Ю. С. ОЧАН

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ И ФУНКЦИЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
М. Ф. БОКШТЕЙНА

Допущено
Министерством просвещения СССР
в качестве учебного пособия
для студентов
физико-математических факультетов
педагогических институтов

МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1981

ББК 22.16
О-94

Рецензенты:

кафедра математического анализа МГЗПИ
(зав. кафедрой кандидат физико-математических наук Мордкович А. Г.),
доктор физико-математических наук,
профессор Баврин И. И. (МОПИ им. Крупской)

Очан Ю. С.

О-94 Сборник задач по математическому анализу: Общая теория множеств и функций: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов /Под ред. М. Ф. Бокштейна — М.: Просвещение, 1981.—271 с.

Сборник состоит из двух частей: теория множеств и теория функций. В нем представлены тексты задач, а также указания к их решению и ответы; кроме того, перед каждым разделом приводится необходимый теоретический материал.

О $\dfrac{60602-862}{103(03)-81}$ —26—81 4309020400

ББК 22.16
517.2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Уже давно ощущается настоятельная необходимость появления хорошего сборника задач по теории множеств и функций, предназначенного для наших педагогических институтов.

Длительное время заслуженной популярностью пользовался задачник по теории функций действительной переменной, выпущенный издательством «Просвещение» в 1965 г*. Изменения в программах пединститутов, связанные с прогрессом науки и изменением взгляда на положение теории функций действительной переменной внутри математического анализа, привели к необходимости создания нового задачника, более современного.

Настоящий сборник является результатом предпринятой автором коренной переработки названной выше книги, в которой после его смерти принимали участие его друзья-математики, а также его дочь Н. Ю. Очан.

Многие задачи и примеры, помещенные в настоящем пособии, носят учебный характер. Однако наряду с элементарными задачами сборник содержит также ряд задач повышенной трудности; решение таких задач требует от учащегося известной изобретательности и некоторых навыков математического исследования. Эти более трудные задачи (или циклы задач, объединенные общей темой) могут служить материалом для спецсеминаров и кружков; их можно предлагать также в качестве тем для курсовых работ.

Несколько слов о построении книги.

Ввиду того что в различных учебниках употребляется различная терминология и различные обозначения, перед каждой главой автор дает сводку основных определений и обозначений, а также формулировку тех теорем, которые предполагаются известными и на которые следует опираться при решении задач.

Книга разбита на две части. Вся теория множеств, начиная с общей теории (операции над множествами, вопросы взаимно однозначного соответствия и мощности) и кончая теорией меры Лебега, заключена в первой части. Вторая часть посвящена теории функций, начиная с общих вопросов, связанных с отображениями множеств, и кончая теорией интеграла Лебега в евклидовом пространстве.

М. Ф. Бокштейн

---

* Очан Ю. С. Сборник задач и теорем по теории функций действительного переменного. М., Просвещение, 1965.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Глава I.

ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Если a является элементом множества A (или a входит в A, принадлежит A), то пишут $a \in A$, а если a не является элементом множества A, то $a \,\overline{\in}\, A$ (или $a \notin A$). Элементы множества A мы будем иногда называть *точками* этого множества.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым множеством* и обозначается $\varnothing$.

Если все элементы множества A являются также элементами множества B, то говорят, что A *включается* в B или A *содержится* в B; говорят также, что B *включает* или *содержит* A. Это обозначают так: $A \subset B$ или $B \supset A$.

Если $A \subset B$ и $B \subset A$, то говорят, что A равно B или A совпадает с B, пишут: $A = B$. Если A не равно B, то пишут: $A \neq B$.

Если $A \subset B$, то говорят, что A является *подмножеством* множества B. Если при этом $A = B$, то говорят, что A является *собственным подмножеством* множества B.

Действия над множествами

1. *Объединением* множеств A и B называется множество, составленное из тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств. Объединение множеств A и B обозначается $A \cup B$.

Объединением семейства множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ (где индекс α пробегает некоторое непустое множество индексов $\mathbf{A}$) называется множество, составленное из всех элементов, входящих хотя бы в одно из множеств A_α ($\alpha \in \mathbf{A}$). Объединение семейства множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ обозначается $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbf{A}} A_\alpha$.

2. *Пересечением* (или *общей частью*) множеств A и B называется множество, составленное из всех тех элементов, которые входят как в A, так и в B. Пересечение множеств A и B обозначается $A \cap B$. Два множества называются *непересекающимися*, если их пересечение пусто.

Пересечением (или *общей частью*) семейства множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$ называется множество, составленное из всех элементов, входящих одновременно во все множества A_α ($\alpha \in \mathbf{A}$). Пересечение множеств A_α обозначается $\bigcap\limits_{\alpha \in \mathbf{A}} A_\alpha$.

Для объединения и пересечения справедливы переместительный и сочетательный законы:

$$A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A;$$
$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C.$$

Кроме того, справедливы распределительные законы:

$$A \cap \Big(\bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} B_\alpha\Big) = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} (A \cap B_\alpha), \quad A \cup \Big(\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} B_\alpha\Big) = \bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} (A \cup B_\alpha)$$

(распределительность пересечения относительно объединения и объединения относительно пересечения).

3. *Разностью* множеств A и B называется множество, элементами которого являются те и только те элементы множества A, которые не входят в B. Разность множеств A и B обозначается $A \setminus B$.

4. *Симметрическая разность* $A \Delta B$ множеств A и B определяется равенством

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Ясно, что $A \Delta B = B \Delta A$.

5. *Произведением* множеств A и B называется множество всевозможных пар (x, y) таких, что $x \in A$, $y \in B$. Произведение множеств A и B обозначается $A \times B$.

Если, в частности, A — множество чисел на оси Ox, а B — на оси Oy, то $A \times B$ — множество всевозможных пар чисел (x, y), где $x \in A$, $y \in B$. Так как пару чисел можно рассматривать как точку на плоскости Oxy, то $A \times B$ можно считать множеством всех точек (x, y) плоскости Oxy таких, что $x \in A$, $y \in B$.

По аналогии с произведением двух множеств можно говорить о произведении трех и большего числа множеств. В частности, если A — множество на оси Ox, B — на оси Oy, C — на оси Oz, то $A \times B \times C$ — множество всех таких точек (x, y, z) пространства $Oxyz$, что $x \in A$, $y \in B$, $z \in C$.

6. *Верхним пределом* последовательности множеств $E_1, E_2, \ldots$ называется множество $\overline{\lim}\, E_n$, определяемое равенством

$$\overline{\lim}\, E_n = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \bigcup_{m=n}^{+\infty} E_m.$$

Нижним пределом этой последовательности называется множество $\underline{\lim}\, E_n$, определяемое равенством

$$\underline{\lim}\, E_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \bigcap_{m=n}^{+\infty} E_m.$$

7. *Пространство.* Если все множества, фигурирующие в некоторой задаче, являются подмножествами некоторого множества X, то X называется *пространством*.

Разность $X \setminus E$ (где $E \subset X$) называется *дополнением к множеству* E (относительно пространства X) и обозначается $C_X E$ или, короче, CE:

$$CE = X \setminus E.$$

8. *Закон двойственности.* Для любого семейства множеств $\{A_\alpha\}_{\alpha \in \mathbf{A}}$, каждое из которых является подмножеством пространства X, справедливы следующие равенства:

$$C\left(\bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} CA_\alpha, \quad C\left(\bigcap_{\alpha \in \mathbf{A}} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha \in \mathbf{A}} CA_\alpha.$$

В частности, для двух множеств A и B законы двойственности запишутся так:

$$C(A \cup B) = CA \cap CB, \quad C(A \cap B) = CA \cup CB.$$

Задачи

1. Доказать равносильность следующих трех соотношений:
$A \subset B$, $A \cap B = A$, $A \cup B = B$
(т. е. доказать, что из выполнения любого из них вытекает справедливость остальных двух).

2. Доказать, что $A \setminus B = A \cap CB$.

3. Доказать включения:

а) $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$;

б) $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$;

в) $A \setminus C \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus C)$.

4. Доказать равенства:

а) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;

б) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$;

в) $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$;

г) $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C) = (A \cap C) \setminus B$;

д) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;

е) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$.

5. Вытекает ли из $A \setminus B = C$, что $A = B \cup C$?

6. Вытекает ли из $A = B \cup C$, что $A \setminus B = C$?

7. Верны ли равенства: а) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$; б) $A \cup (B \setminus C) = (A \cup B) \setminus C$; в) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus B$? Если нет, то в какую сторону имеет место включение?

8. Доказать равносильность включений $A \setminus B \subset C$ и $A \subset B \cup C$.

9. Доказать, что равенство $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup C$ верно, если $A \supset C$, и неверно, если $C \setminus A \neq \varnothing$.

10. Доказать включение

$$\bigcup_k A_k \setminus \bigcup_k B_k \subset \bigcup_k (A_k \setminus B_k).$$

Показать на примере, что в общем случае здесь нет равенства.

11. Доказать, что: а) если $B_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_n$;

б) если $C_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$, то $\bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcap\limits_{n=1}^{+\infty} C_n$.

12. Доказать, что $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

13. Пусть A — заданное множество. Доказать, что множество X пусто тогда и только тогда, когда $A \Delta X = A$.

14. Доказать равенства: а) $A \Delta (B \Delta D) = (A \Delta B) \Delta D$; б) $A \cap (B \Delta D) = (A \cap B) \Delta (A \cap D)$; в) $A \Delta A = \varnothing$.

15. Доказать включения: а) $A \Delta B \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta C)$; б) $(A \cup B) \Delta F \subset (A \Delta F) \cup (B \Delta F)$; в) $(A \cup B) \Delta (C \cup D) \subset (A \Delta C) \cup (B \Delta D)$. Показать на примере, что в общем случае здесь нет равенства.

16. Доказать равенства: а) $\mathbf{C}(A \setminus B) = \mathbf{C}A \cup B$; б) $\mathbf{C}(\mathbf{C}(\mathbf{C}A \cup B) \cup (A \cup \mathbf{C}B)) = B \setminus A$; в) $(A \cap B) \cup (A \cap \mathbf{C}B) \cup (\mathbf{C}A \cap B) = A \cup B$.

17. Используя закон двойственности, упростить выражение

$$\mathbf{C}(\mathbf{C}(X \cup Y) \cap (\mathbf{C}X \cup \mathbf{C}Y)).$$

18. Доказать, что $\underline{\lim}\, E_n$ состоит из тех и только тех точек, которые входят во все множества последовательности множеств $\{E_n\}$, начиная с некоторого номера. Доказать, что $\overline{\lim}\, E_n$ состоит из тех и только тех точек, которые входят в бесконечное число членов этой последовательности.

19. Доказать, что если последовательность множеств $\{E_n\}$ монотонно убывает (т. е. $E_n \supset E_{n+1}$ при любом n) или монотонно возрастает (т. е. $E_n \subset E_{n+1}$ при любом n), то $\underline{\lim}\, E_n = \overline{\lim}\, E_n$.

20. Доказать, что для любой последовательности множеств имеют место включения $\bigcap\limits_n E_n \subset \underline{\lim}\, E_n \subset \overline{\lim}\, E_n \subset \bigcup\limits_n E_n$. Построить пример такой последовательности множеств, для которой ни один из этих знаков включения не может быть заменен знаком равенства.

21. Доказать, что для любых множеств E, F, G справедливы равенства:

а) $E\times(F\cup G)=(E\times F)\cup(E\times G)$; б) $(F\cup G)\times E=(F\times E)\cup(G\times E)$;
в) $E\times(F\cap G)=(E\times F)\cap(E\times G)$; г) $(F\cap G)\times E=(F\times E)\cap(G\times E)$.

22. Справедливы ли равенства:

а) $(A\times B)\cap(C\times D)=(A\cap C)\times(B\cap D)$;
б) $(A\times B)\cup(C\times D)=(A\cup C)\times(B\cup D)$?

23. Доказать, что $(A\setminus B)\times C=(A\times C)\setminus(B\times C)$.

24. Доказать, что $(P\times Q)\setminus(A\times B)=((P\setminus A)\times Q)\cup(P\times(Q\setminus B))$.

25. Пусть множества A и C непусты. Доказать, что, для того чтобы $A\subset B$, $C\subset D$, необходимо и достаточно, чтобы было $A\times C\subset B\times D$. Остается ли в силе это утверждение, если A или C пусто?

26. Доказать, что если $A\subset P$, $B\subset Q$, то

$$A\times B=(A\times Q)\cap(B\times P).$$

Глава II.

ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

Если каждому элементу a множества A по некоторому закону поставлен в соответствие один и только один элемент b множества B, причем различным элементам множества A отвечают различные элементы множества B, и если при этом соответствии использованы все элементы множества B, то говорят, что между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие.

Так, например, можно установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных чисел и множеством всех натуральных чисел.

Если между некоторым множеством E и множеством N всех натуральных чисел установлено взаимно однозначное соответствие, то говорят, что элементы множества E *занумерованы* с помощью натуральных чисел.

Целью задач настоящей главы является установление взаимно однозначного соответствия между двумя заданными множествами (т. е. построение функции, определенной на одном из заданных множеств и взаимно однозначно *отображающей* это множество на другое заданное множество).

Среди множеств, с которыми мы будем иметь дело, особенно важными являются *числовые* множества, т. е. множества, элементами которых являются действительные числа. Важны следующие примеры числовых множеств (промежутков): 1) множество *всех* действительных чисел (числовая прямая $]-\infty, +\infty[$); 2) множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $x \geqslant a$ (*луч* $[a, +\infty[$) или неравенству $x > a$ (*луч* $]a, +\infty[$); аналогично определяются *лучи* $]-\infty, a]$

и $]-\infty, a[$ (здесь a — заданное число); 3) множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — заданные числа, причем $a < b$ (*замкнутый промежуток*, или *отрезок* $[a, b]$); 4) множество всех чисел x, удовлетворяющих неравенствам $a < x < b$ (*открытый промежуток*, или *интервал* $]a, b[$); 5) множество всех чисел, удовлетворяющих неравенствам $a \leqslant x < b$ или неравенствам $a < x \leqslant b$ (*полуоткрытый промежуток* $[a, b[$ или $]a, b]$).

Числовое множество E называется *ограниченным сверху*, если существует такое число b, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $x \leqslant b$. Число b, удовлетворяющее этому условию, называется *верхней границей* множества E. Наименьшая из верхних границ непустого ограниченного сверху множества называется *верхней гранью* этого множества. Каждое непустое множество, ограниченное сверху, имеет верхнюю грань, притом единственную. Верхняя грань множества E обозначается символом $\sup E$. Если множество E не является ограниченным сверху, то, по определению, полагают $\sup E = +\infty$.

Числовое множество E называется *ограниченным снизу*, если существует такое число a, что $x \geqslant a$ для всех $x \in E$. Число a, удовлетворяющее этому условию, называется *нижней границей* множества. Наибольшая из нижних границ множества называется *нижней гранью* множества и обозначается $\inf E$. Каждое непустое множество, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань, притом единственную. Если множество не ограничено снизу, то полагают, по определению, $\inf E = -\infty$.

Числовое множество E, которое ограничено и сверху, и снизу, называется *ограниченным*. Верхней и нижней гранями непустого ограниченного множества являются конечные числа (причем $\inf E \leqslant \sup E$). Примерами ограниченных числовых множеств являются отрезок, интервал, полуоткрытый промежуток*.

Наряду с *числовыми* множествами мы будем рассматривать также *плоские* множества, т. е. множества точек на плоскости. Примеры: 1) множество *всех* точек плоскости; 2) множество всех тех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2 + y^2 \leqslant a^2$ (замкнутый круг) или неравенству $x^2 + y^2 < a^2$ (открытый круг) и т. д.

Кроме того, мы будем иметь дело с *пространственными* множествами, т. е. с такими, которые расположены в трехмерном пространстве (например, сфера).

В некоторых случаях для установления взаимно однозначного соответствия между *числовыми* множествами бывает полезно числа, входящие в эти множества, записывать с помощью *систематических дробей*.

Если положительное число a может быть представлено в виде суммы сходящегося ряда:

$$a = A + \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{p^2} + \frac{n_3}{p^3} + \frac{n_4}{p^4} + \dots ,$$

где $p > 1$ — целое положительное число, A — целое неотрицательное число, а $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$ — целые неотрицательные числа от 0 до $p - 1$, то говорят, что a разложено в систематическую дробь с основанием p (или в p-ичную дробь). Это записывают следующим образом:

$$a = A, n_1 n_2 n_3 n_4 \dots .$$

A называется целой частью числа a; $n_1, n_2, n_3, \dots$ — p-ичными знаками числа a. Если все p-ичные знаки n_k, начиная с некоторого номера k, равны нулю, то дробь называется *конечной*, в противном случае — *бесконечной*.

При заданном $p > 1$ всякое положительное число a может быть представлено в виде бесконечной p-ичной дроби, причем каждому числу a соответствует

---

* Наряду с верхней и нижней гранями числового множества нередко приходится встречаться с *верхней* и *нижней гранями* функции (одной или нескольких переменных). Если функция $f(M)$ определена на множестве E и принимает числовые значения, то под символом $\sup\limits_{M \in E} f(M)$ ($\inf\limits_{M \in E} f(M)$) подразумевается верхняя (нижняя) грань множества тех значений функции, которые соответствуют всевозможным значениям независимой переменной M из множества E.

только одна бесконечная p-ичная дробь и, обратно, каждой бесконечной p-ичной дроби отвечает единственное положительное число a. Вместе с тем некоторые рациональные числа a (не все!) допускают, наряду с разложением в *бесконечную* p-ичную дробь, также разложение в виде *конечной* p-ичной дроби; например, при $p = 10$

$$\frac{63}{100} = 0{,}63000\ldots \text{ (конечная дробь)}; \quad \frac{63}{100} = 0{,}629999\ldots \text{ (бесконечная дробь)}.$$

Числа, которые могут быть разложены в *конечную* p-ичную дробь, называются *p-ично рациональными*.

Все остальные числа называются *p-ично иррациональными*.

Систематическая дробь с основанием $p = 10$ называется *десятичной* дробью; с основанием $p = 2$ — *двоичной* дробью; с основанием $p = 3$ — *троичной* дробью и т. д.

Задачи

27. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством N всех натуральных чисел и множеством S всех четных положительных чисел.

28. Установить взаимно-однозначное соответствие между множеством N всех натуральных чисел и множеством T всех четных чисел.

29. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством Q^+ всех неотрицательных рациональных чисел и множеством N всех натуральных чисел.

30. Существует ли функция вида $f(x) = \dfrac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$ (где коэффициенты $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m$ — целые числа), обладающая следующим свойством: для любого рационального числа r найдется целое число k, такое, что $f(k) = r$?

31. Найти взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на отрезок $[a, b]$.

32. Найти взаимно однозначное отображение интервала $]0, 1[$ на всю числовую прямую.

33. Найти взаимно однозначное отображение числовой прямой на интервал $]a, b[$.

34. Найти взаимно однозначное соответствие между промежутком $[0, 1[$ и лучом $[0, +\infty[$.

35. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на интервал $]0, 1[$.

36. Построить взаимно однозначное отображение отрезка $[0, 1]$ на всю числовую прямую.

37. Найти взаимно однозначное соответствие между отрезком $[0, 1]$ и лучом $[0, +\infty[$.

38. Установить взаимно однозначное соответствие между лучом $[0, +\infty[$ и интервалом $]a, b[$.

39. Отобразить взаимно однозначно луч $[0, +\infty[$ на всю числовую прямую.

40. Существует ли непрерывная функция, взаимно однозначно отображающая отрезок $[a; b]$ на всю числовую ось?

41. Существует ли непрерывная функция, взаимно однозначно отображающая отрезок $[a, b]$ на интервал $]c, d[$?

42. Существует ли непрерывная функция, взаимно однозначно отображающая отрезок $[a, b]$ на множество, состоящее из двух отрезков $[0, 1]$ и $[3, 4]$?

43. Построить взаимно однозначное отображение окружности единичного радиуса на отрезок $[0, 1]$.

44. Установить взаимно однозначное соответствие между открытым единичным кругом и множеством точек плоскости, являющихся дополнением к замкнутому единичному кругу.

Примечание. Открытым единичным кругом называется множество таких точек $M(x, y)$ плоскости Oxy, для которых выполнено неравенство $x^2 + y^2 < 1$; замкнутым единичным кругом — множество точек, для которых выполнено соотношение $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

45. Установить взаимно однозначное соответствие между открытым единичным кругом и замкнутым единичным кругом.

46. Найти взаимно однозначное соответствие между замкнутым единичным кругом и дополнением к открытому единичному кругу.

47. Найти взаимно однозначное соответствие между замкнутым единичным кругом и дополнением к нему.

48. Установить взаимно однозначное соответствие между окружностью и прямой.

49. Установить взаимно однозначное соответствие между сферой с одной выколотой точкой и плоскостью.

50. Установить взаимно однозначное соответствие между сферой и плоскостью.

51. Установить взаимно однозначное соответствие между произвольным замкнутым кругом и произвольной замкнутой звездной областью.

Примечание. Плоское множество A называется *замкнутой звездной областью* относительно точки O, если на каждом луче, выходящем из точки O, найдется такая точка M, отличная от O, что замкнутый прямолинейный отрезок OM включается в A, а остальная часть этого луча не содержит ни одной точки из A.

52. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех иррациональных чисел и множеством всех действительных чисел.

53. Установить взаимно однозначное соответствие между:

а) точками открытого квадрата $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ и точками открытого прямоугольника $]a, b[\times]c, d[$;

б) точками открытого квадрата $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ и точками плоскости; в) точками открытого прямоугольника $]a, b[\times]c, d[$ и точками плоскости.

54. Запишем в виде *бесконечной* десятичной дроби координаты точки $M(x, y)$ из квадрата $]0, 1] \times]0; 1]$: абсцисса $x = 0, n_1 n_2 n_3 \ldots$, ордината $y = 0, m_1 m_2 m_3 \ldots$. Поставим в соответствие каждой точке $M(0, n_1n_2n_3 \ldots, 0, m_1m_2m_3 \ldots)$ из квадрата точку $P(0, n_1m_1n_2m_2n_3m_3 \ldots)$ из промежутка $]0, 1]$. Все ли точки промежутка $]0, 1]$ получатся при этом соответствии? Будет ли это соответствие взаимно однозначным соответствием между точками квадрата $]0, 1] \times]0, 1]$ и точками промежутка $]0, 1]$?

55. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных чисел отрезка $[0, 1]$ и множеством всех точек с рациональными координатами квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$.

56. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных точек числовой прямой и множеством тех точек плоскости, у которых обе координаты рациональны.

57. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех многочленов с рациональными коэффициентами и множеством всех натуральных чисел.

58. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех конечных подмножеств натурального ряда чисел и множеством всех натуральных чисел.

59. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех последовательностей натуральных чисел и множеством всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел.

60. Установить взаимно однозначное соответствие между множеством всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел и множеством всех тех бесконечных двоичных дробей, которые соответствуют числам промежутка $]0, 1]$.

Глава III.

МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

Два множества называются *эквивалентными*, если между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Если множества A и B эквивалентны, то пишут: $A \sim B$.

Легко видеть, что если $A \sim B$, $B \sim C$, то $A \sim C$.

Признаки эквивалентности множеств (теоремы Кантора — Бернштейна):

1. *Если $A \subset B \subset C$, причем $A \sim C$, то $A \sim B$.*

2. *Если A эквивалентно подмножеству множества B,* а *B эквивалентно подмножеству множества A, то $A \sim B$.*

Множество E называется *конечным*, если оно эквивалентно множеству всех натуральных чисел n, удовлетворяющих неравенствам $1 \leqslant n \leqslant N$ для некоторого фиксированного натурального числа N.

Пустое множество мы также причисляем к конечным множествам.

Множество, не являющееся конечным, называется *бесконечным*.

Два конечных множества эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковое число элементов.

Для бесконечных множеств нельзя говорить о числе элементов множества; количественной характеристикой любого множества, обобщающей понятие числа элементов, является *мощность* множества; говорят, что *два множества имеют одинаковую мощность, если они эквивалентны.*

Мощность множества A обозначается символом $\overline{\overline{A}}$.

Если множества A и B имеют одинаковую мощность (т. е. если они эквивалентны), то пишут: $\overline{\overline{A}} = \overline{\overline{B}}$.

Если два множества неэквивалентны (т. е. между ними нельзя установить взаимно однозначного соответствия), то пишут: $\overline{\overline{A}} \neq \overline{\overline{B}}$ или ($A \not\sim B$).

Если множество B эквивалентно какому-либо подмножеству множества A, то говорят, что мощность множества B не превосходит мощности множества A. Это записывают так: $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$ или $\overline{\overline{A}} \geqslant \overline{\overline{B}}$.

Если множества A и B *неэквивалентны*, но множество A эквивалентно некоторому подмножеству множества B, то говорят, что множество B мощнее, чем множество A. Это записывают так: $\overline{\overline{B}} > \overline{\overline{A}}$ или $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

Из теорем Кантора — Бернштейна вытекает, что если $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$ и $\overline{\overline{B}} \leqslant \overline{\overline{A}}$, то $\overline{\overline{A}} \doteq \overline{\overline{B}}$.

Если же $\overline{\overline{A}} \leqslant \overline{\overline{B}}$, но $A \not\sim B$, то $\overline{\overline{A}} < \overline{\overline{B}}$.

Для доказательства эквивалентности множеств A и B можно: либо непосредственно установить взаимно однозначное соответствие между множествами A и B; либо, если это сделать трудно, установить эквивалентность множества A подмножеству множества B и множества B подмножеству множества A, а затем применить вторую теорему Кантора — Бернштейна.

Если множество A конечно и имеет n элементов, то пишут: $\overline{\overline{A}} = n$; в частности, если A — пустое множество, то $\overline{\overline{A}} = 0$.

Множество A, эквивалентное множеству всех натуральных чисел, называется *счетным*.

Примеры счетных множеств: множество всех целых чисел; множество всех рациональных чисел; множество всех полиномов с рациональными коэффициентами; множество всех алгебраических чисел и т. д.

Если множество имеет мощность, бо́льшую, чем множество натуральных чисел, то оно называется *несчетным* множеством. Так, например, отрезок $[0, 1]$ является несчетным множеством.

Всякое множество, эквивалентное отрезку $[0, 1]$, называется множеством *мощности континуума* или множеством *континуальной мощности*. Если множество A имеет мощность континуума, то пишут: $\overline{\overline{A}} = c$.

Если множество имеет мощность континуума, то иногда для краткости говорят, что оно имеет континуум элементов.

Примеры множеств, имеющих мощности континуума (т. е. ту же мощность, что и отрезок $[0, 1]$): отрезок $[a, b]$ и интервал $]a, b[$ (при любых a и b, где $a < b$); числовая прямая; множество всех бесконечных десятичных дробей; множество всех иррациональных чисел; множество всех точек любого круга; множество всех точек квадрата $[0,1] \times [0,1]$ (и вообще любого прямоугольника); множество всех точек плоскости; множество всех точек пространства $Oxyz$; множество всех непрерывных функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, и т. д.

Если задано некоторое множество E, то множество $\mathscr{E}$, элементами которого являются все подмножества множества E, имеет мощность, бо́льшую, чем E: $\overline{\overline{\mathscr{E}}} > \overline{\overline{E}}$.

Если E — конечное множество мощности n, то $\mathscr{E}$ — конечное множество мощности 2^n.

Если E — бесконечное множество мощности a, то мощность множества E обозначается 2^a.

В том случае, когда E является счетным множеством, $\mathscr{E}$ имеет мощность континуума.

Всякое множество, мощность которого равна 2^c (c — мощность континуума), называется множеством *мощности гиперконтинуума*.

Примеры множеств мощности гиперконтинуума: множество всех подмножеств отрезка $[0, 1]$; множество всех подмножеств числовой прямой; множество всех подмножеств плоскости; множество всех (не только непрерывных) числовых функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, и т. д.

В заключение отметим некоторые *свойства счетных множеств*:

1. Любое подмножество счетного множества либо конечно, либо счетно.

2. Всякое бесконечное множество содержит счетное подмножество (говорят: «Счетная мощность является наименьшей из бесконечных мощностей»).

3. Объединение конечной или счетной совокупности счетных множеств есть счетное множество.

4. Если к несчетному множеству E добавить или из него вычесть конечное или счетное множество M, то мощность множества E не изменится:

$$\overline{\overline{E \cup M}} = \overline{\overline{E}}; \qquad \overline{\overline{E \setminus M}} = \overline{\overline{E}}.$$

Задачи

61. Какова мощность множества всех треугольников на плоскости, вершины которых имеют рациональные координаты?

62. Какова мощность множества всех рациональных функций с целыми коэффициентами в числителе и знаменателе?

63. Доказать, что множество всех окружностей на плоскости, радиусы которых рациональны и координаты центра которых — рациональные числа, счетно.

64. Какова мощность множества всех конечных десятичных дробей? Какова мощность множества всех конечных p-ичных дробей при заданном $p > 1$?

65. Какова мощность множества всех многочленов, коэффициентами которых служат алгебраические числа?

66. Дано бесконечное множество E неотрицательных чисел. Обозначим через s верхнюю грань сумм чисел для любых конечных подмножеств множества E. Доказать, что если $s < +\infty$, то в E имеется не более счетного множества чисел, отличных от нуля.

67. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции, заданной на отрезке $[a, b]$, конечно или счетно.

68. Доказать, что множество точек разрыва монотонной функции, определенной на всей числовой прямой, конечно или счетно.

69. Пусть E — какое-либо несчетное множество положительных чисел; доказать, что найдется такое число $\tau > 0$, что множество $E \cap]\tau, +\infty[$ несчетно.

70. Верно ли утверждение: «Если E — бесконечное множество чисел, расположенное на луче $]0, +\infty]$, то найдется такое число $\tau > 0$, что множество $E \cap]\tau, +\infty[$ бесконечно»?

71. Пусть E — счетное множество точек на прямой. Можно ли сдвинуть это множество на величину a (т. е. заменить все точки $x \in E$ точками $x + a$) так, чтобы получившееся в результате сдвига множество E_a не пересекалось с E?

72. Пусть E — счетное множество точек на окружности. Можно ли повернуть окружность вокруг центра на некоторый угол φ так, чтобы множество E_φ, получившееся из E в результате поворота, не пересекалось с E?

73. Доказать, что если расстояние между любыми двумя точками множества E на прямой больше единицы, то множество E конечно или счетно.

74. На плоскости задано множество E такое, что расстояние между любыми двумя точками этого множества больше, чем a

(где a — данное положительное число). Доказать, что множество E не более чем счетно (т. е. либо счетно, либо конечно).

75. Доказать с помощью теоремы Кантора — Бернштейна эквивалентность замкнутого круга и открытого круга того же радиуса на плоскости.

76. Доказать с помощью теоремы Кантора — Бернштейна эквивалентность плоскости и замкнутого квадрата на плоскости.

77. Доказать с помощью теоремы Кантора — Бернштейна эквивалентность квадрата $]0, 1] \times]0, 1]$ и промежутка $]0, 1]$ (использовать результат задачи 54).

78. Доказать, что множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно.

79. Какова мощность множества всех строго возрастающих последовательностей натуральных чисел?

80. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел?

81. Показать, что множество всех перестановок натурального ряда N имеет мощность континуума.

Примечание. *Перестановкой* множества называется всякое его взаимно однозначное отображение на себя.

82. Какова мощность множества всех конечных последовательностей действительных чисел?

83. Доказать, что множество E всех стационарных последовательностей натуральных чисел счетно.

Примечание. Последовательность $\{a_n\}$ называется *стационарной*, если для нее существует номер n_0 такой, что $a_n = a_{n_0}$ для всех $n > n_0$.

84. Доказать, что множество E всех стационарных последовательностей действительных чисел имеет мощность континуума.

85. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел, не содержащих числа 7?

86. Какова мощность множества всех последовательностей натуральных чисел, содержащих число 7?

87. Какова мощность множества всевозможных последовательностей рациональных чисел?

88. Какова мощность множества всевозможных многочленов (с произвольными действительными коэффициентами)?

89. Какова мощность множества всех отрезков на числовой прямой?

90. На прямой задано множество попарно не пересекающихся отрезков. Что можно сказать о мощности этого множества?

91. Какова мощность множества всех кругов на плоскости?

92. На плоскости построено некоторое множество попарно не пересекающихся окружностей. Может ли это множество быть несчетным?

93. На плоскости построено некоторое множество попарно не пересекающихся букв Т (размеры этих букв могут быть и различными). Может ли множество этих букв быть несчетным?

94. На плоскости построено некоторое множество попарно не пересекающихся букв Г. Может ли это множество быть несчетным?

95. Какова мощность множества всех последовательностей действительных чисел?

96. Какова мощность множества всех конечных и счетных подмножеств множества E, если E имеет мощность континуума?

97. Доказать, что множество всех числовых функций, определенных на отрезке $[a, b]$, имеет мощность гиперконтинуума.

98. Доказать, что множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$ имеет мощность континуума.

99. Какова мощность множества всех функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и разрывных хотя бы в одной точке этого отрезка?

100. Какова мощность множества всех строго возрастающих непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$?

101. Какова мощность множества всех монотонных функций на отрезке $[a, b]$ (не только непрерывных)?

102. Какова мощность множества всех функций, определенных на отрезке $[a, b]$ и представимых в виде предела сходящейся последовательности непрерывных функций?

103. Доказать, что существуют разрывные функции, определенные на $[a, b]$ и не представимые в виде предела сходящейся последовательности непрерывных.

104. Какова мощность множества всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь отсутствует цифра 7?

105. Какова мощность множества всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь цифра 7 находится на третьем месте?

106. Какова мощность множества всех действительных чисел, заключенных между 0 и 1, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь имеется цифра 7?

107. Какова мощность множества всех чисел, заключенных между 0 и 1, в разложении которых в бесконечную троичную дробь отсутствует цифра 1?

108. Пусть A и B — эквивалентные бесконечные множества. Существует ли подмножество множества A, отличное от A, эквивалетное B?

109. Доказать, что если $A \setminus B \sim B \setminus A$, то $A \sim B$.

110. Доказать, что если $A \subset B$ и $A \sim A \cup C$, то $B \sim B \cup C$.

111. Верно или нет утверждение: «Если $A \sim C$, $B \sim D$, причем $A \supset B$, $C \supset D$, то $A \setminus B \sim C \setminus D$»?

112. Пусть $A \supset C$, $B \supset D$, $C \cup B \sim C$. Доказать, что $A \cup D \sim A$.

113. Верно ли утверждение: «Если $A \sim B$, $C \supset A$, $C \supset B$, то $C \setminus A \sim C \setminus B$»?

