми S, що перетвориться на суму S_α, в умовах інфляції можна використовувати формулу (5.1):

$$S_\alpha = K(1+i_\alpha) = K(1+i)(1+\alpha).$$

Запишемо рівняння еквівалентності

$$1+i_\alpha = (1+i)(1+\alpha) = 1+\alpha+i+i\alpha,$$

тоді звідси

$$i_\alpha = i+\alpha+i\alpha. \qquad (5.2)$$

Це відома формула І. Фішера, у якій $\alpha+i\alpha$ є величина, яку необхідно добавити до відсоткової ставки i для компенсації інфляційних збитків. Величина $\alpha+i\alpha$ називається *інфляційною премією*.

Приклад 5.2. Нехай i =25 % і рівень інфляції 160 %. Обчислити i_α.

Розв'язання. За формулою (5.2) маємо

$$i_\alpha = i+\alpha+i\alpha = 0,25+1,6+1,6\cdot 0,25 = 2,25.$$

Отже, ставка прибутковості, яка враховує інфляцію, становить 225 %. Часто за відсоткову ставку помилково приймається величина

$$i+\alpha = 25+160+185\%.$$

Розглянемо різні схеми нарахування відсотків з урахуванням інфляції.

Для простих відсотків

$$S_\alpha = K(1+ti_\alpha).$$

З іншого боку,

$$S_\alpha = K(1+ti)(1+\alpha)^t.$$

Прирівняємо коефіцієнти нарощення

$$1+ti_\alpha = (1+ti)(1+\alpha)^t$$

і визначимо i_α:

$$i_\alpha = \frac{(1+ti)(1+\alpha)^t - 1}{t}. \qquad (5.3)$$

Для простих облікових ставок рівняння еквівалентності буде мати вигляд:

$$\frac{1}{1-td_\alpha}=\frac{1}{1-td}(1+\alpha)^t,$$

звідси облікова відсоткова ставка

$$d_\alpha=\frac{1}{t}\left(1-\frac{1-td}{1+\alpha}\right). \tag{5.4}$$

Для складних позичкових відсотків маємо:

$$S_\alpha=K\left(1+i_{c\alpha}\right)^t \text{ і } S_\alpha=K\left(1+i_c\right)^t\left(1+\alpha\right)^t,$$

де індекс c означає складні відсотки.

Рівняння еквівалентності буде мати такий вигляд:

$$\left(1+i_{c\alpha}\right)^t=\left(1+i_c\right)^t\left(1+\alpha\right)^t,$$

звідки відсоткова позичкова ставка становитиме

$$i_{c\alpha}=\alpha+i_c+\alpha i_c. \tag{5.5}$$

Якщо нарахування відсотків відбувається m разів на рік, то рівняння еквівалентності матиме вигляд

$$\left(1+\frac{j_\alpha}{m}\right)^{mt}=\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}\left(1+\alpha\right)^t,$$

звідки номінальна відсоткова ставка з урахуванням інфляції

$$j_\alpha=m\left[\left(1+\frac{j}{m}\right)\sqrt[m]{1+\alpha}-1\right]. \tag{5.6}$$

Якщо нарахування відсотків відбувається за складною обліковою ставкою, то рівняння еквівалентності буде таким:

$$\frac{1}{\left(1-d_{c\alpha}\right)^t}=\frac{1}{\left(1-d_c\right)^t}\cdot\left(1+\alpha\right)^t,$$

звідки отримаємо облікову відсоткову ставку

$$d_{c\alpha}=1-\frac{1-d_c}{1+\alpha}=\frac{\alpha+d_c}{1+\alpha}. \tag{5.7}$$

При номінальній обліковій ставці отримаємо рівняння еквівалентності

$$\frac{1}{\left(1-\frac{f_\alpha}{m}\right)^{mt}}=\frac{1}{\left(1-\frac{f}{m}\right)^{mt}}\cdot(1+\alpha)^t,$$

з якого знайдемо номінальну облікову ставку, що враховує інфляцію:

$$f_\alpha = m-\frac{m-f}{\sqrt[m]{1+\alpha}}. \tag{5.8}$$

Використовуючи формули (5.3) – (5.8), можна обчислити відсоткову ставку, яка врахує інфляцію і забезпечить прибутковість фінансової операції. Так, з формули (5.3) можна визначити відсоткову ставку i, яка дасть реальну прибутковість фінансової операції

$$i=\frac{ti_\alpha+1-(1+\alpha)^t}{t(1+\alpha)^t}.$$

З формули (5.5) так само отримаємо аналогічно відсоткову ставку i_c для складних відсотків:

$$i_c=\frac{i_{c\alpha}-\alpha}{1+\alpha}. \tag{5.9}$$

Аналізуючи формулу (5.9), можна зробити такі висновки:

– якщо $i_{c\alpha}=\alpha$ (прибутковість дорівнює рівню інфляції), то $i_c=0$, тобто весь прибуток поглинається інфляцією;

– якщо $i_{c\alpha}<\alpha$ (прибутковість нижча за рівень інфляції), то $i_c<0$, фінансова операція збиткова;

– якщо $i_{c\alpha}>\alpha$ (прибутковість вища за рівень інфляції), то $i_c>0$, фінансова операція має реальний дохід.

Приклад 5.3. Кредит у розмірі 5 млн грн виданий на 2 роки. Прибутковість операції повинна становити 20 % річних за складними відсотками. Очікуваний рівень інфляції становитиме 150 %

річних. Обчислити множник нарощення, складну відсоткову ставку з урахуванням інфляції і відповідно нарощену суму.

Розв'язання. Множник нарощення буде дорівнювати $(1+0,2)^2 \cdot (1+1,5)^2 = 1,44 \cdot 6,25 = 9.$

Нарощена сума

$$S_\alpha = 5 \cdot 9 = 45 \text{ млн грн}$$

і, нарешті, відсоткова ставка, яка б ураховувала інфляцію,

$$i_\alpha = (1+0,2)(1+1,5) - 1 = 2.$$

Тобто, $i_\alpha = 200\%$.

Запитання та вправи для самоперевірки

1. Що таке інфляція?
2. Що таке інфляція попиту й інфляція витрат?
3. Що таке відкрита і прихована інфляція?
4. Визначте поняття рівня, темпу та індексу інфляції. Яка між ними різниця?
5. В яких одиницях вимірюється темп, рівень та індекс інфляції?
6. Виведіть формулу І. Фішера для визначення ставки прибутковості з урахуванням інфляції.
7. Чому за наявності інфляції важливо використовувати схему нарахування за складними відсотками?
8. Як визначити інфляцію за кілька років, якщо відома річна інфляція?
9. Як визначити інфляцію за квартал, якщо відома річна інфляція?
10. Обчисліть, яку відсоткову ставку повинен установити банк, щоб при річному рівні інфляції 12 % реальна прибутковість дорівнювала 10 %.

(Відповідь: 23,2 %)

Розділ 6. ***СТАЛІ ФІНАНСОВІ ПОТОКИ***

6.1. *Види фінансових потоків і їх параметри*

Фінансовим потоком називається надходження або виплата грошей, які утворюють певну послідовність у часі.

Погашення довготермінових кредитів, орендні виплати, виплати пенсій та інші послідовні в часі грошові надходження утворюють потік фінансових платежів.

Окремий платіж такого потоку називають *елементом* і позначають літерою R. Елемент потоку має певну величину зі знаком «плюс» або «мінус», а також момент часу, у який платіж здійснюється. Якщо платіж має знак «плюс» – це надходження грошей, знак «мінус» – виплата грошей.

Фінансовий потік може бути регулярним або нерегулярним. Регулярний потік передбачає однакові часові інтервали між платежами, а самі платежі можуть бути сталими або можуть змінюватись за певним правилом.

Потік платежів, усі елементи якого додатні, а часові інтервали між платежами однакові, називають *фінансовою рентою* або просто *рентою*.

Ренту з річним періодом надходження платежів називають *ануїтетом*.

Рента характеризується такими параметрами:

– елемент потоку – розмір окремого платежу;
– період – інтервал часу між послідовними платежами;
– термін – час від початку до кінця ренти;
– відсоткова ставка.

Для характеристики деяких рент додатково вказують кількість платежів на рік, спосіб і частоту нарахування відсотків, закономірність зміни розмірів платежів.

Ренти класифікуються за такими критеріями:

– за кількістю виплат на рік – річні, p-термінові;
– за частотою виплат – дискретні, неперервні;
– за обов’язковістю виплат – умовні, безумовні;
– за кількістю платежів – обмежені, необмежені;
– за величиною платежів – сталі, змінні;

– за моментом платежу – постнумерандо, пренумерандо.

Узагальнюючими показниками для будь-яких видів фінансових потоків є нарощена (майбутня) сума або теперішня сума.

Нарощена сума фінансового потоку – це сума всіх платежів з нарахованими на них відсотками на кінець терміну потоку.

Теперішня сума фінансового потоку – це сума всіх платежів, дисконтованих на початок терміну потоку.

Надалі будемо користуватися позначеннями:

S – нарощена сума потоку;

K – теперішня сума потоку;

R_i – сумарний річний платіж;

t_i – момент часу сплати i -го платежу;

i – відсоткова ставка (ставка порівняння);

m – кількість разів нарахування відсотків на рік.

6.2. Прямий метод обчислення нарощеної і теперішньої сум грошового потоку

Спочатку розглянемо потоки постнумерандо. Нехай є низка платежів R_i, які поступають у момент часу t_i після деякого початкового часу $t_0 = 0$. Загальний термін надходжень платежів t років. Необхідно обчислити нарощену суму такого потоку на кінець терміну. Відсотки нараховуються раз на рік за складною ставкою i. Схема утворення нарощеної суми фінансового потоку на момент часу t схематично показано на рис. 6.1.

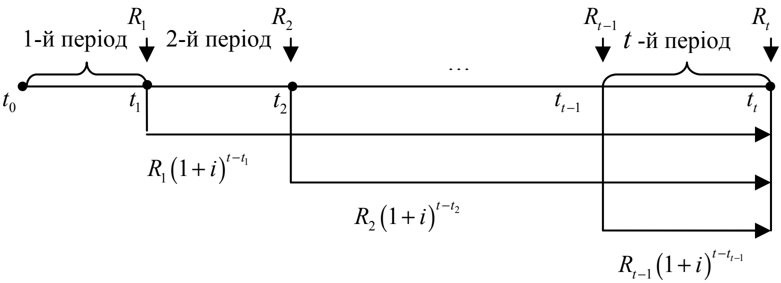

Рис. 6.1

На платежі діють різні множники нарощення залежно від номера періоду надходження. Так, на останній платіж R_t не будуть нараховані відсотки, на перший перетвориться на $R_1\left(1+i\right)^{t-t_1}$. Отже, нарощена сума визначатиметься за формулою

$$S=\sum_{j=1}^{t}R_j\left(1+i\right)^{t-t_j}. \qquad (6.1)$$

Теперішня сума такого потоку також визначатиметься як сума дисконтованих платежів

$$K=\sum_{i=1}^{t}R_i v^{t_i}, \qquad (6.2)$$

де $v=\dfrac{1}{1+i}$ – дисконтний множник за ставкою i.

