А. А. ГОЛЬДБЕРГ, М. М. ШЕРЕМЕТА,
М. В. ЗАБОЛОЦЬКИЙ, О. Б. СКАСКІВ

КОМПЛЕКСНИЙ АНАЛІЗ

Підручник

Львів
Афіша
2002

ББК 22.161я7
К63
УДК 517.5(075)

Підручник написано у відповідності з діючою програмою курсу теорії функцій комплексної змінної для студентів математичних спеціальностей класичних університетів України. Він складається з теоретичної та практичної частин, які відповідають часу (70 лекційних і 35 практичних годин), що виділяється на вивчення цього курсу. Вправи підібрані відповідно до кожного розділу теоретичного матеріалу підручника. Вказано основні методи розв'язування задач та наведено багато прикладів для самостійної роботи.

Підручник буде корисним також для студентів природничих спеціальностей університетів та педагогічних інститутів.

Рецензенти:

А. П. Гришин — доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу Харківського національного університету:

Б. В. Винницький — доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математичного аналізу Дрогобицького державного педагогічного університету.

ISBN 966-8013-05-0

ПЕРЕДМОВА

Курс теорії функцій комплексної змінної є заключним з циклу університетських курсів математичного аналізу. В останні десятиріччя поширилася інша його назва "Комплексний аналіз".

Математичний аналіз у дійсній області в основному вивчає неперервно диференційовні функції на інтервалі. Відповідно, комплексний аналіз вивчає функції, які мають неперервну похідну в певній області комплексної площини, — аналітичні функції. Цей клас функцій значно вужчий від класу функцій, що мають неперервну похідну на інтервалі, і тому аналітичні функції мають багато добрих і важливих властивостей, яких не мають функції в дійсній області. З іншого боку, клас аналітичних функцій настільки широкий, що має багаточисельні застосування як в інших розділах сучасної математики, так і безпосередньо в природничих науках.

У цьому підручнику викладено курс, який протягом 30 років читали автори у Львівському університеті. В ньому висвітлено всі основні питання програми. Багато важливих питань ми обминули через обмежений час, що виділений на вивчення курсу (70 лекційних і 35 практичних годин). Проте наведено приклади застосувань теорії аналітичних функцій у вищій алгебрі (кілька простих доведень основної теореми алгебри) та в аеродинаміці (формула для підіймальної сили літака). Студент, який вивчить цей курс, зможе працювати з будь-якою спеціальною монографією з комплексного аналізу.

Підручник складається з двох частин. Перша з них, що відповідає лекційному курсові, за винятком підрозділу 8.4, є точною копією навчального посібника Гольдберга А. А. і Шеремети М. М. Аналітичні функції. — К.: УМК ВО, 1991. — 116 с. Підрозділ 8.4 включений у підручник Шереметою М. М.

У другу частину підручника, яку написали Заболоцький М. В. і Скасків О. Б., увійшли вправи, що пропонуються студентам для практичних занять та самостійної роботи. На прикладах вказано методи їх розв'язування.

Ми надіємося, що наш підручник буде корисним для студентів усіх математичних спеціальностей університетів та педагогічних інститутів.

Автори вдячні кандидатам фізико-математичним наук М. Т. Бордуляк та І. Е. Чижикову за допомогу, надану при підготовці книги до друку.

Розділ 1

КОМПЛЕКСНІ ЗМІННІ ТА АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ

1.1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Не дивлячись на те, що комплексні числа вивчалися у курсі вищої алгебри, тут нагадаємо деякі поняття, пов'язані з ними.

Комплексне число запишемо у вигляді $z = x + iy$, де $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ та $i^2 = -1$. Це є так званий алгебраїчний запис комплексного числа. Тут $x = \operatorname{Re} z$ і $y = \operatorname{Im} z$ називаються відповідно дійсною та уявною частинами числа z. Якщо $y = 0$, то z – дійсне число; якщо $x = 0$, $y \neq 0$, то z називається уявним числом. Для комплексних чисел встановлюються відношення $=$, $\neq$ але не $>$ і $<$. Запис $z_1 < z_2$ означає "числа z_1 і z_2 дійсні і z_1 менше від z_2". Число $\overline{z} = x - iy$ називається комплексно спряженим до числа $z = x + iy$.

Оскільки комплексне число $z = x + iy$ розуміється як пара (x, y), то йому можна поставити у відповідність точку на площині. Числу 0 ставиться у відповідність початок координат. Таку площину називатимемо комплексною площиною (z – площиною) і позначатимемо через $\mathbb{C}$. При цьому вісь абсцис називатимемо дійсною, вісь ординат — уявною.

Якщо для визначення точки $z \neq 0$ на комплексній площині використати полярну систему координат (r, φ), то матимемо $x = r\cos\varphi$ та $y = r\sin\varphi$, тобто $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Це є тригонометричний запис комплексного числа. При цьому r називається модулем числа z, а φ його аргументом, що записуватимемо так: $|z| = r$ і $\varphi \in \operatorname{Arg} z$. За теоремою Піфагора $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Легко побачити, що $|z_1 - z_2|$ дорівнює відстані між точками z_1 і z_2. Аргумент визначається не однозначно, а з точністю до доданка, кратного 2π. Єдине φ з множини $\operatorname{Arg} z$, $z \neq 0$, яке належить фіксованому проміжку $[a, a+2\pi)$, позначатимемо через $\arg_a z$. Число $\arg_{-\pi} z$ називатимемо головним значенням аргументу і позначатимемо через $\arg\ z$. Головним значенням аргументу часто називають і $\arg_0 z$. Аргумент числа $z = 0$ взагалі не визначений. Два відмінних від 0 комплексних числа рівні, якщо рівні їх модулі, а аргументи або рівні, або відрізняються на дійсне число, кратне 2π. Рівність $k_1 \mathrm{Arg}\ z_1 = k_2 \mathrm{Arg}\ z_2$, $k_1 \in \mathbb{Z}$, $k_2 \in \mathbb{Z}$, вважається справедливою, якщо $k_1 \arg z_1 = k_2 \arg z_2 + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Модуль і аргумент можна визначити через дійсну та уявну частини за допомогою формул $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ та $tg\ \varphi = y/x$. При розв'язуванні останнього рівняння треба обов'язково враховувати знаки чисел x і y. Так, наприклад:

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arctg}\ (y/x) & (x > 0), \\ \mathrm{arctg}\ (y/x) + \pi\ \mathrm{sign}\ y & (x < 0), \\ (\pi/2)\ \mathrm{sign}\ y & (x = 0). \end{cases}$$

Комплексно спряжені числа мають однакові модулі, а їх головні значення аргументів відрізняються знаком. Зауважимо, що $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Домовимося надалі без додаткових пояснень вживати позначення $z = x + iy$, $w = u + iv$, $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ та $w = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, $r > 0$, $\rho > 0$, φ, $\theta \in \mathbb{R}$; аналогічні позначення літер з індексами (наприклад, $w_1 = u_1 + iv_1$).

Оскільки комплексне число можна розуміти як вектор, легко дістати нерівності трикутника у вигляді $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ і $|z_1 - z_2| \ge \big||z_1| - |z_2|\big|$. З першої з цих нерівностей випливає, що $|z| = |x + iy| \le |x| + |y|$. З іншого боку, $|x| = \sqrt{x^2} \le \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$ і $|y| \le |z|$. Отже, приходимо до нерівностей

$$\left.\begin{matrix} |\mathrm{Re}\ z| \\ |\mathrm{Im}\ z| \end{matrix}\right\} \le |z| \le |\mathrm{Re}\ z| + |\mathrm{Im}\ z|. \tag{1.1}$$

1.2. ПОСЛІДОВНОСТІ І ЧИСЛОВІ РЯДИ КОМПЛЕКСНИХ ЧИСЕЛ

У комплексному аналізі поняття границі, функції, області, кривої, тощо вводяться як у дійсному аналізі, а теореми, які доводяться в курсі математичного аналізу, часто залишаються справедливими і в комплексному аналізі, причому доведення цих теорем або цілком аналогічні, або їх можна дістати як наслідки з відомих теорем дійсного аналізу, використовуючи нерівності (1.1).

Послідовністю комплексних чисел називається функція $\mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Образ $n \in \mathbb{N}$ позначимо через z_n, а саму послідовність позначатимемо символом (z_n). Число z називається границею послідовності (z_n), якщо $(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\{|z_n - z| < \varepsilon\}$, і це записується так:

$$z = \lim_{n \to \infty} z_n \quad \text{або} \quad z_n \to z (n \to \infty).$$

Послідовність, яка має границю, називається збіжною. Комплексній послідовності (z_n) можна поставити у відповідність дві дійсні послідовності (x_n) і (y_n) де $x_n = Re\ z_n$ і $y_n = Im\ z_n$.

Теорема 1.1. *Необхідною і достатньою умовою збіжності послідовності (z_n) є збіжність послідовностей (x_n) і (y_n).*

Доведення. Справедливість цієї теореми випливає з нерівностей

$$\left.\begin{array}{l} |x_n - x| \\ |y_n - y| \end{array}\right\} \le |z_n - z| \le |x_n - x| + |y_n - y|, \tag{1.2}$$

які є наслідком нерівностей (1.1). Справді, якщо $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = z$, то $|z_n - z| \to 0$ $(n \to \infty)$ і, отже, згідно з лівою частиною (1.2) $|x_n - x| \to 0$ і $|y_n - y| \to 0$ $(n \to \infty)$. Подібно, використовуючи праву частину (1.2), доводимо достатність.

Послідовність z_n називається обмеженою, якщо $(\exists M > 0)$ $(\forall n \in \mathbb{N})(\{|z_n| < M\}$. Використовуючи відповідну теорему з курсу математичного аналізу і теорему 1.1, легко довести наступне твердження: з кожної обмеженої послідовності можна виділити збіжну підпослідовність.

Числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k \tag{1.3}$$

називається збіжним, якщо збіжна послідовність його часткових сум: $S_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} z_k$. При цьому $S = \lim\limits_{n \to \infty} S_n$ називається сумою ряду (1.3).

Опираючись на критерій Коші збіжності дійсної числової послідовності і нерівності (1.1), як при доведенні теореми 1.1, легко отримати критерій Коші збіжності комплексної послідовності. Якщо застосуємо цей критерій до послідовності (S_n), то матимемо таке твердження: для того щоб ряд (1.3) був збіжним, необхідно і досить, щоб

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall m \in \mathbb{N}) \left\{ \left| \sum_{k=n+1}^{n+m} z_k \right| < \varepsilon \right\}.$$

Безпосередньо з означення збіжності ряду (1.3) випливає, що необхідною умовою його збіжності є $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$.

Ряд (1.3) називається абсолютно збіжним, якщо збіжний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$. Для дослідження збіжності останнього ряду можна використовувати ознаки, відомі з курсу математичного аналізу. Тут ми зупинимось на ознаці Коші.

Теорема 1.2. *Нехай $q = \overline{\lim\limits_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|z_k|}$ (тут береться арифметичне значення кореня). Тоді, якщо $q < 1$, то ряд (1.3) абсолютно збіжний, а якщо $q > 1$, то він розбіжний.*

Доведення. Якщо $q < 1$, то за означенням верхньої границі

$$(\forall\varepsilon \in (0, 1-q))(\exists k_0 \in \mathbb{N})(\forall k > k_0) \left\{ \sqrt[k]{|z_k|} < q + \varepsilon < 1 \right\}$$

і, отже, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |z_k|$ мажорується числовим рядом $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (q+\varepsilon)^k$ і є збіжним. Якщо ж $q > 1$, то існує послідовність $(k_j) \to \infty$ така, що $\sqrt[k]{|z_{k_j}|} \to q > 1$ $(j \to \infty)$. Отже, для нескінченної множини k_j маємо $|z_{k_j}| > 1$, і не виконується необхідна умова збіжності ряду.

1.3. ФУНКЦІЇ, КРИВІ, ОБЛАСТІ

Будемо говорити, що на множині $E \subset \mathbb{C}$ задана функція комплексної змінної, якщо кожному $z \in E$ поставлене у відповідність число $w \in \mathbb{C}$. Це записуватимемо наступним чином $w = f(z)$.

Областю називається відкрита зв'язна множина з $\mathbb{C}$. Поняття внутрішньої і зовнішньої точок множини, а також краю вводяться, як і в $\mathbb{R}^2$. Замкненою областю називається замикання області, тобто об'єднання області з її краєм.

Означення границі функції f в точці $z_0 \in \mathbb{C}$ є таким

$$(\lim_{z \to z_0} f(z) = A) \equiv (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z)\{0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - A| < \varepsilon\}.$$

Теорема 1.3. *Нехай* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. *Тоді*

$$(\lim_{z \to z_0} f(z) = A) \equiv (\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = Re\, A) \wedge (\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = Im\, A).$$

Доведення цієї теореми таке саме, як і доведення теореми 1.1.

Функція f називається неперервною в точці z_0, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. З теореми 1.3 випливає, що f неперервна в точці z_0 тоді і тільки тоді, коли функції u і v неперервні в точці (x_0, y_0). Функція називається неперервною на множині, якщо вона неперервна в кожній точці цієї множини. Нарешті, функція f називається обмеженою на множині E, якщо $(\exists M > 0)(\forall z \in E)\{|f(z)| \le M\}$.

Теорема 1.4 (Вейєрштрасса). *Якщо функція f неперервна на компактній множині, то вона обмежена, а її модуль досягає своїх найбільшого і найменшого значень.*

Доведення. З неперервності функції f випливає неперервність функції $|f| = \sqrt{u^2 + v^2}$, і нам досить до $|f|$ застосувати відомі з курсу математичного аналізу теореми.

Функція f називається рівномірно неперервною на множині E, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (z_1, z_2) \in E^2)\{|z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon\}.$$

Теорема 1.4 (Кантора). *Якщо функція f неперервна на компактній множині E, то вона на цій множині є рівномірно неперервною.*

Доведення. З неперервності f на E випливає неперервність $\mathrm{Re}\, f$ та $\mathrm{Im}\, f$ на E. За теоремою Кантора з математичного аналізу функції $\mathrm{Re}\, f$

і $\operatorname{Im} f$ рівномірно неперервні на E. Використовуючи тепер нерівності (1.1), легко доводимо рівномірну неперервність f на E.

Похідною функції f в точці $z_0 \in \mathbb{C}$ називається величина

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

З цього означення, як і для функції дійсної змінної, легко отримати формули для знаходження похідної суми, добутку, частки двох функцій. Ці формули такі ж, як і в курсі математичного аналізу.

Якщо $z = z(t)$ — комплекснозначна функція дійсної змінної $t \in [a, b]$, то, покладаючи $z(t) = x(t) + iy(t)$, маємо $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$.

Нехай $x = x(t)$, $y = y(t)$, де $x(t)$ і $y(t)$ є неперервними функціями від $t \in [a, b]$, — параметричне зображення деякої кривої в $\mathbb{R}^2$. Якщо перейдемо до $\mathbb{C}$, то це параметричне зображення матиме вигляд $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, причому $z(t)$ — неперервна на $[a, b]$ функція. Факт, що крива C має параметричне зображення $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, записуватимемо у вигляді $C = (z = z(t), t \in [a, b])$. Через C^- позначатимемо криву C з протилежним напрямом обходу, тобто $C^- = (z = z(a + b - t),\ t \in [a, b])$. Якщо $z(a) = z(b)$, то крива C називається замкненою. Через $[C]$ позначатимемо образ відрізка $[a, b]$ при відображенні $z = z(t)$, тобто $[C] = \{z : z = z(t),\ t \in [a, b]\}$. Якщо це відображення бієктивне, то крива називається жордановою. Якщо для $a \le t_1 < t_2 \le b$ виконується нерівність $z(t_1) \ne z(t_2)$, крім випадку, коли $t_1 = a$, $t_2 = b$ і $z(a) = z(b)$, то крива називається замкненою жордановою кривою. Зазначимо, що замкнена жорданова крива не є жордановою кривою. Якщо Γ — замкнена жорданова крива, то множина $\mathbb{C} \setminus [\Gamma]$ складається з двох областей: обмеженої $\operatorname{int} \Gamma$ і необмеженої $\operatorname{ext} \Gamma$. Вважаємо, що замкнена жорданова крива орієнтована так, що при обході Γ область $\operatorname{int} \Gamma$ залишається зліва. Крива $[C]$ називається гладкою (кусково-гладкою), якщо для неї існує параметричне зображення $z = z(t)$, $t \in [a, b]$, яке має неперервну (кусково-неперервну) похідну, відмінну на $[a, b]$ від нуля (у випадку кусково-неперервної похідної вимагається, щоб у точках її розриву односторонні похідні існували та не дорівнювали нулю).

Теорема 1.6. *Для кожної кривої C множина $[C]$ є компактною.*

Доведення. Нехай $C = (z = z(t), t \in [a, b])$. Оскільки відрізок $[a, b]$ — компактна множина, його образ $[C]$ при неперервному відображенні $z = z(t)$ є також компактною множиною.

Надалі для спрощення формулювань тверджень домовимося розглядати тільки кусково-гладкі криві, не відзначаючи спеціально цю домовленість, хоч у багатьох випадках ми не використовуватимемо властивості кускової гладкості, а в деяких випадках могли б лише вимагати спрямлюваності кривої. Довжину кривої C позначатимемо через $|C|$ (читається "довжина", а не "модуль").

Область $G \subset \mathbb{C}$ називається однозв'язною тоді, коли яку б замкнену жорданову криву Γ з цієї області не взяти, то $\operatorname{int} \Gamma \subset G$. На рис. 1.1 подані приклади однозв'язних областей: а) — круг $\{z : |z - z_0| < R\}$ радіуса R з центром у точці z_0; б) — верхня півплощина $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$; в) — права півплощина $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$.

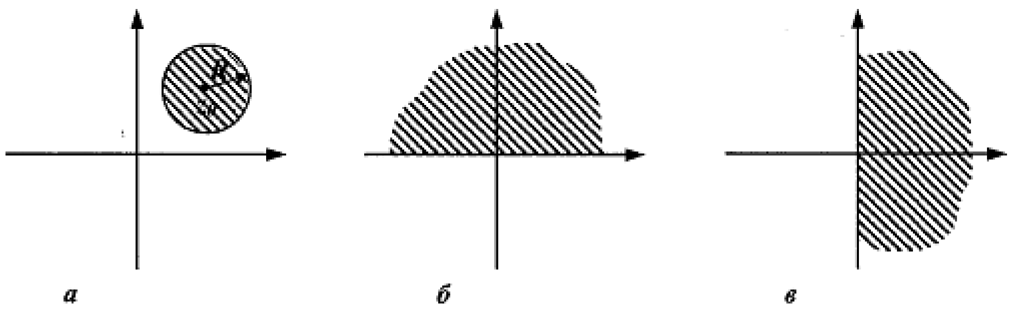


Рис. 1.1

1.4. ТОЧКА НЕСКІНЧЕННІСТЬ. СФЕРА РІМАНА

Досі ми говорили про скінченну площину $\mathbb{C}$. Буде вигідно до неї додати спеціальну точку ∞, ε-околом якої є $\{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1/\varepsilon\}$. Вважаємо, що $|\infty| = +\infty$, а рівність $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = \infty$ означає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0)(\forall n > n_0)\{|z_n| > 1/\varepsilon\}.$$

Аналогічно $\lim\limits_{z \to \infty} f(z) = \infty$ означає, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z \in \mathbb{C})\{|z| > 1/\delta\} \Rightarrow \{|f(z)| > 1/\varepsilon\}.$$

Означення $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$ та $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = a,\ a \in \mathbb{C}$, залишаємо для читача. Множина $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ називається розширеною комплексною площиною. Її введення спрощує формулювання і доведення ряду теорем. Наприклад, тепер можна стверджувати, що з кожної послідовності із $\overline{\mathbb{C}}$ можна виділити збіжну.

Над нескінченно віддаленою точкою означені такі дії: якщо, $z \in \mathbb{C}$, то $z + \infty = \infty$ і $z/\infty = 0$, а якщо $z \in \overline{\mathbb{C}}\backslash\{0\}$, то $z/0 = \infty$ і $z\,\infty = \infty$. Операції $\infty + \infty$, $0\,\infty$ і ∞/∞ не визначаються.

Задана в околі точки ∞ функція f називається неперервною в ∞, якщо функція $g(z) = f(1/z)$ є неперервною в точці 0.

У розширеній комплексній площині всі поняття, пов'язані з кривою і розглянені в розділі 1.3, зберігаються. Зберігаються також поняття області та замкненої області. Проте поняття однозв'язності тепер треба уточнити. Область $G \subset \overline{\mathbb{C}}$ називається однозв'язною, якщо для кожної замкненої жорданової кривої $[\Gamma] \subset G$ принаймні одна з двох областей, на які Γ ділить $\overline{\mathbb{C}}$, міститься в G. Наприклад, область $\{z \in \overline{\mathbb{C}} : |z| > 1\}$ є однозв'язною, а область $\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$ – –– неоднозв'язна.

Під колом на $\overline{\mathbb{C}}$ будемо розуміти як коло в $\mathbb{C}$, так і пряму в $\mathbb{C}$. Кругом називатимемо область, обмежену колом, так що в $\overline{\mathbb{C}}$ кругом може бути і зовнішність кола, і півплощина. Доцільність такого розширення повністю стане зрозумілою при вивченні дробово-лінійних відображень. З формальної точки зору воно дозволяє в багатьох теоремах відкинути додаткові умови. Наприклад, твердження, що через три точки в $\mathbb{C}$, що не лежать на одній прямій, можна провести одне і тільки одне коло, тепер звучить так: через три різні точки в $\overline{\mathbb{C}}$ можна провести одне і тільки одне коло. Рівняння кола в декартових координатах має при такій домовленості вигляд $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ (вимога $A \neq 0$ тепер не потрібна).

Зображення комплексних чисел точками на площині не є єдиним способом геометричного зображення. Вкажемо інший спосіб. У тривимірному просторі з ортогональними декартовими координатами (x, y, ξ) розглянемо сферу з центром в $(0, 0, 1/2)$ і радіусом $1/2$ (рис. 1.2). Площину $\{(x, y, \xi) : \xi = 0\}$ приймемо за комплексну площину, дійсна вісь якої — вісь x, а уявна — вісь y. Якщо з точки $P(0, 0, 1)$, що називається північним полюсом, провести промінь, який перетинає сферу (один раз), то він перетне комплексну площину теж один раз. Отже, між точками на сфері (крім точки P) і точками з $\mathbb{C}$ встановлена бієктивна відповідність. Точці P поставимо у відповідність точку ∞. Так означена відповідність між сферою (вона носить назву сфери Рімана) і розширеною комплексною площиною $\overline{\mathbb{C}}$ є бієктивною і неперервною. Вона називається стереографічною проекцією. Існують формули, які описують цю проекцію, але на них зупинятися не будемо. Зауважимо тільки, що з цих формул випливає, що стереографічна проекція колу в $\overline{\mathbb{C}}$ ставить у відповідність коло на сфері Рімана. Прямій в $\mathbb{C}$ відповідає коло на сфері Рімана, яке проходить через точку P.

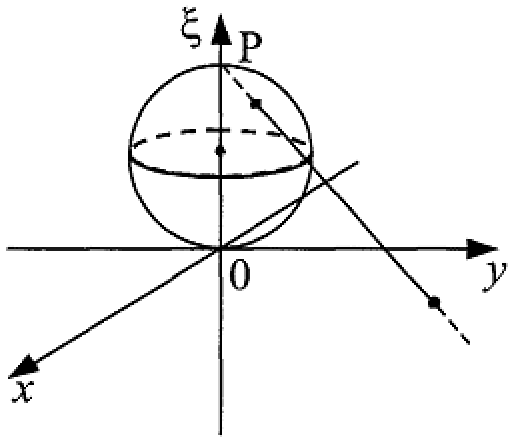


Рис. 1.2

1.5. ПОНЯТТЯ МОНОГЕННОСТІ ТА АНАЛІТИЧНОСТІ ФУНКЦІЇ. УМОВИ КОШІ-РІМАНА

Нехай в області G задана функція f і $z_0 \in G$. Функція f називається моногенною в точці z_0, якщо вона має скінченну похідну $f'(z_0)$, і моногенною в області G, якщо вона моногенна в кожній точці цієї області. Якщо функція f в деякому околі точки z_0 має неперервну похідну, то вона називається аналітичною в точці z_0. Якщо функція f аналітична в кожній точці області G, то вона називається аналітичною в G. Функція f називається аналітичною в замкненій області $\overline{G}$, якщо вона аналітична в деякій області D, яка містить $\overline{G}$. Нарешті, визначена в околі точки ∞ функція f називається аналітичною в ∞, якщо функція $g(z) = f(1/z)$ аналітична в точці $z = 0$.

Очевидно, що з аналітичності функції f в області G випливає її моногенність у цій області. В розділі 4.6 ми покажемо, що справедливе також обернене твердження, а зараз доведемо таку теорему.

Теорема 1.7. *Нехай в околі точки z_0 задана функція $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, а функції u і v мають у цьому околі неперервні частинні похідні. Тоді необхідною і достатньою умовою моногенності функції f у точці z_0 є виконання в цій точці таких умов Коші-Рімана:*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.4}$$

Доведення. Якщо f моногенна в z_0, то

$$\lim_{\triangle z \to 0} \frac{\triangle f}{\triangle z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0), \tag{1.5}$$

яким би чином до точки z_0 не наближатися. Спочатку наближатимемося до z_0 по горизонтальній прямій $\{z : \operatorname{Im} z = y_0\}$; тоді $z = x + iy_0$, $z - z_0 = x - x_0$ і

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) + iv(x,y_0) - u(x_0,y_0) - iv(x_0,y_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x,y_0) - v(x_0,y_0)}{x - x_0} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.6}$$

(тут і надалі частинні похідні взяті в точці z_0).

Якщо наближатимемося до z_0 по вертикальній прямій $\{z : \operatorname{Re} z = x_0\}$, то $z - z_0 = i(y - y_0)$ і подібно дістанемо рівність

$$f'(z_0) = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{1.7}$$

Прирівнюючи праві сторони рівностей (1.6) і (1.7), дістанемо (1.4). Необхідність умов Коші-Рімана доведена.

Зауважимо, що одночасно виведено формули для обчислення похідної функції f як (1.6), так і (1.7). При доведенні необхідності неперервність частинних похідних не використовувалась; можна не вимагати навіть їх існування в точці z_0.

Доведемо тепер достатність умов Коші-Рімана. З неперервності частинних похідних за відомою теоремою з математичного аналізу для повних приростів функцій u і v матимемо:

$$\triangle u = \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\triangle y + o(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}), \quad \triangle x \to 0,\ \triangle y \to 0;$$

$$\triangle v = \frac{\partial v}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial v}{\partial y}\triangle y + o(\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2}), \quad \triangle x \to 0,\ \triangle y \to 0.$$

Оскільки $\triangle z = \triangle x + i\triangle y$, то $\sqrt{\triangle x^2 + \triangle y^2} = |\triangle z|$, і, використовуючи умови Коші-Рімана (1.4), при $\triangle z \to 0$ маємо

$$\triangle u = \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial y}\triangle y + o(|\triangle z|) = \frac{\partial u}{\partial x}\triangle x - \frac{\partial v}{\partial x}\triangle y + o(\triangle z);$$

$$\triangle v = \frac{\partial v}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial v}{\partial y}\triangle y + o(|\triangle z|) = \frac{\partial v}{\partial x}\triangle x + \frac{\partial u}{\partial x}\triangle y + o(\triangle z).$$

Оскільки $1/i = -i$, а $\triangle f = \triangle u + i\triangle v$, то звідси

$$\frac{\triangle f}{\triangle z} = \frac{1}{\triangle z}\{\frac{\partial u}{\partial x}(\triangle x + i\triangle y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(\triangle x + i\triangle y)\}+$$

$$+o(1) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}0(1) \quad (\triangle z \to 0).$$

З останньої рівності випливає існування границі (1.5), тобто f моногенна в z_0. Теорему доведено.

Теорема 1.8. *Нехай функція $f = u + iv$ задана в області G і функції u і v мають в G неперервні частинні похідні. Для того щоб f була аналітичною в G, необхідно і достатньо, щоб в G виконувалися умови Коші-Рімана.*

Доведення. Якщо функція f аналітична в області G, то вона моногенна в G, і за теоремою 1.7 виконуються умови Коші-Рімана. Навпаки, з виконання умов Коші-Рімана випливає, що f моногенна в кожній точці із G, тобто в кожній точці із G існує похідна $f' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$. Але функції $\frac{\partial u}{\partial x}$ і $\frac{\partial v}{\partial x}$ неперервні в G. Тому f' неперервна в G, тобто функція f аналітична в G.

Останню теорему можна переформулювати в термінах теорії поля. Нехай $A(z) = P(z) + iQ(z) = \overline{f}(z) = u(z) - iv(z)$, де f — функція з теореми 1.8. Розглядаючи числа $A(z)$ як вектори, дістанемо векторне поле в G, яке називається комплексно спряженим до функції f. Поле називається соленоїдальним, якщо div $A \equiv 0$ у G. Але $\operatorname{div} A = \dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{\partial Q}{\partial y}$. Тому необхідною і достатньою умовою соленоїдальності поля A є рівність $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -\dfrac{\partial Q}{\partial y}$, тобто $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ (перша умова Коші-Рімана для f). Поле A називається безвихровим, якщо $\operatorname{rot} A \equiv 0$ в G. Але $rot\, A$ є вектор перпендикулярний до площини $\mathbb{C}$, довжина якого є $|\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y}|$. Умова $\operatorname{rot} A = 0$ рівносильна умові $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$, або $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$ (другій умові Коші-Рімана). Отже, теорему 1.8 можна сформулювати так.

Теорема 1.8*. *Нехай функція $f = u + iv$ задана в області G і функції u і v мають у G, неперервні частинні похідні. Для того щоб f була аналітичною в G, необхідно й досить, щоб комплексно спряжене векторне поле до f було соленоїдальним і безвихровим.*

З теореми 1.8 випливає наступне твердження.

Наслідок. *Якщо функція f аналітична в області G і $(\forall z \in G)$ $\{Im\, f(z) = K_1\}$, то $(\forall z \in G)\{f(z) = K_2\}$, $K_1 = const$, $K_2 = const$.*

Справді, якщо $v(x, y) \equiv K_1$, то з (1.4) випливає, що $u(x, y) \equiv \text{const}$.

1.6. ГЕОМЕТРИЧНИЙ ЗМІСТ МОДУЛЯ І АРГУМЕНТУ ПОХІДНОЇ. КОНФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

Якщо функція f аналітична в точці $z_0 \in \mathbb{C}$ і $f'(z_0) \neq 0$, то кажуть, що f здійснює відображення, конформне в z_0. Відображення називається конформним в $G \subset \mathbb{C}$, якщо воно конформне в кожній точці області G.

Нехай функція f аналітична в області G і $z_0 \in G$. Припустимо, що f здійснює відображення, конформне в z_0, тобто $f'(z_0) = A(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, $A > 0$.

Тоді за означенням похідної маємо

$$\lim_{z\to z_0} \frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|} = A > 0. \tag{1.8}$$

Відображення, яке має властивість (1.8), називається відображенням сталого лінійного розтягу в точці z_0, а число A — коефіцієнтом розтягу. Зауважимо, що не кожне відображення має сталий коефіцієнт розтягу. Наприклад, якщо $w = 2x + iy$, то образ вертикального відрізка має ту саму довжину, що й відрізок, а образ горизонтального відрізка має довжину вдвоє більшу за довжину прообразу.

З'ясуємо тепер геометричний зміст аргументу похідної. Нехай область $D \subset \mathbb{C}$ є образом при відображенні f області $G \subset \mathbb{C}$ і нехай $w_0 = f(z_0)$. Візьмемо в G гладку криву $[\gamma_1] = \{z : z = z(t),\ t \in [a,b]\}$, з початком у точці z_0 (рис. 1.3), так що $z_0 = z(a)$ і $z'(t) \neq 0$ $a \le t \le b$. Образом кривої $[\gamma_1]$ буде деяка крива $[\Gamma_1] = \{w : w = f(z(t))\ t \in [a,b]\}$ в області D. Оскільки $w'(t) = f'(z(t))z'(t)$ і $w'(a) = f'(z_0)z'(a)$, то крива Γ_1 в деякому околі точки w_0 є гладкою. Крім того, з останньої рівності маємо

$$\operatorname{Arg} w'(a) = \alpha + \operatorname{Arg} z'(a), \quad \alpha \in \operatorname{Arg} f'(z_0). \tag{1.9}$$

Отже, щоб з'ясувати геометричний зміст аргументу $f'(z_0)$, треба спочатку з'ясувати геометричний зміст аргументу $z'(a)$. Оскільки

$$z'(a) = \lim_{t\to a} \frac{z(t)-z(a)}{t-a} \neq 0,$$

то

$$\arg \frac{z(t)-z(a)}{t-a} \to \arg\ z'(a) \quad (t \to a).$$

Тут під $\arg$ розуміємо $\arg_{-\pi}$, якщо $z'(a)$ не є дійсним від'ємним числом, і $\arg_0$, якщо $z'(a) < 0$.

Неперервність лівої сторони попереднього співвідношення в $t = a$ випливає з більш загального факту (див. розділ 3.1).

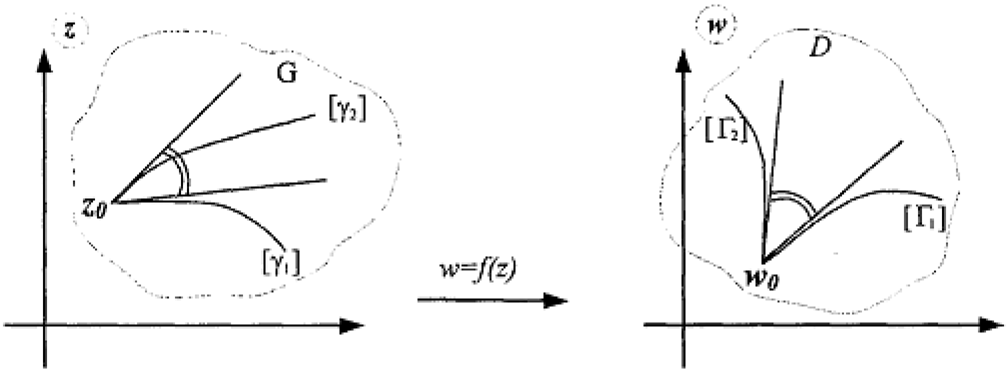


Рис. 1.3

Оскільки $t - a > 0$, то

$$\arg\ (z(t) - z(a)) = \arg \frac{z(t) - z(a)}{t - a} \to \arg\ z'(a) \quad (t \to a).$$

Оскільки $\arg\ (z(t) - z_0)$ означає кут нахилу січної, що проходить через точки $z(t)$ і z_0, то $\arg\ z'(a)$ означає кут нахилу дотичної до кривої $[\gamma_1]$ в точці z_0. Подібно, $\arg\ w'(a)$ — кут нахилу дотичної до кривої $[\Gamma_1]$ в точці w_0. Позначимо ці кути відповідно через Φ_{γ_1} і Ψ_{Γ_1}; тоді з (1.9) маємо

$$\Psi_{\Gamma_1} = \alpha + \Phi_{\gamma_1}, \tag{1.10}$$

тобто число α геометрично означає кут повороту (дотичної).

Якщо тепер взяти іншу криву $[\gamma_2]$ з початком у точці z_0, то аналогічно дістанемо, що $\Psi_{\Gamma_2} = \alpha + \Phi_{\gamma_2}$, де $[\Gamma_2]$ — образ кривої $[\gamma_2]$. Віднімаючи цю рівність від (1.10), отримаємо рівність

$$\Psi_{\Gamma_1} - \Psi_{\Gamma_2} = \Phi_{\gamma_1} - \Phi_{\gamma_2}. \tag{1.11}$$

У лівій частині (1.11) стоїть кут між кривими $[\Gamma_1]$ і $[\Gamma_2]$, а в правій — між $[\gamma_1]$ і $[\gamma_2]$. Рівність (1.11) показує, що при конформному відображенні зберігається величина кутів. Зберігається і напрям відліку кутів. Ця властивість називається консерватизмом кутів.

Отже, конформні відображення є відображеннями локальної подібності.

У математичній літературі конформні відображення, які щойно вивчили, називають часто конформними відображеннями першого роду, щоб їх відрізнити від так званих конформних відображень другого роду, при яких величина кутів залишається незмінною, а напрям відліку змінюється на протилежний. Можна показати, що конформні відображення другого роду здійснюються функціями, які є комплексно спряженими до аналітичних функцій з відмінними від нуля похідними. Це на прикладі функції $w = \overline{z}$ показано на рис. 1.4.

Теорема 1.9 (принцип збереження області). *Якщо функція $f \not\equiv const$ аналітична в області G, то образом цієї області при відображенні f є область.*

Доведення. Повне доведення цього принципу подамо в розд. 6. Тут зупинимося лише на випадку конформного відображення. Використовуючи формулу (1.6) і умови Коші-Рімана (1.4), маємо

$$J = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 = |f'|^2 \neq 0,$$

тобто якобіан відображення не дорівнює нулю і досить використати відому теорему з математичного аналізу.

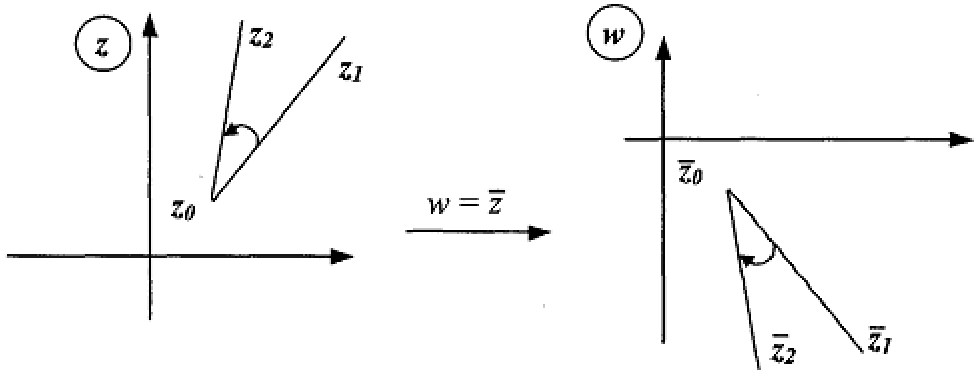


Рис. 1.4

Досі вивчались конформні відображення обмеженої області на обмежену. Проте можна дати поняття конформного відображення околу точки z_0 на окіл точки w_0, якщо принаймні одна з них є ∞.

Якщо, $z_0 = \infty$ і $w_0 = f(z_0) \neq \infty$, то відображення, здійснюване функцією f, називається конформним в z_0, якщо в $z = 0$ є конформним відображення, здійснюване функцією $w = f(1/z)$.

Якщо, $z_0 \neq \infty$ і $w_0 = f(z_0) = \infty$, то відображення, здійснюване функцією f, називається конформним в z_0, якщо у точці z_0 є конформним відображення, здійснюване функцією $w = 1/f(z)$.

Якщо, $z_0 = \infty$ і $w_0 = f(z_0) = \infty$, то відображення, здійснюване функцією f, називається конформним в z_0, якщо у точці $z = 0$ є конформним відображення, здійснюване функцією $w = 1/f(1/z)$.

Основною теоремою про конформні відображення є наступна теорема Рімана, доведення якої є досить складне, і тут не подається.

Теорема 1.10 (Рімана). *Нехай G і D — дві однозв'язні області із $\mathbb{C}$, відмінні від $\mathbb{C}$. Нехай $z_0 \in G$, і $w_0 \in D$ і α — довільне число, $-\pi \leq \alpha \leq \pi$. Тоді існує єдина функція f, яка здійснює конформне відображення $G \to D$, так, що $w_0 = f(z_0)$ і $\arg f'(z_0) = \alpha$.*

На закінчення цього розділу дамо означення однолистої функції. Аналітична в області G функція f називається однолистою в G, якщо

$$(\forall z_1 \in G)(\forall z_2 \in G)\{z_1 \neq z_2\} \Rightarrow \{f(z_1) \neq f(z_2)\}.$$

Розділ 2

ЕЛЕМЕНТАРНІ АНАЛІТИЧНІ ФУНКЦІЇ

2.1. ЦІЛА ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Аналітична в усій площині $\mathbb{C}$ функція називається цілою функцією. Цілою лінійною (або просто лінійною) називається функція $w = az + b$, де $a \neq 0$. Обернена до цієї функції є теж лінійною і, оскільки $w' = a \neq 0$, то ціла лінійна функція конформно і однолисто відображає $\mathbb{C}$ в $\mathbb{C}$. Покажемо, що відображення $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ за допомогою цілої лінійної функції є конформним. Для цього треба перевірити конформність у точці $z = \infty$. Згідно з означенням слід розглянути функцію $w = \dfrac{1}{a/z + b} = \dfrac{z}{bz + a}$. Оскільки для такої функції $w' = \dfrac{a}{(bz+a)^2}$, то $w'(0) = \dfrac{1}{a} \neq 0$, і цим самим конформність у ∞ доведена.

Легко перевірити, що суперпозиція двох лінійних функцій є лінійною функцією.

Дві множини називатимемо подібними, якщо їх можна сумістити, використовуючи тільки перетворення гомотетії (розтягу), повороту та паралельного перенесення (зсуву).

Теорема 2.1. *Ціла лінійна функція відображає кожну множину в подібну до себе, і навпаки, дві подібні множини можна однолисто відобразити одну в іншу за допомогою цілої лінійної функції.*

Доведення. Нехай $a = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$. Функцію $w = az + b$ можемо розуміти як суперпозицію функцій $w_1 = |a|z$, $w_2 = w_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$ і $w = w_2 + b$. Для функції $w_1 = |a|z$ маємо $|w_1| = |a|\ |z|$ і $\operatorname{Arg} w_1 =$

$= \operatorname{Arg}|a| + \operatorname{Arg} z = \operatorname{Arg} z$. Отже, якщо точка z знаходилась на якомусь промені, що виходить з початку координат, то точка w_1 буде теж на цьому промені. Зміниться тільки в $|a|$ раз відстань до початку координат, тобто маємо розтяг. Далі, якщо $w_2 = w_1(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, то $|w_2| = |w_1|$ і $\operatorname{Arg} w_2 = \operatorname{Arg} w_1 + \operatorname{Arg}(\cos\alpha + i\sin\alpha) = \alpha + \operatorname{Arg} w_1$, тобто, залишаючись на однаковій відстані до початку координат, всі точки повертаються на кут α. Нарешті, функція $w = w_2 + b$ здійснює паралельне перенесення на вектор b.

Навпаки, довільні перетворення розтягу, повороту і зсуву здійснюються цілими лінійними функціями. Тому дві задані подібні множини можна відобразити суперпозицією цілих лінійних функцій, тобто цілою лінійною функцією. Теорему 2.1 доведено.

2.2. СТЕПЕНЕВА ФУНКЦІЯ З НАТУРАЛЬНИМ ПОКАЗНИКОМ

Так називається функція $w = z^n = zz\cdots z$ (n множників), $n \geq 2$. Використовуючи означення похідної або формулу для похідної добутку, легко показати, що $w' = nz^{n-1}$. Звідси випливає, що $w = z^n$ – ціла функція і здійснює відображення, конформне в кожній точці області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$.

Знайдемо області однолистості степеневої функції. Для цього треба знайти такі області G, для яких $(\forall z_1 \in G)(\forall z_2 \in G)\{z_1 \neq z_2 \Rightarrow z_1^n \neq z_2^n\}$. Оскільки

$$(z_1^n = z_2^n) \equiv (|z_1^n| = |z_2^n| \wedge \operatorname{Arg} z_1^n = \operatorname{Arg} z_2^n) \equiv$$

$$\equiv (|z_1| = |z_2| \wedge n \operatorname{Arg} z_1 = n \operatorname{Arg} z_2) \equiv (|z_1| = |z_2| \wedge n \arg z_1 =$$

$$= n\, arg\, z_2 + 2k\pi) \equiv (|z_1| = |z_2| \wedge \arg z_1 = \arg z_2 + 2k\pi/n), \quad k \in \mathbb{Z},$$

то область G є областю однолистості для $w = z^n$, якщо вона не містить жодної пари точок з рівними модулями і кратною $2\pi/n$ різницею аргументів. Зокрема, функція $w = z^2$ є однолистою в кожній півплощині, край якої проходить через початок координат (рис. 2.1, *б*)

Виведемо тепер так звані формули переходу для відображення $w = z^n$. Нехай $w = \rho\, e^{i\theta}, z = r\, e^{i\varphi}$. Оскільки

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta) = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi),$$

то ми одержуємо

$$\rho = r^n, \quad \theta = n\varphi. \tag{2.1}$$

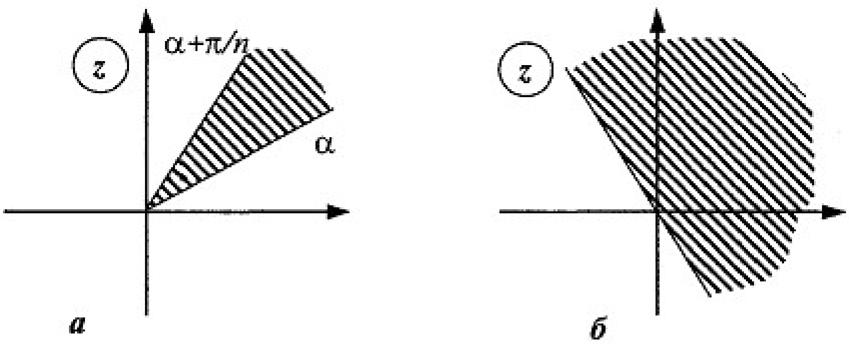


Рис. 2.1

За допомогою формул переходу (2.1) легко показати, що образом області однолистості, зображеної на рис. 2.1, *а*, буде вся w-площина з розрізом по променю $\{w : \operatorname{Arg} w = n\alpha\}$ (рис. 2.2, *а*), а образом верхньої півплощини при відображенні $w = z^2$ буде вся w-площина з розрізом по додатній дійсній півосі (рис. 2.2, *б*).

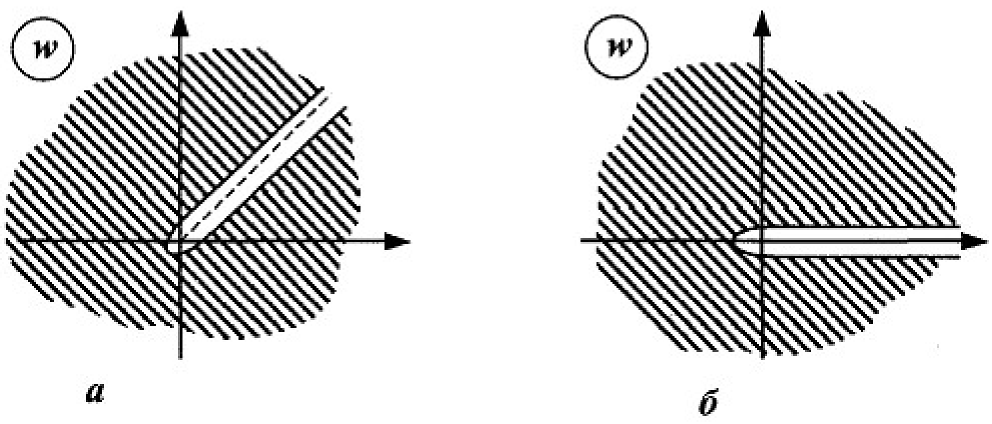


Рис. 2.2

Функція $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ називається многочленом. Оскільки многочлен є суперпозицією лінійних і степеневих функцій, він є цілою функцією. Функція $f(z) = P(z)/Q(z)$, де P і Q — многочлени, називається раціональною (дробово-раціональною) функцією. Вивчення відображень, які здійснюються раціональними функціями, проведені тільки для окремих їх видів. Однією з найважливіших є функція Жуковського.

2.3. ФУНКЦІЯ ЖУКОВСЬКОГО

Функція $J(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ називається функцією Жуковського. Очевидно, що $J'(z) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{z^2}\right)$. Тому функція J є аналітичною в області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$ і відображення, здійснюване функцією J, є конформним всюди в $\mathbb{C}$ за винятком точок $z = -1$ і $z = +1$.

Знайдемо області однолистості функції Жуковського. Припустимо, що точки $z_1 \neq z_2$ відображаються функцією J в одну точку. Тоді

$$(J(z_1) = J(z_2)) \equiv ((z_1 - z_2)(1 - \frac{1}{z_1 z_2}) = 0) \equiv (z_1 z_2 = 1),$$

так що область G є областю однолистості для J тоді і лише тоді, коли в ній немає двох точок $z_1 \neq z_2$ таких, що $z_1 z_2 = 1$.

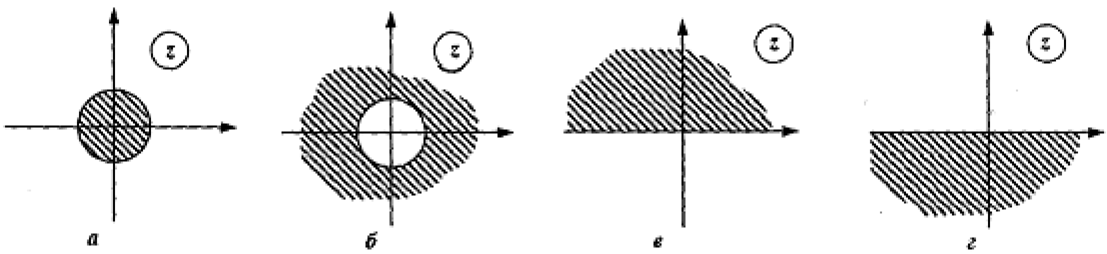


Рис. 2.3

Звідси випливає, що областями однолистості функції J є, наприклад, області: а) $\{z : |z| < 1\}$, б) $\{z : |z| > 1\}$, в) $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, г) $\{z : \operatorname{Im} z < 0\}$

(рис. 2.3). Дійсно, якщо z_1 і z_2 — дві точки з внутрішності одиничного кола, то $|z_1| < 1$, $|z_2| < 1$ і $|z_1 z_2| < 1$. Для зовнішності одиничного кола аналогічно маємо $|z_1 z_2| > 1$. Якщо ж z_1 і z_2 — дві різні точки з верхньої півплощини, то $\arg z_j \in (0, \pi), j = 1, 2$, і $\mathrm{Arg}\,(z_1 z_2) \neq 2\pi k$, тобто знову $z_1 z_2 \neq 1$. Для нижньої півплощини міркування аналогічні.

Дослідимо, на що відображаються ці області однолистості. Оскільки

$$u + iv = \frac{1}{2}\{r(\cos\varphi + i\sin\varphi) + \frac{1}{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\} =$$

$$= \frac{1}{2}\{(r + \frac{1}{r})\cos\varphi + i(r - \frac{1}{r})\sin\varphi\},$$

то для функції Жуковського маємо такі формули переходу:

$$u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r})\cos\varphi; \quad v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r})\sin\varphi. \tag{2.2}$$

Щоб знайти образ зовнішності одиничного кола (рис. 2.3, *б*), зафіксуємо число $r_0 > 1$ і розглянемо коло $\{z : |z| = r_0\}$. Позначимо $a = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{1}{r_0}\right)$ і $b = \frac{1}{2}\left(r_0 - \frac{1}{r_0}\right)$; тоді з (2.2) випливає, що $u = a\cos\varphi$, $v = b\sin\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Дістали параметричне рівняння еліпса, яке можна записати у вигляді

$$\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1. \tag{2.3}$$

Оскільки $c^2 = a^2 - b^2 = 1$, то з (2.3) бачимо, що образами концентричних кіл з центром у початку координат і радіусом $r_0 > 1$ є еліпси з фокусами у точках ± 1, причому з огляду на рівність $\mathrm{sgn}\, v = \mathrm{sgn} \sin\varphi$ верхнє півколо переходить у верхній півеліпс. Коли r_0 наближається до одиниці, то еліпс наближається до відрізка $[-1, 1]$.

Отже, функція Жуковського відображає зовнішність одиничного кола на всю площину з розрізом вздовж відрізка $[-1, 1]$ (рис. 2.4, *а*). Край цієї області — коло $\{z : |z| = 1\}$ — переходить у відрізок $[-1, 1]$, який обходиться двічі, причому верхнє півколо переходить у верхній, а нижнє коло у нижній берег розрізу. Область $\{z : |z| > 1, \ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ переходить у верхню півплощину.