114. Верно ли утверждение: «Если $A \sim B$, $A \supset C$, $B \supset C$, то $A \setminus C \sim B \setminus C$»?

115. Доказать, что множество всевозможных равномерно сходящихся на $[a, b]$ последовательностей непрерывных функций имеет мощность континуума.

116. Какова мощность множества всевозможных последовательностей непрерывных функций (на отрезке $[a, b]$)?

117. Доказать следующее утверждение: «Если множество E на плоскости несчетно, то найдется такой круг с центром в начале координат, который содержит несчетное множество точек из E».

Глава IV.
МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

Говорят, что множество X снабжено *метрикой*, если каждой паре его элементов x, y поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$ («*расстояние* между x и y»), удовлетворяющее следующим аксиомам («аксиомы метрики»):

1) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$ («аксиома тождества»),

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x \in X$, $y \in X$. («аксиома симметрии»),

3) $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ для любых $x, y, z \in X$ («аксиома треугольника»).

Множество X с введенной в нем метрикой ρ называется *метрическим пространством* и обозначается (X, ρ). При этом множество X называют *носителем* метрического пространства (X, ρ).

Метрическое пространство (X, ρ) мы часто будем обозначать той же буквой, что и его носитель (т. е. только X, опуская букву ρ), если по смыслу ясно, какая метрика введена в X.

Примеры метрических пространств:

1. **Числовая прямая,** где в качестве расстояния принято

$$\rho(x, y) = |x - y|.$$

2. **Евклидово n-мерное пространство R^n,** носителем которого является множество всевозможных упорядоченных наборов из n чисел (эти наборы называют также «*кортежами длины n*» или «*точками n-мерного пространства*»), а расстояние вводится по формуле

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |a_i - b_i|^2},$$

где x — набор n чисел $(a_1, \ldots, a_n)$, а y — набор n чисел $(b_1, \ldots, b_n)$.

Числовая прямая является частным случаем евклидова пространства (при $n = 1$).

3. **Пространство $C[a, b]$,** носителем которого является множество всех непрерывных функций на отрезке $[a, b]$, а метрика вводится по формуле

$$\rho(x, y) = \max_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|,$$

где f и g — непрерывные функции на $[a, b]$.

Для того чтобы проверить, что то или иное множество с введенным в нем расстоянием $\rho(x, y)$ является метрическим пространством, надо убедиться в том, что $\rho(x, y)$ удовлетворяет всем трем аксиомам метрики. В частности, для того чтобы доказать, что R^k является метрическим пространством, используется *неравенство Коши — Буняковского*, которое заключается в том, что для любых кортежей $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ длины n имеет место соотношение

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2}.$$

Если ρ — метрика на множестве X, то сужение ρ на каждое множество $E \subset X$ также есть метрика (будем обозначать ее той же буквой ρ). Метрическое пространство (E, ρ) называется *подпространством* метрического пространства (X, ρ).

Пример. Множество рациональных чисел с метрикой $\rho(x, y) = |x-y|$ является подпространством числовой прямой.

Последовательности в метрическом пространстве. Полные пространства. Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ (короче: $\{x_n\}$) элементов метрического пространства X *сходится* к элементу $b \in X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что для всех номеров $n > N$ выполняется неравенство $\rho(x_n, b) < \varepsilon$.

Если последовательность $\{x_n\}$ сходится к b, то b называется *пределом* этой последовательности; пишут: $b = \lim\limits_{n\to+\infty} x_n$.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов пространства X называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$ для всех $n > N$, $m > N$.

Всякая сходящаяся последовательность фундаментальна; однако обратное верно не во всяком пространстве.

Пространство X называется *полным*, если всякая фундаментальная последовательность его элементов сходится (к элементу этого пространства).

Примеры полных пространств: числовая прямая, евклидово пространство, пространство $C[a, b]$. Пример неполного пространства — множество всех рациональных чисел (с обычным расстоянием).

Изометрия и гомеоморфизм. Метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называют *изометричными*, если между их носителями существует взаимно однозначное соответствие $y = f(x)$ $(x \in X, y \in Y)$ такое, что для любых $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ имеет место

$$\rho_X(x_1, x_2) = \rho_Y(f(x_1), f(x_2)).$$

Метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y) называют *гомеоморфными*, если между их носителями существует взаимно однозначное соответствие $y = f(x)$ $(x \in X, y \in Y)$, сохраняющее сходимость (т. е. из того, что $\rho_X(x_n, a) \to 0$, следует, что $\rho_Y(f(x_n), f(a)) \to 0$ и обратно).

Изометричные пространства гомеоморфны. Однако обратное неверно; например, интервалы $]0,1[$, $]0,2[$ и луч $]0, +\infty[$ (рассматриваемые как подпространства числовой прямой) гомеоморфны, но не изометричны.

Если пространство (X, ρ_X) изометрично некоторому подпространству пространства (Y, ρ_Y), то говорят, что (X, ρ_X) изометрично вкладывается в (Y, ρ_Y). Например, R^m изометрично вкладывается в R^n при $m < n$.

Пусть в одном и том же множестве X введены две метрики: ρ_1 и ρ_2. Если для любой последовательности $\{x_n\}$ из $\rho_1(x_n, a) \to 0$ следует, что $\rho_2(x_n, a) \to 0$ и обратно, то говорят, что метрики ρ_1 и ρ_2 *эквивалентны*. Ясно, что если метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны, то пространства (X, ρ_1) и (X, ρ_2) гомеоморфны.

Задачи

118. Является ли метрическим пространством множество всех действительных чисел, если под расстоянием между x и y понимать $\sin^2(x-y)$?

119. Показать, что $\rho_1(x, y) = \operatorname{arctg}|x-y|$ является метрикой в множестве всех чисел. Эквивалентна ли она метрике $\rho(x, y) = |x-y|$? Является ли полным пространством числовая прямая с метрикой ρ_1?

120. Будет ли метрическим пространством множество всех действительных чисел, если расстояние между x и y определить так: $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$?

121. Пусть X — множество всех пар чисел (a, b). Для любых двух его элементов $x(a_1, b_1)$, $y(a_2, b_2)$ положим:

$$\rho_1(x, y) = \max\{|a_2 - a_1|, \ |b_2 - b_1|\};$$
$$\rho_2(x, y) = |a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|;$$

$\rho_3(x, y) = \sqrt{|a_2 - a_1|^2 + |b_2 - b_1|^2}$ (евклидова метрика).

Доказать, что ρ_1 и ρ_2 удовлетворяют аксиомам метрики и что все три метрики ρ_1, ρ_2, ρ_3 эквивалентны.

Доказать полноту пространств (X, ρ_1), (X, ρ_2), (X, ρ_3).

122. Пусть X — множество всех точек окружности C; примем в качестве расстояния между точками $x \in X$, $y \in X$ длину кратчайшей дуги окружности C, соединяющей x и y. Удовлетворяет ли это расстояние аксиомам метрики?

123. Пусть X — множество всех прямых на плоскости, не проходящих через начало координат. Определим расстояние между двумя прямыми

$$l_1 : x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0, \ l_2 : x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$$

(где $0 \leqslant \alpha_1 < 2\pi$, $0 \leqslant \alpha_2 < 2\pi$, $p_1 > 0$, $p_2 > 0$) формулами:

а) $\rho_1(l_1, l_2) = \sqrt{(p_2 - p_1)^2 + (\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)^2 + (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)^2}$;

б) $\rho_2(l_1, l_2) = |p_2 - p_1| + |\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1| + |\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1|$;

в) $\rho_3(l_1, l_2) = |p_2 - p_1| + |\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1|$.

Являются ли ρ_1, ρ_2, ρ_3 метриками? Если (X, ρ_1), или (X, ρ_2), или (X, ρ_3) — метрическое пространство, то полно ли оно?

124. Будет ли метрическим пространством семейство всех непустых подмножеств метрического пространства X, если расстояние между множествами $E \subset X$ и $F \subset X$ определить равенством $\rho(E, F) = \inf\limits_{\substack{x \in E \\ y \in F}} \rho(x, y)$?

125. Пусть X — произвольное непустое множество. Введем в нем следующую метрику: $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$; $\rho(x, y) = 0$ при $x = y$. Будет ли пространство (X, ρ) полным?

126. Доказать, что множество всех числовых последовательностей $x(a_1, a_2, \ldots)$, таких, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} |a_i|$ сходится, образует метрическое пространство (оно обозначается l_1), если за расстояние между $x(a_1, a_2, \ldots)$ и $y(b_1, b_2, \ldots)$ принять число

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^{+\infty} |b_i - a_i|.$$

127. Пусть $x_n(x_{n1}, \ldots, x_{ni}, \ldots)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и $a(a_1, \ldots, a_i, \ldots)$ — элементы пространства l_1, и $a_i = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{ni}$ для любого натурального i. Следует ли из этого, что $\rho(x_n, a) \to 0$?

128. Доказать полноту пространства l_1 (см. задачу 126).

129. Доказать, что множество $M(E)$ всех ограниченных функций на множестве E образует метрическое пространство, если за расстояние между функциями φ и ψ принять число

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \psi(t)|.$$

Доказать полноту этого пространства.

Замечание. Частным случаем пространства $M(E)$ — когда E есть натуральный ряд — является пространство m всех ограниченных числовых последовательностей, в котором за расстояние между $x(a_1, a_2, \ldots)$ и $y(b_1, b_2, \ldots)$ принято число

$$\rho(x, y) = \sup_i |b_i - a_i|.$$

130. Доказать полноту пространства $C[a, b]$.

131. Доказать, что множество всех числовых последовательностей $x(a_1, a_2, \ldots)$, для которых ряд $\sum_{i=1}^{+\infty} a_i^2$ сходится, является метрическим пространством (оно обозначается l_2), если за расстояние между $x(a_1, a_2, \ldots)$ и $y(b_1, b_2, \ldots)$ принять

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} (b_i - a_i)^2}.$$

Доказать, что пространство l_2 полно.

132. Доказать, что множество всех непрерывных функций на $[a, b]$ образует метрическое пространство (обозначим его $C'[a, b]$), если за расстояние между $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принять число

$$\rho(\varphi, \psi) = \int_a^b |\varphi(x) - \psi(x)| dx.$$

Эквивалентны ли метрики пространств $C[a, b]$ и $C'[a, b]$?

133. Является ли метрическим пространством множество всех непрерывных функций на $[a, b]$, если за расстояние между $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ принять число

$$\rho(\varphi, \psi) = \sqrt{\int_a^b (\varphi(x) - \psi(x))^2 dx}?$$

Указание. Предварительно вывести неравенство Коши — Буняковского для интегралов:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x) dx \leqslant \sqrt{\int_a^b (\varphi(x))^2 dx \cdot \int_a^b (\psi(x))^2 dx};$$

его можно получить предельным переходом из неравенства Коши — Буняковского для конечных сумм (см. введение к этой главе), если принять $\alpha_i = \varphi(x_i)\sqrt{\Delta x_i}$, $\beta_i = \psi(x_i)\sqrt{\Delta x_i}$.

134. Доказать, что множество $F[a, b]$ всех пар непрерывных функций на $[a, b]$ является метрическим пространством, если за расстояние между парами (f_1, g_1) и (f_2, g_2) принять число

$$\rho((f_1, g_1), (f_2, g_2)) = \sup_{x\in[a, b]}(|f_1(x) - f_2(x)| + |g_1(x) - g_2(x)|).$$

Доказать полноту этого пространства.

135. Доказать неполноту пространства $C'[a, b]$ (см. задачу 132).

136. Доказать неполноту пространства, рассмотренного в задаче 133.

137. Доказать, что подпространство E пространства $C[a, b]$, составленное из всех непрерывных функций f, удовлетворяющих условию $A \leqslant f(x) \leqslant B$ для всех $x \in [a, b]$ (где A и B — заданные числа), является полным пространством.

138. Пусть F и G — фиксированные непрерывные функции на $[a, b]$, такие, что $F(x) \leqslant G(x)$ всюду на $[a, b]$. Доказать, что подпространство пространства $C[a, b]$, состоящее из всех непрерывных функций f таких, что $F(x) \leqslant f(x) \leqslant G(x)$, полно.

139. Пусть ρ_1 и ρ_2 — эквивалентные метрики на множестве X. Следует ли из полноты пространства (X, ρ_1) полнота пространства (X, ρ_2)?

140. Доказать, что для эквивалентности метрик ρ_1 и ρ_2 на множестве E достаточно, чтобы существовали такие два числа $A > 0$ и $B > 0$, что для любых $x \in E$, $y \in E$ выполняются неравенства

$$A\rho_1(x, y) \leqslant \rho_2(x, y) \leqslant B\rho_1(x, y).$$

Показать, что это условие не является необходимым для эквивалентности метрик ρ_1 и ρ_2.

141. Пусть C_1 — множество всех непрерывных функций на $[a, b]$, имеющих непрерывную производную (под производной в точке a или в точке b подразумевается соответствующая односторонняя производная). Введем в C_1 две различных метрики:

$$\rho_1(f, g) = \sup_{x\in[a, b]} |f(x) - g(x)| + \sup_{x\in[a, b]} |f'(x) - g'(x)|;$$

$$\rho_2(f, g) = \sup_{x\in[a, b]} (|f(x) - g(x)| + |f'(x) - g'(x)|).$$

Доказать, что эти метрики эквивалентны. Доказать полноту пространств (C_1, ρ_1) и (C_1, ρ_2).

142. Пусть каждой паре элементов (x, y) множества X поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$, удовлетворяющее всем аксиомам метрики, кроме первой, которая выполняется в следующем ослабленном виде: если $x = y$, то $\rho(x, y) = 0$. Назовем *классом, содержащим* x_0 (где $x_0 \in X$) множество всех $x \in X$ таких, что $\rho(x, x_0) = 0$. Ясно, что классы попарно не пересекаются и их объединением является все множество X. Доказать, что множество всех классов образует метрическое пространство, если под расстоянием между двумя классами A и B подразумевать $\rho(a, b)$, где $a \in A$, $b \in B$.

143. Будет ли метрическим пространством (X, ρ), где X — множество всех функций с непрерывной производной на $[a, b]$, а $\rho(f, g) = \sup_{x\in[a, b]} |f'(x) - g'(x)|$?

Произвести разбиение множества X на классы так, чтобы множество классов стало метрическим пространством.

144. Пусть X — множество всех последовательностей непрерывных на $[a, b]$ функций $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sup\limits_{x\in[a,\, b]} |f_n(x)|$. Доказать, что (X, ρ), где

$$\rho(\{f_i\}, \{g_i\}) = \sum_{i=1}^{+\infty} \sup_{x\in[a,\, b]} |f_i(x) - g_i(x)|,$$

является полным метрическим пространством.

145. Пусть A и B — полные подпространства метрического пространства X. Доказать, что $A \cup B$ и $A \cap B$ также являются полными пространствами. Показать на примере, что $A \setminus B$ может оказаться неполным пространством.

146. Пусть (X, ρ_X) и $(Y; \rho_Y)$ — полные пространства. Доказать, что пространство $X \times Y$, снабженное метрикой

$$\rho_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(\rho_X(x_1, x_2))^2 + (\rho_Y(y_1, y_2))^2}, \quad (1)$$

является полным пространством.

147. То же, если

$$\rho_{X\times Y}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho_X(x_1, x_2) + \rho_Y(y_1, y_2). \quad (2)$$

148. Доказать, что для сходимости последовательности $\{(x_n, y_n)\}$ к (a, b) в пространстве $X \times Y$, снабженном метрикой по формуле (1) или (2), необходимо и достаточно, чтобы $\{x_n\}$ сходилась к a в пространстве X, а $\{y_n\}$ — к b в пространстве Y.

Глава V. ЗАМКНУТЫЕ И ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА

Пусть X — какое-либо метрическое пространство. Элементы этого пространства называют точками.

Окрестности. *Окрестностью* (или ε-окрестностью) точки $x_0 \in X$ называется множество $V(x_0, \varepsilon)$ всех точек $x \in X$, удовлетворяющих условию $\rho(x, x_0) < \varepsilon$. При этом число $\varepsilon > 0$ называют *радиусом* окрестности, точку x_0 — ее *центром*. Окрестность $V(x_0, \varepsilon)$ называют также *открытым шаром радиуса* ε *с центром в точке* x_0. Если знание радиуса окрестности точки x_0 несущественно, мы будем вместо $V(x_0, \varepsilon)$ писать просто $V(x_0)$.

Если основное пространство X — числовая прямая, то ε-окрестностью точки x_0 является интервал $]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$. Если X — плоскость, то $V(x_0, \varepsilon)$ — открытый круг радиуса ε с центром в точке x_0.

Важное свойство окрестностей: если $y \in V(x_0, \varepsilon)$, то существует число $\delta > 0$ такое, что $V(y, \delta) \subset V(x_0, \varepsilon)$.

Классификация точек метрического пространства по отношению к данному множеству. Пусть E — какое-либо множество метрического пространства X. Точка $x_0 \in X$ называется *точкой прикосновения* множества E, если в любой ее окрестности имеется хотя бы одна точка из E. Легко видеть, что для этого необходимо и достаточно, чтобы в E существовала последовательность точек $\{x_n\}$, сходящаяся в X к точке x_0. Множество всех точек прикосновения множества E называется *замыканием* множества E и обозначается $\overline{E}$. Ясно, что $E \subset \overline{E}$.

Пример. Замыканием интервала $]a, b[$ на прямой служит отрезок $[a, b]$.

Точка $x_0 \in X$ называется *внутренней точкой* множества E, если существует окрестность $V(x_0)$, содержащаяся в E.

Множество всех внутренних точек множества E называется его *внутренностью* и обозначается E°. Ясно, что $E^\circ \subset E$.

Предельной точкой множества E называется точка $x_0 \in X$, в любой окрестности которой имеется хотя бы одна точка из E, отличная от x_0. Легко видеть, что для этого необходимо и достаточно, чтобы в любой окрестности точки x_0 содержалось бесконечно много точек из E.

Множество всех предельных точек множества E называется его *производным множеством* и обозначается E'. Множество всех предельных точек множества E' называется вторым производным множеством множества E и обозначается E''. Аналогично определяются производные множества более высокого порядка (производное множество порядка n обозначается $E^{(n)}$).

Точка $x_0 \in X$ называется *изолированной точкой* множества E, если $x_0 \in E$, причем в некоторой ее окрестности $V(x_0)$ нет других точек из E (кроме самой точки x_0).

Точка $x_0 \in X$ называется *граничной точкой* множества E, если в любой окрестности этой точки имеются как точки, принадлежащие E, так и точки, не принадлежащие E.

Множество всех граничных точек множества E называется *границей* множества E и обозначается $\mathrm{Fr}\ E$.

Легко видеть, что $\overline{E} = E' \cup E = E^\circ \cup \mathrm{Fr}\ E$.

Замкнутые множества. Множество E в метрическом пространстве X называется *замкнутым*, если оно содержит все свои точки прикосновения (иначе говоря, множество E замкнуто, если оно совпадает со своим замыканием: $E = \overline{E}$).

Примеры замкнутых множеств: пустое множество; все пространство X; любое конечное множество в X; *замкнутый шар* $B(x_0, \varepsilon)$ в X радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке x_0, т. е. множество всех точек $x \in X$, для которых $\rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon$.

Свойства замкнутых множеств: а) объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто; б) пересечение любой совокупности замкнутых множеств замкнуто.

Если множество замкнуто и не содержит изолированных точек, то оно называется *совершенным*.

Примеры совершенных множеств на прямой: вся прямая, пустое множество, отрезок. Важным примером совершенного множества является также *канторово множество* D, которое строится следующим образом: из отрезка $[0, 1]$ исключается интервал $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$; затем из оставшихся двух отрезков («отрезков первого ранга») исключаются интервалы длины $\frac{1}{3^2}$ с центрами в серединах этих отрезков; затем из оставшихся четырех отрезков («отрезков второго ранга») выбрасываются интервалы длины $\frac{1}{3^3}$ с центрами в серединах этих отрезков и т. д. до бесконечности. Множество D, оставшееся после исключения всех этих интервалов, является совершенным. Его называют *канторовым множеством.* Точки канторова множества разделяются на *точки первого рода* — концы выбрасываемых интервалов (их — счетное множество) и точки *второго рода* (все остальные точки множества D; их — множество мощности континуума). Множество D имеет следующую арифметическую структуру: оно включает те и только те точки отрезка $[0, 1]$, которые могут быть записаны в виде троичной дроби (конечной или бесконечной), не содержащей единицы в числе своих троичных знаков.

Каждое непустое совершенное множество на прямой имеет мощность континуума (см. задачу 253).

Открытые множества. Множество E в метрическом пространстве X называется *открытым*, если все его точки являются внутренними, т. е. E совпадает со своей внутренностью E°.

Примеры открытых множеств на прямой — интервал, объединение любой совокупности интервалов, вся прямая; на плоскости — открытый круг, вся плоскость.

В любом метрическом пространстве X открыты пустое множество и все пространство; открытым множеством в X является также каждый открытый шар.

Свойства открытых множеств: а) пересечение конечного числа открытых множеств есть открытое множество; б) объединение любой совокупности открытых множеств есть открытое множество.

Между открытыми и замкнутыми множествами существует следующая связь: 1) дополнение к любому открытому множеству есть замкнутое множество; 2) дополнение к любому замкнутому множеству есть открытое множество. Здесь (и всюду в дальнейшем) имеется в виду дополнение до всего пространства.

Множества типа F_σ и множества типа G_δ. Множество, которое может быть представлено как объединение счетной совокупности замкнутых множеств, называется *множеством типа* F_σ (типа «эф-сигма»).

В частности, множествами типа F_σ являются: любое замкнутое множество; любое открытое множество (задача 205); любое счетное множество и т. д.

Очевидно, объединение любой конечной или счетной совокупности множеств типа F_σ есть множество типа F_σ.

Множество, которое может быть представлено как пересечение счетной совокупности открытых множеств, называется *множеством типа* G_δ (типа «же-дельта»).

В частности, множествами типа G_δ являются все замкнутые и все открытые множества на числовой прямой; кроме того, множествами типа G_δ являются все полуоткрытые промежутки, множество всех иррациональных точек и т. д.

Очевидно, пересечение любой конечной или счетной совокупности множеств типа G_δ есть множество типа G_δ.

Расстояние от точки до множества, расстояние между множествами. Диаметр множества. *Расстоянием от точки* $x \in X$ *до множества* $E \subset X$ (где X — метрическое пространство) называется нижняя грань чисел $\rho(x, y)$, где y пробегает множество E:

$$d(x, E) = \inf_{y \in E} \rho(x, y).$$

Для того чтобы $d(x, E)$ было равно нулю, необходимо и достаточно, чтобы x была точкой прикосновения для E. Отсюда следует, что если E замкнуто, то $d(x, E) = 0$ тогда и только тогда, когда $x \in E$. Если же $x \bar{\in} E$ (где E замкнуто), то $d(x, E) > 0$.

Расстояние d *между множествами* A и B в метрическом пространстве X определяется равенством

$$d(A, B) = \inf_{\substack{x \in A \\ y \in B}} \rho(x, y).$$

Диаметром множества E в метрическом пространстве называется верхняя грань расстояний между всевозможными парами его точек:

$$\operatorname{diam} E = \sup_{x \in E,\ y \in E} \rho(x, y).$$

Плотные и нигде не плотные множества. Множество $E \subset X$ называется *плотным в множестве* A, если $\bar{E} \supset A$. Если, в частности, E плотно в пространстве X (т. е. $\bar{E} = X$), то E называется *всюду плотным*.

Множество E, лежащее в метрическом пространстве X, называется *нигде не плотным*, если оно не плотно ни в каком открытом шаре этого пространства. Это определение равносильно следующему: множество E нигде не плотно в X, если любой открытый шар пространства X содержит открытый шар, полностью свободный от точек множества E.

В частности, множество E нигде не плотно на числовой прямой $\boldsymbol{R}^1$, если любой интервал $]a, b[$ содержит интервал $]\alpha, \beta[$, полностью свободный от точек множества E. Примеры нигде не плотных множеств на прямой: любое конечное множество; множество всех целых чисел; канторово совершенное множество.

Множество, являющееся объединением конечной или счетной совокупности нигде не плотных множеств, называется *множеством первой категории*. Множество, не представимое в виде объединения счетной совокупности нигде не плотных множеств, называется *множеством второй категории*.

Задачи

149. Показать, что $\overline{V(x_0, \varepsilon)} \subset B(x_0, \varepsilon)$. Привести примеры метрических пространств, в которых $\overline{V(x_0, \varepsilon)} \neq B(x_0, \varepsilon)$ для некоторых x_0 и ε, и метрических пространств, в которых $\overline{V(x_0, \varepsilon)} = B(x_0, \varepsilon)$ для всех x_0 и ε.

150. Доказать, что замыкание объединения двух множеств равно объединению их замыканий. Доказать, что для бесконечного семейства множеств $\{A_\zeta\}$ справедливо включение $\bigcup\limits_\zeta \overline{A}_\zeta \subset \overline{\bigcup\limits_\zeta A_\zeta}$, но не всегда верно равенство.

151. Доказать равенства $\mathbf{C}(E^\circ) = \overline{\mathbf{C}E}$, $\mathbf{C}(\overline{E}) = (\mathbf{C}E)^\circ$.

152. Верно ли утверждение: «Внутренность пересечения двух множеств равна пересечению их внутренностей»? Верно ли аналогичное утверждение для бесконечной совокупности множеств?

153. Верно ли утверждение: «Внутренность объединения двух множеств равна объединению их внутренностей»? Если нет, то имеется ли в какую-либо сторону включение?

154. Построить множество, для которого производное множество непусто, а второе производное пусто.

155. Привести примеры: а) множества на плоскости, не имеющего граничных точек; б) множества E на плоскости такого, что $\mathrm{Fr}\, E \neq \varnothing$, $E \cap \mathrm{Fr}\, E = \varnothing$; в) несчетного множества E на плоскости такого, что $E = \mathrm{Fr}\, E$.

156. Доказать, что $\mathrm{Fr}\, E = \overline{E} \setminus E^\circ$ для любого множества E.

157. Доказать, что граница объединения двух множеств содержится в объединении их границ. Показать на примере, что аналогичное утверждение для бесконечной совокупности множеств не всегда верно.

158. Доказать, что замыкание каждого множества замкнуто.

159. Доказать, что производное множество каждого множества замкнуто.

160. Доказать, что граница каждого множества замкнута.

161. Доказать, что для эквивалентности метрик ρ_1 и ρ_2 в пространстве X необходимо и достаточно, чтобы совокупность всех подмножеств пространства X, замкнутых в смысле метрики ρ_1, совпадала с совокупностью всех подмножеств, замкнутых в смысле метрики ρ_2.

162. На плоскости дана последовательность концентрических окружностей радиусов $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ Является ли их объединение замкнутым множеством?

163. На плоскости дана последовательность замкнутых концентрических кругов радиусов $r_1 < r_2 < \ldots < r_n < \ldots$ Является ли их объединение замкнутым множеством? Является ли оно открытым множеством?

164. Будем считать Землю идеально гладким шаром. Рассмотрим множество E всех тех точек M на поверхности Земли, которые обладают следующим свойством: если из M пройти 7 км на север, затем 7 км на запад и, наконец, 7 км на юг, то окажешься снова в точке M. Является ли E замкнутым множеством? Если нет, то какое множество является его замыканием? Его производным множеством?

165. Пусть f — непрерывная функция, определенная всюду на оси Ox. Доказать, что множество E_α тех точек оси Ox, где $f(x) \geqslant a$, замкнуто.

166. Пусть f_0 — фиксированная непрерывная функция на $[0, 1]$; доказать, что множество E всех непрерывных функций f на $[0, 1]$, удовлетворяющих неравенству $f(x) \leqslant f_0(x)$ для всех $x \in [0, 1]$, замкнуто в пространстве $C[0, 1]$.

167. Доказать равносильность следующих определений замкнутого множества: а) множество называется замкнутым, если оно включает все свои точки прикосновения; б) множество называется замкнутым, если оно включает все свои предельные точки; в) множество называется замкнутым, если оно включает все свои граничные точки.

168. Доказать, что замыкание $\overline{E}$ множества E есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих E.

169. Доказать, что для любого множества E справедливы включения $E' \supset E'' \supset \ldots \supset E^{(n)} \supset \ldots$

170. Доказать, что если E замкнуто, то $\mathrm{Fr}\, E = \mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\, E)$. Для любого же множества E $\mathrm{Fr}\, E \supset \mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\, E) = \mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\, E))$.

171. Доказать, что всякое замкнутое подпространство E полного метрического пространства X есть полное метрическое пространство.

172. Доказать, что незамкнутое подпространство E метрического пространства X не является полным пространством.

173. Пусть X — множество всех функций на $[a, b]$, имеющих непрерывную производную. Введем в нем метрику

$$\rho(f, g) = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - g(x)|.$$

Будет ли пространство (X, ρ) полным?

174. Является ли совершенным множеством гиперболическая спираль $\rho = \frac{a}{\varphi}$ $(0 < \varphi < +\infty)$ на плоскости? Является ли совершенным множеством замыкание этой спирали?

175. Всегда ли объединение конечного семейства совершенных множеств является совершенным множеством? А объединение счетного семейства совершенных множеств?

176. Доказать, что внутренность любого множества есть открытое множество.

177. Доказать, что внутренность E° множества E есть объединение всех открытых множеств, содержащихся в E.

178. Доказать, что для любого множества A в метрическом пространстве и любого числа $\varepsilon > 0$ множество E всех тех точек x, для которых имеет место неравенство $d(x, A) < \varepsilon$, открыто.

179. Пусть f — непрерывная функция, определенная всюду на оси Ox. Доказать, что множество E_a тех точек оси Ox, где $f(x) > a$, открыто.

180. Доказать, что множество E всех непрерывных функций f на $[0, 1]$, удовлетворяющих для всех $x \in [0, 1]$ неравенствам $A < f(x) < B$ (где $A < B$ — заданные числа), является открытым множеством в пространстве $C[0, 1]$.

181. Пусть F — фиксированная непрерывная функция на $[0, 1]$. Доказать, что множество всех функций f, удовлетворяющих для всех $x \in [0, 1]$ неравенству $f(x) > F(x)$, открыто в $C[0, 1]$.

182. Построить последовательность открытых множеств, пересечение которых не является открытым.

183. Верно ли утверждение: «Если E — замкнутое множество, то замыкание внутренности E совпадает с E (т. е. $E = \overline{E^\circ}$)»? Если это утверждение неверно, то имеет ли место одно из включений $E \supset \overline{E^\circ}$, $E \subset \overline{E^\circ}$ и какое именно?

184. Верно ли утверждение: «Если E — открытое множество, то внутренность замыкания E совпадает с E (т. е. $E = (\overline{E})^\circ$)»? Если это утверждение неверно, то имеет ли место одно из включений $E \supset (\overline{E})^\circ$, $E \subset (\overline{E})^\circ$ и какое именно?

185. Доказать, что для любого множества A имеют место включения: а) $\overline{(\overline{A})^\circ} \subset \overline{A}$, б) $(\overline{A^\circ})^\circ \supset A^\circ$, но равенства не всегда имеют место.

186. Пусть f — непрерывная функция на $[a, b]$ и E_n — множество тех точек отрезка $[a, b]$, где $n \leqslant f(x) \leqslant n + 1$. Доказать, что множество $E_1 \cup E_3 \cup E_5 \cup \ldots \cup E_{2k-1} \cup \ldots$ замкнуто на числовой прямой.

187. Пусть I — конечный интервал $]a, b[$ на прямой, $E_1 \subset \subset E_2 \subset \ldots$ — возрастающая последовательность замкнутых множеств, в объединении дающих I. Верно ли, что любое замкнутое множество $F \subset I$ содержится хотя бы в одном из E_n? Если верно — доказать, если нет — построить противоречащий пример.

188. Построить на прямой такое множество E, что 1) все его точки изолированные; 2) нижняя грань расстояний между различными его точками равна нулю; 3) оно не имеет предельных точек на прямой.

189. Доказать, что любое множество E, все точки которого изолированные, является множеством типа F_σ.

190. Пусть I_E — множество всех изолированных точек произвольного множества E. Доказать, что I_E есть множество типа F_σ.

191. Привести пример несчетного множества, все точки которого изолированные.

192. Пусть X — метрическое пространство, Z — его подпространство и $E \subset Z$. а) Доказать, что $\overline{E}^Z = \overline{E}^X \cap Z$, где $\overline{E}^Z$ и $\overline{E}^X$ — замыкания E соответственно в Z и в X. б) Доказать, что, для того чтобы E было замкнуто в Z, необходимо и достаточно, чтобы существовало замкнутое в X множество F такое, что $E = F \cap Z$.

193. Пусть X — метрическое пространство, Z — его подпространство. Доказать, что, для того чтобы множество $E \subset Z$ было открыто в Z, необходимо и достаточно, чтобы существовало открытое в X множество G такое, что $E = G \cap Z$.

194. Пусть Z — подпространство метрического пространства X, $E \subset Z$ и E замкнуто (или открыто) в X. Доказать, что E замкнуто (соответственно открыто) в Z.

195. Пусть E замкнуто (или открыто) в замкнутом (соответственно открытом) подпространстве Z метрического пространства X. Доказать, что E замкнуто (соответственно открыто) в X.

196. Пусть X и Y — метрические пространства, $X \times Y$ — их произведение. Пусть в X введена метрика, рассмотренная в задаче 146 (или 147). Доказать, что если E — замкнутое множество в X, а F — замкнутое множество в Y, то $E \times F$ — замкнутое множество в $X \times Y$.

197. Доказать, что если B — замкнутое подмножество метрического пространства X, то $(A^\circ \cup B)^\circ = (A \cup B)^\circ$ для любого $A \subset X$.

198. Верно ли, что для любой точки x_0 метрического пространства X и любого множества $A \subset X$

$$d(x_0, A) = d(x_0, \overline{A})?$$

199. Верно ли, что для любой точки x_0 метрического пространства X и любого множества $A \subset X$

$$d(x_0, A) = d(x_0, A^\circ)?$$

200. Доказать, что для любых двух множеств A и B в метрическом пространстве X имеет место

$$d(A, B) = \inf_{x \in A} d(x, B) = \inf_{y \in B} d(A, y).$$

201. Доказать, что для любых двух множеств A и B в метрическом пространстве справедливы равенства

$$d(A, B) = d(A, \overline{B}) = d(\overline{A}, B) = d(\overline{A}, \overline{B}).$$

202. Для всяких ли двух множеств A и B в метрическом пространстве имеет место равенство

$$d(A, B) = d(A^\circ, B^\circ).$$

203. Доказать, что для любых двух непересекающихся замкнутых подмножеств F_1 и F_2 метрического пространства X существуют непересекающиеся открытые множества $G_1 \subset X$ и $G_2 \subset X$ такие, что $G_1 \supset F_1$, $G_2 \supset F_2$.