Як уже було зазначено, теперішня сума платежів є узагальненою оцінкою, що відноситься здебільшого до початку потоку, а нарощена сума теж є узагальненою оцінкою, що відноситься до кінця терміну потоку. Між цими величинами K і S існує функціональна залежність. Дисконтуючи нарощену суму S, отримаємо

$$Sv^t=\sum_{i=1}^{t}R_i\cdot\left(1+i\right)^{t-t_i}\cdot v^t=\sum_{i=1}^{t}R_i\cdot\left(1+i\right)^{-t_i}=\sum_{i=1}^{n}R_i v^{t_i}=K. \qquad (6.3)$$

Нарощуючи теперішню суму за ставкою i, маємо

$$K\cdot\left(1+i\right)^t=\sum_{i=1}^{n}R_i\cdot v^{t_i}\left(1+i\right)^t=\sum_{i=1}^{n}R_i\left(1+i\right)^{t-t_i}=S.$$

Приклад 6.1. Контракт передбачає такий потік грошей: 1 липня 2007 р. – 5 млн грн, 1 січня 2008 р. – 15 млн грн, 1 січня 2010 р. – 18 млн грн. Визначити нарощену суму на 2011 рік, якщо складні відсотки нараховуються по ставці 20 %.

Розв'язання. Визначаємо S за формулою (6.1):

$$S=5\cdot\left(1+0,2\right)^{3,5}+15\cdot\left(1+0,2\right)^{3}+18\cdot\left(1+0,2\right)=56,98 \text{ млн грн.}$$

Користуючись формулою (6.2), обчислимо теперішню суму потоку на 1 липня 2007 р.:

$$K=5+15\cdot\left(1+0,2\right)^{-0,5}+18\left(1+0,2\right)^{-3,5}=30,1 \text{ млн грн,}$$

а за формулою (6.3)

$$K=S\left(1+i\right)^{-t}=56,98\cdot\left(1+0,2\right)^{-2,5}=30,1 \text{ млн грн.}$$

Приклад 6.2. Фінансовий потік передбачає такі платежі: 1 січня 2006 р. – мінус 2 млн грн, 1 січня 2007 р. – 1 млн грн, 1 січня 2008 р. – 2 млн грн. Визначити нарощену на 01.01.2008 р. і на 01.01.2005 р. суми, якщо складна ставка 10 %.

Розв'язання.

$$K = -2 \cdot (1+0{,}1)^{-1} + 1 \cdot (1+0{,}1)^{-2} + 2 \cdot (1+0{,}1)^{-3} = 0{,}5108 \text{ млн грн},$$

тоді

$$S = K \cdot (1+i)^3 = 0{,}5108 \cdot (1{,}1)^3 = 0{,}6798 \text{ млн грн.}$$

6.3. Нарощена і теперішня суми річної ренти (ануїтету)

Нехай протягом t років у кінці кожного року надходять платежі по R гривень. На платежі нараховуються складні відсотки за ставкою i річних. Нарощення платежів схематично показано на рис. 6.2.

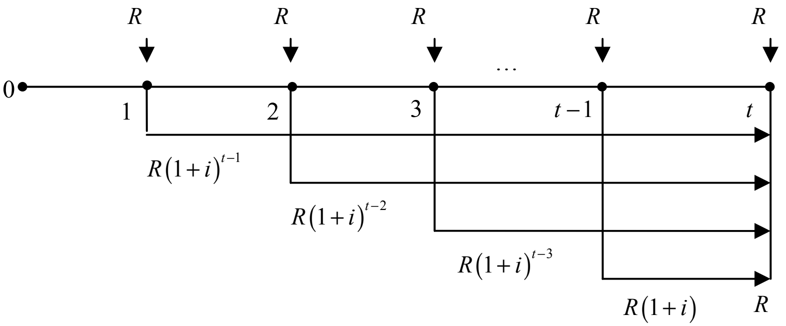

Рис. 6.2

Нарощені до кінця ренти платежі складають послідовність, яка змінюється за правилом геометричної прогресії

$$R(1+i)^{t-1},\ R(1+i)^{t-2},\ R(1+i)^{t-3},\ \ldots,\ R(1+i),\ R.$$

Перший елемент прогресії $b_1 = R(1+i)^{t-1}$ і знаменник $q = \dfrac{1}{1+i}$.

Скористаємось формулою (1.4) і знайдемо

$$S=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\frac{R\left(1+i\right)^{t-1}\left(1-\frac{1}{\left(1+i\right)^t}\right)}{1-\frac{1}{1+i}}=R\cdot\frac{\left(1+i\right)^t-1}{i}. \qquad (6.5)$$

Введемо позначення $s_{t,i}=\frac{\left(1+i\right)^t-1}{i}$ – коефіцієнт нарощення ренти.

Отже, $S=Rs_{t,i}$.

Як бачимо, коефіцієнт нарощення ренти залежить тільки від терміну t (кількість елементів ренти) і відсоткової ставки i. Значення коефіцієнта легко табулюється і подається у вигляді таблиці.

Приклад 6.3. Щорічно протягом 4 років на спеціальний рахунок надходить 50000 гривень. Обчисліть нарощену суму, якщо відсоткова ставка 10 %.

Розв'язання.

$$S=R\frac{\left(1+i\right)^t-1}{i}=50000\frac{\left(1+0,1\right)^4-1}{0,1}=50000\cdot 4,641=232050 \text{ грн.}$$

Обчислимо теперішню суму річної ренти, яку ми розглядаємо. Дисконтована величина першого платежу дорівнює $R\nu$, другого – $R\nu^2$, третього – $R\nu^3$, …, t-го платежу – $R\nu^t$. Маємо послідовність $R\nu, R\nu^2, R\nu^3, ..., R\nu^t$, яка є геометричною прогресією, де $b_1=R\nu,\ q=\nu$.

Відповідно до формули (1.4) сума послідовності дисконтованих платежів – теперішня сума ренти:

$$K=R\sum_{j=1}^{t}\nu^j=R\nu\frac{\nu^t-1}{\nu-1}=R\frac{1-\left(1+i\right)^{-t}}{i}=R\alpha_{t,i}. \qquad (6.6)$$

Множник $\alpha_{t,i}=\frac{1-\left(1+i\right)^{-t}}{i}$ – коефіцієнт зведення ренти. Значення $\alpha_{t,i}$ табульовані і подаються у вигляді таблиці.

Звернемо увагу на деякі властивості коефіцієнта $\alpha_{t,i}$. Чим більше значення i, тим менша величина коефіцієнта. При $t \to \infty$ граничне значення коефіцієнта

$$\lim_{t\to\infty} \alpha_{t,i} = \lim_{t\to\infty} \frac{\left[1-(1+i)^{-t}\right]}{i} = \frac{1}{i}.$$

6.4. Нарощена і теперішня суми річної ренти з нарахуванням відсотків m разів на рік

Нехай є річна рента постнумерандо з нарахуванням відсотків m разів на рік. Нарощені платежі утворять послідовність

$$R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(t-1)m},\ R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(t-2)m},\ ...,\ R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{2m},\ R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m},\ R,$$

де j – номінальна відсоткова ставка. Очевидно, що послідовність платежів є геометричною прогресією з першим членом $b_1 = R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(t-1)m}$ і знаменником $q = \frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}}$.

Сума даної послідовності платежів дорівнює

$$S = R\left(1+\frac{j}{m}\right)^{(t-1)m} \cdot \frac{1-\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{tm}}}{1-\frac{1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}}} = R \cdot \frac{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{mt}-1}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1} = Rs_{mt,{}^{j}\!/_{m}}, \quad (6.7)$$

де $s_{mt,{}^{j}\!/_{m}}$ – множник нарощення даної ренти.

Приклад 6.4. На спеціальний рахунок протягом п’яти років надходять платежі в розмірі 4 млн грн на рік, на які нараховуються щоквартально відсотки за номінальною ставкою 18,5 % річних. Обчисліть нарощену суму.

Розв'язання.

$$S=R\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mt}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}-1}=4\frac{\left(1+\frac{0,185}{4}\right)^{20}-1}{\left(1+\frac{0,185}{4}\right)^{4}-1}=29,663 \text{ млн грн.}$$

Теперішню суму річної ренти з m-разовим нарахуванням відсотків протягом року визначимо дисконтуючи нарощену суму

$$K=S\cdot \nu^{mt}=R\frac{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{mt}-1}{\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1}\cdot\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mt}=R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{-mt}}{1-\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}-1}=R\cdot\alpha_{mt,{}^{j}\!/_{m}}, \quad (6.8)$$

де $\alpha_{mt,{}^{j}\!/_{m}}$ – множник дисконтування.

6.5. Нарощена і теперішня суми p-термінової ренти

Нехай платежі надходять p разів на рік однаковими сумами, відсотки нараховуються один раз у кінці року $(m=1)$. Якщо річна сума платежів дорівнює R, то разовий платіж дорівнює $\frac{R}{p}$. Загальна кількість платежів ренти дорівнює tp. Послідовність платежів ренти з нарахованими відсотками

$$\frac{R}{p}(1+i)^{\frac{tp-1}{p}};\ \frac{R}{p}(1+i)^{\frac{tp-1}{p}};\ ...;\ \frac{R}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}};\ \frac{R}{p},$$

записуємо її у зворотному порядку

$$\frac{R}{p};\ \frac{R}{p}(1+i)^{\frac{1}{p}};\ ...;\ \frac{R}{p_A}(1+i)^{\frac{tp-1}{p}};\ \frac{R}{p}(1+i)^{\frac{tp-1}{p}}.$$

Це є геометрична прогресія, де $b_1=\frac{R}{p}$, а $q=(1+i)^{\frac{1}{p}}$, і її сума:

$$S=\frac{R}{p}\frac{1-(1+i)^{\frac{tp}{p}}}{1-(1+i)^{\frac{1}{p}}}=R\frac{(1+i)^t-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}=R\cdot s_{t,i}^{(p)}, \qquad (6.9)$$

де $s_{t,i}^{(p)}=\dfrac{(1+i)^t-1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$ – множник нарощення даної ренти.

Теперішня сума такої ренти визначатиметься за формулою

$$K=\frac{R}{p}\sum_{j=1}^{tp}\nu^{\frac{j}{p}}=R\frac{1-(1+i)^{-t}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}=R\alpha_{t,i}^{(p)}, \qquad (6.10)$$

де $\alpha_{t,i}^{(p)}=\dfrac{1-(1+i)^{-t}}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}$ – множник дисконтування даної ренти.

Приклад 6.5. У прикладі 6.4 змінимо умову. Припустимо, що платежі надходять щоквартально $(p=4)$. Обчисліть нарощену суму, якщо відсотки нараховуються один раз на рік за ставкою 18,5 %.

Розв'язання.

$$S=R\frac{(1+i)^t-1}{p\left[(1+i)^{1/p}-1\right]}=\frac{4}{4}\cdot\frac{(1+0{,}185)^5}{(1+0{,}185)^{\frac{1}{4}}}=30{,}834 \text{ млн грн.}$$

Частіше зустрічаються ренти, коли кількість надходжень платежів на рік p дорівнює кількості нарахувань відсотків m: $p=m$.