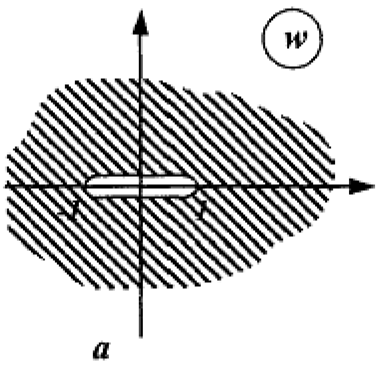
Аналогічно можна показати, що функція Жуковського здійснює конформне і однолисте відображення внутрішності одиничного кола (див. рис. 2.3, *а*) на всю площину з розрізом по відрізку $[-1, 1]$, причому край області — коло $\{z : |z| = 1\}$ — переходить у цей відрізок, а область $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ переходить у нижню півплощину. Це можна було б також показати, використовуючи очевидну рівність $J(z) = J\left(\frac{1}{z}\right)$.

Щоб знайти образ верхньої півплощини, запишемо

$$\{z : \operatorname{Im} z > 0\} =$$

$$= \{z : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\} \cup \{z : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\} \cup \{z : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| = 1\}$$

і відображатимемо кожну з множин правої частини. Оскільки область $\{z : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| > 1\}$ переходить у верхню півплощину, область $\{z : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\}$ — у нижню півплощину, а півколо $\{z : \operatorname{Im} z > 0,\ |z| = 1\}$ — у відрізок $[-1, 1]$, то, отже, образом верхньої півплощини є вся площина з розрізами вздовж променів $[1, +\infty)$ і $[-1, -\infty)$, які лежать на дійсній осі (рис. 2.4, *б*). Аналогічно нижня півплощина теж відображається на область, зображену на рис. 2.4, *б*.



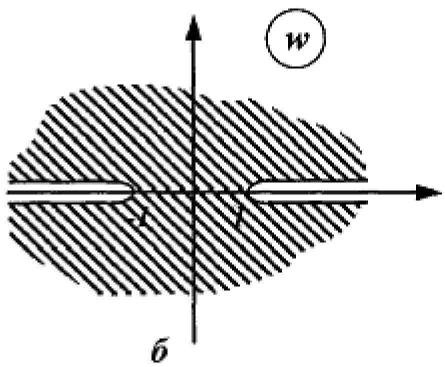


Рис. 2.4

Знайдемо ще образи променів, що виходять з початку координат. Розглянемо спочатку промінь $\{z : arg\, z = \varphi_0\}$, $\varphi_0 \neq \frac{\pi k}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$. Виключаючи з (2.2) параметр r при $\varphi = \varphi_0$, маємо

$$\frac{u^2}{\cos^2\varphi_0} - \frac{v^2}{\sin^2\varphi_0} = 1,$$

тобто наш промінь переходить у гіперболу з фокусами в точках $z = 1$ чи $z = -1$ (глибше дослідження залишається читачеві). Промінь $\{z : \arg z = 0\}$ відображається (небієктивно) у промінь $\{w : |w| > 1, \arg w = 0\}$, промінь $\{z : \arg z = -\pi\}$ — у промінь $\{w : |w| > 1, \arg w = -\pi\}$, а промені $\{z : \arg\ z = \frac{\pi}{2},\ |z| > 1\}$ і $\{z : \arg\ z = -\frac{\pi}{2},\ |z| > 1\}$ переходять відповідно у промені $\{w : \arg w = \frac{\pi}{2}\}$ і $\{w : \arg\ w = -\frac{\pi}{2}\}$.

2.4. ПОКАЗНИКОВА ФУНКЦІЯ

Функція $e^z = e^x(\cos\ y + i\sin\ y)$ називається показниковою. Легко бачити, що якщо $y = 0$, то $e^z = e^x$, і дістаємо показникову функцію, яку вивчали в курсі математичного аналізу. З означення випливає, що $|e^z| = e^x > 0$. Отже, $e^z \neq 0$ в $\mathbb{C}$. Далі, $\operatorname{Arg} e^z = \{y + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}\}$. З означення також випливає, що $e^z = e^x e^{iy}$, де $e^{iy} = \cos\ y + i\sin\ y$. Оскільки $e^{z+2\pi i} = e^x(\cos\ (y + 2\pi) + i\sin\ (y + 2\pi)) = e^z$, то функція e^z періодична з періодом $2\pi i$.

Для функції $w = e^z$ маємо $u = e^x\cos\ y$ і $v = e^x\sin\ y$. Тому, обчислюючи частинні похідні, легко побачити, що вони задовольняють умовам Коші-Рімана для всіх $z \in \mathbb{C}$. Отже, e^z — ціла функція. За формулою (1.6) маємо

$$(e^z)' = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = e^x\cos y + ie^x\sin y = e^z \neq 0,$$

тобто функція $w = e^z$ здійснює відображення, конформне в $\mathbb{C}$.

Знайдемо області однолистості показникової функції. Оскільки при $z_1 \neq z_2$ виконується

$$(e^{z_1} = e^{z_2}) \equiv (e^{x_1}e^{iy_1} = e^{x_2}e^{iy_2}) \equiv (e^{x_1} = e^{x_2} \wedge y_1 = y_2 + 2\pi k) \equiv$$

$$\equiv (x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\},$$

то область G є областю однолистості для e^z тоді і лише тоді, коли в ній немає двох різних точок з однаковими дійсними частинами і уявними частинами, які відрізняються на число, кратне 2π. Зокрема, кожна горизонтальна смуга шириною 2π, тобто $\{z : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$ буде областю однолистості функції e^z (рис. 2.5).

Неважко показати, що формули переходу для функції e^z мають вигляд

$$\rho = e^x, \ \theta = y.$$

Тому образом смуги $\{z : \alpha < \operatorname{Im} z < \alpha + 2\pi\}$ є область $\{w : \alpha < \arg w < \alpha + 2\pi\}$, тобто площина з розрізом по променю $\{w : \arg w = \alpha\}$ (рис. 2.5).

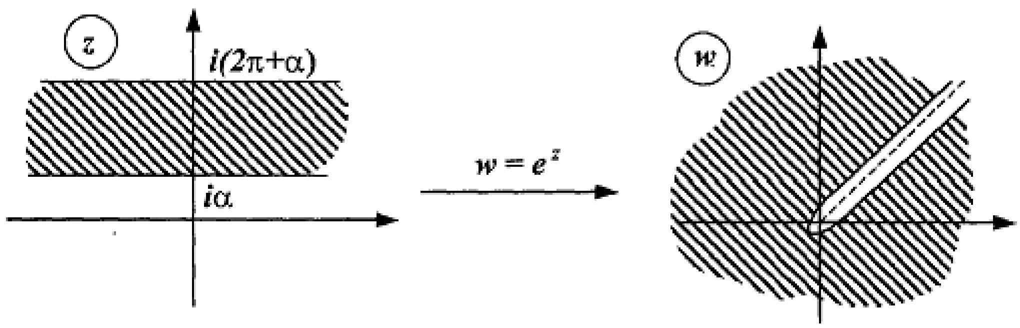


Рис. 2.5

З означення показникової функції випливає, що комплексне число, записане в тригонометричній формі $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, можна коротше записати у так званій показниковій формі $z = re^{i\varphi}$.

2.5. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ТА ГІПЕРБОЛІЧНІ ФУНКЦІЇ

Розглянемо функції

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

та

$$\operatorname{sh} z = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z}), \quad \operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z}),$$

які називаються відповідно тригонометричними і гіперболічними функціями. Якщо $z = x$, то згідно з означенням маємо

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = (\cos x + i\sin x - \cos x + i\sin x)\frac{1}{2i} = \sin x$$

і аналогічно $\cos z = \cos x$, тобто дістаємо функції, які вивчаються ще в середній школі. Тригонометричні і гіперболічні функції $\sin z, \cos z, \operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$ є цілими функціями як суми суперпозицій лінійної і показникової функцій. З періодичності e^z випливає, що функції $\sin z$ і $\cos z$ є періодичними з періодом 2π, а функції $\operatorname{sh} z$ і $\operatorname{ch} z$ є періодичними з періодом $2\pi i$. З означень також випливає, що $\cos z$ і $\operatorname{ch} z$ є парними функціями, а $\sin z$ і $\operatorname{sh} z$ — непарними. Використовуючи означення $\cos z$ і $\sin z$ легко довести справедливість наступної формули Ейлера

$$\cos z + i\sin z = e^{iz}.$$

Між тригонометричними і гіперболічними функціями є такий зв'язок: $\sin iz = i\operatorname{sh} z$ та $\cos iz = \operatorname{ch} z$. Дійсно, для першої з цих рівностей маємо

$$\sin iz = \frac{e^{i(iz)} - e^{-i(iz)}}{2i} = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2i} = i\,\frac{e^{z} - e^{-z}}{2} = i\operatorname{sh} z.$$

Усі формули, відомі зі шкільного курсу тригонометрії, залишаються правильними і в комплексній площині. Наприклад,

$$\begin{gathered}\sin z_1\cos z_2 + \cos z_1\sin z_2 = \\ = \frac{1}{2i}(e^{iz_1} - e^{-iz_1})\frac{1}{2}(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{2}(e^{iz_1} + e^{-iz_1})\frac{1}{2i}(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) = \\ = \frac{1}{2i}(e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}) = \sin(z_1 + z_2).\end{gathered}$$

Якщо тригонометричні функції $\cos x$ і $\sin x$ дійсної змінної є обмеженими, то в комплексній площині функції $\cos z$ і $\sin z$ є необмеженими.

Дійсно, $|\cos iy| = \operatorname{ch} y \to +\infty (y \to \infty)$ і $|\sin iy| = |\operatorname{sh} y| \to +\infty (y \to \infty)$.

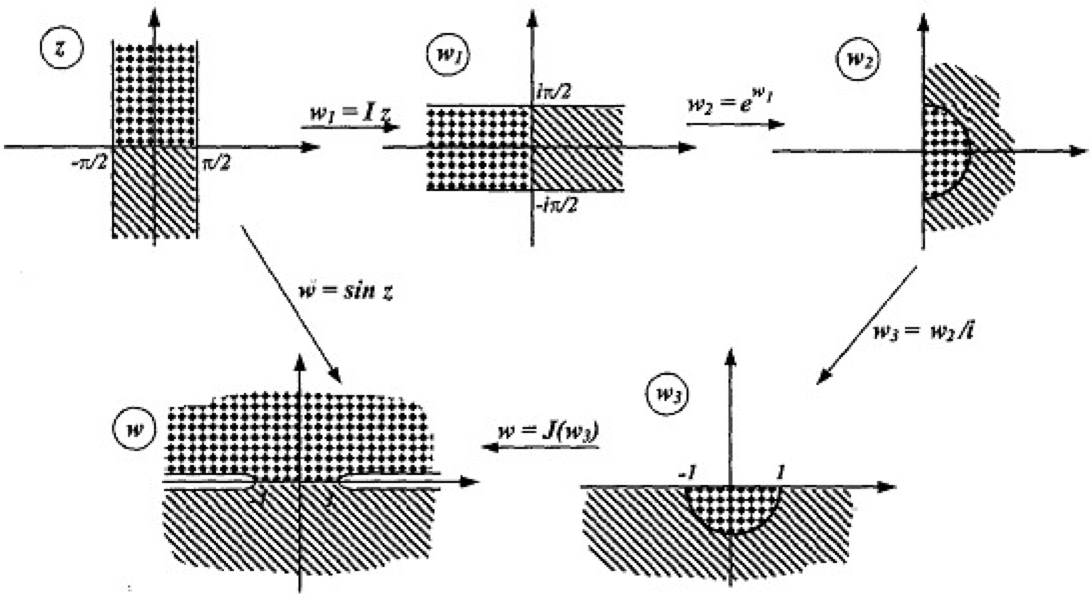


Рис. 2.6

Для знаходження областей однолистості тригонометричних і гіперболічних функцій можемо використовувати ті самі методи, що й раніше. Для знаходження образів областей однолистості можна вивести формули переходу. Наприклад, для функції $w = \sin z$ такими будуть $u = \sin x \operatorname{ch} y$ і $v = \cos x \operatorname{sh} y$. Проте, знаючи вже властивості функції Жуковського, показникової та лінійної функцій, можемо поступати значно простіше. Наприклад, оскільки

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{iz}}{i} + \frac{i}{e^{iz}}\right) = J\left(\frac{e^{iz}}{i}\right),$$

то функцію $w = \sin z$ можна розглядати як суперпозицію функцій: $w = J(w_3)$, $w_3 = \dfrac{1}{i}w_2$, $w_2 = e^{w_1}$, $w_1 = iz$. Якщо здійснити ці відомі нам відображення, то побачимо, що образом вертикальної смуги $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$ є вся площина з розрізами вздовж променів $[1, +\infty)$ та $[-1, -\infty)$, а образом верхньої півсмуги $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ є верхня півплощина (рис. 2.6).

Оскільки $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$, то функцію $\cos z$ можна розглядати як суперпозицію функцій $\sin z$ і лінійної функції і цю обставину використовувати при знаходженні образів відповідних множин.

Зауважимо, що з наведених міркувань випливає, що функція $\sin z$ буде однолистою в смузі $\{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$, а функція $\cos z$ є однолистою в смузі $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$.

Тригонометричні функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ і гіперболічні функції $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ означаються так:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\ \operatorname{ctg} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Легко бачити, що ці функції не є цілими.

2.6. СИМЕТРИЧНІ ТОЧКИ

Нам буде потрібне наступне твердження з елементарної математики.

Лема. *(про дотичну до кола). Нехай з точки M, взятої поза колом, проведено відізок MA, де A — точка на колі, і січну ABC яка перетинає коло в точках B і C (рис. 2.7). Для того щоб пряма була дотичною до кола, необхідно і досить, щоб*

$$|MA|^2 = |MC||MB|. \tag{2.4}$$

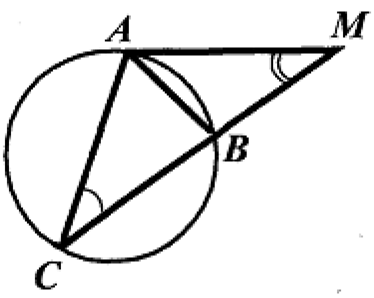


Рис. 2.7

Доведення. Якщо MA — дотична до кола, то $\angle MAB = \angle ACB$, бо вони спираються на ту саму дугу AB. Тому $\triangle CAB \sim \triangle ACM$ і $|MC|/|AM| = |AM|/|MB|$, тобто дістаємо (2.4). Навпаки, якщо виконується (2.4), але MA не є дотичною, то, проводячи дотичну MA', маємо $|MA'|^2 = |MC||MB|$, тобто $|MA'| = |MA|$, що неможливо.

Як було зазначено, під колом у $\overline{\mathbb{C}}$ розуміємо як коло в $\mathbb{C}$, так і пряму в $\mathbb{C}$.

Нехай $[C]$ — пряма в $\mathbb{C}$. Точки z_1 і z_2 називаються симетричними відносно $[C]$, якщо вони лежать на одній прямій, перпендикулярній до $[C]$, по різні боки і на однаковій відстані від $[C]$.

Точки z_1 і z_2 називаються симетричними відносно кола $[C] = \{z : |z - z_0| = R\}$, якщо вони лежать на одному промені, що виходить з z_0, і $|z_1 - z_0||z_2 - z_0| = R^2$. Точки z_0 і ∞ вважаємо симетричними відносно кожного кола з центром у точці z_0.

Теорема 2.2. *Для того щоб точки $z_1 \notin [C]$ і $z_2 \notin [C]$ були симетричні відносно кола $[C] \subset \overline{\mathbb{C}}$, необхідно і досить, щоб кожне коло, яке проходить через ці точки, було ортогональне до $[C]$.*

Доведення. Розглянемо два випадки. У першому з них вважаємо, що коло $[C]$ є пряма в $\mathbb{C}$. Якщо z_1 і z_2 є симетричними відносно прямої $[C]$, то $[z_1, z_2] \perp [C]$ і $\rho(z_1, [C]) = \rho(z_2, [C])$, де $\rho(z, [C])$ — відстань від точки z до кривої $[C]$. Проведемо через z_1 і z_2 коло $[K]$. Тоді відрізок $[z_1, z_2]$ є хордою цього кола, перпендикулярною до прямої $[C]$, тобто $[C]$ є продовженням діаметра кола $[K]$ і, отже, є ортогональною до кола $[K]$ (рис. 2.8, *а*).

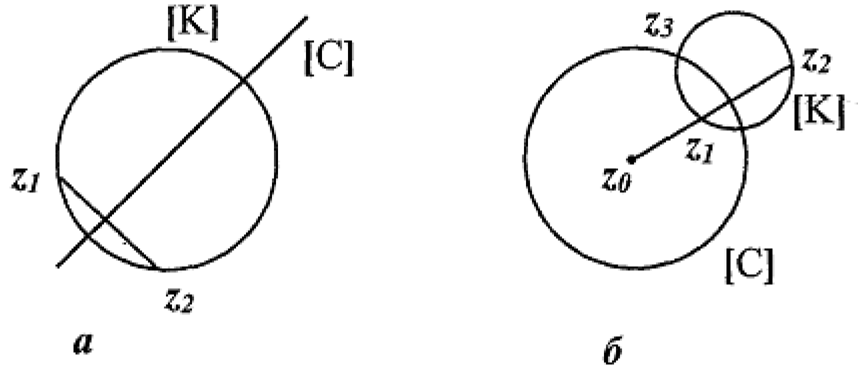


Рис. 2.8

Якщо $[K]$ є прямою, що проходить через точки z_1 і z_2, то $[z_1, z_2] \subset [K]$ і, очевидно, що $[K] \perp [C]$. Навпаки, нехай кожне коло, що проходить через z_1 і z_2, є ортогональним до прямої $[C]$. Проведемо через z_1 і z_2 пряму. Вона повинна бути перпендикулярною до $[C]$. Отже, $[z_1, z_2] \perp [C]$. Далі на $[z_1, z_2]$ як на діаметрі побудуємо коло. Воно теж ортогональне до $[C]$, тобто $[C]$ є продовженням діаметра цього кола. Звідси випливає, що $[z_1, z_2]$ є хордою, перпендикулярною до діаметра, і, отже, $\rho(z_1, [C]) = \rho(z_2, [C])$, а z_1 і z_2 лежать по різні сторони від $[C]$.

Розглянемо другий випадок, коли коло $[C]$ є колом в $\mathbb{C}$. Якщо $z_1 = z_0$ і $z_2 = \infty$, то кола, які проходять через ці точки, є прямі в $\mathbb{C}$, тобто це — діаметри, які є ортогональними до $[C]$. Якщо $z_1 \neq z_0$ і $z_2 \neq \infty$, то проведемо через ці точки будь-яке коло (рис. 2.8, *б*). Позначимо через z_3 одну з точок перетину $[C]$ і $[K]$. Оскільки $|z_0 - z_3| = R$, то $|z_0 - z_3|^2 = |z_1 - z_0||z_2 - z_0|$, звідки за лемою про дотичну випливає, що відрізок $[z_0, z_3]$ є дотичною до кола $[K]$ і, отже, кола $[C]$ і $[K]$ — ортогональні. Навпаки, нехай кожне коло, що проходить через z_1 і z_2, є ортогональним до кола $[C]$. Проведемо через z_1 і z_2 пряму. Оскільки вона ортогональна до $[C]$, центр кола z_0 лежить на цій прямій. Вважаємо, що z_1 і z_2 — скінченні точки (в протилежному разі їх симетричність очевидна). Побудуємо на $[z_1, z_2]$ як на діаметрі коло $[K]$. Воно ортогональне до $[C]$, а отже, дотична до нього в точці перетину кіл $[K]$ та $[C]$ проходить через z_0. Звідси випливає, що z_0 лежить поза колом $[K]$, а точки z_1 і z_2 лежать по одну сторону від z_0. За лемою про дотичну $|z_0 - z_3|^2 = |z_0 - z_1||z_0 - z_2|$, тобто точки z_1 і z_2 симетричні відносно $[C]$. Теорему 2.2 доведено.

2.7. ДРОБОВО-ЛІНІЙНА ФУНКЦІЯ

Дробово-лінійною називається функція

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Очевидно, що обернена до дробово-лінійної функції є дробово-лінійною, суперпозиція дробово-лінійних функцій є дробово-лінійною. Якщо в означенні покладемо $c = 0$, то дістанемо цілу лінійну функцію, яку вже вивчили. Тому надалі вважатимемо, що $c \neq 0$.

Теорема 2.3. *Дробово-лінійна функція конформно та однолисто відображає* $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$.

Доведення. Однолистість випливає з однозначності оберненої функції. Доведемо конформність. Якщо $z \neq -d/c, \infty$, то $w' = (ad - bc)(cz + d)^{-2} \neq 0$. Залишилось розглянути точки $z = -d/c$ та $z = \infty$. Для доведення конформності в точці $z = -d/c$, треба розглянути функцію $w = (cz + d)/(az + b)$, для якої маємо $w'|_{z=-d/c} = (cd - ad)(az + b)^{-2}|_{z=-d/c} = c^2/(bc - ad) \neq 0$, що вказує на конформність у точці $z = -d/c$. Якщо $z = \infty$, то розглядаємо функцію $w = (a/z + b)/(c/z + d) = (bz + a)/(dz + c)$, для якої $w'|_{z=0} = (bc - ad)/(c + dz)^2|_{z=0} \neq 0$, так що маємо конформність і в точці $z = \infty$.

Теорема 2.4 (про кругову властивість). *Дробово-лінійна функція відображає коло в коло, круг у круг.*

Доведення. Оскільки

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c}\left(1 + \frac{b/a - d/c}{z + d/c}\right),$$

то дробово-лінійна функція є суперпозицією цілих лінійних функцій та функції $w = 1/z$. Оскільки лінійна функція відображає коло в коло, круг у круг, бо ці множини подібні, то залишилось довести кругову властивість для функції $w = 1/z$. Нехай в розширеній z-площині задано замкнений круг $A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D \leq 0$. Оскільки $x+iy = 1/(u+iv)$, то $x = u/(u^2 + v^2)$ і $y = -v/(u^2 + v^2)$. Підставляючи ці формули в останню нерівність, маємо

$$A(\frac{u^2}{(u^2+v^2)} + \frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}) + \frac{Bu}{u^2+v^2} - \frac{Cv}{u^2+v^2} + D \leq 0,$$

звідки $D(u^2 + v^2) + Bu - Cv + A \leq 0$, тобто отримали замкнений круг в розширеній w-площині.

Теорема 2.5 (про три точки). *Нехай в розширеній z-площині задано три різні точки z_1, z_2, z_3, а в розширеній w-площині — три різні точки w_1, w_2, w_3. Тоді існує єдина дробово-лінійна функція L така, що $L(z_k) = w_k$ $(k = 1, 2, 3)$.*

Доведення. Якщо всі точки скінченні, запишемо рівність

$$\frac{w - w_1}{w - w_2}\frac{w_3 - w_2}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}\frac{z_3 - z_2}{z_3 - z_1}, \tag{2.5}$$

яка неявно задає шукану дробово-лінійну функцію, оскільки безпосередньою перевіркою легко переконатись, що точка z_k переходить у точку $w_k\,(k = 1, 2, 3)$. Єдиність доводиться від супротивного. Припустимо, що, крім (2.5), існує функція $w = (az + b)/(cz + d)$, яка має властивість, вказану у формулюванні теореми. Тоді можемо записати $w_k = (az_k + b)/(cz_k + d)$, $k = 1, 2, 3$. Легко перевірити, що якщо ці значення (w, w_1, w_2 і w_3) підставити в (2.5), то дістанемо тотожність. Ці елементарні операції залишаємо читачеві.

Якщо ж одне з чисел z_1, z_2, z_3 чи з чисел w_1, w_2, w_3 дорівнює ∞, то в (2.5) чисельник і знаменник, до яких входить це число, опускаємо. Наприклад, якщо $z_1 \to w_1$, $z_2 \to \infty$ і $\infty \to w_3$, то (2.5) набуває вигляду

$$\frac{w - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{z - z_1}{z - z_2}.$$

Далі доведення таке, як і раніше.

Теорема 2.6 (про симетричні точки). *Нехай z_1 і z_2 — симетричні відносно кола $[C]$ точки, а $[C^*]$ — образ кола $[C]$ при відображенні дробово-лінійною функцією L. Тоді образи w_1 і w_2 точок z_1 і z_2 при цьому відображенні є симетричними відносно кола $[C^*]$.*

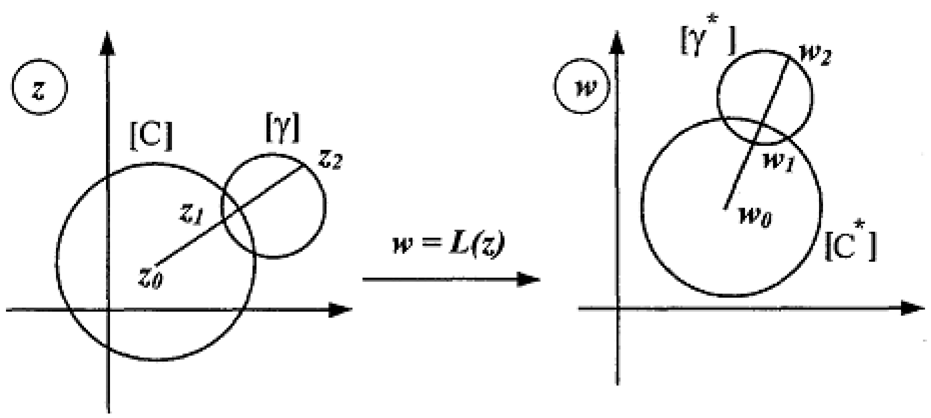


Рис. 2.9

Доведення. Через точки w_1 і w_2 проведемо коло $[\gamma^*]$ (рис. 2.9). Оскільки обернена до дробово-лінійної функція є дробово-лінійною, то за теоремою 2.4 прообраз кола $[\gamma^*]$ є також коло $[\gamma]$, яке проходить через точки z_1 і z_2 і за теоремою 2.2 $[\gamma]$ є ортогональним до $[C]$. Оскільки дробово-лінійне відображення конформне, тобто при ньому зберігаються кути, то коло $[\gamma^*]$ є ортогональним до $[C^*]$ і за теоремою 2.2 точки w_1 і w_2 є симетричними відносно кола $[C^*]$.

Якщо точки z_1 і z_2 симетричні відносно кола $[C]$, то $[C]$ називається колом Аполлонія для цих точок.

Теорема 2.7. *Через кожну точку z_3, відмінну від двох заданих точок z_1 і z_2, проходить єдине коло Аполлонія для точок z_1 і z_2.*

Доведення. Нехай одна з точок z_1, z_2 є ∞ (наприклад, $z_2 = \infty$); тоді $z_3 \neq \infty$. Колом Аполлонія в цьому випадку буде коло радіуса $R = |z_1 - z_3|$ з центром в z_1. Єдиність очевидна. Якщо ж z_1 і z_2 — скінченні точки, то зробимо дробово-лінійне перетворення за допомогою функції $w = 1/(z - z_2)$. Тоді точки z_1, z_2, z_3 перейдуть відповідно у точки $w_1 = 1/(z_1 - z_2)$, $w_2 = \infty$, $w_3 = 1/(z_3 - z_2)$. Для точок w_1 та w_2 будуємо єдине коло Аполлонія, яке проходить через w_3. Прообразом цього кола буде коло Аполлонія для z_1 і z_2, яке проходить через z_3. Єдиність випливає з теореми 2.5.

Перейдемо до основних задач дробово-лінійних відображень. Перша з них полягає у відображенні круга K з розширеної z-площини на круг K^* з розширеної w-площини так, щоб три задані точки з ∂K перейшли в три задані точки з ∂K^*.

Теорема 2.8. *Якщо точки z_1, z_2, z_3 з ∂K і точки w_1, w_2, w_3 з ∂K^* розміщені так, що послідовно обходячи їх, залишаємо відповідні круги по один бік, то перша основна задача має єдиний розв'язок. У протилежному разі вона не має розв'язку.*

Доведення. За теоремою 2.4 існує єдина дробово-лінійна функція L, така, що $L(z_j) = w_j$ $(j = 1, 2, 3)$. Ця функція L за теоремою 2.4 відображає ∂K на ∂K^*. Оскільки L однолиста функція, то вона відображає K або на K^*, або на $\overline{\mathbb{C}} \backslash \overline{K}^*$. Нехай точки z_1, z_2, z_3 і w_1, w_2, w_3 розміщені так, як показано на рис. 2.10. У точці z_2 проведемо дотичну в сторону z_3 і внутрішню нормаль.

Оскільки при дробово-лінійному відображенні існує консерватизм кутів, то внутрішня нормаль до кола ∂K переходить у внутрішню нормаль до кола ∂K^*. Отже, ми одержуємо $L(K) = K^*$.

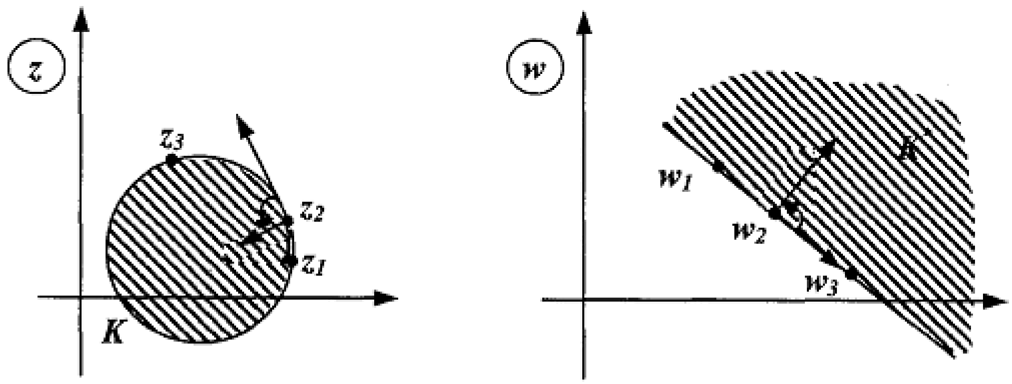


Рис. 2.10

Якщо точки z_1, z_2, z_3 і w_1, w_2, w_3 розміщені так, що при обході їх відповідні круги залишаються по різні боки, то аналогічно одержимо, що $L(K) = \overline{\mathbb{C}} \backslash K^*$, тобто задача розв'язку не має.

На практиці часто зустрічаються неповні задачі, коли, наприклад, відомо, що дві точки з ∂K переходять у дві точки з ∂K^*. Тоді третю точку беремо на свій розсуд. Ясно, що така задача має безліч розв'язків.

Другою основною задачею дробово-лінійних відображень є задача відображення круга K з розширеної z-площини на круг K^* з розширеної w-площини так, щоб дві задані точки $z_1 \in K$ і $z_2 \in \partial K$ перейшли відповідно у дві задані точки $w_1 \in K^*$ і $w_2 \in \partial K^*$.

Теорема 2.9. *Друга основна задача дробово-лінійних відображень має єдиний розв'язок.*

Доведення. Нехай z_3 — симетрична з z_1 відносно ∂K точка, а w_3 — точка, симетрична з w_1 відносно ∂K^*. Точки з такою властивістю єдині. За допомогою (2.5) будуємо єдиним чином дробово-лінійну функцію L, яка переводить z_1, z_2, z_3 відповідно у w_1, w_2, w_3. Коло ∂K є колом

Аполлонія для z_1 і z_3. Образом цього кола є деяке коло Аполлонія для w_1 та w_3, а оскільки, ∂K^* є теж колом Аполлонія для w_1 і w_3 і обидва ці кола проходять через w_2, то за теоремою 2.7 вони збігаються. Отже, $L(\partial K) = \partial K^*$. Але точка $z_1 \in K$ переходить у точку $w_1 \in K^*$. Тому $L(K) = K^*$.

На практиці зустрічаються неповні задачі, коли, наприклад, треба відобразити круг на круг так, щоб дана точка з круга перейшла у задану точку з круга. Вибираючи на краях цих кругів довільно по одній точці, зводимо таку задачу до другої основної задачі. Розв'язок, очевидно, буде не єдиним.

Прикладом неповної другої задачі є відшукання дробово-лінійної функції, яка б відображала круг $K = \{z : |z| < 1\}$ на круг $K^* = \{w : |w| < 1\}$ так, щоб точка $\alpha \in K$ перейшла в точку $0 \in K^*$.

Симетричною до α відносно ∂K є точка $1/\overline{\alpha}$, а симетричною до 0 відносно ∂K^* є ∞. Покладемо $z_1 = \alpha$, $z_2 = 1/\overline{\alpha}$, $z_3 = \exp\{i\varphi_0\}$ і $w_1 = 0$, $w_2 = \infty$, $w_3 = \exp\{i\varphi_0^*\}$. Тоді шукана дробово-лінійна функція знаходиться із рівності

$$\frac{w - 0}{\exp\{i\varphi_0^*\} - 0} = \frac{z - \alpha}{z - 1/\overline{\alpha}} \, \frac{\exp\{i\varphi_0\} - 1/\overline{\alpha}}{\exp\{i\varphi_0\} - \alpha}$$

або

$$w = k\frac{z - \alpha}{1 - z\overline{\alpha}}, \quad k = \frac{\overline{\alpha}\exp\{i\varphi_0\} - 1}{\alpha - \exp\{i\varphi_0\}} e^{i\varphi_0^*}.$$

Оскільки $\partial K \to \partial K^*$ і при $|z| = 1$ виконується

$$\left|\frac{z - \alpha}{1 - z\overline{\alpha}}\right| = \left|\frac{e^{i\varphi} - \alpha}{1 - \overline{\alpha}e^{i\varphi}}\right| = \left|\frac{e^{i\varphi} - \alpha}{e^{-i\varphi} - \overline{\alpha}}\right| = 1,$$

то $|k| = 1$ і загальний розв'язок нашої неповної задачі є

$$w = e^{i\theta}\frac{z - \alpha}{1 - z\overline{\alpha}}, \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

Розділ 3

МНОГОЗНАЧНІ ФУНКЦІЇ

3.1. ОДНОЗНАЧНІ ВІТКИ МНОГОЗНАЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай E — деяка множина з $\mathbb{C}$. Якщо кожному $z \in E$ поставлено у відповідність деяку множину $F(z)$ комплексних чисел, то будемо говорити, що на E задана многозначна функція F. Очевидно, що якщо для кожного $z \in E$ множина $f(z)$ складається з одного елемента, з наведеного означення одержимо означення функції $f : E \to \mathbb{C}$. В цьому зв'язку функцію часто називають однозначною функцією. Зауважимо, що многозначна функція не є числовою функцією, бо числу ставиться у відповідність множина. Прикладом многозначної функції може служити $\operatorname{Arg} z$, $0 < |z| < \infty$. Оскільки $\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2\pi k\}$, $k \in Z$, то $\operatorname{Arg} z$ є нескінченнозначною функцією.

Нехай в області G задана многозначна функція F, а в області $D \subset G$ — неперервна функція f така, що $(\forall z \in D)\{f(z) \in F(z)\}$. Тоді f називається однозначною віткою многозначної функції F.

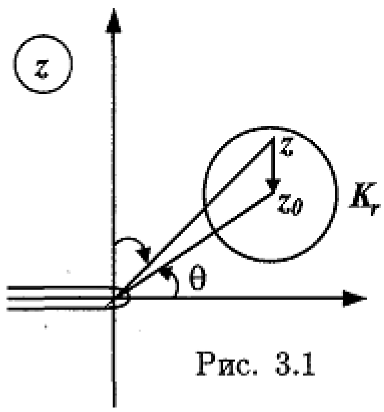


Рис. 3.1

Знову розглянемо многозначну в області $G = \{z : |z| < +\infty\}$ функцію $\operatorname{Arg} z$. В ролі D візьмемо всю z-площину з розрізом вздовж від'ємної дійсної півосі (рис. 3.1) і розглянемо в D функцію $\arg z$, яка при кожному значенні $z \in D$ є головним значенням аргументу. Оскільки $\arg z \in \operatorname{Arg} z$, то для того щоб показати, що $\arg z$ є однозначною віткою многозначної функції $\operatorname{Arg} z$, треба показати неперервність функції $\arg z$ в D. Для цього зафіксуємо деяку точку $z_0 \in D$. Нехай $K_r = \{z : |z - z_0| < r\}$ — круг, який лежить у D і, отже, не перетинається з від'ємною дійсною піввіссю. Тоді $(\forall z \in K_r)\{|\arg z - \arg z_0| = \theta < \frac{\pi}{2}\}$ і за теоремою косинусів $|z - z_0|^2 = |z|^2 + |z_0|^2 - 2|z||z_0|\cos\theta$ і $\cos\theta = \dfrac{-|z - z_0|^2 + |z|^2 + |z_0|^2}{2|z||z_0|} \to 1\,(z \to z_0)$, тобто $\theta \to 0$ при $z \to z_0$. Отже, функція $\arg z$ є однозначною віткою многозначної функції $\operatorname{Arg} z$.

Розглянемо ще один приклад. Многозначна функція $\{0, z\}$, задана в усій z-площині, має однозначні вітки $w = 0$ і $w = z$. Зауважимо, що функція $w = \begin{cases} z, \ \operatorname{Re} z \geq 0, \\ 0, \ \operatorname{Im} z < 0, \end{cases}$ не є однозначною віткою цієї многозначної функції, бо в точках уявної осі порушується неперервність.

Нехай в області G задана многозначна функція F. Припустимо, що існує система областей $\{D_\alpha\}$ з області G, а в кожній області D_α — неперервна функція f_α, яка є однозначною віткою многозначної функції F. Скажемо, що многозначна функція F розпадається на однозначні вітки в області G, якщо

$$(\forall z \in G)(\forall w \in F(z))(\exists D_\alpha)(\exists f_\alpha)\{z \in D_\alpha \wedge f_\alpha(z) = w\}.$$

Система $\{\arg z + 2\pi k\}_{k \in \mathbb{Z}} \cup \{\arg_0 z + 2\pi n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ є системою однозначних віток многозначної функції $\operatorname{Arg} z$ в області $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Неперервність функції $\arg_0 z$ в області $D_0 = \mathbb{C}\backslash\{z : z > 0\}$ доводиться так само, як неперервність $\arg z$ в D.

Многозначна функція F називається неперервною в області G, якщо вона розпадається в цій області на однозначні вітки. Отже, $\operatorname{Arg} z$ буде неперервною многозначною в області $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ функцією.

Зауважимо, що означення неперервності $F(z) \to F(z_0)(z \to z_0)$ не має змісту, бо F — множина, а не число.

Многозначна функція $F(z) = \begin{cases} z, \ z \neq 0, \\ \{0,1\}, \ z = 0, \end{cases}$ не є неперервною в $\mathbb{C}$, бо не можна вибрати її однозначної вітки, яка була б неперервною і при $z = 0$ приймала значення 1.

Многозначна функція $F(z) = \begin{cases} \{z\}, \ |z| \geq 1, \\ \{z,1\}, \ |z| < 1, \end{cases}$ є неперервною, бо вона розпадається на однозначні вітки $w = z, \ |z| < +\infty$ і $w = 1, \ |z| < 1$.

Многозначна функція F називається аналітичною, якщо вона розпадається на однозначні вітки, які є аналітичними функціями.

Многозначна функція $\operatorname{Arg} z$ не є аналітичною, бо кожна її вітка набуває лише дійсних значень. Якби ця функція була аналітичною, то за наслідком з теореми 1.8 вона була б сталою, що неможливо.

Розглянемо тепер многозначні функції на кривій. Поняття однозначної вітки тут дещо інше. Нехай $C = (z = z(t), \ a \leq t \leq b)$ і на $[C]$ задана многозначна функція F. Нехай φ — неперервна на $[a,b]$ функція. Вона називається однозначною віткою многозначної функції F на кривій $C = (z = z(t), \ a \leq t \leq b)$, якщо $(\forall t \in [a,b])\{\varphi(t) \in F(z(t))\}$.

Нехай $z = z_1(\tau), \alpha \leq \tau \leq b)$, — інше параметричне зображення тієї ж кривої C, тобто існує неперервна зростаюча функція $t = t(\tau) : [\alpha; \beta] \to [a,b]$ така, що $z_1(\tau) = z(t(\tau))$. Очевидно, що функція $\varphi_1(\tau) = \varphi(t(\tau))$ буде також однозначною віткою многозначної функції F на кривій $C = (z = z_1(\tau), \ \alpha \leq \tau \leq \beta)$. Тому природним є наступне означення однозначної вітки многозначної функції на кривій.

Неперервна на кривій $[C]$ функція f називається однозначною віткою многозначної функції F на цій кривій, якщо для кожного параметричного зображення $C = (z = z(t), \ a \leq t \leq b)$ виконується співвідношення $f(z(t)) \in F(z(t))$ для всіх $t \in [a, b]$.

Наступне твердження вказує на умову, коли на кривій можна вибрати однозначну вітку аргументу.

Теорема 3.1. *Нехай $C = (z = z(t), \ a \leq t \leq b)$ — довільна крива, яка не проходить через початок координат. Нехай $\alpha \in \operatorname{Arg} z(a)$ — довільне число. Тоді на C можна вибрати однозначну вітку $\arg z(t)$ многозначної функції $\operatorname{Arg} z$ таку, що $\arg z(a) = \alpha$.*

Доведення. Нехай $z(a)$ не лежить на від'ємній дійсній півосі (з доведення буде видно, що робити у випадку, коли $z(a) < 0$). З системи $\{\arg z + 2\pi k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ виберемо ту вітку, яка в $z(a)$ набуває значення α. На тій ділянці кривої C, яка починається в $z(a)$ і йде до перетину з від'ємною дійсною піввіссю (точку перетину з цією піввіссю не включаємо), вибрану вже вітку позначимо через $\arg z(t)$. В точці кривої C, близькій до від'ємної дійсної півосі, із системи $\{\arg_0 z + 2\pi n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ виберемо вітку, яка б у цій точці набувала того самого значення, що й побудована функція $\arg z(t)$. Вибираємо цю нову вітку за $\arg z(t)$ на новій ділянці кривої, яка простягається до перетину з додатною дійсною піввіссю. Цей процес можна продовжувати далі, вибираючи вітку з системи $\{\arg z + 2\pi k\}$, а потім із системи $\{\arg_0 z + 2\pi n\}$ і т. д. Оскільки функція $z = z(t)$ неперервна на $[a, b]$, то C не може перетинати послідовно від'ємну і додатну півосі нескінченну кількість разів. Дійсно, оскільки відстань від точки $z = 0$ до $[C]$ є додатним числом, то в протилежному разі довжина кривої C була б нескінченною, що неможливо. Отже, процес скінченний, і теорему 3.1 доведено.

3.2. ПРИРІСТ МНОГОЗНАЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Нехай $C = (z = z(t),\ a \le t \le b)$ — крива, на $[C]$ задана многозначна функція F, а φ - її однозначна вітка на C. Тоді величина $\triangle_C \varphi = \varphi(b) - \varphi(a)$ називається приростом вітки φ на кривій C. Для різних віток прирости можуть бути різними. Проте, якщо для всіх однозначних віток многозначної функції F на кривій C прирости однакові, то їх спільне значення називається приростом многозначної функції F на кривій C і позначається через $\triangle_C F = \triangle_C F(z)$.

Теорема 3.2. *Нехай $C = (z = z(t),\ a \le t \le b)$ — крива, що не проходить через початок координат, а $(\arg z(t))_1$ і $(\arg z(t))_2$ — дві однозначні вітки многозначної функції $\operatorname{Arg} z$ на C. Тоді $\triangle_C (\arg z)_1 = \triangle_C (\arg z)_2$, тобто приріст не залежить від вибору вітки. Це спільне значення приростів називається приростом аргументу і позначається через $\triangle_C \operatorname{Arg} z$.*

Доведення. Оскільки $(\arg z(t))_j \in \operatorname{Arg} z(t)$ $(j = 1, 2)$, то $(\arg z(t))_1 - (\arg z(t))_2 = 2\pi k(t)$, де $k(t)$ — цілочисельна функція. Далі $(arg\, z(t))_j$ $(j = 1, 2)$ — неперервні функції, то функція $k(t)$ неперервна, а, значить, $k(t) = k = \text{const}$. Отже, $(\arg z(a))_1 - (\arg z(a))_2 = 2\pi k(t)$, і $(\arg z(b))_1 - (\arg z(b))_2 = 2\pi k(t)$. Віднімаючи від однієї рівності іншу, маємо

$\triangle_C(\arg z)_1 - \triangle_C(\arg z)_2 = 0$, тобто теорему 3.2 доведено.

Зауважимо, наприклад, що для кривої, зображеної на рис. 3.2, виконується рівність $\triangle_C \mathrm{Arg}\, z = \pi$.

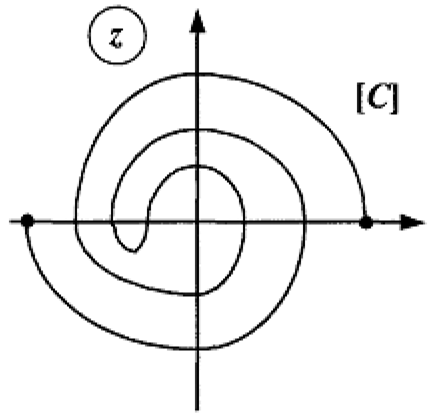


Рис. 3.2

Перейдемо до вибору вітки аргументу в області.

Теорема 3.3. *Нехай G — область і $0 \notin G$. Для того щоб у G можна було вибрати однозначну вітку многозначної функції $\mathrm{Arg}\, z$, необхідно і досить, щоб $\triangle_C \mathrm{Arg}\, z = 0$ для кожної замкненої кривої C, $[C] \subset G$.*

Доведення. Нехай в області G можна вибрати однозначну вітку $\varphi(z)$ многозначної функції $\mathrm{Arg}\, z$ і $C = (z = z(t),\ a \le t \le b)$ — довільна крива, $[C] \subset G$. Тоді на C можна вибрати однозначну вітку аргументу $\arg z(t) = \varphi(z(t))$. Отже, $\triangle_C \mathrm{Arg}\, z = \triangle_C(\arg z(t)) = \arg z(b) - \arg z(a) = \varphi(z(b)) - \varphi(z(a)) = 0$, бо крива замкнена.

Навпаки, умова $\triangle_C \mathrm{Arg}\, z = 0$ для кожної замкненої кривої означає, що приріст аргументу не залежить від кривої, що з'єднує точки z_1 та z_2, а залежить тільки від цих точок. Щоб вибрати однозначну вітку аргументу, візьмемо фіксовану точку $z_0 \in G$ і $\alpha \in \mathrm{Arg}\, z_0$. Визначимо

$$(\arg z) = \alpha + \triangle_{(z_0,z)} \mathrm{Arg}\, z, \tag{3.1}$$

де (z_0, z) — будь-яка крива, що з'єднує z_0 і z.

Покажемо, що значення функції (3.1) при кожному $z \in G$ належить до $\mathrm{Arg}\, z$. Дійсно, $\triangle_{(z_0,z)} \mathrm{Arg}\, z = \varphi(z) - \varphi(z_0)$, де φ — деяка вітка аргументу на кривій (z_0, z) така, що $\varphi(z_0) = \alpha$. Звідси випливає, що $(\arg z) = \alpha + \varphi(z) - \varphi(z_0) = \varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$.

Залишилось довести неперервність функції (3.1) у кожній точці $a \in G$. Для цього розглянемо круг з центром в a, який міститься в області G (рис. 3.3).

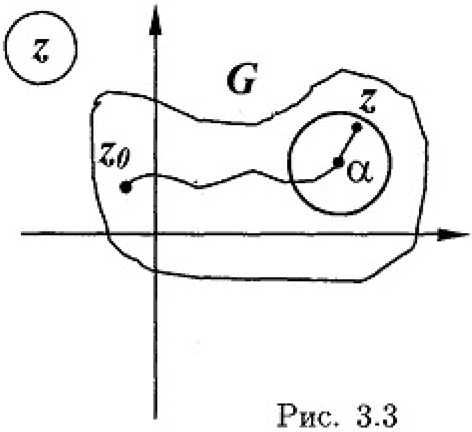


Рис. 3.3

Сполучимо z і a прямолінійним відрізком $[a, z]$, а точку z_0 з точкою a довільною кривою (z_0, a). У крузі можемо вибрати однозначну вітку аргументу, яка є неперервною функцією. Тоді для функції (3.1) маємо $(\arg z) = \alpha + \Delta_{(z_0,a)} \operatorname{Arg} z + \Delta_{[a,z]} \operatorname{Arg} z \to \alpha + \Delta_{(z_0,a)} \operatorname{Arg} z = (\arg a)$, $z \to a$. Теорему доведено.

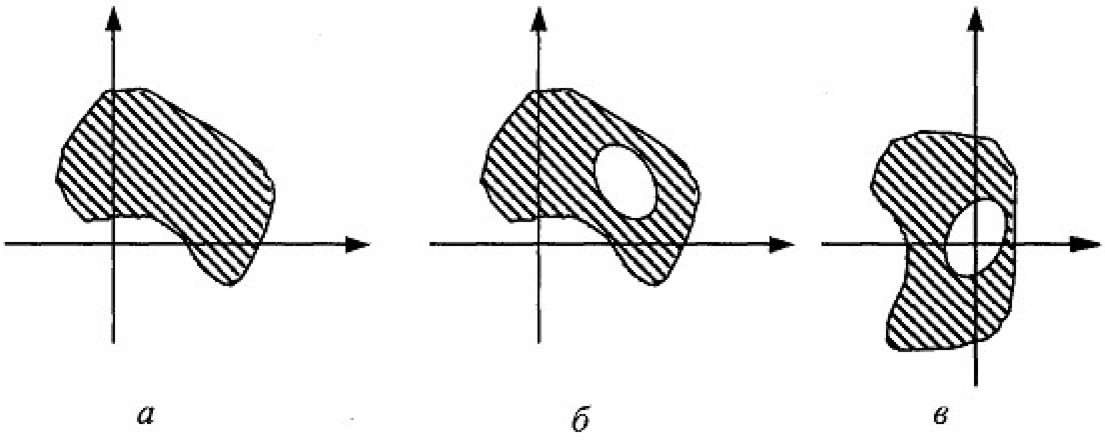


Рис. 3.4

Доведення наступного критерію буде наведено у розділі 7.

Теорема 3.4. *Для того щоб в області G можна було вибрати однозначну вітку аргументу, необхідно і досить, щоб існувала однозв'язна область D така, що $G \subset D$ і $0 \notin D$.*

На рис. 3.4, *а* і *б* зображені області, в яких можна вибрати однозначну вітку аргументу, а на рис. 3.4, *в* — область, в якій не можна це зробити.

3.3. КОРІНЬ n-го СТЕПЕНЯ

Нехай $n \in N \setminus \{1\}$. За означенням $\sqrt[n]{z}$, $z \in \mathbb{C}$, — многозначна функція, яка кожному $z \in \mathbb{C}$ ставить у відповідність множину точок $w \in \mathbb{C}$ таких, що $w^n = z$. Оскільки за формулою Муавра

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{Arg\, z}{n} + i\sin\frac{Arg\, z}{n}\right),$$

то вибрати однозначну вітку $\sqrt[n]{z}$ можна там, де можна вибрати однозначну вітку аргументу, тобто в кожній однозв'язній області, яка не містить початку координат. Нехай G — така область і в ній вибрано однозначну вітку $(\arg z)$ аргументу. Всі інші вітки аргументу можемо записати у вигляді $(\arg z) + 2\pi k$, $k \in Z \setminus \{0\}$. Тому однозначними вітками многозначної функції $\sqrt[n]{z}$ є функції

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{(\arg z) + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{(\arg z) + 2\pi k}{n}\right), \quad k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

Розглянемо одну з них $w = (\sqrt[n]{z})_k$. Це — однозначна функція, обернена до якої є аналітична в усій w-площині функція $z = w^n$. Тому при $z \neq 0$ можемо знайти похідну

$$\frac{d}{dz}(\sqrt[n]{z})_k = \frac{dw}{dz} = 1/\frac{dz}{dw} = 1/(nw^{n-1}) = \frac{w}{nw^n} = \frac{1}{nz}(\sqrt[n]{z})_k,$$

тобто $(\sqrt[n]{z})_k$ — аналітична функція в G, яка здійснює конформне відображення. Зауважимо, що брати похідну наступним чином $(\sqrt[n]{z})' = (z^{1/n})' = (1/n)\, z^{1/n-1}$ не можна.

Формули переходу для функції $w = (\sqrt[n]{z})_k$ мають вигляд

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}. \tag{3.2}$$

Вони виводяться аналогічно до формул переходу для степеневої функції з натуральним показником. За допомогою формул (3.2) неважко показати, що площина з розрізом вздовж додатної дійсної півосі переходить при відображенні $w = (\sqrt{z})_0$ у верхню півплощину.

Зауважимо, що з формул Муавра випливає рівність $(\sqrt{z})_1 = -(\sqrt{z})_0$.