204. Доказать, что дополнение ко всякому множеству типа G_δ является множеством типа F_σ, а дополнение ко всякому множеству типа F_σ — множеством типа G_δ.

205. Всякое замкнутое множество в метрическом пространстве есть множество типа G_δ, а всякое открытое — типа F_σ. Доказать это.

206. Доказать, что множество E всех точек плоскости, у которых обе координаты иррациональны, есть множество типа G_δ.

207. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность замкнутых множеств. Доказать, что $\underline{\lim}\, E_n$ есть множество типа F_σ. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для верхнего предела.

208. Доказать, что убывающая последовательность замкнутых множеств $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ в полном метрическом пространстве такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0$, имеет непустое пересечение.

209. Верно ли утверждение, что всякая убывающая последовательность замкнутых шаров $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ в любом полном метрическом пространстве имеет непустое пересечение?

210. Верно ли утверждение, что убывающая последовательность открытых шаров $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ в полном метрическом пространстве имеет непустое пересечение, если $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0$?

211. Пусть $E_1 \supset E_2 \supset \ldots$ — такая последовательность открытых шаров в полном метрическом пространстве, что а) $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam} E_n = 0$; б) $\overline{E}_{n+1} \subset E_n$ для каждого n. Доказать, что $\bigcap\limits_n E_n$ непусто.

212. Доказать, что любое непустое открытое множество на прямой представляет собой объединение конечной или счетной совокупности попарно не пересекающихся интервалов (конечных или бесконечных).

Примечание. Такое представление открытого множества в виде объединения интервалов единственно (эти интервалы называются *составляющими интервалами* открытого множества на прямой, а также *смежными интервалами* замкнутого множества, служащего дополнением к этому открытому).

213. Доказать: «Для того чтобы замкнутое множество на прямой было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы никакие два его смежных интервала не имели общих концов».

214. Доказать, что отрезок $[a, b]$ нельзя представить в виде объединения двух непустых непересекающихся замкнутых множеств.

215. Доказать, что отрезок $[a, b]$ нельзя представить в виде объединения счетной совокупности попарно не пересекающихся непустых замкнутых множеств.

216. Доказать, что интервал $]a, b[$ нельзя представить в виде объединения счетной совокупности попарно не пересекающихся замкнутых множеств.

217. Доказать, что числовая прямая $\boldsymbol{R}^1$ не может быть представлена в виде объединения счетной совокупности попарно не пересекающихся непустых замкнутых множеств.

218. Можно ли представить канторово множество в виде объединения счетной совокупности попарно не пересекающихся непустых замкнутых множеств?

219. На прямой даны отрезок $[a, b]$ и совершенное множество E, причем концы отрезка не принадлежат E. Доказать, что $[a, b] \cap \cap E$ — совершенное множество.

220. Доказать: «Для того чтобы замкнутое множество E на прямой было нигде не плотным, достаточно, чтобы любой интервал содержал хотя бы одну точку, не принадлежащую E».

221. На прямой даны интервал $]\alpha, \beta[$ и нигде не плотное совершенное множество E. Доказать, что их пересечение является либо совершенным множеством, либо объединением счетной совокупности попарно не пересекающихся непустых совершенных множеств.

222. На прямой даны два нигде не плотных совершенных множества P и Q. Доказать, что $P \setminus Q$ является либо совершенным множеством, либо объединением счетной совокупности попарно не пересекающихся совершенных множеств.

223. Доказать, что объединение счетной совокупности нигде не плотных совершенных множеств на прямой можно представить в виде объединения счетной совокупности *попарно не пересекающихся* нигде не плотных совершенных множеств.

224. Доказать, что канторово множество D является нигде не плотным совершенным множеством на прямой.

225. Известно, что канторово множество имеет следующую арифметическую структуру: оно состоит из тех и только из тех точек отрезка $[0, 1]$, которые могут быть записаны в виде троичной дроби, не содержащей единицы в числе своих троичных знаков. Доказать это.

226. Какова арифметическая структура множества точек первого рода (т. е. концов смежных интервалов) канторова множества? Какова арифметическая структура точек второго рода (т. е. остальных точек канторова множества)?

227. Найти в канторовом множестве какую-либо точку первого рода, заключенную между десятичными дробями 0,1 и 0,2.

228. Найти в канторовом множестве какую-либо точку второго рода, заключенную между десятичными дробями 0,05 и 0,1. Можно ли выбрать эту точку так, чтобы она была рациональной?

229. Построить непустое совершенное подмножество канторова множества D, не включающее ни одной его точки первого рода.

230. Существует ли интервал, содержащий хотя бы одну точку первого рода канторова множества D, но не содержащий ни одной точки второго рода?

231. Доказать, что для любой точки $x \in D$ (где D — канторово множество) существует точка $y \in D$ такая, что $\rho(x, y)$ иррационально.

232. Пусть E — произвольное счетное множество на прямой. Построить непустое совершенное множество на прямой, не содержащее ни одной точки множества E.

233. Пусть E — нигде не плотное совершенное множество, а $]\alpha_1, \beta_1[, \ldots,]\alpha_i, \beta_i[, \ldots$ — его смежные интервалы. Построим на каждом интервале $]\alpha_i, \beta_i[$ нигде не плотное совершенное множество $E_i \subset]\alpha_i, \beta_i[$. Доказать, что множество $F = E \cup E_1 \cup \ldots$

$\ldots \cup E_i \cup \ldots$ совершенно, нигде не плотно и что все интервалы, на которые распадаются множества $]\alpha_i, \beta_i[\setminus E_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, и только они являются смежными интервалами для F.

234. Доказать, что множество E на прямой, содержащее более одной точки, не может удовлетворять одновременно трем условиям: а) для любых $\alpha \in E$, $\beta \in E$ $(\alpha < \beta)$ существует $\gamma \in E$ такое, что $\alpha < \gamma < \beta$; б) E замкнуто; в) E нигде не плотно. Однако существуют непустые множества на $[a, b]$, удовлетворяющие любым двум из этих условий (без третьего).

Для дальнейшего (задачи 235—241) нам понадобятся понятия *предельной точки* и *предельного множества последовательности* точек метрического пространства. *Предельной точкой последовательности* $\{a_n\}$ называется точка, являющаяся пределом какой-либо ее сходящейся подпоследовательности. Множество всех предельных точек последовательности называется *предельным множеством* этой последовательности.

235. Построить последовательность, предельное множество которой пусто.

236. Доказать, что если предельное множество некоторой числовой последовательности пусто, то последовательность модулей членов этой последовательности сходится к $+\infty$.

237. Построить числовую последовательность, для которой предельным множеством служит вся прямая.

238. Доказать, что предельное множество любой последовательности замкнуто.

239. Доказать, что, каково бы ни было замкнутое множество F на прямой, можно построить числовую последовательность, для которой F служит предельным множеством.

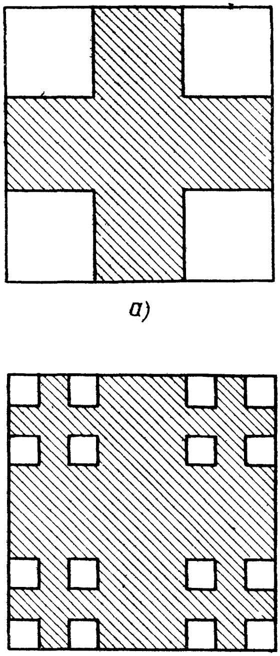
240. Доказать, что для сходимости числовой последовательности необходимо, а в случае ее ограниченности — и достаточно, чтобы ее предельное множество было одноточечным.

241. Привести пример расходящейся последовательности, у которой предельное множество состоит всего из одной точки.

242. Пусть E — множество точек квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, у которых обе координаты иррациональны. Доказать, что существует непустое совершенное подмножество множества E.

243. Представить замкнутый квадрат в виде объединения континуума нигде не плотных попарно непересекающихся непустых совершенных множеств на плоскости.

244. Построим на плоскости множество A следующим образом: разделим квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ прямыми $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ на девять одинаковых квадратов и выкинем центральный открытый квадрат (т. е. квадрат $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[\times \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$). Затем каждый из оставшихся восьми замкнутых квадратов делим на девять одинаковых квадратиков и выбрасываем все центральные открытые квадратики; далее продолжаем этот процесс неограниченно. Множество, оставшееся после счетного числа шагов, обозначим A (оно называется «*ковром Серпинского*»). Доказать, что A — нигде не плотное совершенное множество.



а)

б)

Рис. 1

245. Построим на плоскости множество B следующим образом: разделим замкнутый квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ прямыми $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ на девять одинаковых квадратов. Четыре замкнутых квадрата, примыкающих к вершинам основного квадрата, назовем квадратами первого ранга, а их объединение обозначим B_1 (на рисунке 1, *а* множество B_1 не заштриховано). Затем каждый из квадратов первого ранга разделим на девять одинаковых замкнутых квадратиков, и те из них, которые примыкают к вершинам соответствующего квадрата первого ранга, назовем квадратами второго ранга; объединение всех шестнадцати замкнутых квадратов второго ранга обозначим B_2 (на рисунке 1, *б* множество B_2 не заштриховано). Далее, делим каждый квадрат второго ранга на девять одинаковых замкнутых квадратов и назовем квадратами третьего ранга те из них, которые примыкают к вершинам соответствующих квадратов второго ранга; объединение всех шестидесяти четырех замкнутых квадратов третьего ранга обозначим B_3 и т. д. Ясно, что $B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \ldots$ Общую часть всех B_κ назовем «*кладбищем Серпинского*» и обозначим через B:

$$B = \bigcap_{\kappa} B_\kappa.$$

Доказать, что B — нигде не плотное совершенное множество. Исследовать его арифметическую структуру.

246. «*Канторовой гребенкой*» называется множество E на плоскости Oxy, состоящее из всех тех точек $M(x; y)$, координаты которых удовлетворяют следующим условиям: $x \in [0, 1]$, $y \in D$, где D — канторово множество на оси Oy. Доказать, что E — нигде не плотное совершенное множество, и исследовать его арифметическую структуру.

247. Можно ли множества A («ковер Серпинского»), B («кладбище Серпинского») и E («канторову гребенку») выразить через канторово множество с помощью действий дополнения (до отрезка $[0, 1]$) и произведения?

248. Пусть G — открытое множество, плотное в метрическом пространстве X. Доказать, что для любого открытого шара $S_0 \subset \subset X$ найдется открытый шар S такой, что $\overline{S} \subset S_0 \cap G$.

249. Доказать, что пересечение счетной совокупности открытых множеств, плотных в полном пространстве X, является плотным в X множеством.

250. Показать на примере, что предыдущее утверждение становится неверным, если пространство X неполно.

251. Пусть X — полное пространство без изолированных точек. Доказать, что пересечение счетной совокупности открытых плотных в X множеств имеет мощность, не меньшую мощности континуума.

252. Представить отрезок $[0, 1]$ в виде объединения двух непересекающихся всюду плотных на нем множеств A и B, обладающих тем свойством, что для любых α и β таких, что $0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 1$, пересечения $]\alpha, \beta[\cap A$ и $]\alpha, \beta[\cap B$ имеют мощность континуума.

253. Доказать, что непустое совершенное множество E в полном пространстве X имеет мощность, не меньшую мощности континуума.

254. Доказать, что пересечение конечной или счетной совокупности множеств типа G_δ, каждое из которых плотно в полном пространстве X, является множеством типа G_δ, плотным в X.

255. Привести пример убывающей последовательности $\{E_n\}$ всюду плотных множеств на прямой, имеющей пустое пересечение.

256. Построить счетную совокупность попарно не пересекающихся всюду плотных множеств на прямой.

257. Доказать, что множество всех рациональных чисел на прямой есть множество типа F_σ, но не является множеством типа G_δ.

258. Доказать, что множество всех иррациональных чисел на прямой есть множество типа G_δ, но не является множеством типа F_σ.

259. Пусть E — счетное всюду плотное множество на прямой; доказать, что оно не является множеством типа G_δ.

260. Пусть E — дополнение к счетному всюду плотному множеству на прямой; доказать, что E не является множеством типа F_σ.

261. Доказать, что множество всех рациональных чисел, расположенных на полуинтервале $[\alpha, \beta[$, не является множеством типа G_δ.

Доказать, что множество всех иррациональных чисел, лежащих на том же полуинтервале, не является множеством типа F_σ.

262. Построить пример множества на прямой, не являющегося ни множеством типа F_σ, ни множеством типа G_δ.

263. Пусть A — нигде не плотное множество; доказать, что его замыкание также нигде не плотно.

264. Доказать, что дополнение к нигде не плотному множеству всюду плотно. Справедливо ли утверждение, что дополнение к всюду плотному множеству нигде не плотно?

265. Доказать, что дополнение к открытому всюду плотному множеству E нигде не плотно.

266. Доказать, что объединение E конечного числа нигде не плотных множеств в метрическом пространстве X является нигде не плотным множеством в X. Сохраняется ли это утверждение в силе для объединения счетной совокупности нигде не плотных множеств?

267. Доказать, что полное пространство X не может быть представлено в виде объединения счетной совокупности множеств, нигде не плотных в X (т. е. что полное пространство есть множество второй категории) (*теорема Бэра*).

268. Показать на примере, что существуют неполные пространства, являющиеся множествами первой категории.

269. Канторово множество D замкнуто на прямой; следовательно, оно является полным пространством. Вместе с тем оно нигде не плотно и, следовательно, является множеством первой категории. Нет ли здесь противоречия с теоремой Бэра (задача 267)?

270. Доказать, что всякое метрическое пространство, имеющее хотя бы одну изолированную точку, является множеством второй категории.

271. Привести пример неполного пространства без изолированных точек, являющегося множеством второй категории.

272. Доказать, что в полном пространстве дополнение к множеству первой категории есть множество второй категории.

273. Какой категории на плоскости является множество E всех точек, обе координаты которых иррациональны? Какой категории его дополнение?

274. Доказать, что множество D_E всех точек второй категории для E замкнуто и содержится в E'.

Примечание. Точка x_0 метрического пространства X называется *точкой второй категории* для множества $E \subset X$, если для любой окрестности $V(x_0)$ множество $V(x_0) \cap E$ есть множество второй категории.

275. Доказать, что если E — нигде не плотное (или всюду плотное) множество на прямой, то множество E_a всех точек вида $x + a$, где a — фиксированное число, а x пробегает E, также нигде не плотно (или всюду плотно) на прямой.

276. Пусть E — всюду плотное открытое множество на прямой $\boldsymbol{R}^1$. Доказать, что любая точка $a \in \boldsymbol{R}^1$ представима в виде $a = x_1 + x_2$, где $x_1 \in E$, $x_2 \in E$.

277. Пусть E — всюду плотное множество на прямой и A — какое-либо его конечное подмножество. Доказать, что $E \setminus A$ всюду плотно на прямой.

278. Построить на прямой счетную совокупность всюду плотных попарно не пересекающихся несчетных множеств $\{E_i\}$.

279. В этой и двух следующих задачах X и Y — метрические пространства, $X \times Y$ — их произведение с метрикой, введенной в задаче 146. Пусть E — нигде не плотное множество в X, F — произвольное множество в Y. Доказать, что $E \times F$ нигде не плотно в $X \times Y$.

280. Пусть E и F — замкнутые множества соответственно в X

и Y, причем одно из них совершенное. Доказать, что $E \times F$ — совершенное множество в $X \times Y$.

281. Пусть E — множество, плотное в X, F — множество, плотное в Y. Доказать, что $E \times F$ плотно в $X \times Y$.

282. Найти замыкание множества всех точек вида $\frac{p^2}{q^2}$, где p и q — всевозможные целые числа, причем $q \neq 0$.

283. Найти замыкание множества всех точек вида $2^{\frac{p}{q}}$, где p и q — всевозможные натуральные числа.

284. Найти замыкание множества всех точек вида $\frac{q^2}{4p^2 + q^2}$ где p и q — всевозможные целые числа, отличные от нуля.

285. Пусть ζ — иррациональное число. Доказать, что множество всех чисел вида $m + n\zeta$, где m и n — всевозможные целые числа, плотно на прямой.

286. Пусть ζ — иррациональное число. Является ли множество всех чисел вида $m + n\zeta$, где m и n — всевозможные четные числа, плотным на прямой?

287. Доказать, что множество M точек, расположенных на единичной окружности Γ с центром в начале координат и имеющих полярные углы $1, 2, \ldots, n, \ldots$ радиан, плотно на Γ.

288. Доказать, что множество всех точек (x, y) с рациональными координатами плотно на плоскости.

289. Построим множество E на отрезке $[0, 1]$ следующим образом: зададим произвольную последовательность положительных чисел $\{a_n\}$, образующую сходящийся ряд, сумма которого меньше 1. Исключим из $[0, 1]$ интервал длины a_1 с центром в середине отрезка; далее, из оставшихся двух отрезков удалим интервалы длины $\frac{a_2}{2}$ с центрами в серединах этих отрезков; затем из оставшихся четырех отрезков удалим интервалы длины $\frac{a_3}{2^2}$ с центрами в серединах этих отрезков, и т. д.; множество, оставшееся после счетного числа шагов, обозначим E. Доказать, что оно нигде не плотно на $[0, 1]$ и совершенно.

290. Доказать, что множество E точек отрезка $[0, 1]$, десятичное разложение которых возможно без цифр 4 и 5, является нигде не плотным совершенным множеством.

291. Замкнуто ли множество E тех иррациональных чисел отрезка $[0, 1]$, в десятичном разложении которых отсутствует цифра 5? Если нет, то что представляет собой его замыкание? Содержит ли это множество изолированные точки? Является ли оно нигде не плотным?

292. Построить счетное подмножество канторова множества D, плотное в D.

293. Доказать, что любое замкнутое множество F на прямой обладает конечным или счетным подмножеством E таким что $\overline{E} = F$.

Для решения некоторых из последующих задач нам понадобится следующая *аппроксимационная теорема Вейерштрасса*:

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой многочлен $P(x)$, что для всех $x \in [a, b]$ справедливо неравенство $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$.*

294. Доказать, что множество всех многочленов плотно в пространстве $C[0, 1]$.

295. Доказать, что множество всех многочленов с рациональными коэффициентами плотно в $C[0, 1]$.

296. Пусть $f(x)$ — четная (нечетная) непрерывная функция на отрезке $[-1, 1]$. Доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует многочлен $P(x)$, содержащий лишь четные (нечетные) степени x, такой, что $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [-1, 1]$.

297. Доказать, что для любой функции $f(x)$, непрерывной на всей оси Ox, существует последовательность многочленов, сходящаяся к $f(x)$ в каждой точке $x \in Ox$.

298. Доказать, что если для функции $f(x)$, определенной на всей оси Ox, существует последовательность многочленов, равномерно на Ox сходящаяся к $f(x)$, то $f(x)$ — многочлен.

299. Привести пример последовательности множеств $\{E_n\}$, каждое из которых плотно в $C[0, 1]$, а их пересечение пусто. Могут ли все E_n быть открытыми в $C[0, 1]$?

300. Доказать, что множество E всех многочленов степени не выше N, где N — фиксированное натуральное число, нигде не плотно в $C[0, 1]$.

301. Доказать, что множество E всех числовых последовательностей $(x_1, x_2, \ldots)$, у которых лишь конечное число членов отлично от нуля, плотно в пространстве l_2.

302. Доказать, что множество E всех числовых последовательностей $(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, у которых $x_n = 0$ для всех $n > N$ (где N — фиксированное натуральное число), нигде не плотно в l_2.

Глава VI.
КОМПАКТНОСТЬ, СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ, СВЯЗНОСТЬ

Компактные множества. Пусть X — метрическое пространство, $E \subset X$. Если из каждой последовательности $\{x_n\}$, все элементы которой принадлежат E, можно выделить сходящуюся в X подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, то множество E называется *относительно компактным*.

Если из каждой последовательности $\{x_n\}$, все элементы которой принадлежат E, можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к точке из E, то множество называется *компактным* (или *компактом*).

Ясно, что любое компактное множество E относительно компактно, но не наоборот. Для того чтобы множество E в метрическом пространстве X было компактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было относительно компактным и замкнутым (задача 304).

Множество E в метрическом пространстве называется *ограниченным*, если его диаметр есть конечное число: $\operatorname{diam} E < +\infty$.

Всякое относительно компактное множество в метрическом пространстве ограничено, всякое компактное — ограничено и замкнуто (задача 303); обратные утверждения, вообще говоря, неверны (задача 309).

Теорема Кантора. *Пусть A_1, A_2, ... — непустые компактные множества в метрическом пространстве X, причем $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ Тогда пересечение $\bigcap_n A_n$ непусто. Если, кроме того, $\lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A_n = 0$, то $\bigcap_n A_n$ состоит из единственной точки* (задача 317).

Укажем один критерий относительной компактности множества в метрическом пространстве. Предварительно дадим несколько определений. Пусть $\varepsilon > 0$; множество M называется *ε-сетью* для множества E, если для каждой точки $x \in E$ существует точка $y \in M$ такая, что $\rho(x, y) < \varepsilon$. Множество E называется *вполне ограниченным*, если для него при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть.

Теорема Хаусдорфа. *Для того чтобы множество E в метрическом пространстве X было относительно компактным, необходимо, а в случае, если X — полное пространство, то и достаточно, чтобы E было вполне ограниченным* (задача 325).

Из теоремы Хаусдорфа вытекают важные признаки относительной компактности и компактности множества в евклидовом пространстве.

Теорема Больцано—Вейерштрасса. *Если множество E в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ ограничено, то оно относительно компактно, а если $E \subset \boldsymbol{R}^n$ ограничено и замкнуто, то оно компактно* (задачи 329, 330).

Следствие 1. *Всякая ограниченная последовательность точек евклидова пространства имеет сходящуюся подпоследовательность.*

Следствие 2. *У всякого бесконечного ограниченного множества E в евклидовом пространстве существует хотя бы одна предельная точка* (не обязательно принадлежащая E).

Пусть E — какое-либо множество в метрическом пространстве X. Семейство открытых множеств $\{G_\alpha\}$ ($\alpha \in \mathrm{A}$) называется *открытым покрытием множества* E, если $\bigcup_{\alpha\in\mathrm{A}} G_\alpha \supset E$.

Открытое покрытие множества E называется *конечным*, если оно состоит из конечного числа множеств.

Множество E называется *бикомпактным* (или *бикомпактом*), если из любого открытого покрытия $\{G_\alpha\}$ множества E можно выделить конечное покрытие этого множества (т. е. отбросить все множества из покрытия $\{G_\alpha\}$, кроме конечного их числа, так, чтобы оставшиеся множества также покрывали множество E).

Примеры. Любое конечное множество бикомпактно. Множество $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0\right\}$ бикомпактно в $\boldsymbol{R}^1$.

Теорема. *Для того чтобы множество E в метрическом пространстве было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было компактным* (задача 336).

Следствие. *Если множество E в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ замкнуто и ограничено, то из любого его открытого покрытия можно выделить конечное покрытие.*

Сепарабельность. Счетный базис. Метрическое пространство X называется *сепарабельным*, если существует не более чем счетное множество $E \subset X$, плотное в X*.

Примеры сепарабельных пространств: любое метрическое пространство, состоящее из конечного числа точек; любое евклидово пространство $\boldsymbol{R}^n$; $C[a, b]$; l_2 (задачи 345—347), любой компакт (задача 350); пространство $M[a, b]$ (задача 351); здесь $M[a, b]$ есть $M([a, b])$ (см. задачу 129).

Базисом открытых множеств (или просто *базисом*) метрического пространства X называется всякое семейство открытых множеств, обладающее тем свой-

---

* Очевидно, что множество E конечно тогда и только тогда, когда X конечно (в этом случае $E = X$); для бесконечного сепарабельного пространства E всегда счетно.

ством, что любое открытое множество пространства X является объединением некоторой совокупности множеств из этого семейства.

Примеры базисов: 1) все открытые множества метрического пространства X образуют базис этого пространства; 2) все интервалы на числовой прямой $\boldsymbol{R}^1$ образуют базис в $\boldsymbol{R}^1$; 3) все интервалы с рациональными концами образуют базис в $\boldsymbol{R}^1$.

Пространство X называется *пространством со счетным базисом*, если оно обладает хотя бы одним счетным базисом (т. е. базисом, образованным счетной совокупностью открытых множеств).

Теорема 1. *Для того чтобы метрическое пространство имело счетный базис, необходимо и достаточно, чтобы оно было бесконечно и сепарабельно* (см. задачу 355).

Теорема 2. *Мощность совокупности всех открытых (всех замкнутых) множеств сепарабельного пространства не превосходит мощности континуума* (задачи 358—359).

Теорема 3. *Мощность любого сепарабельного пространства не превосходит мощности континуума* (задача 360).

Точки конденсации. Точка $M_0 \in X$ называется *точкой конденсации* множества $E \subset X$, если в каждой ее окрестности содержится несчетное множество точек из E.

Теорема 4 (Линделёфа). *Если множество E в сепарабельном пространстве X не имеет точек конденсации, принадлежащих E, то E не более чем счетно* (задача 366).

Теорема 5. *Множество точек конденсации произвольного множества E в сепарабельном пространстве совершенно* (задача 367).

Теорема 6 (Кантора — Бендиксона). *Любое замкнутое множество F в сепарабельном пространстве представимо в виде объединения двух множеств: совершенного и не более чем счетного* (задача 368).

Теорема 7. *Замкнутое множество в полном сепарабельном пространстве либо не более чем счетно, либо имеет мощность континуума* (задача 371).

Связность. Множества A и B в метрическом пространстве X называются *разъединенными*, если они непусты и ни одно из них не содержит точек прикосновения другого.

Ясно, что разъединенные множества не пересекаются (хотя обратное неверно). Ясно также, что если A и B разъединены и $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$, причем A_1 и B_1 непусты, то A_1 и B_1 также разъединены.

Множество E называется *связным*, если оно не может быть представлено в виде объединения двух разъединенных множеств. Если же E представимо в виде объединения двух разъединенных множеств, то оно называется *несвязным*.

Примеры. Пустое и одноточечные множества связны в любом метрическом пространстве. На числовой прямой $\boldsymbol{R}^1$ связны, кроме того, любые промежутки, и только они (задача 395).

Задачи

303. Доказать, что любое относительно компактное множество ограничено, а любое компактное — ограничено и замкнуто.

304. Доказать, что для компактности множества E в метрическом пространстве X необходимо и достаточно, чтобы оно было относительно компактно и замкнуто в X.

305. Доказать, что любое замкнутое подмножество компакта есть компакт.

306. Пусть E — относительно компактное подмножество пространства X. Доказать, что $\overline{E}$ компактно.

307. Доказать, что множество E функций $y = kx^2$, где k пробегает отрезок $[0, 3]$, компактно в $C[0, 1]$.

308. Доказать, что множество E всех функций $y = kx + b$ $(0 \leqslant k \leqslant 1,\ 0 \leqslant b \leqslant 1)$ компактно в $C[0, 1]$.

309. Доказать, что множество E всех непрерывных на $[0, 1]$ функций таких, что $|f(x)| \leqslant A$ (где A — фиксированное положительное число), ограничено и замкнуто в $C[0, 1]$, однако не компактно (и даже не относительно компактно).

310. Привести пример замкнутого ограниченного множества в l_2, не являющегося компактом.

311. Пусть A и B — непустые относительно компактные множества в пространстве X. Доказать, что числа $\rho(x, y)$ (где $x \in A$, $y \in B$) образуют ограниченное числовое множество.

312. Доказать, что объединение конечного числа компактов есть компакт, а объединение конечного числа относительно компактных множеств — относительно компактное множество.

313. Доказать, что пересечение любой совокупности компактов есть компакт; доказать аналогичное утверждение для относительно компактных множеств.

314. Пусть $A \subset X$ и $B \subset Y$, причем A и B непусты. Доказать, что для компактности множества $A \times B$ в пространстве $X \times Y$, наделенном метрикой, указанной в задаче 146, необходимо и достаточно, чтобы A и B были компактами.

315. Доказать, что для относительной компактности непустого множества $A \times B$ в $X \times Y$ необходимо и достаточно, чтобы A было относительно компактно в X, а B — в Y.

316. Доказать, что всякий компакт есть полное пространство.

317. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — непустые компактные множества в метрическом пространстве X, причем $A_1 \supset A_2 \supset \ldots$ Доказать, что $\bigcap\limits_n A_n$ непусто, причем если $\operatorname{diam} A_n \to 0$, то $\bigcap\limits_n A_n$ состоит из единственной точки (*теорема Кантора*).

318. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — убывающая последовательность компактов и $K = \bigcap\limits_n A_n$. Доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $A_n \subset V(K, \varepsilon)$ для всех $n > N$ (где $V(K, \varepsilon) = \bigcup\limits_{x \in K} V(x, \varepsilon)$).

319. Пусть $A_1, A_2, \ldots$ — убывающая последовательность компактов, пересечением которых является одноточечное множество. Доказать, что $\operatorname{diam} A_n \to 0$ при $n \to +\infty$.

320. Пусть $\{E_i\}$ — последовательность множеств в метрическом пространстве X таких, что а) $\overline{E}_i$ — компакт для каждого i; б) $\overline{E_i} \subset E_{i-1}$ для каждого $i > 1$. Доказать, что $\bigcap\limits_i E_i$ непусто. Показать на примере, что это утверждение становится неверным, если условие б) заменить на б′): $E_i \subset E_{i-1}$ для каждого $i > 1$.

321. Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — возрастающая последовательность открытых множеств такая, что замыкание $\overline{G}$ их объединения G есть компакт. Доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ существует номер N такой, что для всех $n > N$ имеет место включение

$$\operatorname{Fr} G_n \subset V(\operatorname{Fr} G, \varepsilon).$$

322. Привести пример последовательности непустых замкнутых ограниченных множеств $\{E_n\}$ в полном пространстве X таких, что 1) $E_{n+1} \subset E_n$ для всех n, 2) $\bigcap\limits_n E_n$ пусто.

323. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность компактов такая, что пересечение любой конечной совокупности этих компактов непусто. Доказать, что пересечение $\bigcap\limits_n E_n$ всех этих компактов также непусто.

324. Остается ли в силе результат предыдущей задачи, если, все E_n лежат в полном пространстве X, а условие компактности множеств E_n заменить условием их замкнутости и ограниченности?

325. Доказать, что, для того чтобы множество E в метрическом пространстве X было относительно компактным, необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы E было вполне ограниченным (*теорема Хаусдорфа*).

326. Доказать, что для относительно компактного множества в метрическом пространстве можно при любом $\varepsilon > 0$ выбрать конечную ε-сеть так, чтобы она содержалась в этом множестве.

327. Доказать, что, для того чтобы множество E в метрическом пространстве X было компактно, необходимо, а в случае полноты X и достаточно, чтобы E было замкнуто и вполне ограничено.

328. Пусть E — множество в полном метрическом пространстве X. Доказать, что если при любом $\varepsilon > 0$ существует относительно компактная ε-сеть для E, то E относительно компактно. Верно ли это утверждение, если X неполно?

329. Доказать, что в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ любое ограниченное множество E относительно компактно (*теорема Больцано — Вейерштрасса*).

330. Доказать, что в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ любое замкнутое ограниченное множество компактно.

331. Доказать, что любое относительно компактное (а следовательно, и любое компактное) множество в l_2 нигде не плотно в l_2.

332. Доказать, что любое относительно компактное (а следовательно, и любое компактное) множество в $C[a, b]$ нигде не плотно в $C[a, b]$.

333. Будем говорить, что множество E в метрическом пространстве X обладает свойством H, если его пересечение с любым замкнутым шаром компактно. Доказать, что любое компактное множество обладает свойством H и что любое множество, обладающее свойством H, замкнуто.

334. Показать, что в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ класс всех замкнутых множеств совпадает с классом множеств, обладающих свойством H (см. предыдущую задачу). Построить пример полного метрического пространства и замкнутого множества в нем, не обладающего свойством H.

335. Доказать, что множество E, обладающее свойством H (см. задачу 333) в $C[a, b]$, нигде не плотно в $C[a, b]$.

336. Доказать, что, для того чтобы множество E в метрическом пространстве X было бикомпактным, необходимо и достаточно, чтобы оно было компактным.

337. Дано счетное компактное множество $E=\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$. Его покрывает система интервалов $]1-\varepsilon, \; 1+\varepsilon[$, $\left]\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}\right[$, $\left]\frac{1-\varepsilon}{4}, \frac{1+\varepsilon}{4}\right[$, $\ldots$, $\left]\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right[$, $\ldots$ и $]-\varepsilon, \varepsilon[$, где ε — заданное положительное число, меньше чем $\frac{1}{2}$. Выделить из этой системы интервалов конечную систему, покрывающую множество E.

338. Дано счетное множество $E=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^n}, \ldots\right\}$. Его покрывает система интервалов:

$$]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[, \left]\frac{1-\varepsilon}{2}, \frac{1+\varepsilon}{2}\right[, \ldots, \left]\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}\right[, \ldots,$$

где $0<\varepsilon<\frac{1}{3}$. Можно ли из этого покрытия выделить конечное покрытие множества E?

339. Дано замкнутое счетное множество $E=\{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$. Его покрывает бесконечная система интервалов:

$]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[$, $]2-\varepsilon, 2+\varepsilon[$, $]3-\varepsilon, 3+\varepsilon[$, $\ldots$, $]n-\varepsilon, n+\varepsilon]$, $\ldots$, где ε — произвольное положительное число. Можно ли из этого покрытия выделить конечное покрытие?

340. Рассмотрим на плоскости открытый круг E единичного радиуса с центром в точке O; проведем концентрическую окружность C радиуса $\frac{1}{3}$ и построим семейство всевозможных открытых кругов радиуса $\frac{2}{3}$, центры которых лежат на окружности C. Эти открытые круги образуют бесконечное покрытие множества E. Доказать, что из этого покрытия нельзя выделить конечного покрытия.

341. Можно ли из того покрытия круга E, которое рассмотрено в задаче 340, выделить счетное покрытие?

342. Совокупность открытых кругов, рассмотренная в задаче 340, покрывает замкнутый круг радиуса $1-\varepsilon$ с центром в точке O, где $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$. Как из этого покрытия выделить конечное покрытие?

343. Построить пример ограниченного открытого множества на прямой, покрытого интервалами так, что из этого покрытия нельзя выделить конечного покрытия.

344. Верна ли теорема: «Из любого покрытия компакта замыканиями открытых множеств можно выделить конечное покрытие»?