Для отримання формул нарощеної і теперішньої сум даної p-термінової ренти використовуємо формули (6.5) і (6.6). Разовий платіж $\frac{R}{m}$, кількість періодів – tm, відсоткова ставка – j/m. Тому у формулах (6.5) і (6.6) замінимо R на $\frac{R}{m}$, t на tm, відсоткову ставку на j/m. Маємо нарощену суму

$$S=\frac{R}{m}\cdot\frac{\left(1+{}^{j}\!/\!{}_{m}\right)^{tm}-1}{{}^{j}\!/\!{}_{m}}=R\frac{\left(1+{}^{j}\!/\!{}_{m}\right)^{tm}-1}{j}\qquad(6.11)$$

і теперішню суму

$$K=\frac{R}{m}\cdot\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/\!{}_{m}\right)^{-tm}}{{}^{j}\!/\!{}_{m}}=R\frac{1-\left(1+{}^{j}\!/\!{}_{m}\right)^{-tm}}{j}.\qquad(6.12)$$

Ми скористались формулами (6.5) і (6.6), тому що, як і в річній ренті, кількість платежів p - термінової ренти дорівнює кількості нарахувань відсотків.

6.6. Нарощена і теперішня суми річної ренти з неперервним нарахуванням відсотків

Нехай надходять річні платежі R постнумерандо, на які нараховують неперервні відсотки з силою зростання δ. Маємо послідовність нарощених платежів

$$\mathrm{Re}^{(t-1)\delta};\ \mathrm{Re}^{(t-2)\delta};\ ...;\ \mathrm{Re}^{\delta};\ R.$$

Дана послідовність утворює геометричну прогресію з $b_1=\mathrm{Re}^{(t-1)\delta}$ і $q=e^{-\delta}$, і її сума визначається так:

$$S=\mathrm{Re}^{(t-1)\delta}\frac{1-e^{-t\delta}}{1-e^{-\delta}}=R\frac{e^{t\delta}-1}{e^{\delta}-1}=Rs_{t,\delta},\qquad(6.13)$$

де $s_{t,\delta}=\dfrac{e^{t\delta}-1}{e^{\delta}-1}$ – множник нарощення даної ренти. Це нарощена сума ренти при неперервному нарахуванні відсотків.

Аналогічно визначаємо теперішню суму. Нехай маємо річні платежі R з неперервним нарахуванням відсотків при силі зростання δ. Дисконтуючи цей ряд платежів, отримаємо послідовність

$$\mathrm{Re}^{-\delta};\ \mathrm{Re}^{-2\delta};\ ...;\ \mathrm{Re}^{-t\delta},$$

яка є також геометричною прогресією з $b_1=\mathrm{Re}^{-\delta}, q=e^{-\delta}$, і її сума визначається:

$$K = \mathrm{Re}^{-\delta}\frac{1-e^{-t\delta}}{1-e^{\delta}} = R\frac{1-e^{-t\delta}}{e^{-\delta}-1} = R\cdot\alpha_{t,\delta}, \qquad (6.14)$$

де $\alpha_{t,\delta} = \dfrac{1-e^{-t\delta}}{e^{\delta}-1}$ – множник дисконтування даної ренти.

Приклад 6.6. Обчисліть теперішню суму ренти постнумерандо з річними платежами 4 млн грн, терміном 5 років і неперервним нарахуванням відсотків при силі росту 18,5 %.

Розв'язання. Скористаємося формулою (6.14):

$$K = R\frac{1-e^{-t\delta}}{e^{\delta}-1} = 4\cdot\frac{1-e^{-5\cdot 0,185}}{e^{0,185}-1} = 11,878 \text{ (млн грн).}$$

Так само для p - термінової ренти визначаємо нарощену і теперішню суми

$$S = R\frac{e^{\delta t}-1}{p\left(e^{\delta/p}-1\right)} = Rs_{t,\delta}^{(p)}; \qquad (6.15)$$

$$K = R\frac{1-e^{-\delta t}}{p\left(e^{\delta/p}-1\right)} = R\alpha_{t,\delta}^{(p)}, \qquad (6.16)$$

де $s_{t,\delta}^{(p)}$ і $\alpha_{t,\delta}^{(p)}$ – множники нарощення та дисконтування річної ренти з неперервним нарахуванням відсотків.

6.7. Визначення параметрів сталих рент постнумерандо

Для сталих рент основними параметрами є R, t, i та додаткові параметри $j, p, m.$ При розробці контрактів часто задають узагальнюючі характеристики S і K для обчислення інших параметрів.

Обчислення розмірів платежів ренти.

Нехай у сталій ренті відомі S або K та всі інші параметри, крім R. Тоді, якщо це річна рента, із формул (6.5) або (6.6) маємо

$$R = \frac{S}{\dfrac{(1+i)^t-1}{i}} = \frac{S}{s_{t,i}},$$

$$R=\frac{K}{\frac{1-(1+i)^{-t}}{i}}=\frac{K}{\alpha_{t,i}}.$$

Таким способом можна визначити R із формул (6.7) і (6.8). Формули (6.9) – (6.16) використовують для інших видів рент.

Обчислення терміну ренти.

Знову скористаємось перерахованими вище формулами і з них визначимо t. Розглянемо річну ренту формул (6.5) і (6.6)

$$S=R\cdot\frac{(1+i)^{t}-1}{i}.$$

Розв'яжемо дану рівність відносно t:

$$\frac{Si}{R}=(1+i)^{t}-1;\ \ (1+i)^{t}=\frac{Si}{R}+1,$$

логарифмуємо останню рівність і отримаємо

$$t=\frac{\ln\left(\frac{S}{R}i+1\right)}{\ln(i+1)}.$$

Аналогічно з формули (6.6) отримаємо

$$t=-\frac{\ln\left(1-\frac{K}{R}i\right)}{\ln(1+i)}. \tag{6.17}$$

Приклад 6.7. Маємо річну ренту постнумерандо з річними платежами 1000 грн і відсоткову ставку 8 %. Обчисліть тривалість ренти, якщо теперішня сума ренти 4000 грн.

Розв'язання. Використовуючи формулу (6.17), маємо

$$t=-\frac{\ln\left(1-\frac{K}{R}i\right)}{\ln(1+i)}=-\frac{l\,\mathrm{n}\left(1-\frac{4000}{1000}\cdot 0,08\right)}{\ln(1+0,08)}\approx 5 \text{ років.}$$

Для інших видів рент так само використовуємо формули нарощеної і теперішньої сум, з яких визначаємо t.

При обчисленні t необхідно враховувати таке:

– розрахункові значення t, як правило, будуть дробовими і в таких випадках округлення робиться до найближчої кількості періодів нарахування відсотків;

– при округленні розрахункового значення t необхідно звернути увагу нате наскільки зміняться нарощена або теперішня суми.

Обчислення розмірів відсоткової ставки

Обчислення розмірів відсоткової ставки за іншими параметрами ренти – трудомісткий процес.

Найпростіший випадок, коли необхідно розв'язати рівняння

$$S = R\frac{\left(1+i\right)^t - 1}{i},$$

або

$$K = R\frac{1-\left(1+i\right)^{-t}}{i}$$

відносно i. Але неважко переконатись, що аналітичного розв'язку немає.

Розв'язок нелінійних рівнянь

$$\frac{K}{R} = \frac{1-\left(1+i\right)^{-t}}{i} = \alpha_{t,i};$$

$$\frac{S}{R} = \frac{\left(1+i\right)^t - 1}{i} = s_{t,i} \qquad (6.18)$$

має бути тільки наближеним. Є декілька методів розв'язання таких рівнянь. Ми розглянемо метод лінійної інтерполяції.

Спочатку необхідно методом підбору знайти нижню $\left(i_н\right)$ і верхню $\left(i_в\right)$ оцінки відсоткових ставок. Для цього необхідно в праву частину рівностей (6.18) підставити різні числові значення i та порівняти результати з лівою частиною рівності (6.18).

Далі коригування нижнього (верхнього) значення відсоткової ставки відбувається за такою інтерполяційною формулою:

$$i = i_н + \frac{S/_R - s^{н}_{t,i}}{s^{в}_{t,i} - s^{н}_{t,i}}\left(i_в - i_н\right), \qquad (6.19)$$

де $s^{н}_{t,i}$, $s^{в}_{t,i}$ – значення коефіцієнта нарощення (або коефіцієнта зведення) ренти відповідно для відсоткових ставок $i_н$ і $i_в$.

Отримане значення ставки перевіряють, підставляючи його в праву частину рівності (6.18) і порівнюючи з лівою. Якщо досягнута точність недостатня, то знову застосовують формулу (6.19), замінивши в ній одне зі значень $i_н$ або $i_в$ на більш точне, знайдене з попередньої ітерації.

Процес визначення відсоткової ставки за заданими параметрами сталої ренти автоматизований програмним пакетом Excel – функцією «Ставка».

6.8. Нарощена і теперішня суми інших видів сталих рент

Ренти пренумерандо

Під рентою пренумерандо розуміють ренту з платежами на початку періоду (рис. 6.3).

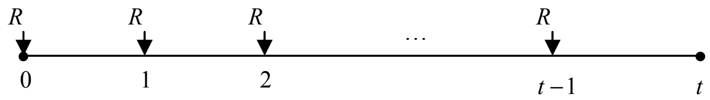

Рис. 6.3

Легко помітити, що кожний платіж такої ренти при нарощенні «працює» на один період більше, ніж у ренті постнумерандо. Тому нарощена сума ренти пренумерандо $\overline{S}$, більша в $(1+i)$ разів, ніж аналогічна рента постнумерандо:

$$\overline{S} = S(1+i)$$

Коефіцієнти нарощення річних рент пренумерандо і постнумерандо пов'язані між собою рівністю:

$$\overline{s_{t,i}} = s_{t,i}\left(1+i\right).$$

Приклад 6.8. Річна рента пренумерандо з платежами 1000 грн., термін п'ять років зі ставкою дисконтування 10 %. Обчисліть нарощену суму і теперішню суму ренти.

Розв'язання. Зроблені розрахунки занесемо на числову вісь, зображену на рис. 6.4.

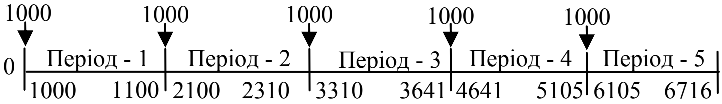

Рис. 6.4

Ці дані свідчать про те, що нарощена сума ренти пренумерандо $S = 6716$ грн. Теперішню суму обчислимо за формулою:

$$K = S\left(1+i\right)^{-t} = 6716\left(1+0{,}1\right)^{-5} = 4170 \text{ грн.}$$

Аналогічно отримаємо нарощену суму для річної ренти з нарахуваннями відсотків m разів за рік

$$\overline{S} = S\left(1+{}^{j}\!/_{m}\right)^{m}.$$

Така ж залежність існує між теперішніми сумами річних рент пренумерандо $\overline{K}$ і постнумерандо

$$\overline{K} = K\left(1+i\right);\ \overline{K} = K\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m}.$$

Коефіцієнти дисконтування річних рент пренумерандо і постнумерандо пов'язані між собою рівністю:

$$\overline{\alpha}_{t,i} = \alpha_{t,i}\left(1+i\right).$$

Відкладена (відстрочена) рента

У відкладеній ренті платежі надходять пізніше кінця першого періоду.