Часто вітку кореня задають, фіксуючи певне його значення в заданій точці z. Тоді перед тим, як використовувати формули (3.2), визначають число k. Припустимо, наприклад, що треба знайти образ області $\{z \ : \ 0 < \arg z < 2\pi\}$ при відображенні віткою $\sqrt{z}$ такою, що $\sqrt{z}|_{z=-1} = -i$. Нехай $0 < \varphi < 2\pi$. Тоді $\varphi = \pi$ (для $z = -1$) відповідає $\theta = -\dfrac{\pi}{2}$ (для $w = -i$). Підставляючи ці значення в (3.2), маємо $k = -1$. Формули (3.2) набувають вигляду $\rho = \sqrt{r}, \quad \theta = \dfrac{\varphi}{2} - \pi$ і шуканим образом є нижня півплощина.

Точки $z = 0$ і $z = \infty$ називаються для $\sqrt[n]{z}$ точками розгалуження. Якщо візьмемо замкнену жорданову криву $[C]$, $0 \in \operatorname{int} C$, і обійдемо її один раз, то приріст кореня n-го степеня буде відмінний від нуля, а якщо обійдемо n разів, то він дорівнює нулю. Аналогічна картина характерна і для точки $z = \infty$.

3.4. ЛОГАРИФМ

Логарифмом $\operatorname{Ln} z$ називається многозначна функція, яка кожному $z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ставить у відповідність множину точок $w \in \mathbb{C}$ таких, що $e^w = z$. Оскільки $e^w \neq 0$, то $\operatorname{Ln} 0$ не існує. Запишемо $z = re^{i\varphi}$ та $w = u + iv$. Тоді

$$(e^{u+iv} = re^{i\varphi}) \equiv (e^u = r \wedge e^{iv} = e^{i\varphi}) \equiv (u = \ln r \wedge v = \varphi + 2\pi k), \ \ k \in \mathbb{Z},$$

тобто

$$\operatorname{Ln} z = \operatorname{Ln}|z| + i\operatorname{Arg} z. \tag{3.3}$$

Отже, однозначну вітку логарифма можна вибрати там, де можна вибрати однозначну вітку аргументу, тобто в кожній однозв'язній області, яка не містить початку координат. Функція $\ln z = \ln|z| + i\arg z$

називається головним значенням логарифма. Всі інші вітки в області $\mathbb{C} \setminus \{z : z \leq 0\}$ мають вигляд $(\ln z)_k = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i$. В області $\mathbb{C} \setminus \{z : z \geq 0\}$ можна вибрати однозначні вітки $(\ln z)_k = \ln|z| + i\arg_0 z + 2k\pi i$. Очевидно, що $\operatorname{Ln} z$ розпадається на однозначні вітки, вказані раніше і задані в $\mathbb{C} \setminus \{z : z \leq 0\}$ та в $\mathbb{C} \setminus \{z : z \geq 0\}$.

Покажемо, що всі вітки логарифма є аналітичними функціями. Нехай $w = (\ln z)_k$. Оберненою до цієї функції є ціла функція $z = e^w$, тому

$$\frac{d}{dz}(\ln z)_k = \frac{dw}{dz} = 1/\frac{dz}{dw} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Бачимо, що значення похідної не залежить від вибору вітки. Втім, це зрозуміло і без розрахунків, бо в області, де можна вибрати однозначну вітку логарифма, решту віток відрізняється від вибраної сталими доданками. Цей факт записують у вигляді $(\operatorname{Ln} z)' = 1/z$. Отже, логарифм є многозначною аналітичною функцією, похідна якої $1/z$ для всіх $z \neq 0$. Кожна однозначна вітка логарифма здійснює конформне та однолисте відображення. З (3.3) випливає, що для функції $w = (\ln z)_k$ формули переходу мають вигляд $u = \ln r$, $v = \varphi + 2\pi k$. Приклади відображень наведені на рис. 3.5. Зауважимо, що часто вітку логарифма задають, фіксуючи певне його значення в заданій точці. Тому перед тим, як використовувати формули переходу, визначають число $k \in \mathbb{Z}$, використовуючи при цьому такий самий метод, як і для квадратного кореня.

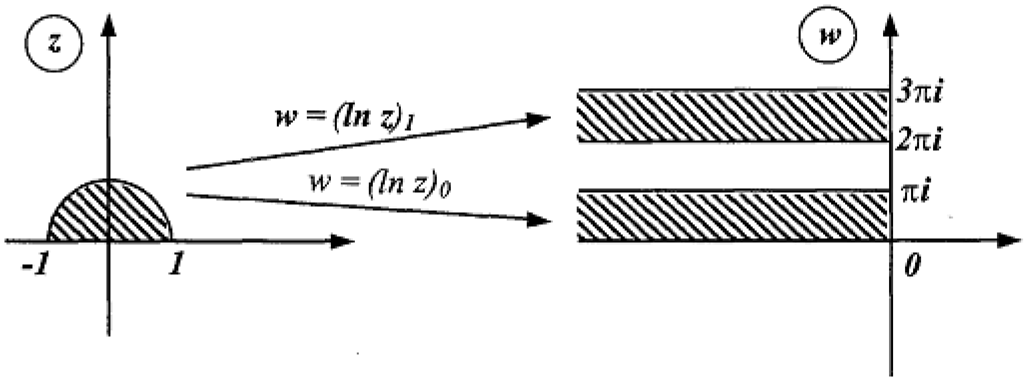


Рис. 3.5

Точки $z = 0$ і $z = \infty$ називаються точками розгалуження для $\operatorname{Ln} z$.

Якщо візьмемо замкнену жорданову криву $[C]$, $0 \in \operatorname{int} C$, то скільки б ми її не обходили, приріст логарифма завжди буде відмінним від нуля. Це саме можна сказати і про точку $z = \infty$.

3.5. ІНШІ ЕЛЕМЕНТАРНІ МНОГОЗНАЧНІ ФУНКЦІЇ

Через J^{-1} позначимо многозначну функцію, яка кожному $z \in \mathbb{C}$ ставить у відповідність множину точок $w \in \mathbb{C}$ таких, що $J(w) = z$, де J — функція Жуковського. Оскільки $J(w) = \frac{1}{2}(w + \frac{1}{w})$, то, розв'язуючи квадратне рівняння, маємо $J^{-1}(z) = z + \sqrt{z^2 - 1}$, тобто J^{-1} — двозначна функція. Для знаходження образів областей при відображенні однією з віток многозначної функції J^{-1} можна використовувати результати розділу 2.3 (див., наприклад, рис. 3.6).

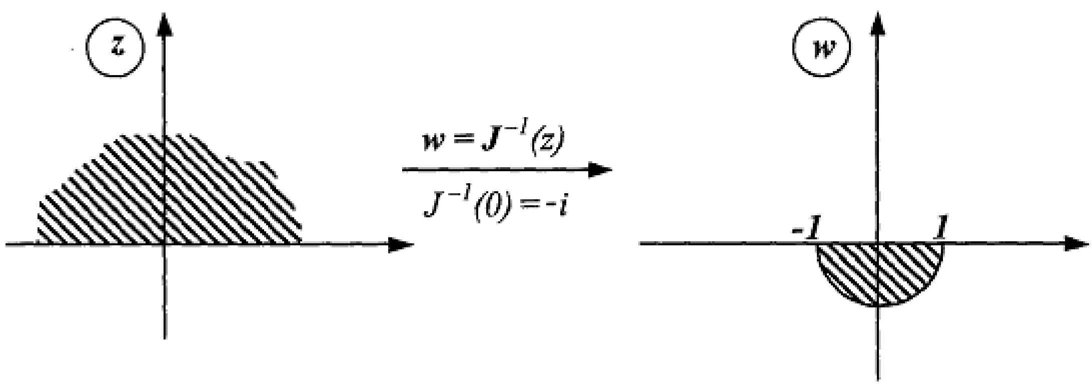


Рис. 3.6

Арксинусом $\operatorname{Arcsin} z$ називається многозначна функція, яка кожному z ставить у відповідність множину точок $w \in \mathbb{C}$ таких, що $\sin w = z$. Розв'язуючи останнє рівняння, тобто рівняння $e^{iw} - e^{-iw} = 2iz$, маємо $w = -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2})$. Головним значенням $\arcsin z$ називається та вітка арксинуса, яка вибирається в області $G = \mathbb{C} \setminus \{z : \operatorname{Im} z = 0,\ |\operatorname{Re} z| \geq 1\}$ так, щоб $\sqrt{1 - z^2}|_{z=0} = 1$ і $\operatorname{Ln} 1 = 0$. Ця вітка однолисто відображає область G на смугу $\{w : |\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}\}$ (див. розділ 2.5 та рис. 3.7). Легко бачити, що функція $w = \arcsin z$ відображає однолисто верхню півплощину на півсмугу $\{w : \operatorname{Im} w > 0,\ |\operatorname{Re} w| < \frac{\pi}{2}\}$.

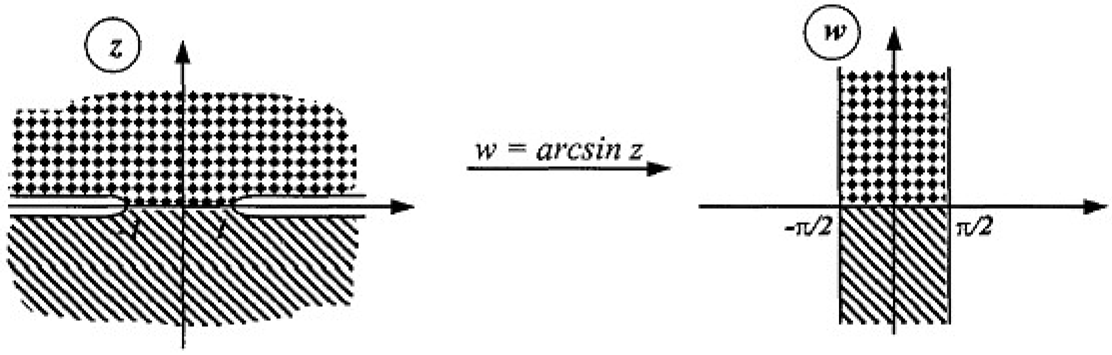


Рис. 3.7

Нехай $\alpha \in \mathbb{C}$. Степеневою функцією з показником α називається многозначна функція $z^\alpha = e^{\alpha \operatorname{Ln} z}$.

Теорема 3.5. *Для того щоб z^α була однозначною функцією, необхідно і досить, щоб $\alpha \in \mathbb{Z}$.*

Доведення. Якщо z^α — однозначна функція, то

$$e^{\alpha \ln z} = z^\alpha = e^{\alpha (\ln z + 2\pi i)},$$

звідки випливає, що $e^{2\pi i \alpha} = 1$, тобто $\alpha \in \mathbb{Z}$. Навпаки, якщо $\alpha \in \mathbb{Z}$, то

$$z^\alpha = e^{\alpha (\ln z + 2\pi i)} = e^{\alpha \ln z}$$

і, отже, z^α — однозначна функція.

Читачеві пропонуємо довести, що z^α — скінченнозначна функція тоді і тільки тоді, коли α — раціональне число.

Нехай $\alpha \notin \mathbb{Z}$. Вітку многозначної функції z^α можна вибрати там, де можна вибрати однозначну вітку логарифма, а отже, там, де можна вибрати однозначну вітку аргументу.

Використовуючи означення, можна знайти формули переходу для певної вітки многозначної функції z^α. На таких формулах зупинятися не будемо, а зауважимо, що якщо $\alpha = m/n$ — раціональне число, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ і m/n — нескоротний дріб, то z^α можемо розуміти як суперпозицію $w = w_1^m$ і $w_1 = \sqrt[n]{z}$, а при відображенні використовувати відомі вже прийоми.

Нарешті, нехай $a \in \mathbb{C}\backslash\{0,1\}$. Показниковою функцією з основою a називається функція $a^z = e^{z\ln a}$, де $\ln a$ — головне значення логарифма. Ця функція як суперпозиція показникової і цілої лінійної функції є цілою.

Зауважимо, що якщо вираз i^i розуміти як i^z при $z = i$, то він дорівнює $e^{i\ln i} = e^{-\pi/2}$, а якщо розуміти як z^i при $z = i$, то

$$i^i = e^{i\,\mathrm{Ln}\,i} = e^{i(i\pi/2+2\pi ik)} = e^{-\pi/2-2\pi k}\ (k \in \mathbb{Z}).$$

Розділ 4

ІНТЕГРУВАННЯ

4.1. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Нехай $C = (z = z(t),\ a \le t \le b)$ — деяка крива. Зробимо довільне розбиття проміжку $[a, b] : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$, і позначимо $z_j = z(t_j)$, а $C_j = (z = z(t),\ t_j \le t \le t_{j+1})$. Тоді $[C] = \sum_{j=0}^{n-1} [C_j]$. Таке розбиття кривої позначимо через T. Число $\lambda_T = \max \{|C_j| : 0 \le j \le n-1\}$ називається діаметром розбиття T. Покладемо $\triangle z_j = z_{j+1} - z_j$. Очевидно, що $|\triangle z_j| \le |C_j|$.

Нехай на $[C]$ задана функція f. Виберемо на кожному $[C_j]$ довільним чином точку τ_j і утворимо інтегральну суму $\sigma_T = \sum_{j=0}^{n-1} f(\tau_j)\triangle z_j$. Якщо існує скінченна границя $\lim\limits_{\lambda_T \to 0} \sigma_T = I$, то число I називається інтегралом від функції f вздовж кривої C. Існування границі тут означає, що

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall T)(\forall \ \text{вибору}\ \ \{\tau_j\})\{\lambda_T < \delta \Rightarrow |\sum_{j=0}^{n-1} f(\tau_j)\triangle z_j - I| < \varepsilon\}.$$

Інтеграл від функції f вздовж кривої C позначають символом

$$I = \int_C f(z)dz. \tag{4.1}$$

Обчислення визначеного інтегралу (4.1) зводиться до обчислення криволінійних інтегралів другого роду, відомих з курсу математичного аналізу. Нехай $f = u + iv$, $\tau_j = \xi_j + i\eta_j$. Оскільки $\triangle z_j = \triangle x_j + i\triangle y_j$, то

$$\sum_{j=0}^{n-1} f(\tau_j)\triangle z_j = \sum_{j=0}^{n-1}\{u(\xi_j,\eta_j)+iv(\xi_j,\eta_j)\}(\triangle x_j + i\triangle y_j) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1}\{u(\xi_j,\eta_j)\triangle x_j - v(\xi_j,\eta_j)\triangle y_j\} + i\sum_{j=0}^{n-1}\{u(\xi_j,\eta_j)\triangle y_j + v(\xi_j,\eta_j)\triangle x_j)\}.$$

У правій частині останньої рівності стоять інтегральні суми для інтегралів

$$\int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy, \quad \int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy. \tag{4.2}$$

Тому існування обох інтегралів (4.2) є необхідною і достатньою умовою існування інтегралу (4.1). Переходячи до границі, маємо

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy. \tag{4.3}$$

Безпосередньо з означення або з формули (4.3) випливають такі властивості визначеного інтегралу:

1) $\int_C Kf(z)dz = K\int_C f(z)dz \quad (K \equiv \text{const})$;

2) $\int_C (f_1(z)+f_2(z))dz = \int_C f_1(z)dz + \int_C f_2(z)dz$;

3) якщо $[C] = [C_1] + [C_2]$, то

$$\int_{C_1+C_2} f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz;$$

4) $\int_C f(z)dz = -\int_{C^-} f(z)dz$;

5) якщо f неперервна на $[C]$, то інтеграл (4.1) існує;

6) $|\int_C f(z)dz| \le \int_C |f(z)|ds$,

де ds диференціал дуги кривої C, а інтеграл справа є криволінійним інтегралом першого роду. Справедливість цієї нерівності випливає з нерівності

$$|\sum_{j=0}^{n-1} f(\tau_j)\triangle z_j| \leq \sum_{j=0}^{n-1} |f(\tau_j)||C_j|.$$

У теорії аналітичних функцій диференціал дуги часто записують як $|dz|$. Тому дану нерівність можна записати у вигляді

$$|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)||dz|,$$

звідки випливає, що якщо $(\forall z \in [C])\{|f(z)| \leq M\}$, то

$$|\int_C f(z)dz| \leq M \int_C ds = M|C|;$$

7) якщо $C = (z = z(t),\ a \leq t \leq b)$ — гладка крива, то

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Справді, з огляду на (4.3) маємо

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b \{u(x(t), y(t))x'(t) - v(x(t), y(t))y'(t)\}dt +$$

$$+i\int_a^b \{v(x(t), y(t))x'(t) + u(x(t), y(t))y'(t)\}dt =$$

$$\int_a^b \{ux'(t) + iuy'(t)) + vx'(t) - ivy'(t)\}dt =$$

$$\int_a^b \{uz'(t) + ivz'(t)\}dt = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt.$$

Очевидно, що такою самою формулою можна користуватися і у випадку кусково-гладкої кривої.

Отже, обчислення інтегралу (4.1) зводиться до обчислення інтегралу, що має вигляд $\int_a^b \varphi(t)dt$, де φ — комплекснозначна функція $[a,b] \to \mathbb{C}$. Припустимо, що ця функція неперервна і $\varphi(t) = \alpha(t) + i\beta(t)$. Функція Φ називається первісною для цієї функції φ, якщо $(\forall t \in [a,b])\{\Phi'(t) = \varphi(t)\}$. Позначимо $\Phi(t) = A(t) + iB(t)$. Тоді $A'(t) = \alpha(t)$ і $B'(t) = \beta(t)$. Отже,

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^b \alpha(t)dt + i\int_a^b \beta(t)dt = A(t)|_a^b + iB(t)|_a^b = \Phi(t)|_a^b,$$

тобто для комплекснозначних функцій дійсної змінної справедлива формула Ньютона-Лейбніца. Цю формулу використаємо при доведенні наступної леми.

Лема 4.1. *Нехай $k \in \mathbb{Z}$ і $r > 0$. Тоді*

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = \begin{cases} 0, & k \neq -1, \\ 2\pi i, & k = -1. \end{cases}$$

Дійсно, рівняння кола $\{z : |z - z_0| = r\}$ можна записати у вигляді $z = z_0 + re^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$. Тому, якщо $k \neq -1$, то

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = \int_0^{2\pi} r^k e^{ikt} ire^{it} dt =$$

$$= ir^{k+1}\int_0^{2\pi} e^{i(k+1)t}dt = \frac{r^{k+1}}{k+1}e^{i(k+1)t}\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Якщо ж $k = -1$, то

$$\int\limits_{|z-z_0|=r} (z-z_0)^k dz = i\int_0^{2\pi} = 2\pi i.$$

Вияснимо ще фізичний зміст дійсної та уявної частини інтегралу (4.1), тобто інтегралів (4.2). Нехай в області G задана функція $f = u + iv$ з неперервно диференційованими u і v, $A = P + iQ$ — комплексно спряжене до f векторне поле (див. розділ 1.5). Нехай $[C] \subset G$,

t — одиничний вектор дотичної до C, n — одиничний вектор нормалі до C, спрямований направо від C. Величина $\Gamma_C = \int_C (A,t)ds$ називається циркуляцією векторного поля A на C, а $N_C = \int_C (A,n)ds$ — потоком через C. Оскільки $tds = dz = dx + idy$, a $nds = -idz = dy - idx$, то, враховуючи, що $P = u$ і $Q = -v$, маємо

$$\Gamma_C = \int_C Pdx + Qdy = \int_C udx - vdy,$$

$$N_C = \int_C -Qdy + Pdy = \int_C vdx + udy$$

і, отже,

$$\int_C f(z)dz = \Gamma_C + iN_C.$$

4.2. ІНТЕГРАЛЬНІ ТЕОРЕМИ КОШІ

Теорема 4.1. *Нехай функція f аналітична в однозв'язній області G. Тоді $\int_C f(z)dz = 0$ для кожної замкненої кривої C, $[C] \subset G$.*

Доведення. Нехай $f = u+iv$. З аналітичності функції f випливає, що частинні похідні функцій u і v неперервні і задовольняють умови Коші-Рімана (1.4). Запишемо рівність (4.3) для довільної замкненої кривої $C, [C] \subset G$, і до інтегралів у правій частині застосуємо наступну відому з курсу математичного аналізу теорему: якщо функції P і Q неперервні разом з першими частинними похідними в однозв'язній області G, то для того щоб $\int\limits_C Pdx + Qdy = 0$ для кожної замкненої кривої $C, [C] \subset G$, необхідно і досить, щоб $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$ в G. Завдяки (1.4), для інтегралів (4.2) такі умови виконуються і з огляду на теорему (4.3) теорему 4.1 доведено.

Цю теорему можна сформулювати інакше.

Теорема 4.1*. *Нехай в однозв'язній області G задано векторне соленоїдальне безвихрове поле. Тоді циркуляція цього поля на будь-якій замкненій кривій $C, [C] \subset G$, і потік через цю криву дорівнюють нулю.*

Теорема 4.2. *Нехай область G обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих, а функція f аналітична в замиканні $\overline{G}$. Тоді $\int_{\partial G} f(z)dz = 0$.*

Доведення. За умовою функція f аналітична в деякій області $D \subset G$, тобто всюди в $\overline{G}$ виконуються умови Коші-Рімана. Використовуючи ці умови і застосовуючи до інтегралів у (4.3) формулу Гріна, маємо

$$\int_{\partial G} f(z)dz = \int_{\partial G} udx - vdy + i\int_{\partial G} vdx + udy =$$

$$\iint\limits_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dxdy + i\iint\limits_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy = 0.$$

Загальнішою від теореми 4.2 є наступна теорема.

Теорема 4.3. *Нехай область G обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих, а функція f аналітична в G і неперервна на $\overline{G}$. Тоді $\int_{\partial G} f(z)dz = 0$.*

Доведення цієї теореми проведемо лише для зіркових областей G. Область G називається зірковою, якщо існує точка $z_0 \in G$ така, що кожний промінь з початком в z_0 перетинає край ∂G тільки один раз. Очевидно, що кожна опукла область є зірковою. Очевидно також, що якщо теорема буде доведена для зіркових областей, то тим самим вона буде доведена і для областей, які розбиваються на зіркові області.

Отже, нехай G — зіркова область. Тоді її край C є замкненою жордановою кривою. Нехай $C = (z = z(t),\ a \le t \le b)$. Через z_q позначимо точку з G, яка лежить на відрізку, що сполучає точку z_0 з точкою $z \in C$, таку, що $|z_0 - z_q| = q|z - z_0|$, $0 < q < 1$. Тоді внаслідок зірковості області G крива $C_q = (z = z_q(t),\ a \le t \le b)$, де $z_q(t) = z_0 + q(z(t) - z_0)$, міститься в G і

$$\int_{C_q} f(z_q)dz_q = 0.$$

Легко побачити, що $dz_q = qdz$ і $z - z_q(t) = (1-q)(z(t) - z_0)$. Оскільки $(\exists K > 0)(\forall t \in [a, b])\{|z(t) - z_0| \le K\}$, то

$$|z - z_q(t)| \le (1-q)K. \tag{4.4}$$

Оскільки f неперервна в $\overline{G}$, то вона там обмежена деяким числом M і рівномірно неперервна, тобто

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\sigma > 0)(\forall(z', z'') \in G^2)\{|z' - z''| < \sigma \Rightarrow |f(z') - f(z'')| < \varepsilon\}.$$

Число q виберемо так, щоб $1 - q < \varepsilon$ і $(1 - q)K < \sigma$. Тоді з (4.4) випливає, що $|z - z_q| < \sigma$ і, отже, $|f(z) - f(z_q)| < \varepsilon$.

Отже,

$$|\int_C f(z)dz| = |\int_C f(z)dz - \int_{C_q} f(z_q)dz_q| = |\int_C f(z)dz - \int_C f(z_q)qdz| =$$

$$= |\int_C (f(z) - qf(z_q))dz| = |\int_C (f(z) - f(z_q)) + (1 - q)f(zq))dz| \le$$

$$\le \int_C \{|f(z) - f(z_q)| + (1 - q)|f(z_q)|\}dz \le (\varepsilon + \varepsilon M)|C| = \varepsilon|C|(M + 1),$$

звідки внаслідок довільності ε випливає справедливість теореми.

Наслідок. *Якщо функція f аналітична в кільці $\{z : R_1, |z| < R_2\}$, то інтеграл $\int\limits_{|z|=r} f(z)dz$ не залежить від $r \in (R_1, R_2)$.*

Дійсно, нехай $R_1 < r_1 < r_2 < R_2$. Застосовуючи до кільця $\{z : r_1, |z| < r_2\}$ теорему 4.2 (або 4.3), маємо

$$\int\limits_{|z|=r_2} f(z)dz - \int\limits_{|z|=r_1} f(z)dz = 0.$$

4.3. ІНТЕГРАЛИ ТИПУ КОШІ

Нехай C — довільна крива або об'єднання скінченної кількості кривих, φ — неперервна функція на $[C]$. Інтеграли

$$F_n(z) = \int\limits_C \frac{\varphi(\tau)}{(\tau - z)^n} d\tau, \quad n \in N,$$

називаються інтегралами типу Коші.

Теорема 4.4. *Інтеграли типу Коші $F_n(z)$ є аналітичними функціями в області $\mathbb{C}\setminus[C]$ і $F_n'(z) = nF_{n+1}(z)$.*

Доведення. Множина $[C]$ є замкненою і обмеженою. Тому за теоремою 1.8 $(\exists M)(\forall \tau \in [C])\{|\varphi(\tau)| \leq M\}$. Візьмемо замкнений круг K з центром у точці $z \notin [C]$. Внаслідок рівномірної неперервності функції $(\tau - z)^{-n-1}$ на множині $[C] \times K$ для кожного $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\delta > 0$, менше, ніж радіус круга K, що для будь-яких $\tau \in [C]$, $|h| < \delta$ та $t \in [0, 1]$ виконується

$$|(\tau - z - th)^{-n-1} - (\tau - z)^{-n-1}| < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Використовуючи формулу Ньютона-Лейбніца (розділ 4.1), знаходимо, що

$$n\int_0^1 \frac{dt}{(\tau - z - th)^{n+1}} = \frac{1}{h}\{(\tau - z - h)^{-n} - (\tau - z)^{-n}\}.$$

Тому, враховуючи (4.5), маємо

$$\left|\frac{F_n(z+h) - F_n(z)}{h} - nF_{n+1}(z)\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\left\{\int_C \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - z - h)^n} - \int_C \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - z)^n}\right\} - n\int_C \frac{\varphi(\tau)d\tau}{(\tau - z)^{n+1}}\right| =$$

$$= \left|n\int_C \varphi(\tau)d\tau \int_0^1 \frac{dt}{(\tau - z - th)^{n+1}} - n\int_C \varphi(\tau)d\tau \int_0^1 \frac{dt}{(\tau - z)^{n+1}}\right| =$$

$$= n\left|\int_C \varphi(\tau)d\tau \int_0^1 \{(\tau - z - th)^{-n-1} - (\tau - z)^{-n-1}\}dt\right| \leq nM\varepsilon|C|.$$

Отже,

$$F_n'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{F_n(z+h) - F_n(z)}{h} = nF_{n+1}(z).$$

Оскільки при $z \notin [C]$ існує похідна $F_n'(z)$ для всіх n, то всі F_n неперервні в $\mathbb{C}\setminus[C]$, а отже, і їх похідні теж неперервні. Теорему доведено.

Наслідок. *Інтеграли типу Коші в* $\mathbb{C}\backslash[C]$ *мають похідні всіх порядків, які є аналітичними функціями, причому*

$$F_1^{(k)}(z) = k!F_{k+1}(z).$$

4.4. ІНТЕГРАЛЬНА ФОРМУЛА КОШІ

Теорема 4.5. *Нехай функція* f *аналітична в замкненій області* G, *обмеженій скінченним числом замкнених жорданових кривих. Тоді для всіх* $z \in G$ *справедлива рівність*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau \qquad (4.6)$$

і функція f *має в* G *похідні всіх порядків, які є аналітичними функціями в* G *і обчислюються за формулами*

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\tau)}{(\tau - z)^{k+1}}d\tau. \qquad (4.7)$$

Доведення. Нехай z — довільна точка з G, а $\overline{K}_r$ — замкнений круг з центром в z, радіусом r, краєм C_r і такий, що $\overline{K}_r \subset G$. Позначимо $D_r = G\backslash\overline{K}_r$. Легко побачити, що функція $\psi(z,\tau) = \dfrac{f(\tau)}{\tau - z}$ як функція τ є аналітичною в D_r. Тому за теоремою 4.2 і властивістю 4) визначених інтегралів маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau - \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D_r}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = 0,$$

звідки

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\tau)}{\tau - z} = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau. \qquad (4.8)$$

Оскільки $\dfrac{f(\tau) - f(z)}{\tau - z} \to f'(z)$ $(\tau \to z)$, то величина $\dfrac{f(\tau) - f(z)}{\tau - z}$ є обмеженою в деякому околі точки $\tau = z$ і при $\tau \in C_r$, $0 < r < r_0$, маємо $|\dfrac{f(\tau) - f(z)}{\tau - z}| \le K < +\infty$. Тому за лемою 4.1 і властивістю 6)

$$|f(z) - \frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau| = \frac{1}{2\pi}|\int_{C_r}\frac{f(z)}{\tau - z}d\tau - \int_{C_r}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau| \le$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\left|\int_{C_r} \frac{f(\tau)-f(z)}{\tau - z}d\tau\right| \leq \frac{1}{2\pi}K2\pi r \to 0 \ \ (r \to 0).$$

З останнього співвідношення і з (4.8) випливає формула (4.6).

Інтеграл в (4.6), який називається інтегралом Коші, є частковим випадком інтегралу типу Коші. Тому, застосовуючи наслідок з теореми 4.4, завершуємо доведення теореми 4.5.

Формула (4.6) називається інтегральною формулою Коші. Зауважимо, що формули (4.7) часто називають також інтегральними формулами Коші. Внаслідок теореми 4.2 формулу Коші можна записати у наступному вигляді

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), \ z \in G, \\ 0, \ z \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}. \end{cases}$$

Наслідок 1. *Якщо функції f_1 і f_2 аналітичні в замкненій області G, обмеженій скінченним числом замкнених жорданових кривих, то*

$$(\forall z \in \partial G)\{f_1(z) = f_2(z)\} \Rightarrow (\forall z \in \overline{G})\{f_1(z) = f_2(z)\}.$$

Щоб довести справедливість цього наслідку, досить до функції $f = f_1 - f_2$ застосувати теорему 4.5.

Зауважимо, що якщо при доведенні теореми 4.5 посилатися не на теорему 4.2, а на теорему 4.3, то в теоремі 4.5 і в наслідку 1 можна було б вимагати від функції f лише аналітичності в області G та неперервності в $\overline{G}$.

Наслідок 2. *Якщо функція f аналітична в області G, то вона в G має похідні всіх порядків, які є аналітичними функціями в G.*

Досить довести справедливість цього твердження в кожній точці $z \in G$, для чого візьмемо замкнений круг $\overline{K} \subset G$ з центром у точці z і до нього застосуємо теорему 4.5.

4.5. ПЕРВІСНА

Нехай функція f неперервна в області G. Функція F називається первісною для f в G, якщо $(\forall z \in G)$ $\{F'(z) = f(z)\}$. Многозначна функція F називається многозначною первісною для f в G, якщо F в G розпадається на однозначні вітки (D_α, F_α) такі, що $(\forall \alpha)$ $(\forall z \in D_\alpha)\{F'_\alpha(z) =$

$= f(z)\}$, і на кожній кривій $C = (z = (t),\ a \le t \le b), [C] \subset G$ можна вибрати однозначну вітку $\tilde{F}(z(t))$ многозначної функції F таку, що: 1) $\tilde{F}(z(a))$ є одним з наперед заданих значень з $F(z(a))$; 2) $(\forall t_0 \in [a,b])(\exists \delta > 0)(\exists \alpha)(\forall t)\{|t - t_0| < \delta \Rightarrow z(t) \in D_\alpha \wedge \tilde{F}(z(t)) = F_\alpha(z(t))\}$.

Наприклад, в області $G = \{z : 0 < |z| < +\infty\}$ многозначна функція $\mathrm{Ln} z$ є многозначною первісною для функції $w = 1/z$.

Якщо функція F є первісною для f, то F є аналітичною функцією, бо функція f неперервна. Подібно, многозначна первісна є многозначною аналітичною функцією. Звідси за наслідком 2 з теореми 4.5 і функція f є аналітичною. Отже, необхідною умовою існування первісної (однозначної чи многозначної) для неперервної функції є аналітичність f.

Теорема 4.6. *Нехай C — довільна крива з області G з кінцями в точках $z = A$ і $z = B$. Якщо F — первісна для f в G, то*

$$\int_C f(z)dz = F(B) - F(A). \tag{4.9}$$

Доведення. Нехай $C = (z(t),\ a \le t \le b)$, $z(a) = A$, $z(b) = B$. Тоді (див. розділ 4.1)

$$\int_C f(z) = \int\limits_a^b f(z(t))z'(t)dt = \Phi(B) - \Phi(A), \tag{4.10}$$

де Φ — довільна первісна для комплекснозначної функції $f(z(t))z'(t)$.

Покажемо, що $\Phi(t) = F(z(t))$ є первісною для $f(z(t))$. Дійсно, $\Phi'(t) = F'_z(z(t))z'(t) = f(z(t))z'(t)$. Підставляючи тепер у (4.10) $F(z(t))$ замість $\Phi(t)$, дістаємо (4.9).

Формула (4.9) називається формулою Ньютона-Лейбніца. В умовах теореми 4.6 результат інтегрування не залежить від вигляду кривої C, а тільки від її кінцевих точок. У таких випадках вживається наступний запис

$$\int_C f(z)dz = \int\limits_A^B f(z)dz.$$

Теорема 4.7. *Нехай функція f неперервна в області G, а F — її многозначна первісна. Тоді для кожної кривої $C, [C] \subset G$, маємо*

$$\int_C f(z)dz = \Delta_C F, \tag{4.11}$$

де $\Delta_C F$ — приріст многозначної функції F на кривій C.

Доведення. Виберемо на C однозначну вітку $\tilde{F}$ многозначної функції F. Тоді в околі кожної точки $t_0 \in [a, b]$, використовуючи умову 2) означення многозначної первісної, маємо

$$\frac{d}{dt}\tilde{F}(z(t)) = \frac{d}{dt}F_\alpha(z(t)) = F'_\alpha(z(t))z'(t) = f(z(t)).$$

Отже, $\tilde{F}(z(t))$ є первісною для $f(z(t))z'(t)$ на $[a, b]$. Тому

$$\int_C f(z)dz = \int_a^b f(z(t))z'(t)dt = \tilde{F}(z(b)) - \tilde{F}(z(a)) = \Delta_C \tilde{F}.$$

Звідси видно, що $\Delta_C \tilde{F}$ не залежить від вибору вітки. Тому $\Delta_c \tilde{F} = \Delta_C F$, і маємо формулу (4.11).

Надалі обмежимось розглядом тільки однозначної первісної.

Теорема 4.8. *Нехай функція f неперервна в області G, а F — її первісна. Для того щоб Φ була первісною для f в G, необхідно і досить, щоб $\Phi(z) \equiv F(z) + const$.*

Доведення. Якщо Φ — первісна для f в G то покладаючи $\psi = \Phi - F$, дістаємо $\psi'(z) \equiv \Phi'(z) - F'(z)$. Нехай z_1 і z_2 — дві фіксовані точки з G. Тоді

$$\psi(z_1) - \psi(z_2) = \int_{z_1}^{z_2} \psi'(z)dz = 0,$$

звідки випливає, що $\psi(z) = \text{const}$, тобто $\Phi(z) \equiv F(z) + \text{const}$.

Навпаки,

$$(\Phi(z) \equiv F(z) + \text{const}) \Rightarrow (\Phi'(z) \equiv F'(z) \equiv f(z)).$$

Теорема 4.9. *Нехай функція f неперервна в області G. Для того щоб f мала в G первісну, необхідно і досить, щоб для кожної замкненої кривої $C, [C] \subset G$,*

$$\int_C f(z)dz = 0. \tag{4.12}$$

Доведення. Якщо f має в G первісну F, то за теоремою 4.7

$$\int_C f(z)dz = \Delta_C F = 0.$$

Навпаки, нехай виконується (4.12). Зафіксуємо точку $z_0 \in G$ (рис. 4.1). З (4.12) випливає, що інтеграл від f вздовж довільної кривої, що лежить в G і з'єднує z_0 з точкою $z \in G$, не залежить від вибору кривої, а лише від точок z_0 і z. Тому

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\tau)d\tau \tag{4.13}$$

є функцією (однозначною). Покажемо, що вона є первісною для f. Треба показати, що

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\{F(z+h) - F(z)\} = f(z). \tag{4.14}$$

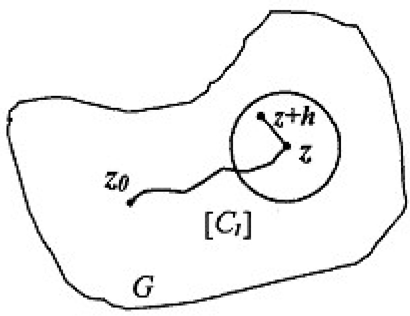


Рис. 4.1

Візьмемо круг K з центром в z так, щоб $\overline{K} \subset G$, і виберемо число h так, щоб $z + h \in K$. З'єднаємо z і $z + h$ відрізком $[z, z + h]$, а z_0 і z довільною кривою C_1, $[C_1] \subset G$. Тоді

$$F(z+h) = \frac{1}{h}\int_{C_1 \bigcup [z,z+h]} f(\tau)d\tau, \quad F(z+h) - F(z) = \int_{[z,z+h]} f(\tau)d\tau.$$

Тому

$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(\tau)d\tau - \frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} f(z)d\tau\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{h}\int_{[z,z+h]} (f(\tau) - f(z))d\tau\right| \le \frac{1}{h}h\max\{|f(\tau) - f(z)| : \tau \in [z, z+h]\} =$$

$$= \max\{|f(\tau) - f(z)| : \tau \in [z, z+h]\}. \tag{4.15}$$

Оскільки f неперервна, то $\max\{|f(\tau) - f(z)| : \tau \in [z, z + h]\} \to 0$ $(h \to 0)$. Тому з (4.15) випливає (4.14).

Для випадку, коли область — круг, теорему 4.9 можна підсилити.

Теорема 4.10. *Нехай функція f неперервна в крузі K. Для того щоб f мала в K первісну, необхідно і досить, щоб інтеграл від f вздовж кожного трикутника з K дорівнював нулю.*

Доведення. Необхідність, по суті, міститься в необхідності попередньої теореми. Доведемо достатність. Нехай z_0 — центр круга K. Покладемо $F(z) = \int\limits_{(z_0,z)} f(\tau)d\tau$. Ясно, що F — функція. Щоб довести, що F — первісна для f в K, досить довести (4.14). Оскільки $[z, z + h]\bigcup[z_0, z] = [z_0, z + h]$ і інтеграл по трикутнику з вершинами $z_0, z, z + h$ дорівнює нулю, то

$$F(z+h) = \int\limits_{[z_0,z+h]} f(\tau)d\tau = \int\limits_{[z_0,z]} f(\tau)d\tau + \int\limits_{[z,z+h]} f(\tau)d\tau$$

і

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int\limits_{[z,z+h]} f(\tau)d\tau$$

Подальше доведення теореми 4.10 нічим не відрізняється від доведення теореми 4.9.

Наслідок. *Якщо функція f неперервна в крузі K, C — замкнена крива з K, Δ — трикутник з K, то*

$$(\forall C, [C] \subset K)\{\int_C f(z)dz = 0\} \iff (\forall \Delta, [\Delta] \subset K)\{\int_\Delta f(z)dz = 0\}.$$

Теорема 4.11. *Нехай функція f неперервна в однозв'язній області G. Для того щоб f мала в G первісну, необхідно і досить, щоб вона була в цій області аналітична.*

Доведення. Необхідність доведена на початку розділу 4.5. Доведемо достатність. Якщо функція f аналітична в однозв'язній області G, то за теоремою 4.1 виконується (4.5), тому за теоремою 4.9 f має первісну.

Для загального випадку має місце наступна теорема, доведення якої опустимо.

Теорема 4.12. *Нехай функція f неперервна в області G. Для того щоб f мала в G первісну чи многозначну первісну, необхідно і досить, щоб вона була аналітичною в G.*

Отже, клас аналітичних в області G функцій збігається з класом неперервних у G функцій, які мають первісну чи многозначну первісну.

4.6. ТЕОРЕМИ МОРЕРИ І ГУРСА

Теорема 4.13 (Морери). *Якщо функція f неперервна в області G і $\int_C f(z)dz = 0$ для кожної замкненої кривої $C, [C] \subset G$, то f аналітична в області G.*

Доведення. За теоремою 4.9 f має первісну в G, а отже, за теоремою 4.12 вона аналітична в G.

Теорема 4.14 (посилена теорема Морери). *Якщо функція f неперервна в області G і $\int_\Delta f(z)dz = 0$ для кожного трикутника $\Delta, [\Delta] \subset G$, то f аналітична в G.*

Доведення. Досить показати, що f аналітична в кожному крузі $K \subset G$. До такого круга застосовуємо теореми 4.10 і 4.11. Дістаємо аналітичність f в K і, отже, в G.

При доведенні наступної теореми використовується посилена теорема Мореры.

Теорема 4.15 (про усунення відрізка). *Якщо функція f неперервна в області G і аналітична в області $G \setminus I$, де I — відрізок, то f аналітична в G.*

Доведення. Досить довести, що f є аналітична в кожній точці $z \in I \cap G$. Візьмемо круг $K \subset G$ з центром у z і будь-який трикутник $\Delta, [\Delta] \subset K$. Якщо I не перетинається з $[\Delta]$, то застосовуємо теорему 4.1, а якщо перетинається, то застосовуємо теорему 4.3, розбиваючи, якщо треба, трикутник на дві частини. В обох випадках інтеграл вздовж трикутника від f дорівнює нулю. За посиленою теоремою Мореры функція f аналітична в K, а отже, і в G.

Теорема 4.16 (Гурса). *Якщо функція f моногенна в області G, то f аналітична в G.*

Доведення. Нехай f моногенна в G. Візьмемо довільний круг $K \subset G$. Згідно з теоремою 4.14 досить довести, що інтеграл вздовж кожного трикутника Δ, $[\Delta] \subset K$, від f дорівнює нулю. Зафіксуємо Δ, $[\Delta] \subset K$, і через l позначимо його периметр. Покладемо

$$M = \left| \int_{\Delta} f(z)dz \right|.$$

Треба довести, що $M = 0$. Розіб'ємо трикутник Δ середніми лініями на трикутники $\Delta_1^{(1)}, \Delta_2^{(1)}, \Delta_3^{(1)}, \Delta_4^{(1)}$ (рис. 4.2).

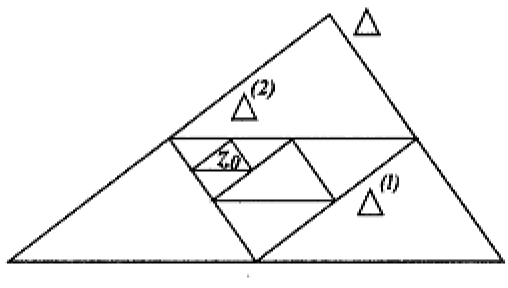


Рис. 4.2

Тоді

$$M = |\int_{\Delta_1^{(1)}} f(z)dz + \cdots + \int_{\Delta_4^{(1)}} f(z)dz| \le |\int_{\Delta_1^{(1)}} f(z)dz| + \cdots + |\int_{\Delta_4^{(1)}} f(z)dz|,$$

звідки випливає, що, принаймні, для одного з трикутників $\Delta_1^{(1)}, \cdots, \Delta_4^{(1)}$ (позначимо його через $\Delta^{(1)}$) виконується нерівність

$$|\int_{\Delta^{(1)}} f(z)dz| \ge \frac{M}{4}.$$

Розіб'ємо тепер $\Delta^{(1)}$) середніми лініями на чотири трикутники, серед яких

$$(\exists\Delta^{(2)})\left\{|\int_{\Delta^2} f(z)dz| \ge \frac{M}{4^2}\right\}$$

і т. д. Тоді

$$(\exists\{\Delta^{(n)}\})(\forall n)\left\{|\int_{\Delta^{(n)}} f(z)dz| \ge \frac{M}{4^n}\right\} \wedge \{\mathrm{int}\Delta^{(n)} \supset \mathrm{int}\Delta^{(n+1)}\},$$

причому периметр $|\Delta^{(n)}| = 2^{-n}l \to 0$ $(n \to \infty)$. Звідси випливає, що послідовність вкладених замкнених областей, обмежених трикутниками $[\Delta^{(n)}]$, має спільну точку z_0, а $[\Delta^{(n)}]$ стягуються до z_0.

Оскільки f моногенна в z_0, то

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta > 0)(\forall z \in G)\{0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0)| < \varepsilon\}$$

тобто при $|z - z_0| < \delta$ виконується

$$|f(z) - f'(z_0)(z - z_0)| \le \varepsilon|z - z_0|.$$

З іншого боку,

$$(\forall\delta > 0)(\exists N)\{[\Delta^{(N)}] \subset \{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}.$$

Отже, оскільки $|z - z_0| < |\Delta^{(N)}| = 2^{-N}l$ і при $z \in [\Delta^{(N)}]$

$$|f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)| < \varepsilon|z - z_0| \le \varepsilon\frac{l}{2^N},$$

а за теоремою 4.1

$$\int_{\Delta^{(N)}} \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\}dz = 0,$$

бо підінтегральна функція є цілою лінійною, то маємо

$$\frac{M}{4^N} \leq |\int_{\Delta^{(N)}} f(z)dz - \int_{\Delta^{(N)}} \{f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)\}dz| =$$

$$= |\int_{\Delta^{(N)}} \{f(z) - f(z_0) - f'(z_0)(z - z_0)\}dz| \leq \frac{\varepsilon l|\Delta^{(N)}|}{2^N} = \frac{\varepsilon l^2}{4^N},$$

тобто $M \leq \varepsilon l^2$, звідки випливає, що $M = 0$. Теорема Гурса доведена.

Отже, клас моногенних в області G функцій збігається з класом аналітичних у цій області функцій.

4.7. ГАРМОНІЙНІ ФУНКЦІЇ

Дійснозначна функція $u = u(x, y)$ називається гармонійною в області $G \subset R^2$, якщо вона в цій області двічі неперервно диференційована і

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{4.16}$$

Ототожнюючи $\mathbb{R}^2$ з $\mathbb{C}$, знайдемо зв'язок між гармонійними і аналітичними функціями.

Теорема 4.17. *Якщо функція $f = u + iv$ аналітична в області G, то функції u і v гармонійні в G.*

Доведення. За наслідком 2 з теореми 4.5 і теоремою 1.8 функції u і v мають частинні похідні будь-якого порядку і задовольняють умови Коші-Рімана. Продиференціюємо одну з цих умов по x, а іншу — по y. Дістанемо рівності

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

звідки додаванням приходимо до (4.16). Гармонійність u доведена. Щоб довести гармонійність v, досить врахувати, що якщо функція f аналітична, то if — теж аналітична функція.

Теорема 4.18. *Якщо функція u гармонійна в однозв'язній області G, то існує аналітична в G функція f така, що $(\forall z \in G)\{u = Ref\}$.*

Доведення. Зафіксуємо точку $z_0 = x_0 + iy_0 \in G$, з'єднаємо довільну точку $z = x + iy \in G$ з z_0 кривою $C, [C] \in G$, і розглянемо інтеграл

$$\int_C \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy. \tag{4.17}$$

Оскільки з (4.16) випливає, що $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, то інтеграл (4.17) не залежить від шляху інтегрування і, отже,

$$v(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dy$$

є функцією. Знайдемо її частинні похідні. Коли беремо похідну по x, то вибираємо криву C так, щоб перетин її з деяким околом точки (x, y) складався з горизонтального інтервалу. Тоді

$$v(x,y) = \mathrm{const} + \int_{x_1}^{x} \left(-\frac{\partial u(t,y)}{\partial y}\right) dt,$$

і легко показати, що

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{4.18}$$

Аналогічно, якщо шукаємо похідну по y, то вибираємо криву C так, щоб перетин її з деяким околом точки (x, y) складався з вертикального інтервалу. Тоді

$$v(x,y) = \mathrm{const} + \int_{y_1}^{y} \frac{\partial u(t,y)}{\partial x} dt$$

і

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}. \tag{4.19}$$

Покладемо $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$. Для цієї функції рівності (4.18) та (4.19) є не що інше, як умови Коші-Рімана, і отже, функція f аналітична в D, а $Ref = u$.

В основі застосувань теорії аналітичних функцій до задач теорії гармонійних функцій лежить наступна теорема.

Теорема 4.19. *Нехай аналітична функція f відображає область G на область D, а функція u гармонійна в D. Тоді функція $u(f(z))$ гармонійна в G.*

Доведення. Візьмемо довільну точку $z_0 \in G$. Нехай $w_0 = f(z_0)$. У деякому околі точки w_0 знайдемо таку аналітичну функцію F, що $u(w) = \mathrm{Re}F(w)$. Функція $F(f(z))$ аналітична в досить малому околі точки z_0. Тому $u(f(z)) = \mathrm{Re}F(f(z))$, і отже, $u(f(z))$ — гармонійна в околі z_0 функція і з огляду на довільність z_0 гармонійна в G.

Звичайно цю теорему застосовують у випадку, коли f здійснює конформне і однолисте відображення G на D.

Розділ 5

ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

5.1. РІВНОМІРНА ЗБІЖНІСТЬ. ТЕОРЕМА ВЕЙЄРШТРАССА

Нехай (f_n) — послідовність функцій, заданих на множині E. Розглянемо функціональний ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) = f_1(z) + f_2(z) + \cdots + f_n(z) + \cdots, z \in E. \tag{5.1}$$

Якщо в (5.1) покладемо $z = z_0$, то дістанемо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$. Якщо він збіжний, то кажуть, що функціональний ряд (5.1) збіжний у точці z_0. Ряд (5.1) називається збіжним на множині E, якщо він збіжний у кожній точці $z \in E$. У цьому випадку через $f(z)$ позначимо суму ряду (5.1) в точці z. Те, що ряд (5.1) збіжний на E до функції f, означає, що

$$(\forall z \in E)(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)\{|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)| < \varepsilon\}.$$

Ряд (5.1) називається рівномірно збіжним до f на E, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall z \in E)\{|\sum_{k=1}^{n} f_k(z) - f(z)| < \varepsilon\}.$$

Як бачимо, наведені означення нічим не відрізняються від аналогічних з курсу математичного аналізу. Використовуючи нерівності (1.2) легко довести (як ми це робили в розділі 1) наступну теорему.

Теорема 5.1. *Для того, щоб ряд (5.1) був збіжним (рівномірно збіжним) на множині E до функції f, необхідно і досить, щоб були збіжними (рівномірно збіжними) на E до функції u і v відповідно ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$, де $u_n = Ref_n, u = Ref, v_n = Imf_n, v = Imf$.*

Ця теорема дає можливість переносити відомі з курсу математичного аналізу теореми на випадок комплексної змінної. Наприклад, справедливий наступний критерій Коші.

Теорема 5.2. *Для того, щоб ряд (5.1) був рівномірно збіжним на множині E, необхідно і досить, щоб*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall m > 0)(\forall z \in E)\{|\sum_{k=n+1}^{m+n} f_k(z)| < \varepsilon\}.$$

Використовуючи цей критерій, неважко, як і в курсі математичного аналізу, довести наступну ознаку Вейєрштрасса.

Теорема 5.3. *Функціональний ряд (5.1) збіжний на множині E рівномірно і абсолютно, якщо існує збіжний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ з додатними членами такий, що $(\forall n \in N)(\forall z \in E)\{|f_n(z)| \leq \alpha_n\}$.*

Доведемо два аналоги відомих з курсу математичного аналізу теорем.

Теорема 5.4. *Якщо функції f_n неперервні на множині E і ряд (5.1) рівномірно збіжний на E до функції f, то f — неперервна на E функція.*

Доведення. З рівномірної збіжності ряду (5.1) випливає рівномірна збіжність рядів $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ до функцій u і v. Оскільки функції u_n та v_n є неперервними на E, то за відповідною теоремою з математичного аналізу такими самими є функції u і v, а отже, і f.