345. Доказать сепарабельность евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$.

346. Доказать сепарабельность пространства $C[a, b]$.

347. Доказать сепарабельность пространства l_2.

348. Доказать сепарабельность пространства пар непрерывных функций на $[a, b]$ с метрикой

$$\rho((f_1, g_1), \quad (f_2, g_2)) = \max_{x \in [a, b]} |f_2(x) - f_1(x)| + \max_{x \in [a, b]} |g_2(x) - g_1(x)|.$$

349. Для того чтобы пространство X было сепарабельно необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ для X существовала не более чем счетная ε-сеть. Доказать это.

350. Доказать, что любой компакт является сепарабельным пространством.

351. Доказать, что пространство $M[a, b]$ несепарабельно.

352. Доказать, что любое множество E, лежащее в сепарабельном пространстве X, обладает не более чем счетным подмножеством A, плотным в E, т. е. таким, что $\overline{A} \supset E$. (Рассматривая E как подпространство пространства X, мы можем это утверждение сформулировать также следующим образом: любое подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.)

353. Построить какой-либо счетный базис на плоскости Oxy.

354. Пусть **A** и **B** — два семейства открытых множеств в метрическом пространстве X такие, что для каждого A из **A** найдется B из **B**, содержащееся в A, и для каждого B из **B** найдется A из **A**, содержащееся в B. Пусть **B** — базис в X. Можно ли утверждать, что **A** также базис?

355. Доказать, что для того чтобы метрическое пространство X было сепарабельным, необходимо и достаточно, чтобы оно имело счетный (или конечный) базис.

356. Доказать, что из любого бесконечного семейства $\{G_\alpha\}$ открытых множеств в пространстве X со счетным базисом можно выделить счетное подсемейство с тем же объединением.

357. Верно ли утверждение: «Если из любого бесконечного семейства $\{G_\alpha\}$ открытых множеств в пространстве X можно выделить счетное подсемейство с тем же объединением, то X есть пространство со счетным (или конечным) базисом»?

358. Доказать, что мощность совокупности всех открытых подмножеств сепарабельного метрического пространства не превосходит мощности континуума.

359. Доказать, что мощность совокупности всех замкнутых подмножеств сепарабельного метрического пространства не превосходит мощности континуума.

360. Доказать, что мощность любого сепарабельного пространства не превосходит мощности континуума.

361. Доказать, что если X — сепарабельное пространство, имеющее мощность континуума, то совокупность всех его замкнутых множеств также имеет мощность континуума.

362. Доказать, что непустой компакт без изолированных точек имеет мощность континуума.

363. Обозначим через S_E множество всех точек конденсации множества E в метрическом пространстве X. Доказать, что для любых множеств A и B имеет место: $S_{A \cup B} = S_A \cup S_B$.

364. Справедливо ли утверждение, что $S_{\bigcup\limits_n A_n} = \bigcup\limits_n S_{A_n}$ для произвольного счетного семейства множеств $\{A_n\}$?

365. Доказать, что, для того чтобы x_0 была точкой конденсации для множества E в метрическом пространстве X, необходимо и достаточно, чтобы любое множество G из базиса пространства X, содержащее x_0, включало несчетное множество точек из E.

366. Доказать теорему Линделёфа (с. 37).

367. Доказать, что для любого множества E в сепарабельном пространстве X множество точек конденсации S_E совершенно.

Привести пример несепарабельного пространства X и множества E в нем такого, что множество S_E его точек конденсации несовершенно.

368. Доказать теорему Кантора — Бендиксона (с. 37).

369. Доказать, что если пространство X не только сепарабельно, но и полно, то любое замкнутое множество $F \subset X$ единственным образом разбивается на два непересекающихся множества: совершенное и не более чем счетное.

370. Показать на примере, что единственность разбиения замкнутого множества на совершенное и не более чем счетное множества может нарушиться, если пространство X не полно.

371. Доказать, что замкнутое множество F в полном сепарабельном пространстве X либо не более чем счетно, либо имеет мощность континуума.

372. Доказать, что если все точки множества E в сепарабельном пространстве X изолированы, то E не более чем счетно.

373. Показать на примере, что предыдущее утверждение неверно, если пространство X несепарабельно.

374. Может ли множество E на плоскости, имеющее мощность континуума, содержать лишь конечное или счетное множество своих предельных точек?

375. Доказать существование хотя бы одной точки конденсации у несчетного множества E на конечном отрезке методом последовательного деления отрезка на две равные части, отмечая каждый раз ту половину отрезка, которая содержит несчетное множество точек из E.

376. Пусть E — связное множество, содержащее более одной точки. Доказать, что оно не имеет изолированных точек.

377. Доказать, что, для того чтобы непустые множества A и B были разъединены, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \varnothing.$$

378. Доказать, что если A и B — оба замкнутые или оба открытые непустые множества, причем $A \cap B = \varnothing$, то A и B разъединены.

379. Пусть E — несвязное замкнутое множество. Доказать, что его можно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых замкнутых множеств.

380. Пусть E — несвязное открытое множество. Доказать, что его можно представить в виде объединения двух непересекающихся непустых открытых множеств.

381. Пусть E и F — замкнутые множества. Доказать, что если $E \cup F$ и $E \cap F$ связны, то E и F связны.

382. Показать на примере, что утверждение предыдущей задачи становится неверным, если отказаться от требования замкнутости хотя бы одного из множеств E, F.

383. Доказать, что если E связно, то его замыкание $\bar{E}$ тоже связно. Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

384. Доказать, что если E связно и $E \subset H \subset \bar{E}$, то H также связно.

385. Доказать, что если для любых двух точек множества E существует связное множество Q, содержащее эти точки и включающееся в E, то E связно.

386. Доказать, что множество точек плоскости, у которых обе координаты иррациональны, несвязно.

387. Доказать связность отрезка, соединяющего две точки прямой, плоскости, трехмерного евклидова пространства.

388. Доказать связность замкнутого круга на плоскости и замкнутого шара в трехмерном евклидовом пространстве.

389. Пусть E_1 и E_2 — связные множества с непустым пересечением. Доказать, что $E = E_1 \cup E_2$ связно.

390. Пусть $E_1, E_2, \ldots$ — возрастающая последовательность связных множеств. Доказать, что их объединение $E = \bigcup\limits_i E_i$ связно.

391. Пусть $\{E_i\}$ — последовательность связных множеств такая, что $E_i \cap E_{i+1}$ непусто для каждого номера i. Доказать, что $\bigcup\limits_{i=1}^{+\infty} E_i$ связно.

392. Пусть $\{E_i\}$ — последовательность непустых множеств такая, что $E_i \cup E_{i+1}$ связно для каждого номера i. Доказать, что $\bigcup\limits_i E_i$ связно.

393. Доказать, что множество точек плоскости, у которых хотя бы одна координата рациональна, связно.

394. Доказать, что множество E на прямой связно в том и только в том случае, если вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь соединяющий их отрезок.

395. Доказать связность следующих множеств на прямой:

а) $[a, b]$; б) $]a, b[$; в) $]a, b]$; г) $[a, b[$; д) $[a, +\infty[$; е) $]a, +\infty[$; ж) $]-\infty, a]$; з) $]-\infty, a[$; и) $]-\infty, +\infty[$; к) одноточечное множество $\{a\}$; л) $\varnothing$.

Доказать, что никакое множество на прямой, кроме множеств вида а) — л) (при всевозможных a и b, $a < b$), не является связным.

396. Доказать связность евклидова пространства $\boldsymbol{R}^n$.

397. Пусть X — связное метрическое пространство. Доказать, что в нем, кроме пустого множества и всего пространства X, не существует множества, которое было бы одновременно замкнутым и открытым.

398. Можно ли открытый круг на плоскости представить в виде пересечения двух открытых множеств, отличных от всей плоскости, объединение которых есть вся плоскость?

399. Пусть X и Y — метрические пространства. Доказать, что для связности непустого множества $E \times F$ в пространстве $X \times Y$, наделенном метрикой, указанной в задаче 146, необходимо и достаточно, чтобы E и F оба были связны.

400. Доказать, что любые две точки связного открытого множества G на плоскости можно соединить ломаной, каждое звено которой параллельно одной из осей координат.

401. Пусть $\{A_\alpha\}$ ($\alpha \in \mathrm{A}$) — некоторое семейство связных множеств с непустым пересечением. Доказать, что объединение всех множеств семейства, т. е. множество $E = \bigcup\limits_{\alpha \in \mathrm{A}} A_\alpha$, связно.

402. Доказать, что для любой точки $x_0 \in E$ существует, и притом единственная, компонента множества E, содержащая x_0.

Примечание. Непустое множество A называется *компонентой* множества E, если: 1) $A \subset E$; 2) A связно; 3) любое связное множество B, такое, что $A \subset B \subset E$, совпадает с A.

403. Доказать, что каждая компонента A замкнутого множества E есть замкнутое множество.

404. Доказать, что любое непустое множество E разбивается на компоненты, и притом единственным образом.

405. Множество называется всюду разрывным, если оно содержит более одной точки и все его компоненты — одноточечные множества. Привести примеры несчетных всюду разрывных множеств.

406. Пусть $F \subset E$, F связно и непусто. Доказать, что существует, и притом единственная, компонента множества E, включающая F.

Глава VII.

МЕРА МНОЖЕСТВ (В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ)

Параллелепипеды и их объемы. Пусть R^n — евклидово пространство. Во всем дальнейшем изложении будем считать n фиксированным натуральным числом.

Пусть $A(a_1, \ldots, a_n)$, $B(b_1, \ldots, b_n)$ — две точки из $\boldsymbol{R}^n$ такие, что $a_i \leqslant b_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Множество всех точек $M(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ таких, что $a_i < x_i < b_i$ при любом i, называется *открытым n-мерным параллелепипедом* $\overset{\circ}{D}(A, B)$. Множество всех точек $M(x_1, \ldots, x_n)$ таких, что $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$, называется *замкнутым n-мерным параллелепипедом* $\overline{D}(A, B)$. Наконец, *n-мерным параллелепипедом* с вершинами в точках A и B называется любое множество

$D(A, B)$, удовлетворяющее включениям

$$\overset{\circ}{D}(A, B) \subset D(A, B) \subset \bar{D}(A, B).$$

Ясно, что $\overset{\circ}{D}(A, B)$ и $\bar{D}(A, B)$ — частные случаи параллелепипеда $D(A, B)$. Если хотя бы одна координата точки A равна соответствующей координате точки B, то параллелепипед $D(A, B)$ называется *вырожденным*, в противном случае — *невырожденным*.

n-мерным объемом параллелепипеда $D(A, B)$ с вершинами $A(a_1, \ldots, a_n)$, $B(b_1, \ldots, b_n)$ называется число

$$\mu D = (b_1 - a_1) \ldots (b_n - a_n).$$

Если D — вырожденный параллелепипед, то $\mu D = 0$; в противном случае $\mu D > 0$. Частными случаями n-мерного объема являются: при $n = 1$ — длина отрезка, при $n = 2$ — площадь прямоугольника, при $n = 3$ — обычный объем трехмерного параллелепипеда.

Внешняя мера множества. Пусть $E \subset \boldsymbol{R}^n$. *Внешней n-мерной мерой* (или просто *внешней мерой*) $\bar{m}E$ множества E называется нижняя грань сумм n-мерных объемов открытых параллелепипедов, объединение которых покрывает E (нижняя грань берется по всевозможным таким покрытиям $\{\overset{\circ}{D}_\alpha\}$):

$$\bar{m}E = \inf \sum_\alpha \mu \overset{\circ}{D}.$$

Свойства внешней меры: 1) $\bar{m}E$ определена для любого множества $E \subset \boldsymbol{R}^n$, причем $0 \leqslant \bar{m}E \leqslant +\infty$; 2) для любой системы $\{\overset{\circ}{D}_\alpha\}$, покрывающей E, имеет место $\Sigma \mu \overset{\circ}{D}_\alpha \geqslant \bar{m}E$; 3) если $E \subset \boldsymbol{R}^n$ и $\bar{m}E < +\infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие $\{\overset{\circ}{D}_\alpha\}$ множества E открытыми параллелепипедами такое, что $\Sigma \mu \overset{\circ}{D}_\alpha \leqslant \bar{m}E + \varepsilon$; 4) если $E \subset F$, то $\bar{m}E \leqslant \bar{m}F$; 5) для любой конечной или счетной системы множеств $\{E_n\}$ справедливо неравенство $\bar{m}(\bigcup\limits_n E_n) \leqslant \sum\limits_n \bar{m}E_n$; 6) внешняя мера конечного или счетного множества точек равна нулю; 7) внешняя мера параллелепипеда $D(A, B)$ равна его n-мерному объему: $\bar{m}D = \mu D$; 8) конгруэнтные множества имеют равные внешние меры.

Измеримые множества. Мера Лебега. Множество $E \subset \boldsymbol{R}^n$ называется *измеримым по Лебегу* (или просто *измеримым*), если для любого множества $A \subset \boldsymbol{R}^n$ справедливо равенство

$$\bar{m}A = \bar{m}(A \cap E) + \bar{m}(A \cap \underline{C}E),$$

т. е. если E рассекает любое множество $A \subset \boldsymbol{R}^n$ на такие две части, сумма внешних мер которых дает внешнюю меру всего A.

Если E измеримо, то его внешняя мера называется *мерой Лебега* (или просто *мерой*) множества E и обозначается mE.

Свойства измеримых множеств и их мер:

1. Если E измеримо, то и $\underline{C}E$ измеримо.

2. Если $\bar{m}E = 0$, то E измеримо. Такие множества называются *множествами меры нуль*. Любое подмножество множества меры нуль измеримо и имеет меру нуль.

3. Добавление к измеримому множеству или изъятие из него множества меры нуль не нарушает его измеримости и не изменяет его меры.

4. Любой параллелепипед измерим, и его мера равна его n-мерному объему.

5. Если E и F — измеримые множества такие, что $E \subset F$, то

$$mE \leqslant mF \text{ («монотонность меры»).}$$

6. Объединение любой конечной или счетной совокупности измеримых множеств $\{E_n\}$ есть измеримое множество, причем

$$m(\bigcup_n E_n) \leqslant \sum_n mE_n \text{ («полуаддитивность меры»),}$$

7. Для объединения любой конечной или счетной совокупности попарно не пересекающихся измеримых множеств $\{E_n\}$ справедливо равенство

$$m\left(\bigcup_n E_n\right) = \sum_n mE_n \text{ («счетная аддитивность меры»).}$$

8. Если E и F измеримы, то $E \setminus F$ также измеримо; если при этом $E \supset F$ и $mE < +\infty$, то $m(E \setminus F) = mE - mF$.

9. Пересечение любой конечной или счетной совокупности измеримых множеств измеримо.

10. Любое замкнутое и любое открытое множество пространства R^n измеримо.

11. Для любого измеримого множества E и любого числа $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset E$ такое, что

$$m(E \setminus F) < \varepsilon.$$

12. Мера всякого измеримого множества $E \subset R^n$ является верхней гранью мер замкнутых множеств F, включающихся в E, и нижней гранью мер открытых множеств G, включающих E:

$$mE = \sup_{F \subset E} mF = \inf_{G \supset E} mG.$$

13. Если $\{E_n\}$ — возрастающая последовательность измеримых множеств то

$$m\left(\bigcup_n E_n\right) = \lim_{n \to +\infty} mE_n.$$

14. Если $\{E_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств, причем $mE_1 < +\infty$, то

$$m\left(\bigcap_n E_n\right) = \lim_{n \to +\infty} mE_n.$$

15. Если E измеримо, то всякое конгруэнтное ему множество также измеримо и имеет ту же меру, что и E.

16. В пространстве R^n существуют неизмеримые множества. Более того, всякое измеримое множество, мера которого больше нуля, содержит неизмеримое подмножество.

Если $n = 1$, т. е. если рассматриваемое пространство является числовой прямой, то измеримые множества в нем называются *линейно измеримыми*, а мера в R^1 называется *линейной мерой*. Для отрезков она сводится к обычной длине. Желая подчеркнуть, что речь идет именно о линейной мере, мы пишем внизу индекс 1: m_1E.

Если $n = 2$, т. е. если речь идет о множествах на плоскости, то мера называется *плоской*, а измеримые множества— множествами, измеримыми в смысле *плоской меры*. Плоская мера множества $E \subset R^2$ обозначается m_2E. Для прямоугольников она сводится к обычной площади.

Аналогично обстоит дело для множества в R^3. В этом случае мы говорим о трехмерной мере и обозначаем ее m_3E. Для трехмерных параллелепипедов она сводится к обычному объему.

В дальнейшем индекс, обозначающий размерность меры, будет, как правило, опускаться.

В заключение отметим одно свойство линейной меры: если G — открытое множество на прямой, то $mG = \sum mI_k$, где I_k — составляющие интервалы множества G.

Задачи

407. Доказать, что всякое множество E, расположенное на оси Ox (даже если оно является неизмеримым множеством на прямой), измеримо на плоскости Oxy и его плоская мера равна нулю.

408. Доказать, что совокупность всех измеримых множеств на прямой (а также на плоскости) имеет мощность 2^c (гиперконтинуум).

409. Построить на отрезке $[0, 1]$ нигде не плотное совершенное множество, линейная мера которого равна 0,9.

410. Построить на отрезке $[0, 1]$ нигде не плотное совершенное множество заданной меры $a < 1$.

411. Можно ли построить на отрезке $[0, 1]$ нигде не плотное совершенное множество меры 1?

412. Построить на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ нигде не плотное совершенное множество, плоская мера которого равна заданному неотрицательному числу $a < 1$.

413. Какова плоская мера множества, построенного в задаче 244 («ковер Серпинского»)?

414. Какова плоская мера множества, построенного в задаче 245 («кладбище Серпинского»)?

415. Какова плоская мера множества, построенного в задаче 246 («канторова гребенка»)?

416. Доказать, что любое ограниченное измеримое множество E на прямой, имеющее положительную линейную меру p, содержит измеримое подмножество меры q, где q — произвольное заданное положительное число, меньшее, чем p.

417. Доказать, что любое измеримое множество E на прямой (не обязательно ограниченное) такое, что $0 < mE = p \leqslant +\infty$, содержит ограниченное измеримое подмножество меры q, где q — произвольное заданное положительное число, меньшее, чем p.

418. Пусть E — измеримое множество на прямой такое, что $0 < mE = p \leqslant +\infty$, а q — какое-либо положительное число, меньшее, чем p. Доказать, что существует ограниченное *совершенное* множество $M \subset E$ такое, что $mM = q$.

419. Доказать, что всякое измеримое множество E положительной линейной меры имеет мощность континуума.

420. Доказать, что любое измеримое множество E на плоскости, имеющее положительную плоскую меру p, содержит измеримое подмножество M плоской меры q, где q — произвольное заданное положительное число, меньшее, чем p.

421. Доказать, что плоское множество $M \subset E$ (см. предыдущую задачу) можно выбрать совершенным.

422. Может ли равняться нулю мера множества, которое содержит хотя бы одну внутреннюю точку?

423. Можно ли построить на отрезке $[a, b]$ замкнутое множество линейной меры $b - a$, отличное от всего отрезка?

424. Может ли пересечение $E = \bigcap\limits_n E_n$ убывающей последовательности $\{E_n\}$ измеримых множеств бесконечной меры иметь бесконечную меру? Конечную меру, отличную от нуля? Меру нуль?

425. Может ли объединение $E = \bigcup\limits_n E_n$ возрастающей последовательности измеримых множеств конечной меры иметь конечную меру? Бесконечную меру?

426. Пусть E — множество всех тех точек отрезка $[0, 1]$, в разложении которых в бесконечную двоичную дробь на всех четных местах стоят нули. Доказать, что E нигде не плотно и что мера E равна нулю.

427. Может ли неограниченное измеримое множество на прямой иметь конечную положительную меру?

428. Доказать, что всякое непустое замкнутое множество меры нуль на прямой нигде не плотно. Решить аналогичную задачу для плоскости и для трехмерного пространства.

429. Пусть множество E на отрезке $[0, 1]$ имеет меру нуль. Должно ли и его замыкание $\overline{E}$ быть множеством меры нуль?

430. Пусть E — нигде не плотное множество меры нуль на отрезке $[0, 1]$. Должно ли и его замыкание $\overline{E}$ быть множеством меры нуль?

431. Доказать, что если E — измеримое множество положительной меры на прямой, то в нем найдутся точки, расстояние между которыми иррационально.

432. Доказать, что если E — измеримое множество положительной меры μ, расположенное на отрезке $[a, b]$, то в нем найдется хотя бы одна пара различных точек, расстояние между которыми рационально.

433. Доказать, что если E — неограниченное измеримое множество положительной меры на прямой, то в нем найдется хотя бы одна пара различных точек, расстояние между которыми рационально.

434. Каково строение и какова мера множества E тех точек отрезка $[0, 1]$, которые допускают разложение в десятичную дробь без использования цифры 7?

435. Каково строение и какова мера множества тех точек отрезка $[0, 1]$, десятичное разложение которых невозможно без цифры 7?

436. Каково строение и какова мера множества H всех тех точек прямой, которые допускают разложение в десятичную дробь без использования цифры 7 после запятой?

437. Каково строение и какова мера множества точек отрезка $[0, 1]$, в разложении которых в бесконечную десятичную дробь фигурируют все цифры от 1 до 9?

438. Каково строение и какова мера множества тех точек отрезка $[0, 1]$, которые допускают десятичное разложение без комбинации стоящих рядом цифр 2, 2, 2?

439. Около каждой точки канторова множества описан интервал длины 0,1 с центром в этой точке. Чему равна мера объединения всех этих интервалов?

440. Пусть $]a_1, b_1[, \ldots,]a_n, b_n[, \ldots$ — смежные интервалы нигде не плотного совершенного множества E меры 0,6, расположенного на отрезке $[0, 1]$ и такого, что $\inf E = 0$, $\sup E = 1$. Опишем около каждой точки a_i, как около центра, интервал u_i длины $\frac{b_i - a_i}{4}$;

такие же интервалы v_i длины $\frac{b_i - a_i}{4}$ опишем около каждой точки b_i. Покроет ли множество $(\bigcup_i u_i) \cup (\bigcup_i v_i)$ все множество E? Что можно сказать о мере множества $(\bigcup_i u_i) \cup (\bigcup_i v_i)$?

441. Можно ли представить отрезок $[0, 1]$ в виде объединения двух непересекающихся измеримых множеств A и B так, чтобы для каждого интервала $]a, b[\in [0, 1]$ имело место:

$$m(]a, b[\cap A) > 0 \text{ и } m(]a, b[\cap B) > 0?$$

442. Может ли объединение счетной совокупности нигде не плотных совершенных множеств на отрезке $[a, b]$ иметь меру, равную $b - a$?

443. Может ли объединение счетной совокупности попарно не пересекающихся нигде не плотных совершенных множеств на отрезке $[a, b]$ иметь меру, равную $b - a$?

444. Существует ли на отрезке $[0, 1]$ несчетное множество меры нуль, плотное на этом отрезке?

445. Пусть $\{E_n\}$ — последовательность измеримых множеств на отрезке $[0, 1]$, обладающая тем свойством, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое k, что $mE_k > 1 - \varepsilon$. Доказать, что мера объединения E этих множеств равна 1.

446. Доказать, что если E_1 и E_2 — измеримые множества в евклидовом пространстве, то

$$mE_1 + mE_2 = m(E_1 \cup E_2) + m(E_1 \cap E_2).$$

447. Доказать, что для любой конечной или счетной совокупности $\{E_i\}$ измеримых множеств в евклидовом пространстве имеет место неравенство

$$\sum_i mE_i \leqslant m(\bigcup_i E_i) + \sum_{i<j} m(E_i \cap E_j).$$

448. В замкнутом параллелепипеде I с ребрами единичной длины заданы n измеримых множеств $A_1, A_2, \ldots, A_n$, сумма мер которых больше чем $n - 1$:

$$mA_1 + mA_2 + \ldots + mA_n > n - 1.$$

Доказать, что $\bigcap_{1 \leqslant i \leqslant n} A_i$ имеет положительную меру.

449. Пусть $\{E_n\}$ — убывающая последовательность измеримых множеств в евклидовом пространстве и ε — заданное положительное число. Доказать, что существует убывающая последовательность замкнутых множеств $\{F_n\}$ такая, что для каждого n имеет место

$$F_n \subset E_n, \quad mF_n > mE_n - \varepsilon.$$

450. Пусть E — измеримое множество на прямой, k — произвольное действительное число. Обозначим через kE множество всех точек вида kx, где x пробегает E. Доказать, что множество kE измеримо и

$$m(kE) = |k| \cdot mE.$$

451. Пусть измеримое множество E на прямой обладает тем свойством, что при любом $\delta > 0$ множество $E \cap]-\delta, \delta[$ имеет положительную меру. Пусть, кроме того, $0 \in E$. Доказать, что существует совершенное множество $Q \subset E$ такое, что $m(Q \cap]-\delta, \delta[) > 0$ при любом $\delta > 0$.

Пусть E — измеримое множество в R^n и $x_0 \in R^n$.
Если $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{m(E \cap V(x_0, \varepsilon))}{mV(x_0, \varepsilon)}$ существует, то его значение α называется *плотностью множества* E в точке x_0. Ясно, что $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Если $\alpha = 1$, то x_0 называется *точкой плотности* для E, если $\alpha = 0$, то x_0 называется *точкой разрежения.*

452. Какова плотность круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$ в различных точках плоскости R^2? Каковы его точки плотности и точки разрежения?

453. Какова плотность множества $E =]-1, 0[\cup]0, 1[\cup \{2\}$ на прямой? Каковы его точки плотности и точки разрежения?

454. Построить множество на плоскости, имеющее в данной точке $M_0 \in R^2$ плотность, равную заданному числу $\alpha \in]0, 1[$.

455. Построить множество на прямой, имеющее в данной точке x_0 плотность, равную заданному числу $\alpha \in]0, 1[$.

456. Пусть E — измеримое множество на прямой и пусть точка 0 принадлежит E и является его точкой плотности. Доказать, что существует совершенное множество $F \subset E$, для которого 0 также является точкой плотности.

457. Пусть E — неизмеримое множество на прямой, A — множество меры нуль на той же прямой. Доказать, что множество $E \cap \complement A$ неизмеримо.

458. Пусть A, B — открытые множества конечной линейной меры на осях Ox и Oy соответственно. Доказать, что $m_2(A \times B) = m_1 A \cdot m_1 B$.

459. Пусть A — множество линейной меры нуль на оси Ox, B — произвольное множество на оси Oy. Доказать, что множество $A \times B$ имеет плоскую меру нуль.

460. Доказать утверждение задачи 458 для случая, когда $A \subset Ox$, $B \subset Oy$ — произвольные измеримые множества конечной линейной меры.

461. Пусть $A \subset Ox$, $B \subset Oy$ линейно измеримы, причем $m_1 A = +\infty$, $0 < m_1 B \leqslant +\infty$. Доказать, что $A \times B$ измеримо в смысле плоской меры, причем

$$m_2(A \times B) = +\infty.$$

462. Обозначим через E множество всех тех точек квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, у которых обе координаты иррациональны. Построить совершенное множество $M \subset E$ положительной плоской меры.

В задачах 463—469 под X подразумевается произвольное евклидово пространство, а под m (или $\overline{m}$) — мера (или внешняя мера) множества в этом пространстве.

463. Доказать, что при добавлении к произвольному множеству $E \subset X$ или при изъятии из него множества H меры нуль внешняя мера множества E не меняется.

464. Доказать, что для любого множества $E \subset X$ конечной внешней меры и любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое открытое множество $A \supset E$, что $mA - \varepsilon < \overline{m}E \leqslant mA$.

465. Доказать, что для любого множества $E \subset X$ существует такое содержащее его множество B типа G_δ, что $mB = \overline{m}E$.

466. Пусть E — ограниченное множество в X, I — какой-либо замкнутый параллелепипед, включающий E. Доказать, что если $mI = \overline{m}E + \overline{m}(I \setminus E)$, то E измеримо.

467. Пусть $E \subset X$. Доказать равносильность следующих утверждений:

1) E измеримо.

2) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество G такое, что $G \supset E$ и $\overline{m}(G \setminus E) < \varepsilon$.

3) Для каждого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество F такое, что $F \subset E$ и $\overline{m}(E \setminus F) < \varepsilon$.

4) Существует множество A типа G_δ такое, что $A \supset E$ и $\overline{m}(A \setminus E) = 0$.

5) Существует множество B типа F_σ такое, что $B \subset E$ и $\overline{m}(E \setminus B) = 0$.

Иначе говоря, любое из условий (2) — (5) равносильно измеримости множества E.

468. Доказать, что для измеримости множества $E \subset X$ необходимо и достаточно выполнение любого из следующих условий:

а) Для каждого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество F и открытое G такие, что $F \subset E \subset G$ и $m(G \setminus F) < \varepsilon$.

б) Существуют множество A типа G_δ и B типа F_σ такие, что $B \subset E \subset A$ и $m(A \setminus B) = 0$.

469. Доказать следующий признак Валле-Пуссена: «Для того чтобы множество $E \subset X$ конечной внешней меры было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое множество H, составленное из конечного числа открытых параллелепипедов, что $\overline{m}(E \Delta H) < \varepsilon$».

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Глава VIII.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

Если каждой точке x множества R поставлена в соответствие некоторая точка y множества L, то говорят, что задано *отображение* R *в* L; это отображение называется также функцией, отображающей R в L (или определенной в R и принимающей значения в L). При этом R называется *областью определения* функции, а L — ее *областью прибытия.*

Обозначим через f какую-либо функцию, отображающую R в L. Если эта функция ставит в соответствие точке $x \in R$ точку $y \in L$, то y называется *значением функции* f *в точке* x и обозначается $f(x)$. Пусть $A \subset R$. Тогда через $f(A)$ обозначается множество всех тех точек $y \in L$, которые являются значениями функции f хотя бы для одного $x \in A$. Множество $f(A)$ называется *образом множества* A. В частности, образ всей области определения (т. е. множество $f(R) \subset \subset L$) называется *областью значений* или *множеством значений* функции f.

Пусть B — какое-либо подмножество множества L. Обозначим через $f^{-1}(B)$ множество тех и только тех точек $x \in R$, для которых значения функции принадлежат B. Множество $f^{-1}(B)$ называется *прообразом* множества B.

Если область значений функции f совпадает со всем множеством L, то f называется *отображением* множества R *на* множество L.

Если прообраз каждого одноточечного множества из области значений функции f есть одноточечное множество, т. е. если из $f(x_1) = f(x_2)$ $(x_1 \in R,\ x_2 \in R)$ следует $x_1 = x_2$, то f называется *взаимно однозначным отображением* R *на* $f(R)$. Если при этом функция f отображает R *на* L, т. е. $f(R) = L$, то f будет взаимно однозначным отображением множества R на множество L (в этом случае говорят также, что f осуществляет *взаимно однозначное соответствие* между множествами R и L); для такой функции однозначно определяется *обратная функция*, ставящая в соответствие каждой точке $y \in L$ ту единственную точку $x \in R$, для которой $f(x) = y$. Ясно, что обратная функция взаимно однозначно отображает L на R.

Часто функцию f обозначают через $f(x)$, считая x переменной точкой области определения R функции f. Если $R \subset X_1 \times \ldots \times X_n$, то функцию f обозначают также через $f(x_1, \ldots, x_n)$ и считают ее зависящей от n переменных $x_1, \ldots, x_n$, принимающих значения в соответствующих множествах $X_1, \ldots, X_n$ так, что при этом $(x_1, \ldots, x_n) \in R$.

Задачи

470. Пусть A — произвольное множество из области определения функции f. Верно ли равенство $f^{-1}(f(A)) = A$?

471. Пусть B — произвольное множество из области значений функции f. Верно ли равенство $f(f^{-1}(B)) = B$?

472. Верны ли утверждения

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B),$$
$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)?$$

Если какое-либо из этих утверждений неверно, то привести противоречащий пример.

473. Доказать, что если f является взаимно однозначным отображением множества R на множество $f(R)$, то для любой последовательности множеств $A_1, A_2, \ldots, A_k, \ldots$ ($A_k \subset R$) справедливы равенства:

1) $f(\bigcup_k A_k) = \bigcup_k f(A_k)$,

2) $f(\bigcap_k A_k) = \bigcap_k f(A_k)$.

474. Какие из равенств, рассмотренных в предыдущей задаче, перестают быть верными, если отображение f не является взаимно однозначным?

475. Верно ли, что $f(R \setminus A) = f(R) \setminus f(A)$, где R — область определения функции?

476. Пусть A и B — множества из области прибытия функции f. Верны ли равенства:

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B),$$
$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)?$$

477. Пусть функция f отображает множество R в множество L и $A \subset L$. Справедливо ли равенство

$$f^{-1}(L \setminus A) = f^{-1}(L) \setminus f^{-1}(A)?$$

478. Пусть f — какая-либо функция и множества $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_k, \ldots$ являются подмножествами ее области прибытия. Верны ли равенства

$$f^{-1}(\bigcup_k A_k) = \bigcup_k f^{-1}(A_k), \quad f^{-1}(\bigcap_k A_k) = \bigcap_k f^{-1}(A_k)?$$

Глава IX.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Числовой функцией называется функция, принимающая числовые значения, т. е. имеющая областью значений некоторое множество действительных чисел. Только такие функции рассматриваются в настоящей главе, где они называются просто функциями.

Пусть областью определения числовой функции $f(x)$ является подмножество A метрического пространства X, и пусть E — произвольное множество, расположенное в X. Дадим определение *непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 относительно множества E.*

Определение 1 (Коши). *Функция $f(x)$, определенная на множестве A, называется непрерывной в точке x_0 относительно множества E, если*

1) $x_0 \in A \cap E$;

2) *для любого $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, что для всех $x \in A \cap E \cap U(x_0)$ имеет место неравенство*

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Отсюда, в частности, следует, что если x_0 является изолированной точкой области определения функции $f(x)$, то эта функция непрерывна в точке x_0 относительно любого множества E, содержащего точку x_0.

Из определения 1 следует также, что если x_0 является изолированной точкой множества E, то любая функция $f(x)$, определенная в точке x_0; непрерывна в этой точке относительно E.

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 относительно некоторой ее окрестности, то она называется *полностью непрерывной в точке* x_0. В тех случаях, когда это не будет приводить к неясности, мы будем опускать слово «полностью» и называть функцию, полностью непрерывную в точке x_0, просто *непрерывной* в этой точке.

Ясно, что если функция полностью непрерывна в точке x_0, то она непрерывна в этой точке также относительно любого множества E, содержащего точку x_0.