Наприклад, сплачуючи покупку товару за угодою необхідно зробити 20 щоквартальних внесків по 60 грн. При цьому перший внесок зроблений через 2 роки після покупки. Це і є відкладена рента. Проміжок часу з моменту ренти (покупки) до моменту першого платежу має назву *період відстрочки* і позначається літерою τ (рис. 6.5).

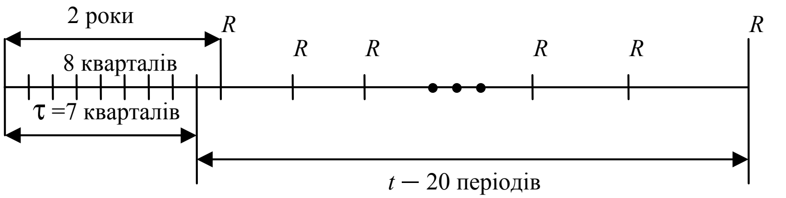

Рис. 6.5

Тривалість відстрочки визначається як проміжок від початку угоди до початку періоду першого внеску.

Нарощена сума відкладеної ренти визначається за звичайною формулою

$$S = R\frac{(1+i)^t - 1}{i} = R \cdot s_{t,i}.$$

Для цього прикладу нарощена сума при відсотковій річній ставці $i = 12\%$ і щоквартальному нарахуванні $j = 0,03$ становитиме:

$$S = 60\frac{(1+0,03)^{20} - 1}{0,03} \approx 1612,22 \text{ (грн)}.$$

Теперішня вартість відкладеної ренти, яка має t платежів, τ періодів відстрочки та відсоткову ставку i, визначається за формулою

$$K = R\frac{1-(1+i)^{-t}}{i} \cdot (1+i)^{-\tau}.$$

Сума $R \cdot \dfrac{1-(1+i)^{-t}}{i}$ – це теперішня сума ренти на момент початку першого періоду платежів, а далі дисконтуємо дану суму на τ періодів, тобто множимо на дисконтний множник $(1+i)^{-\tau}$ і дістанемо теперішню вартість відкладеної ренти (рис. 6.6).

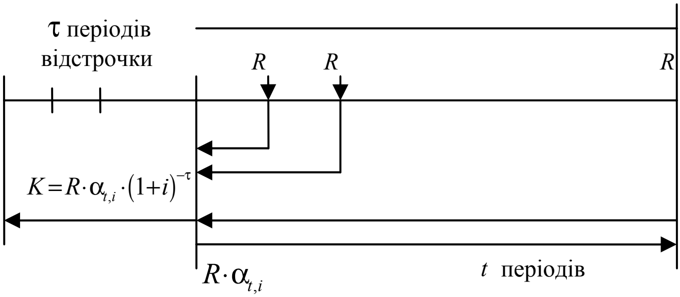

Рис. 6.6

$$K = 60\cdot\frac{1-(1+0,03)^{-20}}{0,03}\cdot(1+0,03)^{-7}\approx 725,81 \text{ грн.}$$

Вічна рента

Якщо кількість платежів ренти необмежена, то її називають *вічною рентою*, наприклад, коли термін платежів дуже великий або взагалі не обумовлений.

Нарощена сума вічної ренти – величина нескінченно велика. Теперішня сума вічної ренти визначається при $t\to\infty$ з межі

$$\lim_{t\to\infty} K = \lim_{t\to\infty} R\frac{1-(1+i)^{-t}}{i} = \frac{R}{i} - \lim_{t\to\infty}\frac{1}{i(1+i)^{t}} = \frac{R}{i}.$$

Очевидно, що теперішня сума вічної ренти залежить від розміру платежу та відсоткової ставки

$$K_{\infty} = \frac{R}{i}.$$

Для p-термінової ренти при річному нарахуванні відсотків $(m=1)$, використовуючи граничний перехід при $t\to\infty$ з формули (6.10), отримаємо:

$$K_{\infty} = \frac{R}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}}-1\right]}.$$

А при $m=p$, аналогічно з формули (6.12) маємо:

$$K_{\infty} = \frac{R}{j}.$$

Приклад 6.9. Бізнесмен узяв в оренду віллу за 50000 гривень на рік. Чому дорівнює викупна ціна оренди, якщо річна відсоткова ставка 5 %?

Розв'язання. Викупна ціна – це теперішня сума всіх майбутніх орендних виплат. Тоді

$$K = \frac{R}{i} = \frac{50000}{0,05} = 1000000 \text{ грн.}$$

Приклад 6.10. Яка теперішня сума вічної ренти з піврічним платежем у 5 млн грн, при відсотковій ставці 25 %.

Розв'язання.

$$K = \frac{R}{P\left(\left(1+i\right)^{\frac{1}{p}}-1\right)} = \frac{10}{2\left(\left(1+0,25\right)^{\frac{1}{2}}-1\right)} = 42,361 \text{ млн грн.}$$

Запитання та вправи для самоперевірки

1. Дайте визначення фінансового потоку?
2. Якими параметрами характеризується фінансовий потік?
3. Що таке теперішня і нарощена суми фінансового потоку?
4. Виведіть формулу нарощеної суми для ануїтету.
5. Виведіть формулу теперішньої суми для ануїтету.
6. Виведіть формули для обчислення терміну річної ренти.
7. Який взаємозв'язок між нарощеними сумами для рент постнумерандо і пренумерандо?
8. Що таке річна рента та відстрочена рента?
9. Обчисліть нарощену суму потоку грошей, постнумерандо: R =100 грн, t =5 років, i =6 % річних.

(Відповідь: 563,71 грн.)

10. Обчисліть нарощену суму потоку грошей, пренумерандо: R =100 грн, t =5 років, i =10 % річних.

(Відповідь: 610,51 грн)

11. Обчисліть нарощену суму потоку грошей постнумерандо: R =4 млн. грн., t =5 років, i =18,5 % річних.

(Відповідь: 28,9 млн грн)

12. Річна рента постнумерандо: R =4 млн грн, t =5 років, ставка порівняння i =18,5 %. Обчисліть теперішню суму ренти.

(Відповідь: 12,368 млн грн)

13. Обчисліть термін для нарощення 100 млн грн за умови щомісячного платежу розміром 1 млн грн і річної ставки 25 %.

(Відповідь: 437356 роки)

14. Обчислити теперішню вартість річної ренти, якщо сплачується в кінці кожного півріччя 5 млн грн, при річній ставці 25 %.

(Відповідь: 42,361 млн грн)

Розділ 7. ЗМІННІ ТА НЕПЕРЕРВНІ РЕНТИ

7.1. Ренти зі сталим абсолютним приростом платежів

У фінансовій практиці зустрічаються ренти, де платежі змінюються в часі. Розглянемо ренту, платежі якої змінюються відповідно до арифметичної прогресії з $a_1 = R$ і $d = a$. Платежі ренти утворюють послідовність:

$$R;\ R+a;\ R+2a;\ ...,\ R+(t-2)a;\ R+(t-1)a.$$

Визначимо нарощену суму такої ренти, підсумувавши платежі, помножені на відповідний коефіцієнт нарощення

$$\begin{aligned} S = {} & R(1+i)^{t-1} + (R+a)(1+i)^{t-2} + (R+2a)(1+i)^{t-3} + ... + \\ & + \left(R+(t-2)a\right)(1+i) + \left(R+(t-1)a\right). \end{aligned} \qquad (7.1)$$

Помножимо рівність (7.1) на $(1+i)$:

$$\begin{aligned} S(1+i) = {} & R(1+i)^{t} + (R+a)(1+i)^{t-1} + (R+2a)(1+i)^{t-n} + ... + \\ & + \left(R+(t-2)a\right)(1+i)^2 + \left(R+(t-1)a\right)(1+i). \end{aligned} \qquad (7.2)$$

Віднявши рівність (7.1) від (7.2), отримаємо:

$$Si = R\left((1+i)^t - 1\right) + a\left(1 + (1+i) + ... + (1+i)^{t-2} + (1+i)^{t-1}\right) - ta =$$

$$= R\left((1+i)^t - 1\right) + \left(\frac{(1+i)^t - 1}{i} - t\right)a.$$

У результаті маємо:

$$S = Rs_{t,i} + \frac{s_{t,i} - t}{i}a, \qquad (7.3)$$

де $s_{t,i}$ – множник нарощення сталої ренти, $\alpha_{t,i}$ – множник дисконтування.

Теперішня сума такої ренти буде такою:

$$K = S\nu^n = R\alpha_{t,i} + \frac{\alpha_{t,i} - t\nu^t}{i} a. \qquad (7.4)$$

Приклад 7.1. Перший платіж ренти постнумерандо дорівнює 15 млн грн. Наступні платежі зменшуються кожного разу на 1 млн грн за рік. Термін ренти – 10 років при відсотковій ставці 20 % річних. Обчисліть нарощену і теперішню суми ренти.

Розв'язання.

$$S = R \cdot s_{t,i} + \frac{s_{t,i} - t}{i} a = 15 \cdot s_{10,20} + \frac{s_{10,20} - 10}{0,2} \cdot (-1) =$$

$$= 389,38 - 79,793 = 309,557 \text{ млн грн;}$$

$$K = R \cdot \alpha_{t,i} + \frac{\alpha_{t,i} - t\nu^t}{i} a = 15 \cdot \alpha_{10,20} + \frac{\alpha_{10,20} - 10 \cdot 1,2^{-10}}{0,2} \cdot (-1) =$$

$$= 62,887 - 12,887 = 50 \text{ млн грн.}$$

Із формул (7.3), (7.4) можна визначити розмір першого платежу:

$$R = \frac{Si + ta}{i \cdot s_{t,i}} - \frac{a}{i},$$

$$R = \frac{Ki + ta\nu^t}{i \cdot \alpha_{t,i}} - \frac{a}{i}.$$

З тих же формул визначаємо розмір приросту при заданому R:

$$a = \frac{\left(S - R \cdot s_{t,i}\right) \cdot i}{s_{t,i} - t},$$

$$a = \frac{\left(K - R \cdot \alpha_{t,i}\right) \cdot i}{\alpha_{t,i} - t\nu^t}.$$