Теорема 5.5. *Нехай C — крива, функції f_n неперервні на $[C]$ і ряд (5.1) рівномірно збіжний на $[C]$ до функції f. Тоді*

$$\int_c f(z)dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_c f_n(z)dz.$$

Доведення. За теоремою 5.4 функція f неперервна на $[C]$. Тому всі інтеграли існують. З рівномірної збіжності випливає, що

$$(\forall\varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall n > n_0)(\forall z \in [C])\{|f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z)| < \varepsilon\}.$$

Отже при $n > n_0$ маємо

$$|\int_C f(z)dz - \sum_{k=1}^{n}\int_C f_k(z)dz| \le |\int_C (f(z) - \sum_{k=1}^{n} f_k(z))dz| \le |C|\varepsilon,$$

а це означає, що

$$\int_C f(z)dz = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_C f_k(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty}\int_C f_k(z)dz.$$

Наступна теорема Вейєрштрасса про ряди аналітичних функцій не має аналогу для рядів з дійсними неперервно диференційованими членами. При її доведенні використовуватиметься така лема.

Лема 5.1. *Якщо ряд (5.1) рівномірно збіжний на множині E, а функція φ на E обмежена, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\varphi f_n$ рівномірно збіжний на E.*

Справедливість цієї леми випливає з критерію Коші і нерівності

$$(\forall z \in E)\{|\sum_{k=n+1}^{n+m}\varphi(z)f_k(z)| \le M|\sum_{k=n+1}^{n+m} f_k(z)|\}, M = \sup\{|\varphi(z)| : z \in E\}.$$

Теорема 5.6. *Нехай в області G задана послідовність (f_k) аналітичних функцій, і ряд (5.1) рівномірно збіжний на кожному замкненому крузі $\overline{K} \subset G$ до функції f. Тоді:*
1) функція f аналітична в G;
2) ряд (5.1) можна почленно диференціювати, тобто

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(n)}(z),\ n \in \mathbb{N}; \tag{5.2}$$

3) ряди в (5.2) рівномірно збіжні на кожному замкненому крузі $\overline{K} \subset G$.

Доведення. Зупинимося лише на доведеннях тверджень 1 і 2. Почнемо з 2. Досить довести аналітичність у довільній точці $z \in G$. Нехай $\overline{K}$ — довільний замкнений круг з центром у z такий, що $\overline{K} \subset G$. За теоремою 5.4 функція f неперервна на $\overline{K}$, а за теоремою 5.5 ряд (5.1) можна почленно інтегрувати вздовж будь-якої замкненої кривої, що лежить у K. Нехай C — така крива. Оскільки за теоремою 4.1

$$(\forall k \in \mathbb{N}) \left\{ \int_C f_k(z)dz = 0 \right\},$$

то

$$\int_c f(z)dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z)dz = 0,$$

звідки за теоремою 4.13 випливає аналітичність функції f в K.

Доведемо твердження 2. Нехай K — такий самий круг, як і при доведенні твердження 1, а $\tau \in \partial K$. Помножимо обидві частини рівності $f(\tau) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(\tau)$ на функцію $\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi i} n!(\tau - z)^{-n-1}$, яка є обмеженою на ∂K. Дістанемо рівномірно збіжний за лемою 5.1 ряд з неперервних функцій, який за теоремою 5.5 можна почленно інтегрувати. Отже, дістанемо рівність

$$\frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f(\tau)}{(\tau - z)^{n+1}} d\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_{\partial K} \frac{f_k(\tau)}{(\tau - z)^{n+1}} d\tau ,$$

з якої за теоремою 4.5 дістаємо рівність (5.2).

5.2. СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Функціональний ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \tag{5.3}$$

називається степеневим рядом (з центром у точці z_0). Очевидно, що він збіжний у точці z_0. Позначимо $\alpha = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$ і до ряду (5.3) застосуємо теорему 1.2. Оскільки при $z \neq z_0$, справедлива рівність $q = \varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} = \alpha|z-z_0|$, то при $\alpha = 0$ ряд (5.3) є абсолютно збіжним для всіх $z \in \mathbb{C}$. Якщо $\alpha = \infty$, то ряд (5.3) розбіжний всюди, крім точки $z \neq z_0$. Нарешті, якщо $0 < \alpha < +\infty$, то ряд (5.3) є абсолютно збіжним в $\{z : |z-z_0| < 1/\alpha\}$ і розбіжним в $\{z : |z-z_0| > 1/\alpha\}$.

Число R, $0 < R < +\infty$, називається радіусом збіжності ряду (5.3), якщо ряд (5.3) збіжний в $\{z : |z-z_0| < R\}$ і розбіжний в $\{z : |z-z_0| > R\}$. Якщо ряд (5.3) збіжний всюди, то покладаємо $R = +\infty$, а якщо ніде, крім точки z_0, не є збіжним, то покладаємо $R = 0$. З наведених міркувань випливає наступна формула Коші-Адамара для знаходження радіуса збіжності ряду (5.3)

$$R = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Круг $\{z : |z-z_0| < R\}$ називається кругом збіжності, а при $0 < R < +\infty$ коло $\{z : |z-z_0| = R\}$ називається колом збіжності. На колі збіжності ряд (5.3) може бути збіжним, розбіжним, збіжним тільки на деякій підмножині цього кола.

Теорема 5.7 (Абеля). *Якщо ряд (5.3) збіжний в точці $z^* \neq z_0$, то він абсолютно збіжний у крузі $\{z : |z-z_0| < |z^*-z_0|\}$.*

Доведення. Оскільки ряд (5.3) збіжний в z^*, то за означенням радіуса збіжності $|z^*-z_0| \leq R$, а оскільки ряд (5.3) абсолютно збіжний в $\{z : |z-z_0| < R\}$, то він є абсолютно збіжним і в крузі $\{z : |z-z_0| < |z^*-z_0|\}$.

Теорема 5.8 (про рівномірну збіжність). *Якщо ряд (5.3) має радіус збіжності $R > 0$, то в кожному замкненому крузі $\{z : |z-z_0| \leq r\}$, $0 < r < R$, він збіжний рівномірно.*

Доведення. Нехай z_1 — точка на колі $\{z : |z-z_0| = r\}$. В z_1 ряд збіжний абсолютно, тобто $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n < +\infty$. Останній ряд є мажорантним у крузі $\{z : |z-z_0| \leq r\}$ для ряду (5.3). Залишилося застосувати ознаку Вейєрштрасса.

Наслідок 1. *Сума ряду (5.3) в крузі збіжності є аналітичною функцією, і цей ряд можна почленно диференціювати довільну кількість разів.*

Дійсно, оскільки $a_n(z-z_0)^n$ — цілі функції і ряд (5.3) рівномірно збіжний на кожному замкненому крузі з області $\{z : |z-z_0| < R\}$, то за теоремою Вейєрштрасса його сума є аналітичною в цій області функцією.

Наслідок 2. *Ряд (5.3) можна почленно інтегрувати вздовж будь-якої кривої, яка лежить у крузі збіжності.*

Дійсно, для кожної кривої C, що лежить у крузі збіжності, можна знайти таке $r \in (0, R)$, що $[C] \subset \{z : |z-z_0| \leq r\}$, тобто ряд (5.3) рівномірно збіжний на $[C]$, і залишилось застосувати теорему 5.5.

5.3. УЗАГАЛЬНЕНІ СТЕПЕНЕВІ РЯДИ

Нехай $z_0 \in \mathbb{C}$. Ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n = \cdots + \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \\ + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + \cdots + a_n(z-z_0)^n + \cdots . \tag{5.4}$$

називатимемо узагальненим степеневим рядом. Головною і правильною частинами ряду (5.4) називаються відповідно ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ і $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. Узагальнений степеневий ряд називається збіжним (рівномірно збіжним) на множині E, якщо на E збіжні (рівномірно збіжні) його головна та правильна частини. Правильна частина є звичайним степеневим рядом. Позначимо через R_2 його радіус збіжності і припустимо, що $R_2 > 0$. Як відомо, в замкненому крузі $\{z : |z-z_0| \leq r\}$, $0 < r < R_2$, правильна частина рівномірно збіжна. В головній же частині зробимо заміну $z-z_0 = 1/w$. Дістанемо степеневий ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{-k}w^k$.

Нехай R' — його радіус збіжності, тобто він збіжний у крузі $\{w : |w| < R'\}$, причому рівномірно на кожному замкненому крузі з цього круга. Повертаючись до головної частини ряду (5.4), бачимо, що вона збіжна в області $\{z : |z-z_0| > 1/R' = R_1\}$ і рівномірно збіжна в кожній замкненій області $\{z : |z - z_0| \geq r\}, r > R_1$.

Числа R_1 і R_2 обчислюють за допомогою формул Коші-Адамара

$$R_1 = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_{-n}|}, \quad R_2 = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Якщо $R_1 > R_2$, то ряд (5.4) ніде не збіжний, якщо ж $R_1 = R_2$, то він може бути збіжним хіба що на колі $\{z : |z-z_0| = R_1\}$, а якщо $R_1 < R_2$, то областю збіжності є кільце $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$, причому на краю цього кільця можуть бути точки збіжності. Надалі розглядатимемо лише третій випадок і зауважимо, що в кожному замкненому кільці $\{z : r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}, R_1 < r_1 < r_2 < R_2$, ряд (5.4) рівномірно збіжний, а отже, в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ задає аналітичну функцію і його можна почленно диференціювати довільну кількість разів.

Теорема 5.9 (Лорана). *Аналітичну в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ функцію f можна єдиним чином розвинути в узагальнений степеневий ряд (5.4), причому*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{f(\tau)d\tau}{(\tau - z_0)^{n+1}}, \tag{5.5}$$

де Γ_R — довільне коло $\{z : |z - z_0| = R\}, R_1 < R < R_2$.

Доведення. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $z_0 = 0$ (загальний випадок зводиться до цього заміною $z - z_0$ на z). Нехай z — довільна точка з кільця $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$. Кола $\Gamma_{R'} = \{z : |z| = R'\}$ і $\Gamma_{R''} = \{z : |z| = R''\}$, $R_1 < R' < R'' < R_2$, виберемо так, щоб точка z лежала в кільці $\{z : R' < |z| < R''\}$ (рис. 5.1).

Тоді за теоремою 4.5

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma''_R} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^-_{R'}} \frac{f(\tau)}{\tau - z} d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''_R}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_R}\frac{f(\tau)}{z-\tau}d\tau. \qquad (5.6)$$

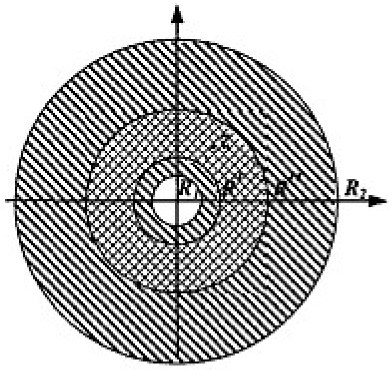


Рис. 5.1

Якщо $\tau \in \Gamma_{R'}$, то $|\tau/z| < 1$ і

$$\frac{1}{z-\tau} = \frac{1}{z}\,\frac{1}{1-\tau/z} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{z}\right)^n.$$

Останній ряд є рівномірно збіжним відносно $\tau \in \Gamma_{R'}$, бо мажорується рядом $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(R'/|z|)^n$, де $R'/|z| < 1$. Функція f обмежена на $\Gamma_{R'}$. Тому за лемою 5.1 можемо наш ряд помножити на $f(\tau)$ і почленно проінтегрувати. Маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_R}\frac{f(\tau)}{z-\tau}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_R} f(\tau)\left\{\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\tau}{z}\right)^n\right\}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{z^{n+1}}\int_{\Gamma'_R} f(\tau)\tau^n d\tau = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_R} f(\tau)\tau^n d\tau\right)z^{-(n+1)} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_R}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau\right)z^n. \qquad (5.7)$$

На колі $\Gamma_{R''}$ виконується нерівність $|z/\tau| < 1$ і, отже,

$$\frac{1}{\tau - z} = \frac{1}{\tau}\,\frac{1}{1 - z/\tau} = \frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\tau}\right)^n.$$

Тому, міркуючи, як і раніше, маємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''_R}\frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''_R} f(\tau)\frac{1}{\tau}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{\tau}\right)^n d\tau =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''_R}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau\right) z^n. \tag{5.8}$$

Використовуючи тепер наслідок з теореми 4.2, отримуємо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma'_R}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma''_R}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau, \quad R_1 < R < R_2.$$

Тому, підставляючи (5.7) і (5.8) в (5.6), маємо

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R}\frac{f(\tau)}{\tau^{n+1}}d\tau\right) z^n,$$

і отже, можливість розвинення і формула (5.5) доведені.

Доведемо єдиність розвинення. Припустимо, від супротивного, що в кільці $\{z : R_1 < |z| < R_2\}$ для аналітичної функції f виконується

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Помножимо обидва ряди на $z^{-(m+1)}$ і проінтегруємо вздовж кола $\{z : |z| = R\}, R_1 < R < R_2$, почленно. Тоді

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_n \int\limits_{|z|=R} z^{n-m-1}dz = \sum_{-\infty}^{\infty} a_n \int\limits_{|z|=R} z^{n-m-1}dz.$$

Застосуємо до інтегралів у цій рівності лему 4.1. Тоді $2\pi i c_m = 2\pi i a_m$, тобто $c_m = a_m$. Теорема 5.9 повністю доведена.

Коефіцієнти (5.5) називаються коефіцієнтами Лорана, а ряд (5.4) з такими коефіцієнтами — рядом Лорана.

Нехай $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ — проколотий окіл точки $z_0 \neq \infty$. Якщо функція f аналітична в ньому, то її можна розвинути в ряд Лорана, бо цей окіл є частковим випадком кільця в теоремі 5.9 з $R_1 = 0$ і $R_2 = \delta$. Дістанемо таким чином розвинення функції f в ряд Лорана в околі точки z_0. Означення головної і правильної частини зберігаються.

Нехай тепер $z_0 = \infty$ і функція f аналітична в області $\{z : 1/\delta < |z| < +\infty\}$. Рядом Лорана для функції f в околі точки $z = \infty$ називається ряд

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k. \tag{5.9}$$

При цьому ряд, складений з членів з додатними показниками, називається головною частиною ряду (5.9), а ряд, що залишається після усунення головної частини, — правильною частиною. Можна сказати, що до головної частини розвинення функції f в ряд Лорана в околі точки $z_0 \in \overline{\mathbb{C}}$ належать ті члени, які прямують до ∞, коли $z \to z_0$. Якщо функція f аналітична в області $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$, яку можна розуміти як проколотий окіл і точки $z = 0$, і точки $z = \infty$, то в цій області можна розвинути функцію fF у ряд (5.9), який є рядом Лорана для f і в околі точки $z = 0$, і в околі точки $z = \infty$, але з різними головними та правильними частинами. При цьому член a_0, як для точки $z = 0$, так і для точки $z = \infty$ завжди належить до правильної частини. Наприклад, ряд Лорана $z + 1 + 1/z$ в околі точки $z = 0$ має головну частину $1/z$, а в околі точки $z = \infty$ головною частиною є z.

Теорема 5.10 (Тейлора). *Аналітичну в крузі $z : |z - z_0| < R\}$ функцію f можна єдиним чином розвинути в цьому крузі в степеневий ряд (5.3) з коефіцієнтами*

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z_0| = r} \frac{f(\tau)}{(\tau - z_0)^{n+1}} d\tau = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad (0 < r < R). \tag{5.10}$$

Доведення. Твердження теореми в точці z_0 перевіряється безпосередньо. Далі в кільці $\{z : 0 < |z - z_0| < R\}$ за теоремою Лорана функція f розвивається в ряд Лорана з коефіцієнтами (5.5). Оскільки при $n < 0$ за теоремою 4.1 маємо

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\tau - z_0| = r} f(\tau)(\tau - z_0)^{|n|-1} d\tau = 0,$$

то цей ряд складається тільки з правильної частини. Формула (5.10) випливає з (5.5) і інтегральної формули Коші.

Наслідок 1. *Функція f є цілою тоді і тільки тоді, коли її можна розвинути в ряд Тейлора за степенями $(z - z_0)$ з нескінченим радіусом збіжності, $z_0 \in \mathbb{C}$.*

Функція f називається голоморфною в області G, якщо для кожної точки $z_0 \in G$ існує круг $\{z : |z - z_0| < R\} \subset G$, в якому f можна розвинути в ряд Тейлора.

Теорема 5.11. *Функція f голоморфна в області G тоді і тільки тоді, коли вона в G аналітична.*

Доведення. Якщо функція f голоморфна, то за теоремою 5.6 вона є аналітичною. Якщо функція f аналітична, то за наслідком 1 з теореми 5.10 вона голоморфна.

На завершення зробимо огляд **рівносильних означень** аналітичної функції. Для простоти обмежимося випадком однозв'язної області, хоч у більшості означень вимога однозв'язності є зайвою. Отже, аналітичною функцією в однозв'язній області називається така функція, що задовольняє одну з наступних умов:

1) має в цій області неперервну похідну;

2) має в цій області похідну;

3) має неперервно диференційовані дійсну та уявну частини, які задовольняють умовам Коші-Рімана;

4) неперервна і має в області первісну;

5) неперервна і інтеграл від неї вздовж будь-якої замкненої кривої, що лежить в області, дорівнює нулю;

6) може бути розвинена в степеневий ряд в околі кожної точки з області;

7) має неперервно диференційовані дійсну та уявну частини і здійснює конформне відображення скрізь в області, за можливим винятком ізольованих точок.

Властивість 7 нами доведена досі не повністю. Щоб отримати її повне доведення, досить послатися на теорему 4.15 і наслідок 7 з теореми 6.3. Пропонуємо провести повне доведення.

Розділ 6

НУЛІ ТА ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ

6.1. НУЛІ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай функція f аналітична в області G. Точка $z_0 \in G$ називається нулем функції f, якщо $f(z_0) = 0$. Якщо $f(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$ і $f^{(n)}(z_0) \neq 0$, то z_0 називається нулем n-го порядку. Якщо f і всі її похідні в z_0 дорівнюють нулю, то z_0 називається нулем нескінченного порядку.

Теорема 6.1 (про нуль нескінченного порядку). *Якщо функція f аналітична в області G і $z_0 \in G$ є її нулем нескінченного порядку, то* $(\forall z \in G)\{f(z) = 0\}$.

Доведення. Нехай a — довільна точка з G. Покажемо, що $f(a) = 0$, для чого з'єднаємо точку a з точкою z_0 кривою C, що лежить в області G (рис. 6.1).

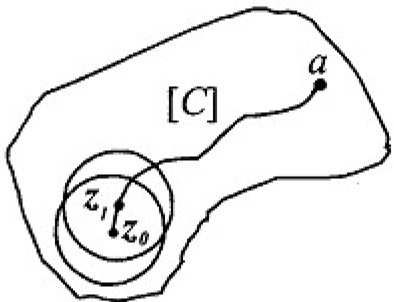


Рис. 6.1

Оскільки криві $[C]$ і ∂G — компакти, що не перетинаються, то відстань між ними $\rho([C],\ \partial G) = d > 0$. Візьмемо круг $\{z : |z - z_0| < d\}$ і функцію f розвинемо в ньому в ряд Тейлора $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z - -z_0)^k$. Оскільки всі $f^{(k)}(z_0) = 0$, то звідси випливає, що $(\forall z, |z - z_0| < d)$ $\{f(z) = 0\}$. Візьмемо тепер у крузі $\{z : |z - z_0| < d\}$ на $[C]$ точку z_1 так, щоб вона була на відстані $d/2$ вздовж кривої C до точки z_0. В цій точці z_1 функція f має нуль нескінченного порядку, бо вона дорівнює тотожно нулю в деякому околі точки z_1. До точки z_1 застосовуємо ті ж міркування, що і до точки z_0. Рухаючись таким чином вздовж $[C]$, дійдемо до точки, відстань від якої до a менша, ніж d, бо крива C має скінченну довжину. Дістанемо $f(a) = 0$. Теорему доведено.

Теорема 6.2 (про канонічне зображення). *Для того, щоб аналітична в області G функція f мала в точці $z_0 \in G$ нуль n-го порядку, необхідно і досить, щоб у деякому околі точки z_0 функцію f можна було зобразити у вигляді*

$$f(z) = (z - z_0)^n \varphi(z), \tag{6.1}$$

де φ — функція, аналітична в цьому околі і $\varphi(z_0) \neq 0$.

Доведення. Якщо f аналітична в G і $z_0 \in G$ є її нулем n-го порядку, то існує окіл точки z_0, де функція f розвивається в ряд Тейлора, який в даному випадку має вигляд

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = (z - z_0)^n \{a_n + a_n(z - z_0) + \cdots\}, a_n \neq 0.$$

Покладаючи $\varphi(z) = a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots$, маємо (6.1). Навпаки, якщо має місце (6.1), де φ — аналітична в околі z_0 функція і $\varphi(z_0) \neq 0$, то в цьому околі

$$\varphi(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots + b_n(z - z_0)^n + \cdots, b_0 \neq 0.$$

Тому

$$f(z) = b_0(z - z_0)^n + b_1(z - z_0)^{n+1} + \cdots,$$

і, отже, f має в z_0 нуль n-го порядку. Теорему доведено.

Будемо говорити, що аналітична в околі точки $z = \infty$ функція f має в ∞ полюс n-го порядку, якщо функція $g(z) = f(1/z)$ має нуль n-го порядку в точці $z = 0$. Це буде тоді і тільки тоді, коли $f(z) = \varphi(z)/z^n$, де φ — аналітична в деякому околі точки ∞ функція і $\varphi(\infty) \neq 0$.

Теорема 6.3 (про ізольованість нулів). *Нехай функція f — аналітична в області G і $z_0 \in G$. Якщо z_0 є нулем функції f, то існує окіл точки z_0, в якому f не має інших нулів.*

Доведення. За попередньою теоремою виконується (6.1), де φ — аналітична, а отже, неперервна в деякому околі точки z_0 функція та $\varphi(z_0) \neq 0$. Тому в деякому околі точки z_0 виконується нерівність $\varphi(z) \neq 0$.

Наслідок 1. *Якщо функція f аналітична в області G, то множина її нулів не має точки скупчення в G.*

Справді, в протилежному випадку за неперервністю функції f точка скупчення теж була б нулем функції f, що неможливо за теоремою 6.3.

Зауважимо, що на краю області G точка скупчення нулів може бути, на що вказує приклад аналітичної в $\{z : |z| < 1\}$ функції $\sin(1/(1-z))$ з нулями $z_k = 1 - 1/\pi k \to 1$ $(k \to +\infty)$.

Наслідок 2. *Нехай функція $f \not\equiv 0$ аналітична в області G, а E — компакт з G. Тоді на E функція f має скінченне число нулів.*

Доведення грунтується на попередньому наслідку і принципі компактності.

Наслідок 3. *Нехай функція $f \not\equiv 0$ аналітична в області G, то вона має в G скінченну або зліченну множину нулів.*

Доведення грунтується на попередньому наслідку.

Наслідок 4 (теорема єдиності). *Якщо функції f і g аналітичні в області G, а множина $E \subset G$ має, щонайменше одну точку скупчення, яка належить до G, то $(\forall z \in E)\{f(z) = g(z)\} \Rightarrow (\forall z \in G)\{f(z) = g(z)\}$.*

Доведення цього твердження базується на застосуванні до функції $\varphi = f - g$ наслідку 3. З наслідку 4 випливають два наступні твердження.

Наслідок 5. *Якщо функції f і g аналітичні в області G, і крива C лежить у G, то $(\forall z \in [C])\{f(z) = g(z)\} \Rightarrow (\forall z \in G)\{f(z) = g(z)\}$.*

Наслідок 6. *Якщо функції f і g аналітичні в області G, і область $D \subset G$, то $(\forall z \in D)\{f(z) = g(z)\} \Rightarrow (\forall z \in G)\{f(z) = g(z)\}$.*

Наслідок 7. *Якщо функція $f \not\equiv \mathrm{const}$ аналітична в області G, то вона здійснює відображення, яке є конформним у кожній точці цієї області, крім, можливо, множини, що складається з ізольованих точок.*

Доведення базується на застосуванні теореми 6.3 до похідної f' функції f, що також є аналітичною функцією.

В розділі 2.5 було зауважено, що всі формули для тригонометричних функцій, відомі зі шкільного курсу математики, справедливі і в комплексній області. Ці формули перевіряються за допомогою алгебраїчних операцій над показниковими функціями. Але їх можна довести одним стандартним способом. Пояснимо це на двох прикладах:

1. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$. У лівому та правому боці стоять цілі функції. Оскільки вони рівні на дійсній осі, то за наслідком 5 вони рівні в $\mathbb{C}$;

2. $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$. Оскільки $\cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \sin x_1 \sin x_2$ для всіх $x_1 \in \mathbb{R}$ і $x_2 \in \mathbb{R}$, то за наслідком 5 маємо $\cos(z_1 + x_2) = \cos z_1 \cos x_2 - \sin z_1 \sin z_2$ для всіх $z_1 \in \mathbb{C}$ при кожному фіксованому $x_2 \in \mathbb{R}$. Тепер, фіксуючи z_1, аналогічно дістанемо шукану рівність.

6.2. ІЗОЛЬОВАНІ ОСОБЛИВІ ТОЧКИ ОДНОЗНАЧНОГО ХАРАКТЕРУ

Нехай функція f аналітична в проколотому околі точки z_0, а в точці z_0 не аналітична. Будемо вважати, $z_0 \neq \infty$, тому що вивчення поводження функції в околі точки ∞ заміною z на $1/z$ зводиться до вивчення поводження функції $f(1/z)$ в околі точки $z = 0$.

Якщо функція f аналітична в проколотому околі $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ точки z_0, а в z_0 не визначена або не аналітична, то z_0 називається особливою точкою однозначного характеру функції f.

Якщо при цьому існує $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A \neq \infty$, то z_0 називається усувною особливою точкою. Наприклад, функція $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ має в точці z_0 усувну особливість.

Якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$, то z_0 називається полюсом. Наприклад, точка $z = 0$ є полюсом функції $f(z) = 1/z$.

Нарешті, якщо $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ не існує, то z_0 називається істотно особливою точкою. Наприклад, точка $z = 0$ є істотно особливою точкою функції $\exp\{1/z\}$.

6.3. УСУВНА ОСОБЛИВА ТОЧКА

Теорема 6.4. *Нехай z_0 — ізольована особлива точка функції f. Наступні три твердження еквівалентні: 1) z_0 є усувною особливою точкою функції f; 2) f обмежена в деякому околі точки z_0; 3) в розвиненні функції f в ряд Лорана в околі точки z_0 нема головної частини.*

Доведення. Якщо z_0 — усувна особлива точка функції f, то $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = A \neq \infty$ і, отже, f обмежена в деякому околі точки z_0. Тому 1) $\Rightarrow$ 2).

Доведемо, що 2) $\Rightarrow$ 3). Нехай

$$(\exists M > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z)\{0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z)| < M\}.$$

Розвинемо функцію f в ряд Лорана (5.4) з коефіцієнтами (5.5). Тоді

$$|a_n| \leq \frac{1}{2\pi}|\int\limits_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{M}{r^{n+1}}2\pi r = \frac{M}{r^n},$$

де $0 < r < \delta$. Якщо тепер $n < 0$, то, спрямовуючи $r \to 0$, маємо $a_n = 0$, тобто головної частини нема.

Нарешті, якщо в ряді (5.4) нема головної частини, то він є степеневим рядом, що збіжний у крузі без центру, а, отже, і в усьому крузі, задаючи там аналітичну (отже, неперервну) функцію. Звідси випливає, що $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = a_0$, тобто 3) $\Rightarrow$ 1). Теорема доведена.

Зауважимо, що одночасно довели нерівність Коші: якщо функція f аналітична в кільці $\{z : R_1 < |z - z_0| < R_2\}$ і розвивається в ряд Лорана (5.4), то

$$|a_n| \leq M(r)r^{-n},$$

де $M(r) = \max\{|f(z)| : |z - z_0| = r\}, R_1 < r < r_2$.

Надалі домовимося усувати усувну особливу точку, приймаючи $f(z_0) = \lim\limits_{z\to z_0} f(z)$.

Теорема 6.5 (Ліувілля). *Якщо ціла функція f обмежена в околі точки $z = \infty$, то $f(z) = const$.*

Доведення. Оскільки f — ціла функція, то її можна розвинути в ряд Тейлора з центром у точці $z = 0$ і радіусом збіжності $R = +\infty$. Цей же ряд можна розуміти як ряд Лорана функції f в околі точки $z = \infty$. А оскільки за теоремою 6.4 в цьому ряді нема головної частини, тобто нема членів з додатними степенями z, то $f(z) \equiv \text{const}$.

Наслідок (основна теорема алгебри). *Кожний многочлен степеня $n \in \mathbb{N}$ має, принаймні, один нуль.*

Дійсно, якби це було не так, то функція $f(z) = \dfrac{1}{P_n(z)}$, де P_n — многочлен, була б цілою. Оскільки $P_n(z) = a_n z^n + \cdots + a_0 = a_n z^n(1 + o(1))$ при $z \to \infty$, тобто $f(z) \to 0$ $(z \to \infty)$, то за теоремами 6.4 і 6.5 $f(z) \equiv \text{const}$, тобто $P_n(z) \equiv \text{const}$, що неможливо.

6.4. ПОЛЮС

Нехай z_0 — полюс функції f. Тоді $f(z) \to \infty$ $(z \to z_0)$, тобто існує окіл точки z_0, де $f(z) \neq 0$. Звідси випливає, що функція $g(z) = 1/f(z)$ є аналітичною в деякому проколотому околі точки z_0і $\lim\limits_{z \to z_0} g(z) = 0$. Отже, z_0 є усувною особливою точкою функції g, і g має в z_0 нуль. Таким чином, полюс функції f є нулем функції g. Тому природним є наступне означення: порядком полюса функції f в точці z_0 називається порядок нуля функції g в z_0. Наприклад, функція $w = 1/\sin z$ в точках $z_n = \pi n, n \in \mathbb{Z}$, має полюси першого порядку. Зауважимо, що точка $z = \infty$ не є ізольованою особливою точкою функції $w = 1/\sin z$, а є граничною точкою полюсів.

Теорема 6.6 (про канонічне зображення). *Для того щоб аналітична в проколотому околі точки z_0 функція f мала в z_0 полюс n-го порядку, необхідно і досить, щоб*

$$f(z) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \tag{6.2}$$

де функція ψ — аналітична в деякому околі точки z_0 і $\psi(z_0) \neq 0$.

Доведення. Якщо f має в z_0 полюс n-го порядку, то функція $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ має в z_0 нуль n-го порядку, і за теремою 6.2 $g(z) = (z - z_0)^n \varphi(z)$, де φ — аналітична в деякому околі точки z_0 функція і $\varphi(z_0) \neq 0$. Звідси випливає зображення (6.2) з $\psi(z) = \dfrac{1}{\varphi(z)}$.

Навпаки, якщо справедливе зображення (6.2), то для функції g справедливе зображення (6.1) з $\varphi(z) = \dfrac{1}{\psi(z)}$, тобто g має в z_0 нуль n-го порядку, і отже, f в z_0 має полюс n-го порядку.

Теорема 6.7. *Точка z_0 є полюсом n-го порядку аналітичної функції f тоді і тільки тоді, коли ряд Лорана для f в околі z_0 має вигляд*

$$\begin{aligned} f(z) &= a_{-n}(z - z_0)^{-n} + \cdots + a_0 + \cdots + \\ &\quad + a_k(z - z_0)^k + \cdots (a_n \neq 0), \text{ якщо } z_0 \neq \infty, \\ f(z) &= a_n z^n + \cdots + a_0 + \cdots + \\ &\quad + a_{-k} z^{-k} + \cdots (a_n \neq 0), \text{ якщо } z_0 = \infty. \end{aligned} \tag{6.3}$$

Доведення. Нехай $z_0 \neq \infty$ є полюсом n-го порядку функції f. Тоді за теоремою 6.6 справедлива рівність (6.2), де ψ — аналітична в деякому околі точки z_0 функція і $\psi(z_0) \neq 0$. Розвинемо функцію ψ в ряд Тейлора

$$\psi(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots, \quad c_0 \neq 0.$$

Тому

$$f(z) = \frac{c_0}{(z - z_0)^n} + \frac{c_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots, \quad c_0 \neq 0$$

і дістаємо (6.3), де $a_k = c_{n+k} (k \in \mathbb{Z})$.

Навпаки, нехай у деякому околі точки $z_0 \neq \infty$ виконується (6.3). Тоді

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n}(a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \cdots) = \frac{\psi(z)}{(z - z_0)^n}, \quad a_{-n} \neq 0,$$

де $\psi(z) = a_{-n} + a_{-n+1}(z - z_0) + \cdots$, тобто ψ — аналітична в цьому околі функція і $\psi(z_0) \neq 0$. Отримано зображення (6.2), і за теоремою 6.6 функція f має в z_0 полюс n-го порядку.

Якщо $z = \infty$, то цей випадок зводиться до попереднього заміною z на $1/z$. Теорему доведено.

Розглянемо раціональну функцію $R(z) = \dfrac{P(z)}{Q(z)}$, де P, Q — два многочлени такі, що дріб P/Q нескоротний. Ясно, що нулі чисельника P є нулями функції R, а нулі знаменника Q є полюсами функції R. Дослідимо поводження функції R в ∞. Запишемо

$$R(z) = \frac{a_n z^n + \cdots + a_0}{b_m z^m + \cdots + b_0} = z^{n-m} \frac{a_n + \cdots + a_0 z^{-n}}{b_m + \cdots + b_0 z^{-m}} = z^{n-m} \phi(z).$$

де, очевидно, функція ϕ аналітична в околі точки $z = \infty$ і $\phi(\infty) \neq 0$. Використовуючи теореми 6.2 і 6.6 про канонічні зображення, бачимо, що якщо $n \leq m$, то в ∞ функція R має усувну особливу точку, причому, якщо $n < m$, то вона має нуль порядку $m = n$. Якщо ж $n > m$, то в ∞ функція R має полюс порядку $n - m$.

6.5. ІСТОТНО ОСОБЛИВА ТОЧКА

Безпосередньо з означення істотно особливої точки і теорем 6.4 та 6.7 випливає наступне твердження.

Теорема 6.8. *Точка z_0 є істотно особливою точкою аналітичної функції f тоді і тільки тоді, коли в головній частині ряду Лорана функції f в околі точки z_0 є нескінченно багато членів.*

Теорема 6.9 (Сохоцького-Казораті). *Якщо z_0 — істотно особлива точка аналітичної функції f то, яке б не було $A \in \overline{\mathbb{C}}$ існує послідовність $z_n \to z_0$ $(n \to \infty)$ така, що $f(z_n) \to A$ $(n \to \infty)$.*

Доведення. Нехай спочатку $A = \infty$. Тоді у жодному проколотому околі точки z_0 функція f не може бути обмеженою, бо в протилежному випадку z_0 була б усувною особливою точкою. Оскільки z_0 — ізольована особлива точка, то для всіх досить великих $n \in \mathbb{N}$ функція f є аналітичною в проколотому околі $\{z : 0 < |z - z_0| < 1/n\}$. У кожному такому околі $(\exists z_n)$ $\{|f(z_n)| > n\}$, тобто існує послідовність (z_n) така, що $z_n \to z_0$ і $f(z_n) \to \infty$.

Якщо ж $A \neq \infty$, то можливі два варіанти: або в кожному проколотому околі точки z_0 рівняння $f(z) = A$ має корені, або існує проколотий окіл точки z_0 в якому $f(z) \neq A$. У першому випадку через z_n позначимо один з коренів рівняння $f(z) = A$ в $\{z : 0 < |z - z_0| < 1/n\}$ і цим самим вкажемо потрібну нам послідовність. У другому випадку нехай $\{z : 0 < |z - z_0| < \delta\}$ — проколотий окіл, де $f(z) \neq A$. Розглянемо в ньому функцію $F(z) = \dfrac{1}{f(z) - A}$. Вона є аналітичною в цьому проколотому околі, і оскільки $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$, то $\nexists \lim\limits_{z \to z_0} F(z)$, тобто z_0 — істотно особлива точка функції F. Тому за розглянeним вище випадком існує послідовність (z_n) така, що $z_n \to z_0$ і $F(z_n) \to \infty$.

Оскільки $f(z) = A + 1/F(z)$, то $f(z_n) \to A$ $(n \to \infty)$. Теорему доведено повністю.

Зауважимо, що з теорем 6.4 і 6.5 випливає, що якщо ціла функція не є тотожно сталою, то вона має в z_0, або полюс, або істотно особливу точку. У першому випадку вона — многочлен того самого степеня, який порядок полюса (див. теорему 6.7); у другому випадку вона називається трансцендентною цілою функцією. Прикладами таких цілих функцій є e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$.

6.6. ПРИНЦИП МАКСИМУМУ МОДУЛЯ

Нехай f — аналітична в замкненому крузі $\{z : |z - z_0| \leq r\}$ функція. За теоремою Тейлора розвинемо її в степеневий ряд (5.3), який є рівномірно збіжний на цьому замкненому крузі. Приймемо $z = z_0 + re^{i\phi}$. Тоді

$$f(z_0 + re^{i\phi}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\phi}$$

і

$$|f(z_0 + re^{i\phi})|^2 = f(z_0 + re^{i\phi})\bar{f}(z_0 + re^{i\phi}) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{in\phi} \sum_{k=0}^{\infty} \bar{a}_k r^k e^{-ik\phi} = \sum_{k,n=0}^{\infty} a_n \bar{a}_k r^{n+k} e^{i(n-k)\phi},$$

причому останній ряд рівномірно збіжний відносно $\phi \in [0, 2\pi]$, бо мажорується наступним рядом

$$\sum_{n,k=0}^{\infty} |a_k||a_n|r^{n+k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|r^n\right)^2 < +\infty.$$

Проінтегруємо його почленно

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\phi})\right|^2 d\phi = \sum_{n,k=0}^{\infty} a_n \bar{a}_k r^{n+k} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\phi} d\phi.$$

Оскільки

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(n-k)\phi} d\phi = \begin{cases} 0\ ,\ n \neq k, \\ 1\ ,\ n = k, \end{cases}$$

то маємо наступну рівність Парсеваля:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\phi})\right|^2 d\phi = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n}.$$

Теорема 6.10 (принцип максимуму модуля). *Якщо функція $f \not\equiv$ $\not\equiv const$ аналітична в області G, то її модуль не приймає в G найбільшого значення.*

Доведення. Припустимо, від супротивного, що $(\exists z_0 \in G)(\forall z \in G)$ $\{|f(z)| \leq |f(z_0)|\}$. Візьмемо замкнений круг $\overline{K} = \{z : |z - z_0| < r\}$ в цій області і розвинемо в ньому функцію f в ряд Тейлора. Тоді за рівністю Парсеваля маємо

$$|a_0|^2 = |f(z_0)|^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(z_0 + re^{i\phi})\right|^2 d\phi =$$

$$= |a_0|^2 + |a_1|^2 r^2 + \cdots + |a_n|^2 r^{2n} + \cdots ,$$

тобто $0 \geq |a_1|^2 r^2 + \cdots + |a_n|^2 r^{2n} + \cdots$, звідки випливає, що $a_n = 0$ для всіх $n \geq 1$ і, отже, $(\forall z \in \overline{K})\{f(z) \equiv a_0\}$, що неможливо, бо тоді за теоремою єдиності (наслідок 6 з теореми 6.3) $f(z) \equiv a_0$.

Наслідок 1. *Якщо функція f аналітична в обмеженій області G і неперервна на $\overline{G}$, то її модуль досягає свого найбільшого значення на ∂G, причому, якщо $f \not\equiv \text{const}$, то лише на ∂G.*

Справді, оскільки f неперервна на $\overline{G}$, то на $\overline{G}$ її модуль досягає свого найбільшого значення. За теоремою 6.10, якщо $f \not\equiv \text{const}$, цей максимум може досягатися тільки на ∂G.

Наслідок 2. *Нехай функції f і g аналітичні в обмеженій області G і неперервні на $\overline{G}$. Тоді*

$$(\forall z \in \partial G)\{f(z) = g(z)\} \Rightarrow (\forall z \in G)\{f(z) = g(z)\}.$$

Дійсно, покладемо $\phi = f - g$. Тоді функція ϕ аналітична в G, неперервна на $\overline{G}$ і $\max\{|\phi(z)| : z \in \partial G\} = 0$. Тому за попереднім наслідком $(\forall z \in G)\{\phi(z) = 0\}$, тобто $(\forall z \in G)\{f(z) = g(z)\}$.

Наслідок 2 містить у собі наслідок 1 з теореми 4.5.

Наведемо повне **доведення принципу збереження області**, який був сформульований у вигляді теореми 1.9. Якщо $z_0 \in G$ і відображення f конформне в z_0, то, як було показано при доведенні теореми 1.9, $w_0 = f(z_0)$ є внутрішньою точкою множини $f(G)$.

Нехай тепер $z_0 \in G$, функція f аналітична в околі точки z_0 та $f'(z_0) = 0$. Тоді f можна записати у вигляді

$$w = f(z) = w_0 + a_n(z - z_0)^n + a_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \cdots,$$

де $a_n \neq 0$, звідки

$$\sqrt[n]{w - w_0} = (z - z_0)\sqrt[n]{a_n + a_{n+1}(z - z_0) + \cdots}.$$

В досить малому околі точки z_0 візьмемо деяку однозначну вітку кореня, що стоїть у правій частині останньої рівності (таку вітку можна вибрати, бо $a_n \neq 0$) і позначимо її через $\psi(z)$. Очевидно, що $\psi(z_0) \neq 0$. Розглянемо тепер функцію $\varphi(z) = (z - z_0)\psi(z)$. Оскільки $\varphi'(z_0) = \psi(z_0) \neq 0$, то функція φ аналітична і здійснює конформне в точці z_0 відображення. Але $f(z) = w_0 + \varphi^n(z)$, $\varphi(z_0) \neq 0$, тобто є суперпозицією цілої лінійної функції, степеневої функції і функції φ. Звідси випливає, що внутрішня точка z_0 області G переходить у внутрішню точку w_0 множини $f(G)$. Отже, $f(G)$ — відкрита множина.

Доведемо її зв'язність. Нехай w_1 і w_2 — дві точки з множини $f(G)$, а z_1 і z_2 — деякі з їх прообразів. Оскільки G — область, існує крива $C = (z = z(t), a \le t \le b)$ така, що $z(a) = z_1, z(b) = z_2$ і $[C] \subset G$. Тоді для кривої $C_1 = (w = w(t) = f(z(t)), a \le t \le b)$ маємо $w(a) = w_1$, $w(b) = w_2$ і $[C_1] = f([C]) \subset f(G)$. Отже, множина $f(G)$ є зв'язною. Теорема 1.9 повністю доведена.

Теорема 1.9 дозволяє подати інше доведення принципу максимуму модуля (теореми 6.10). Дійсно, як і в попередньому доведенні цього принципу, припустимо, від супротивного, що $(\exists z_0 \in G)(\forall z \in G)$ $\{|f(z)| \le |f(z_0)|\}$. За теоремою 1.9 точка $w_0 = f(z_0)$ міститься в області $f(G)$ разом з певним своїм околом. У цьому околі існує точка $w_1, |w_1| > |w_0|$. Оскільки $w_1 \in f(G)$, то існує $z_1 \in G$ таке, що $f(z_1) = w_1$. Тому $|f(z_1)| > |f(z_0)|$, і ми прийшли до суперечності.

6.7. ПІДІЙМАЛЬНА СИЛА КРИЛА ЛІТАКА

Викладеного матеріалу досить для виводу формули підіймальної сили крила літака в плоско-паралельному потоці. Не будемо тут вводити інтеграли за допомогою інтегральних сум і наступного переходу до границі, а відразу оперуватимемо диференціалами, як це звичайно роблять у механіці. Надання міркуванням математичної строгості жодних труднощів не викликає.

Нехай задано замкнену жорданову криву C — "край крила", яка є однією із зв'язних компонент краю області $G, \text{ext}C \subset G$. Нехай в G задано векторне поле швидкостей v. При невеликій швидкості газу (меншій, ніж 100 м/с) можна вважати це поле соленоїдальним і безвихровим. Також припустимо, що v неперервна в $G \bigcup [C]$. Позначимо через $p(z)$ вектор тиску на крило в точці $z \in [C]$ (тиск означений тут як відношення сили до елемента довжини $|dz|$.) Тоді на крило діє сила $F = \int_C p(z)|dz|$.

З урахуванням того, що сила, яка діє на крило в точці $z \in [C]$ напрямлена по зовнішній нормалі відносно G, маємо $p(z)|dz| = |p(z)|idz$. Використаємо також рівняння Бернуллі для стаціонарної течії

$$|p(z)| + \frac{\rho}{2}|v(z)|^2 = \text{const},$$

де ρ — густина газу. Тоді

$$F = \int_C |p(z)| i\, dz = i \ \text{const} \int_C dz - \frac{i\rho}{2} \int_C |v(z)|^2 dz = -\frac{i\rho}{2} \int_C |v(z)|^2 dz.$$

Нехай $dz = |dz| e^{i\phi}$. Ясно, що тоді $v(z) = \pm |v(z)| e^{i\phi}$, $|v(z)|^2 = (v(z))^2 e^{-2i\phi}$ і $|v(z)|^2 dz = (v(z))^2 e^{-i\phi} dz$. Тому

$$F = -\frac{i\rho}{2} \int_C (v(z))^2 \overline{dz}.$$

Якщо тепер приймемо $f(z) = \overline{v(z)}$, то, як було показано в розділі 1.5, f є аналітичною функцією в області G, а попередню формулу можна записати так:

$$F = -\frac{i\rho}{2} \int_C \overline{(f(z))}^{\,2} \ \ \overline{dz}.$$

Якщо в цій формулі перейти до спряжених величин, то дістанемо наступну формулу Чаплигіна (1910 р.):

$$\overline{F} = \frac{i\rho}{2} \int_C f^2(z) dz. \tag{6.4}$$

Розглянемо випадок, коли $G = \text{ext } C$. Очевидно, що швидкість $v(z)$ — величина обмежена, а з нею і функція f. Тому f має в точці ∞ усувну особливу точку і в околі цієї точки розвиненння

$$f(z) = c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots . \tag{6.5}$$

Звідси випливає, що

$$f^2(z) = {c_0}^2 + \frac{2c_0 c_{-1}}{z} + \cdots . \tag{6.6}$$

Нехай розвинення (6.5), а з ним і (6.6), справедливі в $\{z : R < |z| < +\infty\}$. Позначимо $C_0 = \{z : |z| = R + 1\}$. Тоді за теоремами 4.3, 5.5 та лемою 4.1 матимемо

$$\int_C f^2(z) dz = \int_{C_0} f^2(z) dz = 4\pi i c_0 c_{-1} \tag{6.7}$$

і

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_0} f(z)dz = 2\pi i c_{-1}. \tag{6.8}$$

Але (див. розділ 4.1)

$$\int_C f(z)dz = \Gamma_C + iN_C, \tag{6.9}$$

де Γ_C — циркуляція векторного поля v вздовж C, а N_C — потік цього поля через C.

Очевидно, що потік, який обтікає $[C]$, є вектор, напрямлений по дотичній до C або в протилежному напрямі, і тому $N_C = 0$. Із (6.8) і (6.9) випливає, що $c_{-1} = \Gamma_C(2\pi i)^{-1}$, а з (6.5) знаходимо, що $c_0 = f(\infty) = \overline{v}(\infty)$. Підставляючи ці значення в (6.7) і використовуючи (6.4), маємо $\overline{F} = i\rho\overline{v}(\infty)\Gamma_C$. З огляду на те, що ρ і Γ_C — дійсні числа, випливає знаменита формула підіймальної сили літака Жуковського (1906 р.)

$$F = -i\rho v(\infty)\Gamma_C.$$

Зауважимо, що припущення $G = \text{ext}\, C$ приводить до істотних помилок при невеликій висоті польоту, злеті та посадці літака.

Розділ 7

ТЕОРІЯ ЛИШКІВ

7.1. ОЗНАЧЕННЯ ТА ФОРМУЛИ ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЛИШКІВ

Нехай $z_0 \neq \infty$ — ізольована особлива точка однозначного характеру аналітичної функції f. Отже, функція f аналітична в проколотому околі $\{z : 0 : |z - z_0| < \delta\}$. Лишком функції f у точці z_0 називається величина

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz, \quad 0 < r < \delta.$$

За наслідком з теореми 4.3 лишок від r не залежить.

Нехай тепер $z_0 = \infty$ — ізольована точка однозначного характеру для функції f, тобто f аналітична в деякому проколотому околі $\{z : R < < |z| < +\infty\}$. Лишком функції f в точці ∞ називається величина

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=r} f(z)dz, \quad R < r < \infty.$$

Якщо розвинемо в проколотому околі $\{z :< |z - z_0| < \delta\}$ функцію f в ряд Лорана (5.4) з коефіцієнтами a_n, визначеними формулами (5.5), і в (5.5) візьмемо $n = -1$ то легко дістанемо рівність

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1}. \tag{7.1}$$

У випадку, коли $z_0 = \infty$, аналогічно маємо

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -a_{-1}. \tag{7.2}$$

Формули (7.1) і (7.2) можна було б вважати означеннями лишків. З них випливає, що лишок в усувній особливій точці $z_0 \neq \infty$ дорівнює нулю. Якщо ж $z_0 = \infty$ є усувною особливою точкою, то лишок не обов'язково дорівнює нулю, бо член a_{-1}/z входить у правильну (а не в головну) частину ряду Лорана. Проте, якщо f має в ∞ нуль принаймні другого порядку, то $a_{-1} = 0$ і, отже, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$. Якщо ж f має в ∞ нуль першого порядку, то $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = a_{-1} \neq 0$.

Якщо z_0 — істотно особлива точка, то для обчислення лишку слід використовувати формули (7.1) і (7.2).

У випадку, коли z_0 — полюс, можна вивести спеціальну формулу для обчислення лишку. Нехай $z_0 \neq \infty$ і $f(z) = (z - z_0)^m \psi(z)$, де функція $\psi(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + \cdots$ аналітична в деякому околі точки z_0,$b_0 \neq 0$. Оскільки $b_k = \psi^{(k)}(z_0)/k!$ і $a_{-1} = b_{m-1}$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\psi^{(m-1)}(z_0) = \frac{1}{(m-1)!}\,\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z - z_0)^m f(z)\}_{z=z_0} =$$

$$= \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\{(z - z_0)^m f(z)\}. \tag{7.3}$$

Формулою (7.3) можна користуватися, коли f має в z_0 полюс m-го порядку (тоді $\psi(z_0) \neq 0$). Але вона корисна і в більш загальній ситуації. Наприклад, для функції $f(z) = z^{-3}\sin z$ точка $z = 0$ є полюсом другого порядку. Проте зручніше використовувати не канонічне зображення, а взяти $m = 3, \psi(z) = \sin z$. Тоді $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{2!}(\sin z)''|_{z=0} = 0$.

Якщо $z_0 \neq \infty$ — полюс першого порядку, то з (7.3) маємо

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}(z - z_0)f(z).$$

Якщо $f = \psi/\varphi$ і φ має в z_0 нуль першого порядку, а $\psi(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0}\frac{(z - z_0)\psi(z)}{\varphi(z)} = \lim_{z\to z_0}\frac{(z - z_0)\psi(z)}{\varphi(z) - \varphi(z_0)} = \frac{\psi(z_0)}{\varphi'(z_0)}.$$

Виведеними формулами не можна користуватися, коли точка ∞ буде полюсом функції f. Але, якщо перейдемо до функції $f(1/z)$ і проробимо аналогічну до розглянутого випадку процедуру, то знайдемо формулу для обчислення лишку, коли $z_0 = \infty$ є полюсом m-го порядку,

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{(m+1)!}\frac{d^{m+1}}{dz^{m+1}}\left\{z^m f\left(\frac{1}{z}\right)\right\}\right).$$

Зауважимо, що з означення лишку випливає рівність

$$\operatorname*{res}_{z=z_0}\sum_{j=1}^{n} f_j(z) = \sum_{j=1}^{n}\operatorname*{res}_{z=z_0} f_j(z).$$

Зауважимо також, що якщо функція f парна, то її лишки в 0 і ∞ дорівнюють нулю. Дійсно, якщо запишемо $f(z) = \dfrac{1}{2}(f(z) + f(-z))$, то побачимо, що в ряді Лорана функції f в околі $z = 0$ або $z = \infty$ відсутні непарні степені z, отже, $a_{-1} = 0$. Наприклад, для розглянутої функції $f(z) = z^{-3}\sin z$ без жодних обчислень відразу можна стверджувати, що $\operatorname*{res}_{z=0} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

7.2. ОСНОВНА ТЕОРЕМА ПРО ЛИШКИ

Теорема 7.1. *Нехай функція f аналітична в замкненій області $\overline{G}$, обмеженій скінченним числом замкнених жорданових кривих, за винятком скінченної кількості ізольованих точок $z_1, z_2, \cdots, z_q \in G$. Тоді*

$$\int_{\partial G} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{q}\operatorname*{res}_{z=z_k} f(z).$$

Доведення. Побудуємо круги K_j з центрами в z_j так, щоб $K_j \subset G$ для всіх $j = 1, 2, \cdots, q$ і $\overline{K_j} \cap \overline{K_l} = \oslash$ при $j \neq l$. Нехай $D = G \setminus \bigcup_{j=1}^{q} \overline{K_j}$. Тоді за теоремою 4.2 $\int_{\partial D} f(z)dz = 0$, звідки легко одержуємо, що

$$0 = \int_{\partial G} f(z)dz - \sum_{j=1}^{q}\int_{\partial K_j} f(z)dz = \int_{\partial G} f(z)dz - 2\pi i\sum_{j=1}^{q}\operatorname*{res}_{z=z_j} f(z),$$

тобто маємо потрібну рівність.