Примеры. 1) Функция $f(x) = x^2$, определенная всюду на $\boldsymbol{R}^1$, непрерывна в каждой точке $x_0 \in \boldsymbol{R}^1$.

2) *Функция Дирихле*

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \text{ рациональном}, \\ 0 \text{ при } x \text{ иррациональном}, \end{cases}$$

определенная всюду на $\boldsymbol{R}^1$, непрерывна в точке $x_0 = \sqrt{2}$ относительно множества всех иррациональных чисел; однако она не является полностью непрерывной в этой точке.

3) Функция

$$f(x, y) = \begin{cases} 10, \text{ если } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ 5, \text{ если } x^2 + y^2 > 1, \end{cases}$$

непрерывна в точке $M_0\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ относительно замкнутого единичного круга E с цeнтром в начале координат; однако она не является полностью непрерывной в этой точке. Та же функция полностью непрерывна в любой точке $M_1(x_1, y_1)$, лежащей внутри круга E; следовательно, она непрерывна в точке M_1 также относительно какого угодно множества, содержащего точку M_1.

Для функций одной переменной (т. е. функций, область определения которых лежит на прямой $\boldsymbol{R}^1$) можно говорить также об *односторонней непрерывности*.

Функция $f(x)$, определенная на числовой прямой или на ее части, называется *непрерывной справа* в точке x_0, если она непрерывна в этой точке относительно некоторого промежутка $[x_0, b[$, где $b > x_0$; эта функция называется *непрерывной слева* в точке x_0, если она непрерывна в этой точке относительно некоторого промежутка $]a, x_0]$, где $a < x_0$.

Легко видеть, что если функция непрерывна в точке x_0 справа и слева, то она полностью непрерывна в этой точке.

Дадим теперь другое определение непрерывности функции, эквивалентное определению Коши.

Определение 2 (Гейне). *Функция* $f(x)$, *определенная на множестве* A, *называется непрерывной в точке* x_0 *относительно множества* E, *если*

1) $x_0 \in A \cap E$;

2) *для любой последовательности точек* $\{x_k\}$ *из* $A \cap E$, *сходящейся к* x_0 (т. е. такой, что $\lim\limits_{k \to +\infty} \rho(x_k, x_0) = 0$), *имеет место равенство*

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_k) = f(x_0).$$

Колебание функции на множестве и в точке. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве A. *Колебанием* $\underset{A}{\omega} f$ функции $f(x)$ на этом множестве называется разность между верхней и нижней гранями этой функции на множестве A:

$$\underset{A}{\omega} f = \sup_{x \in A} f(x) - \inf_{x \in A} f(x).$$

Заметим, что мы не требуем, чтобы функция $f(x)$ была ограничена на множестве A. Поэтому $\sup\limits_{x \in A} f(x)$ может равняться либо конечному числу (если $f(x)$ ограничена сверху на множестве A), либо $+\infty$ (если эта функция не ограничена сверху на A). Точно так же и $\inf\limits_{x \in A} f(x)$ может равняться либо конечному числу, либо $-\infty$. Следовательно,

$$0 \leqslant \underset{A}{\omega} f \leqslant +\infty.$$

Если $A_1 \subset A_2$, то $\sup\limits_{x\in A_1} f(x) \leqslant \sup\limits_{x\in A_2} f(x)$, $\inf\limits_{x\in A_1} f(x) \geqslant \inf\limits_{x\in A_2} f(x)$.
Поэтому $\underset{A_1}{\omega} f \leqslant \underset{A_2}{\omega} f$.

Пусть функция $f(x)$ определена на множестве A, расположенном в метрическом пространстве; пусть E — какое-нибудь множество, лежащее в том же пространстве, и пусть $x_0 \in A \cap E$. *Колебанием функции* $f(x)$ *в точке* x_0 *относительно множества* E (обозначается $\omega[f, x_0, E]$) называется предел, к которому стремится колебание этой функции на множестве $E \cap V(x_0, \delta_n)$ при $\delta_n \to 0$. Этот предел (конечный или равный $+\infty$) всегда существует и не зависит от выбора последовательности окрестностей $\{V(x_0, \delta_n)\}$ (лишь бы радиусы этих окрестностей стремились к нулю при $n \to +\infty$). Итак,

$$\omega[f, x_0, E] = \lim_{\delta_n \to 0} \underset{E \cap V(x_0, \delta_n)}{\omega} f.$$

Если, говоря о колебании функции $f(x)$ в точке x_0, мы не указываем, относительно какого множества E рассматривается это колебание, то подразумевается, что речь идет о колебании в точке x_0 относительно некоторой окрестности этой точки. В этом случае колебание функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $\omega[f, x_0]$.

С помощью понятия колебания функции в точке можно дать третье определение непрерывности функции, эквивалентное первым двум.

Определение 3 (Бэра). *Функция* $f(x)$, *определенная на множестве* A, *называется непрерывной в точке* x_0 *относительно множества* E, *если* $x_0 \in A \cap E$ *и колебание функции в этой точке относительно множества* E *равно нулю*:

$$\omega[f, x_0, E] = 0.$$

Точки разрыва. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E ($E \subset X$); *точкой разрыва* этой функции называется всякая точка из E, в которой колебание функции (относительно множества E) не равно нулю, а также любая предельная точка ее области определения E, не входящая в E.

Пример. Функция $\operatorname{sgn} x$ (читается «сигнум икс»), определенная равенствами $\operatorname{sgn} x = 1$ при $x > 0$, $\operatorname{sgn} x = -1$ при $x < 0$, $\operatorname{sgn} 0 = 0$, разрывна в точке $x_0 = 0$.

Точка x_0 называется точкой *устранимого разрыва*, если можно изменить значение функции только в этой точке (или доопределить функцию в этой точке, если она в ней не определена) так, чтобы функция стала непрерывной в точке x_0.

Точка x_0, являющаяся точкой разрыва функции $f(x)$, называется *точкой разрыва первого рода*, если существуют оба односторонних предела при $x \to x_0$:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{и} \quad f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x),$$

и они оба конечны. При этом разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком* функции $f(x)$ в точке x_0. Если функция определена в точке x_0, то разности $f(x_0 + 0) - f(x_0)$ и $f(x_0) - f(x_0 - 0)$ называются соответственно *правым скачком* и *левым скачком* функции $f(x)$ в точке x_0.

Ясно, что точка устранимого разрыва является частным случаем точки разрыва первого рода и скачок функции в этой точке равен нулю.

Точка разрыва, не являющаяся точкой разрыва первого рода, называется *точкой разрыва второго рода*.

Свойства функций, непрерывных в точке. 1) Если функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны в точке x_0 относительно множества E, то сумма и произведение этих функций непрерывны в этой точке относительно E. Если, кроме того, $\psi(x_0) \neq 0$, то частное $\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ также непрерывно в этой точке относительно E.

2) Пусть функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 относительно множества E, причем $\varphi(x_0) = y_0$. Пусть, кроме того, функция $\psi(y)$, определенная на числовом множестве, непрерывна в точке y_0 относительно некоторого множества $F \subset \boldsymbol{R}^1$. Тогда суперпозиция этих функций, т. е. сложная функция $\psi(\varphi(x))$, непрерывна в точке x_0 относительно множества $E \cap \varphi^{-1}(F)$.

3) Если функция $f(x)$ определена на множестве A и непрерывна в точке x_0 относительно E, то она ограничена в некоторой окрестности этой точки (точнее говоря, на пересечении множества $A \cap E$ с некоторой окрестностью точки x_0).

4) Если функция $f(x)$ определена на множестве A и непрерывна в точке x_0 относительно множества E, причем $f(x_0) > 0$, то существует такая окрестность $V(x_0)$ точки x_0, что $f(x) > 0$ для всех $x \in A \cap E \cap V(x_0)$; аналогичное утверждение справедливо и тогда, когда $f(x_0) < 0$. Другими словами: «Непрерывная в точке x_0 функция сохраняет свой знак в некоторой окрестности этой точки».

5) Если $E_1 \subset E$ и в некоторой точке $x_0 \in E_1$ функция $f(x)$ непрерывна относительно E, то в этой же точке она непрерывна и относительно E_1 (обратное утверждение неверно: функция может оказаться непрерывной в точке x_0 относительно E_1, но не быть непрерывной в этой точке относительно множества $E \supset E_1$).

Свойства функций, непрерывных на компактном множестве.

Определение. *Пусть функция $f(x)$ определена на множестве E. Если она непрерывна во всех точках множества E относительно этого множества, то она называется непрерывной на E.*

Мы рассмотрим некоторые свойства функций, непрерывных на компакте.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на компактном множестве E, то множество $f(E)$ также компактно.* Другими словами: «*Непрерывный образ компакта есть компакт*» (см. задачу 505).

Непосредственными следствиями этой теоремы являются теоремы 2 и 3 (задачи 514, 515).

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на компактном множестве E, то она ограничена на нем* (т. е. существует такое число $C > 0$, что $|f(x)| < C$ для всех $x \in E$).

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ непрерывна на компактном множестве E, то она достигает своей верхней и своей нижней грани на этом множестве*, т. е. существуют такие точки $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, что

$$f(x_1) = \sup_{x \in E} f(x), \quad f(x_2) = \inf_{x \in E} f(x).$$

Для того чтобы сформулировать теорему 4, дадим определение равномерно непрерывной функции.

Функция $f(x)$, определенная на множестве E, называется *равномерно непрерывной* на E, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всяких $x' \in E$ и $x'' \in E$, таких, что $\rho(x', x'') < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Легко видеть, что если $f(x)$ равномерно непрерывна на E, то она непрерывна на E; обратное утверждение, вообще говоря, неверно; однако если E — компактное множество, то справедлива и обратная теорема (задача 540):

Теорема 4. *Если функция непрерывна на компактном множестве E, то она равномерно непрерывна на нем.*

Свойства функций, непрерывных на связном множестве.

Теорема 5. *Если функция $f(x)$* непрерывна на связном множестве E, *то множество $f(E)$ также связно.* Другими словами: «*Непрерывный образ связного множества есть связное множество*» (см. задачу 535).

Непосредственными следствиями этой теоремы являются теоремы 6 и 7 (задачи 536 и 537).

Теорема 6. *Если функция $f(x)$ непрерывна на связном множестве E, причем $f(a) = A$, $f(b) = B$, где $a \in E$, $b \in E$, то для любого числа C, заключенного между A и B, существует точка $c \in E$ такая, что $f(c) = C$.*

В частности, если на E найдутся две точки, в которых $f(x)$ принимает значения разных знаков, то существует точка $c \in E$ такая, что $f(c) = 0$.

Теорема 7. *Если функция $f(x)$ непрерывна на связном компактном множестве E, причем $\inf_{x \in E} f(x) = A$, $\sup_{x \in E} f(x) = B$, то $f(E) = [A, B]$* (или, в частности, одноточечное множество, если $A = B$).

Характеристическая функция. Пусть E — произвольное множество в метрическом пространстве X. *Характеристической функцией множества* E называется функция $\chi_E(x)$, определенная на X и задаваемая следующими равенствами:

$$\chi_E(x) = 1 \text{ при } x \in E, \ \chi_E(x) = 0 \text{ при } x \overline{\in} E.$$

Так, например, *функция Дирихле* $\chi(x)$, равная 1 для всех рациональных чисел и 0 для всех иррациональных чисел, является характеристической функцией множества рациональных чисел на прямой.

Задачи

479. Пусть функция $f(x)$ определена в метрическом пространстве X. Доказать, что множество E всех ее точек разрыва есть множество типа F_σ в X.

480. Пусть функция $f(x)$ определена в метрическом пространстве X. Доказать, что множество всех ее точек непрерывности есть множество типа G_δ в X.

481. Пусть E — произвольное счетное множество точек x отрезка $[a, b]$. Построить функцию, разрывную во всех точках множества E и непрерывную в остальных точках отрезка $[a, b]$.

482. Пусть $\varphi(x)$ — функция, заданная всюду на числовой прямой, ограниченная на ней и непрерывная во всех точках, кроме точки $x = 0$; пусть $\sum\limits_n a_n$ — сходящийся числовой ряд с положительными членами, а $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — счетное всюду плотное множество точек на прямой. Найти множество точек разрыва и множество точек непрерывности функции

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi(x - x_k).$$

483. Доказать, что функция, определенная на всей прямой, не может быть непрерывной на счетном всюду плотном множестве E и разрывной в остальных точках прямой.

484. Построить функцию, определенную во всех точках числовой прямой, разрывную всюду, кроме точек $x = 1$ и $x = -1$, и непрерывную в этих точках.

485. Построить функцию, разрывную во всех точках числовой прямой, кроме точек $x = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

486. Каковы точки разрыва у функции, имеющей значение 1 в точках канторова множества и значение 2 во всех остальных точках числовой прямой. Будут ли эти точки разрыва первого или второго рода?

487. Построить функцию, определенную на отрезке $[0, 3]$, разрывную в каждой точке, изображаемой конечной десятичной дробью, и непрерывную в точках, которые не могут быть изображены с помощью конечной десятичной дроби.

488. Найти точки разрыва и точки непрерывности функции $f(x)$, определенной на отрезке $[0, 1]$ условиями:

$f(x) = 0$ в точках канторова множества,

$f(x) = 1$ в серединах его смежных интервалов,

$f(x)$ линейна на участках $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$ и $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$, где $]a_n, b_n[$ — n-й смежный интервал канторова множества ($n = 1, 2, \ldots$).

489. Исследовать на непрерывность функцию, заданную на отрезке $[0, 1]$ следующими условиями:

$f(x) = 0$ в точках канторова множества,

$f(x) = c_n$ в середине n-го смежного интервала $]a_n, b_n[$;

$f(x)$ линейна на участках $\left[a_n, \frac{a_n+b_n}{2}\right]$, $\left[\frac{a_n+b_n}{2}, b_n\right]$

($n = 1, 2, 3, \ldots$). При этом предполагается, что смежные интервалы канторова множества перенумерованы в порядке убывания их длин:

$$]a_1, b_1[= \left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[, \ ]a_2, b_2[= \left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[, \ ]a_3, b_3[= \left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[,$$

$$]a_4, b_4[= \left]\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right[, \ ]a_5, b_5[= \left]\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right[, \ \ldots$$

Рассмотреть случаи: а) последовательность $\{c_n\}$ такова, что $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$ существует и отличен от нуля.

490. Найти все точки разрыва и точки непрерывности функции $f(x) = \begin{cases} c_n & \text{во всех интервалах } n\text{-го ранга канторова множества } D; \\ 0 & \text{при } x \in D. \end{cases}$

Рассмотреть случаи: 1) $c_n \to 0$ при $n \to +\infty$; 2) $c_n \to q$ ($q \neq 0$) при $n \to +\infty$; 3) $\{c_n\}$ не имеет предела.

491. Построить функцию, непрерывную во всех иррациональных точках отрезка $[0, 1]$ и разрывную во всех его рациональных точках.

492. Существует ли функция, непрерывная во всех рациональных точках отрезка $[0, 1]$ и разрывная во всех его иррациональных точках?

493. Построить функцию, непрерывную во всех точках канторова множества и разрывную во всех точках его смежных интервалов.

494. Построить функцию, непрерывную во всех точках смежных интервалов канторова множества и разрывную всюду на канторовом множестве.

495. Исследовать на непрерывность функцию, равную x^2 в рациональных точках числовой прямой и $-x^2$ в иррациональных.

496. Функция $f(x)$ определена на отрезке $[0, 1]$ следующим образом: она равна нулю во всех точках некоторого нигде не плотного совершенного множества; на каждом смежном интервале этого множества $f(x)$ положительная и имеет своим графиком полуокружность, диаметром которой служит этот смежный интервал. В каких точках эта функция непрерывна?

497. Доказать, что для любой функции, определенной на множестве A, имеет место равенство:

$$\omega_A f = \sup_{\xi\in A,\ \eta\in A} |f(\xi) - f(\eta)|.$$

498. Доказать, что для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$, определенных на множестве A, справедливо неравенство

$$\underset{A}{\omega}(f+g) \leqslant \underset{A}{\omega} f + \underset{A}{\omega} g;$$

если же хотя бы одно из чисел $\underset{A}{\omega} f$, $\underset{A}{\omega} g$ конечно, то, кроме того, имеет место неравенство

$$\underset{A}{\omega}(f+g) \geqslant |\underset{A}{\omega} f - \underset{A}{\omega} g|.$$

499. Пусть $\{f_k\}$ — последовательность функций, определенных в метрическом пространстве X, такая, что ряд $\sum\limits_{0}^{+\infty} f_k(x)$ равномерно сходится на X. Доказать, что для любого множества $E \subset X$ и любой точки $x_0 \in X$ имеет место неравенство

$$\omega\left[\sum_{k=1}^{+\infty} f_k,\ x_0,\ E\right] \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \omega[f_k,\ x_0,\ E].$$

500. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 то и функция $|f(x)|$ непрерывна в этой точке.

501. Привести пример функции $f(x)$ такой, что $f(x)$ разрывна во всех точках отрезка $[0, 1]$, а $|f(x)|$ непрерывна на $[0, 1]$.

502. Функция $f(x)$ определена на числовой прямой следующим образом:

$f(x) = 0$ в иррациональных точках,

$f(x) = \frac{(-1)^p}{q}$ в рациональных точках, представимых в виде несократимой дроби $\frac{p}{q} \neq 0$ (где $q > 0$),

$$f(x) = 1 \text{ при } x = 0.$$

Найти все ее точки разрыва и точки непрерывности.

503. Построить функцию $f(x, y)$, разрывную во всех точках квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, но непрерывную как функция от x при любом постоянном y.

504. Функция двух переменных $f(x, y)$ определена на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ следующим образом: в точках, где обе координаты иррациональны или обе рациональны, $f(x, y) = 0$; кроме того, $f(x, y) = 0$ там, где $x = 0$ или $y = 0$; в точках, где абсцисса равна рациональному числу $\frac{p}{q} > 0$ ($\frac{p}{q}$ — несократимая дробь, $q > 0$), а ордината иррациональна, $f(x, y) = \frac{1}{q}$; в точках, где абсцисса иррациональна, а ордината записывается в виде несократимой дроби $\frac{p}{q} > 0$ $(q > 0)$, $f(x, y) = -\frac{1}{q}$. В каких точках эта функция разрывна и где она непрерывна?

505. Доказать, что непрерывным образом компактного множества является компактное множество.

Примечание. *Непрерывным образом* множества E называется множество $f(E)$, где f — какая-либо функция, определенная и непрерывная на E.

506. Показать на примере, что непрерывный образ неограниченного замкнутого множества на числовой прямой не обязательно является замкнутым множеством.

507. Показать на примере, что непрерывный образ открытого множества не обязан быть открытым множеством.

508. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная в метрическом пространстве X, а F — произвольное замкнутое множество на числовой прямой. Доказать, что множество $f^{-1}(F)$ замкнуто в X.

509. Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, определенная в метрическом пространстве X, а G — произвольное открытое множество на числовой прямой. Доказать, что множество $f^{-1}(G)$ открыто в X.

510. Может ли прообраз компактного множества при непрерывном отображении быть неограниченным?

511. Доказать, что функция $f(x)$, определенная на всей числовой прямой, непрерывна тогда и только тогда, когда прообразы всех интервалов $]a, b[$ являются открытыми множествами.

512. Доказать, что если функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой и прообразы множеств $]-\infty, a]$ и $[a, +\infty[$ замкнуты при любом действительном a, то функция $f(x)$ непрерывна во всех точках числовой прямой.

513. Пусть функция $f(x)$, определенная на всей числовой прямой, принимает только целые значения. Доказать, что множество точек непрерывности такой функции является открытым множеством, а множество точек разрыва замкнуто.

514. Доказать, что любая непрерывная на компакте E функция ограничена на E.

515. Пусть $f(x)$ — числовая функция, непрерывная на компакте E. Доказать, что существует точка $a \in E$ такая, что $f(a) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$, и точка $b \in E$ такая, что $f(b) = \sup\limits_{x \in E} f(x)$.

516. Привести пример числовой функции, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве E некоторого полного метрического пространства и не ограниченной на E.

517. Привести пример числовой функции $f(x)$, непрерывной на замкнутом множестве E некоторого полного метрического пространства, такой, что $f(E)$ ограничено, но в E не существует такого элемента a, что $f(a) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$.

518. Доказать, что $\rho(x, y_0)$ (где y_0 — фиксированная точка метрического пространства X) есть непрерывная функция от x.

519. Доказать, что $d(x, E)$ (где E — заданное непустое множество в метрическом пространстве X) есть непрерывная функция от x.

520. Пусть E — компактное множество в пространстве X и $x_0 \in X$. Доказать, что существует точка $y_0 \in E$ такая, что $\rho(x_0, y_0) =$

$= d(x_0, E)$ (т. е. расстояние от x_0 до компакта E достигается в некоторой точке этого компакта).

521. Доказать, что если множество E в метрическом пространстве X обладает свойством H (см. задачу 333) и $x_0 \in X$, то существует точка $y_0 \in E$ такая, что $\rho(x_0, y_0) = d(x_0, E)$.

522. Доказать, что для любых двух множеств E, F в метрическом пространстве X имеет место равенство

$$d(E, F) = \inf_{y \in F} d(y, E).$$

523. Пусть E и F — множества в метрическом пространстве X, причем E обладает свойством H, а F компактно. Доказать, что существуют точки $x_0 \in E$, $y_0 \in F$ такие, что

$$\rho(x_0, y_0) = d(E, F)$$

(расстояние между множествами E и F достигается в точках этих множеств).

524. Доказать, что расстояние между двумя компактными множествами метрического пространства достигается в точках этих множеств.

525. Доказать, что в евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^n$ расстояние между замкнутым множеством E и замкнутым ограниченным множеством F достигается в точках этих множеств.

526. Показать на примере, что расстояние между двумя замкнутыми непересекающимися множествами в евклидовом пространстве может равняться нулю (если эти множества не ограничены).

527. Привести пример замкнутых неограниченных множеств A и B на плоскости таких, что $d(A, B) = 1$ и что не существует точек $a \in A$, $b \in B$ таких, что $\rho(a, b) = 1$.

528. Привести пример двух замкнутых ограниченных множеств в некотором полном метрическом пространстве, расстояние между которыми не достигается в точках этих множеств.

529. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $(X \times X, R)$ — множество пар (x, y) $(x \in X, y \in X)$, метризованное по формуле

$$R((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(\rho(x_1, x_2))^2 + (\rho(y_1, y_2))^2}.$$

Доказать, что $\rho(x, y)$ является непрерывной функцией на $(X \times X, R)$.

530. Пусть E — непустой компакт в метрическом пространстве X. Доказать, что в нем найдутся точки $x_0 \in E$, $y_0 \in E$ такие, что $\rho(x_0, y_0) = \operatorname{diam} E$.

531. Пусть x_1 и x_2 — две точки метрического пространства X, $x_1 \neq x_2$. Построить непрерывную в X функцию $f(x)$ такую, что: 1) $f(x) \equiv 0$ в некоторой окрестности точки x_1; 2) $f(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности точки x_2; 3) $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ для всех $x \in X$.

532. На прямой даны n попарно не пересекающихся замкнутых множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$; построить функцию $f(x)$, непрерывную всюду на прямой и такую, что $f(x) = p_k$ при $x \in E_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, где $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — заданные числа.

533. На прямой дана счетная совокупность попарно не пересекающихся замкнутых множеств E_k $(k=1, 2, \ldots)$, причем ни одно из этих множеств не содержит точек прикосновения объединения всех остальных множеств. Построить функцию $f(x)$ непрерывную всюду на прямой и такую, что для любого натурального числа k имеет место $f(x) = p_k$ при $x \in E_k$, где p_k — заданные числа, такие, что ряд $\sum\limits_k p_k$ абсолютно сходится.

534. На прямой дана счетная совокупность попарно не пересекающихся замкнутых множеств E_k $(k = 1, 2, \ldots)$, причем E_1 содержит хотя бы одну точку прикосновения объединения остальных множеств. Пусть $\sum\limits_k p_k$ — абсолютно сходящийся ряд, причем $p_1 \neq 0$. Доказать, что не существует функции $f(x)$, непрерывной на всей прямой и такой, что $f(x) = p_k$ при $x \in E_k$ для любого натурального числа k.

535. Доказать, что непрерывный образ связного множества есть связное множество.

536. Доказать теорему Больцано — Коши: «Если числовая функция $f(x)$ непрерывна на связном множестве E, причем $f(a) = A$, $f(b) = B$, где $a \in E$, $b \in E$, то для любого числа C, лежащего между числами A и B, найдется точка $c \in E$ такая, что $f(c) = C$».

537. Пусть $f(x)$ — числовая функция, непрерывная на связном компактном непустом множестве E. Доказать, что $f(E)$ — либо отрезок, либо одноточечное множество.

538. Говорят, что функция $f(x)$, определенная на $[a, b]$, обладает *свойством Дарбу* на отрезке $[a, b]$, если для любых $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ $(x_1 < x_2)$ и для любого числа C, лежащего между $f(x_1)$ и $f(x_2)$, найдется точка $\xi \in (x_1, x_2)$ такая, что $f(\xi) = C$. Является ли выполнение свойства Дарбу достаточным условием для непрерывности функции $f(x)$ на $[a, b]$?

539. Являются ли равномерно непрерывными на указанных множествах следующие функции, непрерывные на этих множествах: 1) $\sin\frac{1}{x}$ на интервале $]0, 1[$; 2) $x\sin\frac{1}{x}$ на луче $]0, +\infty[$; 3) $3x$ на всей числовой прямой; 4) x^2 на всей числовой прямой; 5) $\frac{\sin x}{x}$ на луче $]0, +\infty[$?

540. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на компактном множестве E метрического пространства, то она равномерно непрерывна на E.

541. Доказать, что если функция равномерно непрерывна на относительно компактном множестве E метрического пространства, то она ограничена на E.

542. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции, равномерно непрерывные на E. Является ли их сумма равномерно непрерывной на E функцией?

543. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — функции, равномерно непрерывные

на множестве E. Всегда ли их произведение является равномерно непрерывной функцией на E?

544. Является ли произведение двух функций $f(x)$ и $g(x)$, равномерно непрерывных на относительно компактном множестве E метрического пространства, равномерно непрерывной функцией на E?

545. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на луче $[0, +\infty[$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ существует, то она равномерно непрерывна на этом луче.

546. Верно ли, что функция $f(x)$, непрерывная и ограниченная на луче $[0, +\infty[$, равномерно непрерывна на этом луче?

547. Является ли функция $f(x)$, построенная в задаче 488, равномерно непрерывной на множестве E, где E — дополнение к канторову множеству до всего отрезка $[0, 1]$?

548. Зададим $f(x)$ на $[0, 1]$ следующим образом: $f(x) = 0$ всюду на канторовом множестве D; $f(x) = \frac{1}{2}$ на смежном интервале первого ранга, т. е. на $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$; $f(x) = \frac{1}{2^2}$ на смежных интервалах второго ранга, т. е. на $\left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[$ и $\left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[$; вообще $f(x) = \frac{1}{2^k}$ на всех смежных интервалах k-го ранга. Найти все точки разрыва функции $f(x)$.

Является ли эта функция равномерно непрерывной на дополнении $\mathbf{C}D$ к канторову множеству до всего отрезка $[0, 1]$?

549. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве E метрического пространства, то она может быть продолжена с сохранением непрерывности на его замыкание $\overline{E}$ и притом единственным образом (т. е. существует одна и только одна непрерывная функция $\varphi(x)$, определенная на $\overline{E}$ и такая, что $\varphi(x) = f(x)$ для всех $x \in E$). Показать, что $\varphi(x)$ равномерно непрерывна на $\overline{E}$.

550. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве E числовой прямой, то она может быть продолжена на всю прямую с сохранением непрерывности.

551. Привести пример функции $f(x)$, непрерывной и ограниченной на ограниченном множестве E числовой прямой, которую нельзя продолжить на всю числовую прямую с сохранением непрерывности.

552. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, но не равномерно непрерывна на ограниченном множестве E числовой прямой, то она не может быть продолжена на всю числовую прямую с сохранением непрерывности.

553. Пусть $f(x)$ — функция, равномерно непрерывная на всей числовой прямой. Доказать, что существуют два неотрицательных числа A и B такие, что $|f(x)| \leqslant A \cdot |x| + B$ для всех $x \in \boldsymbol{R}^1$

554. Привести пример числовой функции $f(x)$, непрерывной на замкнутом ограниченном множестве E некоторого полного метрического пространства, но не равномерно непрерывной на E.

555. Доказать, что функция $f(x) = \int_0^1 x(t)dt$, определенная для всех $x \in C[0, 1]$, равномерно непрерывна на $C[0, 1]$.

556. Показать на примере, что функция, равномерно непрерывная на ограниченном множестве E некоторого метрического пространства, может оказаться неограниченной на E.

557. Пусть E — произвольно заданное множество типа F_σ на числовой прямой $\boldsymbol{R}^1$. Построить функцию $f(x)$, определенную всюду на $\boldsymbol{R}^1$, разрывную во всех точках множества E и непрерывную в остальных точках.

558. Пусть $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E. Доказать, что для любых множеств E, E_1, E_2 имеют место равенства:

$$\chi_{E_1 \cap E_2}(x) = \chi_{E_1}(x) \cdot \chi_{E_2}(x),$$

$$\chi_{E_1 \cup E_2}(x) = \chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x) - \chi_{E_1}(x) \cdot \chi_{E_2}(x),$$

$$\chi_{CE}(x) = 1 - \chi_E(x).$$

559. Пусть $M = E_1 \cap \ldots \cap E_n$, $N = E_1 \cup \ldots \cup E_n$. Выразить $\chi_M(x)$ и $\chi_N(x)$ через $\chi_{E_1}(x), \ldots, \chi_{E_n}(x)$.

560. Доказать, что характеристическая функция любого множества E разрывна в граничных точках этого множества и непрерывна во всех остальных точках пространства.

561. Доказать, что если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ непрерывны на E, то функции $F(x) = \max\{\varphi(x), \psi(x)\}$, $G(x) = \min\{\varphi(x), \psi(x)\}$ также непрерывны на E.

562. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная функция на E, то для произвольно заданных чисел a, b $(a < b)$ функция

$$[f(x)]_a^b = \begin{cases} f(x), & \text{если } a \leqslant f(x) \leqslant b, \\ a, & \text{если } f(x) < a, \\ b, & \text{если } f(x) > b \end{cases}$$

также непрерывна на E.

563. Пусть функция $f(x)$ определена всюду на числовой прямой $\boldsymbol{R}^1$. Доказать, что для того чтобы $f(x)$ была непрерывна на $\boldsymbol{R}^1$, необходимо и достаточно, чтобы при всяком $a > 0$ определенная в предыдущей задаче функция $[f(x)]_{-a}^{a}$ была непрерывна на $\boldsymbol{R}^1$.

564. Построить пример функции $f(x)$, определенной на $[0, 1]$, у которой как множество точек непрерывности, так и множество точек разрыва всюду плотны на $[0, 1]$ и имеют мощность континуума в любом интервале $]\alpha, \beta[\subset [0, 1]$.

565. Зададим функцию $f(x, y)$ на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ следующим образом:

$f(x, y) = 0$ в точках множества A, где A — «ковер Серпинского» (см. задачу 244);

$f(x, y) = 1$ в центрах всех выбрасываемых квадратов;
$f(x, y)$ линейна в каждом из четырех треугольников, на которые делится диагоналями всякий выбрасываемый квадрат.

Является ли функция $f(x, y)$ непрерывной на квадрате $[0, 1] \times \times [0, 1]$? Является ли она непрерывной на множестве $E = \{[0, 1] \times \times [0, 1]\} \setminus A$? Является ли она равномерно непрерывной на E?

566. Зададим функцию $f(x, y)$ на квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ так:
$f(x, y) = 0$ в точках множества A, где A — «ковер Серпинского»;
$f(x, y) = \frac{1}{n}$ в центрах всех квадратов, выбрасываемых на n-м шаге;
$f(x, y)$ линейна в каждом из четырех треугольников, на которые делится всякий выбрасываемый квадрат своими диагоналями.

Является ли функция $f(x, y)$ непрерывной на квадрате $[0, 1] \times \times [0, 1]$? На множестве $E = \{[0, 1] \times [0, 1]\} \setminus A$? Является ли она равномерно непрерывной на квадрате? На множестве E?

567. Функция $\frac{2xy}{x^2 + y^2}$ непрерывна на открытом множестве $0 < < x^2 + y^2 < 4$ (открытый круг с выколотым центром); является ли эта функция равномерно непрерывной на указанном множестве? Является ли она равномерно непрерывной в открытом кольце $1 < x^2 + y^2 < 4$?

568. Построить функцию $f(x)$, определенную на всей прямой, непрерывную в некоторой точке x_0 относительно канторова множества D, но не являющуюся полностью непрерывной в этой точке.

569. Верно ли утверждение: «Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 относительно любого счетного множества, содержащего точку x_0, то она полностью непрерывна в этой точке»?

570. Пусть функция двух переменных $f(x, y)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Верно ли утверждение: «Для того чтобы функция $f(x, y)$ была полностью непрерывна в точке M_0, необходимо и достаточно, чтобы она была непрерывна по любому лучу, исходящему из точки M_0»?

571. Пусть функция $f(x, y, z)$ определена во всем трехмерном пространстве $\boldsymbol{R}^3$ и непрерывна в точке $M_0 \in \boldsymbol{R}^3$ относительно любой плоскости, проходящей через эту точку. Можно ли утверждать, что эта функция полностью непрерывна в точке M_0?

572. Пусть функция $f(x, y)$ определена всюду на плоскости и непрерывна в точке $(0, 0)$ относительно любой архимедовой спирали $\rho = a(\varphi - \alpha)$ (при любых значениях постоянных $a > 0$ и α). Можно ли утверждать, что эта функция полностью непрерывна в точке $(0, 0)$?

Глава X.
НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Пусть f — отображение множества A метрического пространства X в метрическое пространство Y, так что $A \subset X$ есть область определения отображения f, а $f(A) \subset Y$ — его область значений (при этом метрическое пространство X

называют областью отправления, а метрическое пространство Y—областью прибытия отображения f). Частный случай такого отображения — когда пространством Y является числовая прямая — был рассмотрен в предыдущей главе. Распространим теперь данные там определения на случай, когда Y — произвольное метрическое пространство.

Отображение f множества $A \subset X$ в пространство Y мы будем называть *непрерывным в точке* $x_0 \in X$ *относительно множества* $E \subset X$, если $x_0 \in A \cap E$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует окрестность $V(x_0)$ такая, что для всех $x \in A \cap E \cap V(x_0)$ имеет место неравенство $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ (определение Коши).