Нехай R – початковий разовий платіж, a – річний приріст. При p-терміновій ренті з постійним абсолютним приростом платежі утворюють послідовність

$$R;\ R + \frac{a}{p};\ R + 2\frac{a}{p};\ldots,\ R + (pt - 1)\frac{a}{p}.$$

Для ренти постнумерандо ця послідовність при ставці порівняння i утворить послідовність нарощених та дисконтованих платежів, для яких отримаємо відповідно нарощену та теперішню суми:

$$S=\sum_{j=1}^{pt}\left[R+\frac{a}{p}(j-1)\right](1+i)^{t-\frac{j}{p}},$$

$$K=\sum_{j=1}^{pt}\left(R+\frac{aj}{p}\right)\nu^{\frac{j}{p}}.$$

7.2. Ренти зі сталим відносним приростом платежів

Нехай платежі змінні в часі зі сталим відносним приростом, тобто змінюються за правилом геометричної прогресії. Потік таких платежів утворює послідовність $R, Rq, Rq^2, ..., Rq^{t-1}$ (q – темп зростання). Послідовність нарощених платежів ренти постнумерандо буде такою:

$$R(1+i)^{t-1}, Rq(1+i)^{t-2}, Rq^2(1+i)^{t-3}, ..., Rq^{t-1}.$$

Вона є геометричною прогресією з $b_1=R(1+i)^{t-1}$ і знаменником $\frac{q}{1+i}$ і її сума становить

$$S=R(1+i)^{t-1}\frac{1-\frac{q^t}{(1+i)^t}}{1-\frac{q}{1+i}}=R\frac{(1+i)^t-q^t}{(1+i)-q}. \qquad (7.5)$$

Теперішню суму отримаємо з формули (7.5), дисконтуючи її

$$K=S\nu^t=R\frac{1-(q\nu)^t}{(1+i)-q}. \qquad (7.6)$$

Нехай $q=1+k$, де k – темп приросту платежів. Підставимо q у вирази (7.5) і (7.6). Після елементарних перетворень отримаємо такі формули для нарощеної і теперішньої сум:

$$S = R\frac{(1+i)^t - (1+k)^t}{i-k}, \qquad (7.7)$$

$$K = R\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^t}{i-k}. \qquad (7.8)$$

Для річних рент пренумерандо з формул (7.7) і (7.8) отримаємо

$$\overline{S} = R\frac{(1+i)^t - q^t}{(1+i)-q}\cdot(1+i) = R\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^t}{i-k}(1+i)^{t+1},$$

$$\overline{K} = R\frac{1-(q\nu)^t}{(1+i)-q}\cdot(1+i) = R\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^t}{i-k}(1+i).$$

Приклад 7.2. Фінансові платежі постнумерандо утворюють регулярний потік у часі, перший платіж якого дорівнює 15 млн грн, наступні платежі збільшуються кожного року на 12 % $(k=0{,}12)$. Обчисліть теперішню і нарощену суми, якщо ставка нарахування – 20 % річних і термін фінансового потоку 10 років.

Розв'язання. Використовуємо формули (7.8) і (7.7):

$$K = R\frac{1-\left(\frac{1+k}{1+i}\right)^t}{i-k} = 15\cdot\frac{1-\left(\frac{1{,}12}{1{,}2}\right)^{10}}{0{,}2-0{,}12} = 93{,}448 \text{ млн грн};$$

$$S = R\frac{(1+i)^t - (1+k)^t}{1-k} = 15\cdot\frac{(1{,}2)^{10} - (1{,}12)^{10}}{0{,}2-0{,}12} = 578{,}604 \text{ млн грн.}$$

Якщо платежі надходять p разів на рік постнумерандо і відсотки нараховуються один раз на рік за ставкою i, то платежі утворюють послідовність $R, Rq, ..., Rq^{tp-1}$, де q – темп зростання за період. Сума нарощених платежів визначатиметься за формулою:

$$S = R\frac{q^{tp} - (1+i)^t}{q-(1+i)^{1/p}}.$$

Теперішня сума такої р-термінової ренти буде така:

$$K = S\nu^t = R\frac{q^{tp}\nu^t - 1}{q - (1+i)^{1/p}}.$$

7.3. Стала неперервна рента

Якщо в розглянутих вище рентах інтервал між платежами (період ренти) зменшується, наближається до нуля, то такий потік платежів можна сприймати як неперервний процес.

Обчислимо нарощену і теперішню суми для сталої неперервної ренти при річній відсотковій ставці i. У сталій неперервній ренті $p \to \infty$. Визначимо коефіцієнт нарощення неперервної ренти $\tilde{s}_{t,i}$, використовуючи коефіцієнт нарощення p- термінової ренти (7.9):

$$\tilde{s}_{t,i} = \lim_{p\to\infty} s_{t,i}^{(p)} = \lim_{p\to\infty} \frac{(1+i)^t - 1}{p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right]}. \qquad (7.9)$$

У знаменнику маємо невизначеність $\infty \cdot 0$, до якої застосуємо провило Лопіталя.

Розглянемо знаменник окремо:

$$\lim_{p\to\infty} p\left[(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1\right] = \lim_{p\to\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} - 1}{1/p} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{p\to\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{p}} \ln(1+i) \cdot \left(-\frac{1}{p^2}\right)}{-1/p^2} = 1 \cdot \ln(1+i) = \ln(1+i).$$

Отже, формула (7.9) матиме вигляд

$$\tilde{s}_{t,i} = \frac{(1+i)^t - 1}{\ln(1+i)}. \qquad (7.10)$$

Аналогічно отримаємо коефіцієнт зведення

$$\tilde{\alpha}_{t,i} = \frac{1 - (1+i)^{-t}}{\ln(1+i)}. \qquad (7.11)$$

Нарощена і теперішня суми визначатимуться за формулами:

$$S = R\tilde{s}_{t,i} = R\frac{(1+i)^t - 1}{\ln(1+i)};$$

$$K = R\tilde{\alpha}_{t,i} = R\frac{1-(1+i)^{-t}}{\ln(1+i)},$$

де R – загальна сума платежів протягом року.

Коефіцієнти нарощення та зведення сталих дискретних і неперервних рент пов'язані між собою такими співвідношеннями:

$$s_{t,i} = \frac{\ln(1+i)}{i}\cdot\tilde{s}_{t,i};\ \alpha_{t,i} = \frac{\ln(1+i)}{i}\cdot\tilde{\alpha}_{t,i}.$$

Розглянемо випадок, коли платежі і нарощення відсотків відбувається неперервно. Скориставшись формулами еквівалентності між неперервними і дискретними ставками

$$\delta = \ln(1+i),$$

$$i = e^{\delta} - 1$$

та формулами (7.10) і (7.11), отримаємо відповідні коефіцієнти для неперервної ренти з неперервним нарахуванням відсотків

$$\tilde{s}_{t,\delta} = \frac{e^{\delta t} - 1}{\delta},$$

$$\tilde{\alpha}_{t,i} = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}.$$

Відповідно S і K визначатимуться так:

$$S = R\cdot\tilde{s}_{t,\delta} = R\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta}; \tag{7.12}$$

$$K = R\cdot\tilde{\alpha}_{t,\delta} = R\frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}. \tag{7.13}$$

Приклад 7.3. Плановий дохід від експлуатації газового родовища становитиме 1 млрд на рік. Тривалість експлуатації 10 років. Капіталізація суми доходів відбуватиметься неперервно з силою зростання 10 %. Обчислити теперішню суму фінансового потоку.

Розв'язання. Використовуємо формулу (7.13):

$$K = R\frac{1-e^{-\delta t}}{\delta} = 1000\frac{1-e^{-0,1\cdot 10}}{0,1} = 6321,21 \text{ млн грн.}$$

7.4. *Обчислення терміну і розміру річного платежу для сталих неперервних рент*

Нехай відома нарощена сума неперервної ренти при дискретній відсотковій ставці i

$$S = R\cdot\tilde{s}_{t,i} = R\frac{(1+i)^t - 1}{\ln(1+i)}, \tag{7.14}$$

і теперішня зі ставкою i

$$K = R\cdot\tilde{\alpha}_{t,i} = R\frac{1-(1+i)^{-t}}{\ln(1+i)}. \tag{7.15}$$

Розв'язавши рівності (7.14) і (7.15) відносно t, отримаємо співвідношення

$$t = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\ln(1+i)+1\right)}{\ln(1+i)},$$

$$t = -\frac{\ln\left(1-\frac{K}{R}\ln(1+i)\right)}{\ln(1+i)}.$$

Так само визначивши терміни для неперервної ренти з неперервним нарахуванням відсотків (7.12), (7.13), отримаємо

$$t = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\delta+1\right)}{\delta},$$

$$t = -\frac{\ln\left(1-\frac{K}{R}\delta\right)}{\delta}.$$

Для визначення річних платежів відповідних рент розв'яжемо рівності (7.12), (7.13), (7.14) і (7.15) відносно R і знайдемо:

$$R = \frac{S \cdot \delta}{e^{t\delta} - 1}, \qquad R = \frac{K \cdot \delta}{1 - e^{-t\delta}},$$

$$R = \frac{S \ln(1+i)}{(1+i)^t - 1}, \qquad R = \frac{K \ln(1+i)}{1 - (1+i)^{-t}}.$$

Приклад 7.4. За який термін нарощена сума ренти зросте в 5 разів порівняно з річним платежем, якщо на платежі неперервно нараховуються відсотки з силою зростання 8 %?

Розв'язання.

$$t = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}\delta + 1\right)}{\delta} = \frac{\ln(5 \cdot 0{,}08 + 1)}{0{,}08} = 4{,}21 \text{ року.}$$

При визначенні дискретної ставки i та сили росту δ через інші параметри ренти виникають ті ж проблеми, що й у сталих рентах (розділ 6). Найпростішими методами є описаний вище інтерполяційний метод, і метод Ньютона-Рафсона. Розглянемо останній. За допомогою даного метода послідовними наближеннями визначається корінь нелінійного рівняння $f(x) = 0$. Загальний вигляд рекурентного співвідношення такий:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

де k – номер ітерації, x_k – значення x після k-ї ітерації, $f'(x_k)$ – значення похідної функції $f(x_k)$. Використовуючи даний метод, отримана рекурентна формула для наближеного обчислення δ:

$$\delta_{k+1} = \delta_k - \frac{1 - e^{-\delta_k t} - \frac{K}{R}\delta_k}{te^{-\delta_k t} - \frac{K}{R}}. \qquad (7.16)$$

Приклад 7.5. Капіталовкладення становить 1 млрд грн. Прогнозується щорічний дохід в розмірі 0,2 млрд грн протягом 8 років. Обчислити дохідність інвестиції у вигляді сили зростання.