Використовуючи теорему 7.1 (основну теорему про лишки), легко довести наступне твердження.

Теорема 7.2. *Нехай функція f аналітична в $\mathbb{C}$ за винятком скінченної кількості точок $z_1, z_2, \cdots, z_{q-1}$ і нехай $z_q = \infty$. Тоді*

$$\sum_{k=1}^{q} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = 0.$$

Доведення. Візьмемо круг K з центром в $z = 0$ так, щоб він містив всі точки $z_1, z_2, \cdots, z_{q-1}$. За теоремою 7.1

$$\sum_{k=1}^{q-1} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(z)dz.$$

З іншого боку,

$$\operatorname*{res}_{z=z_q} f(z) = \operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} f(z)dz.$$

З цих двох рівностей випливає потрібна формула.

Грунтуючись на теоремі 7.2, подамо нове доведення основної теореми алгебри (див. наслідок з теореми 6.5). Припустимо від супротивного, що многочлен P степеня $n \geq 1$ не має нулів. Тоді $f = P'/P$ — ціла функція. Степінь многочлена P' дорівнює $n-1$, тому раціональна функція f має в ∞ нуль першого порядку (див. розділ 6.6), а отже, $\operatorname*{res}_{z=\infty} f(z) \neq 0$. У скінченній площині функція f особливих точок не має, що суперечить теоремі 7.2.

Нижче вкажемо застосування основної теореми про лишки до обчислення деяких інтегралів.

7.3. ІНТЕГРАЛИ ВІД ТРИГОНОМЕТРИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Нехай R — раціональна функція двох змінних, $m \in \mathbb{Z}_+, n \in \mathbb{Z}_+$, а

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos m\theta, \sin n\theta)d\theta,$$

причому підінтегральна функція при жодних θ не дорівнює ∞. Зробимо заміну $z = e^{i\theta}$. Тоді $dz = ie^{i\theta}d\theta\,, d\theta = \dfrac{dz}{iz}$ і

$$\cos m\theta = \frac{1}{2}(e^{im\theta} + e^{-im\theta}) = \frac{1}{2}(z^m + z^{-m}), \quad \sin n\theta = \frac{1}{2i}(z^n - z^{-n}).$$

Отже, ми одержуємо

$$I = \int\limits_{|z|=1} Q(z)dz, \quad Q(z) = \frac{1}{iz} R\left(\frac{1}{2}(z^m + z^{-m}), \frac{1}{2i}(z^n - z^{-n})\right).$$

Ясно, що Q — раціональна функція, особливими точками якої є полюси, які позначимо через b_j. На колі $\{z : |z| = 1\}$ особливих точок нема. Тому за теоремою 7.1

$$I = 2\pi i \sum_{|b_j|<1} \operatorname*{res}_{z=b_j} Q(z).$$

7.4. ОБЧИСЛЕННЯ НЕВЛАСТИВИХ ІНТЕГРАЛІВ

Лема 7.1. *Нехай функція f аналітична в замкненій півплощині $\{z : Imz \geq 0\}$, за винятком скінченної кількості точок, і*

$$(\exists M > 0)(\exists R_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z,\, |z| > R_0,\, Imz \geq 0)\{|f(z)| \leq M|z|^{-1-\delta}\}.$$

Тоді

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0, \quad C_R = (z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi).$$

Доведення. При $R > R_0$ маємо

$$|\int_{C_R} f(z)dz| \leq MR^{-1-\delta}\pi R = \pi MR^{-\delta} \to 0 \quad (R \to +\infty),$$

що й треба було довести.

Зауваження. Умови леми 7.1 виконуються, якщо f аналітична в $\{z : \mathrm{Im} z \geq 0\}$, за винятком скінченної кількості точок, а в ∞ має нуль принаймні другого порядку, тобто $f(z) = \varphi(z)z^{-m}, m \geq 2$, де функція φ аналітична в околі точки ∞ і $\varphi(\infty) \neq 0$.

Теорема 7.3. *Якщо f задовольняє умови леми 7.1 і на дійсній осі не має особливих точок, то*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dx = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z), \tag{7.4}$$

де $\{z_k\}$ — множина особливих точок функції f в $\{z : \mathrm{Im}z > 0\}$.

Доведення. Оскільки $|f(x)| \leq M|x|^{-1-\delta}$ при $|x| > R_0$, то інтеграл у лівій частині (7.4) абсолютно збіжний. Візьмемо $R > R_0$ настільки великим, щоб усі точки множини $\{z_k\}$ містилися в області $\{z : \mathrm{Im}z > 0, |z| < R\}$. Тоді за теоремою 7.1

$$\int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{Imz_k>0} \operatorname*{res}_{z=z_k} f(z). \tag{7.5}$$

Але за лемою 7.1

$$\int_{C_R} f(z)dz \to 0, \quad \int_{-R}^{R} f(x)dx \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

при $R \to +\infty$. Тому з (7.5) маємо (7.4).

7.5. ЛЕМА ЖОРДАНА ТА ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Лема 7.2 (Жордана). *Нехай функція f аналітична в замкненій верхній півплощині $\{z : \mathrm{Im}z \geq 0\}$, за винятком скінченної кількості точок, і $\max\{|f(z)| : z \in C_R\} = \alpha_R \to 0$ $(R \to \infty)$, де $C_R = (z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi)$. Тоді, якщо $a > 0$ то*

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz = 0.$$

Доведення. Зробимо заміну $z = Re^{i\varphi}$. Тоді $dz = Rie^{i\varphi}d\varphi$, $|dz| = Rd\varphi$, і, використовуючи нерівність $\sin\varphi \geq 2\varphi/\pi$ при $0 \leq \varphi \leq \pi/2$, дістаємо

$$|\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz| = \int_{C_R} |f(z)||e^{iaz}||dz| \leq R\alpha_R \int\limits_0^{\pi} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi =$$

$$= 2R\alpha_R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}d\varphi \leq 2R\alpha_R \int\limits_0^{\pi/2} e^{-2aR\varphi/\pi}d\varphi =$$

$$= \frac{\pi}{a}\alpha_R(1 - e^{-aR}) \to 0\,(R \to +\infty),$$

що й треба було довести.

Нехай функція f аналітична у замкненій півплощині $\{z : \mathrm{Im}z \geq 0\}$, за винятком скінченної кількості точок $z_1, z_2, \cdots, z_n$ з півплощини $\{z : \mathrm{Im}z > 0\}$ і полюсів першого порядку $x_1, x_2, \cdots, x_m$, які лежать на дійсній осі. Нехай

$$J = v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{iax}dx = \lim_{R\to+\infty} \lim_{\varepsilon\to 0} J_{R,\varepsilon},$$

де

$$J_{R,\varepsilon} = \int_{I_{R,\varepsilon}} f(x)e^{iax}dx,\ a > 0,$$

і

$$I_{R,\varepsilon} = [-R, R] \setminus \bigcup_{k=1}^{m} (x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k),\ \varepsilon_k > 0,\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots + \varepsilon_m.$$

Теорема 7.4. *Якщо при цьому* $\max\{|f(z)| : z \in C_R\} = \alpha_R \to 0$ $(R \to +\infty)$, *де* $C_R = (z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \pi)$, *то*

$$J = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} (f(z)e^{iaz}) + \pi i \sum_{k=1}^{m} \operatorname*{res}_{z=x_k} (f(z)e^{iaz}). \tag{7.6}$$

Доведення. Позначимо через γ_k, $k = 1, 2, \cdots, m$, верхнє півколо з центром у точці x_k і радіусом ε_k. Числа ε_k беремо настільки малими, щоб ці півкола не перетинались. Візьмемо R настільки великим, щоб усі $|z_k| < R, |x_k| < R$, і розглянемо область G, обмежену півколом C_R, півколами γ_k і відрізками дійсної осі (рис. 7.1).

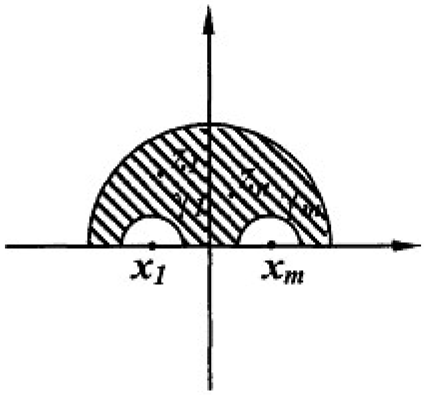


Рис. 7.1

За основною теоремою про лишки

$$2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} (f(z)e^{iaz}) = \int_{\partial G} f(z)e^{iaz}dz =$$

$$= \int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz + J_{R,\varepsilon} + \sum_{k=1}^{m} \int_{\gamma_k^-} f(z)e^{iaz}dz. \tag{7.7}$$

За лемою Жордана $\int_{C_R} f(z)e^{iaz}dz \to 0(R \to +\infty)$. Функцію $f(z)e^{iaz}$ в околі точки $z = x_k$ можна записати у вигляді

$$f(z)e^{iaz} = \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - x_k} + h_k(z),$$

де h_k — аналітична в цьому околі функція. Тому, якщо ε_k досить мале, одержуємо

$$\int_{\gamma^-{}_k} f(z)e^{iaz}dz = -\int_{\gamma_k} \left\{ \frac{c_{-1}^{(k)}}{z - x_k} + h_k(z) \right\} dz =$$

$$= -c_{-1}^{(k)} \int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - x_k} - \int_{\gamma_k} h_k(z)dz \to -\pi i c_{-1}^{(k)} =$$

$$= -\pi \operatorname*{res}_{z=x_k} (f(z)e^{iaz}) \quad (\varepsilon_k \to 0),$$

бо, використовуючи заміну $z - x_k = \varepsilon_k e^{i\varphi}$, маємо

$$\int_{\gamma_k} \frac{dz}{z - x_k} = \int\limits_0^\pi \frac{ie^{i\varphi} d\varphi}{e^{i\varphi}} = \pi i,$$

а, оскільки функція h_k обмежена деяким числом M у відповідному околі, то

$$\left| \int\limits_{\gamma_k} h_k(z)dz \right| \le M\pi\varepsilon_k \to 0 \quad (\varepsilon_k \to 0).$$

Отже, спрямовуючи $\varepsilon \to 0$ і $R \to +\infty$, з формули (7.7) дістаємо рівність (7.6).

Наслідок 1. *Якщо функція f задовольняє умови леми Жордана і на дійсній осі не має особливих точок, а $a > 0$, то*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{iax} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} (f(z)e^{iaz}).$$

Нехай f задовольняє умови цього наслідку і $\operatorname{Im} f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}$. Тоді з нього, з огляду на рівність $e^{iax} = \cos ax + i\sin ax$, при $a > 0$ маємо

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos ax dx = \operatorname{Re}\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} (f(z)e^{iaz})\}$$

та

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin ax dx = \operatorname{Im}\{2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{res}_{z=z_k} (f(z)e^{iaz})\}.$$

Наслідок 2. *Справедлива рівність*

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} e^{iax} dx = i\pi \quad (a > 0).$$

Дійсно, якщо в теоремі 7.4 візьмемо $f(z) = 1/z$ і зауважимо, що $\operatorname{res}_{z=0}(1/z) = 1$, то з (7.6) дістанемо потрібну рівність.

Оскільки $\sin ax = \mathrm{Im} e^{iax}$, то при $a > 0$ за наслідком 2

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{1}{2} \mathrm{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x} e^{iax} dx = \frac{\pi}{2}.$$

7.6. ОБЧИСЛЕННЯ ІНТЕГРАЛІВ ЗА ДОПОМОГОЮ ВИБОРУ ОДНОЗНАЧНОЇ ВІТКИ

В усіх попередніх випадках розглядались однозначні аналітичні функції. Проте, якщо контур інтегрування можна вибрати так, щоб у його внутрішності можна було вибрати однозначну вітку підінтегральної многозначної функції, то теорію лишків зможемо застосувати до цієї вітки і обчислити потрібний інтеграл. Розглянемо, наприклад, наступний інтеграл

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x) dx, 0 < \alpha < 1.$$

Нехай функція f аналітична в $\mathbb{C}$, за винятком скінченної кількості особливих точок $z_1, z_2, \cdots, z_q$, які не лежать на додатній дійсній півосі, і нехай точка $z = \infty$ є нулем функції f. За таких умов в області $G = \{z : 0 < \arg z < 2\pi\}$ виберемо однозначну вітку многозначної функції $z^{\alpha-1}$ так, щоб $0 < \arg z < 2\pi$. Нехай $\varphi(z) = z^{\alpha-1} f(z)$. Розглянемо контур, зображений на рис. 7.2. За основною теоремою про лишки маємо

$$\int_{\gamma_1} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{C_R} z^{\alpha-1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} z^{\alpha-1} f(z) dz +$$

$$+\int_{C_\rho^-} z^{\alpha-1} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{q} \operatorname*{res}_{z=z_q} \varphi(z). \qquad (7.8)$$

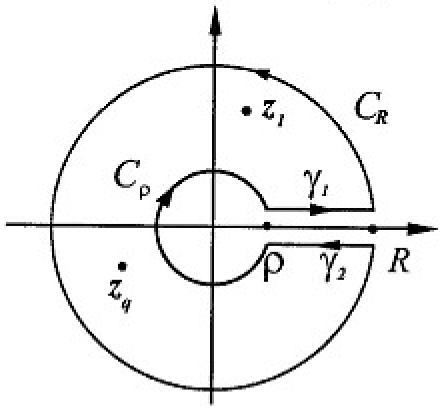


Рис. 7.2

Розглянемо кожний доданок у лівій частині (7.8). Оскільки за умовою в околі точки $z = \infty$ для функції f має місце оцінка $|f(z)| \le M/|z|$, де $M = \text{const} > 0$, то для другого доданка матимемо

$$\left|\int_{C_R} z^{\alpha-1} f(z)dz\right| \le \frac{M}{R} R^{\alpha-1} 2\pi R = \frac{2\pi M}{R^{1-\alpha}} \to 0 \quad (R \to +\infty).$$

За умовою для функції f в околі точки $z = 0$ виконується $|f(z)| \le M_1$, де $M_1 = \text{const} > 0$. Тому для четвертого доданка маємо

$$\left|\int_{C_\rho^-} z^{\alpha-1} f(z)dz\right| \le M_1 \rho^{\alpha-1} 2\pi\rho = 2\pi M_1 \rho^\alpha \to 0 \quad (\rho \to 0).$$

Перший доданок дорівнює

$$\int_\rho^R x^{\alpha-1} f(x)dx.$$

Третій доданок — це інтеграл вздовж нижнього берега розрізу, де $\arg z = 2\pi$, отже, $z = xe^{2\pi i}$ і $z^{\alpha-1} = x^{\alpha-1} e^{2\pi i(\alpha-1)} = x^{\alpha-1} e^{2\pi i\alpha}$. Тому третій доданок дорівнює

$$-e^{2\pi i\alpha} \int_\rho^R x^{\alpha-1} f(x)dx.$$

Об'єднуючи ці співвідношення, при $\rho \to 0$ і $R \to \infty$ дістаємо

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} f(x)dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2\pi i \alpha}} \sum_{k=1}^{q} \operatorname*{res}_{z=z_q} (z^{\alpha-1} f(z)) =$$

$$= -\frac{\pi}{\sin\pi\alpha} e^{-\pi i \alpha} \sum_{k=1}^{q} \operatorname*{res}_{z=z_q} (z^{\alpha-1} f(z)), \quad 0 < \alpha < 1.$$

7.7. ЛОГАРИФМІЧНИЙ ЛИШОК

Нехай функція f аналітична в області G, за винятком скінченної кількості точок, які є полюсами. Функція $\varphi = f'/f$ називається логарифмічною похідною функції f. Якщо $z_0 \in G$ — нуль функції f порядку n, то $f(z) = \psi_1(z)(z - z_0)^n$, де функція ψ_1 аналітична у деякому околі точки z_0 і $\psi_1(z_0) \neq 0$. Звідси маємо $f'(z) = (z - z_0)^n \psi_1'(z) + n(z - z_0)^{n-1} \psi(z)$, тобто $\varphi = \dfrac{f'(z)}{f(z)} = \dfrac{\psi_1'(z)}{\psi_1(z)} + \dfrac{n}{z - z_0}$. Отже, в точці z_0 функція φ має полюс першого порядку і

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \varphi(z) = \operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = n. \tag{7.9}$$

Якщо ж $z_0 \in G$ — полюс порядку p функції f, то $f(z) = \psi_2(z)\ (z - z_0)^{-p}$, де функція ψ_2 аналітична в деякому околі точки z_0 і $\psi_2(z_0) \neq 0$. Тому $\varphi(z) = \dfrac{\psi_2'(z)}{\psi_2(z)} - \dfrac{p}{z - z_0}$, тобто φ в точці z_0 має також полюс першого порядку, але

$$\operatorname*{res}_{z=z_0} \varphi(z) = \operatorname*{res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)} = -p. \tag{7.10}$$

Теорема 7.5 (принцип аргументу). *Нехай область G обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих, а функція f аналітична в $\overline{G}$, за винятком скінченної кількості полюсів, причому на ∂G функція f не має нулів і полюсів. Тоді*

$$N - P = \frac{1}{2\pi} \Delta_{\partial G} \operatorname{Arg} f(z),$$

де N — кількість нулів, а P — кількість полюсів функції f в області G з урахуванням їх порядків.

Доведення. Застосуємо теорему 7.1 до функції f'/f. Тоді, враховуючи (7.9) і (7.10), маємо

$$\int\limits_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi \sum_{z_k \in G} res \frac{f'(z)}{f(z)} = 2\pi i(N-P). \tag{7.11}$$

З іншого боку, многозначною первісною для f'/f є $\mathrm{Ln}\, f$. Тому

$$\int_{\partial G} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \Delta_{\partial G} \mathrm{Ln}\, f = i\Delta_{\partial G} \mathrm{Arg}\, f. \tag{7.12}$$

З (7.11) і (7.12) дістаємо потрібну рівність.

Теорема 7.6 (Руше). *Нехай область G обмежена скінченним числом замкнених жорданових кривих, а функції f і g аналітичні в замкненій області $\overline{G}$ і $(\forall z \in \partial G)\{|g(z)| < |f(z)|\}$. Тоді функції $f+g$ і f мають в G однакову кількість нулів (з урахуванням порядків).*

Доведення. Позначимо через $N(f)$ і $N(f+g)$ кількість нулів відповідно функцій f і $f+g$ в G з урахуванням їх порядків. Оскільки функції f і $f+g$ аналітичні в G і не мають на ∂G нулів, то за теоремою 7.5

$$N(f) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\mathrm{Arg}\, f, \quad N(f+g) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\mathrm{Arg}\,(f+g),$$

звідки

$$N(f+g) - N(f) = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\{\mathrm{Arg}\,(f+g) - \mathrm{Arg}\, f\} = \frac{1}{2\pi}\Delta_{\partial G}\mathrm{Arg}\,(1+\frac{g}{f}).$$

Розглянемо функцію $w = 1 + \dfrac{g(z)}{f(z)}$. При обході точкою z однієї замкненої жорданової кривої на краю ∂G відповідна точка w опише деяку замкнену криву C, яка з огляду на те, що $(\forall z \in \partial G)$ $\{|g(z)| < |f(z)|\}$, лежатиме в крузі $\{w : |w-1| < 1\}$. Але в ньому можна вибрати однозначну вітку $\mathrm{Arg}\, w$. Отже $\Delta_C \mathrm{Arg}\, w = 0$, і теорема 7.6 доведена.

Наслідок (основна теорема алгебри). *Многочлен n-го степеня має в $\mathbb{C}$ рівно n нулів (з урахуванням їх порядків).*

Справді, запишемо многочлен $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$, у вигляді $P_n = f + g$, де $f(z) = a_n z^n$ і $g(z) = a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Оскільки $\dfrac{g(z)}{f(z)} = \dfrac{a_{n-1}}{a_n}\dfrac{1}{z} + \ldots + \dfrac{a_0}{a_n}\dfrac{1}{z^n} \to 0$ при $z \to \infty$, то

$$(\exists R_0 > 0)(\forall R > R_0)(\forall z)\{|z| = R \Rightarrow |g(z)| < |f(z)|\}.$$

За теоремою Руше кількості нулів функцій P_n і f в $\{z : |z| < R\}$ збігаються. Оскільки f має в $z = 0$ нуль n-го порядку, то з цим наслідок доведений.

Можна дати інше доведення цього наслідку, яке спирається не на теорему Руше, а на рівність (7.9). Дійсно, функція $f(z) = P'(z)/P(z)$ має в $\mathbb{C}$ скінченну кількість полюсів $z_1, z_2, \cdots, z_{q-1}$ у нулях P. Тому $\sum\limits_{j=1}^{q-1} \operatorname*{res}\limits_{z=z_j} f(z) = N(P)$. З іншого боку, $\operatorname*{res}\limits_{z=\infty} f(z) == \lim\limits_{z\to\infty}(-zP'(z)/P(z)) = = -n$. Використовуючи тепер теорему 7.2 маємо $N(P) - n = 0$.

На завершення цього розділу доведемо теорему 3.4 **про вибір однозначної вітки аргументу в області.**

Нехай в області G можна вибрати однозначну вітку ($\arg z$) аргументу, і припустимо, від супротивного, що кожна однозв'язна область D яка містить G, містить також і точку $z = 0$. Тоді в G існує замкнена жорданова крива C^* така, що $0 \in \operatorname{int} C^*$, оскільки $D \supset \cup \operatorname{int} C \supset G$, де об'єднання береться по всіх замкнених жорданових кривих $C, [C] \subset G$, і $\cup \operatorname{int} C$ є однозв'язною областю. Оскільки $\operatorname{Ln} z$ є многозначною первісною для $1/z$, то

$$0 = i\Delta_{C^*}(\arg z) = i\Delta_{C^*} \operatorname{Arg} z = \Delta_{C^*} \operatorname{Ln} z =$$
$$= \int_{C^*} \frac{dz}{z} = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=0} \frac{1}{z} = 2\pi i,$$

що неможливо.

Навпаки, якщо існує однозв'язна область D така що $G \subset D$ і $0 \notin D$, то функція $1/z$ аналітична в D і за теоремою 4.1 $\int_C 1/z \ \ dz = 0$ для кожної замкненої кривої C, $[C] \subset G$. Тому, як і раніше, $\Delta_C \operatorname{Arg} z = 0$ і за теоремою 3.3 в G можна вибрати однозначну вітку аргументу. Теорема 3.4 доведена.

Розділ 8

АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ

8.1. БЕЗПОСЕРЕДНЄ АНАЛІТИЧНЕ ПРОДОВЖЕННЯ

Функціональним елементом називається пара (G, f), де G — область, а F — аналітична в G функція.

Нехай (G_1, f_1) і (G_2, f_2) — два функціональні елементи такі, що $D = G_1 \bigcap G_2 \neq \oslash$. Якщо $(\forall z \in D)\{f_1(z) = f_2(z)\}$, то говоритимемо, що один з цих елементів є безпосереднім аналітичним продовженням іншого, або, наприклад, функція f_2 є безпосереднім аналітичним продовженням функції f_1 з області G_1 на область G_2.

Наприклад, нехай $G_1 = \{z : |z| < 1\}$, $G_2 = \{z : |z - i| < \sqrt{2}\}$ і

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \ f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1-i} \left(\frac{z-i}{1-i} \right)^n .$$

Тоді $D = G_1 \bigcap G_2 \neq 0$. Оскільки в D виконується $|z| < 1$, $|z - i|/|1 - i| < 1$, то в D маємо $f_1(z) = \dfrac{1}{(1-z)}$ і $f_2(z) = \dfrac{1}{1-i} \dfrac{1}{1-(z-i)/(1-i)} = \dfrac{1}{(1-z)}$. Отже, такі функціональні елементи є безпосереднім аналітичним продовженням один одного. Якщо візьмемо елемент (G_3, f_3), де $G_3 = \overline{C} \backslash \{1\}$, а $f_3(z) = \dfrac{1}{(1-z)}$, то він буде безпосереднім аналітичним продовженням елементів (G_1, f_1) і (G_2, f_2).

Зауважимо, що $G_1 \bigcap G_2$ не обов'язково є областю (рис. 8.1, *а*).

Теорема 8.1 (єдиності). *Якщо* $(G_2, f_2^{(1)})$ *і* $(G_2, f_2^{(2)})$ *є безпосереднім аналітичним продовженням елемента* (G_1, f_1), *то* $(\forall z \in G_2)$ $\{f_2^{(1)}(z) = f_2^{(2)}(z)\}$.

Доведення. Очевидно, що $D = G_1 \bigcap G_2 \subset G_2$. За умовою теореми $(\forall z \in D)\{f_1(z) = f_2^{(1)}(z) \wedge f_1(z) = f_2^{(2)}(z)\}$, звідки $(\forall z \in D)\{f_2^{(1)}(z) = f_2^{(2)}(z)\}$, і за наслідком 6 з теореми 6.2 $(\forall z \in G_2)\{f_2^{(1)}(z) = f_2^{(2)}(z)\}$.

Нехай функція f аналітична в області G і $z_0 \in \partial G$. Якщо існує круг $K = \{z : |z - z_0| < r\}$ такий, що з кожної зв'язної компоненти перетину $K \bigcap G$ функцію f можна безпосередньо аналітично продовжити на K то говоритимемо, що f безпосередньо аналітично продовжувана через точку z_0. Наприклад, функцію $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ можна безпосередньо аналітично продовжити через кожну точку кола $\{z : |z| = 1\}$ крім точки $z = 1$.

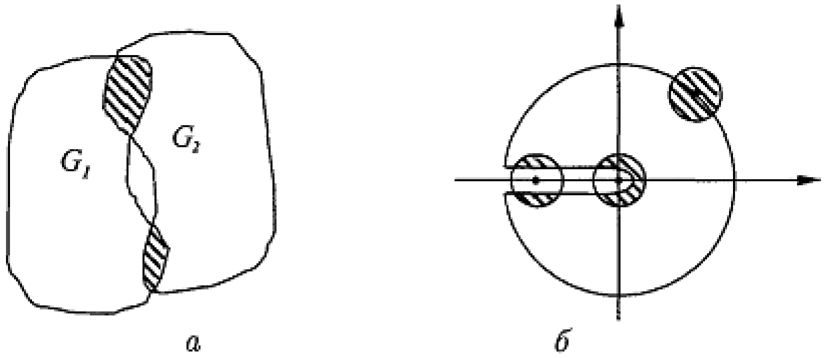


Рис. 8.1

Розглянемо ще приклад. Нехай G — область, зображена на рис. 8.1, *б*, а $f(z) = \sqrt{z}$ — вибрана в G фіксована неперервна вітка квадратного кореня. Через кожну точку кола цю функцію можна, очевидно, аналітично продовжити єдиним чином. Через точку $z = 0$ продовжити її безпосередньо аналітично не можна, бо інакше існувала б функція, аналітична в деякому околі точки $z = 0$, яка б у деякій точці $-a^2 < 0$ набувала значення ia і $-ia$ одночасно, що неможливо. Нарешті, якщо z_0 лежить на від'ємній дійсній півосі, то через неї f можна безпосередньо аналітично продовжити з нижньої компоненти перетину G з кругом K і верхньої компоненти цього перетину. При цьому в z_0 ці продовження набуватимуть значень, які відрізняються знаком.

Нехай функція f аналітична в області G і $z_0 \in \partial G$. Якщо через z_0 функцію f не можна безпосередньо продовжити, то z_0 називається особливою точкою функції f.

Подивимося, чи ізольовані особливі точки однозначного характеру підлягають цьому означенню. Нехай z_0 — така точка. Припустимо, що через неї функцію f можна безпосередньо аналітично продовжити. Тоді існує аналітична в деякому околі точки z_0 функція f_1, яка в проколотому околі збігається з f. Тому $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{z \to z_0} f_1(z) = f_1(z_0)$, тобто z_0 є усувною точкою. Отже, можемо зробити висновок: функцію можна безпосередньо аналітично продовжити тільки через усувну особливу точку, а усувну особливу точку можна вважати неособливою.

Якщо відкинути усувні особливі точки, новий клас точок ширший, ніж клас ізольованих особливих точок, сюди належать, наприклад, неізольовані особливі точки. Для функції $1/(e^{1/z} - 1)$ точка $z = 0$ є не ізольованою особливою точкою, а граничною точкою полюсів. До загального класу особливих точок належать так звані ізольовані особливі точки неоднозначного характеру. Наприклад, для вибраної в області $\{z : \ -\pi < arg\, z < \pi\}$ вітки квадратного кореня $\sqrt{z}$ точка $z = 0$ буде є ізольованою особливою точкою, але неоднозначного характеру.

Теорема 8.2. *Нехай степеневий ряд* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ *має радіус збіжності* R, $0 < R < \infty$. *Тоді на колі* $\{z : |z - z_0| = R\}$ *його сума* $f(z)$ *має принаймні одну особливу точку.*

Доведення. Припустимо, від супротивного, що на колі $[C] = \{z : |z - z_0| = R\}$ функція f не має особливих точок, тобто f можна безпосередньо аналітично продовжити через кожну точку кола $[C]$. Отже, існує система кругів (рис. 8.2) з центрами на $[C]$, яка покриває $[C]$, і в кожний круг цієї системи функцію f можна безпосередньо аналітично продовжити. З цієї системи кругів можна вибрати скінченну систему кругів $K_1, K_2, \cdots, K_n$, яка має вказані раніше властивості. Покладемо $K_0 = \{z : |z - z_0| < R\}$.

Нехай $f_0 = f$, а f_j — безпосереднє аналітичне продовження функції

f на K_j. Розглянемо область $G = \bigcup\limits_{j=0}^{n} K_j$, а в ній, взагалі кажучи, многозначну функцію $F(z) = \{f_j(z) : z \in K_j\}$.

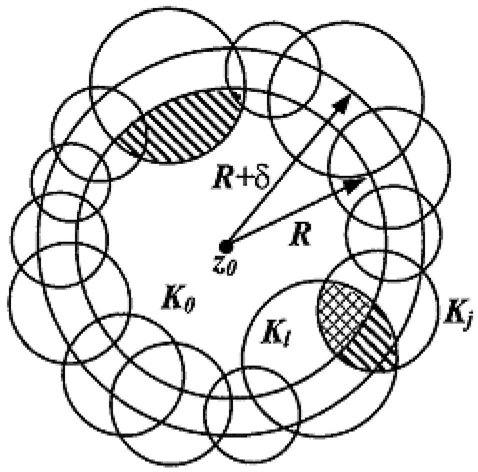


Рис. 8.2

Покажемо, що F — однозначна функція. Дійсно, якщо $z \in K_0 \bigcap K_j$, то $f_j(z) = f_0(z)$, тобто F однозначна в K_0. Якщо $z \notin K_0$, але $z \in K_j \bigcap K_l$, то, оскільки $\forall z \in K_0 \bigcap K_j \bigcap K_l)\{f_j(z) = f_l(z) = f_0(z)\}$, за наслідком 6 з теореми 6.3 $(\forall z \in K_j \bigcap K_l)\{f_j(z) = f_l(z)\}$. Отже, F однозначна в G.

Оскільки ∂G і ∂K_0 — замкнені множини, то $\rho(\partial G, \partial K_0) = \delta > 0$. Звідси випливає, що $K = \{z : |z - z_0| < R + \delta\} \subset G$ і, отже, функція F аналітична в цьому крузі. За теоремою Тейлора її можна розвинути в крузі K в степеневий ряд

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k.$$

Але $(\forall z \in K_0)\{f(z) = F(z)\}$. Тому $(\forall k \in \mathbb{Z}_+)\{f^{(k)}(z) = F^{(k)}(z)\}$. Звідси

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!}(z - z_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$$

і дістаємо, що радіус збіжності вихідного ряду не дорівнює R, а не менший, ніж $R + \delta$, що неможливо. Теорему 8.2 доведено.

Використовуючи теорему 8.2, можна, не розвиваючи функцію в степеневий ряд з центром у точці z_0, знайти радіус збіжності цього ряду. Він дорівнює відстані від z_0 до найближчої особливої точки функції або її безпосереднього аналітичного продовження.

8.2. ПРИНЦИП СИМЕТРІЇ РІМАНА-ШВАРЦА

Таку назву носить наступне твердження.

Теорема 8.3. *Нехай область $G \subset \{z : Im\, z > 0\}$, в край ∂G входить скінченна система інтервалів $I \subset \{z : Im\, z = 0\}$, G^* — область, симетрична до G відносно дійсної осі, а $D = G \bigcup I \bigcup G^*$. Нехай функція f аналітична в G, неперервна на $G \bigcup I$ і $(\forall z \in I)\{Im\, f(z) = 0\}$. Тоді f можна безпосередньо аналітично продовжити з G на D, причому це продовження задається рівністю*

$$F(z) = \begin{cases} f(z), & z \in G \bigcup I, \\ \bar{f}(\bar{z}), & z \in G^*. \end{cases}$$

Доведення. Досить показати, що функція F аналітична в D. Аналітичність f в G очевидна. Покажемо, що F аналітична в G^*. Дійсно, для кожної точки $z \in G^*$ при $z \to z_0$, $z \in G^*$, маємо

$$\frac{F(z) - F(z_0)}{z - z_0} = \frac{\bar{f}(\bar{z}) - \bar{f}(\bar{z}_0)}{z - z_0} = \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{z}_0)}{\bar{z} - \bar{z}_0}\right)} \to \overline{f'(\bar{z}_0)}$$

і оскільки $\overline{f'(\bar{z})}$, $z \in G^*$, як суперпозиція неперервних функцій є неперервною функцією, то аналітичність F в G^* доведена.

Залишилось довести, що F аналітична на I. За теоремою 4.15 досить довести неперервність F на I. Нехай $x_0 \in I$. Тоді

$$\lim_{\substack{z \to x_0 \\ Im\, z \geq 0}} F(z) = \lim_{\substack{z \to x_0 \\ Im\, z \geq 0}} f(z) = f(x_0) = F(x_0)$$

і

$$\lim_{\substack{z \to x_0 \\ Im\, z < 0}} F(z) = \lim_{\substack{z \to x_0 \\ Im\, z < 0}} \bar{f}(\bar{z}) = \bar{f}(\bar{x_0}) = f(x_0) = F(x_0),$$

тобто $F(z) \to F(x_0)$ $(z \to x_0)$, і принцип симетрії доведений.

Використовуючи теорему 8.3, відобразимо конформно і однолисто область $\{z \in C : z \notin [-1;2], z \notin [-i, i]\}$ на область $\{w \in C : w \notin [-1;1]\}$ (рис. 8.3).

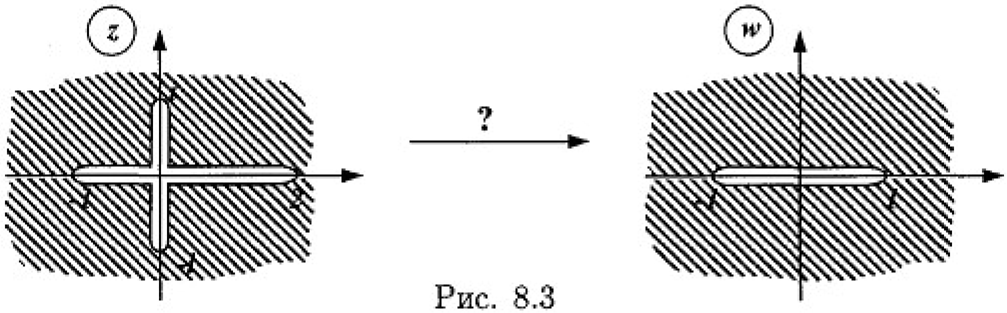


Рис. 8.3

Для цього знайдемо спочатку функцію, яка відображає верхню півплощину $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ з розрізом по $[0, i]$ на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$ так, щоб інтервали $(-\infty, -1)$ і $(2, +\infty)$ перейшли відпо-

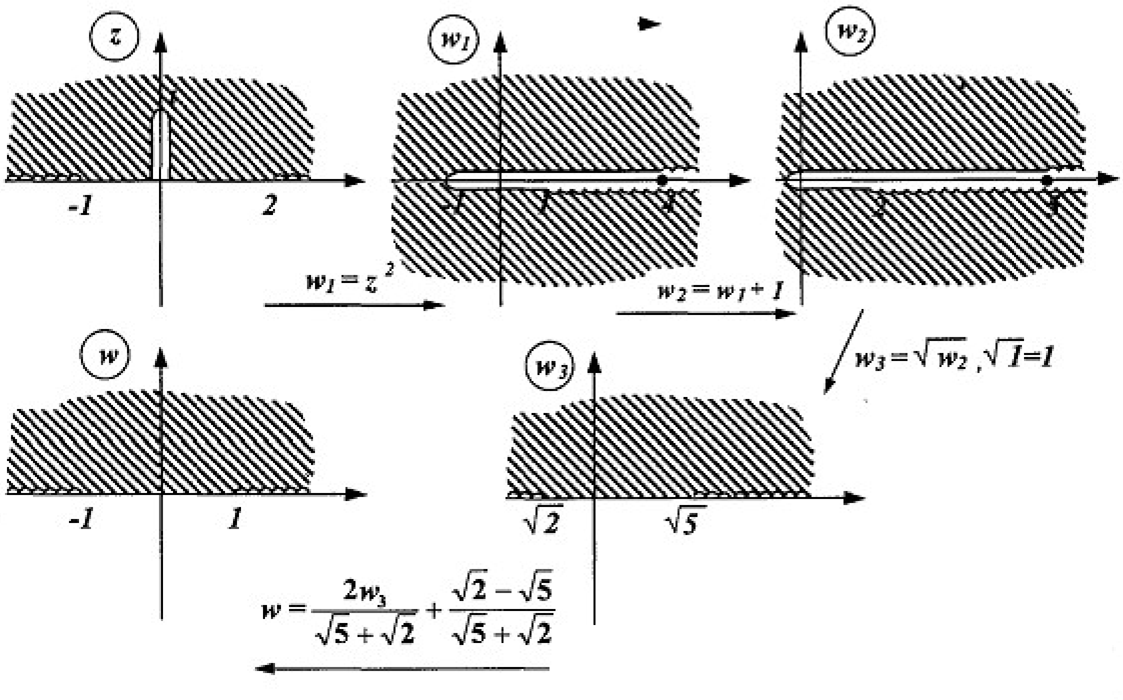


Рис. 8.4

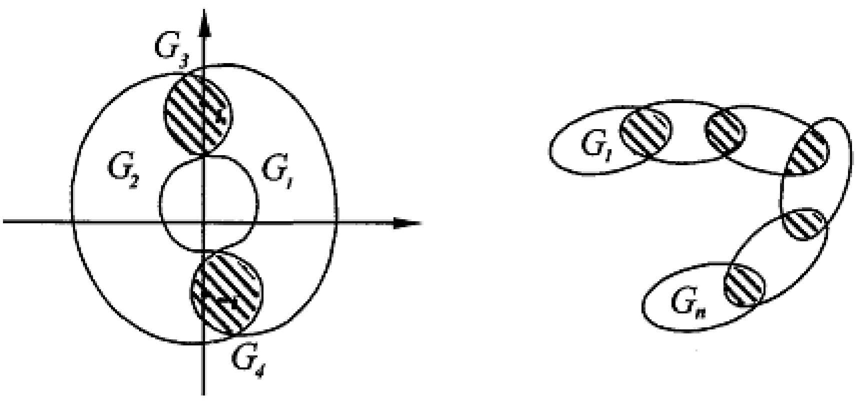
відно в інтервали $(-\infty, -1)$ і $(1, +\infty)$. На рис. 8.4 показано, як це можна зробити. Шукана функція має вигляд

$$w = \frac{2}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}\sqrt{z^2+1} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}} \quad (\sqrt{1}=1).$$

Оскільки $\overline{\sqrt{z^2+1}} = \sqrt{z^2+1}$, то ця функція буде відображати за теоремою 8.3 область $\{z \in C : z \notin [-1;2], z \notin [-i, i]\}$ на область $\{w \in C : w \notin [-1;1]\}$.

8.3. ПОВНА АНАЛІТИЧНА ФУНКЦІЯ

Нехай задана скінченна кількість функціональних елементів $\varphi_j = (G_j, f_j)$, $j = 1, 2, \cdots, n$, і φ_{k+1} є безпосереднім аналітичним продовженням елемента φ_k при кожному $k = 1, 2, \cdots, n-1$. Тоді кажуть, що елемент φ_n є аналітичним продовженням елемента φ_1 вздовж ланцюга областей $\{G_1, G_2, \cdots, G_n\}$. При цьому області G_1 і G_2 можуть як перетинатися (рис. 8.5, *а*), так і не перетинатися (рис. 8.5, *б*).



а *б*

Рис. 8.5

Розглянемо області G_k, $k = 1, 2, 3, 4$, зображені на рис. 8.5, *а*. В G_1 виберемо вітку квадратного кореня так, щоб $\sqrt{1} = 1$, а в G_2 — так, щоб $\sqrt{-1} = i$. Позначимо їх відповідно через f_1 і f_2. Ці вітки збігаються в G_3, а в G_4 не збігаються, бо $f_1(-i) = e^{-i\pi/4}$ і $f_2(-i) = e^{3i\pi/4}$. Отже, елемент (G_2, f_2) не є безпосереднім аналітичним продовженням елемента (G_1, f_2), але є його аналітичним продовженням вздовж ланцюга $\{G_1, G_3, G_2\}$, бо, вибираючи в G_3 вітку квадратного кореня f_3 так, щоб $f_3(-i) = e^{i\pi/4}$, маємо $(G_1, f_1) \mapsto (G_3, f_3) \mapsto (G_2, f_2)$. Тут $\varphi_1 \mapsto \varphi_2$ означає, що елемент φ_2 є безпосереднім аналітичним продовженням φ_1.

Зауважимо, що якщо можливе аналітичне продовження певного функціонального елемента в деяку область вздовж даного ланцюга, то воно єдине. Якщо ж ланцюг не заданий, то єдиність порушується. Так, у наведеному прикладі елемент (G_1, f_1) можна продовжити на область G_2 також за допомогою елемента (G_4, f_4), де f_4 — вітка квадратного кореня така, що $f_4(-i) = -i$.

Позначимо через $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2$ відношення, яке означає, що φ_2 є аналітичним продовженням φ_1 уздовж деякого ланцюга областей. Оскільки $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2, \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \Rightarrow \varphi_2 \leftrightarrow \varphi_1$ і $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \bigwedge \varphi_2 \leftrightarrow \varphi_3 \Rightarrow \varphi_1 \leftrightarrow \varphi_3$, то воно є відношенням еквівалентності.

Розглянемо множину різних функціональних елементів. Кожний клас розбиття цієї множини відносно $\leftrightarrow$ називається повною аналітичною функцією. Іншими словами, повна аналітична функція — це множина функціональних елементів така, що кожних два елементи з цієї множини є аналітичним продовженням один одного, а якщо який-небудь елемент є аналітичним продовженням елемента даної множини, то він сам належить до даної множини.

Повну аналітичну функцію можна розуміти як функцію або як многозначну функцію. Дійсно, нехай задана повна аналітична функція $F = \{(G_\alpha, f_\alpha)\}$. Позначимо $G = \bigcup\limits_\alpha G_\alpha$, і нехай $z_0 \in G$. Тоді $z_0 \in G_\alpha$ при деякому α, тобто точці z_0 ставиться у відповідність множина $\{f_\alpha(z_0)\}$, і маємо многозначну функцію або функцію.

Зауважимо, що область визначення повної аналітичної функції має бути максимальною. Наприклад, наступний функціональний елемент $(\{z : |z| < 1\}, e^z)$ не є повною аналітичною функцією. Повною аналітичною буде $(\mathbb{C}, e^z)$.

Зауважимо також, що не кожна многозначна функція є повною аналітичною функцією. На це вказують приклади $F(z) = \{e^z, \sin z\}$ та $F(z) = \{0, 1\}, z \in C$.

Прикладами повних аналітичних функцій можуть служити многозначні функції $\sqrt[n]{z}$ і $\operatorname{Ln} z\,(0 < |z| < +\infty)$.

8.4. ЕЛЕМЕНТАРНІ РІМАНОВІ ПОВЕРХНІ

Многозначна аналітична функція може точкам плоских областей ставити у відповідність декілька (навіть злічену кількість) значень. Тут ми розглянемо замість плоских областей багатолисті поверхні, які розміщені над цими областями і мають над точкою z стільки "листів", скільки значень приписує многозначна аналітична функція цій точці. Тому на таких поверхнях, які називаються рімановими, многозначну функцію можна розуміти як однозначну функцію. Ми зупинимося тільки на простих ріманових поверхнях кореня n-го степеня та логарифма.

Почнемо з найпростішого випадку. В області $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ розглянемо дві вітки f_1 і f_2 многозначної функції $\sqrt{z}$ такі, що $f_1(1) = 1$ і $f_2(1) = -1$. Ці вітки відрізняються тільки знаком і конформно та однолисто відображають D відповідно на праву і ліву півплощини, які позначимо через D_1^* і D_2^*.

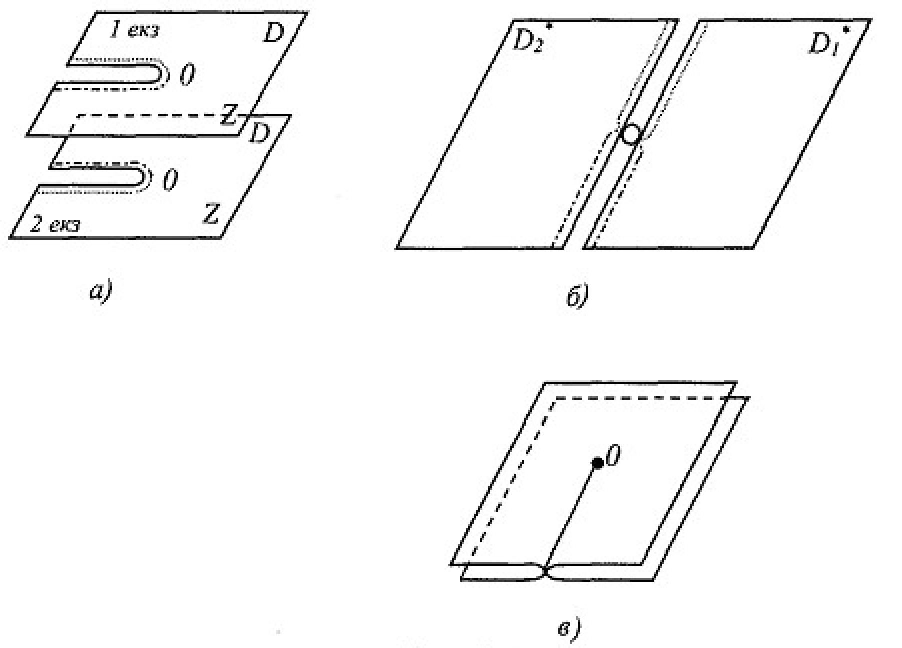


Рис. 8.6

Візьмемо два екземпляри області D і розмістимо їх один над одним так, як вказано на рис. 8.6, *а*. На рис. 8.6 вказана також відповідність берегів розрізів області D і ділянок уявної осі w-площини (відповідні ділянки зображені однаковими рисунками).

Склеїмо верхній берег розрізу на першому екземплярі області D з нижнім берегом розрізу на другому екземплярі і відповідно з цим склеїмо D_1^* і D_2^* вздовж верхньої півосі (всі ці ділянки зображені крапками). Потім склеїмо два вільні береги розрізу, що залишилися на D і зображені штрихпунктиром (в тривимірному просторі при другому склеюванні не можна уникнути самоперетину, але домовимося не ототожнювати точки променя, вздовж якого проходить самоперетин поверхні, які зображені різними рисунками).

Отримана дволиста поверхня, зображена на рис. 8.6, *в*, називається рімановою поверхнею квадратного кореня. Цей корінь можна розглядати на ній як однозначну функцію, бо два значення, які корінь ставить у відповідність кожній точці $z_0 \neq 0, \neq \infty$, є різними точками, що лежать над z_0. Точки від'ємної дійсної осі $(-\infty, 0)$ не є винятком, бо, як ми домовились, над кожною з них також знаходяться дві точки поверхні. Тільки точкам $z = 0$ і $z = \infty$ квадратний корінь ставить у відповідність по одному значенню, і ми будемо вважати, що над цими точками знаходяться по одній точці поверхні. В цих точках листи нашої поверхні з'єднуються; вони називаються точками розгалуження (див. розділ 3.3).

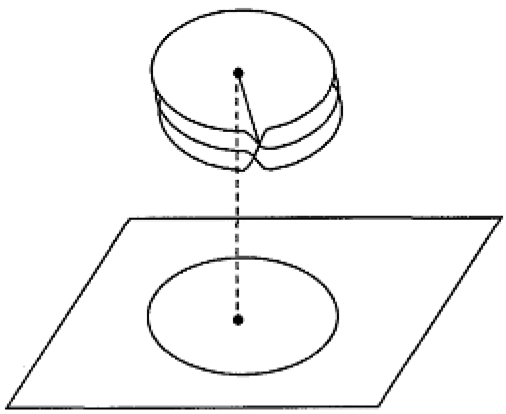


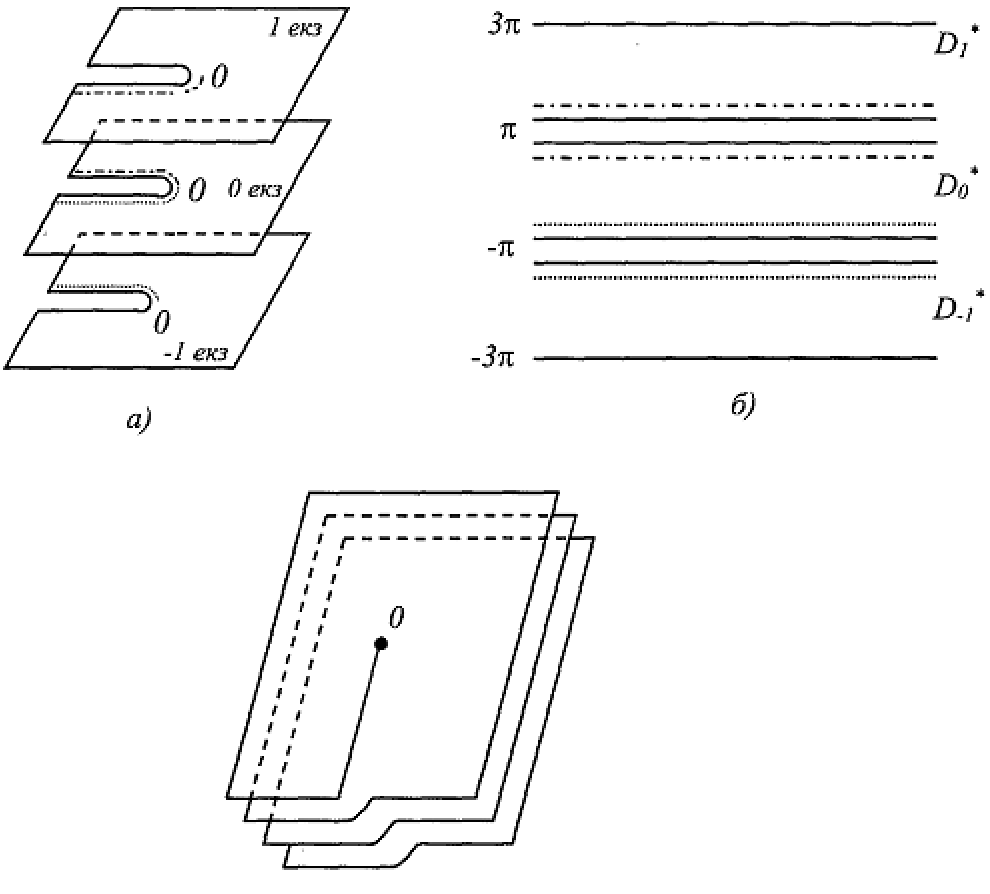
Рис. 8.7

Цілком аналогічно улаштована ріманова поверхня многозначної функції $\sqrt[n]{z}$. Вона є n-листою, над кожною точкою $z_0 \neq 0, \neq \infty$ знаходяться n різних точок, а над точками $z = 0$ і $z = \infty$ — по одній точці поверхні. На рис. 8.7 зображена частина ріманової поверхні $\sqrt[3]{z}$, яка знаходиться над кругом з центром у початку координат.