Это определение равносильно следующему: отображение f множества $A \subset X$ в пространство Y называется непрерывным в точке $x_0 \in X$ относительно множества $E \subset X$, если $x_0 \in A \cap E$ и для любой последовательности точек $\{x_n\}$ из $A \cap E$, сходящейся к x_0, имеет место $\lim\limits_{n \to +\infty} f(x_n) = f(x_0)$ (определение Гейне).

Если отображение непрерывно во всех точках множества E относительно E, то оно называется *непрерывным* на E.

Теорема 1. *Если отображение f непрерывно на компактном множестве $E \subset X$, то $f(E)$ также есть компактное множество* (коротко: «*Непрерывный образ компакта есть компакт*», см. задачу 575).

Теорема 2. *Если отображение f непрерывно на связном множестве $E \subset X$, то $f(E)$ также есть связное множество* (коротко: «*Непрерывный образ связного множества есть связное множество*», см. задачу 579).

Отображение f, определенное на $E \subset X$, называется *равномерно непрерывным* на E, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых $x' \in E, x'' \in E$, таких, что $\rho(x', x'') < \delta$, имеет место $\rho(f(x'), f(x'')) < \varepsilon$.

Теорема 3. *Если отображение f равномерно непрерывно на E, то оно непрерывно на E.*

Теорема 4. *Если отображение f непрерывно на компактном множестве E, то оно равномерно непрерывно на E.*

Сжимающее отображение. Отображение f метрического пространства X в метрическое пространство Y называется *сжимающим* (или *сжатым*), если существует такое число K, $0 < K < 1$, что для любых $x' \in X$, $x'' \in X$ имеет место

$$\rho(f(x'), f(x'')) \leqslant K\rho(x', x'').$$

Ясно, что сжимающее отображение непрерывно (и даже равномерно непрерывно) на X.

Теорема 5 (Банаха). *Если отображение f полного метрического пространства X в себя является сжимающим, то существует, и притом единственная, точка $x_0 \in X$ такая, что $x_0 = f(x_0)$* (такая точка называется *неподвижной точкой отображения* f).

Гомеоморфизм. Если отображение f множества $E \subset X$ на множество $G \subset Y$ является взаимно однозначным и непрерывным и если обратное отображение f^{-1} множества G на множество E также непрерывно, то f называется *гомеоморфным отображением* или *гомеоморфизмом.*

Если для множеств E и G существует гомеоморфизм, отображающий E на G, то говорят, что множества E и G *гомеоморфны.*

Всякое свойство множества E, сохраняющееся при гомеоморфизме, называется *топологическим свойством.* Уточним это: пусть $\mathbf{A}$ — класс всех множеств, обладающих некоторым свойством; это свойство называется топологическим, если из того, что $E \in \mathbf{A}$, f — гомеоморфизм, заданный на E, следует, что $f(E) \in \mathbf{A}$.

Отображения евклидовых пространств. Важным частным случаем отображения является отображение, у которого областью отправления и областью прибытия являются евклидовы пространства.

Непрерывное отображение f множества $E \subset \boldsymbol{R}^m$ в евклидово пространство $\boldsymbol{R}^n$ может быть задано с помощью n непрерывных на E числовых функций от m переменных:

$$y_1 = \varphi_1(x_1, \ldots, x_m), \ldots, y_n = \varphi_n(x_1, \ldots, x_m),$$

где $x_1, \ldots, x_m$ — числовые переменные (координаты точки x), а $y_1, \ldots, y_n$ — координаты точки $y = f(x)$.

Кривая Жордана. Непрерывное отображение отрезка E числовой оси R^1 в n-мерное евклидово пространство R^n называется n-мерной *кривой Жордана* или *жордановой кривой* (в частности, при $n = 2$ — плоской кривой Жордана, при $n = 3$ — пространственной).

Образ отрезка E при этом отображении называется *носителем* этой жордановой кривой. Носитель жордановой кривой — всегда *связное* множество. Иногда — в тех случаях, когда это не будет вызывать недоразумения, — мы будем называть жордановой кривой не только непрерывное отображение отрезка, но и образ отрезка при этом отображении.

Ясно, что жорданова кривая может быть задана непрерывными числовыми функциями одной переменной $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$, где $t \in E$ (E — отрезок на оси Ot).

Важным примером жордановой кривой является *кривая Пеано*, носителем которой является замкнутый квадрат на плоскости. Первый пример такого непрерывного отображения был приведен итальянским математиком Пеано в 1890 г. (см. ниже, задачу 594).

Проектирование. Рассмотрим еще один способ непрерывного отображения — проектирование множества, расположенного на плоскости, на какую-либо ось.

Проекцией точки $M \subset Oxy$ на ось Ox называется пересечение с осью Ox прямой линии, проходящей через точку M под заданным углом α к оси Ox.

Проекцией множества $E \subset Oxy$ на ось Ox называется множество проекций всех точек множества E на ось Ox; при этом проектирование всех точек множества E проводится под одним и тем же углом α к оси Ox.

Проекция множества, проведенная под углом 90° к оси, называется *ортогональной* (или *прямоугольной*) проекцией.

Проекция множества, проведенная под углом, отличным от прямого, называется *косоугольной* проекцией.

Арифметическая сумма множеств. Для решения некоторых задач нам понадобится понятие арифметической суммы множеств.

Арифметической суммой двух множеств E и F, расположенных на числовой прямой, называется множество всевозможных сумм вида $x + y$, где $x \in E$, $y \in F$. Арифметическая сумма множеств E и F обозначается $E \oplus F$.

Так, например, арифметической суммой отрезка $[1, 2]$ и интервала $]4, 6[$ является интервал $]5, 8[$.

Задачи

573. Доказать, что если f — непрерывное отображение множества E метрического пространства X в метрическое пространство Y и $E_1 \subset E$ плотно в E, то $f(E_1)$ плотно в $f(E)$.

574. Доказать, что множество точек $\ln(r^2 + 1)$ числовой оси, где r пробегает все рациональные числа, плотно на луче $[0, +\infty[$.

575. Доказать, что непрерывный образ компакта есть компакт.

576. Пусть f — отображение метрического пространства X в метрическое пространство Y. Доказать, что для непрерывности этого отображения необходимо и достаточно, чтобы прообразом любого замкнутого множества пространства Y являлось замкнутое множество пространства X.

577. Пусть f — отображение пространства X в пространство Y. Доказать, что для непрерывности этого отображения необходимо и достаточно, чтобы прообразы всех открытых множеств пространства Y были открытыми множествами пространства X.

578. Доказать, что если при отображении f пространства X в пространство Y прообразы всех открытых шаров пространства Y являются открытыми множествами в X, то отображение f непрерывно.

579. Доказать, что непрерывный образ связного множества есть связное множество.

580. Доказать, что любое линейно связное множество E связно.

Примечание. Множество E в евклидовом пространстве называется *линейно связным*, если для любых двух точек $x_1 \in E$, $x_2 \in E$ существует жорданова кривая, носитель которой включается в E и содержит точки x_1, x_2.

581. Привести пример компактного множества, являющегося связным, но не линейно связным.

582. Доказать, что если открытое множество G евклидова пространства связно, то оно и линейно связно.

583. Пусть f — взаимно однозначное непрерывное отображение множества E метрического пространства X на множество E_1 метрического пространства Y. Обязано ли обратное отображение E_1 на E быть непрерывным? Если да — доказать, если нет — привести противоречащий пример.

584. Пусть f — взаимно однозначное непрерывное отображение компактного множества E на множество E_1. Доказать, что обратное отображение E_1 на E также непрерывно (т. е. что f является гомеоморфизмом).

585. Пусть f — взаимно однозначное непрерывное отображение множества E на E_1. Доказать, что если E не имеет изолированных точек, то E_1 также не имеет изолированных точек. Остается ли в силе это утверждение, если f — непрерывное, но не взаимно однозначное отображение?

586. Верно ли утверждение: «Если f — непрерывное отображение множества E на E_1 и если E_1 не имеет изолированных точек, то E также не имеет изолированных точек»? Будет ли верно аналогичное утверждение, если f — взаимно однозначное непрерывное отображение E на E_1?

587. Пусть f — взаимно однозначное непрерывное отображение компактного множества E на E_1. Доказать, что если E_1 не имеет изолированных точек, то и E не имеет их.

588. Доказать, что компактность и связность являются топологическими свойствами.

589. Доказать, что отсутствие изолированных точек у множества является топологическим свойством.

590. Доказать, что свойство множества быть полным пространством не является топологическим свойством.

591. Доказать, что если некоторое свойство является топологическим, то его отрицание также является топологическим свойством.

592. Доказать, что не существует взаимно однозначного непрерывного отображения отрезка $[0, 1]$ на замкнутый квадрат $[0, 1] \times \times [0, 1]$ (т. е. что отрезок и квадрат не гомеоморфны).

593. Пусть S^m — m-мерная единичная сфера в $m+1$-мерном евклидовом пространстве $\boldsymbol{R}^{m+1}$, т. е. множество всех точек $(x_1, \ldots, x_{m+1}) \subset \boldsymbol{R}^{m+1}$, для которых $\sum\limits_{i=1}^{m+1} x_i^2 = 1$, и a — какая-либо точка этой сферы. Доказать, что $S^m \setminus \{a\}$ гомеоморфно $\boldsymbol{R}^m$.

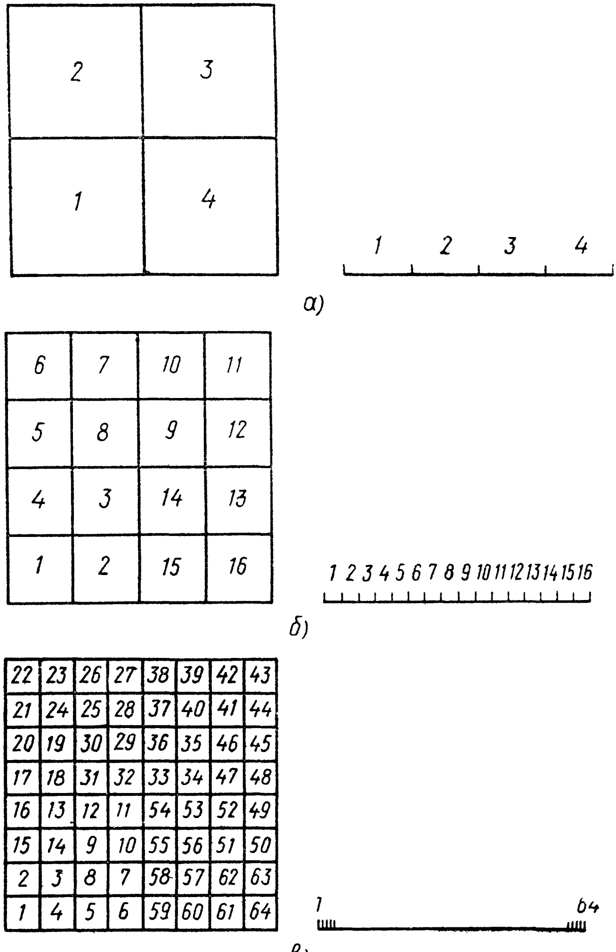


Рис. 2

594. Пусть $f(x)$ — непрерывное отображение отрезка $[0; 1]$ оси Ot на весь квадрат $[0, 1] \times [0, 1]$ плоскости Oxy («кривая Пеано»). Это отображение осуществим следующим образом. Разделим отрезок $[0, 1]$ на четыре равных отрезка первого ранга, а заданный квадрат — на четыре равных замкнутых квадрата первого ранга; отрезки первого ранга занумеруем слева направо, а квадраты первого ранга — в том порядке, как указано на рисунке 2, *а*. Далее каждый отрезок первого ранга разбиваем на четыре равных отрезка второго ранга, а каждый квадрат первого ранга — на четыре равных замкнутых квадрата второго ранга; получившиеся в результате шестнадцать отрезков второго ранга нумеруем слева направо, а квадраты второго ранга нумеруем так, чтобы два квадрата с соседними номерами имели общую сторону (см. рис. 2, *б*). Далее разбиваем каждый отрезок второго ранга на четыре отрезка третьего ранга и нумеруем все отрезки третьего ранга слева направо, а каждый квадрат второго ранга — на четыре квадрата третьего ранга и нумеруем все квадраты третьего ранга по тому же правилу, что и квадраты второго ранга (см. рис. 2, *в*). Далее продолжаем этот процесс неограниченно.

Поставим в соответствие каждому отрезку n-го ранга с номером i квадрат того же ранга n с тем же номером i. Так мы установим взаимно однозначное соответствие между отрезками и квадратами одного и того же ранга; заметим, что это соответствие обладает следующим свойством: если отрезок n-го ранга δ_1 соответствует квадрату n-го ранга V_1, а отрезок $n+1$-го ранга δ_2 — квадрату $n+1$-го ранга V_2 и если $\delta_1 \supset \delta_2$, то $V_1 \supset V_2$.

Теперь устанавливаем отображение отрезка $[0, 1]$ оси Ot на заданный квадрат следующим образом. Пусть t_0 — какая-либо точка отрезка $[0, 1]$. Построим последовательность отрезков $\{\delta_n\}$ (где δ_1 — отрезок первого ранга, δ_2 — отрезок второго ранга и т. д.), содержащих точку t_0; этой последовательности отрезков соответствует последовательность квадратов $\{V_n\}$; при этом так как $\delta_1 \supset \supset \delta_2 \supset \ldots \supset \delta_n \supset \ldots$, то $V_1 \supset V_2 \supset \ldots \supset V_n \supset \ldots$ Так как $\operatorname{diam} V_n \to 0$ при $n \to +\infty$, то существует единственная точка M_0, принадлежащая всем V_n. Ее мы и ставим в соответствие точке t_0, т. е. полагаем $f(t_0) = M_0$.

Доказать, что: а) каждой точке $t_0 \in [0, 1]$ отвечает только одна точка M_0 из данного квадрата; б) при этом отображении получаются все точки квадрата; в) это отображение непрерывно на $[0, 1]$; г) оно не является взаимно однозначным.

595. Доказать, что проектирование на ось Ox множества E, лежащего на плоскости Oxy, является непрерывным отображением.

596. Всегда ли проекция на ось Ox плоского открытого множества является открытым множеством на прямой?

597. Всегда ли проекция на ось Ox плоского замкнутого множества является замкнутым множеством на прямой?

598. Даны две пересекающиеся оси на плоскости. Доказать, что при ортогональном проектировании каждое несчетное множество проектируется по крайней мере на одну из этих осей в несчетное множество.

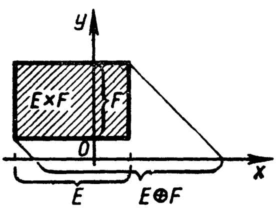


Рис. 3

599. Доказать, что арифметическую сумму множеств E и F (т. е. множество $E \oplus F$) можно построить следующим образом: поместим E на оси Ox, F на оси Oy и построим множество $E \times F$ на плоскости Oxy; затем спроектируем $E \times F$ на ось Ox с помощью косоугольной проекции с углом проектирования, равным 135°; полученная проекция и будет множеством $E \oplus F$ (рис. 3).

600. Доказать, что арифметическая сумма двух ограниченных замкнутых множеств является ограниченным замкнутым множеством.

601. Что представляет собой арифметическая сумма двух канторовых совершенных множеств?

602. Доказать, что если множество A на прямой открыто, то, каким бы ни было множество B, арифметическая сумма $A \oplus B$ является открытым множеством.

603. Доказать, что если E_1 и E_2 — непустые числовые множества, то

$$\sup (E_1 \oplus E_2) = \sup E_1 + \sup E_2,$$
$$\inf (E_1 \oplus E_2) = \inf E_1 + \inf E_2.$$

604. Пусть E и F — связные множества на прямой. Доказать, что $E \oplus F$ также связно.

605. Что представляет собой множество всевозможных расстояний между точками канторова множества?

606. Пусть A — открытое множество на оси Ox, B — произвольное множество на той же оси. Доказать, что множество всевозможных расстояний между точками $\xi \in A$ и $\eta \in B$ является либо открытым множеством, либо объединением открытого множества и одноточечного (начала координат).

607. Пусть $f(x)$ — числовая функция, определенная на всей оси Ox, имеющая производную для всех x, причем $|f'(x)| \leqslant K$, где K — заданное число, $0 < K < 1$. Доказать, что уравнение $x = f(x)$ имеет решение, и притом единственное.

608. Пусть $f(x)$ — числовая функция, определенная на всей оси Ox, имеющая производную для всех x, причем $|f'(x)| \geqslant K$, где K — фиксированное число, $K > 1$. Доказать, что уравнение $x = f(x)$ имеет решение, и притом единственное.

609. Рассмотрим бесконечную систему уравнений:

$$x_i = \sum_{k=1}^{+\infty} c_{ik} x_k + b_i \ (i = 1, 2, \ldots),$$

где $\sum\limits_{i,k} c_{ik}^2 < 1$, $\sum\limits_{i} b_i^2 < +\infty$. Доказать, что данная система имеет одно и только одно решение $(x_1, x_2, \ldots)$ в пространстве l_2.

610. Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{2} \ln x$ на участке $1 \leqslant x < +\infty$. Для любых $x_1 \in [1, +\infty[$, $x_2 \in [1, +\infty[$ имеем: $|f(x_2) - f(x_1)| = |f'(c)(x_2 - x_1)| \leqslant \frac{1}{2}|x_2 - x_1|$, где $c \in]x_1, x_2[$. Следовательно, данное отображение сжимающее. Однако оно не имеет неподвижной точки (уравнение $x = \frac{1}{2} \ln x$ не имеет действительных решений). Нет ли здесь противоречия с теоремой Банаха?

611. Функция $f(x) = \frac{x^2}{2|x|}$ не имеет неподвижной точки, хотя для любых $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, где E — область определения функции $f(x)$, имеет место неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant \frac{1}{2}|x_2 - x_1|$. Нет ли здесь противоречия с теоремой Банаха?

Глава XI.

ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (МОНОТОННОСТЬ, ОГРАНИЧЕННАЯ ВАРИАЦИЯ)

Монотонные функции. Функция $f(x)$ от одной действительной переменной называется *возрастающей* на множестве E, если она определена всюду на E и если для любых $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, таких, что $x_1 < x_2$, выполнено неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.

Если же для всех $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $x_1 < x_2$ выполнено неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция называется *строго возрастающей*.

Аналогично определяются *убывающая* и *строго убывающая* функции.

Если функция возрастает на множестве E или убывает на множестве E, то она называется *монотонной* на E; аналогично определяется *строго монотонная* функция.

Если функция монотонна на отрезке $[a, b]$, то множество ее точек разрыва не более чем счетно и все ее точки разрыва — первого рода (см. выше, задача 67).

Вариация функции. Пусть функция $f(x)$ задана на $[a, b]$; разобьем $[a, b]$ на n отрезков точками $x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1}$; обозначим, кроме того, $a = x_0$, $b = x_n$. Рассмотрим следующую сумму:

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|.$$

Эта сумма зависит от способа разбиения отрезка $[a, b]$. Если для всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$ эта сумма не превосходит некоторого положительного числа, то говорят, что функция $f(x)$ имеет *ограниченную вариацию* (или *ограниченное изменение*) на $[a, b]$. При этом верхняя грань сумм δ при всевозможных разбиениях $[a, b]$ называется *вариацией* функции $f(x)$ (или *полным изменением* функции $f(x)$) и обозначается $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \sup \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|,$$

где sup берется по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$.

Если множество сумм σ не ограничено, то функция $f(x)$ называется *функцией неограниченной вариации*; это записывается с помощью символического равенства $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = +\infty$.

Функции, имеющие ограниченную вариацию, коротко называют *функциями ограниченной вариации*. Для функций ограниченной вариации $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f < +\infty$.

П р и м е р ы функций ограниченной вариации: 1) всякая монотонная на $[a, b]$ функция (в частности, и любая разрывная монотонная функция); 2) всякая непрерывная функция, имеющая ограниченную на $[a, b]$ производную.

Следует заметить, что далеко не всякая непрерывная функция имеет ограниченную вариацию (см. задачу 645).

Т е о р е м а 1. *Если функция имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то она является разностью двух возрастающих функций.*

В частности, *всякую функцию $f(x)$ ограниченной вариации на $[a, b]$ можно представить в виде следующей разности:*

$$f(x) = \varphi(x) - \psi(x),$$

где $\varphi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ (вариация функции $f(x)$ на $[a, x]$), а $\psi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - f(x)$; $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *являются возрастающими функциями на* $[a, b]$.

Из теоремы, сформулированной выше, в частности, следует, что множество точек разрыва функции ограниченной вариации не более чем счетно и что все точки разрыва такой функции являются точками разрыва первого рода.

Теорема 2. *Если функция непрерывна и имеет ограниченную вариацию на* $[a, b]$, *то она представима в виде разности двух непрерывных возрастающих функций.*

Производная. Для функции одной переменной, определенной в некоторой окрестности точки x, можно определить обычным образом производную в точке x. Известно, что если производная функции $f(x)$ в точке x существует, то $f(x)$ непрерывна в этой точке; обратное утверждение неверно.

Если производная функции $f(x)$ существует всюду на $]a, b[$ и, кроме того, в точке a существует правая производная

$$f'_{\text{пр}}(a) = \lim_{h \to +0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

а в точке b — левая производная

$$f'_{\text{лев}}(b) = \lim_{h \to -0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h},$$

то говорят, что $f(x)$ имеет точную производную на $[a, b]$, в этом случае функцию $f'(x)$ называют *точной производной функции* $f(x)$. Если $[a, b]$ есть область определения функции $f(x)$, то вместо $f'_{\text{пр}}(a)$ и $f'_{\text{лев}}(b)$ пишут просто $f'(a)$ и $f'(b)$. Точная производная не обязана быть непрерывной функцией (см. задачи 612—614). Однако точная производная обладает рядом важных свойств:

Теорема 3 (Дарбу). *Если* $f(x)$ *имеет точную производную на* $[a, b]$, *причем* $f'(a) = A$, $f'(b) = B$, *то для любого числа* C, *заключенного между* A *и* B, *существует точка* $c \in [a, b]$ *такая, что* $f'(c) = C$ (т. е. точная производная обладает свойством Дарбу).

Теорема 4. *Точная производная* $f'(x)$ *не может иметь разрывов первого рода.*

Условие Гёльдера. Функцию $f(x)$ называют *удовлетворяющей условию Гёльдера порядка* α (где $\alpha \geqslant 0$ задано) на отрезке $[a, b]$, если существует такое $K > 0$, что для любых $x_1 \in [a, b]$, $x_2 \in [a, b]$ выполняется неравенство

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant K \cdot |x_2 - x_1|^{\alpha}.$$

Число K называется *константой Гёльдера*, α — *показателем Гёльдера*. Легко видеть, что если функция удовлетворяет на $[a, b]$ условию Гёльдера порядка $\alpha > 0$, то она непрерывна (и даже равномерно непрерывна) на $[a, b]$. В случае $\alpha = 1$ условие Гёльдера называется *условием Липшица* (*с константой Липшица* K).

Спрямляемые кривые. Пусть жорданова кривая (т. е. непрерывное отображение отрезка $[a, b]$ оси Ot в $\boldsymbol{R}^n$) задана непрерывными на $[a, b]$ функциями

$$x_1 = \varphi_1(t), \ldots, x_n = \varphi_n(t). \tag{1}$$

Разобьем произвольным образом $[a, b]$ точками t_i:

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{k-1} < t_k = b. \tag{2}$$

Шагом этого разбиения называется число $\lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} (t_i - t_{i-1})$. С разбиением (2) мы можем связать следующее число $l_{\text{лом}}$ («длина вписанной ломаной»):

$$l_{\text{лом}} = \sum_{i=1}^{k} \rho(M_i, M_{i-1}),$$

где M_i — образ точки t_i при отображении (1). Если при стремлении шага разбиения к нулю существует конечный предел длин ломаных, то этот предел называется *длиной* кривой (1), а сама кривая называется *спрямляемой* на $[a, b]$. Уточним это определение: если при любом $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что при любом разбиении $[a, b]$ с шагом, меньшим, чем δ, выполняется неравенство $| l_{\text{лом}} - l | < \varepsilon$, то число l называется длиной данной кривой.

Теорема 5. *Для спрямляемости кривой* (1) *необходимо и достаточно, чтобы множество чисел* $l_{\text{лом}}$ (*при всевозможных разбиениях отрезка* $[a, b]$) *было ограничено сверху; при этом*

$$l = \sup l_{\text{лом}}.$$

Теорема 6. *Для спрямляемости кривой* (1) *необходимо и достаточно, чтобы все функции* $\varphi_i(t)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ *имели ограниченную вариацию на* $[a, b]$.

Задачи

612. Построить функцию, имеющую производную во всех точках оси Ox, причем эта производная разрывна в начале координат и не ограничена в любой окрестности начала координат.

613. Построить на отрезке $[0, 1]$ функцию, имеющую производную во всех точках, причем эта производная разрывна на заданном непустом нигде не плотном замкнутом множестве, и только на нем.

614. Построить на отрезке $[0, 1]$ функцию, имеющую производную во всех точках, причем эта производная не ограничена в любой окрестности любой точки некоторого множества положительной меры.

615. Существует ли функция $f(x)$, имеющая во всех точках производную, совпадающую с функцией Дирихле (т. е. $f'(x) = 1$ в рациональных точках, $f'(x) = 0$ в иррациональных точках)?

616. Функция $f(x)$ имеет производную во всех точках числовой прямой. Может ли производная $f'(x)$ быть разрывной и монотонной?

617. Пусть во всех точках отрезка $[a, b]$ существуют и правая, и левая производные функции $f(x)$. Верно ли, что $f'_{\text{лев}}(x)$ принимает все промежуточные значения (т. е. обладает свойством Дарбу)?

618. Построить непрерывную на всей прямой функцию, имеющую производную во всех точках, кроме точек заданного ограниченного счетного множества E, в которых производная не существует.

619. Пусть $\varphi(t)$ — функция, возрастающая на $[a, b]$, а $f(x)$ — функция, монотонная на $[A, B]$, где $A = \varphi(a)$, $B = \varphi(b)$. Является ли монотонной функция $f(\varphi(t))$?

620. Рассмотрим монотонные функции $\varphi(t)$ и $f(x)$ из предыдущей задачи. Пусть $\varphi(t)$ разрывна в точке t_0 $(a < t_0 < b)$. Обязана ли быть разрывной функция $f(\varphi(t))$?

621. Доказать, что если функция $f(x)$ строго монотонна на отрезке $[a, b]$ и если $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(b)$, где $x_n \in [a, b]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$.

622. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, то функции $m(x) = \inf\limits_{z \in [a, x]} f(z)$ и $M(x) = \sup\limits_{z \in [a, x]} f(z)$ монотонны и непрерывны на $[a, b]$.

623. Доказать, что если $f(x)$ — произвольная возрастающая функция, заданная на $[a, b]$, то функция $M(x)$, определенная в

предыдущей задаче, совпадает с $f(x)$. Если же определить $\widetilde{M}(x)$ равенством

$$\widetilde{M}(x) = \sup_{z \in [a,\, x[} f(z),$$

то $\widetilde{M}(x)$ может не совпасть с функцией $f(x)$ в ее точках разрыва.

624. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и монотонна на $[a, b]$ и если она принимает в качестве своих значений все числа отрезка $[\inf\limits_{x\,[a,\,b]} f(x);\ \sup\limits_{x\,[a,\,b]} f(x)]$, то она непрерывна на $[a, b]$.

625. Пусть на множестве $E \subset [a, b]$ задана ограниченная функция $f(x)$, удовлетворяющая условию: $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ для всех $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $x_1 < x_2$. Можно ли ее доопределить на всем отрезке $[a, b]$ так, чтобы она была монотонной на всем отрезке?

626. Пусть на множестве $E \subset [a, b]$ задана неограниченная функция $f(x)$ такая, что $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ для всех $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, $x_1 < x_2$. Можно ли ее продолжить на весь отрезок $[a, b]$ так, чтобы она стала монотонной на всем отрезке?

627. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, то для существования обратной функции необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ была строго монотонна.

628. Может ли сумма двух монотонных функций быть немонотонной функцией? Может ли произведение двух возрастающих функций быть немонотонно? Привести соответствующие примеры.

629. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, b]$ и имеет в каждой точке интервала $]a, b[$ предел слева и предел справа. Доказать, что множество точек разрыва такой функции не более чем счетно.

630. Построить пример строго монотонной функции, определенной на всей числовой прямой и разрывной во всех рациональных точках, и только в них.

631. Доказать, что для любого счетного множества точек на оси Ox можно построить строго возрастающую функцию, у которой множеством всех точек разрыва является это счетное множество.

632. Построим на отрезке $[0, 1]$ канторово совершенное множество D. Зададим функцию $\tau(x)$ следующим образом: на смежном интервале первого ранга* $\tau(x) = \frac{1}{2}$; на смежных интервалах второго ранга $\tau(x) = \frac{1}{2^2}$ на левом и $\tau(x) = \frac{3}{2^2}$ на правом интервале; вообще на смежных интервалах k-го ранга полагаем: $\tau(x) = \frac{1}{2^k}$ на самом первом интервале k-го ранга (если двигаться слева направо), $\tau(x) = \frac{3}{2^k}$ на втором интервале k-го ранга, $\tau(x) = \frac{5}{2^k}$ на третьем

---

* Интервалами k-го ранга мы называем те смежные интервалы канторова множества, длина которых равна $\frac{1}{3^k}$.

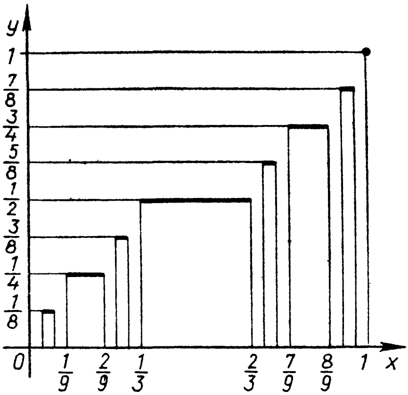


Рис. 4

и т. д.; на последнем интервале k-го ранга $\tau(x) = \frac{2^k-1}{2^k}$. Таким образом, функция $\tau(x)$ определена на всем дополнении $\complement D$ к множеству D относительно отрезка $[0, 1]$. Она монотонна на $\complement D$, и множество ее значений всюду плотно на $[0, 1]$ (значениями функции $\tau(x)$ на $\complement D$ являются все двоично рациональные числа между 0 и 1).

Теперь доопределим функцию на D, положив для $x \in D$ $\tau(x) = \sup\limits_{\zeta<x,\ \zeta\in \complement D} \tau(\zeta)$ (т. е. в качестве значения в точке $x \in D$ принимаем верхнюю грань значений этой функции на той части множества $\complement D$, которая лежит слева от x). Полагая, кроме того, $\tau(0) = 0$, мы определим функцию $\tau(x)$ на всем отрезке $[0, 1]$. Эта функция называется *функцией Кантора* (схематический график этой функции см. на рисунке 4). Доказать, что $\tau(x)$ — возрастающая функция, непрерывная во всех точках отрезка $[0, 1]$.

633. Может ли монотонная непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, отличная от постоянной, иметь производную, равную нулю почти всюду в области определения (говорят, что какое-либо свойство имеет место *почти всюду на множестве* E, если оно выполняется во всех точках этого множества, кроме точек некоторого подмножества меры нуль).

634. Доказать, что если функция $f(x)$ монотонна, ограничена и непрерывна на конечном интервале $]a, b[$, то она равномерно непрерывна на этом интервале.

635. Справедливо ли предыдущее утверждение, если заменить конечный интервал $]a, b[$ бесконечным промежутком $]-\infty, +\infty[$?

636. Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, определенная на $[0, 1]$, и пусть ε — произвольное положительное число. Доказать, что существует непрерывная функция $\varphi(x)$, определенная на $[0, 1]$ и такая, что: а) $\varphi(0) = f(0)$, $\varphi(1) = f(1)$; б) $\varphi'(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$; в) $|\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [0, 1]$.

637. Пусть E — нигде не плотное замкнутое множество на отрезке $[a, b]$. Построить на этом отрезке строго возрастающую функцию $f(x)$, имеющую непрерывную производную всюду на отрезке $[a, b]$, причем $f'(x) = 0$ во всех точках множества E.

638. Имеет ли решение предыдущая задача, если отказаться от требования, что E является нигде не плотным множеством?

639. Доказать, что если $f(x)$ — монотонная функция, удовлетворяющая равенству $f(x) + f(y) = f(x + y)$ для всех x и y, причем $f(1) = a$, то $f(x) = ax$.

640. Вариация функции $f(x)$ на $[a, b]$ равна A. Чему равна вариация функции $kf(x)+m$ на $[a, b]$?

641. Чему равна вариация функции

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x=0,\\ 1-x & \text{при } 0<x<1,\\ 5 & \text{при } x=1\end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$?

642. Чему равна вариация функции

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & \text{для } x<1,\\ 10 & \text{для } x=1,\\ x^2 & \text{для } x>1\end{cases}$$

на отрезке $[0, 2]$?

643. Если изменить значение функции из предыдущей задачи в точке разрыва (при $x=1$), то вариация функции изменится. Как изменить значение этой функции в точке $x=1$, чтобы вариация стала наименьшей?

644. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x=0,\\ x^2\cos\dfrac{\pi}{x} & \text{при } x\neq 0\end{cases}$$

имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, 1]$.

645. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x=0,\\ x\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0\end{cases}$$

имеет неограниченную вариацию на отрезке $\left[0, \dfrac{2}{\pi}\right]$.

646. Функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, 1]$; доказать, что функция $F(x)=f(ax+b)$, где $a>0$, имеет ограниченную вариацию на отрезке $\left[-\dfrac{b}{a}, \dfrac{1-b}{a}\right]$, причем $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}f=\overset{\frac{1-b}{a}}{\underset{-\frac{b}{a}}{\mathrm{V}}}F$.

647. Обобщить результат предыдущей задачи, доказав, что если $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[0, 1]$, а $\varphi(x)$ — строго возрастающая непрерывная функция на $[\alpha, \beta]$ такая, что $\varphi(\alpha)=0$, $\varphi(\beta)=1$, то функция $F(x)=f(\varphi(x))$ имеет ограниченную вариацию на $[\alpha, \beta]$, причем $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}f=\overset{\beta}{\underset{\alpha}{\mathrm{V}}}F$.

648. Доказать, что функция, имеющая во всех точках отрезка $[a, b]$ производную, ограниченную на $[a, b]$, является функцией ограниченной вариации.