Розв'язання. Скористаємося рекурентною формулою (7.16), поклавши початкове значення $\delta_0 = 0{,}12$:

$$\delta_1 = 0{,}12 - \frac{1 - e^{-0{,}12 \cdot 8} - \dfrac{1}{0{,}2} \cdot 0{,}1288}{8 \cdot e^{-0{,}12 \cdot 8} - \dfrac{1}{0{,}2}} = 0{,}1288.$$

Перевіримо $\dfrac{K}{R} = \dfrac{1 - e^{-0{,}1288 \cdot 8}}{0{,}1288} = 4{,}992 \approx 5.$

7.5. Неперервні змінні потоки платежів

На практиці зустрічаються неперервні потоки платежів, але не сталі, як було розглянуто вище, а змінювані в часі. Нехай змінний неперервний потік платежів змінюється відповідно до деякої неперервної функції $R = f(t)$. Загальна сума платежів за час t дорівнює $\int_0^t f(x)\,dx$. Нарощена сума такого платежу при неперервному нарахуванні відсотків визначатиметься за формулою

$$S = \int_0^t f(x) e^{\delta(t-x)} dx.$$

Теперішня сума даного потоку платежів обчислюватиметься так:

$$K = \int_0^t f(x) e^{-\delta x} dx.$$

Розглянемо випадок, коли змінний неперервний потік задано у вигляді лінійної функції

$$R = R_0 + kt,$$

де R_0 – початковий розмір платежу. Нарощена сума визначатиметься за допомогою інтегрування функції потоку платежів:

$$S=\int\limits_0^t\left(R_0+kx\right)e^{\delta(t-x)}dx=R_0\int\limits_0^t e^{\delta(t-x)}dx+k\int\limits_0^t xe^{\delta(t-x)}dx=$$

$$=\left(-\frac{R_0}{\delta}e^{\delta(t-x)}+\frac{kx}{\delta}e^{\delta(t-x)}-\frac{k}{\delta^2}e^{\delta(t-x)}\right)\Bigg|_0^t==\left(R_0+\frac{k}{\delta}\right)\tilde{s}_{t,\delta}-\frac{k}{\delta}t.$$

Теперішня сума заданого потоку платежів визначатиметься за формулою:

$$K=\left(R_0+\frac{k}{\delta}\right)\tilde{\alpha}_{t,\delta}-\frac{k}{\delta}te^{-\delta t},$$

де $\tilde{s}_{t,\delta}=\dfrac{e^{\delta t}-1}{\delta}$, $\tilde{\alpha}_{t,\delta}=\dfrac{1-e^{-\delta t}}{\delta}$ – відповідно множники нарощення та дисконтування неперервного змінного потоку з неперервним нарахуванням відсотків.

Запитання та вправи для самоперевірки

1. Дайте визначення ренти зі сталим абсолютним приростом платежів.
2. Дайте визначення ренти зі сталим відносним приростом платежів.
3. Дайте визначення сталої неперервної ренти.
4. Дайте визначення неперервних змінних потоків платежів.
5. Платежі постнумерандо утворюють регулярний у часі грошовий потік, перший платіж якого дорівнює 15 млн грн. Наступні платежі збільшуються щоразу на 2 млн грн. Термін грошового потоку 10 років. Обчисліть теперішню і нарощену суми, якщо річна відсоткова ставка 20 %.

   (Відповідь: 88,661 млн грн, 548,965 млн грн)
6. Маємо 10-річну змінну ренту, перший платіж якої дорівнює 15 млн грн, наступні платежі збільшуються щороку на 12 % $\left(k=0{,}12\right)$. Обчисліть теперішню і нарощену суми, якщо річна відсоткова ставки дорівнює 20 %.

   (Відповідь: 93,448 млн. грн., 578,604 млн грн).
7. Планується, що надходження від експлуатації газового родовища складатиме 1 млрд грн на рік, тривалість розробки 10 років, реалізація газу неперервна і рівномірна. Обчисліть теперішню суму ренти при ставці порівняння 10 %.

   (Відповідь: 6446,91 млн грн)

Розділ 8. **МЕТОДИ ОЦІНКИ ЕФЕКТИВНОСТІ ІНВЕСТИЦІЙ**

8.1. Види показників ефективності капіталовкладень

Визначення ефективності інвестицій – одна з найважливіших та найскладніших задач фінансової математики. Фінансовий аналіз інвестицій в основному зводиться до оцінки і порівняння ефективності альтернативних інвестиційних проектів – їх дохідність для інвестора. Отже, використання капіталовкладень повинно бути максимально ефективним. Завдання інвестора на основі даних про прибутковість вкладень у різні сектори економіки полягає у виборі оптимального варіанта вкладення наявних у нього фінансових коштів. Це складне завдання містить у собі низку моментів невизначеності та ризику. Проте побудова навіть простих математичних моделей дозволяє визначити зв'язки між параметрами інвестиційного проекту та припустимі діапазони їх зміни.

Залежно від того, чи враховують ці методи або критерії фінансового аналізу інвестицій фактор часу, чи ні, їх можна поділити на дві групи, а саме:

– динамічні (дисконтні);

– статичні (облікові, бухгалтерські).

Розглянемо основні критерії оцінювання ефективності інвестиційних проектів:

1. Динамічні з дисконтуванням потоків платежів:
- абсолютні показники;
- чиста зведена вартість;
- чиста нарощена вартість;
- відносні показники;
- внутрішня норма дохідності;
- індекс рентабельності (дохідності);
- дисконтований термін окупності.

2. Статичні без урахування ефекту дисконтування:
- відносні показники;
- термін окупності;
- облікова ставка рентабельності;
- віддача капіталовкладень.

8.2 Статичний метод

Цей метод не враховує фактор часу, тому він дає тільки наближену інформацію про якість інвестиційного проекту. Основний недолік даного методу полягає в тому, що отримані оцінки не є адекватними, оскільки не враховують зміну вартості грошей у часі. В умовах високої інфляції в таких оцінках взагалі немає сенсу.

У статичному методі основними показниками є термін окупності і обернена величина – коефіцієнт ефективності.

Термін окупності – кількість років, необхідних для повернення вкладених капіталів із прогнозованих щорічних чистих грошових доходів. Розрізняють середній і дійсний (фактичний) термін окупності.

Середній термін окупності визначається за формулою

$$T_{\text{ок.сер}} = \frac{K_{\text{о}}}{R_{\text{сер.річ}}}, \ \left(K_{\text{о}} = T_{\text{ок.сер}} \cdot R_{\text{сер.річ}}\right),$$

де $K_{\text{о}}$ – разові початкові капіталовкладення,

$$R_{\text{сер.річ}} = \frac{\sum_{j=1}^{t} R_j}{t},$$

R_j – дохід к j-му році; t – кількість років.

Дійсний термін окупності – час $T_{\text{ок}}$, необхідний для повернення капіталовкладень з урахуванням запланованих доходів.

Величина, обернена терміну окупності називається *коефіцієнтом ефективності*

$$k = \frac{1}{T_{\text{ок}}}.$$

Термін окупності показує тільки швидкість повернення вкладених коштів, а не розкриває рентабельність інвестиційного проекту.

Приклад 8.1. В інвестиційний проект необхідно витратити 80000 грн капіталовкладень, а чисті грошові надходження плануються по роках у таких розмірах: 22000, 20000, 18000, 16000, 14000 грн. Обчислити середній і дійсний термін окупності.

Розв'язання.

$$R_{\text{сер.}} = \frac{22000+20000+18000+16000+14000}{5} = 18000 \text{ грн;}$$

$$T_{\text{ок.сер.}} = \frac{80000}{18000} = 4,44 \text{ років.}$$

Дійсний термін окупності визначимо у такий спосіб:

Рік	0	1	2	3	4	5
Річний чистий дохід	80000	22000	20000	18000	16000	14000
Залишилось повернути капіталовкладень	80000	58000	38000	20000	4000	0

$$T_{\text{ок.}} = 4 + \frac{4000}{14000} = 4 + 0,28 = 4,28 \text{ роки.}$$

Дійсний термін окупності дає більш точну оцінку через точний розподіл у часі чистого доходу.

Облікова ставка рентабельності визначається з відношення середньорічних доходів до середньорічних інвестицій

$$u = \frac{\frac{1}{t}\sum_{j=1}^{t} R_j}{\frac{1}{t}K},$$

або інший варіант

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{t} R_j - K}{K} = \frac{\sum_{j=1}^{t} R_j}{K} - 1.$$

Легко помітити, що між рентабельністю і терміном окупності існує обернена залежність

$$u = \frac{t}{T_{\text{ок}}}.$$

Даний критерій легко обчислюється, але він не враховує зміну вартості грошей у часі.

8.3. Динамічний метод

Врахування фактору часу – важливий критерій у фінансовому аналізі інвестиційних проектів. Для порівняння різночасових капіталовкладень та доходів від них використовують коефіцієнт дисконтування і відсоткову ставку. У цьому випадку дуже важливу роль відіграє рівень відсоткової ставки, за якою відбувається дисконтування сум (ставки порівняння) і яка повинна враховувати рівень ризику інвестицій.

Рівень ризику визначають шляхом уведення поправки до рівня відсоткової ставки. Дану поправку можна розглядати як премію за ризик. Надійність інвестицій можна підвищити шляхом аналізу чутливості або застосування методів математичної статистики чи економіко-математичного моделювання. Дані підходи зменшують ризик тим, що дають можливість повніше врахувати всі можливі варіанти під час прийняття остаточного рішення щодо інвестиції.

До основних показників ефективності інвестицій у динамічному методі належать:

а) чиста зведена вартість (ЧЗВ);

б) внутрішня норма дохідності;

в) термін окупності капіталовкладень;

г) індекс прибутковості (рентабельності).

Розглянемо методи розрахунків показників ефективності інвестицій.

8.4. Методика обчислення чистої зведеної вартості

В аналізі інвестицій основним показником виступає чиста зведена вартість (чистий дисконтований прибуток). Під ЧЗВ розуміють результат додавання всіх дисконтованих платежів інвестиції, тобто це теперішня вартість потоку. Даний показник характеризує кінцевий результат інвестиційної діяльності в абсолютному вимірі.

Чим вища ЧЗВ, тим інвестиційний проект привабливіший.

Нехай капіталовкладення і дохід від капіталовкладень подано у вигляді фінансового потоку. Тоді шукана величина N обчислюється як теперішня вартість даного потоку, зведена до початку дії проекту, а саме:

$$N = \sum_{j=1}^{t} R_j \nu^j,$$

де R_j – розмір елемента потоку (зі знаком «плюс» – дохід, «мінус» – інвестиції). Відповідно додатною чи від'ємною може бути і величина N.

Якщо потік інвестицій утворюється елементами K_j, а потік чистих доходів – елементами R_j, то

$$N = \sum_{j=1}^{t_1} R_j \cdot \nu^{j+t_1} - \sum_{j=1}^{t_1} K_j \cdot \nu^{j+t_1}. \tag{8.1}$$

Приклад 8.2. Інвестиційний проект планує такі витрати: на початку першого року – одноразове капіталовкладення 500000 грн, за другий рік-рівномірні капіталовкладення протягом року, загальною сумою 1000 тис. грн і в кінці третього року –одноразове капіталовкладення 300000 грн. Надходження від інвестиційного проекту планують отримувати протягом 15 років: у перші три роки по 200000 грн, потім 10 років щороку по 600000 грн і останні два роки по 300000 грн. Надходження рівномірні протягом року. Обчислити чисту зведену вартість, якщо ставка дисконтування 10 %.

Розв'язання. Теперішня вартість капіталовкладень

$$\sum_{j=1}^{3} K_j \nu^j = 500 + 1000 \cdot (1+0,1)^{-1,5} + 300 \cdot (1+0,1)^{-2} = 1592,2 \text{ тис. грн.}$$

Теперішня вартість всіх надходжень

$$\sum_{j=1}^{15} R_j \nu^j = 200 \frac{1-(1+0,1)^{-3}}{0,1} \cdot (1+0,1)^{-2,5} + 600 \frac{1-(1+0,1)^{-10}}{0,1} \cdot (1+0,1)^{-5,5} +$$

$$+300 \frac{1-(1+0,1)^{-2}}{0,1} \cdot (1+0,1)^{-15,5} = 2693,4.$$

Отже, $N = 2693,4 - 1592,2 = 1101,2$ тис. грн.