Ріманова поверхня $\operatorname{Ln} z$ є нескінченнолистою, а будується вона, як вказано на рис. 8.8. У наведеній вище області D вибираємо головну вітку логарифма

$$w = f_0(z) = \ln|z| + i\arg z.$$

Ця функція відображає D на смугу $D_0^* = \{w : |\operatorname{Im} w| < \pi\}$ (відповідність берегів розрізу і країв смуги вказані на рис. 8.8).



в) Рис. 8.8

Всі інші вітки логарифма

$$w = f_k(z) = f_0(z) + 2k\pi i \quad (k \in \mathbb{Z})$$

відображають D на смуги D_k^*, які є паралельним перенесенням смуги D_0^* на $2\pi i$. Відповідно до цього ми беремо злічену кількість екземплярів області D і склеюємо верхній берег розрізу на 0-му екземплярі з нижнім берегом розрізу на 1-му екземплярі, а нижній берег розрізу на 0-му екземплрі з верхнім берегом розрізу на (-1)-му екземплярі. До вільних берегів, що залишилися потім приклеюємо відповідно нижній берег розрізу на 2-му і верхній берег розрізу на (-2)-му екземплярах і так далі.

Над околом кожної точки $z_0 \neq 0, \neq \infty$ знаходиться частина поверхні, що складається із зліченої кількості окремих кругів; кожному кругу відповідає вітка логарифма з відповідним номером, яка діє в цьому околі (точки від'ємної півосі не є винятком). Тому логарифм на побудованій рімановій поверхні є однозначною функцією. В точках $z = 0$ і $z = \infty$ логарифм не визначений, а тому можемо вважати, що йогоріманова поверхня не має точок над $z = 0$ і $z = \infty$, які називаються (див. розділ 3.4) точками розгалуження.

Розділ 9

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 1

Комплексні числа, області, криві, стереографічна проекція

1.1. Знайти дійсну та уявну частину наступних комплексних чисел:

$$а)\ \frac{1}{1-i};\quad б)\ \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3;\quad в)\ \left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3;\quad г)\ \left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2.$$

Розв'язування вправи г). Враховуючи, що $i^2=-1$, а $i^4=1$, маємо

$$z=\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2=\left(\frac{2+i}{1-i}\right)^2=\frac{4i+3}{-2i}=-2+\frac{3}{2}i.$$

Отже, $\operatorname{Re} z=-2$, $\operatorname{Im} z=3/2$.

1.2. Довести рівності

$$а)\ |z_1\,z_2|=|z_1|\,|z_2|;\quad б)\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|};\quad в)\ \operatorname{Arg}(z_1\,z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2;$$

$$г)\ \operatorname{Arg}\frac{z_1}{z_2}=\operatorname{Arg} z_1-\operatorname{Arg} z_2;\quad д)\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}};\quad е)\ \overline{z_1\,z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}.$$

Розв'язування вправи в). Нехай $z_j=r_j(\cos\theta_j+i\sin\theta_j)$, $j=1,2$. Тоді

$$\begin{aligned} z_1\,z_2 =& r_1\,r_2\{(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2)\}=\\ &= r_1\,r_2\{\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\}.\end{aligned}$$

Звідси, використовуючи означення аргументу, дістаємо потрібну рівність.

1.3. Знайти модулі та аргументи наступних комплексних чисел:

$$а)\ -\pi;\quad б)\ i\pi;\quad в)\ 1+i^{123};\quad г)\ -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2};\quad д)\ \frac{1-i}{1+i};$$

$$е)\ (-4+3i)^3;\quad є)\ -\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7};\quad ж)\ 1+\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}.$$

Розв'язування вправи є). Позначимо $z_1 = -\cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$. Тоді

$$z_1 = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{6\pi}{7} + i\sin\frac{6\pi}{7},$$

тобто $|z_1| = 1$ і $\arg z_1 = \frac{6\pi}{7}$.

Розв'язування вправи ж). Позначимо $z_2 = 1 + \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$. Тоді

$$|z_2| = \sqrt{(1+\cos\frac{\pi}{7})^2 + (\sin\frac{\pi}{7})^2} = \sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{7}} = 2\cos\frac{\pi}{14}.$$

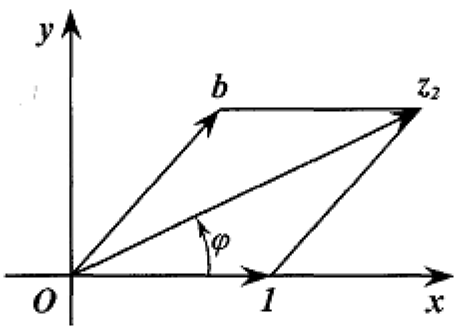


Рис. 9.1

Для знаходження аргументу зауважимо, що z_2 є сумою двох векторів $a = 1$ та $b = \cos\frac{\pi}{7} + i\sin\frac{\pi}{7}$ і, оскільки $|a| = |b| = 1$ і z_2 зображається діагоналлю ромба, побудованого на векторах a і b, то $\arg z_2 = \frac{1}{2}\arg b = \frac{\pi}{14}$ (див. рис. 9.1).

1.4. Дати геометричний опис множини всіх точок комплексної площини, що задовольняють нерівності

$$а)\,\mathrm{Re}\,z>0;\quad в)\,\mathrm{Im}\,z\le 1;\quad в)\,\mathrm{Re}\,z<1;\quad г)\,|\mathrm{Im}\,z|<1,\ 0<\mathrm{Re}\,z<1;$$
$$д)\,|z|\le 1;\quad е)\,|z-i|>1;\quad є)\,0<|z+1|<2;\quad ж)\,1<|z-1|<3;$$
$$з)\,0<\arg z<\pi/4;\quad і)\,|\pi-\arg z|<\pi/4.$$

Розв'язування вправи г). Див. рис. 9.2.

Розв'язування вправи ж). Зауважимо, що $|z-z_0|$ означає відстань між точками z і z_0. Тому умова ж) описує кільце з центром у точці $z_0=1$ і радіусами $r_1=1$ та $r_2=3$. (див. рис. 9.3).

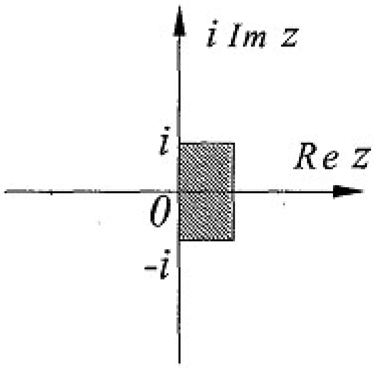


Рис. 9.2

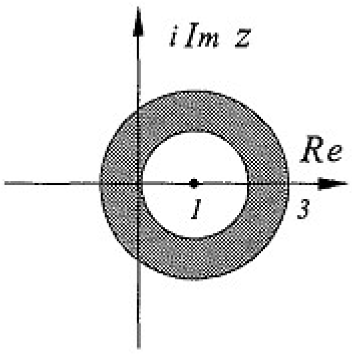


Рис. 9.3

1.5. Вказати, які лінії описані наступними рівняннями

$$а)\,\mathrm{Re}\,\frac{1}{z}=\frac{1}{a}\quad (a>0);\quad б)\,\mathrm{Re}\,\frac{z-1}{z+1}=0;\quad в)\,\mathrm{Im}\,\frac{z-1}{z+1}=0.$$

Розв'язування вправи б). Оскільки

$$\mathrm{Re}\,\frac{z-1}{z+1}=\mathrm{Re}\,\frac{x-1+iy}{x+1+iy}=\mathrm{Re}\,\frac{x^2-1+y^2+2iy}{(x+1)^2+y^2}=\frac{x^2+y^2-1}{(x+1)^2+y^2},$$

то шуканою лінією є коло $\{z:|z|=1\}$ без точки $z=-1$.

1.6. Нехай z_1 і z_2 — фіксовані точки. Описати геометрично множину точок z, що задовольняють співвідношення

$$a)\, |z - z_1| = |z - z_2|; \quad б)\, |z - 1| = |\mathrm{Re}\, z|;$$
$$в)\, |z - z_1| + |z - z_2| = 2a, \quad a > |z_1 - z_2|/2.$$

Розв'язування вправи б). Нехай $z = x + iy$. Тоді $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x|$, звідки $y^2 = 2x - 1$, тобто маємо параболу.

Розв'язування вправи в). Ця умова задає геометричне місце точок, сума відстаней від яких до двох заданих точок z_1 і z_2 є величина стала, а це є означення еліпса.

1.7. Вияснити, які криві визначаються наступними параметричними рівняннями

$$a)\, z = a + t(b - a),\ t \in [0, 1]; \quad б)\, z = t + it^2,\ t \in [0, +\infty);$$

$$в)\, z = Re^{it},\ t \in [0, \pi]; \quad г)\, z = t + i/t,\ t \in [1, +\infty);$$

$$д)\, z = 1 + e^{-it},\ t \in [0, 2\pi]; \quad e)\, z = 2e^{it} - 1,\ t \in [0, 2\pi];$$

$$e) z = \begin{cases} e^{i\pi t},\ t \in [0, 1], \\ t - 2,\ t \in [1, 3]. \end{cases}$$

Розв'язування вправи г). Задане параметричне рівняння можна записати у вигляді $x = t$, $y = 1/t$, $t \in [1, +\infty)$, тобто $y = 1/x$, $x \in [1, +\infty)$, а це — частина вітки гіперболи.

1.8. Описати за допомогою нерівностей область D, якщо її край ∂D складається з однієї замкненої кривої, що визначається рівнянням

$$a)\, z = a + re^{-it},\ 0 < t < 2\pi; \quad б)\, z = a + re^{it},\ 0 < t < 2\pi;$$

$$в)\, z = it,\ -\infty < t < +\infty; \quad г)\, z = t + it^2,\ -\infty < t < +\infty;$$

$$д)\, z = t^2,\ -\infty < t < +\infty.$$

Розв'язування вправи а). Оскільки $|z-a|=r$ і $0<t<2\pi$, то умова а) задає повне коло, яке обходиться за годинниковою стрілкою. Тому шуканою областю є зовнішність цього кола, тобто $D=\{z: \ |z-a|>r\}$.

1.9. Нехай $M(z)=(\xi,\eta,\zeta)$ — точка на сфері Рімана, що відповідає точці $z=x+iy$ з комплексної площини, тобто стереографічна проекція точки z, а $k(z_1,\, z_2)$ — хордальна відстань між точками z_1 і z_2, тобто просторова відстань між точками $M(z_1)$ і $M(z_2)$. Довести наступні рівності

$$\text{а)}\ \xi=\frac{x}{1+|z|^2},\quad \eta=\frac{y}{1+|z|^2},\quad \zeta=\frac{|z|^2}{1+|z|^2};$$

$$\text{б)}\ x=\frac{\xi\zeta}{\xi i^2+\eta^2}\frac{\xi}{1-\zeta},\quad y=\frac{\eta\zeta}{\xi i^2+\eta^2}\frac{\eta}{1-\zeta};$$

$$\text{в)}\ k(z_1,\, z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\sqrt{1+|z_2|^2}}\quad (z_j\neq\infty);$$

$$\text{г)}\ k(z_1,\,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z_1|^2}}.$$

Доведення рівностей а). Запишемо рівняння променя, що проходить через полюс сфери Рімана (0,0,1) і точку $(x,y,0)$ на комплексній площині

$$\xi=tx,\quad \eta=ty,\quad \zeta=1-t\quad (t\geq 0).$$

Підставляючи ці значення у рівняння сфери Рімана $\xi^2+\eta^2+(\zeta-1/2)^2=$ $=1/4$, маємо $t^2|z|^2+(1/2-t)^2=1/4$, тобто $t^2(|z|^2+1)-t=0$, звідки $t=1/(1+|z|^2)$. Нарешті, підставляючи це значення t у рівняння променя, отримуємо рівності а).

1.10. Приймемо $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$, $\theta\in\mathbb{R}$. Довести рівності

$$\text{а)}\ e^{i0}=1;\quad \text{б)}\ e^{i\theta_1}e^{i\theta_2}=e^{i(\theta_1+\theta_1)};\quad \text{в)}\ 1/e^{i\theta}=e^{-i\theta};$$

$$\text{г)}\ \left(e^{i\theta}\right)^n=e^{ni\theta}\quad (n\in\mathbb{N});$$

$$\text{д)}\ \sum_{j=1}^{n}\sin(j\theta)=\frac{\sin((n+1)\theta/2)\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}\quad (\theta\neq 2\pi k);$$

$$е)\ \frac{1}{2}+\sum_{j=1}^{n}\cos(j\theta)=\frac{\sin((n+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)}\quad(\theta\neq 2\pi k).$$

Доведення рівностей д). Використовуючи формулу для суми геометричної прогресії, маємо

$$\sum_{j=1}^{n}e^{ji\theta}=-\frac{e^{(n+1)i\theta}-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}.$$

Звідси

$$\sum_{j=1}^{n}\sin(j\theta)=\operatorname{Im}\left(\frac{e^{(n+1)i\theta}-e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)=\operatorname{Im}\left(\frac{(e^{(n+1)i\theta}-e^{i\theta})(1-e^{-i\theta})}{|1-e^{i\theta}|^2}\right)=$$

$$=-\frac{\sin((n+1)\theta)-\sin(n\theta)-\sin\theta}{2-2\cos\theta}=\frac{\sin((n+1)\theta/2)\sin(n\theta/2)}{\sin(\theta/2)}.$$

1.11. Нехай Φ — опукла неспадна на $[0,+\infty)$ функція. Довести, що

$$\Phi\left(\frac{1}{n}\left|\sum_{j=1}^{n}z_j\right|\right)\leq\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\Phi(|z_j|).$$

Комплексні послідовності та ряди

1.12. При яких значеннях $z\in\mathbb{C}$ збіжні вказані послідовності

$$а)\ (z^n);\quad б)\ (z^n/n);\quad в)\ (nz^n);\quad г)\ (1+z^2+\ldots+z^n);$$

$$д)\ \left(\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\ldots+\frac{z^n}{n^2}\right);\quad е)\ \left(\frac{z^n}{1+z^n}\right).$$

Розв'язування вправи е). Якщо $|z|<1$, то $|z|^n\to 0\,(n\to\infty)$ і тому $\lim\limits_{n\to\infty}z^n/(1+z^n)=0$.

Якщо ж $|z| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} z^n/(1+z^n) = \lim\limits_{n\to\infty} 1/(1+1/z^n) = 1$.

Нехай, нарешті, $|z| = 1$ і $z^n \neq -1$, $n \in \mathbb{N}$. Запишемо $z = e^{i\theta}$, $\theta \in (-\pi, \pi)$. Тоді

$$\frac{z^n}{1+z^n} = \frac{e^{in\theta}}{1+e^{in\theta}} = \frac{e^{in\theta}(1+e^{-in\theta})}{(1+e^{in\theta})(1+e^{-in\theta})} =$$
$$= \frac{1+e^{in\theta}}{2(1+\cos n\theta)} = \frac{1}{2} + i\frac{\sin n\theta}{2(1+\cos n\theta)} = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}\mathrm{tg}\frac{n\theta}{2},$$

і нам залишилось дослідити збіжність послідовності $(\mathrm{tg}(n\theta/2))$. Припустимо, що існує скінченна границя $A = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{tg}(n\theta/2)$. Тоді

$$A = \lim_{n\to\infty} \frac{2\mathrm{tg}(n\theta/4)}{1-\mathrm{tg}^2(n\theta/4)} = \frac{2A}{1-A^2}.$$

А це можливо тільки, коли $A = 0$. Звідси, використовуючи тотожність

$$\mathrm{tg}((n+1)\theta/2) = \frac{\mathrm{tg}(n\theta/2) + \mathrm{tg}(\theta/2)}{1-\mathrm{tg}(n\theta/2)\,\mathrm{tg}(\theta/2)},$$

дістаємо рівність $\mathrm{tg}(\theta/2) = 0$, тобто $\theta = 0$. Отже, якщо $|z| = 1$, то наша послідовність збіжна тільки в точці $z = 1$.

1.13. Довести збіжність наступних послідовностей

$$а)\ \left(\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right),\ |z|<1; \quad б)\ \left(\frac{z^n}{1+z^{2n}}\right),\ |z|>1;$$

$$в)\ \left(\frac{1}{n}\left(1+e^{i\theta}+\ldots+e^{in\theta}\right)\right),\ \theta \in (0, 2\pi);$$

$$г)\ \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\left(1-e^{i\theta}+e^{2i\theta}-\ldots+(-1)^n e^{in\theta}\right)\right),\ \theta \in (-\pi, \pi);$$

$$д)\ \left(\frac{1}{n+1}(n+1+nz+(n-1)z^2+\ldots+z^n)\right),\ |z| \le 1,\ z \neq 1.$$

Доведення збіжності послідовності в). Позначимо її через (a_n). Тоді, використовуючи формулу для суми членів геометричної прогресії, при $n \to \infty$ маємо

$$a_n = \frac{1}{n}\frac{e^{i(n+1)\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1}, \quad |a_n| = \frac{1}{n}\frac{1 + \cos(n+1)\theta}{1 - \cos\theta} \to 0\,(n \to \infty),$$

тобто $a_n \to 0$ при $n \to \infty$.

1.14. Знайти всі значення параметрів α і θ, при яких збіжні вказані ряди

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{\pi i n}; \quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} e^{in\theta}; \quad в)\ \sum_{n=1}^{\infty} (n^2+1)^{-\alpha}\left(e^{\pi i n} - 1\right);$$

$$г)\ \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{(\ln(n^2+1))^{\alpha}}{n}; \quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{-in\alpha}.$$

Розв'язування вправи б). Нам, фактично, треба дослідити збіжність рядів

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \cos n\theta, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \sin n\theta.$$

Якщо $\alpha > 1$, то обидва ці ряди збіжні абсолютно. Якщо $\alpha \le 0$, то перший з цих рядів розбіжний для всіх θ, а другий розбіжний для всіх $\theta \ne 0$, тобто наш ряд розбіжний.

Залишилося розглянути випадок, коли $0 < \alpha \le 1$. У цьому випадку $n^{-\alpha} \downarrow 0\,(n \to \infty)$, і, якщо $\theta \ne 2\pi k$, то

$$\sum_{n=1}^{N} \cos n\theta = -\frac{1}{2} + \frac{\sin((N+1/2)\theta)}{2\sin(\theta/2)},$$

$$\sum_{n=1}^{N} \sin n\theta = \frac{\sin((N+1)\theta/2)\sin(N\theta/2)}{\sin(\theta/2)},$$

тобто ці суми обмежені. Тому за ознакою Діріхле при $\theta \ne 2\pi k$ і $0 < \alpha \le 1$ наш ряд збіжний. Зауважимо, що якщо $\theta = 2\pi k$ і $0 < \alpha \le 1$ ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha} \cos n\theta$ розбіжний.

1.15. Довести, що з будь-якої послідовності комплексних чисел можна вибрати збіжну в $\overline{\mathbb{C}}$ підпослідовність.

1.16. Нехай $\theta \in \mathbb{R}$ і $z \in \mathbb{C}$. Довести, що

$$а)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i\theta}{n}\right)^n = e^{i\theta};\quad б)\ \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^{z}.$$

1.17. Довести збіжність рядів

$$а)\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{e^{i\sqrt{2}n}}{\ln(n+1)}\right)^k,\ k\in\mathbb{N};\quad б)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in\theta}}{\mu_n},$$

де (μ_n) — додатна зростаюча до $+\infty$ послідовність. А яке k?

1.18. Довести, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} k(z_n,\, A) = 0$, де $k(z_n,\, A)$ — хордальна відстань (див. **1.9**).

Доведення. Маємо (див. **1.9**)

$$k(z_n,\, A) = \frac{|z_n - A|}{\sqrt{1+|z_n|^2}\sqrt{1+|A|^2}}\quad (A \neq \infty)$$

і

$$k(z_n,\, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1+|z_n|^2}}.$$

З останньої рівності видно, що $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} k(z_n,\, \infty) = 0$.

Далі, оскільки $k(z_n,\, A) \le |z_n - A|$, то із рівності $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$ випливає рівність $\lim\limits_{n\to\infty} k(z_n,\, A) = 0$ при $A \neq \infty$.

Навпаки, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} k(z_n,\, A) = 0$, але $z_n \not\to A\,(n\to\infty)$, то існує така послідовність (n_j), що $(z_{n_j}) \to \infty$. Тоді

$$k(z_{n_j},\, A) \ge \frac{1}{2}|z_{n_j} - A|\frac{1}{\sqrt{1+|A|^2}}\frac{1}{|z_{n_j}|} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2\sqrt{1+|A|^2}}\frac{|z_{n_j}| - |A|}{|z_{n_j}|} \to \frac{1}{2\sqrt{1+|A|^2}} > 0\quad (n_j \to \infty),$$

що неможливо.

Функції комплексної змінної

1.19. Знайти границі (якщо вони існують)

$$а)\ \lim_{z\to i}\frac{z^2}{z-i};\quad б)\ \lim_{z\to\infty}\frac{z-2i}{z+i};\quad в)\ \lim_{z\to\infty}\frac{z^2+1}{z-2i};$$

$$г)\ \lim_{z\to i}\frac{z^2+1}{z^4-1};\quad д)\ \lim_{z\to 0}\left(\frac{x^2}{x^2+y^2}+2i\right);\quad е)\ \lim_{z\to 1-i}\overline{z};$$

$$є)\ \lim_{z\to -1}\arg z;\quad ж)\ \lim_{z\to 0} z/\overline{z};\quad з)\ \lim_{z\to 0}(x^2/y);$$

Розв'язування вправи е).

$$\lim_{z\to 1-i}\overline{z}=\lim_{\overline{z}\to 1+i}\overline{z}=1+i.$$

1.20. Функції $f(z)=\dfrac{\mathrm{Re}z^2}{|z|^2}$ і $g(z)=\dfrac{z\mathrm{Re}z}{|z|}$ неперервні в кожній точці $z\neq 0$. Чи можна їх доозначити так, щоб вони були неперервними і в точці $z=0$?

1.21. Вияснити, чи функція $f_1(z)=\exp(-1/|z|)$ є рівномірно неперервною в $K_1=\{z:\ |z|<1\}$, а функції $f_2(z)=\dfrac{\mathrm{Re}z}{z}$, $f_3(z)=$ $=\dfrac{(\mathrm{Re}z^2)^2}{z^2}$, $f_4(z)=\exp(-1/z^2)$, $f_5(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$ – в $\{z:\ 0<|z|<1\}$.

Дослідження функції f_1. Згідно з означенням нам треба показати, що

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists\delta>0)(\forall(z_1,z_2)\in K_1^2)\{|z_1-z_2|<\delta\Rightarrow|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon\}.$$

Для заданого $\varepsilon\in(0,1)$ покладемо

$$\delta=\min\left\{\ln^2(1+e\varepsilon),\ 1,\ \frac{1}{16}\ln^{-4}\frac{2}{\varepsilon}\right\}.$$

Якщо $|z_1| \le \sqrt[4]{\delta}$, то з нерівності $|z_1 - z_2| < \delta$ маємо $|z_2| < |z_1| + \delta \le \le \delta + \sqrt[4]{\delta} \le 2\sqrt[4]{\delta}$. Тому

$$|f(z_1) - f(z_2)| < \exp\{-1/\sqrt[4]{\delta}\} + \exp\{-1/2\sqrt[4]{\delta}\} \le 2\exp\{-1/2\sqrt[4]{\delta}\} \le \varepsilon,$$

бо $\sqrt[4]{\delta} \le (1/2)\ln^{-1}\dfrac{2}{\varepsilon}$.

Якщо ж $|z_1| \ge \sqrt[4]{\delta}$, $|z_2| \ge \sqrt[4]{\delta}$ і, наприклад, $|z_2| \ge |z_1|$, то з нерівності $|z_1 - z_2| < \delta$ випливає нерівність

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le \exp\{-1/|z_1|\}\left(\exp\left\{\frac{|z_1 - z_2|}{|z_1||z_2|}\right\} - 1\right) \le$$
$$\le e^{-1}(\exp\{\sqrt{\delta}\} - 1) < \varepsilon,$$

бо $\delta \le \ln^2(1 + e\varepsilon)$. Отже, функція $f_1(z) = \exp(-1/|z|)$ є рівномірно неперервною в $K_1 = \{z : |z| < 1\}$.

1.22. Довести, що функції

$$а)\ f(z) = \frac{az + b}{cz + d},\ ad - bc \ne 0; \quad б)\ f(z) = \exp(|z|);$$

$$в)\ f(z) = \frac{1}{e^z - 1}; \quad г)\ f(z) = \frac{1}{z}.$$

є неперервними відносно сферичної метрики $k(z, w)$ в розширеній комплексній площині.

Доведення неперервності функції $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Нам треба довести, що для кожного $\varepsilon > 0$ існує δ таке, що з нерівності $k(z, z_0) < \delta$ випливає нерівність $k(1/z, 1/z_0) < \varepsilon$.

Припустимо спочатку, що $z_0 \ne 0, \ne \infty$. Тоді, якщо $z \ne 0$, то

$$k(1/z, 1/z_0) = \frac{|1/z - 1/z_0||z||z_0|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |z_0|^2}} = k(z, z_0),$$

і нам досить взяти $\varepsilon = \delta$.

Якщо $z_0 = 0$, то $f(z_0) = \infty$ і при $z \neq 0$

$$k(1/z,\, 1/z_0) = \frac{1}{\sqrt{1 + |1/z|^2}} = \frac{|z|}{\sqrt{1 + |z|^2}} = k(z,\, z_0),$$

і знову досить взяти $\varepsilon = \delta$.

Нарешті, якщо $z_0 = \infty$, то $f(z_0) = 0$ і

$$k(1/z,\, 1/z_0) = \frac{|1/z|}{\sqrt{1 + |1/z|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}} = k(z,\, \infty),$$

тобто, як вище, досить взяти $\varepsilon = \delta$.

1.23. Нехай функції f і g неперервні у сферичній метриці. Чи є неперервними у сферичній метриці функції $f + g$, fg, f/g?

Моногенність та аналітичність. Умови Коші-Рімана

1.24. Знайти всі точки моногенності наступних функцій $(z = x + iy)$

$$а)\; f(z) = \operatorname{Re} z; \quad б)\; f(z) = z\operatorname{Re} z; \quad в)\; f(z) = |z|; г)\; f(z) = x^2y^2;$$

$$д)\; f(z) = x^2 + i(x^2 + y^2); \quad е)\; f(z) = 2xy - i(x^2 - y^2).$$

Розв'язування вправи д). Оскільки функції $u = x^2, v = x^2 + y^2$ диференційовані у всій площині, то нам залишається перевірка умов Коші-Рімана. Маємо

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x,$$

і умови Коші-Рімана виконуються тільки в точці $z = 0$. Отже, наша функція моногенна тільки в точці $z = 0$.

1.25. Показати, що для функції $f(z) = \sqrt[3]{xy}$, $z = x + iy$, в точці $z = 0$ умови Коші-Рімана виконуються, але функція f не є моногенною в цій точці.

Справді,

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y} \equiv 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\frac{u(0,y)-u(0,0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \equiv 0,$$

тобто умови Коші-Рімана виконуються. Але неважко показати, що функція $u(x,y) = \sqrt[3]{yx}$ не є диференційованою в точці (0,0).

1.26. Для $z = x + iy$ і функції f означимо формальні похідні за допомогою формул

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

Довести наступні рівності

$$а)\ \frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = 0; \quad б)\ \frac{\partial \overline{z}}{\partial \overline{z}} = 1; \quad в)\ \frac{\partial z^2}{\partial \overline{z}} = 0; \quad г)\ \frac{\partial \overline{z}}{\partial z} = 0; \quad д)\ \frac{\partial z}{\partial z} = 1;$$

$$е)\ \frac{\partial (fg)}{\partial \overline{z}} = g\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} + f\frac{\partial g}{\partial \overline{z}}; \quad є)\ \frac{\partial (fg)}{\partial z} = g\frac{\partial f}{\partial z} + f\frac{\partial g}{\partial z}.$$

Доведення рівності а).

$$\frac{\partial z}{\partial \overline{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial x}{\partial x} + i\frac{\partial y}{\partial x} + i\frac{\partial x}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial y}\right) = 0.$$

1.27. Довести, що умови Коші-Рімана можна записати у вигляді $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

1.28. Довести, що в полярній системі координат $z = re^{i\theta}$ умови Коші-Рімана можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

1.29. Нехай функкція $f = u + iv$ моногенна в $\mathbb{C}$ і $u = v^2$. Довести, що $f \equiv \text{const}$.

1.30. Нехай функція f моногенна в області G і $f'(z) \equiv 0$. Довести, що $f \equiv \text{const}$.

1.31. Дослідити на аналітичність наступні функції

$$\textit{a)}\ f(z) = |z|^2 + 2z; \quad \textit{б)}\ f(z) = |z| + z;$$

$$\textit{в)}\ f(z) = x + \frac{x}{x^2+y^2} + i\left(y - \frac{y}{x^2+y^2}\right).$$

Розв'язування вправи б). Оскільки $f(z) = \sqrt{x^2+y^2} + iy$, то

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

і умови Коші-Рімана набувають вигляду

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

Звідси неважко побачити, що задана функція не є аналітичною в жодній точці з $\mathbb{C}$.

1.32. Довести, що якщо всі корені многочлена $P, \deg P \geq 2$, лежать у півплощині $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, то всі корені многочлена P' лежать у цій же півплощині.

1.33. Навести приклад неоднолистої в області G функції f, для якої $f'(z) \neq 0$ в жодній точці з G.

1.34. Обчислити $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}}$ для наступних функцій

$$\textit{a)}\ f(z) = |z|^p,\ p \in \mathbb{R}; \quad \textit{б)}\ f(z) = \exp\{p|z|^2\},\ p \in \mathbb{R};$$

$$\textit{в)}\ f(z) = \ln|z-1|; \quad \textit{г)}\ f(z) = \ln(1+|z|^2).$$

Розв'язування вправи б). Запишемо $f(z) = \exp\{pz\overline{z}\}$. Тоді

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = (p + p^2 z\overline{z}) \exp\{pz\overline{z}\} = p(1 + p|z|^2)\exp\{p|z|^2\}.$$

Геометричний зміст модуля та аргументу похідної

1.35. Лінійне відображення $w = Az + B\overline{z} + C$ називається головною лінійною частиною відображення $w = f(z)$ в точці z_0, якщо

$$\lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-(Az+B\overline{z}+C)}{z-z_0}\right| = 0.$$

Знайти головну лінійну частину наступних відображень (у вказаній точці z_0)

а) $w = z^2$, $z_0 = i$; *б)* $w = |z|^2$, $z_0 = i$; *в)* $w = (z-1)/(z+1)$, $z_0 = 2$;

г) $w = e^z$, $z_0 = \pi i$; *д)* $w = 1/\overline{z}$, $z_0 = -i$; *е)* $w = \overline{z}^2$, $z_0 = 1$.

Розв'язування вправи е). Оскільки $f(z) = x^2 - y^2 - 2ixy$, то, якщо $z = x$, маємо

$$0 = \lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-(Az+B\overline{z}+C)}{z-z_0}\right| = \lim_{x\to 1}\left|\frac{x^2-(A+B)x-C}{x-1}\right| =$$
$$= \lim_{x\to 1}\left|\frac{(x-1)^2-(A+B-2)(x-1)-(A+B+C)+1}{x-1}\right|,$$

звідки випливає, що $A+B-2=0$ і $A+B+C-1=0$. А якщо $z = 1+iy$, то

$$0 = \lim_{z\to z_0}\left|\frac{f(z)-(Az+B\overline{z}+C)}{z-z_0}\right| =$$
$$= \lim_{y\to 0}\left|\frac{1-y^2-2iy-(A+B+C)-(A-B)iy}{y}\right| = \lim_{y\to 0}|-y-(2+A-B)|$$

звідки випливає, що $A - B + 2 = 0$. З отриманої системи рівнянь для A, B, C дістаємо $A = 0$, $B = 2$, $C = -1$, а отже, шукана головна лінійна частина є $w = 2\overline{z} - 1$.

1.36. Нехай Γ — гладка крива, а $w = f(z) = u + iv$ і функції u, v мають неперервні часткові похідні в околі $[\Gamma]$. Коефіцієнтом лінійного розтягу кривої $[\Gamma]$ в точці $z_0 \in [\Gamma]$ будемо називати величину

$$k = k(z_0) = \overline{\lim_{z\to z_0,\, z\in[\Gamma]}}\left|\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}\right|.$$

Припустимо, що $[\Gamma] = \{z : \arg(z - z_0) = \beta\}$. Знайти коефіцієнт лінійного розтягу k і кут повороту α променя $[\Gamma]$ у вказаній точці z_0 при наступних відображеннях

$$а)\, w = z^2,\ z_0 = 1; \quad б)\, w = ie^{2z},\ z_0 = 0; \quad в)\, w = 2z + i\overline{z},\ z_0 = 0;$$

$$г)\, w = \frac{z - z_0}{z + z_0},\ z_0 \neq 0; \quad д)\, w = \frac{1 - iz}{1 + iz},\ z_0 = -i; \quad е)\, w = \overline{z}^2,\ z_0 = i.$$

Розв'язування вправи е). За означенням

$$k = \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{|f(re^{i\beta} + z_0) - f(z_0)|}{r} = \overline{\lim_{r\to 0}} \frac{|\overline{(i + re^{i\beta})^2} - \overline{i}^2|}{r} =$$
$$= \overline{\lim_{r\to 0}} |2e^{-i\beta} - re^{-2i\beta}| = 2.$$

Нехай $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Оскільки $\Gamma = (z = i + re^{i\beta},\ r \geq 0)$, то образом цього променя є крива

$$\Gamma_1 = (w = \overline{(i + re^{i\beta})}^2,\ r \geq 0) =$$
$$= (w = r^2\cos 2\beta - 2r\sin\beta - 1 - i(r^2\sin 2\beta + 2r\cos\beta),\ r \geq 0)$$

з початком у точці $w = -1$. Якщо тепер $w = u + iv$, то для досить малих $r > 0$ маємо $u + 1 < 0$ і $v < 0$. Тому для кута нахилу Φ_1 дотичної до $[\Gamma_1]$ в точці $r = 0\,(w = -1)$ виконується

$$\Phi_1 = \pi + \operatorname{arctg}\left(\lim_{r\to 0} \frac{v}{u + 1}\right) = \pi + \operatorname{arctg}\frac{v'(r)}{u'(r)}\Big|_{r=0}.$$

Але
$$\frac{v'(r)}{u'(r)}\Big|_{r=0} = \frac{-2\cos\beta - 2r\sin 2\beta}{2r\cos 2\beta - 2\sin\beta}\Big|_{r=0} = \operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right).$$

Тому $\Phi_1 = 3\pi/2 - \beta$ і $\alpha = \Phi_1 - \beta = 3\pi/2 - 2\beta$.

Для інших β міркування подібні.

Вкажемо інший спосіб розв'язування цієї вправи. Нехай знову $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. Оскільки для функції $g(z) = z^2$ виконується $g'(i) = 2i$, то функція g відображає промінь Γ у криву, дотична до якої в точці $w = -1$ утворює з додатним напрямом дійсної осі кут $\beta + \pi/2$. Але $f = \overline{g}$. Тому функція f відображає промінь Γ у криву, дотична до якої в точці $w = -1$ утворює з додатним напрямом дійсної осі кут $3\pi/2 - \beta$. Отже, $\alpha = 3\pi/2 - 2\beta$.

1.37. Для наступних відображень вказати множину M тих значень z, в яких коефіцієнт лінійного розтягу $k = 1$, і множину Q таких значень z, в яких кут повороту $\alpha = 0$,

$$\text{а) } w = z^2; \quad \text{б) } w = z^3; \quad \text{в) } w = z^2 - 2z; \quad \text{г) } w = 2z - z^2; \quad \text{д) } w = 1/z;$$

$$\text{е) } w = iz^2; \quad \text{є) } w = -z^3 \quad \text{ж) } w = i/z; \quad \text{з) } w = (1 + iz)/(1 - iz).$$

Розв'язування вправи з). Оскільки при $z \neq -i$ функція аналітична, то $k = |w'(z)|$ для кожної точки $z \neq -i$. Але $w'(z) = 2i/(1 - iz)^2$. Тому M є множиною таких значень z, для яких $|1 - iz|^2 = 2$, тобто $M = \{z : |1 - iz| = \sqrt{2}\} = \{z : |z + i| = \sqrt{2}\}$.

Далі, якщо $z \neq -i$, то кут повороту

$$\alpha = \arg w'(z) = \arg \frac{-2i(\overline{z} - i)^2}{|z + i|^4} = \operatorname{arctg} \left(\frac{(1 - i)(\overline{z} - i)}{|z + i|^2} \right)^2 = 0.$$

Залишилось зауважити, що $\arg(w^2) = 0$ тоді і тільки тоді, коли $\arg w = 0$ або $\arg w = -\pi$, тобто $\operatorname{Im} w = 0$, $w \neq 0$. Отже,

$$M = \{z : \operatorname{Im}(1 - i)(\overline{z} - i) = 0, \, z \neq -i\}.$$

1.38. Нехай функція f аналітична в точці z_0 і $f'(z_0) \neq 0$, а k та α — відповідно коефіцієнт лінійного розтягу і кут повороту променя $\{z : \arg(z - z_0) = \beta\}$ в точці z_0 при відображенні $w = \overline{f(z)}$. Довести, що $k = |f'(z_0)|$ і $\alpha = -2\beta - \arg f'(z_0) + 2\pi n$ для деякого $n \in \mathbb{Z}$.

1.39. Довести, якщо відображення $w = f(z) = u + iv$ області D з неперервними частинними похідними функцій u і v має в кожній точці з D сталий лінійний розтяг і властивість консерватизму кутів, то f є аналітичною функцією, отже, відображення конформне.

Розв'язування вправи 1.39. Позначимо через F, E, G коефіцієнти першої квадратичної форми відображення $w = f(z)$, тобто $E = u_x^2 + v_x^2$, $F = u_x u_y + v_x v_y, G = u_y^2 + v_y^2$. Ортогональні прямі внаслідок консерватизму кутів переходять в ортогональні криві, тому

$$F = u_x u_y + v_x v_y = 0. \tag{9.1}$$

На підставі того, що відображення має сталий лінійний розтяг,вираз $|dw|^2/|dz|^2 = E(dx)^2/|dz|^2 + G(dy)^2/|dz|^2$ не залежить від $\frac{dy}{dx}$, тобто $E = G \neq 0$ і, отже,

$$u_x^2 + v_x^2 = u_y^2 + v_y^2 \neq 0. \tag{9.2}$$

Нехай $J = u_x v_y - u_y v_x$ — якобіан відображення. Оскільки $|J|^2 = |dw|^2/|dz|^2 = E > 0$ і наявна властивість консерватизму кутів, то $J > 0$. Далі з (9.2) видно, що принаймні одна з частинних похідних u_y і v_y не дорівнює нулю. Нехай $u_y \neq 0$; тоді з (9.1) $u_x = -v_x v_y / u_y$. Підставляючи це в (9.2), маємо $(v_x^2 - u_y^2)(v_y^2 + u_y^2) = 0$. Вираз у другій дужці дорівнює $G \neq 0$, тому $v_x = u_y$ або $v_x = -u_y$. Розглянемо перший випадок. З (9.1) випливає, що $u_x = -v_y$ і, отже $J = -u_x^2 - u_y^2 < 0$, що неможливо. Залишається можливість $v_x = -u_y$ і внаслідок (10.1) $u_x = v_y$. Отже, функції u і v задовольняють умови Коші-Рімана і функція f аналітична в області D. Зрозуміло, що $f' = u_x + iv_x = u_x - iv_y$. Отже, відображення конформне.

Розділ 10

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 2

Ціла лінійна функція

2.1. Знайти образи круга $\{z : |z-1| < 2\}$ при відображеннях

а) $w = 1 - 2iz$; *б)* $w = i + 3z$; *в)* $w = iz + i + 1$; *г)* $w = (1+i)z + 1$.

Розв'язування вправи а). Оскільки $-i = e^{-i\pi/2}$, то відображення $w = 1 - 2iz$ означає розтяг у 2 рази, поворот на кут $-\pi/2$ і зсув вправо на одиницю (див. рис. 10.1).

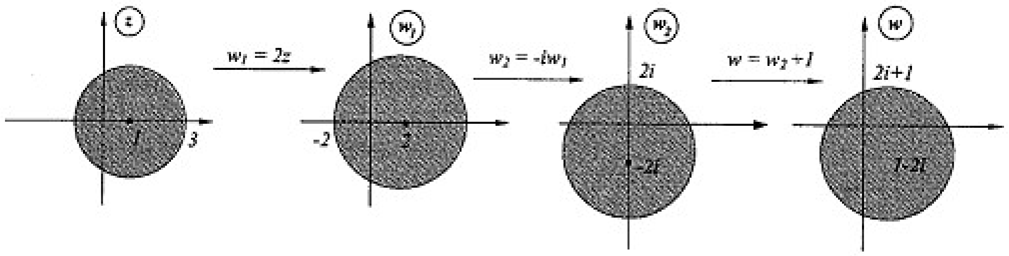


Рис. 10.1

Отже, образом заданого круга є круг $\{w : |w - 1 + 2i| < 4\}$.

Степенева функція з натуральним показником

2.2. Знайти образи вказаних кривих при відображенні $w = z^2$:

а) $\{z : \arg z = \alpha\}$, $-\pi < \alpha < \pi$; *б)* $\{z : |z| = R, |\arg z| \le \pi/4\}$;

$$в)\ \{z : \operatorname{Re} z = a\}, \quad a > 0; \quad г)\ \{z : \operatorname{Im} z = a\}, \quad a > 0;$$
$$д)\ \{z = x + iy : x + y = 1\}; \quad е)\ \{z = x + iy : x - y = 1\};$$

Розв'язування вправи б). Нехай $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$. Криву $\{z : |z| = R, |\arg z| \le \pi/4\}$ можна записати у вигляді $\{z : r = R, -\pi/4 \le \theta \le \pi/4\}$. За формулами переходу для відображення $w = z^2$ маємо $\rho = r^2$, $\varphi = 2\theta$. Тому образом нашої кривої буде крива $\{w : \rho = R^2, -\pi/2 \le \varphi \le \pi/2\} = \{w : |w| = R^2, |\arg w| \le \pi/2\}$.

Розв'язування вправи д). Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тоді для функції $w = z^2$ маємо $u + iv = x^2 + 2ixy - y^2$, тобто, крім вказаних вище формул переходу, справедливі також наступні формули переходу $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Криву $\{z = x + iy : x + y = 1\}$ можна записати у вигляді $\{z = x + iy : x = t, y = 1 - t\,(t \in \mathbb{R})\}$. Тому її образом є парабола $\{w = u + iv : u = 2t - 1, v = 2t(1 - t)\,(t \in \mathbb{R})\} = \{w = u + iv : v = \frac{1}{2}(1 - u^2)\}$.

2.3. Знайти образи вказаних областей при відображенні $w = z^2$:

$$а)\ \{z : \operatorname{Re} z > 0\};\ б)\ \{z : \operatorname{Im} z > 0\};\ в)\ \{z : \operatorname{Re} z > 1\};\ г)\ \{z : \operatorname{Im} z < -1\};$$
$$д)\ \{z : \pi < \arg_0 z < 3\pi/2\}; \quad е)\ \{z : |z| < 1, 5\pi/4 < \arg_0 z < 3\pi/2\};$$
$$є)\ \{z : |z| < 2, 0 < \arg z < \pi/2\}; \quad ж)\ \{z : |z| > 1/2, \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Розв'язування вправи в). Спочатку дослідимо, яким є образ краю $\{z : \operatorname{Re} z = 1\}$ нашої області при даному відображенні. Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Пряму $\{z : \operatorname{Re} z = 1\}$ можна записати у вигляді $\{z : x = 1\}$. Використовуючи формули переходу $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, бачимо, що образом цієї прямої є парабола $\{w = u + iv : u = 1 - y^2, v = 2y\,(y \in \mathbb{R}\} = \{w = u + iv : u = 1 - \frac{1}{4}v^2\}$.

Оскільки точка $z = 2$ переходить у точку $w = 4$, то образом області $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ є область $\{w = u + iv : u \ge 1 - \frac{1}{4}v^2\}$.

Розв'язування вправи є). Нехай $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$. Тоді область $\{z : |z| < 2, 0 < \arg z < \pi/2\}$ запишеться у вигляді $\{z : r < 2,$

$0 < \theta < \pi/2\}$. Використовуючи формули переходу $\rho = r^2$, $\varphi = 2\theta$, бачимо, що образом цієї області є $\{w : \rho < 4, \ 0 < \varphi < \pi\}=$ $=\{w : |w| < 4, 0 < \arg w < \pi\}$ (див. рис. 10.2).

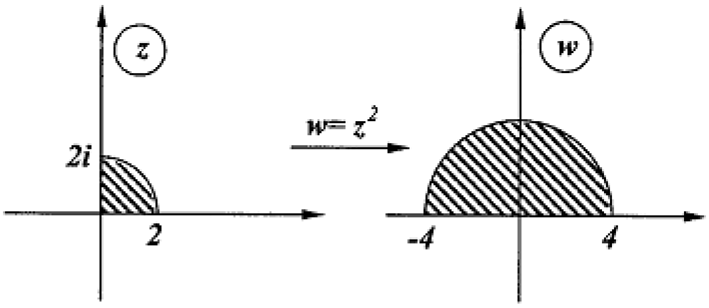
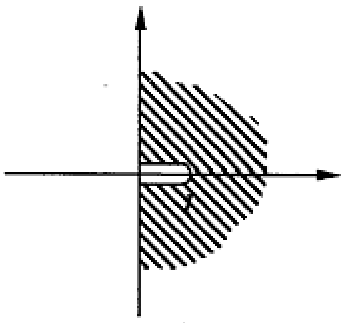


Рис. 10.2

2.4. Знайти образи заданих множин E при вказаних відображеннях:
а) $E = \{z : |z| = 2, \pi/8 < \arg z < \pi/4\}$, $\quad w = z^4$, $\quad w = z^5$;
б) $E = \{z : \arg z = \pi/4\}$, $\quad w = z^3$, $\quad w = z^4$;
в) $E = \{z : |\arg z| < \pi/8, z \notin [0, 1]\}$, $\quad w = z^4$, $\quad w = z^8$.

Розв'язування вправи в). Нехай $z = re^{i\theta}$, $w = \rho e^{i\varphi}$. Тоді для функції $w = z^4$ формули переходу мають вигляд $\rho = r^4$, $\varphi = 4\theta$, а для функції $w = z^8$ — вигляд $\rho = r^8$, $\varphi = 8\theta$. Тому образом області $\{z : |\arg z| <$ $< \pi/8\}$ при першому відображенні є область $\{w : |\arg w| < \pi/2\}$ (див. рис. 10.3), а при другому — область $\{w : |\arg w| < \pi\}$ (див. рис. 10.4). Відрізок $[0, 1]$ в обох випадках переходить у відрізок $[0, 1]$.



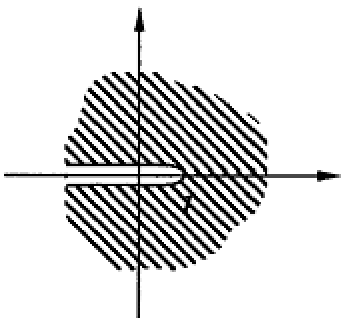


Рис. 10.3 Рис. 10.4

Функція Жуковського

2.5. Знайти образи вказаних множин при відображенні функцією Жуковського $J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$:

$$а)\ \{z:\ \arg z = \alpha\};\quad б)\ \left\{z:\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{5\pi}{6}\right\};$$

$$в)\ \left\{z:\ \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4},\ z \notin [0, i]\right\};\quad г)\ \{z:\ |z| < 1,\ z \notin [0, 1]\};$$

$$д)\ \{z:\ |z| > 1,\ z \notin [-2, -1],\ z \notin [1, +\infty)\};\quad е)\ \left\{z:\ |\arg z + \frac{\pi}{2}| < \frac{\pi}{4}\right\};$$

$$є)\ \left\{z:\ |z| > 2,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\};\quad ж)\ \left\{z:\ |z| = r,\ -\frac{\pi}{2} < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\};$$

$$з)\ \{z:\ |z| > 1,\ z \notin [-2,\ -1],\ z \notin [1,\ +\infty)\};$$

$$й)\ \{z:\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus \left\{z:\ |z| = 1,\ 0 < \arg z < \frac{\pi}{4}\right\};$$

$$і)\ \{z:\ |z| < 1,\ \operatorname{Im} z < 0,\ z \notin [-i,\ -i/2]\};\quad ї)\ \{z:\ |z| < 1,\ z \notin [0,\ 1]\}.$$

Розв'язування вправи а). Нехай $z = re^{i\theta}$, $w = u + iv$. Тоді використовуючи формули переходу

$$u = \frac{1}{2}\left(r + \frac{1}{r}\right)\cos\theta, \quad v = \frac{1}{2}\left(r - \frac{1}{r}\right)\sin\theta,$$

при фіксованому $\theta = \alpha$ маємо

$$\frac{u^2}{\cos^2\alpha} - \frac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1,$$

і образ належить тій вітці гіперболи, вершина якої знаходиться в точці $(\cos\alpha,\ 0)$.

Нехай $\alpha \in (-\pi/2,\ \pi/2)$. Тоді $\operatorname{sign} u = \operatorname{sign} x$ і, оскільки при зміні параметра r в інтервалах $(0,\ 1)$, $(1,\ +\infty)$ величина $(r - 1/r)$ змінюється, відповідно, в інтервалах $(-\infty,\ 0)$, $(0,\ +\infty)$, то образом променя в цьому випадку є права вітка гіперболи. Узгоджені напрями обходів для $\alpha \in (0, \pi/2)$ зображені на рис. 10.5.

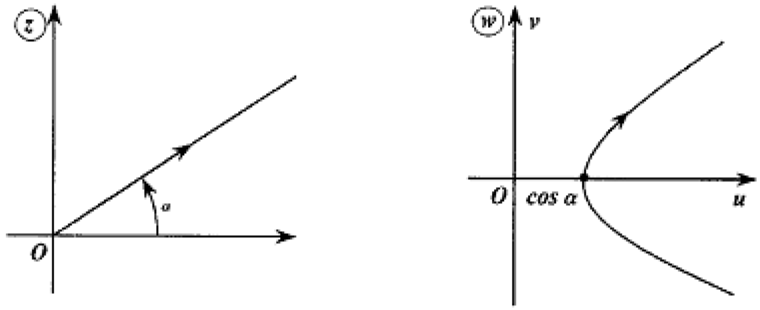


Рис. 10.5

Для $\alpha \in (-\pi/2, 0)$ напрями обходів протилежні. Аналогічно досліджується випадок, коли $\cos\alpha < 0$.

Розв'язування вправи в). Знайдемо образ краю області. Нехай $w = u + iv$, $z = re^{i\theta}$. Використовуючи формули переходу, як при розв'язуванні вправи а), бачимо, що промінь $\theta = \pi/4$ переходить у вітку гіперболи

$$\frac{u^2}{(\sqrt{2}/2)^2} - \frac{v^2}{(\sqrt{2}/2)^2} = 1.$$

Оскільки $\cos\pi/4 > 0$ і $\sin\pi/4 > 0$, то $u > 0$ і образом променя $\{z : \arg z = \pi/4\}$ є права вітка гіперболи.

Аналогічно можна показати, що промінь $\{z : \arg z = 3\pi/4\}$ переходить у ліву вітку параболи (див. рис. 10.6). Ясно, що $J(2i) = 3i/4$. Тому за принципом збереження області область $\{z : \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}$ переходить в область, яка обмежена вітками гіперболи і містить точку $z = 3i/4$. Подивимось, у що переходить відрізок $[0, i]$. Тут $0 < r < 1$ і $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$. Тому $u = 0$ і $v = \dfrac{1}{2}\left(r - \dfrac{1}{r}\right)$, $0 < r < 1$. Тому відрізок $[0, i]$ переходить у промінь $[-\infty i, 0]$ (див. рис. 10.6).