649. Доказать, что характеристическая функция $\chi_E(x)$ множества $E\subset[a, b]$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ тогда и только тогда, когда множество E имеет лишь конечное число граничных точек.

650. Обязательно ли сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных функций ограниченной вариации является функцией ограниченной вариации?

651. Доказать, что если функция удовлетворяет условию Липшица на отрезке $[a, b]$, то она имеет на этом отрезке ограниченную вариацию.

652. Доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\alpha > 1$ на отрезке $[a, b]$, то $f(x)$ постоянна на этом отрезке.

653. Доказать, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α на отрезке $[a, b]$, то она удовлетворяет на этом отрезке также условию Гёльдера порядка β, где β — любое неотрицательное число, меньшее чем α.

654. Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α на $[a, b]$; доказать, что тогда $F(x) = K f(mx + n)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α на отрезке $\left[\frac{a-n}{m}, \frac{b-n}{m}\right]$ (если $m > 0$) или на отрезке $\left[\frac{b-n}{m}, \frac{a-n}{m}\right]$ (если $m < 0$).

655. Построить на каком-нибудь отрезке $[a, b]$ непрерывную функцию, которая имеет на этом отрезке ограниченную вариацию и не удовлетворяет на нем условию Гёльдера ни при каком $\alpha > 0$.

656. Построить на каком-нибудь отрезке $[a, b]$ непрерывную функцию, которая имеет на этом отрезке неограниченную вариацию и удовлетворяет условию Гёльдера некоторого порядка α, где α — заданное число, $0 < \alpha < 1$.

657. Построить на каком-нибудь отрезке $[a, b]$ непрерывную функцию, которая имеет на этом отрезке неограниченную вариацию и не удовлетворяет на нем условию Гёльдера ни при каком $\alpha > 0$.

658. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$. Доказать, что их сумма и произведение также имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$, причем

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f+g) \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} g,$$

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(fg) \leqslant \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} g + \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \cdot \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f.$$

659. Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, причем $f(x) \geqslant c > 0$ всюду на $[a, b]$. Доказать, что $\frac{1}{f(x)}$ также имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$.

660. Пусть $f(x)$ определена на $[a, b]$ и $a < c < b$. Доказать равенство $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f$.

661. Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$, $F(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ — вариация функции f на $[a, x]$.

Доказать, что для непрерывности $f(x)$ в точке $x_0 \in [a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы функция $F(x)$ была непрерывна в этой точке.

662. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a, +\infty[$ и имеет ограниченную вариацию на любом отрезке $[a, t]$ $(t > a)$. Доказать, что если $\lim\limits_{t\to+\infty} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ существует, то и $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ существует. Показать на примере, что из существования конечного предела $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ еще не следует существования $\lim\limits_{t\to+\infty} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$.

663. Доказать, что если $f(x)$ — разрывная функция ограниченной вариации на $[a, b]$, то $F(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ также разрывна на $[a, b]$, причем разрывы обеих функций находятся в одних и тех же точках. Доказать, что в каждой точке разрыва x_0 имеют место равенства:

$$|f(x_0 + 0) - f(x_0)| = F(x_0 + 0) - F(x_0),$$
$$|f(x_0) - f(x_0 - 0)| = F(x_0) - F(x_0 - 0).$$

664. Доказать, что множество $V(a, b)$ функций ограниченной вариации на $[a, b]$ является метрическим пространством, если за расстояние между $f \in V(a; b)$ и $g \in V(a, b)$ принять число

$$\rho(f, g) = |f(a) - g(a)| + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} (f - g).$$

Доказать, что это пространство полно.

665. Объединим в один класс все функции ограниченной вариации на $[a, b]$, отличающиеся друг от друга на постоянное слагаемое. Доказать, что множество этих классов является метрическим пространством $\widetilde{V}(a, b)$, если за расстояние между двумя классами $\widetilde{f}$ и $\widetilde{g}$ принять число

$$\rho_1(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} (f - g),$$

где f — какая-либо функция из класса $\widetilde{f}$, а g — какая-либо функция из класса $\widetilde{g}$.

Доказать полноту пространства $\widetilde{V}(a, b)$.

666. Представить функцию ограниченной вариации $\cos^2 x$ на отрезке $[0, \pi]$ в виде разности двух возрастающих функций.

667. Представить функцию ограниченной вариации $\sin x$ на $[0, 2\pi]$ в виде разности двух возрастающих функций.

668. Представить функцию ограниченной вариации на $[0, 2]$

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{при } x \in [0, 1[, \\ 0 & \text{при } x = 1, \\ 1 & \text{при } x \in]1, 2] \end{cases}$$

в виде разности двух монотонных функций.

669. Чему равна вариация функции

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{при } x \in [0, 1[, \\ 5 & \text{при } x = 1, \\ x+3 & \text{при } x \in]1, 2] \end{cases}$$

на отрезке [0, 2]? Проверить, что $\overset{2}{\underset{0}{V}} f = \overset{1}{\underset{0}{V}} f + \overset{2}{\underset{1}{V}} f$. Представить $f(x)$ в виде разности двух возрастающих функций.

670. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то ее абсолютная величина $|f(x)|$ также имеет ограниченную вариацию на этом отрезке.

671. Справедливо ли утверждение: «Если $|f(x)|$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то и $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на этом отрезке»?

672. Пусть $f(x)$ — непрерывная на $[a, b]$ функция. Справедливо ли утверждение: «Если $|f(x)|$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, то и $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на этом отрезке»?

673. Доказать теорему: «Для того чтобы функция $f(x)$ имела ограниченную вариацию на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая возрастающая функция $\varphi(x)$, что для любого $x \in [a, b]$ и для любого $h > 0$ (такого, что $x + h \in [a, b]$) имеет место $|f(x+h) - f(x)| \leqslant \varphi(x+h) - \varphi(x)$».

674. Доказать, что кривая

$$y = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

спрямляема на [0, 1].

675. Доказать, что кривая

$$y = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

не спрямляема на [0, 1].

676. Доказать, что функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, задающие кривую Пеано (см. задачу 594), не могут иметь ограниченной вариации.

677. Рассмотрим жорданову кривую:

$$x = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} & \text{при } t \neq 0, \\ 0 & \text{при } t = 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} t \sin \frac{1}{t} & \text{при } t \neq 0, \\ 0 & \text{при } t = 0 \end{cases} \ (t \in [0, 1]).$$

Так как обе функции, задающие эти параметрические уравнения, не имеют ограниченной вариации на отрезке [0, 1] (см. задачу 645), то, согласно теореме 6 введения к настоящей главе, эта кривая не спрямляема. С другой стороны, кривая, определяемая этими уравнениями, является отрезком прямой $y = x$ от точки (a, a) до точки (b, b), где $a = \min\limits_{t \in]0, 1]} \left(t \sin \frac{1}{t}\right)$, $b = \max\limits_{t \in]0, 1]} \left(t \sin \frac{1}{t}\right)$; но конечный отрезок прямой всегда имеет конечную длину. Чем объяснить кажущееся противоречие.

678. Доказать, что если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют всюду на $[0, 1]$ производную, причем $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ ограничены на $[0, 1]$, то кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ спрямляема.

Глава XII.

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА И ЛЕБЕГА

Измеримые функции. Числовая функция $f(x)$, определенная на множестве E, где E — подмножество евклидова пространства R^n (в частном случае — подмножество числовой прямой), называется *измеримой*, если измеримы множество E и все множества $E(f(x) > a)$ для любых a, $-\infty < a < +\infty$.

Здесь, как и всюду дальше, $E(f(x) > a)$ (или $E(f > a)$) — множество всех тех точек x из E, в которых имеет место неравенство $f(x) > a$. Аналогичный смысл имеют обозначения: $E(f(x) \geqslant a)$, $E(f(x) < a)$, $E(f(x) \leqslant a)$, $E(f(x) = a)$, $E(a < f(x) < b)$ и т. д. (или $E(f \geqslant a)$, $E(f < a)$ и т. д.).

Для измеримости функции $f(x)$, заданной на измеримом множестве E, необходимо и достаточно, чтобы были измеримы все $E(f(x) \geqslant a)$, или чтобы были измеримы все $E(f(x) < a)$, или чтобы были измеримы все $E(f(x) \leqslant a)$.

Свойства измеримых функций.

1. Если две функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ измеримы, то измеримы также их сумма, произведение, частное (последнее — при условии $f_2(x) \neq 0$ на E).

2. Если дана последовательность измеримых на множестве E функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, сходящаяся всюду на E к функции $F(x)$, то $F(x)$ измерима на E. Даже если соотношение $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = F(x)$ выполняется не всюду, а лишь почти всюду* на E, то и тогда $F(x)$ измерима на E.

3. Если две функции, определенные на E, отличаются друг от друга на множестве меры нуль, то они либо обе измеримы, либо обе неизмеримы.

Функции, отличающиеся друг от друга только на множестве меры нуль, называются *эквивалентными*.

4. Если $f(x)$ измерима на E и если измеримое множество A является подмножеством множества E, то $f(x)$ измерима на A.

Примеры измеримых функций.

1. Функция, принимающая постоянное значение C во всех точках измеримого множества E, измерима на E.

2. Всякая функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$, измерима на нем.

3. Функция, непрерывная почти всюду на отрезке $[a, b]$, измерима на нем.

4. Функция, являющаяся пределом сходящейся последовательности непрерывных на $[a, b]$ функций, измерима на $[a, b]$.

Не всякая функция измерима. Так, например, если E — неизмеримое множество на прямой, то функция, имеющая значение 1 на E и 0 вне E, неизмерима.

Сходимость по мере. Пусть E — измеримое множество конечной меры. Последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых на E функций называется *сходящейся по мере к измеримой функции* $\varphi(x)$ на E, если для всякого числа $\delta > 0$ имеет место:

$$\lim_{n\to+\infty} mE(|\varphi(x) - f_n(x)| > \delta) = 0.$$

Теорема 1 (Лебега). *Если последовательность функций* $\{f_n(x)\}$,

---

* Напомним, что термин «некоторое свойство выполняется почти всюду на E» означает, что это свойство выполняется во всех точках множества E, кроме точек некоторого подмножества меры нуль.

измеримых на множестве E конечной меры, сходится почти всюду на E к функции $\varphi(x)$, то она сходится к этой функции и по мере на E.

Таким образом, сходимость по мере является обобщением сходимости почти всюду. Вместе с тем эти понятия не совпадают: существуют последовательности измеримых функций, сходящиеся по мере на множестве E конечной меры, но не сходящиеся в обычном смысле ни в одной точке множества E (см. задачу 699).

Теорема 2. *Из всякой сходящейся по мере на E последовательности $\{f_n(x)\}$ можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на E (где E — множество конечной меры).*

Теорема 3 (Егорова). *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к $\varphi(x)$ на множестве E конечной меры, то для любого $\delta > 0$ существует такое измеримое подмножество $E_1 \subset E$, что*

а) $mE_1 > mE - \delta$;

б) *последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на E_1 сходится к $\varphi(x)$.*

Интеграл Римана. Пусть функция $f(x)$ задана на $[a, b]$. Разобьем $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ и назовем шагом λ этого разбиения максимальную длину интервалов $]x_{i-1}, x_i[$ $\lambda = \max\limits_i (x_i - x_{i-1})$.

Далее построим суммы

$$s = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \text{ и } S = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1},\ m_i = \inf_{x \in [x_{i-1},\, x_i]} f(x),\ M_i = \sup_{x \in [x_{i-1},\, x_i]} f(x).$$

Эти суммы называются соответственно *нижней* и *верхней суммами Дарбу*. Если существует общий предел верхних и нижних сумм Дарбу при стремлении шага разбиения λ к нулю, то этот предел называется *интегралом Римана* от $f(x)$ на отрезке $[a, b]$:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Если для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существуют пределы нижних и верхних сумм Дарбу и эти пределы равны друг другу, то говорят, что $f(x)$ *интегрируема на $[a, b]$ по Риману.*

Теорема. *Для того чтобы функция $f(x)$ была интегрируема по Риману на $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы она была ограничена на $[a, b]$ и мера множества ее точек разрыва равнялась нулю* (т. е. чтобы функция $f(x)$ была почти всюду на $[a, b]$ непрерывна).

Свойства интеграла Римана.

1. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ интегрируемы по Риману на $[a, b]$, то для любых чисел α, β имеет место

$$\int_a^b (\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x))\,dx = \alpha\int_a^b \varphi(x)\,dx + \beta\int_a^b \psi(x)\,dx.$$

2. Если $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и на $[b, c]$, то она интегрируема и на $[a, c]$, причем

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx.$$

3. Если $m \leqslant f(x) \leqslant M$ всюду на $[a, b]$ и $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$, то

$$m \cdot (b - a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M \cdot (b - a).$$

Интеграл Лебега от ограниченной функции. Пусть $f(x)$ — ограниченная измеримая функция, определенная на измеримом множестве* E евклидова пространства и принимающая значения строго между A и B: $A < f(x) < B$ для всех $x \in E$. Разобьем отрезок $[A, B]$ оси Oy точками $A = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_n = B$ и построим следующие суммы:

$$s = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m e_i, \quad S = \sum_{i=1}^{n} y_i m e_i,$$

где $e_i = E\,(y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i)$. Эти суммы называются соответственно *нижней* и *верхней суммами Лебега.* Наибольшая длина отрезков $[y_{i-1}, y_i]$ при данном разбиении называется *шагом разбиения* и обозначается λ.

Если существует общий предел верхних и нижних сумм Лебега при стремлении шага разбиения λ к нулю, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу на множестве* E и этот общий предел сумм Лебега называется *интегралом Лебега* от $f(x)$ *по множеству* E:

$$(L)\int_E f(x)\,dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_{i-1} m e_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} y_i m e_i$$

(когда ясно, что речь идет об интеграле Лебега, то знак (L) перед обозначением интеграла часто опускают).

Множество E называется при этом *областью интегрирования.* Если, в частности, областью интегрирования является отрезок $[a, b]$, то интеграл Лебега по этому множеству записывают в виде

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx, \text{ или } \int_a^b f(x)\,dx.$$

Теорема. *Всякая ограниченная измеримая на E функция интегрируема по Лебегу на этом множестве* (предполагается, что E — множество конечной меры).

Свойства интеграла Лебега.

1. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$, то она интегрируема и по Лебегу на этом отрезке, причем эти интегралы равны друг другу:

$$(R)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Таким образом, интеграл Лебега на отрезке является обобщением интеграла Римана.

2. Если $k \leqslant f(x) \leqslant K$ всюду на E, то

$$k \cdot mE \leqslant (L)\int_E f(x)\,dx \leqslant K \cdot mE.$$

3. Если множество E конечной меры разбито на конечную или счетную совокупность попарно не пересекающихся измеримых множеств E_k, то для любой измеримой ограниченной на E функции $f(x)$ имеет место

$$\int_E f(x)\,dx = \sum_k \int_{E_k} f(x)\,dx$$

(это свойство интеграла Лебега называется «*полной аддитивностью*»).

4. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ ограничены и измеримы на E, то для любых чисел α и β имеет место

$$\int_E (\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x))\,dx = \alpha\int_E \varphi(x)\,dx + \beta\int_E \psi(x)\,dx.$$

5. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ ограничены и измеримы на E, причем почти всюду

---

* Здесь и всюду в дальнейшем мы считаем, что E — измеримое множество конечной меры, если специально не оговорено противное.

$f(x) \leqslant \varphi(x)$, то

$$\int\limits_E f(x)\,dx \leqslant \int\limits_E \varphi(x)\,dx.$$

В частности, если $f(x) = \varphi(x)$ почти всюду на E, то

$$\int\limits_E f(x)\,dx = \int\limits_E \varphi(x)\,dx.$$

6. Если $f(x)$ — неотрицательная измеримая ограниченная функция на E, причем $\int\limits_E f(x)\,dx = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на E.

7. Если $f(x)$ измерима и ограничена на E, то

$$\left|\int\limits_E f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_E |f(x)|\,dx.$$

8. Если дана последовательность измеримых ограниченных на E функций $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_k(x), \ldots$, сходящаяся почти всюду на E к функции $F(x)$, и если существует такое число A, что $|f_k(x)| \leqslant A$ для всех k, то

$$\lim_{k\to+\infty} \int\limits_E f_k(x)\,dx = \int\limits_E F(x)\,dx.$$

Интеграл Лебега от неограниченной функции. Пусть $f(x)$ — неограниченная измеримая функция постоянного знака, например всюду на E ($f(x) \geqslant 0$). Построим вспомогательную функцию $[f(x)]_t$ (*«срезка»* функции $f(x)$ числом t), которая определяется следующим образом:

$$[f(x)]_t = \begin{cases} f(x) & \text{при } 0 \leqslant f(x) \leqslant t, \\ t & \text{при } \quad\;\; f(x) > t. \end{cases}$$

Эта функция измерима и ограничена (числами 0 и t).

Интеграл Лебега от неограниченной неотрицательной функции $f(x)$ по множеству E определяется равенством

$$(L)\int\limits_E f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty} (L)\int\limits_E [f(x)]_t\,dx.$$

Указанный здесь предел всегда существует; однако он не обязательно равен конечному числу (он может равняться и $+\infty$). Если $(L)\int\limits_E f(x)\,dx$ конечен, то функция называется *суммируемой* на E (или *интегрируемой по Лебегу* на E); если этот интеграл бесконечен, то функция называется *несуммируемой* (или *неинтегрируемой по Лебегу*).

Интеграл от знакопеременной измеримой неограниченной функции $f(x)$ на E определяется равенством

$$(L)\int\limits_E f(x)\,dx = (L)\int\limits_E f_+(x)\,dx - (L)\int\limits_E f_-(x)\,dx,$$

где

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } f(x) < 0, \end{cases}$$

$$f_-(x) = \begin{cases} |f(x)| & \text{при } f(x) < 0, \\ 0 & \text{при } f(x) \geqslant 0, \end{cases}$$

т. е. $f_+(x) = \dfrac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$, $f_-(x) = \dfrac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$.

Функция $f(x)$ называется *суммируемой*, если $f_+(x)$ и $f_-(x)$ обе суммируемы. Тогда интеграл от $f(x)$ равен конечному числу, определенному указанной выше формулой.

Функция $f(x)$ *несуммируема*, если хотя бы одна из неотрицательных функций $f_+(x)$ или $f_-(x)$ несуммируема.

Свойства интеграла Лебега от неограниченных функций.

1. Если $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ суммируемы на E, то для любых чисел α, β функция $\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$ также суммируема, причем

$$(L)\int_E (\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x))\,dx=\alpha\cdot(L)\int_E \varphi(x)\,dx+\beta\cdot(L)\int_E \psi(x)\,dx.$$

2. Если $f(x)$ суммируема на E и множество E разбито на конечную или счетную совокупность попарно не пересекающихся измеримых множеств E_k, то $f(x)$ суммируема на всех E_k и

$$(L)\int_E f(x)\,dx=\sum_k (L)\int_{E_k} f(x)\,dx$$

(«полная аддитивность» интеграла Лебега). Для неотрицательной на E измеримой функции $f(x)$) это равенство сохраняется и в том случае, когда $f(x)$ несуммируема на E (в обеих частях равенства тогда стоит $+\infty$).

3. Если $f(x)$ и $\varphi(x)$ суммируемы на E и $f(x)\leqslant\varphi(x)$ почти всюду на E, то

$$(L)\int_E f(x)\,dx\leqslant(L)\int_E \varphi(x)\,dx.$$

В частности, если $f(x)=\varphi(x)$ почти всюду на E, то их интегралы равны.

4. Если $f(x)$ — измеримая на E функция, то из суммируемости $f(x)$ вытекает суммируемость $|f(x)|$, а из суммируемости $|f(x)|$ вытекает суммируемость $f(x)$; при этом имеет место неравенство

$$\left|(L)\int_E f(x)\,dx\right|\leqslant(L)\int_E |f(x)|\,dx.$$

5. Если $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на E, причем почти всюду на E имеет место неравенство $|f(x)|\leqslant|g(x)|$, и если $g(x)$ суммируема на E, то и $f(x)$ суммируема на E.

6. Если $f(x)\geqslant 0$ на E и $(L)\int_E f(x)\,dx=0$, то $f(x)=0$ почти всюду на E.

7. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ измеримых на E функций сходится по мере на E к функции $F(x)$ и если существует такая суммируемая на E неотрицательная функция $G(x)$, что $|f_n(x)|\leqslant G(x)$ для всех n и почти всех $x\in E$, то функции $f_n(x)$ и $F(x)$ суммируемы на E, причем

$$\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\,dx=\int_E F(x)\,dx.$$

Задачи

679. Доказать, что если функция $(f(x))^3$ измерима на E, то и $f(x)$ измерима на E.

680. Показать, что из того, что $(f(x))^2$ измерима на E, еще не следует, что $f(x)$ измерима на E.

681. Доказать, что если $f(x)$ измерима на E, то и $|f(x)|$ измерима на E. Показать на примере, что обратное утверждение неверно.

682. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на E, то функции

$$m(x)=\min\{f(x),g(x)\},\quad M(x)=\max\{f(x),g(x)\}$$

также измеримы на E.

683. Доказать, что если функция $f(x)$ измерима на всяком отрезке $[\alpha,\beta]$, где $a<\alpha<\beta<b$, то она измерима и на всем отрезке $[a,b]$.

684. Измерима ли функция $f(x)$, равная x^2 во всех точках пересечения канторова множества и некоторого неизмеримого множества E и равная x^3 во всех остальных точках отрезка $[0, 1]$?

685. Доказать, что если $f(x)$ имеет производную во всех точках отрезка $[a, b]$, то эта производная $f'(x)$ является измеримой функцией на отрезке $[a, b]$.

686. Доказать, что если E — измеримое множество, то характеристическая функция $\chi_E(x)$ измерима. Если же E — неизмеримое множество, то $\chi_E(x)$ — неизмеримая функция.

687. Построить измеримую функцию, определенную на всей прямой, разрывную во всех ее точках и обладающую тем свойством, что, как бы ни изменять значения этой функции на любом множестве меры нуль, она остается разрывной во всех точках прямой.

688. Доказать, что если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то функция $[f(x)]_a^b$ также измерима на E (определение функции $[f(x)]_a^b$, где $a < b$, см. в условии задачи 562).

689. Пусть $\chi(x)$ — характеристическая функция множества рациональных чисел. Доказать, что ее произведение на любую функцию есть функция измеримая.

690. Доказать, что всякая функция ограниченной вариации на $[a, b]$ есть измеримая функция на $[a, b]$.

691. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве E и пусть E_1 — произвольное открытое или замкнутое множество на числовой прямой. Доказать, что прообразом множества E_1 во всех этих случаях является измеримое подмножество множества E.

692. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве E; пусть E_1 — произвольное измеримое множество на числовой прямой. Обязано ли множество $f^{-1}(E_1)$ быть измеримым?

693. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве E; пусть E_0 — измеримое подмножество множества E. Обязано ли множество $f(E_0)$ быть измеримым? Если нет—привести соответствующий пример.

694. Пусть $\varphi(t)$ — измеримая на множестве E функция, $E_1 = \varphi(E)$ — ее множество значений. Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на E_1. Доказать, что суперпозиция этих функций $f(\varphi(t))$ является измеримой функцией на E.

695. Пусть $\varphi(t)$ — функция, непрерывная на отрезке $E = [\alpha, \beta]$, и $E_1 = \varphi(E)$ — ее множество значений. Пусть $f(x)$ — функция, измеримая на E_1. Обязана ли быть измеримой суперпозиция этих функций, т. е. функция $f(\varphi(t))$?

696. Пусть E — измеримое множество положительной меры, $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — две последовательности измеримых функций, сходящиеся по мере на множестве E соответственно к функциям $f(x)$ и $g(x)$. Доказать, что последовательности $\{f_n + g_n\}$, $\{f_n g_n\}$, $\left\{\frac{f_n}{g_n}\right\}$ сходятся по мере соответственно к функциям $f + g$, fg, $\frac{f}{g}$ (последнее — в случае, если $g(x) \neq 0$ почти всюду на E).

697. Пусть $\{f_n(x)\}$ сходится по мере на E к функции $f(x)$. Доказать, что если для всех $x \in E$ и всех n имеет место неравенство $f_n(x) \leqslant a$, то $f(x) \leqslant a$ почти всюду на E.

698. Понятие сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ по мере к $\varphi(x)$ на множестве E можно обобщить (не меняя определения) на тот случай, когда E измеримо, но имеет бесконечную меру.

Верны ли для случая $mE = +\infty$ теоремы 1 и 2 (с. 81—82) о сходимости по мере из введения к настоящей главе?

699. Привести пример последовательности измеримых функций, сходящейся по мере на отрезке $[0, 1]$, но не сходящейся в обычном смысле ни в одной точке этого отрезка.

700. Выделить из последовательности, построенной в предыдущей задаче, подпоследовательность, сходящуюся почти всюду на $[0, 1]$.

701. Пусть E — измеримое множество конечной или бесконечной меры, $\delta > 0$ — заданное число. Можно ли из всякой последовательности $\{f_n\}$ измеримых на E функций, сходящейся почти всюду на E, извлечь подпоследовательность, сходящуюся равномерно на некотором подмножестве $E_1 \subset E$ таком, что $m(E \setminus E_1) < \delta$?

702. Доказать, что любая функция ограниченной вариации на $[a, b]$ интегрируема по Риману на $[a, b]$.

703. Может ли быть интегрируемой по Риману на $[a, b]$ функция, разрывная во всех точках некоторого непустого открытого множества $G \subset [a, b]$?

704. Показать на примере, что из интегрируемости по Риману функции $f(x)$ на всяком отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a < \alpha < \beta < b$, еще не следует, что она интегрируема по Риману на $[a, b]$.

705. Доказать, что если $f(x)$ интегрируема по Риману на всяком отрезке $[\alpha, \beta]$ таком, что $a < \alpha < \beta < b$, и если она ограничена на $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на всем отрезке $[a, b]$.

706. Пусть последовательность функций $\{f_n(x)\}$, каждая из которых интегрируема по Риману на $[a, b]$, сходится всюду на $[a, b]$ к $\varphi(x)$; пусть, кроме того, существует такое $A > 0$, что $|f_n(x)| \leqslant A$ для всех $x \in [a, b]$ и всех n. Следует ли из этого, что функция $\varphi(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$?

707. Доказать, что предел равномерно сходящейся последовательности функций, интегрируемых по Риману на отрезке $[a, b]$, является функцией, интегрируемой по Риману на $[a, b]$. Доказать, что интеграл от функции, являющейся пределом, равен пределу интегралов от функций данной последовательности.

708. Верно ли утверждение: «Если E — множество меры нуль на $[a, b]$, то $\chi_E(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$»?

709. Верно ли утверждение: «Если E — нигде не плотное множество на $[a, b]$, то $\chi_E(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$»?

710. Верно ли утверждение: «Если E — нигде не плотное множество меры нуль на $[a, b]$, то $\chi_E(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$»?

711. Пусть E — замкнутое множество меры нуль, расположенное на отрезке $[a, b]$. Интегрируема ли функция $\chi_E(x)$ на $[a, b]$ по Риману?

712. Верно ли утверждение: «Если E — множество на $[a, b]$, замыкание которого имеет меру нуль, то $\chi_E(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$»?

713. Интегрируемы ли по Риману на отрезке $[0, 1]$ функции примеров 486, 488, 489, 495, 502?

714. Доказать, что все функции, рассмотренные в этих примерах, интегрируемы по Лебегу на отрезке $[0, 1]$. Вычислить их интегралы на этом отрезке.

715. Функция $f(x)$ равна x^2 в точках канторова множества и равна $\frac{1}{2^n}$ на тех смежных интервалах, длина которых равна $\frac{1}{3^n}$. Вычислить $(L)\int\limits_0^1 f(x)dx$.

716. Интегрируема ли по Риману функция из предыдущей задачи? Если да, то чему равен ее интеграл Римана?

717. Интегрируема ли по Риману функция

$$f(x) = \begin{cases} x^3 \text{ в иррациональных точках,} \\ 1 \text{ в рациональных точках} \end{cases}$$

на отрезке $[0, 1]$? Интегрируема ли она по Лебегу? Чему равен ее интеграл на отрезке $[0, 1]$?

718. Доказать, что если E — измеримое множество на $[a, b]$, то его характеристическая функция $\chi_E(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве $[a, b]$, причем ее интеграл равен мере множества E:

$$(L)\int\limits_a^b \chi_E(x)\,dx = mE.$$

719. На отрезке $[0, 1]$ построено нигде не плотное совершенное множество E меры $\frac{1}{2}$; смежные интервалы этого множества перенумерованы в порядке убывания их длин $]\alpha_1, \beta_1[$, $]\alpha_2, \beta_2[$, ..., $]\alpha_n, \beta_n[$, ... Затем на $[0, 1]$ задана функция $f(x)$, определенная следующим образом:

$f(x) = 0$ на E,

$f(x) = 1$ в серединах интервалов $]\alpha_n, \beta_n[$,

$f(x)$ линейна на отрезках $\left[\alpha_n, \frac{\alpha_n+\beta_n}{2}\right]$ и $\left[\frac{\alpha_n+\beta_n}{2}, \beta_n\right]$.

Интегрируема ли эта функция по Риману? Интегрируема ли она по Лебегу? Чему равен ее интеграл Лебега на отрезке $[0, 1]$?

720. Пусть $f(x)$ — неотрицательная ограниченная измеримая на E функция и мера множества тех точек из E, где $f(x) \geqslant c$, равна a. Доказать, что $(L)\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant ac$.

721. Чему равен интеграл Лебега на множестве $[0, 1]$ от функции

$f(x)$, равной x^2 во всех точках пересечения канторова множества и некоторого (даже и неизмеримого) множества E и равной x^3 в остальных точках отрезка $[0, 1]$?

722. Вычислить интеграл Лебега от функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$, если $f(x) = 10$ в точках канторова множества, а на смежных интервалах графиком функции служат верхние полуокружности, опирающиеся на эти интервалы, как на диаметры.

723. Вычислить $(L)\int\limits_0^1 f(x)dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ для } x \text{ иррациональных, больших, чем } \frac{1}{3}, \\ x^3 \text{ для } x \text{ иррациональных, меньших, чем } \frac{1}{3}, \\ 0 \text{ в рациональных точках.} \end{cases}$$

724. Вычислить с точностью до 0,01 интеграл Лебега от функции $3x^2$ на множестве E, которое получится, если из отрезка $[0, 1]$ выбросить интервалы $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$, $\left]\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right[$, $\left]\frac{1}{6}, \frac{1}{5}\right[$, ..., $\left]\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right[$, ...

725. Вычислить $(L)\int\limits_0^1 f(x)dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x \text{ для } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\cap \mathbf{C}D, \\ \cos \pi x \text{ для } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \cap \mathbf{C}D, \\ x^2 \quad \text{ для } x \in D, \end{cases}$$

где D — канторово множество, а $\mathbf{C}D$ — его дополнение до всего отрезка $[0, 1]$.

726. Обозначим через $\beta_k(x)$ функцию, значение которой в каждой точке $x \in [0, 1]$ равно k-му знаку в разложении числа x в бесконечную двоичную дробь. Доказать, что

$$(L)\int\limits_0^1 \beta_i(x)\beta_j(x)\,dx = \frac{1}{4} \text{ при } i \neq j, \quad (L)\int\limits_0^1 (\beta_i(x))^2\,dx = \frac{1}{2}.$$

727. Обозначим через $\varphi_k(x)$ функцию, определенную на отрезке $[0, 1]$ следующим образом: если на k-м месте в двоичном разложении точки x в бесконечную двоичную дробь стоит 1, то $\varphi_k(x) = 1$, а если на k-м месте стоит 0, то $\varphi_k(x) = -1$. Доказать, что система функций $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, \ldots\}$ ортонормирована на отрезке $[0, 1]$, т. е. что

$$(L)\int\limits_0^1 \varphi_i(x)\varphi_j(x)\,dx = 0 \text{ при } i \neq j, \quad (L)\int\limits_0^1 (\varphi_i(x))^2\,dx = 1.$$

728. Доказать, что если $\varphi(x)$ имеет производную почти всюду на $[a, b]$ и если $\varphi'(x)$ ограничена на $[a, b]$, то $\varphi'(x)$ интегрируема по Лебегу на $[a, b]$.

729. Пусть $\{f_n(x)\}$ — последовательность измеримых на E ограниченных неотрицательных функций. Пусть $(L)\int\limits_E f_n(x)\,dx \to 0$ при $n \to +\infty$. Следует ли из этого, что $f_n(x) \to 0$ при $n \to +\infty$ всюду или хотя бы почти всюду на E?

730. Пусть на $[a, b]$ задана измеримая ограниченная функция $f(x)$. Доказать, что если $\int\limits_a^c f(x)\,dx = 0$ при любом $c \in [a, b]$, то $f(x)$ почти всюду на $[a, b]$ равна нулю.

731. Вычислить интеграл Лебега от функции $\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ на интервале $]1, 2[$.

732. Суммируемы ли функции $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ на интервале $]0, 1[$?

733. Вычислить $(L)\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{для } x \in D, \\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}} & \text{для } x \bar{\in} D, \end{cases}$$

где D — канторово множество.

734. Вычислить $(L)\int\limits_0^1 f(x)\,dx$, если

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{для } x \text{ иррациональных}, \\ x^3 & \text{для } x \text{ рациональных}. \end{cases}$$

735. Если ограниченная функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E, то будут ли интегрируемы по Лебегу на этом множестве функции $(f(x))^{10}$, $|f(x)|$, $\frac{1}{f(x)}$?

736. Доказать, что если $f(x) = 0$ в точках канторова множества D и $f(x) = n$ на его смежных интервалах ранга n, то $(L)\int\limits_0^1 f(x)dx = 3$.

737. Доказать: «Для того чтобы неотрицательная функция $f(x)$, измеримая на множестве E конечной меры, была суммируема на E, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} k \cdot mE_k$, где $E_k = E\,(k \leqslant f(x) < k+1)$».

738. Доказать: «Для того чтобы неотрицательная функция $f(x)$, измеримая на множестве E конечной меры, была суммируема на E, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_k m\widetilde{E}_k$, где $\widetilde{E}_k = E\,(f(x) \geqslant k)$».

739. Доказать: «Если функция $f(x)$ суммируема на отрезке $[0, a]$, то при любом положительном k функция $f(kx)$ суммируема на $\left[0, \frac{a}{k}\right]$ и $\int\limits_0^a f(x)\,dx = \frac{1}{k}\int\limits_0^{\frac{a}{k}} f(kx)\,dx$».

740. Доказать, что функция $\frac{1}{x}\cos\frac{k}{x}$ не суммируема на $]0, 1[$ ни при каком $k > 0$.