Якщо капіталовкладення одноразові, а доходи утворюють фінансову ренту, то

$$N = R\alpha_{t,i} - K.$$

Чистий зведений дохід – це абсолютний показник, який залежить від капіталовкладень і, особливо, часових параметрів інвестиційного проекту. Залежність N від терміну інвестиційного проекту зображено на рис. 8.1.

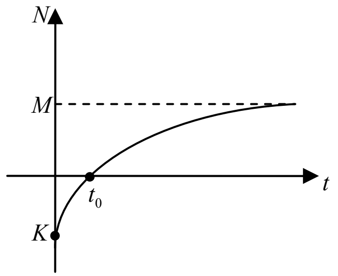

Рис. 8.1

У початковий момент $N = -K$. Точка t_o – час окупності капіталовкладень. Зі збільшенням терміну інвестицій N збільшується і наближається до деякої межі M.

Розглянемо залежність N від відсоткової ставки. Аналізуючи вираз (8.5), бачимо, що зі збільшенням ставки зведення розмір ЧЗВ зменшується. Залежність N від ставки i показано на рис. 8.2.

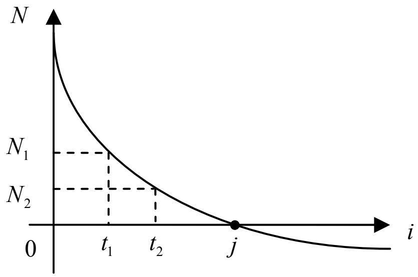

Рис. 8.2

Коли ставка досягає деякої величини j, фінансовий ефект від інвестицій стає нульовим.

Вплив розмірів капіталовкладень і доходів на N є лінійною функцією, причому від величини надходжень доходів залежність пряма, а від величини капіталовкладень залежність обернена. На величину N суттєво впливає структура потоку платежів, причому, чим більші надходження коштів у перші роки життєвого циклу проекту, тим швидше він окуповується і тим більша величина N.

Приклад 8.3. Інвестиційний проект передбачає певні разові капіталовкладення і наступні надходження коштів наприкінці кожного року протягом 6 років (див. таблицю).

Роки	0	1	2	3	4	5	6
Сума	-100000	25000	30000	35000	40000	45000	50000

Розв'язання. Обчислити N, якщо ставка порівняння 20 %

$$N = -K_0 + \sum_{j=1}^{t} \frac{R_j}{(1+i)^j} = -100000 + \frac{25000}{1+0,2} + \frac{30000}{(1+0,2)^2} + \frac{35000}{(1+0,2)^3} +$$

$$+ \frac{40000}{(1+0,2)^4} + \frac{45000}{(1+0,2)^5} + \frac{50000}{(1+0,2)^6} = 14025,81 \text{ грн.}$$

Розглянемо випадок, коли більші розміри платежів надходять у перші роки.

Роки	0	1	2	3	4	5	6
Сума	-100000	50000	45000	40000	35000	30000	25000

При тій же ставці 20 %

$$N = 31973,0 \text{ грн.}$$

Отримані результати дають змогу зробити висновок: на величину N суттєво впливає структура потоку платежів, причому чим більші надходження на початку, тим швидше він окуповується.

8.5. Внутрішня норма дохідності

Поряд з ЧЗВ до основних критеріїв оцінки ефективності інвестиційного проекту відносять показник внутрішньої норми дохідності. Під цим показником розуміють таку ставку дисконтування (j), за якої теперішня вартість доходів дорівнює теперішній вартості капіталовкладень, тобто, чиста зведена вартість N інвестиційного проекту дорівнює нулю. Чим вища ця ставка, тим більша ефективність інвестицій, причому даний параметр може бути як більше нуля, так і менше нуля. Останнє означає, що інвестиції не окуповуються.

Розрахунок внутрішньої норми дохідності часто застосовують як перший крок аналізу інвестицій. Якщо значення $j < i$, то проект відхиляється.

У загальному випадку, коли інвестиції і дохід можна подати потоком платежів, шукану ставку j обчислюють з рівняння:

$$\sum_{j=1}^{t} R_j \cdot \nu^j = 0.$$

Це рівняння розв'язують відносно невідомої величини такими методами:

- методом послідовного підбору за допомогою довідкових фінансових таблиць;
- методом лінійної інтерполяції;
- різними інтераційними процедурами (зокрема, методом Ньютона-Рафсона, методом перерізів);
- числовими процедурами (порозрядним наближенням).

Розглянемо метод обчислення внутрішньої норми дохідності, а для цього виведемо формулу, за якою її будемо визначати.

Нехай $K_1, K_2, ..., K_j$ – капіталовкладення в моменти часу $t_1, t_2, ..., t_j$ і $R_1, R_2, ..., R_j$ – надходження в моменти часу $t_{j+1}, t_{j+2}, ..., t_t$.

Внутрішню норму дохідності визначають з рівняння

$$K_1 (1+i)^{-t_1} + K_2 (1+i)^{-t_2} + ... + K_j (1+i)^{-t_j} = R_{j+1} (1+i)^{t_{j+1}} +$$
$$+R_{j+2} (1+i)^{t_{j+2}} + ... + R_t (1+i)^{t_t} . \qquad (8.2)$$

Використовуємо формули

$$K_1 (1+i)^{-t_1} + K_2 (1+i)^{-t_2} + ... + K_j (1+i)^{-t_j} =$$
$$= (K_1 + K_2 + ... + K_j)(1+i)^{-t_k} ; \qquad (8.3)$$

$$R_{j+1}(1+i)^{t_{j+1}} + R_{j+2}(1+i)^{t_{j+2}} + \ldots + R_t(1+i)^{t_t} =$$

$$=\left(R_{j+1} + R_{j+2} + \ldots + R_t\right)(1+i)^{-t_R}, \qquad (8.4)$$

де t_k і t_R – усереднені терміни, які обчислюються за формулами:

$$t_k = \frac{K_1 t_1 + K_2 t_2 + \ldots + K_j t_j}{K_1 + K_2 + \ldots + K_j} \quad \text{і}$$

$$t_R = \frac{R_{j+1} t_{j+1} + R_{j+2} t_{j+2} + \ldots + R_t t_t}{R_{j+1} + R_{j+2} + \ldots + R_t}.$$

Формули (8.3) і (8.4) підставимо у рівняння (8.2), отримаємо

$$\left(K_1 + K_2 + \ldots + K_j\right)(1+i)^{-t_k} = \left(R_{j+1} + R_{j+2} + \ldots + R_t\right)(1+i)^{-t_R}$$

$$\frac{K_1 + K_2 + \ldots + K_j}{R_{j+1} + R_{j+2} + \ldots + R_t} = \frac{(1+i)^{-t_k}}{(1+i)^{-t_R}} = (1+i)^{-t_R + t_k},$$

$$1 + i = \sqrt[t_k - t_R]{\frac{K_1 + K_2 + \ldots + K_j}{R_{j+1} + R_{j+2} + \ldots + R_t}}.$$

У результаті отримаємо:

$$i = \sqrt[t_k - t_R]{\frac{K_1 + K_2 + \ldots + K_j}{R_{j+1} + R_{j+2} + \ldots + R_t}} - 1.$$

Приклад 8.4. Витрати компанії на нове обладнання відповідно становлять 95000 грн, 105000 грн і 150000 грн наприкінці першого, другого і третього років. Інвестиції забезпечили притік грошової маси 70000 грн, 80000 грн, 100000 грн, 110000 грн і 130000 грн наприкінці кожного з п’яти років. Обчислити внутрішню норму дохідності.

Розв’язання.

Дано: K_1=95000 грн, $K_2 = 105000$ грн,

$K_3 = 150000$ грн, $R_1 = 70000$ грн,

$R_2 = 80000$ грн, $R_3 = 100000$ грн,

$R_4 = 110000$ грн, $R_5 = 130000$ грн.

Обчислимо середні терміни:

$$t_R = \frac{R_1t_1 + R_2t_2 + R_3t_3 + R_4t_4 + R_5t_5}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} =$$

$$= \frac{70000 \cdot 1 + 80000 \cdot 2 + 100000 \cdot 3 + 110000 \cdot 4 + 130000 \cdot 5}{70000 + 80000 + 100000 + 110000 + 130000} \approx 4,4;$$

$$t_k = \frac{K_1t_1 + K_2t_2 + K_3t_3}{K_1 + K_2 + K_3} =$$

$$= \frac{95000 \cdot 1 + 105000 \cdot 2 + 150000 \cdot 3}{95000 + 105000 + 15000} \approx 2,3.$$

Обчислимо внутрішню норму дохідності:

$$i = \sqrt[t_R - t_K]{\frac{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5}{K_1 + K_2 + K_3}} - 1 =$$

$$= \sqrt[2]{\frac{70000 + 80000 + 100000 + 110000 + 130000}{95000 + 105000 + 150000}} - 1 \approx 0,2.$$

Внутрішня норма дохідності 20 %.

Оскільки розрахунок j доволі громіздкий, ці обчислення автоматизовані в загальновідомому пакеті прикладних програм Excel – 2005, за допомогою яких є можливість визначити внутрішню норму дохідності на базі потоку платежів з однаковими періодами.

У деяких випадках чистий зведений дохід завжди більший нуля при будь-якій відсотковій ставці. Величину j неможливо обчислити, вона просто відсутня.

Розглянемо далі модифіковану внутрішню норму дохідності, яка враховує очікувану реальну ставку реінвестування i. Позначимо цей параметр як M і обчислимо його за формулою

$$M = \sqrt[t]{\frac{N_{r(b)}}{N_{k(d)}}} - 1,$$

де $N_{r(b)}$ – теперішня вартість потоку доходів; $N_{r(d)}$ – теперішня вартість потоку капіталовкладень; t – загальний термін інвестиційного проекту.

Кожний потік дисконтується за своєю відсотковою ставкою: доходи – за ставкою b, капіталовкладення – за ставкою d .

Якщо інвестиція разова, миттєва, а потік доходів утворює постійну ренту, то ставку j можна визначити з рівняння:

$$K = R\alpha_{t,i},$$

або

$$\frac{K}{R} = \frac{1-(1+j)^{-t}}{j}.$$

На величину внутрішньої норми дохідності впливають ті ж фактори, що й на чистий зведений дохід – розміри інвестиційних витрат і доходів, їх розміщення в часі.

8.6. Термін окупності

Термін окупності будемо визначати на базі дисконтованих капіталовкладень і доходів. Величина $t_{\text{ок}}$ – це кількість років, які необхідно для того, щоб сума дисконтованих чистих доходів дорівнювала сумі дисконтованих інвестицій по ставці зведення i.