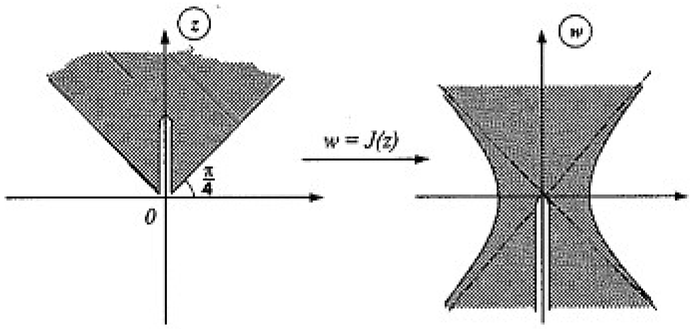


Рис. 10.6

Показникова функція

2.6. Знайти образ областей D при вказаних відображеннях:

а) $D = \{z : -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}$, $w = e^z$; *б)* $D = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi\}$, $w = e^z$;

в) $D = \{z : |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$, $w = e^z$; *г)* $D = \{z : |\operatorname{Re} z| < \pi/2\}$, $w = 2e^{iz}$;

д) $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = e^z$;

е) $D = \{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2, \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = e^{2z}$;

є) $D = \{z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = e^{iz}$.

Розв'язування вправи д). Нехай $z = x + iy$ і $w = \varrho e^{i\theta}$. Запишемо формули переходу $\varrho = e^x$, $\theta = y$. Оскільки $D = \{z : x > 0, 0 < y < \pi\}$, то образом D є $D' = \{w : \varrho > 1, 0 < \theta < 2\pi\}$ (див. рис. 10.7).

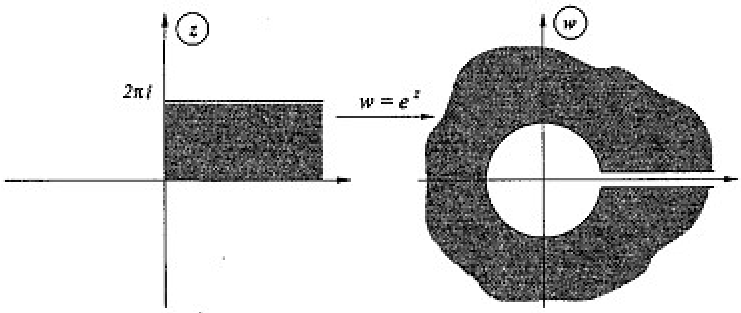


Рис. 10.7

Тригонометричні та гіперболічні функції

2.7. Використовуючи означення тригонометричних функцій, довести наступні рівності:

$$a)\ \cos^2 z + \sin^2 z = 1; \quad б)\ \sin(z+w) = \sin z \cos w + \sin w \cos z;$$

$$в)\ \cos(z+w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w; \quad г)\ \sin(z+\pi) = -\sin z;$$

$$д)\ \sin(\pi/2 - z) = \cos z; \quad е)\ \cos(z+\pi/2) = -\sin z.$$

Розв'язування вправи д).

$$\sin(\pi/2 - z) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(\pi/2-z)} - e^{-i(\pi/2-z)}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\pi/2}e^{-iz} - e^{-i\pi/2}e^{iz)}\right) = \\ = \frac{1}{2i}\left(ie^{-iz} + ie^{iz)}\right) = \cos z.$$

2.8. Нехай $z = x + iy$. Довести нерівності:

$$a)\ \frac{1}{2}\left(e^{|y|} - e^{-|y|}\right) \le |\sin z| \le \frac{1}{2}\left(e^{|y|} + e^{-|y|}\right);$$

$$б)\ \frac{1}{2}\left(e^{|y|} - e^{-|y|}\right) \le |\cos z| \le \frac{1}{2}\left(e^{|y|} + e^{-|y|}\right).$$

2.9. Знайти всі розв'язки рівнянь:

$$a)\ \sin z = 0; \quad б)\ \sin z = 4i/3; \quad в)\ \sin z = 5/3;$$

$$г)\ \cos z = 0; \quad д)\ \cos z = 3i/4; \quad е)\ \cos z = i\sqrt{3};$$

Розв'язування вправи е). Це рівняння можна записати у вигляді $e^{iz} + e^{-iz} = 2i\sqrt{3}$, або $e^{2iz} - 2i\sqrt{3}e^{iz} = 1$, звідки $e^{iz} = i\sqrt{3} + \sqrt{-4}$ і

$$z \in -i\mathrm{Ln}\,(i\sqrt{3} + 2\sqrt{-1}) = -i\ln|\sqrt{3} \pm 2| + \arg(i(\sqrt{3} \pm 2)) + 2k\pi\cancel{i} = \\ = -i\ln|\sqrt{3} \pm 2| \pm \pi/2 + 2k\pi\cancel{i}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2.10. Вивести формули переходу для тригонометричних та гіперболічних функцій і дослідити образи горизонтальних та вертикальних прямих при відображенні такими функціями.

Розгляд функції $w = \sin z$. Нехай $z = x + iy$, $w = u + iv$. Тоді

$$u + iv = \sin(x + iy) = \sin x \cos iy + \sin iy \cos x = \sin x \operatorname{ch} y + i \operatorname{sh} y \cos x,$$

звідки дістаємо формули переходу

$$u = \sin x \operatorname{ch} y, \quad v = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Використовуючи ці формули переходу, бачимо, що образом горизонтальної прямої $\{z = x + iy : y = a = \text{const} \neq 0\}$ є еліпс

$$\frac{u^2}{\operatorname{ch}^2 a} + \frac{v^2}{\operatorname{sh}^2 a} = 1,$$

а образом вертикальної прямої $\{z = x + iy : x = a = \text{const} \neq k\pi/2\}$ є гіпербола

$$\frac{u^2}{\sin^2 a} - \frac{v^2}{\cos^2 a} = 1.$$

Образом прямої $\{z = x + iy : y = 0$ є відрізок $[-1, 1]\}$ (обходиться двічі), прямої $\{z = x + iy : x = 0\}$ — уявна вісь, прямої $\{z = x + iy : x = \pi/2 + 2k\pi\}$ — додатний промінь, а прямої $\{z = x + iy : x = -\pi/2 + 2k\pi\}$ — від'ємний промінь.

2.11. Знайти образ множини при вказаному відображенні:

а) $\{z : 1 < \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z < 1\}, \quad w = \sin \dfrac{\pi(2z - 3 - 2i)}{2}$;

б) $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < 2\pi, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \sin z$;

в) $\{z : -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z < 0\}, \quad w = \sin z$;

г) $\{z : -\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \dfrac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = \sin z$;

д) $\{z : -\pi < \operatorname{Re} z < 0\}, \quad w = \cos z$;

е) $\{z : -\pi < \operatorname{Im} z < 0\}, \quad w = \operatorname{ch} z$.

Розв'язування вправи е). Оскільки

$$\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}\left(e^z + e^{-z}\right) = J\left(e^z\right),$$

то шуканий образ можна знайти, як вказано на рис. 10.8

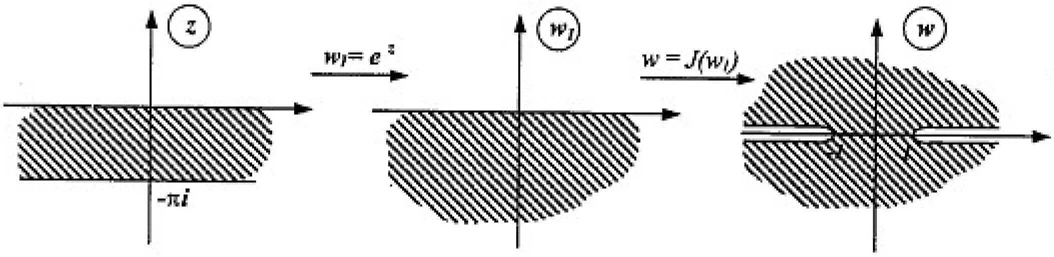


Рис. 10.8

Дробово-лінійна функція

2.12. Знайти точку, симетричну відносно кола $\{z : |z| = 1\}$ до заданої точки:

$$a)\, z_1 = \frac{1+i}{2}; \quad б)\, z_1 = \frac{i}{2}; \quad в)\, z_1 = \frac{1}{3} + \frac{i}{4}; \quad г)\, z_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{4};$$

Розв'язування вправи а). Оскільки $z_1 = \dfrac{1+i}{2} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/4}$, то для шуканої точки маємо $z_2 = |z_2|e^{i\pi/4}$ і $|z_1||z_2| = 1$, тобто $|z_2| = \sqrt{2}$ і $z_2 = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = 1 + i$.

2.13. Знайти загальний вигляд дробово-лінійного відображення одиничного круга $\{z : |z| < 1\}$ на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$.

2.14. Знайти загальний вигляд дробово-лінійного відображення одиничного круга $\{z : |z| < 1\}$ на одиничний круг $\{w : |w| < 1\}$.

Розв'язування. Припустимо, що деяка точка $z = \alpha \neq 0$ з круга $\{z : |z| < 1\}$ переходить у точку $w = 0$. Оскільки точка $z = 1/\overline{\alpha}$ є симетричною до точки $z = \alpha$ відносно кола $\{z : |z| = 1\}$, а точка $w = \infty$ є симетричною до точки $w = 0$ відносно кола $\{w : |w| = 1\}$, то точка $z = 1/\overline{\alpha}$ повинна перейти в точку $w = \infty$. Тому шукане дробово-лінійне відображення має вигляд

$$w = k\frac{z-\alpha}{z-1/\overline{\alpha}}, \quad k = \mathrm{const},$$

або

$$w = q\frac{z-\alpha}{1-z\overline{\alpha}}, \quad q = \mathrm{const}.$$

Якщо $|z| = 1$, то $1/z = \overline{z}$ і

$$|1 - z\overline{\alpha}| = |1/z - \overline{\alpha}| = |\overline{z} - \overline{\alpha}| = |z - \alpha|,$$

а оскільки коло $\{z : |z| = 1\}$ переходить у коло $\{w : |w| = 1\}$, то звідси виводимо, що $|q| = 1$, тобто $q = e^{i\psi}$.

Отже, загальний вигляд дробово-лінійного відображення одиничного круга $\{z : |z| < 1\}$ на одиничний круг $\{w : |w| < 1\}$ є

$$w = e^{i\psi}\frac{z-\alpha}{1-z\overline{\alpha}},$$

де $\psi \in [-\pi, \pi)$ і $|\alpha| < 1$ (при $\alpha = 0$ результат зберігається).

2.15. Знайти образ круга $\{z : |z - 1| < 2\}$ при відображеннях:

$$а)\, w = \frac{2iz}{z+3}; \quad б)\, w = \frac{z+1}{z-2}; \quad в)\, w = \frac{z-1}{2z-6};$$

$$г)\, w = \frac{z-3+i}{z+1+i}; \quad д)\, w = \frac{z}{z+1}; \quad е)\, w = \frac{z+1}{z-3};$$

Розв'язування вправи б). Запишемо

$$w = \frac{z+1}{z-2} = 1 + \frac{3}{z-2}$$

і спочатку здійснимо відображення $w_1 = z - 2$. Дістанемо круг

$$\{w_1 : |w_1 + 1| < 2\} = \{w_1 = x + iy : (x+1)^2 + y^2 < 4\} =$$
$$= \{w_1 = x + iy : x^2 + y^2 + 2x - 3 < 0\}.$$

Образом цього круга при відображенні $w_2 = 1/w_1$ є область

$$\{w_2 = u + iv : -3(u^2 + v^2) + 2u + 1 < 0\} =$$
$$= \{w_2 = u + iv : (u - 1/3)^2 + v^2 > 4/9\} = \{w_2 : |w_2 - 1/3| > 2/3\}.$$

Далі, здійснимо відображення $w_3 = 3w_2$. Отримаємо область $\{w_3 : |w_3 - 1| > 2$. І нарешті, при відображенні цієї області функцією $w = w_3 + 1$ дістанемо область $\{w : |w - 2| > 2$ (див. рис. 10.9).

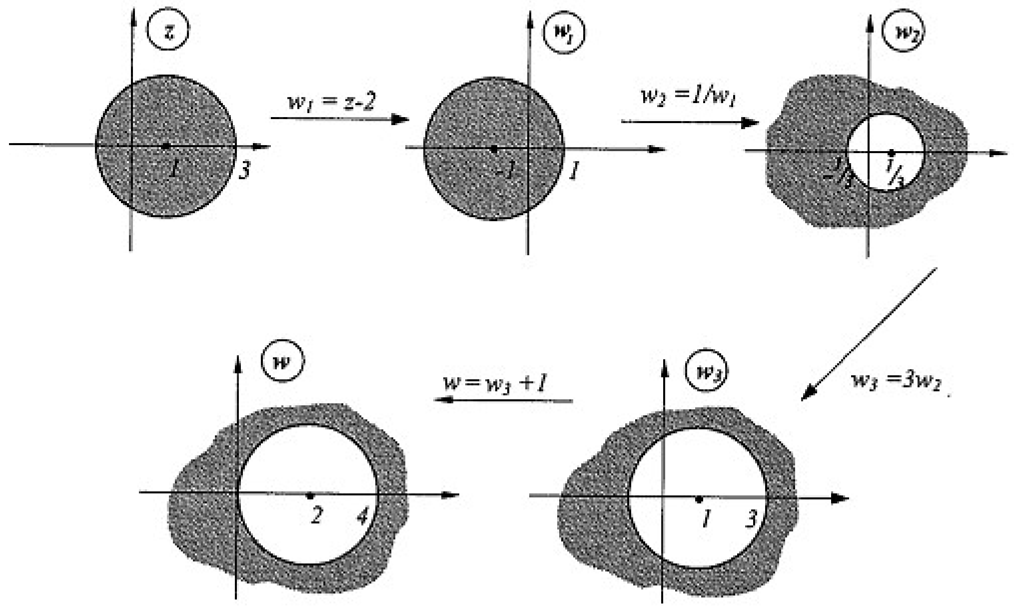


Рис. 10.9

Розв'язування вправи е). Тут ми не будемо використовувати стандартний метод, застосований при розв'язуванні попередньої вправи, а використаємо деякі висновки теорії дробово-лінійних відображень.

Оскільки точка $z = 3$ лежить на колі $\{z : |z-1| = 2$ і $w(3) = \infty$, то образом цього кола є пряма, яка проходить через точки $w(-1) = 0$ і $w(1+2i) = -i$, тобто уявна вісь. Але $w(0) = -1/3$. Тому за принципом збереження області образом нашого круга є півплощина $\{w : \operatorname{Re} w < 0\}$.

2.16. Знайти образ півплощини $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ при відображеннях:

$$а)\, w = \frac{z}{z-i+1}; \quad б)\, w = \frac{z}{z-2}; \quad в)\, w = \frac{4z}{z+1};$$

$$г)\, w = \frac{3z-1}{z-1}; \quad д)\, w = \frac{z}{z+1}; \quad е)\, w = \frac{z+1}{z-3};$$

Розв'язування вправи б). Запишемо $w = \dfrac{z}{z-2} = 1 + \dfrac{2}{z-2}$. При відображенні $w_1 = z - 2$ півплощина $\{z : \operatorname{Re} z > 1\}$ переходить у півплощину

$$\{w_1 : \operatorname{Re} w_1 > -1\} = \{w_1 = x + iy : x > -1\},$$

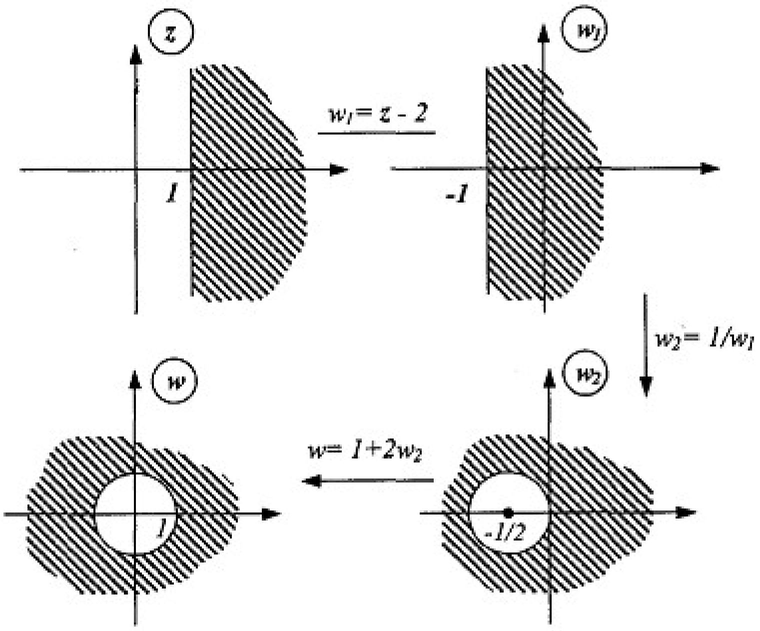


Рис. 10.10

а ця півплощина при відображенні $w_2 = 1/w_1$ переходить в область

$$\{w_2 = u + iv : u^2 + v^2 + u > 0\} = \{w_2 : |w_2 + 1/2| > 1/2\}.$$

Здійснюючи потім відображення $w = 1 + 2w_2$, дістанемо область $\{w : |w| > 1\}$ (див. рис. 10.10).

2.17. Знайти образи заданих областей при вказаних відображеннях:

а) $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \dfrac{1-z}{1+z}$; *б)* $\{z : |z-i| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \dfrac{1}{z}$;

в) $\{z : 1 < |z| < 2\}$, $w = \dfrac{2}{z-1}$; *г)* $\{z : z \notin [-2, 1]\}$, $w = \dfrac{z+2}{1-z}$.

Розв'язування вправи г). Оскільки функція $w = \dfrac{z+2}{1-z}$ є дійсною на дійсній осі, $w(-2) = 0$, $w(0) = 2$ і $w(1) = \infty$, то відрізок $[-2, 1]$ переходить у промінь $[0, +\infty)$, а область $\{z : z \notin [-2, 1]\}$ в область $\{w : w \notin [0, +\infty)\}$.

2.18. Відшукати дробово-лінійну функцію, яка задовольняє умови

а) $w(0) = 4,\ w(2i) = 0,\ w(1+i) = 1+i;$
б) $w(0) = 0,\ w(1+i) = 2+2i,\ w(2i) = 4;$
в) $w(1) = i,\ w(\infty) = 2,\ w(i) = \infty;$
г) $w(i) = 2,\ w(\infty) = 1+i,\ w(-i) = \infty;$
д) $w(i) = 0,\ w(\infty) = 1,\ w(1+i) = 1+i;$
е) $w(i) = -2,\ w(\infty) = 2i,\ w(-i) = 2.$

Розв'язування вправи б). Шукану функцію знаходимо з рівності

$$\frac{w-0}{w-2-2i}\,\frac{4-2-2i}{4-0} = \frac{z-0}{z-1-i}\,\frac{2i-1-i}{2i-0},$$

звідки

$$w = \frac{2z}{z-i}.$$

2.19. Відшукати дробово-лінійну функцію $w = w(z)$, яка конформно відображає область G на область D і задовольняє вказані умови:

а) $G = \{z : |z| < 1\}$, $D = \{w : |w| < 1\}$, $w(1/2) = 1/2$, $\arg w'(1/2) = \pi/2$;

б) $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $D = \{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, $w(1+i) = i$, $\arg w'(1+i) = \pi/2$

в) $G = \{z : |z - 2| < 2\}$, $D = \{w : |w - 2i| < 2\}$, $w(2) = i$, $\arg w'(2) = \pi/2$.

Розв'язування вправи в). За теоремою про дробово-лінійне відображення симетричних точок з умови $w(2) = i$ випливає, що $w(\infty) = -2i$, а оскільки $\arg w'(2) = \pi/2$, то, завдяки консерватизму кутів, промінь $[2, +\infty)$ переходить у промінь $[i, +i\infty)$. Тому точка $z = 4$ перетину променя $[2, +\infty)$ з колом $\{z : |z - 2| = 2\}$ переходить у точку $w = 4i$ перетину променя $[i, +i\infty)$ з колом $\{w : |w - 2i| < 2\}$.

За трьома точками $\{2, 4, \infty\}$ та їх образами $\{i, 4i, -2i\}$ будуємо дробово-лінійну функцію

$$\frac{w - i}{w - 4i}\,\frac{-2i - 4i}{-2i - i} = \frac{z - 2}{z - 4},$$

тобто

$$w = \frac{-2iz}{z - 6}.$$

Розділ 11

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 3

Корінь n-го степеня

3.1. Нехай ω — примітивний корінь n-го степеня з 1, тобто $\omega^k \neq 1$ для всіх $k = 1, \ldots, n-1$, а ε — будь-який корінь n-го степеня з 1, $\varepsilon \neq 1$. Довести, що:

а) існує таке $k = 1, \ldots, n-1$, що $\varepsilon = \omega^k$;

б) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (\omega^m)^k = \begin{cases} 0, \text{якщо}\, m\, \text{не ділиться на}\, n, \\ n, \text{якщо}\, m\, \text{ділиться на}\, n. \end{cases}$

в) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (k+1)\varepsilon^k = \dfrac{n}{\varepsilon - 1}$;

г) $\sum\limits_{k=0}^{n-1} (k-1)^2\varepsilon^k = -\dfrac{n^2(1-\varepsilon)+2n}{(1-\varepsilon)^2}$;

д) $(z-\omega)(z-\omega^2)\ldots(z-\omega^{n-1}) = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.

Розв'язування вправи в). Маємо

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\varepsilon^k = \sum_{m=0}^{n-1}(\varepsilon^m + \varepsilon^{m+1} + \cdots + \varepsilon^{n-1}) = \sum_{m=0}^{n-1} \frac{\varepsilon^n - \varepsilon^m}{\varepsilon - 1}.$$

Але $\varepsilon^n = 1$. Тому

$$\sum_{m=0}^{n-1} \varepsilon^m = \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} = 0,$$

і ми дістаємо потрібну рівність.

3.2. Знайти образи областей G при відображенні вказаною віткою квадратного кореня:

а) $G = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, $w = \sqrt{z}$, $w(-1) = -i$;

б) $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \sqrt{z}$, $w(1) = 1$;

в) $G = \{z : z \notin [0, +\infty)\}$, $w = \sqrt{z}$, $w(-1) = -i$;

г) $G = \{z : z \notin (-\infty, 1]\}$, $w = \sqrt{z}$, $w(4) = 2$;

д) $G = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $w = \sqrt{z}$, $w(\frac{i}{2}) = \dfrac{1+i}{2}$;

е) $G = \{z : |z| > 1, \dfrac{3\pi}{4} < \arg z < \dfrac{5\pi}{4}\}$, $w = \sqrt{z}$, $w(-1) = i$;

є) $G = \{z = x + iy : y > 0, y^2 > 4x + 4\}$, $w = \sqrt{z}$, $w(-1) = i$;

ж) $G = \{z = x + iy : y^2 > 2x + 1\}$, $w = \sqrt{z}$, $w(-1) = -i$.

Розв'язування вправи в). Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $w = \varrho e^{i\theta}$. Формули переходу для вітки $w = (\sqrt{z})_k$, $k = 0,\ 1$, мають наступний вигляд $\varrho = \sqrt{r}$, $\theta = (\varphi + 2\pi k)/2$. Вважаючи головним значенням аргументу $\arg_0 z \in [0, 2\pi)$, маємо $\arg_0(-1) = \pi$, $\arg_0(-i) = 3\pi/2$. З умови $w(-1) = -i$ отримуємо $3\pi/2 = (\pi + 2\pi k)/2$, звідки $k = 1$. Тому для даної вітки формули переходу мають вигляд $\varrho = \sqrt{r}$, $\theta = (\varphi + 2\pi)/2$, а отже, образом області $G = \{z : r > 0,\ 0 < \varphi < 2\pi\}$ є область $D = \{w : \varrho > 0, \pi < \theta < 2\pi\}$ (див. рис. 11.1).

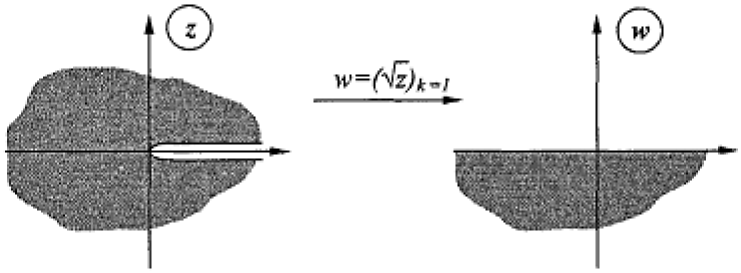


Рис. 11.1

Розв'язування вправи є). Як видно з розв'язування вправи в), з умови $w(-1) = i$ тепер випливає, що $k = 0$, тобто $\varrho = \sqrt{r}$, і $\theta = \varphi/2$. Використовуючи ці формули переходу, легко показати, що промінь $(-\infty, -1]$ переходить у промінь $[i, +i\infty)$.

Рівняння параболи $\{z = x + iy : y > 0, y^2 = 4x + 4\}$ в полярній системі координат має вигляд $r = r(\varphi) = \sin^{-2}(\varphi/2)$, $0 < \varphi \leq \pi$. Тому параметричний запис її образу має вигляд $(w = \sqrt{r(\varphi)}(\cos(\varphi/2) + +i\sin(\varphi/2))$, $\varphi \in (0, \pi])$, тобто $(w = \operatorname{ctg}(\varphi/2) + i$, $\varphi \in (0, \pi])$. А це — промінь $\{w = u+iv : v = i, u \geq 0\}$. Оскільки $w(0) = 0$, то за принципом збереження області образом є область $\{w : \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w > 1\}$.

Логарифм

3.3. Знайти образи областей G при відображені вказаною віткою многозначної функції $\operatorname{Ln} z$:

а) $G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [0, +\infty]\}$, $\quad w(-1) = -\pi i$;
б) $G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$, $\quad w(i) = \pi i/2$;
в) $G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-\infty, 0],\ z \notin [1, +\infty]\}$, $\quad w(i) = \pi i/2$;
д) $G = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\quad w(1 - i0) = -3\pi i/2$;
г) $G = \{z : |z| < 1, z \notin [0, 1)\}$, $\quad w(i) = i\pi/2$.

Розв'язування вправи в). Нехай $z = re^{i\varphi}$ і $w = u + iv$. Формули переходу для вітки $w = (\ln z)_k$ мають вигляд $u = \ln r$, $v = \varphi + 2\pi k$. З умови $w(i) = \pi i/2$ маємо $\pi i/2 = \ln 1 + \pi i/2 + 2\pi i k$, тобто $k = 0$. Отже, наша вітка має вигляд $w = (\ln z)_0 = \ln z$, а формулами переходу є $u = \ln r$, $v = \varphi$. Тому образом області G є область $D = \{w : |\operatorname{Im} w| < < \pi, w \notin [0, +\infty]\}$ (див. рис. 11.2).

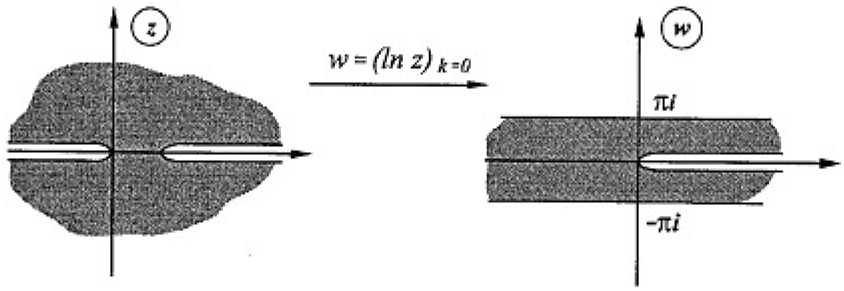


Рис. 11.2

Обернена до функції Жуковського. Узагальнена степенева функція

3.4. Знайти образи областей G при відображенні вказаною віткою оберненої J^{-1} до функції Жуковського:

$$а)\, G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-1, 1]\}, \qquad J^{-1}(0) = -i;$$

$$б)\, G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-1, 1]\}, \qquad J^{-1}(0) = i;$$

$$в)\, G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-\infty, -1],\ z \notin [1, +\infty]\}, \qquad J^{-1}(0) = i;$$

$$д)\, G = \{z \in \mathbb{C} : z \notin [-\infty, -1],\ z \notin [1, +\infty]\}, \qquad J^{-1}(0) = -i.$$

Розв'язування вправи в). Відомо, що функція Жуковського відображає на область G і верхню, і нижню півплощини. Обернена до функції Жуковського є двозначною аналітичною функцією. Одна з її віток відображає область G на верхню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$, а інша — на нижню півплощину $\{w : \operatorname{Im} w < 0\}$. За принципом збереження області з умови $J^{-1}(0) = i$ випливає, що шуканим образом є верхня півплощина.

3.5. Знайти образи областей G при відображенні вказаною віткою многозначної функції:

$$а)\, G = \{z : \ |z| < 4,\ \operatorname{Re} z > 0\}, \quad w = z^{-3/2},\ w(9) = -1/27;$$

$$б)\, G = \{z : \ |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}, \quad w = z^{3/2},\ w(i/2) = (1-i)/4.$$

Розв'язування вправи а). Потрібну однозначну вітку шукаємо в множині однозначних віток

$$\{\exp\{-3/2(\ln|z| + i\arg z + 2\pi k i)\}\}_{k\in\mathbb{Z}}\,.$$

З умови $w(9) = -1/27$ маємо $\exp\{-3/2(\ln 9 + 2\pi k i)\} = -1/27$, звідки отримуємо $k = 1$. Отже, шуканою віткою є $w = \exp\{-3/2(\ln|z| + +i(\arg z + 2\pi))\}$, і якщо $z = re^{i\varphi}$ і $w = \varrho e^{i\theta}$, то формули переходу мають вигляд $\varrho = r^{-3/2}$, $\theta = -3\varphi/2 - 3\pi$.

Оскільки область G задається умовами $r > 4$, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, то її образ D задається умовами $\varrho < 1/8$, $-2\pi - 7\pi/4 < \theta < -2\pi - \pi/4$, тобто $D = \{w : |w| < 1/8,\ \pi/4 < \arg_0 w < 7\pi/4\}$.

Вправи на знаходження конформних відображень

3.6. Відшукати функції, які здійснюють конформні відображення вказаних областей на півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

а) $\{z : \operatorname{Im} z > 0,\ z \notin [0, ih]\},\ h > 0$; б) $\{z : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$;

в) $\{z : |z| > 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$; г) $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| \leq 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$;

д) $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$; е) $\mathbb{C} \setminus \{[i + i\infty) \bigcup (-i\infty, 0]\}$;

є) $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| = 1,\ \operatorname{Im} z \geq 0\}$;

ж) $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1/2,\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [2i/\pi, +i\infty)$;

з) $\{z : |\operatorname{Re} z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\} \setminus [i, +i\infty)$;

й) $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi\} \setminus [0, +\infty)$;

і) $\{z : |\operatorname{Im} z| < \pi, z \notin [-i\infty, 0],\ z \notin [\pi, +\infty)\}$;

Розв'язування вправи а). Здійснюючи послідовно відображення (див. рис. 11.3)

$$w_1 = z^2,\ w_2 = w_1 + h^2,\ w_3 = \sqrt{w_2},\ \sqrt{-1} = i,$$

приходимо до шуканої функції $w = \sqrt{z^2 + h^2}$.

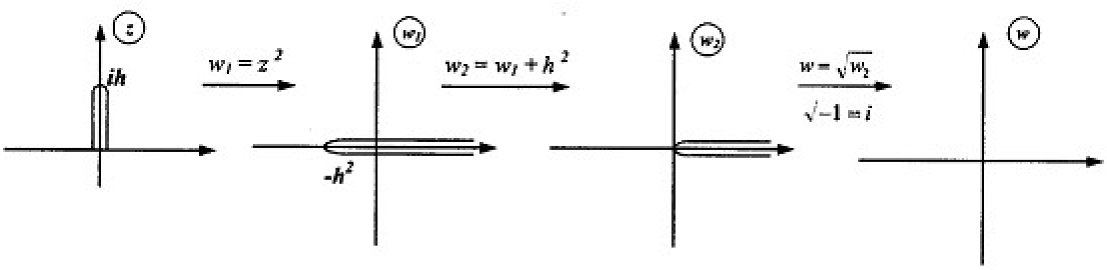


Рис. 11.3

Розв'язування вправи з). Нагадаємо, що функція $\sin z$ переводить півсмугу $\{z : |\mathrm{Re}z| < \pi/2, \mathrm{Im}z > 0\}$ у верхню півплощину. Промінь $\{z = iy : y > \pi/2\}$ при такому відображенні ($\sin iy = i\,\mathrm{sh}\, y$) переходить у промінь $\{w = iv : v > \mathrm{sh}(\pi/2)\}$. А далі здійснюємо відображення, як вказано на рисунку 11.4.

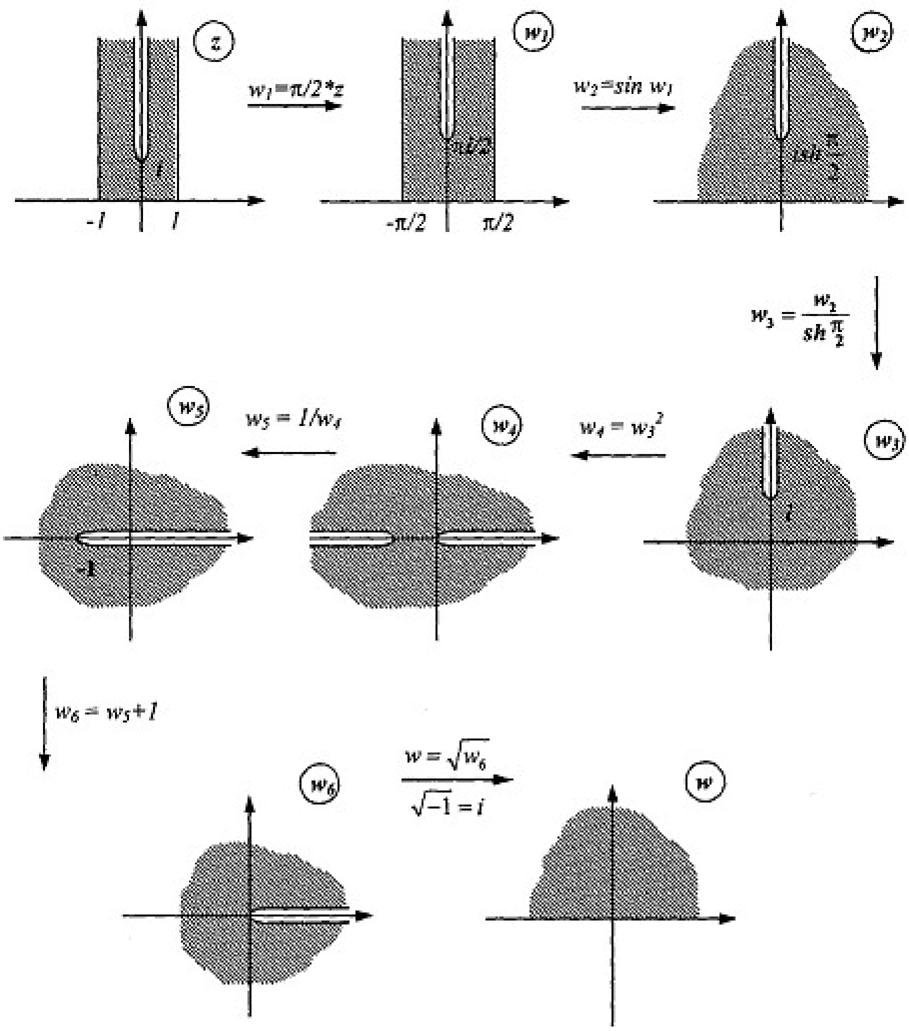


Рис. 11.4

Отже, $w = \sqrt{\dfrac{\mathrm{sh}^2\pi/2}{\sin^2 \pi z/2} + 1}$.

3.7. Відшукати функції, які здійснюють конформні відображення вказаних областей на смугу $\{w : 0 < \operatorname{Im} w < 1\}$:

$$а)\ \{z : 0 < \arg z < \pi\alpha\}, \quad 0 < \alpha < 2;$$
$$б)\ \{z : |z| > 1,\ 0 < \arg z < \alpha\}, \quad 0 < \alpha < 2\pi;$$
$$в)\ \{z : 0 < \arg z < 2\alpha\} \setminus \{z = re^{i\alpha} : r \geq 1\};$$
$$г)\ \{z : \operatorname{Im} z > 0,\ 0 < \operatorname{Re} z < 2\} \setminus \{z = x + i : x \geq 1\}.$$

Розв'язування вправи в). Здійснюючи послідовно відображення (див. рис. 11.5) $w_1 = z^{\pi/\alpha}$ (вибирається така вітка, що $(e^{i\alpha})^{\pi/\alpha} = -1$), $w_2 = \dfrac{1}{w_1} + 1$ і $w = \dfrac{1}{2\pi} \ln w_2$ $(\ln(-1) = i\pi)$, приходимо до шуканої функції $w = \dfrac{1}{2\pi} \ln \left(1 + \dfrac{1}{z^{\pi/\alpha}}\right)$.

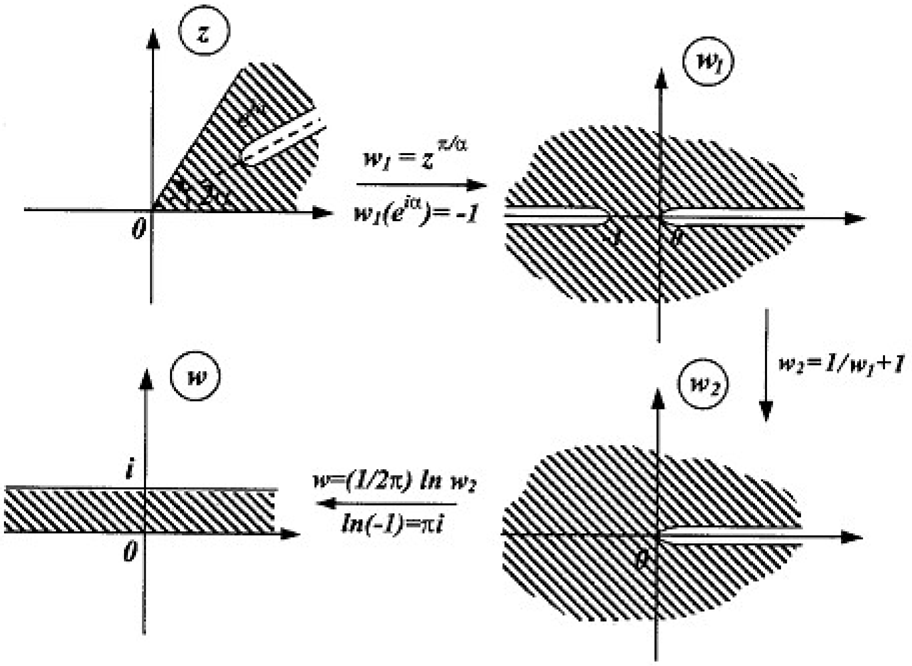


Рис. 11.5

3.8. Знайти функції, які конформно відображають вказані області на півплощину $\{w : \operatorname{Im} w > 0\}$:

а) $\{z : a < \operatorname{Re} z < b, \operatorname{Im} z > c\}$; *б)* $\{z : a < \operatorname{Im} z < b, \operatorname{Im} z < c\}$;

в) $\{z : |z+1| > 1, |z-2| > 2\}$; *г)* $\{z : |z-1| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$;

д) $\{z : |z-1| > 1, |z-2| < 2\}$; *е)* $\{z : |z-1| > 1, \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0\}$;

є) $\{z : |z-1/2| > 1/2, |z-1| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$.

Розв'язування вправи г). Оскільки задана область обмежена колом $\{z : |z-1| = 1\}$ та прямою $\{z : \operatorname{Re} z = 0\}$, які проходять через початок координат, то доцільно спочатку здійснити відображення $w_1 = 1/z$. Тоді образами цього кола і прямої будуть дві вертикальні прямі, що проходять через точки $w_1 = 0$, $w_1 = 1/2$. Тому, враховуючи консерватизм кутів, легко знаходимо, що образом області $\{z : |z-1| > 1, \operatorname{Re} z > 0\}$ є смуга $\{w_1 : 0 < \operatorname{Re} w_1 < 1/2\}$. А далі поступати, як на рисунку 11.6.

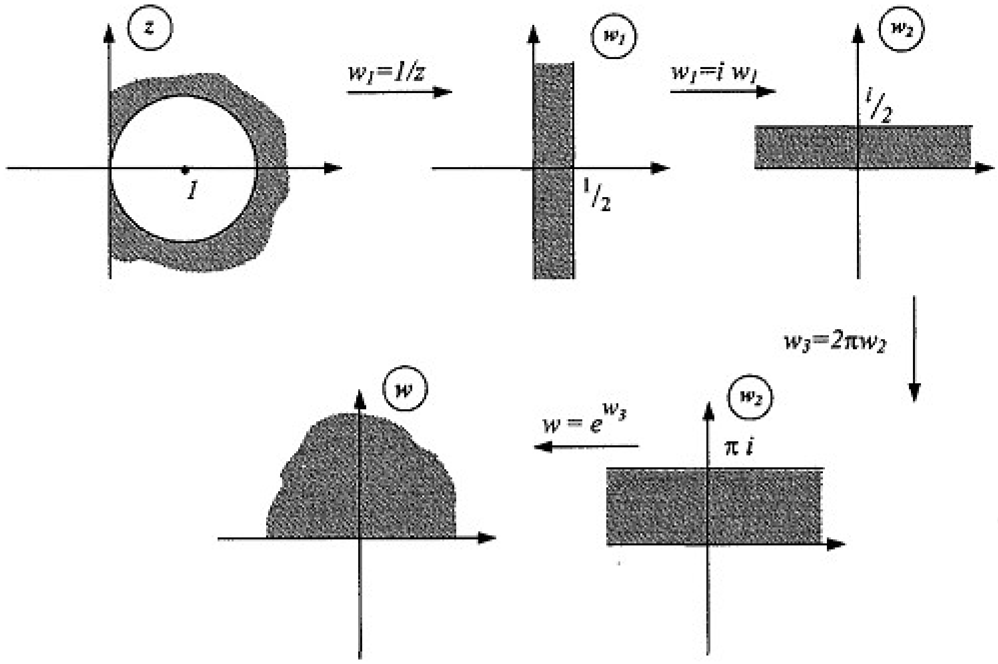


Рис. 11.6

Отже, шуканою функцією є $w = \exp\{2\pi i/z)\}$.

Розділ 12

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 4

Інтегрування функцій дійсної змінної

4.1. Обчислити інтеграли:

$$a)\ \int_0^1 (1+it)^2 dt; \quad б)\ \int_0^1 (a+(b-a)t)^n dt,\ (n\in\mathbb{N}); \quad в)\ \int_0^{\pi} e^{-it}dt;$$

$$г)\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{int}dt; \quad д)\ \int_0^1 \frac{dt}{1+it}; \quad е)\ \int_0^1 \frac{1+it}{1-it}dt;$$

Розв'язування вправи в).

$$\int_0^{\pi} e^{-it}dt = \int_0^{\pi} \mathrm{cos}t dt - i\int_0^{\pi} \mathrm{sin}t dt = -2i.$$

4.2. Нехай функція φ монотонна і неперервно диференційована на $[a,\, b]$, а функція $z = z(t)$ неперервна на $[\varphi(a),\, \varphi(b)]$. Довести, що

$$\int_a^b z(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} z(t)dt.$$

4.3. Довести нерівності:

$$a)\ \left|\int_a^b z(t)dt\right| \le \int_a^b |z(t)|dt; \quad б)\ \left|\int_a^b z(t)dt\right| \ge \left|\int_a^b \mathrm{Re}z(t)dt\right|;$$

$$в)\ \left|\int_a^b z(t)dt\right| \geq \left|\int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{i\alpha} z(t)\right) dt\right|.$$

Розв'язування вправи в). Маємо

$$\left|\int_a^b z(t)dt\right| \geq \left|\mathrm{Re}\int_a^b z(t)dt\right| = \left|\int_a^b \mathrm{Re}\, z(t)dt\right|.$$

Визначений інтеграл.
Інтегральні теореми та формули Коші

4.4. Безпосереднім переходом до границі в інтегральній сумі, обчислити інтеграли:

$$а)\ \int_C dz; \quad б)\ \int_C zdz; \quad в)\ \int_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z-z_0},\ r>0,$$

де C — довільна гладка крива, що з'єднує точки a і b.

Розв'язування вправи б). Підінтегральна функція є цілою. Тому інтеграл залежить тільки від точок a і b, і ми можемо в ролі C взяти відрізок $[a, b]$. Розіб'ємо його точками $a = z_0, z_1, ..., z_{n-1}, z_n = b$ на n рівних частин, а на кожному з відрізків $[z_j, z_{j+1}]$ виберемо точку $\tau_j = (z_j + z_{j+1})/2$. Для цього розбиття утворимо інтегральну суму

$$\sigma(f) = \sum_{j=0}^{n} f(\tau_j)\Delta z_j = \sum_{j=0}^{n} \frac{z_j + z_{j+1}}{2}(z_{j+1} - z_j) =$$
$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{n}(z_{j+1}^2 - z_j^2) = \frac{z_n^2 - z_0^2}{2} = \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

Тому $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma(f) = (b^2 - a^2)/2$, а оскільки інтеграл $\int_C zdz$ існує, то він дорівнює $(b^2 - a^2)/2$.

4.5. Обчислити інтеграли:

$$a)\ \int_C |z|dz, \quad (C = [-i,\, i] \quad \text{і} \quad C = \{z : |z| = 1,\, \mathrm{Re}\, z \geq 0\});$$

$$б)\ \int_C z\sin z dz, \quad (C = [-1,\, 1] \quad \text{і} \quad C = [0,\, 2 + 2i]);$$

$$в)\ \int_{|z|=1} |z-1|dz; \quad г)\ \int_C (z + \mathrm{Re}\, z)dz, \quad (C = [1,\, 1+i]).$$

Розв'язування вправи г). Оскільки $C = (z = 1 + it,\ 0 \leq t \leq 1)$, то

$$\int_C (z + \mathrm{Re}\, z)dz = \int_0^1 (1 + it + 1)idt = i\int_0^1 (2 + it)dt = i(2 + i/2) = 2i - 1/2.$$

4.6. Нехай функція f аналітична в обмеженій опуклій області G та $\mathrm{Re}\, f(z) \geq M > 0$ для всіх $z \in G$. Довести що для будь-яких точок $z_1 \in G$ і $z_1 \in G$

$$\left| \int_{[z_1, z_2]} f(z)dz \right| \geq M|z_2 - z_1|.$$

4.7. Використовуючи інтегральні теореми та формули Коші, обчислити інтеграли:

$$a)\ \int_{|z-3|=2} \frac{zdz}{z^4 - 16}; \quad б)\ \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}; \quad в)\ \int_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{(z-i)^3}; \quad г)\ \int_{|z|=9} \frac{\sin z dz}{z^2 - \pi^2};$$

$$д)\ \int_{\partial G} \frac{e^z dz}{(z-2)^2}, \quad (G = \{z : |z| < 1\} \quad \text{і} \quad G = \{z : |z| < 4\});$$

$$е)\ \int_{\partial G} \frac{dz}{(1+z)(1-z)^2}, \quad (G = \{z : |z-1| < 1\} \quad \text{і} \quad G = \{z : |z+1| < 1\});$$

$$є)\ \int_{\partial G} \frac{dz}{(z-2)(z+3)^3}, \quad (G = \{z : |z| < 1\} \quad \text{і} \quad G = \{z : |z-1| < 7\}).$$

Розв'язування вправи є). В замкненому крузі $\overline{G} = \{z : |z| \le 1\}$ підінтегральна функція аналітична. Тому за інтегральною теоремою Коші в цьому випадку наш інтеграл дорівнює нулю.

Щоб обчислити наш інтеграл у випадку, коли $G = \{z : |z-1| < 7\}$, запишемо

$$\frac{1}{(z-2)(z+3)^3} = \frac{1}{125}\left(\frac{1}{z-2} - \frac{z^2+11z+49}{(z+3)^3}\right),$$

звідки, використовуючи інтегральні формули Коші, маємо

$$\int_{\partial G} \frac{dz}{(z-2)(z+3)^3} = \frac{1}{125}\left(\int_{\partial G} \frac{dz}{(z-2)} - \int_{\partial G} \frac{z^2+11z+49}{(z+3)^3}dz\right) =$$
$$= \frac{2\pi i}{125}\left(1 - (z^2+11z+49)''\big|_{z=-3}\right) = \frac{2\pi i}{125}(1-2) = -\frac{2\pi i}{125}.$$

4.8. Нехай функція f аналітична в $\{z : |z-a| < R\}$ і неперервна в $\{z : |z-a| \le R\}$. Довести, що

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(a+Re^{i\theta})d\theta = f(a).$$

4.9. Нехай функція f аналітична в $\{z : |z-a| \le R\}$. Довести, що для всіх z, $|z| < R$,

$$\frac{|f^{(n)}(z)|}{n!} \le \frac{M\,R}{(R-|z|)^{n+1}}, \quad M = \max\{|f(z)| : |z| = R\}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

4.10. Довести, що у вказаних областях не мають (однозначної) первісної такі функції:

$$а)\ f(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z-1} \quad (0 < |z| < 1); \quad б)\ f(z) = \frac{z}{1+z^2} \quad (1 < |z| < +\infty);$$

$$в)\ f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)} \quad (0 < |z| < 1); \quad г)\ f(z) = \frac{1}{z} \quad (0 < |z| < +\infty).$$

Розв'язування вправи г). Оскільки необхідною і достатньою умовою існування первісної для неперервної в області G функції f є рівність нулю інтегралу від f вздовж будь-якої замкненої кривої з цієї області, а

$$\int\limits_{|z|=r>0} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} id\theta = 2\pi i \neq 0,$$

то функція $f(z) = 1/z$ не має первісної у вказаній області.

4.11. За вказаними функціями відновити аналітичні функції:

$$a) \operatorname{Re} f = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3, \quad f(0) = 0;$$

$$б) \operatorname{Re} f = e^x(x\cos y - y\sin y), \quad f(0) = 0;$$

$$в) \operatorname{Im} f = y\cos y \operatorname{ch} x + x\sin y \operatorname{sh} x, \quad f(0) = 0;$$

$$г) \operatorname{Re} f = xy; д) \operatorname{Re} f = x^2 - y^2 + xy;$$

$$e) \operatorname{Re} f = r\theta\cos\theta + r\ln r\sin\theta, \quad z = re^{i\theta};$$

$$є) |f| = (x^2 + y^2)e^x; \quad ж) |f| = \exp\{r^2\cos 2\theta, \quad z = re^{i\theta};$$

$$з) \arg f = xy; \quad й) \arg f = \theta + r\sin\theta, \quad z = re^{i\theta}.$$

Розв'язування вправи а). Легко перевірити, що функція $u = \operatorname{Re} f$ є гармонійною в $\mathbb{C}$ і, отже, є дійсною частиною аналітичної функції, уявна частина якої шукається у вигляді

$$v(x,y) = \int\limits_{(0,0)}^{(x,y)} \left(-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy\right) + C,$$

де $C = v(0,0) = \operatorname{Im} f(0) = 0$. Інтегруючи вздовж ламаної з вершинами в точках $(0,0)$, $(x,0)$, (x,y), знаходимо

$$v(x,y) = -\int_0^x 6x^2 + \int_0^y (3x^2 + 12xy - 3y^2)dy = -2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3.$$

Отже, $f(z) = x^3 + 6x^2y - 3xy^2 - 2y^3 + i(-2x^3 + 3x^2y + 6xy^2 - y^3)$.

4.12. Знайти всі гармонійні функції, які мають вигляд:

$$а)\, u = \varphi(x^2 + y^2);\, б)\, u = \varphi(x^2 - y^2);\, в)\, u = \varphi\left(\frac{x^2 + y^2}{x}\right);\, г)\, u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right);$$

Розв'язування вправи г). Вважаємо, що функція φ двічі неперервно диференційована на $(-\infty, +\infty)$. Оскільки

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{y^2}{x^4} + \varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{2y}{x^3}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x^2},$$

то умова гармонійності набуде вигляду

$$\frac{1}{x^4}\left(\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)(x^2 + y^2) + 2xy\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\right) = 0,$$

тобто (при $y = tx$)

$$\varphi''(t)(1 + t^2) + 2t\varphi'(t) = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, послідовно маємо

$$\ln \varphi'(t) = -\ln(1 + t^2) + \ln C_1, \quad C_1 = \text{const},$$

$$\varphi(t) = C_1 \operatorname{arctg} t + C_2, \quad C_2 = \text{const}.$$

Отже,

$$u = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = C_1 \operatorname{arctg} t + C_2 = C_1 \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + C_2.$$

4.13. Знайти всі такі аналітичні функції $f = u + iv$, для яких $u^2 + v^2 \equiv \alpha(x)$, тобто залежить тільки від x.