Нехай розміри капіталовкладень дорівнюють K. Дохід утворює нерегулярний потік платежів R_j. Необхідно обчислити такий термін $t_{\text{ок}}$, при якому буде виконуватись рівність

$$\sum_{j=1}^{t_{\text{ок}}} R_j \cdot \nu^j = K.$$

Якщо капіталовкладення K разові, а потік доходів утворює сталу ренту постнумерандо, то з умови окупності за термін $t_{\text{ок}}$ при заданій відсотковій ставці i знайдемо

$$K = R\frac{1-(1+i)^{-t_{ок}}}{i}. \tag{8.5}$$

Розв’язавши рівняння (8.5) відносно $t_{\text{ок}}$, отримаємо:

$$t_{\text{ок}} = \frac{-\ln\left(1-\frac{K}{R}i\right)}{\ln(1+i)}. \tag{8.6}$$

Аналізуючи рівність (8.6), можна стверджувати, що дисконтний термін окупності існує для щорічних надходжень, якщо $R > Ki$. Можна отримати аналогічні співвідношення і для інших видів регулярних потоків платежів. Нерівність $R > Ki$ дає можливість швидко оцінити інвестиційний проект: якщо вона не виконується, то проект для даної відсоткової ставки не окупиться.

Дисконтований термін окупності уточнюють за рахунок коефіцієнта дисконтування. Для цього обчислюють значення $\alpha_{t,i}$ і $\alpha_{t+1,i}$ за формулою:

$$\alpha_{t,i} = \frac{1-(1+i)^{-t}}{i}.$$

Значення t (ціле) вибирають найближче до $T_{\text{ок.ср}}$ так, щоб виконувалась нерівність

$$\alpha_{t,i} < T_{\text{ок.сер}} < \alpha_{t+1,i}.$$

Тоді дисконтований термін окупності $t_{\text{ок}}$ обчислюємо за формулою:

$$t_{\text{ок}} = T_{\text{ок.сер}} + \frac{T_{\text{ок.сер}} - \alpha_{t,i}}{\alpha_{t+1,i} - \alpha_{t,i}}. \tag{8.7}$$

Приклад 8.5. Компанія інвестує в нове обладнання 60000 грн, очікувана сума доходу становитиме 20000 грн щорічно. Обчислити середній та дисконтований термін окупності при ставці дисконтування 10 % річних.

Розв'язання. Середній термін окупності

$$T_{\text{ок.сер}} = \frac{60000}{20000} = 3 \text{ роки.}$$

Дисконтований термін окупності уточнимо за формулою (8.7):

$$t_{\text{ок}} = \frac{3 - 2,486852}{3,169865 - 2,486852} \approx 3,75 \text{ роки.}$$

На величину $t_{\text{ок}}$ впливає два фактори – розподіл надходжень доходів у часі і відсоткова ставка дисконтування (ставка зведення). Перший фактор зрозумілий; чим пізніше надходять платежі доходів, тим більше зростає величина $t_{\text{ок}}$. Якщо ж відсоткова ставка дисконтування збільшується, то термін окупності зростає.

Оцінка ефективності інвестиційних проектів за терміном окупності має свої переваги і недоліки.

Перевага в простоті розрахунку. Вибирають також ті проекти, які генерують суттєві надходження грошей у перші роки реалізації проекту, що важливо в умовах невизначеності майбутнього стану економіки.

Основний недолік критерію терміну окупності в тому, що не враховуються надходження потоку платежів, які не попадають у період окупності. Платежі, що надходять поза терміном окупності, можуть значно впливати на ефективність інвестиційного проекту.

Можна зробити висновок, що критерій терміну окупності є допоміжним, він дає змогу уточнити певні характеристики інвестиційного проекту.

8.7. Індекс дохідності (рентабельності)

Для визначення рентабельності інвестицій складають відношення дисконтованих чистих доходів, очікуваних від проекту, до капіталовкладень. Тобто індекс рентабельності показує, скільки одиниць зведеної величини грошових надходжень припадає на одиницю початкових інвестицій.

При одноразовому капіталовкладенні індекс дохідності визначається за формулою

$$u = \frac{\sum_{j=1}^{t} R_j \cdot \nu^j}{K}.$$

Якщо інвестиційні витрати розподілені в часі, то маємо таку рівність:

$$u = \frac{\sum_{j=t_0}^{t} R_j \cdot \nu^{j+t_o}}{\sum_{j=1}^{t_0} K_j \cdot \nu^j},$$

де t_0 – термін капіталовкладень.

За умови, що платежі доходів утворюють сталу ренту постнумерандо, а капіталовкладення одноразове, індекс рентабельності можна визначити за формулою

$$u = \frac{R}{K} \cdot \alpha_{t,i}.$$

Якщо $u > 1$, то теперішня сума чистого грошового потоку надходжень перевищує суму початкових інвестицій і забезпечує чисту зведену вартість додатною.

Якщо $u = 1$, то чиста зведена вартість дорівнює нулю, проект лише незбитковий.

Якщо $u < 1$, інвестиційний проект збитковий.

Індекс рентабельності – це один із основних критеріїв оцінювання ефективності інвестиційного проекту. Його застосовують для порівняння альтернативних проектів інвестування, і вибір роблять за принципом – чим більша дана величина u, тим краще. Недоліком індексу рентабельності є неврахування масштабів віддачі від капіталовкладень.

Приклад 8.6. Інвестиції до початку періоду надходження доходів становили 4 млрд грн. Дохід очікується на рівні 0,7 млрд. грн. на рік протягом 10 років. Обчислити індекс рентабельності, якщо дисконтування відбувається за відсотковою ставкою 10 %.

Розв'язання. Оскільки потік доходів можна подати у вигляді сталої ренти постнумерандо, а капіталовкладення можна вважати разовим, то: $u = \frac{R\left(1-(1+i)^{-t}\right)}{i \cdot K} = \frac{0,7\left(1-(1,1)^{-10}\right)}{0,1 \cdot 4} = 1,183.$

Інколи замість індексу рентабельності u обчислюють чистий індекс рентабельності u_r. Чистий індекс рентабельності визначається за формулою

$$u_r = \frac{\sum_{j=1}^{t} R_j \cdot \nu^j - K}{K} = \frac{\sum_{j=1}^{t} R_j \cdot \nu^j}{K} - 1.$$

Бар'єрним значенням для u_r буде нуль:

– якщо $u_r < 0$, то проект збитковий;

– якщо $u_r = 0$ – проект незбитковий;

– якщо $u_r > 0$ – проект вигідний.

Взаємозв'язок між чистим індексом рентабельності та індексом рентабельності визначається рівністю

$$u_r = u - 1.$$

Чистий індекс рентабельності показує, яка чиста зведена вартість припадає на одиницю витрат, тому інвестор прагне максимізувати даний критерій.

Отже, найважливішими критеріями оцінювання ефективності інвестицій є коефіцієнти:

– чистої зведеної вартості (N);

– внутрішньої норми дохідності (j);

– рентабельності (u).

Ці коефіцієнти математично взаємопов'язані між собою.

Запитання та вправи для самоперевірки

1. Які існують критерії ефективності інвестицій?
2. Як визначити чисту зведену вартість інвестиційного проекту?
3. За якої внутрішньої норми дохідності інвестиційний проект вигідний?
4. Як оцінити термін окупності інвестиційного проекту?
5. Які існують критерії для оцінювання рентабельності інвестиційного проекту?
6. Як зміниться термін окупності інвестиційного проекту при зміні величини інвестицій, річних доходів, відсоткової ставки?
7. На будівництво магазину необхідно інвестувати протягом місяця біля $ 10000, а потім протягом 10 років він буде давати дохід у розмірі $3000 на рік. Обчислити характеристики цього проекту, якщо відсоткова ставка порівняння – 8 % річних.
8. На початку року вкладені інвестиції становили 2000 грн, а потім, протягом 4 років отримували дохід R_1 =1000 грн., R_2 =800 грн, R_3 =800 грн, R_4 =600 грн. Відсоткова ставка 8 % річних. Обчисліть термін окупності, зведений чистий дохід, чисту рентабельність.

(Відповідь: $t_{\text{ок}}$ = 3 роки, N = 688,2 грн, u_r = 0,344)

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Беренес В.* Руководство по оценке эффективности инвестиций. Метод ЮНИДО. Инфра / В.Беренес, П.М. Хавронек. – М. : – 1995. –

2. *Бирман Г.* Экономический анализ инвестиционных проектов / Г.Бирман, С. Шмидт. – М. : Банки и биржа, 1997.

3. *Бланк И.А.* Инвестиционный менеджмент: учеб. курс. / И.А. Бланк. – К. : Эльга – Н. Ника–Центр, 2001. – 448 с.

4. *Бочаров П. П.* Финансовая математика: учеб. / П. П.Бочаров, Ю. Ф. Касимов. – М. : Гардарики, 2002. – 624 с.

5. *Основи* фінансового аналізу. / [Я. І.Єлейко, О.М. Кандиба, М.Л. Лапішко та ін.]. – Л. : ЛБІНБУ, 2000. – 141 с.

6. *Жуленев С. В.* Финансовая математика: введение в классическую теорию / С.В. Жуленев. – М. : Изд-во МГУ, 2001. – 480 с.

7. *Капитоненко В. В.* Финансовая математика и ее приложения: учеб.-практ. пособ. для вузов / В.В. Капитоненко. – М. : «Издательство ПРИОР», 1998. – 144 с.

8. *Ковалев В.В.* Финансовый анализ: Управление капиталом. Выбор инвестиций. Анализ отчетности / В.В.Ковалев. – М. : Финансы и статистика, 1995. – 432 с.

9. *Кочович Е.* Финансовая математика. Теория и практика финансово-банковских расчётов: пер. с серб. / Е. Кочович. – М. : Финансы и статистика, 1994. – 268 с.

10. *Лукасевич И. Я.* Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений / И.Я. Лукасевич. – М. : ЮНИТИ, 1998. – 400 с.

11. *Лукашин Ю. П.* Финансовая математика: учеб. практ. пособ. / Ю. П. Лукашин. – М. : МЭСИ, 1998. – 81 с.

12. *Малыхин В. И.* Финансовая математика: учеб. пособ. для вузов. – 2-е изд., переработ. и доп. / В.И. Малыхин. – М. : ЮНИТИ, 2003. – 237 с.

13. *Машина Н. І.* Вищі фінансові обчислення: навч. посіб. / Н. І. Машина. – К. : Центр навчальної літератури, 2003. – 208 с.

14. *Мозговий О. М.* Фондовий ринок: навч. посіб. / О. М. Мозговий. – К. : КНЕУ, 1999. – 316 с.

15. *Четыркин Е. М.* Финансовая математика: учеб. – 4-е изд. / Е.М. Четыркин. – М. : Демо, 2004. – 400 с.

16. *Четыркин Е .М.* Финансовый анализ производственных инвестиций / Е .М. Четыркин. – М. : Дело, 1998. – 256 с.

Навчальне видання

КРИСАК Яків Васильович,
ЛАСТІВКА Іван Олексійович

ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА

Фінансові потоки

Навчальний посібник

Редактор *Н.О. Щур*
Технічний редактор *А.І. Лавринович*
Коректор *Л.М. Романова*
Комп'ютерна верстка *Н.С. Ахроменко*

Підп. до друку 23.06.09. Формат 60х84/16. Папір офс.
Офс. друк. Ум. друк. арк. 5,11. Обл.-вид. арк. 5,5.
Тираж 100 пр. Замовлення № 168-1.

Видавництво Національного авіаційного університету «НАУ-друк»
03680. Київ – 58, просп. Космонавта Комарова, 1

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру ДК № 977 від 05.07.2002