4.14. Чи існують аналітичні функції $f = u + iv$, для яких:

$$а)\, u = x^2 - y; \quad б)\, u = x^2 - y^2; \quad в)\, u = \frac{y}{x^2 + y^2}; \quad г)\, u = \frac{x}{y^2}.$$

4.15. Нехай функція f аналітична в області G і не набуває там нульового значення. Довести, що для всіх $z \in G$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\ln|f(x + iy)| = 0; \quad \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)|f(x + iy)| > 0.$$

Розділ 13

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 5

Рівномірна збіжність

5.1. Нехай ряд $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n(z)|$ рівномірно збіжний на множині E, а визначені на E функції v_n задовольняють умови $|v_n(z)| \leq |u_n(z)|$. Довести рівномірну збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}|v_n(z)|$.

5.2. Довести, що наступні ряди є рівномірно збіжними на вказаних у дужках множинах:

а) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2z^{2n}}$, $E=\{z: |z|\geq 1\}$; *б)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^{2n}}{z^n+z^{-n}}$, $E=\{z: |z|\leq\rho<\frac{1}{2}\}$;

в) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}e^{-nz}$, $E=\{z: \mathrm{Re}z\geq\delta>0\}$; *г)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$, $E=\{z: \mathrm{Re}z\geq\delta>1\}$;

Розв'язування вправи г). Оскільки

$$|n^{-z}|=n^{-\mathrm{Re}z}\leq n^{-\delta},\quad \delta>1,$$

то за ознакою Вейєрштрасса із очевидної збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-\delta}$ випливає рівномірна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}n^{-z}$.

5.3. Нехай послідовність (s_n) аналітичних в області G функцій збіжна рівномірно на кожному компакті з G до функції f. Довести, що функція f аналітична в області G.

Доведення. Приймемо $f_1 = s_1$, $f_n = s_n - s_{n-1}$ $(n > 1)$. Тоді функції f_n аналітичні в області G, а (s_n) є послідовністю часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Цей ряд рівномірно збіжний на кожному компакті з G до функції f. Тому за теоремою Вейєрштрасса функція f аналітична в G.

Степеневі ряди

5.4. Знайти множину збіжності степеневих рядів:

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} n^k z^n; \quad б)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^\alpha},\ \alpha > 0; \quad в)\ \sum_{n=0}^{\infty} [\ln{(n+2)}]^k z^n;$$

$$г)\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} z^n; \quad д)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^2}(z-3)^n.$$

Розв'язування вправи д). За формулою Коші-Адамара маємо

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |a_n|^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2}{|1+2i|^n} \right)^{1/n} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Отже, ряд збіжний у крузі $\{z\ :\ |z-3| < 1/\sqrt{5}\}$ і розбіжний в $\{z : |z-3| > 1\sqrt{5}$. На колі $\{z : |z-3| = 1/\sqrt{5}\}$ маємо

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+2i)^n}{n^2}(z-3)^n \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(1+2i)^n}{n^2(\sqrt{5})^n}(z-3)^n \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Отже, наш ряд збіжний в замкненому крузі $\{z : |z-3| \le 1/\sqrt{5}\}$.

5.5. Безпосереднім обчисленням $f^{(n)}(0)$ довести наступні справедливі для всіх z формули:

$$a)\ e^{az} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} z^n; \quad б)\ \sin az = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1};$$

$$в)\ \cos az = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{a^{2n}}{(2n)!} z^{2n}; \quad г)\ \operatorname{sh} az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1};$$

Розв'язування вправи г). Оскільки справедливі рівності $(\operatorname{sh} az)^{(2n)} = a^{2n} \operatorname{sh} az$, $(\operatorname{sh} az)^{(2n+1)} = a^{2n+1} \operatorname{ch} az$, то в точці $z = 0$ маємо

$$(\operatorname{sh} az)^{(k)} = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad k = 2n, \\ a^{2n+1}, & \text{якщо} \quad k = 2n+1. \end{cases}$$

Тому за теоремою Тейлора одержуємо

$$\operatorname{sh} az = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad |z| < \infty.$$

5.6. Використовуючи рівність $\dfrac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, справедливу при $|z| < 1$, довести формули:

$$а)\ \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \quad |z| < 1;$$

$$б)\ \frac{2}{(1+z)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)(n+2)z^n, \quad |z| < 1;$$

$$в)\ \frac{z^2}{z^2+b^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b^{-2n} z^{2n}, \quad |z| < |b|;$$

$$г)\ \frac{1}{z-b} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-n-1} z^n, \quad |z| \overset{>}{\cancel{<}} |b|;$$

$$д)\ \frac{1}{z^2-b^2} = \sum_{n=-\infty}^{-1} b^{-2(n+1)} z^{2n}, \quad |z| \overset{>}{\cancel{<}} |b|;$$

$$е)\ \frac{1}{(z-b)^2} = -\sum_{n=-\infty}^{-2} b^{-n-2} z^n, \quad |z| \overset{>}{\cancel{<}} |b|.$$

Розв'язування вправи б). Зауважимо, що

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Тому, диференціюючи почленно, маємо

$$\frac{2}{(1+z)^3} = \left(\frac{1}{1+z}\right)'' = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n\right)'' = \sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n (n-1)z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (n+1)(n+2)z^n$$

Розв'язування вправи в). У вказаній області виконується $|z/b| < 1$. Тому маємо

$$\frac{z^2}{z^2+b^2} = \frac{z^2}{b^2}\frac{1}{1+(z/b)^2} = \frac{z^2}{b^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n (z/b)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} b^{-2n} z^{2n}.$$

5.7. Розвинути в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$ функції:

$$а)\ \frac{2}{(z+1)^4};\quad б)\ \frac{z+1}{z^2+a^2}\ (a \neq 0);\quad в)\ \frac{z}{(z^2+1)(z^2-1)};$$
$$г)\ \frac{1}{1+z+z^2};\quad д)\ \cos^3 z;\quad е)\ e^z \sin z;\quad ж)\ \cos z \operatorname{ch} z;$$

Розв'язування вправи е).

$$e^z \sin z = \frac{1}{2i}e^z(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{1}{2i}e^{(1+i)z} - e^{(1-i)z}) =$$
$$= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+i)^n - (1-i)^n}{n!}z^n = \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty}(\sqrt{2})^n\frac{e^{ni\pi/4} - e^{-ni\pi/4}}{n!}z^n =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{n!}\sin\frac{n\pi}{4}z^n.$$

Ряди Лорана

5.8. Знайти множини збіжності наступних рядів Лорана:

$$a)\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-n^2} z^n; \quad б)\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 2^{-|n|}(z+1)^n; \quad в)\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{n^2+1};$$

$$г)\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} 3^n z^n; \quad д)\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(z-i)^n}{4^n+1}; \quad е)\ \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{z^{4n}}{n^4+1}.$$

Розв'язування вправи а). Оскільки

$$R_1 = \varlimsup_{n\to\infty} |a_{-n}|^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \left(2^{-n^2}\right)^{1/n} = 0$$

та

$$R_2 = \frac{1}{\varlimsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}} = \lim_{n\to\infty} \left(2^{n^2}\right)^{1/n} = +\infty,$$

то множиною збіжності нашого ряду є область $\{z : 0 < |z| < +\infty$.

5.9. Розвинути в ряд Лорана функцію f за степенями $(z-a)$ в кільці D (точка a та кільце D вказані в дужках):

$a)\ \dfrac{1}{(1+z)(z-2)} \quad (a=0,\ D=\{z : 1<|z|<2\});$

$б)\ \dfrac{1+z^4}{(z-1)(z+2)} \quad (a=0,\ D=\{z : 1<|z|<2\});$

$в)\ \dfrac{1}{z(z-3)^2} \quad (a=1,\ D=\{z : 1<|z-1|<2\});$

$г)\ \dfrac{1}{z^2(z^2-9)} \quad (a=1,\ D=\{z : 1<|z-1|<2\});$

$д)\ z^3 e^{1/z} \quad (a=0,\ D=\{z : 0<|z|<\infty);$

$е)\ z\sin\dfrac{1}{1-z} \quad (a=1,\ D=\{z : 0<|z-1|<\infty);$

$є)\ z^2 \exp\{\dfrac{1}{1-z}\} \quad (a=1,\ D=\{z : 0<|z-1|<\infty).$

Розв'язування вправи в). Розкладаючи на прості дроби і використовуючи розвинення в степеневий ряд функції $\frac{1}{1-z}$, маємо

$$\frac{1}{z(z-3)^2} = \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-3} - \frac{3}{(z-3)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{z-1+1} + \frac{1}{z-1-2} - \frac{3}{(z-1-2)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{z-1}\frac{1}{1+1/(z-1)} - \frac{1}{2}\frac{1}{1-(z-1)/2} - \frac{3}{4}\frac{1}{(1-(z-1)/2)^2}\right) =$$
$$= \frac{1}{9}\left(-\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-1)^n}{2^n} - \frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{(z-1)^n}{2^n}\right) =$$
$$= \sum_{n=-\infty}^{-1}\frac{(-1)^n}{9}(z-1)^n - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{3n+5}{9\,2^{n+2}}(z-1)^n.$$

Розв'язування вправи д). Використовуючи рівність

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < \infty,$$

маємо

$$z^3\,e^{1/z} = z^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{3-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{3}\frac{z^n}{(3-n)!}.$$

Розділ 14

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 6

Нулі аналітичних функцій. Теорема єдиності

6.1. Знайти всі нулі вказаних аналітичних функцій та встановити їх порядки:

$$\textit{а)}\ f(z)=\frac{\sin^3 z}{z^2};\quad \textit{б)}\ f(z)=\frac{(1+z^2)^2}{1-z^2};\quad \textit{в)}\ f(z)=\frac{1}{z^2}\exp\{\frac{1}{z+1}\};$$

$$\textit{г)}\ f(z)=\cos z\,\mathrm{ch}\,z;\quad \textit{д)}\ f(z)=\sin 3z-3\sin z;\quad \textit{е)}\ f(z)=z\mathrm{tg}^2\,z.$$

Розв'язування вправи а). Оскільки $\sin z$ має в точці $z=0$ нуль першого порядку, то $\sin z = z\,\varphi(z)$, $\varphi(0)\neq 0$. Тому

$$f(z)=\frac{\sin^3 z}{z^2}=\frac{z^3\varphi^3(z)}{z^2}=z\varphi^3(z),$$

тобто f має в $z=0$ нуль першого порядку.

Решта нулів $z_k=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$, функції $\sin z$ є нулями функції f першого порядку.

Розв'язування вправи в). Оскільки функція $\exp\{\dfrac{1}{z+1}\}$ в точці $z=\infty$ набуває значення 1, то функція $f(z)=\dfrac{1}{z^2}\exp\{\dfrac{1}{z+1}\}$ має в точці $z=\infty$ нуль другого порядку.

6.2. Чи існує аналітична в крузі $\{z : |z|<1\}$ функція f, яка задовольняє для всіх $n\in\mathbb{N}$ одну з наступних умов:

а) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\sin\frac{n\pi}{2}$; *б)* $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n}\cos n\pi$; *в)* $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+\cos n\pi}$;

г) $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}$; *д)* $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$;

е) $f\left(\frac{1}{n}\right)=f\left(-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2n+1}$.

Розв'язування вправи а). Оскільки $f\left(\frac{1}{2k}\right)=0$, $k\in\mathbb{N}$, то $f\equiv 0$. Але $f\left(\frac{1}{2k+1}\right)\neq 0$, $k\in\mathbb{N}$. Тому така функція не існує.

Розв'язування вправи г). Оскільки $f\left(\frac{1}{n}\right)=\left(\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)^{-1}$, $n\in\mathbb{N}$, то такою є функція $f(z)=\frac{z}{z+2}$.

6.3. Використовуючи теорему єдиності, довести рівність

$$\sin 2z = 2\sin z\cos z.$$

6.4. Нехай область G містить точку $z=\infty$, а функція f періодична та аналітична в G. Довести, що $f\equiv\mathrm{const}$ в G.

Ізольовані особливі точки однозначного характеру

6.5. Довести, що точка $z=a$ є усувною особливою точкою для вказаних функцій:

а) $\frac{z^2-1}{z^2+1}$, $(a=\infty)$; *б)* $\frac{\operatorname{tg} z}{z}$, $(a=0)$; *в)* $\frac{1}{\cos^2 z}-\frac{1}{(z-\pi/2)^2}$ $\left(a=\frac{\pi}{2}\right)$;

г) $\frac{1-\cos(z-1)}{(z-1)^2}$ $(a=1)$; *д)* $\frac{z^3-1}{(z-1)^3}$, $(a=\infty)$; *е)* $\operatorname{ctg} z-\frac{1}{z}$ $(a=0)$.

Розв'язування вправи а). Точка $z = \infty$ є усувною, бо

$$\lim_{z\to\infty}\frac{z^2-1}{z^2+1} = \lim_{z\to\infty}\frac{1-1/z^2}{1+1/z^2} = 1.$$

Розв'язування вправи е). Точка $z = 0$ є усувною, бо

$$\lim_{z\to 0}(\operatorname{ctg} z - 1/z) = \lim_{z\to 0}\frac{z\cos z - \sin z}{z\sin z} =$$

$$= \lim_{z\to 0}\frac{z(1-z^2/2+o(z^2)) - (z - z^3/6 + o(z^3))}{z(z-z^3/6+o(z^3))} = \lim_{z\to 0}\left(-\frac{z}{3} + o(z)\right) = 0.$$

6.6. Довести, що точка $z = a$ є полюсом для вказаних функцій і встановити його порядок:

$$а)\ \frac{z^2+1}{z+1} \quad (a=\infty); \qquad б)\ \frac{1}{(z^2+1)^2} \quad (a=i); \qquad в)\ \frac{z}{(e^z-1)^2} \quad (a=0);$$

$$г)\ \frac{z}{e^z+1} \quad (a=i\pi); \qquad д)\ \frac{\sin z}{(z-1)^2} \quad (z=1); \qquad е)\ \frac{\sin z}{z^3} \quad (z=0).$$

Розв'язування вправи а). Оскільки

$$\frac{z^2+1}{z+1} = z\frac{1+1/z^2}{1+1/z},$$

то за теоремою про канонічне зображення точка $a = \infty$ є полюсом першого порядку.

Розв'язування вправи б). Оскільки

$$\frac{1}{(z^2+1)^2} = \frac{1}{(z+i)^2(z-i)^2} = \frac{1}{(z+i)^2}\frac{1}{(z-i)^2},$$

то точка $z = i$ є полюсом другого порядку (за теоремою про канонічне зображення функції в околі її полюса).

6.7 Довести, що точка $z = a$ є істотно особливою точкою для вказаних функцій:

$$а)\, e^{z^2} \quad (a = \infty); \quad б)\, \sin\frac{\pi}{z^2} \quad (a = 0); \quad в)\, \sin\left(e^z\right) \quad (a = \infty);$$

$$г)\, z^2 \cos\left(\frac{\pi}{z}\right)\, (a = 0); \quad д)\, \exp\{\operatorname{tg} z\}\, (a = \pi/2); \quad е)\, \cos\left(\frac{z}{z+1}\right)\, (a = -1).$$

Розв'язування вправи ~~б~~ а*).* Оскільки $e^{z^2} \to +\infty$ при $z = x \to +\infty$ та $e^{z^2} \to 0$ при $z = iy$, $y \to +\infty$, то точка $a = \infty$ є істотно особливою.

Розв'язування вправи б). Покладемо $z_n = 1/\sqrt{n}$ і $w_n = \sqrt{\dfrac{2}{4n+1}}$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{z_n^2} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \sin\frac{\pi}{w_n^2} = 1.$$

Тому точка $z = 0$ є істотно особливою точкою.

6.8. Знайти всі ізольовані особливі точки наступних функцій та вказати їх характер:

$$а)\, \frac{z}{\sin z}; \quad б)\, \frac{1-\cos z}{\sin^2 z}; \quad в)\, z^2 \sin\frac{z}{z+1}; \quad г)\, \frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi z}{z+1};$$

$$д)\, z\left(e^{1/z} - 1\right); \quad е)\, \frac{1-e^z}{1+e^z}; \quad є)\, \frac{z^2}{z^4+1}; \quad ж)\, \frac{z^3}{z^2-1}\cos\frac{1}{z}.$$

Розв'язування вправи г). Скінченними особливими точками даної функції є $z = 1$ і $z = -1$. Запишемо функцію у вигляді

$$\frac{1}{z^2-1}\cos\left(\pi - \frac{\pi}{z+1}\right) = -\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi}{z+1} = \frac{1}{z^2-1}\sin\frac{\pi}{2}\frac{z-1}{z+1}.$$

Але

$$\lim_{z\to1}\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi}{z+1} = \frac{1}{4}\lim_{z\to1}\frac{z+1}{z-1}\sin\frac{\pi}{2}\frac{z-1}{z+1} = \frac{\pi}{8}.$$

Тому точка $z = 1$ є усувною особливою точкою.

Щоб визначити характер точки $z = -1$, розвинемо функцію $\dfrac{1}{z+1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$ в ряд Лорана

$$\frac{1}{z+1}\cos\frac{\pi}{z+1} = \frac{1}{z+1}\cos\frac{\pi}{z+1} = \sum_{n=o}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{(z+1)^{2n+1}(2n)!}.$$

Звідси випливає, що у головній частині ряду Лорана за степенями $(z+1)$ є нескінченно багато членів, а отже, точка $z = -1$ є істотно особливою для функції $\dfrac{1}{z+1}\cos\dfrac{\pi z}{z+1}$. Оскільки $\lim\limits_{z\to -1}\dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{2}$, то ця ж точка є істотно особливою і для заданої функції.

Нарешті,

$$\lim_{z\to\infty}\frac{1}{z^2-1}\cos\frac{\pi}{z+1} = 0$$

тобто точка $z = \infty$ є усувною особливою точкою.

Розв'язування вправи д). Особливими є тільки точки $z = 0$ і $z = \infty$. Розвинемо функцію в кільці $\{z : 0 < |z| < +\infty\}$ в ряд Лорана

$$z\left(e^{1/z} - 1\right) = z\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \cdots - 1\right) = 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \ldots$$

Якщо цей ряд розглядати як ряд Лорана в околі точки $z = \infty$, то в його головній частині нема членів, і тому $z = \infty$ є усувною особливою точкою. А якщо його розглядати як ряд Лорана в околі точки $z = 0$, то в його головній частині є нескінченно багато членів, і тому $z = 0$ є істотно особливою точкою.

Прицип максимуму

6.9. Лема Шварца. Нехай аналітична в крузі $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція f така, що $f(0) = 0$ і $|f(z)| \le M < +\infty$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Тоді $|f(z)| \le M|z|$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Якщо, крім того, $|f(z_0)| = M|z_0|$ для деякого $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \ne 0$, то $f(z) = Mze^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Доведення. Приймемо $\varphi(z) = \dfrac{f(z)}{z}$. Оскільки $f(0) = 0$, то функція φ аналітична в $\mathbb{D}$ і $|\varphi(z)| \le M/|z|$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Нехай $M_\varphi(r) =$

$= \max\{|\varphi(z)| : |z| = r\}$, $0 \le r < 1$. За принципом максимуму модуля функція $M_\varphi(r)$ є неспадною на $[0, 1)$. З іншого боку, $M_\varphi(r) \le M/r$ для всіх $r \in [0, 1)$. Звідси випливає, що $M_\varphi(r) \le M$ для всіх $r \in [0, 1)$, а отже, $|\varphi(z)| \le M$ для всіх $z \in \mathbb{D}$, тобто $|f(z)| \le M\,|z|$ для всіх $z \in \mathbb{D}$.

Припустимо, що $|f(z_0)| = M\,|z_0|$ в точці $z_0 \in \mathbb{D}$, $z_0 \ne 0$. Функція φ аналітична в деякому околі точки z_0 і, якщо б вона не була сталою, то існувала б така точка $z \in \mathbb{D}$, що $|\varphi(z)| > M$, що неможливо. Отже, $|\varphi(z)| \equiv M$ і $f(z) = Mze^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

6.10. Нехай функція f аналітична в $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| < 1\}$ і $|f(z)| > m > 0$ для всіх $z \in \partial\overline{\mathbb{D}}$. Довести, що якщо $|f(0)| < m$, то функція f має в $\mathbb{D}$ принаймні один нуль.

Доведення. Припустимо, що це не так, тобто $f(z) \ne 0$ для всіх $z \in \overline{\mathbb{D}}$. Тоді функція $\psi(z) = 1/f(z)$ є аналітичною в $z \in \overline{\mathbb{D}}$, і за принципом максимуму модуля $|\psi|$ досягає свого максимуму на колі $\partial\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| = 1\}$. Тому $|f|$ досягає свій мінімум на $\partial\overline{\mathbb{D}}$, а за умовою

$$m < \min\{|f(z)| : |z| = 1\} = \min\{|f(z)| : |z| \le 1\},$$

що суперечить нерівності $|f(0)| < m$.

6.11. Нехай аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція f така, що $f(0) = 0$ і $|f(z)| \le M < +\infty$ для всіх $z \in \mathbb{D}$. Тоді $|f'(0)| \le M$, причому знак рівності досягається, якщо $f(z) = Mze^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

6.12. Нехай функція f аналітична в $\overline{\mathbb{D}} = \{z : |z| < 1\}$, $|f(z)| \le M$ для всіх $z \in \partial\mathbb{D}$ і $f(a) = 0$, $|a| < 1$. Довести, що $|f(z)| \le M\dfrac{|z-a|}{|1-\overline{a}z|}$ для всіх $z \in \overline{\mathbb{D}}$.

6.13. Довести, що гармонійна в області $G \subset \mathbb{C}$ функція $u \not\equiv \text{const}$ не набуває в G свого максимуму і мінімуму.

6.14. Нехай функція f аналітична в області G і $\inf\{|f(z)| : z \in G\} > m > 0$. Довести, що тоді або $|f(z)| > m$ для всіх $z \in G$, або $f(z) = me^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Розділ 15

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 7

Обчислення лишків. Основна теорема про лишки

7.1. Обчислити

$$a)\ \operatorname*{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z^2}; \quad б)\ \operatorname*{res}_{z=\infty} e^{1/z}; \quad в)\ \operatorname*{res}_{z=\infty} z^2 \sin \frac{\pi}{z}; \quad г)\ \operatorname*{res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2};$$

$$д)\ \operatorname*{res}_{z=i} \frac{z^2}{z^4-1};\ е)\ \operatorname*{res}_{z=1} z \exp\left\{\frac{1}{z-1}\right\};\ є)\ \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^4+1}{z^6+1};\ ж)\ \operatorname*{res}_{z=\pi n} \operatorname{tg} z\,(n \in \mathbb{N}).$$

Розв'язування вправи б). Розвинемо функцію $f(z) = e^{1/z}$ в ряд Лорана в околі точки $z = \infty$. Маємо

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \dots.$$

Звідси

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} e^{1/z} = -a_{-1} = -1.$$

Розв'язування вправи г). Точка $z = 1$ є полюсом другого порядку заданої функції. Тому

$$\operatorname*{res}_{z=1} \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{1}{1!} \lim_{z \to 1} (e^z)' = e.$$

Розв'язування вправи є). Точка $z = \infty$ є нулем другого порядку заданої функції. Тому

$$\operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^4+1}{z^6+1} = 0.$$

7.2. Знайти лишки вказаних функцій в усіх їх скінченних особливих точках:

$$а)\ \frac{1}{z+z^3};\quad б)\ \frac{z^2}{1+z^4};\quad в)\ \frac{z^2}{(1+z)^3};\quad г)\ \frac{1}{(z^2+1)^3};$$

$$д)\ \frac{1}{(z^2+1)(z-1)^2};\quad е)\ \frac{z^{2n}}{(z-1)^n}\ (n \in \mathbb{N});\quad є)\ \frac{\cos z}{z-\pi/4};\quad ж)\ \frac{e^{z^2}}{z^{2n+1}};$$

$$з)\ \frac{1}{e^z+1};\quad й)\ \frac{1}{\sin \pi z};\quad і)\ \frac{\cos^2(\pi/z)}{z+1};\quad ї)\ \frac{z^{10}+1}{z^6(z^2+4)}.$$

Розв'язування вправи д). Вказана функція має скінченні особливі точки $z = 1, z = i, z = -i$. Точки $z = i$ та $z = -i$ є полюсами першого порядку. Тому

$$\operatorname*{res}_{z=i} f(z) = \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z-i)(z+i)(z-1)^2} = \left.\frac{1}{(z+i)(z-1)^2}\right|_{z=i} = \frac{1}{4};$$

$$\operatorname*{res}_{z=-i} f(z) = \left.\frac{1}{(z-i)(z-1)^2}\right|_{z=-i} = \frac{1}{4}.$$

Точка $z = 1$ є полюсом другого порядку, і тому

$$\operatorname*{res}_{z=1} f(z) = \left.\left(\frac{1}{z^2+1}\right)'\right|_{z=1} = -\left.\frac{2z}{(z^2+1)^2}\right|_{z=1} = -\frac{1}{2}.$$

Розв'язування вправи й). Особливими точками є полюси першого порядку $z_n = n$, $n \in \mathbb{N}$, а

$$\operatorname*{res}_{z=n} \frac{1}{\sin \pi z} = \frac{1}{\pi \cos \pi n} = \frac{(-1)^n}{\pi}.$$

Розв'язування вправи ї). Оскільки задана функція є парною, то

$$\operatorname*{res}_{z=0} \frac{z^{10}+1}{z^6(z^2+4)} = \operatorname*{res}_{z=\infty} \frac{z^{10}+1}{z^6(z^2+4)} = 0.$$

Далі,

$$\operatorname*{res}_{z=2i} \frac{z^{10}+1}{z^6(z^2+4)} = \lim_{z\to 2i} \frac{z^{10}+1}{z^6(z+2i)} = -\frac{1023}{256}\, i,$$

$$\operatorname*{res}_{z=-2i} \frac{z^{10}+1}{z^6(z^2+4)} = \lim_{z\to -2i} \frac{z^{10}+1}{z^6(z-2i)} = \frac{1023}{256}\, i.$$

7.3 Обчислити інтеграли

$$а)\ \int_{\partial D} \frac{dz}{1+z^4} \quad (D = \{z : |z-1| < 1\});$$

$$б)\ \int_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} \quad (D = \{z : |z-1-i| < 2\});$$

$$в)\ \int_{\partial D} \frac{dz}{z^{10}-2} \quad (D = \{z : |z| < 2\}); \quad г)\ \int_{\partial D} \frac{z^3 dz}{z^4-1} \quad (D = \{z : |z| < 2\});$$

$$е)\ \int_{\partial D} \frac{dz}{(z^2-1)(z-3)^3} \quad (D = \{z : 1 < |z-1| < 4\});$$

$$є)\ \int_{\partial D} \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)} \quad (D = \{z : |z-1| < 2\});$$

$$ж)\ \int_{\partial D} \frac{z^2 \sin^2(1/z)}{(z-1)(z-2)} \quad (D = \{z : |z-1| < 3\});$$

$$з)\ \int_{\partial D} \sin \frac{z}{z+1} dz \quad (D = \{z : |z| > 3\}).$$

Розв'язування вправи б). В області D містяться дві особливі точки підінтегральної функції: $z = 1$ (полюс другого порядку) і $z = i$ (полюс першого порядку). За основною теоремою про лишки маємо

$$\int\limits_{\partial D} \frac{dz}{(z-1)^2(z^2+1)} = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=1} f(z) \right) =$$
$$= 2\pi i \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

Розв'язування вправи в). Підінтегральна функція має особливі точки $z = 0$ і $z_k = (\sqrt[10]{z})_k, k = 0, 1, , , 9$, і всі вони містяться в області D. Тому наш інтеграл дорівнює лишкові в точці $z = \infty$, взятому зі знаком мінус. Але в цій точці підінтегральна функція має нуль 13–го порядку, і тому інтеграл дорівнює 0.

Застосування теорії лишків

7.4. Обчислити інтеграли:

$$а) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\cos\theta}; \quad б) \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{13 + 12\sin\theta};$$

$$в) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2\theta d\theta}{7 + 6\cos\theta}; \quad г) \int_0^{\pi/2} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2\theta}, \ (a > 0).$$

Розв'язування вправи а). Приймемо $z = e^{i\theta}$. Тоді $d\theta = \dfrac{dz}{iz}$, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ і ми отримуємо

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{5 + 3\cos\theta} = \frac{2}{3i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 + 10z/3 + 1} =$$
$$= \frac{4\pi}{3} \operatorname*{res}_{z=-1/3} \frac{1}{(z+3)(z+1/3)} = \frac{\pi}{2}.$$

7.5. Обчислити інтеграли

$$а)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)};\quad б)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2-2ix-2};\quad в)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x^2-x+2)dx}{x^4+10x^2+9};$$

$$г)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{(x^2+1)dx}{x^4+1};\quad д)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3};\quad е)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x^4+1}{x^6+1}.$$

Розв'язування вправи а). Легко бачити, що підінтегральна функція є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком точок $z = i$ та $z = 3i$, причому $f(z) = O(1/z^2)$ при $z \to \infty$. Тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2dx}{(x^2+1)(x^2+9)} = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=i} f(z) + \operatorname*{res}_{z=3i} f(z)\right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{z^2}{(z+i)(z^2+9)}\Big|_{z=i} + \frac{z^2}{(z+3i)(z^2+1)}\Big|_{z=3i}\right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{i}{16} - \frac{3i}{16}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Розв'язування вправи д). Підінтегральна функція є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком точки $z = i$, яка є полюсом третього порядку. Тому, враховуючи парність підінтегральної функції, маємо

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3} = \pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{1}{(z^2+1)^3} =$$

$$= \frac{\pi i}{2} \lim_{z\to i} \left(\frac{1}{(z+i)^3}\right)'' = \frac{\pi i}{2} \lim_{z\to i} \frac{12}{(z+i)^5} = \frac{3\pi}{16}.$$

7.6. Обчислити інтеграли

$$а)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2-2ix-2};\quad б)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)e^{ix}dx}{x^2-2x+2};\quad в)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x+1)\sin 2x dx}{x^2+2x+2};$$

$$г)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos 2x dx}{x^2-4x+5};\quad д)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\cos x dx}{x^2+4};\quad е)\ \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+1}.$$

Розв'язування вправи а). Функція $\dfrac{1}{z^2-2iz-2}$ є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком точок $z=-1+i$ та $z=1+i$, і має в ∞ нуль другого порядку. Тому

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{x^2-2ix-2} = 2\pi i \left(\operatorname*{res}_{z=-1+i} \frac{e^{iz}}{z^2-2iz-2} + \operatorname*{res}_{z=1+i} \frac{e^{iz}}{z^2-2iz-2} \right) =$$

$$= 2\pi i \left(\frac{e^{i-1}}{2} - \frac{e^{-i-1}}{2} \right) = -2\pi \frac{\sin 1}{e}.$$

Розв'язування вправи е). Оскільки підінтегральна функція є парною, $\sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$, а функція $\dfrac{1}{z^2+1}$ є аналітичною в замкненій півплощині $\{z : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, за винятком точки $z=i$, і має в ∞ нуль другого порядку, то

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x e^{ix} dx}{x^2+1} =$$

$$= \operatorname{Im} \left\{ \pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{z e^{iz}}{z^2+1} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ \pi i \left(\frac{z e^{iz}}{z+i} \right) \Big|_{z=i} \right\} = \frac{\pi}{2e}.$$

7.7. Обчислити

$$а)\ v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 e^{2ix} dx}{(x^2+1)(x^2-9)};\quad б)\ v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix} dx}{(x^2+1)(x-1)};$$

$$в)\ v.p. \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{x \sin x dx}{(x^2+1)(x^2-1)};\quad г)\ v.p. \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{(x-1)\cos x dx}{(x^2-2x+2)(x^2+x-2)}.$$

Розв'язування вправи б). За теоремою 7.4 маємо

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}dx}{(x^2+1)(x-1)} =$$

$$= 2\pi i \operatorname*{res}_{z=i} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)} + \pi i \operatorname*{res}_{z=1} \frac{e^{iz}}{(z^2+1)(z-1)} =$$

$$= 2\pi i \frac{e^{-1}}{2i(i-1)} + \pi i \frac{e^i}{2} = \frac{\pi}{2e}(1+i) + \frac{\pi i}{2}(\cos 1 + i\sin 1) =$$

$$= \frac{\pi}{2e}(1 - e\sin 1 + i(1 + e\cos 1)).$$

7.8. Обчислити інтеграли

$$а) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}}; \quad б) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+i)\sqrt[2]{x}};$$

$$в) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+2)\sqrt[4]{x}}; \quad г) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+a)x^\alpha}\ (a>0,\ 0<\alpha<1).$$

Розв'язування вправи а). Використовуючи доведену в розділі 7.6 формулу (з $\alpha = 2/3$), маємо

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+4)\sqrt[3]{x}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2/3-1}dx}{(x^2+4)} =$$

$$= \frac{2\pi i}{1 - e^{4\pi i/3}} \left(\operatorname*{res}_{z=2i} \frac{z^{-1/3}}{z^2+4} + \operatorname*{res}_{z=-2i} \frac{z^{-1/3}}{z^2+4} \right) =$$

$$= \frac{4\pi i}{3 + i\sqrt{3}} \left(\frac{2^{-1/3}e^{-\pi i/6}}{4i} - \frac{2^{-1/3}e^{-\pi i/2}}{4i} \right) =$$

$$= \frac{\pi 2^{-1/3}}{3+i\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}+i}{2} = \frac{\pi 2^{-4/3}}{\sqrt{3}}.$$

Принцип аргументу. Теорема Руше

7.9. Як по квадрантах розміщені корені рівняння $z^6 + z + 3 = 0$?

Розв'язування. Неважко перевірити, що це рівняння не має дійсних та чисто уявних коренів. Щоб визначити, скільки коренів є у першому квадранті, використаємо принцип аргументу.

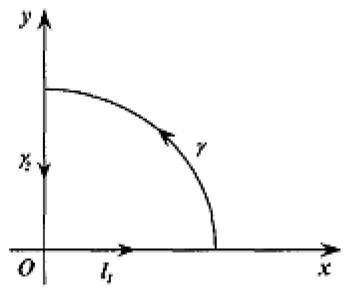


Рис. 15.1

Розглянемо контур C_R, зображений на рис. 15.1. Оскільки $z^6 + z + 3 > 0$ на l_1, то $\Delta_{l_1} \mathrm{Arg}\,(z^6 + z + 3) = 0$. Далі,

$$\Delta_\gamma \mathrm{Arg}\,(z^6 + z + 3) = \Delta_\gamma \mathrm{Arg}\,\left(R^6 e^{6i\theta}\left(1 + \frac{e^{5i\theta}}{R^5} + \frac{3e^{6i\theta}}{R^6}\right)\right) = 3\pi$$

для всіх досить великих R.

Нарешті, функція $\pi + \mathrm{arctg}\dfrac{y}{3 - y^6}$ при зміні y від $+\infty$ до $\sqrt[6]{3}$ змінюється від π до $\pi/2$, а функція $\mathrm{arctg}\dfrac{y}{3 - y^6}$ при зміні y від $\sqrt[6]{3}$ до 0 змінюється від $\pi/2$ до 0. Звідси випливає, що

$$\lim_{R \to +\infty} \Delta_{l_2} \mathrm{Arg}\,(z^6 + z + 3) = -\pi.$$

Отже,

$$\lim_{R \to +\infty} \Delta_{C_R} \mathrm{Arg}\,(z^6 + z + 3) = 2\pi.$$

За принципом аргументу наше рівняння має в першому квадранті тільки один корінь. Оскільке рівняння має дійсні коефіцієнти, то воно має попарно спряжені корені. Тому в четвертому квадранті рівняння має один корінь і по два — в другому та третьому квадрантах.

7.10. Довести, що якщо функція f аналітична і однолиста в області G, то $f'(z) \neq 0$ для всіх $z \in G$.

Доведення. Припустимо, від супротивного, що існує точка $a \in G$, для якої $f'(a) = 0$. Тоді в деякому околі точки a

$$f(z) = c_0 + c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots,\ c_k \neq 0,\ k \geq 2.$$

Нехай $r > 0$ настільки мале, що $f'(z) \neq 0$ і $c_k + c_{k+1}(z-a) + \cdots \neq 0$ для всіх z, $0 < |z-a| \leq r$. Приймемо

$$m = \min\{|z-a|^k |c_k + c_{k+1}(z-a) + \ldots| : |z-a| = r\}.$$

Тоді $m > 0$ і, якщо $|\alpha| < m$, то за теоремою Руше функції $c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots$ та $-\alpha + c_k(z-a)^k + c_{k+1}(z-a)^{k+1} + \ldots$ мають у крузі $\{z : |z-a| < r\}$ по k нулів кожна. Тому рівняння $f(z) = c_0 + \alpha$ має в цьому ж крузі k коренів, які є простими, завдяки тому, що $f'(z) \neq 0$ при $z \neq a$. А це неможливо з огляду на однолистість.

7.11. Дослідити, скільки коренів має вказане рівняння у відповідній області:

а) $z^4 - 5z + 1 = 0$, $1 < |z| < 2$; *б)* $z^2 - \frac{1}{3}e^z = 0$, $|z| < 1$;

в) $e^{z-\lambda} - z = 0\ (\lambda > 1)$, $|z| < 1$; *г)* $z^3 - 12z + 2 = 0$, $|z| < 2$;

д) $2z^4 - 5z + 2 = 0$, $|z| < 1$; *е)* $z^5 - 2z + 5 = 0$, $1 < |z| < 2$.

Розв'язування вправи е). Приймаємо $g_1(z) = 5$, $g_2(z) = z^5 - 2z$. Оскільки на колі $\{z : |z| = 1\}$ виконується $|g_1(z)| = 5 > 3 \geq |z^5 - 2z| = |g_2(z)|$, а функція g_1 не має нулів у крузі $\{z : |z| < 1\}$, то за теоремою Руше в цьому крузі наше рівняння не має коренів.

Приймемо тепер $f_1(z) = z^5$, $f_2(z) = 5 - 2z$. На колі $\{z : |z| = 2\}$ виконується $|f_1(z)| = 32 > 9 \geq |5 - 2z| = |f_2(z)|$. Оскільки функція f_1

має в точці $z = 0$ нуль п'ятого порядку, то за теоремою Руше в крузі $\{z : |z| < 2\}$ наше рівняння має 5 коренів. Всі вони знаходяться в кільці $\{z : 1 < |z| < 2\}$.

7.12. Довести, що рівняння $ze^{\lambda - z} = 1$ при $\lambda > 1$ має в крузі $\{z : |z| < 1\}$ єдиний дійсний додатний корінь.

7.13. Нехай функція f аналітична в обмеженій замкненій області $\overline{G}$, за винятком скінченної кількості полюсів, що лежать у G, і $\mathrm{Im} f(z) \neq \neq 0$ на ∂G. Довести, що кількість полюсів і кількість нулів функції f в області G рівні.

Розділ 16

ВПРАВИ ДО РОЗДІЛУ 8

Безпосереднє аналітичне продовження. Ріманові поверхні

8.1. Довести, що вказані два функціональні елементи безпосередньо аналітично продовжуються один в одного:

$$a)\,\varphi_1 = \left(\{z : |z| < 1\}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(1-z)^{2n+1}}\right),$$
$$\varphi_2 = \left(\{z : |z-1| < 1\}, \sin \frac{1}{1-z}\right);$$

$$б)\,\varphi_1 = \left(\{z : |z-1| < 1\}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!z^{2n}}\right),$$
$$\varphi_2 = \left(\{z : |z-2| < 1\}, \cos \frac{1}{z}\right).$$

Розв'язування вправи а). Оскільки $\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ для всіх $z, |z| < +\infty$, то $\sin \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(1-z)^{2n+1}}$ для всіх $z, |z-1| > 0$, тобто на непорожньому перетині областей $\{z : |z| < 1\}$ і $\{z : |z-1| < 1\}$ ці функції збігаються, а отже, функціональні елементи φ_1 і φ_2 безпосередньо аналітично продовжуються один в одного.

8.2. Знайти всі особливі точки вказаних функцій:

$$\textit{а)}\ f(z) = \frac{\sqrt{z}}{z^2 \sin(1/(z-1))} \quad (\sqrt{1} = 1); \quad \textit{б)}\ f(z) = \frac{\ln z}{\cos z} \quad (\ln 1 = 0);$$

$$\textit{в)}\ f(z) = \frac{\ln^2 z}{(z-1)^3 \sin z} \quad (\ln 1 = 0); \quad \textit{г)}\ f(z) = \frac{\cos(1/z)}{\ln(1-z)} \quad (\ln 1 = 0);$$

$$\textit{д)}\ f(z) = \sqrt[3]{z-1}\frac{\sin z}{z} \quad (\sqrt[3]{1} = 1); \quad \textit{е)}\ f(z) = \frac{\sqrt{(z-1)(z-2)}}{\sin(1/z)} \quad (\sqrt{1} = 1).$$

Розв'язування вправи е). Ізольованих особливих точок однозначного характеру нема. Точки $z = 1$, $z = 2$ і $z = \infty$ є точками розгалуження квадратного кореня. Точка $z = 0$ є точкою скупчення полюсів.

8.3. Не розвиваючи функцію f в ряд Тейлора в околі точки $z = 0$, знайти радіус збіжності цього ряду:

$$\textit{а)}\ f(z) = \frac{e^z - 1}{z}; \quad \textit{б)}\ f(z) = \frac{z}{e^z - 1}; \quad \textit{в)}\ f(z) = \frac{z^3 + z}{\sin(z-1)};$$

$$\textit{г)}\ f(z) = \frac{e^z + 1}{z^2 + 4}; \quad \textit{д)}\ f(z) = \operatorname{tg} z; \quad \textit{е)}\ f(z) = \exp\{\frac{1}{z^2+1}\}.$$

Розв'язування вправи а). Функція $f(z) = \dfrac{e^z - 1}{z}$ особливих точок не має (точка $z = 0$ є усувною і не вважається особливою). Тому шуканий радіус збіжності $R = +\infty$.

Розв'язування вправи е). Функція $f(z) = \exp\{\dfrac{1}{z^2+1}\}$ має дві особливі точки $z = \pm i$, відстань від яких до точки $z = 0$ дорівнює 1. Тому $R = 1$.

8.4. Нехай $G = \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z > 0\}$, а $f(z) = \ln|z| + i\arg z$. Знайти аналітичне продовження функції f з області G в область $G^* = \{z : 1 < |z| < 2, \operatorname{Im} z < 0\}$ через інтервали а) $(-2, -1)$ та б) $(1, 2)$.

Розв'язування. Оскільки області G і G^* симетричні відносно дійсної осі, то будемо використовувати принцип симетрії Рімана-Шварца.

Доозначимо функцію f за неперервністю на інтервалах $(-2, -1)$ та $(1, 2)$ рівностями

$$f(z) = \ln|z| + i\pi \quad (-2 < z < -1), \quad f(z) = \ln|z| \quad (1 < z < 2).$$

Оскільки значення, які набуває f на інтервалах $(-2, -1)$ та $(1, 2)$, знаходяться відповідно на прямих $\{w : \operatorname{Im} w = \pi\}$ та $\{w : \operatorname{Im} w = 0\}$, то шуканими продовженнями f із G в G^* є функції

$$a) f_1(z) = \ln|z| + 2i\pi + i\arg z, \quad б) f(z) = \ln|z| + i\arg z.$$

Зауважимо, що обидва функціональні елементи (G^*, f_1) і (G^*, f_2) є безпосередніми аналітичними продовженнями елементу (G, f) (але через різні інтервали).

8.5. Нехай $G = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, а $f(z) = \sqrt{|z|}\exp\left\{\dfrac{i\arg z}{2}\right\}$. Знайти аналітичне продовження функції f з області G в область $G^* = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$.

8.6. Побудувати ріманові поверхні для наступних многозначних функцій:

$$a)\ \sqrt{z(z-1)}; \quad б)\ \sqrt{z^2+1}; \quad в)\ \sqrt{z(z^2+1)}; \quad г)\ J^{-1}(z),$$

де J — функція Жуковського.

Розділ 17

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ

Контрольні запитання до розділу 1.

1. Де в доведенні теореми про умови Коші-Рімана використовується неперервність частинних похідних функцій u і v?
2. Якщо функція f аналітична в області D і $(\forall z \in D)$ $\{\mathrm{Re}\ f(z) = \mathrm{const}\}$, то що можна сказати про f?
3. Чи істотна умова аналітичності функції f в наслідку до теореми 1.8?
4. Чим відрізняється геометричний зміст модуля похідної функції дійсної змінної від геометричного змісту модуля похідної аналітичної функції комплексної змінної?
5. Який геометричний зміст аргумента похідної аналітичної функції?
6. Чи при конформному відображенні замкнена область переходить у замкнену?
7. Наведіть приклади неоднозв'язних областей.
8. Чи неперервно диференційована дійснозначна функція дійсної змінної переводить інтервал в інтервал? Вкажіть який-небудь лінійний підпростір простору таких функцій із вказаною властивістю.

Контрольні запитання до розділу 2.

1. Чи можна з допомогою цілої лінійної функції відобразити півкруг на круг?
2. Чи відображення, яке здійснюється функцією $w = z^2$, є однолистим у крузі $\{z : |z| < 1\}$?
3. Чи відображення, яке здійснюється функцією $w = J(z + 1)$, є кон-

формним в крузі $\{z : |z| < 1/2\}$?

4. Чи існує конформне відображення деякої однозв'язної області на неоднозв'язну?
5. Знайти функцію, яка відображає область $\{z : |\text{Re } z| < 1, \text{Im } z > 1\}$ на верхню півплощину.
6. Які з функцій $w = e^{2z}$, $w = e^{z^2}$, $w = e^{\sin z}$ є періодичними?
7. Котра з точок $z = 3$ і $z = 4$ є симетричною до точки $z = 1$ відносно кола $\{z : |z| = 2\}$?
8. Знайти загальний вигляд дробово-лінійної функції, яка відображає круг $\{z : |z| < 1\}$ на верхню півплощину.
9. Знайти загальний вигляд дробово-лінійної функції, яка відображає круг $\{z : |z| < 1\}$ на круг $\{z : |z| < 2\}$.
10. Чи при дробово-лінійному відображенні є консерватизм кутів?
11. Знайти сім'ю кіл Аполлонія для точок $z = 1$ і $z = -1$.

Контрольні запитання до розділу 3.

1. Чи можна многозначну функцію вважати функцією?
2. Чи є многозначна функція $F(z) = \{1, z, e^z, \sin z\}$ аналітичною в $\mathbb{C}$?
3. Чи можна на кривій $C = \{z = e^{it} - 1, -\pi \le t \le \pi\}$ вибрати однозначну вітку аргументу?
4. Чи можна в областях $\{z : 1 < |z| < 2\}$ і $\{z : 1 < |z - 2| < 2\}$ вибрати однозначну вітку аргументу?
5. Знайти приріст аргументу на кривій $C = \{z = e^{it}, -\pi \le t \le 3\pi\}$.
6. Як відрізняються між собою дві однозначні вітки квадратного кореня?
7. Знайти $(1 + i)^{\sin i}$.
8. Довести, що z^α скінченнозначна функція тоді і тільки тоді, коли α раціональне число.

Контрольні запитання до розділу 4.

1. Чи можна в означенні визначеного інтегралу діаметр розбиття означити як $\lambda_T = \max\{|\Delta z_j| : 0 \le j \le n - 1\}$?
2. Чи інтеграл (4.1) існує, якщо функція f розривна?
3. Обчислити інтеграл $\int\limits_{[0,1+i]} z^2\, dz$.

4. Чи обов'язково похідна від аналітичної функції є аналітичною функцією?
5. Сформулюйте необхідну і достатню умову існування первісної для неперервної функції.
6. Чи можна теорему 4.13 вважати наслідком теореми 4.14?
7. Яка різниця між моногенною та аналітичною функціями?
8. Чи функція $u = x^2 + y^3$ є гармонійною в $\mathbb{R}^2$?
9. Для якої цілої функції функція $u = e^x \cos y$ є дійсною частиною?

Контрольні запитання до розділу 5.

1. У чому полягає істотна відмінність означення рівномірної збіжності функціонального ряду від означення його поточкової збіжності?
2. Чи можна у формулюванні теореми Вейєрштрасса про ряди аналітичних функцій слова "кожний замкнений круг" замінити на "кожний компакт"?
3. Нехай ряди $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n(z)$ і $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \psi_n(z)$ рівномірно збіжні на множині E. Чи буде на E рівномірно збіжним ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\varphi_n(z) + \psi_n(z))$?
4. Довести, що для того, щоб ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ збігався для всіх $z \in \mathbb{C}$, необхідно і досить, щоб $\sqrt[n]{|a_n|} \to 0$ $(n \to \infty)$.
5. Побудувати приклад узагальненого степеневого ряду, множиною збіжності якого є коло $\{z : |z| = 1\}$.
6. Знайти область, де функція $w = \sin \dfrac{1}{1-z}$ є голоморфною.
7. Вказати правильну і головну частини узагальненого степеневого ряду $z^3 + z^2 + z + 1 + 1/z + 1/z^2 + 1/z^3$ в околі точок $z = 0$ і $z = \infty$.
8. Чи можна диференціювати почленно ряд Лорана в кільці його збіжності?

Контрольні запитання до розділу 6.

1. Чи справедливий висновок теореми 6.1 у випадку нуля скінченного порядку?
2. Записати канонічне зображення функцій $z \sin z^2$ і $\dfrac{e^z}{z^3 \sin^2 z}$ в околі

точки $z = 0$.

3. Чи може функція $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} h^k z^n$ в крузі $\{z : |z| \leq 3/4\}$ мати нескінченно багато нулів?
4. Чи справедливий принцип максимуму модуля для комплекснозначної функції $w = f(t)$, $a \leq t \leq b$?
5. Чи модуль неперервно диференційованої дійснозначної функції, заданої на інтервалі, може набувати найбільшого значення у внутрішній точці цього інтервалу? Вкажіть який-небудь підпростір простору таких функцій, для яких це неможливо.
6. Чи справедливий принцип максимуму модуля для голоморфних функцій?
7. Довести теорему Ліувілля, використовуючи нерівність Коші.
8. Чи завжди раціональна функція є цілою?

Контрольні запитання до розділу 7.

1. Знайдіть лишок функції $f(z) = 1/z^n$ у точках $z = 0$ і $z = \infty$.
2. Обчисліть наступні інтеграли:

$$\text{а) } \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^{1990}-1}; \quad \text{б) } \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{2+\cos\varphi}; \quad \text{в) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^3};$$

$$\text{г) } \int_0^{\infty} \frac{\cos 2x}{x^2+1} dx; \quad \text{д) } \int_0^{\infty} \frac{\sin 7x}{x} dx; \quad \text{е) } \int_0^{\infty} \frac{dx}{(2+x)\sqrt{x}} dx.$$

3. Чи справедливий принцип аргументу, якщо на краю області функція має один нуль?
4. Чи можна в теоремі Руше умову $(\forall z \in \delta G)\ \{|g(z)| < |f(z)|\}$ замінити на умову $(\forall z \in \delta G)\ \{|g(z)| \leq |f(z)|\}$?

Контрольні запитання до розділу 8.

1. Чи є функціональний елемент $\left(\{z : |z| < 1\}, \quad f_1(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n\right)$ безпосереднім аналітичним продовженням елемента $(\{z : |z-3| < 1\}$, $f_2(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (z-3)^n\Big)$?

2. Чи функція $f_2(z) = z(1-z)^{-2}$ є безпосереднім аналітичним продовженням функції $f_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nz^n$ з круга $\{z : |z| < 1\}$ на область $\{z : z \neq 1\}$?
3. Чи можна усувну особливу точку вважати неособливою?
4. Чи може мати сума степеневого ряду особливі точки поза кругом збіжності?
5. Не розвиваючи функцію $f(z) = \sin \dfrac{1}{1-z}$ в ряд Тейлора за степенями $(z - 1/2)$, знайдіть радіус збіжності цього ряду.
6. Чи залишиться справедливим висновок принципу симетрії Рімана-Шварца, якщо зняти умову $(\forall z \in I)$ $\{\operatorname{Im} f(z) = 0\}$?
7. Чи справедлива теорема єдиності для аналітичного продовження функції f з області G на область D, якщо $G \cap D = \emptyset$?
8. Чи повна аналітична функція є числовою функцією?

ЗМІСТ