741. Пусть на $[a, b]$ расположены n измеримых множеств E_1, E_2, ..., E_n; пусть каждая точка отрезка $[a, b]$ принадлежит по меньшей мере q из этих множеств. Доказать, что хотя бы одно из множеств E_1, E_2, ..., E_n имеет меру, бо́льшую или равную $(b - a)\frac{q}{n}$.

742. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве E конечной меры. Доказать, что существует измеримая функция $\varphi(x)$, положительная при всех $x \in E$ и такая, что произведение $f(x)\varphi(x)$ суммируемо на E.

743. Построить на каком-нибудь множестве E конечной меры последовательность ограниченных измеримых функций $\{f_n(x)\}$, сходящуюся к несуммируемой на E функции $\varphi(x)$.

744. Построить на каком-нибудь множестве E конечной меры последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$, сходящуюся почти всюду на E к суммируемой функции $\varphi(x)$ так, что $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_E f_n(x)\,dx \neq \int\limits_E \varphi(x)\,dx$.

745. Построить на каком-нибудь множестве E конечной меры последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$ такую, что

а) $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду к некоторой суммируемой функции $\varphi(x)$;

б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_E f_n(x)\,dx = \int\limits_E \varphi(x)\,dx$;

в) не существует суммируемой неотрицательной функции $G(x)$ такой, что $|f_n(x)| \leqslant G(x)$ для всех n и почти всех $x \in E$.

746. Построить на каком-нибудь множестве E конечной меры последовательность суммируемых функций $\{f_n(x)\}$ такую, что

а) $\{f_n(x)\}$ сходится по мере к некоторой суммируемой функции $\varphi(x)$, но не сходится к ней в обычном смысле ни в одной точке множества E;

б) $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_E f_n(x) = \int\limits_E \varphi(x)\,dx$;

в) не существует суммируемой неотрицательной функции $G(x)$ такой, что $|f_n(x)| \leqslant G(x)$ для всех n и почти всех $x \in E$.

747. Пусть функция $f(x)$ непрерывна всюду на отрезке $[a, b]$, кроме точки a. Назовем эту функцию *C-интегрируемой* на $[a, b]$, если существует конечный предел интеграла

$$\int_t^b f(x)\,dx \tag{1}$$

при $t \to a+0$; если функция $f(x)$ C-интегрируема на $[a, b]$, то предел интеграла (1) называется *C-интегралом* (или *несобственным интегралом Коши*) от функции $f(x)$ и обозначается $(C)\int_a^b f(x)dx$.

$$(C)\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)\,dx.$$

Доказать, что если непрерывная функция на $]a, b]$ суммируема по Лебегу на $[a, b]$, то она и C-интегрируема на $[a, b]$, причем оба интеграла равны друг другу.

748. Показать на примере, что существуют функции, непрерывные всюду на $[a, b]$, кроме точки a, которые C-интегрируемы на $[a, b]$, но не суммируемы по Лебегу на этом отрезке.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К РЕШЕНИЮ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

Глава I. ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

5. Не вытекает. Из $A \setminus B = C$ вытекает лишь, что $A \subset B \cup C$.

6. Нет; из $A = B \cup C$ вытекает лишь, что $A \setminus B \subset C$ (рис. 5).

7. а) Равенство справедливо; б) не верно; справедливо включение $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$; в) не верно; справедливо включение $(A \setminus B) \cup C \supset (A \cup C) \setminus B$.

10. См. рис. 6. $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2)$ — область, заштрихованная квадратной штриховкой; $(A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$ — вся заштрихованная область. Здесь $(A_1 \cup A_2) \setminus (B_1 \cup B_2) \neq (A_1 \setminus B_1) \cup (A_2 \setminus B_2)$.

13. $A \Delta X = A$ означает, что $(A \setminus X) \cup (X \setminus A) = A$. Следовательно, $X \setminus A = \varnothing$, т. е. та часть X, которая не входит в A, пуста. С другой стороны, $A \setminus X = A$, т. е. $X \cap A = \varnothing$, так что та часть X, которая входит в A, также пуста. Итак, $X = \varnothing$.

15. Для случая б) см. рис. 7. Здесь $(A \cup B)\Delta F$ — множество, заштрихованное квадратной штриховкой, а $(A\Delta F) \cup (B\Delta F)$ — все заштрихованное множество, так что $(A \cup B)\Delta F \neq (A\Delta F) \cup (B\Delta F)$.

17. $\mathbf{C}(\mathbf{C}(X \cup Y) \cap (\mathbf{C}X \cup \mathbf{C}Y)) = \mathbf{C}(\mathbf{C}(X \cup Y)) \cup \mathbf{C}(\mathbf{C}X \cup \mathbf{C}Y) = (X \cup Y) \cup (\mathbf{CC}X \cap \mathbf{CC}Y) = (X \cup Y) \cup (X \cap Y) = X \cup Y$, так как $X \cup Y \supset X \cap Y$.

21. а) Пусть $(x, y) \in E \times (F \cup G)$; тогда $x \in E$, $y \in F \cup G$; следовательно, $y \in F$ или $y \in G$; значит, $(x, y) \in E \times F$ или

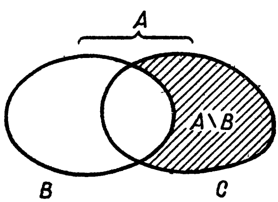


Рис. 5

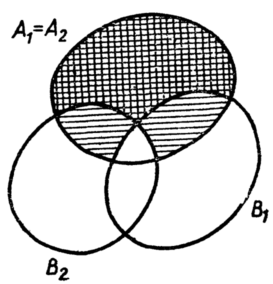


Рис. 6

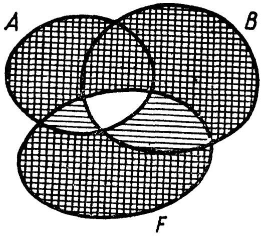


Рис. 7

$(x, y) \in E \times G$; но в таком случае

$$(x, y) \in (E \times F) \cup (E \times G),$$

т. е.

$$E \times (F \cup G) \subset (E \times F) \cup (E \times G). \quad (1)$$

Точно так же доказывается, что

$$(E \times F) \cup (E \times G) \subset E \times (F \cup G). \quad (2)$$

Сравнивая включения (1) и (2), получим равенство а).

Остальные равенства доказываются аналогично.

22. а) Справедливо для любых множеств A, B, C, D (доказательство, как в задаче 21; см. рис. 8).

б) Справедливо не для любых множеств A, B, C, D (см., например, рис. 9); однако всегда справедливо включение

$$(A \times B) \cup (C \times D) \subset (A \times C) \cup (B \times D),$$

которое доказывается так же, как в задаче 21.

25. При пустом C из $A \times C \subset B \times D$ не следует, что $A \subset B$.

Глава II.
ВЗАИМНО ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

27. Взаимно однозначное соответствие между множествами $\boldsymbol{N}$ и S можно установить с помощью функции $y = 2x$, где $x \in \boldsymbol{N}$, $y \in S$.

28. Расположим все четные числа (т. е. элементы множества T) в последовательность следующим образом:

$$0,\ 2,\ -2,\ 4,\ -4,\ 6,\ -6,\ \ldots,\ 2k,\ -2k,\ \ldots,$$

и затем каждому четному числу поставим в соответствие тот номер, который это число занимает в данной последовательности.

29. Запишем каждое число $r \in \boldsymbol{Q}^+$ в виде несократимой дроби и назовем *высотой* числа r сумму числителя и знаменателя; ясно, что

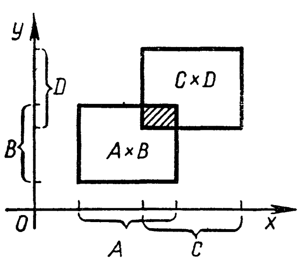


Рис. 8

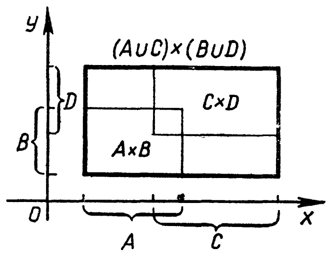


Рис. 9

имеется лишь конечное множество неотрицательных рациональных чисел данной высоты. Расположим теперь все неотрицательные рациональные числа в последовательность в порядке возрастания их высот: на первое место поместим число $0=\frac{0}{1}$ (это — число высоты 1), затем — единственное число высоты 2 $\left(\text{число } \frac{1}{1}\right)$, далее — числа высоты 3 $\left(\text{числа } \frac{1}{2} \text{ и } \frac{2}{1}\right)$ и т. д.; если какую-либо высоту имеют несколько различных рациональных чисел, мы их располагаем в порядке возрастания. Таким образом, все элементы множества $\boldsymbol{Q}^+$ расположатся в виде следующей последовательности:

$$0,\ 1,\ \frac{1}{2},\ 2,\ \frac{1}{3},\ 3,\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ 4,\ \frac{1}{5},\ 5,\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{4},\ \ldots$$

Поставим теперь в соответствие каждому рациональному числу r из $\boldsymbol{Q}^+$ тот номер n, который это число занимает в нашей последовательности; это соответствие является взаимно однозначным соответствием между множествами $\boldsymbol{Q}^+$ и $\boldsymbol{N}$.

30. Не существует. Всякая функция $f(x)$, представимая в виде частного от деления двух многочленов, имеет конечный или бесконечный предел при $x\to+\infty$. Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=q$ (конечное число), то существует такое N, что для всех $k>N$ имеют место неравенства: $q-1<f(k)<q+1$. Но тогда тем рациональным числам, которые лежат вне интервала $]q-1,\ q+1[$, может соответствовать лишь конечное число номеров k (только те номера k, которые предшествуют числу N). Следовательно, не все рациональные числа получатся в виде значений $f(k)$.

Если $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$, то рассуждения аналогичны (в этом случае рациональным числам, принадлежащим фиксированному интервалу $]-A,\ A[$, может соответствовать лишь конечное число номеров k).

31. Линейное преобразование $x=(b-a)t+a$.

32. Функция $x=\operatorname{ctg}\pi t$.

33. Функция $x=a+\frac{b-a}{\pi}\operatorname{arcctg} t$.

35. Выделим на интервале $]0,\ 1[$ какую-либо последовательность попарно различных точек, например: $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=\frac{1}{3}$, $x_3=\frac{1}{4}$, ..., $x_n=\frac{1}{n+1}$, ... Установим следующее соответствие: точке 0 отрезка ставим в соответствие точку x_1 интервала; точке $1\in[0,\ 1]$ — точку $x_2\in\,]0,\ 1[$; точке $x_1=\frac{1}{2}\in[0,\ 1]$ — точку $x_3\in\,]0,\ 1[$; точке $x_2=\frac{1}{3}\in[0,\ 1]$ — точку $x_4\in\,]0,\ 1[$; и, вообще, точке $x_n\in[0,\ 1]$ — точку $x_{n+2}\in\,]0,\ 1[$ ... . Всем остальным точкам $x\in[0,\ 1]$ ставим в соответствие саму эту точку x. Полученное соответствие взаимно однозначно (рис. 10).

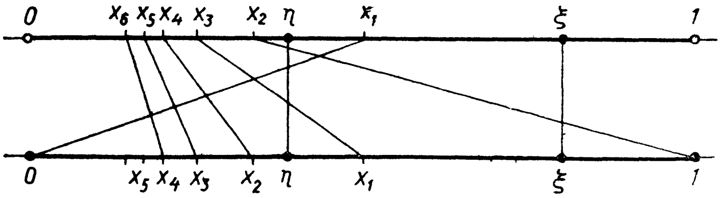


Рис. 10

36. Отобразить $[0,\ 1]$ на $]0,\ 1[$ (задача 35) и затем $]0,\ 1[$ на $]-\infty,\ +\infty[$ (задача 32).

37. Использовать метод, которым решена задача 35.

38. Отобразить $]a,\ b[$ на $[a,\ b[$ тем методом, каким решена задача 35, затем $[a,\ b[$ на $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ с помощью линейной функции; наконец, $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right[$ на $[0,\ +\infty[$ с помощью функции $y = \operatorname{tg} x$.

40. Нет, так как непрерывная функция, определенная на отрезке $[a,\ b]$, должна быть ограниченной.

41. Нет; если бы существовала непрерывная функция $x = \varphi(t)$, отображающая $[a,\ b]$ на $]c,\ d[$, то на $[a,\ b]$ не нашлось бы точки t_0 такой, что $\varphi(t_0) = d$ (тогда как $\sup\limits_{t \in [a,\ b]} \varphi(t) = d$). Это противоречило бы теореме о том, что непрерывная на отрезке функция достигает на нем своей верхней грани.

42. Нет, так как для непрерывной функции $\varphi(t)$, определенной на $[a,\ b]$, верна теорема о промежуточных значениях (в частности, пусть $\varphi(t_1) = 1$, $\varphi(t_2) = 3$, где $t_1 \in [a,\ b]$, $t_2 \in [a,\ b]$; тогда должна была бы найтись точка $t_0 \in [a,\ b]$ такая, что $\varphi(t_0) = 2$).

43. Отображаем окружность на промежуток $[0,\ 2\pi[$, ставя в соответствие каждой точке окружности численное значение угла, составленного радиус-вектором этой точки с некоторым фиксированным радиусом. Затем промежуток $[0,\ 2\pi[$ линейным преобразованием отображаем на промежуток $[0,\ 1[$; наконец, последний промежуток отображаем на $[0,\ 1]$ методом, рассмотренным в задаче 35.

44. Сначала отображаем открытый круг $x^2 + y^2 < 1$ на круг с выколотым центром $0 < x^2 + y^2 < 1$. Для этого выделяем в открытом круге какую-либо последовательность попарно различных точек M_0, M_1, M_2, ..., M_k, ..., где M_0 — центр круга, и устанавливаем следующее соответствие: каждой точке M_k из круга $x^2 + y^2 < 1$ ставим в соответствие точку M_{k+1} из круга с выколотым центром. Остальные точки обоих кругов (т. е. точки, отличные от всех M_k) ставим в соответствие по принципу идентичности (т. е. каждой точке $N(x,\ y)$ из первого круга ставим в соответствие точку N' с теми же координатами из второго круга) (рис. 11).

Затем открытый круг с выколотой точкой отображаем на дополнение к замкнутому кругу с помощью инверсии: через произ-

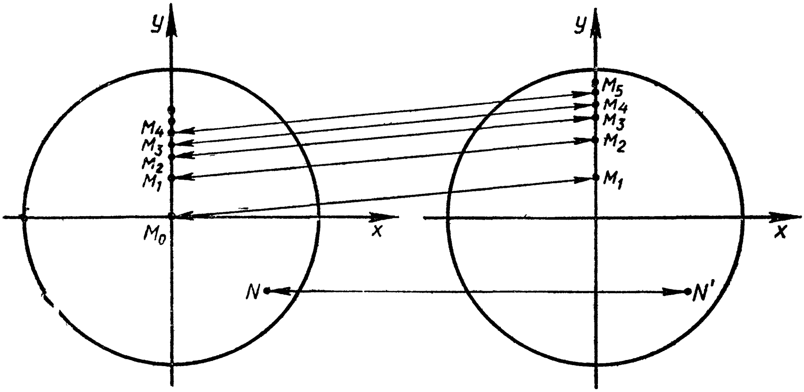


Рис. 11

вольную точку M из круга и центр O проводим луч OM и на его продолжении находим точку M' такую, что $OM \cdot OM' = 1$. Тогда точке M из круга с выколотым центром ставится в соответствие точка M' из дополнения к замкнутому кругу (рис. 12). Это соответствие взаимно однозначно.

45. Использовать метод решения задачи 35 для каждого отрезка, являющегося радиусом круга.

46. См. задачу 44.

47. Отобразить замкнутый круг на открытый (см. задачу 45), затем открытый — на дополнение к замкнутому (задача 44).

48. См. решение задачи 43 или задач 49 и 50.

49. Отображение производится с помощью так называемой «*стереографической проекции*». Обозначим через P_0 выколотую точку на сфере, а через M_0 диаметрально противоположную ей точку на сфере. Построим плоскость, касающуюся сферы в точке M_0. Далее проведем прямую через точку P_0 и произвольную точку M сферы. Точку N, в которой эта прямая пересечет плоскость, ставим в соответствие точке M. Полученное соответствие взаимно однозначно (рис. 13).

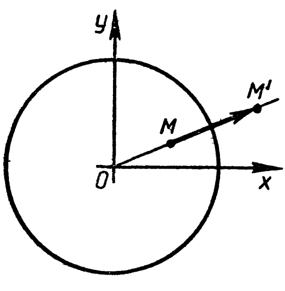


Рис. 12

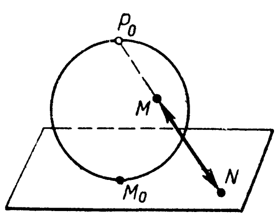


Рис. 13

50. Отобразим сначала всю сферу на сферу с выколотой точкой (это можно сделать тем же способом, каким круг отображался на круг с выколотым центром, см. решение задачи 44). Затем сферу с выколотой точкой отображаем на плоскость с помощью стереографической проекции.

51. Помещаем центр круга в точку O и устанавливаем взаимно однозначное соответствие между точками отрезка OM (где M — произвольная точка границы звездной области) и точками того радиуса OB, который лежит на луче OM; соответствие устанавливаем так, чтобы точка O соответствовала самой себе.

52. Выделим в множестве A иррациональных чисел какую-либо последовательность попарно различных чисел, например $\sqrt{2}$, $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, ..., $n\sqrt{2}$, ..., рассмотрим множество $\boldsymbol{R}$ всех действительных чисел и множество $\boldsymbol{Q}$ всех рациональных чисел; рациональные числа занумеруем: r_1, r_2, r_3, ..., r_n, ...; множество всех чисел вида $n\sqrt{2}$ обозначим через L; множество всех иррациональных чисел, не представимых в виде $n\sqrt{2}$ ($n > 0$, целое), обозначим через C. Тогда

$$A = C \cup L, \quad \boldsymbol{R} = C \cup (L \cup \boldsymbol{Q}).$$

Элементы множества L ставим во взаимно однозначное соответствие элементам множества $L \cup \boldsymbol{Q}$, например, следующим способом:

$$\begin{array}{lcccccccc}
L: & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 3\sqrt{2} & 4\sqrt{2}\ldots & (2k-1)\sqrt{2} & 2k\sqrt{2}\ldots \\
L \cup \boldsymbol{Q}: & r_1 & \sqrt{2} & r_2 & 2\sqrt{2}\ldots & r_k & k\sqrt{2}\ldots
\end{array}$$

Точки множества C ставим в соответствие сами себе. В итоге получится взаимное однозначное соответствие между A и $\boldsymbol{R}$.

53. а) Каждой точке (ζ, η) прямоугольника $]a, b[\times]c, d[$ ставим в соответствие точку (x, y) квадрата $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ следующим образом:

$$x = -\frac{\pi}{2} + \pi\frac{\zeta - a}{b - a}, \quad y = -\frac{\pi}{2} + \pi\frac{\eta - c}{d - c}.$$

б) Каждой точке (x, y) квадрата $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[\times \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ ставим в соответствие точку (X, Y) плоскости следующим образом:

$$X = \operatorname{tg} x, \; Y = \operatorname{tg} y.$$

в) См. а) и б).

54. Не все: не получится ни одной точки, разложение которой в бесконечную десятичную дробь содержит нули на всех четных местах, начиная с некоторого номера; например, не получится точка 0,35703070... Итак, это не будет взаимно однозначным соответствием между точками квадрата $]0, 1] \times]0, 1]$ и промежутка $]0, 1]$. Однако это соответствие является взаимно однозначным между точками квадрата и точками некоторого подмножества промежутка $]0, 1]$.

55. Перенумеруем все рациональные числа отрезка $[0, 1]$;

$$r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots \qquad (1)$$

Все точки квадрата с рациональными координатами расположим в следующую таблицу:

$$\begin{array}{llll} (r_1, r_1) & (r_1, r_2) & (r_1, r_3) & \ldots \\ (r_2, r_1) & (r_2, r_2) & (r_2, r_3) & \ldots \\ (r_3, r_1) & (r_3, r_2) & (r_3, r_3) & \ldots \\ (r_4, r_1) & (r_4, r_2) & (r_4, r_3) & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{array}$$

Выпишем все точки из этой таблицы в одну последовательность в следующем порядке; сначала (r_1, r_1), затем точки, у которых сумма индексов абсциссы и ординаты равна 3; точки, у которых сумма индексов равна 4, и т. д., т. е.

$$(r_1, r_1), (r_1, r_2), (r_2, r_1), (r_1, r_3), (r_2, r_2), (r_3, r_1), (r_1, r_4), (r_2, r_3), \ldots \qquad (2)$$

Теперь устанавливаем взаимно однозначное соответствие между членами последовательности (1) и членами последовательности (2) обычным способом: n-му члену последовательности (1) ставим в соответствие n-й член последовательности (2).

56. Указание. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством всех квадратов $]m, m+1] \times]n, n+1]$ и множеством всех промежутков $]p, p+1]$ (где m, n, p — всевозможные целые числа). Затем установите взаимно однозначное соответствие между множеством точек квадрата $]m, m+1] \times]n, n+1]$ с рациональными координатами и множеством рациональных точек соответствующего промежутка.

57. Указание. Всякий многочлен с рациональными коэффициентами можно представить в виде частного от деления многочлена с целыми коэффициентами на натуральное число.

58. Установим сначала взаимно однозначное соответствие между совокупностью всех конечных подмножеств натурального ряда и множеством всех двоично рациональных точек промежутка $[0; 1[$: каждому конечному множеству $\{n_1, n_2, \ldots, n_k\}$ (где $n_1 < n_2 < \ldots \ldots < n_k$) ставим в соответствие двоичную дробь, у которой на местах с номерами $n_1, n_2, \ldots, n_k$ после запятой стоят единицы, а на остальных местах — нули; например, множеству $\{2, 3, 5\}$ соответствует двоичная дробь 0,01101, т. е. двоично рациональная точка

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} = \frac{13}{32}.$$

После того как такое соответствие установлено, остается только перенумеровать все двоично рациональные точки промежутка $[0, 1[$. Это можно сделать, например, следующим образом:

$$0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{3}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \frac{3}{2^3}, \frac{5}{2^3}, \frac{7}{2^3}, \frac{1}{2^4}, \frac{3}{2^4}, \frac{5}{2^4}, \frac{7}{2^4}, \frac{9}{2^4}, \frac{11}{2^4}, \frac{13}{2^4}, \ldots$$

Тем самым множество двоично рациональных чисел промежутка $[0; 1[$ поставлено во взаимно однозначное соответствие с множеством всех натуральных чисел.

59. Каждой последовательности натуральных чисел

$$n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$$

ставим в соответствие возрастающую последовательность натуральных чисел

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots < m_k < \ldots,$$

где

$$m_1 = n_1, \quad m_2 = n_1 + n_2, \quad m_3 = n_1 + n_2 + n_3, \quad \ldots, \quad m_k = n_1 + \ldots + n_k, \ldots$$

Это соответствие взаимно однозначно.

60. Последовательности $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$ ставим в соответствие бесконечную двоичную дробь, у которой после запятой на местах с номерами $n_1, n_2, n_3, \ldots, n_k, \ldots$ стоят единицы, а на остальных местах — нули (ср. с решением задачи 58).

Глава III.

МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВ

61. Множество счетно.

62. Множество счетно.

64. Множества счетны (см. для случая $p = 2$ решение задачи 58).

65. Множество счетно.

66. Обозначим через E_n $(n \geqslant 1)$ множество тех элементов из E, которые превосходят $\frac{1}{n}$, а через B — множество всех отличных от нуля элементов из E. Ясно, что $\bigcup\limits_n E_n = B$. Если бы B было несчетным, то хотя бы одно из E_n, например E_{n_0}, тоже было бы несчетным. Но тогда конечные суммы из E_{n_0} будут сколь угодно велики (так как сумма p элементов из E_{n_0} превосходит $\frac{p}{n_0}$, а $\frac{p}{n_0}$ стремится к бесконечности при $p \to +\infty$). Итак, B не может быть несчетным. Значит, оно конечно или счетно.

67. Заметим, что каждая точка разрыва x_0 монотонно возрастающей функции $f(x)$ является точкой разрыва первого рода. Действительно, так как функция $f(x)$ монотонна и ограничена на $[a, x_0[$, то она имеет предел при $x \to x_0 - 0$; аналогично этому проверяется, что функция $f(x)$ имеет предел и при $x \to x_0 + 0$.

Назовем скачком функции в точке разрыва x_0 разность $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ этих пределов. В каждой точке разрыва монотонно возрастающей функции скачок положителен. Легко проверить, что множество точек разрыва, в которых скачок больше α (где α — какое-либо положительное число), конечно, а число этих точек не больше чем $\frac{f(b) - f(a)}{\alpha}$. Обозначим через E_k множество точек разрыва со скачком, большим чем $\frac{1}{k}$. Множество E всех точек разрыва равно объединению всех E_k:

$$E = E_1 \cup E_2 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_k \cup \ldots$$

Так как все E_k конечны, то E не более чем счетно.

Для монотонно убывающей на $[a, b]$ функции доказательство аналогично.

68. Обозначим через A_i множество точек разрыва функции на отрезке $[-i, i]$. Множество A всех точек разрыва (на всей числовой прямой) равно объединению всех A_i:

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_i \cup \ldots;$$

каждое A_i не более чем счетно (см. задачу 67). Объединение счетного числа таких слагаемых также является не более чем счетным множеством. Итак, A не более чем счетно.

69. Положим $E_n = E \cap \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[$. Ясно, что $\bigcup\limits_n E_n = E$, так как

$$\bigcup_n E_n = \bigcup_n \left\{E \cap \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[\right\} = E \cap \left\{\bigcup_n \left]\frac{1}{n}, +\infty\right[\right\} = \\ = E \cap \left]0, +\infty\right[= E.$$

Если бы все E_n были не более чем счетны, то и их объединение, т. е. множество E, было бы не более чем счетно; но E по условию несчетно. Следовательно, по крайней мере одно из E_n несчетно.

70. Неверно. П р и м е р. $E = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$. Само множество E бесконечно; однако для любого $\tau > 0$ множество $E \cap \left]\tau, +\infty\right[$ конечно.

71. Можно. В качестве a можно взять любое положительное число, отличное от всех чисел $|x_i - x_j|$ (где $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_i, \ldots\}$ — данное множество E). Различных чисел $|x_i - x_j|$ счетное множество. Поэтому всегда найдется число $a > 0$, отличное от всех $|x_i - x_j|$.

72. Можно. См. решение задачи 71.

73. Разобьем прямую на счетное множество отрезков точками 0, ± 1, ± 2, ± 3, ... Каждый отрезок содержит не более одной точки данного множества; следовательно, между точками множества E и некоторой совокупностью построенных отрезков существует взаимно однозначное соответствие. Значит, множество E не более чем счетно.

74. У к а з а н и е. Разбейте плоскость прямыми $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ на счетное множество квадратов со стороной $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Далее см. решение задачи 73.

75. Обозначим замкнутый круг радиуса r буквой A, открытый круг с тем же центром и того же радиуса буквой B, а замкнутый круг радиуса $\frac{r}{2}$ с тем же центром буквой C. Тогда $A \supset B \supset C$. Множества A и C эквиваленты (взаимно однозначное соответствие между ними устанавливается с помощью преобразования подобия. Из эквивалентности множеств A и C вытекает (на основании теоремы Кантора — Бернштейна), что A эквивалентно B.

76. Если A — вся плоскость, B — замкнутый квадрат, C — включенный в него открытый квадрат, то $A \supset B \supset C$. Но A эквивалентно C (см. задачу 53, *в*). Следовательно, A эквивалентно B.

78. См. задачу 58.

79. Мощность континуума (см. задачу 60).

80. Мощность континуума (см. задачи 79 и 59).

81. Перестановка натурального ряда есть последовательность натуральных чисел, элементы которой попарно различны и в совокупности исчерпывают весь натуральный ряд. Поэтому множество всех перестановок натурального ряда, как часть множества всех последовательностей натуральных чисел, имеет мощность, не превосходящую мощность континуума (см. задачу 80).

Докажем теперь, что мощность множества всех перестановок натурального ряда не меньше мощности континуума. Назовем перестановку множества *полной*, если при ней не остается «неподвижным» ни один элемент множества. Как легко видеть, каждое множество натуральных чисел, содержащее более одного элемента, допускает полную перестановку. Поставим в соответствие каждому множеству $M \subset \boldsymbol{N} \setminus \{1, 2\}$ (где $\boldsymbol{N}$ — множество всех натуральных чисел) перестановку натурального ряда, оставляющую все элементы из M на месте и подвергающую $\boldsymbol{N} \setminus M$ какой-либо полной перестановке (множество $\boldsymbol{N} \setminus M$ допускает полную перестановку, так как оно состоит более чем из одного элемента). Тогда разным M будут соответствовать разные перестановки, поскольку у этих перестановок различны множества их неподвижных элементов. Поэтому мощность множества всех перестановок натурального ряда не меньше мощности множества всех подмножеств счетного множества $\boldsymbol{N} \setminus \{1, 2\}$, т. е. не меньше мощности континуума.

82. Мощность континуума. Действительно, множество всех конечных последовательностей действительных чисел есть объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, где A_n — множество всех последовательностей длины n. Так как $A_n = \underbrace{B \times \ldots \times B}_{n \text{ раз}}$, где B — множество всех действительных чисел, и так как $B \sim \,]0, 1]$, то A_n эквивалентно множеству $\underbrace{]0, 1] \times \ldots \times]0, 1]}_{n \text{ раз}}$. Но последнее множество эквивалентно $]0, 1]$ (это получается по индукции, см. задачу 77). Значит, A_n имеет мощность континуума и потому эквивалентно промежутку $]n-1, n]$. А тогда $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ (т. е. множество всех конечных последовательностей действительных чисел) эквивалентно множеству $]0, 1] \cup]1, 2] \cup \ldots$ $\ldots = \,]0, +\infty[$ и, следовательно, имеет мощность континуума.

83. Обозначим через E_k множество всех тех стационарных последовательностей натуральных чисел, у которых члены, начиная с некоторого номера, равны k. Множество E_k счетно. Действительно, каждая последовательность из E_k, отличная от $(k, k, \ldots)$, представима в виде $(a_1, a_2, \ldots, a_m, k, k, \ldots)$, где $a_m \neq k$; но такой последовательности можно поставить в соответствие конечную последовательность из натуральных чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$; множество же таких конечных последовательностей, как легко видеть, счетно. Теперь остается заметить, что $E = \bigcup\limits_k E_k$.

84. См. решение задачи 83 (использовать задачу 82).

85, 86. Мощность континуума.

87. Мощность континуума. Указание. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством всех рациональных чисел и множеством всех натуральных чисел. Тем самым установится взаимно однозначное соответствие между множеством всех последовательностей натуральных чисел. Далее см. задачу 80.

88. Мощность континуума.

89. Мощность континуума (каждому отрезку $[a, b]$ соответствует точка с координатами a, b на полуплоскости $y > x$; это соответствие взаимно однозначно, а множество точек полуплоскости $y > x$ имеет мощность континуума).

90. Мощность этого множества конечна или счетна.

91. Мощность континуума. Указание. Каждому кругу $(x - a)^2 + (y - b)^2 \leqslant R^2$ поставьте в соответствие точку трехмерного пространства с координатами a, b, R и затем найдите мощность полученного множества точек пространства.

92. Может; например, множество всех окружностей, имеющих общий центр.

93. Любое множество попарно не пересекающихся букв Т будет не более чем счетным. Докажем это. Поставим в соответствие каждой букве Т из данного множества тройку рациональных точек M, N, P на плоскости так, чтобы отрезок MN пересекал ножку буквы Т, а отрезки MP и NP пересекали боковые отростки этой буквы (рис. 14). Тогда одной и той же тройке рациональных точек M, N, P может соответствовать не более одной буквы Т (легко доказать, что если бы этой тройке соответствовали две различные буквы Т, то они бы пересекались). Итак, между заданным множеством букв Т и некоторым множеством троек рациональных точек на плоскости установлено взаимно однозначное соответствие. Так как множество таких троек не более чем счетно, то и множество попарно не пересекающих букв Т не более чем счетно.

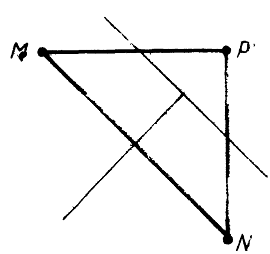


Рис. 14

94. Такое множество может иметь любую мощность, меньшую или равную мощности континуума. Для того чтобы в этом убедиться, построим произвольное множество E на прямой $y = -x$ и через каждую точку этого множества проведем бук-

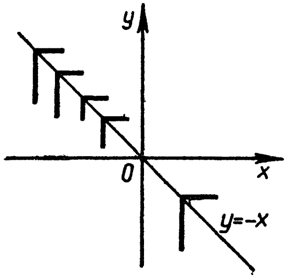


Рис. 15

ву Г, приняв эту точку за вершину угла буквы Г и направив отрезки буквы Г параллельно осям координат (рис. 15). Все построенные буквы будут попарно не пересекающимися, и множество этих букв имеет мощность, равную мощности множества E.

95. Мощность континуума. Действительно, пусть $x_1, x_2, x_3, \ldots$ — произвольная последовательность действительных чисел. В силу результата задачи 80, каждому числу x_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ соответствует последовательность натуральных чисел $c_{n_1}, c_{n_2}, c_{n_3}, \ldots$ Перенумеруем множество всех пар натуральных чисел (n, m): $(n_1, m_1), (n_2, m_2), (n_3, m_3), \ldots$ (это возможно, так как множество таких пар счетно и поставим в соответствие последовательности $x_1, x_2, x_3, \ldots$ последовательность натуральных чисел $c_{n_1m_1}, c_{n_2m_2}, c_{n_3m_3}, \ldots$ Как легко видеть, тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех последовательностей действительных чисел и множеством всех последовательностей натуральных чисел. Значит, в силу результата задачи 80, рассматриваемое множество имеет мощность континуума.

96. Мощность континуума.

97. Мощность этого множества не меньше мощности гиперконтинуума. Действительно, множество функций на $[a, b]$, принимающих всего два значения: 0 и 1, уже имеет мощность гиперконтинуума, так как множество этих функций находится во взаимно однозначном соответствии с множеством всех подмножеств отрезка $[a, b]$ (каждой такой функции ставим в соответствие множество всех тех точек отрезка $[a, b]$, в которых она равна нулю).

С другой стороны, каждой числовой функции f, определенной на $[a, b]$, соответствует ее график, т. е. множество точек плоскости вида $(x, f(x))$, где x пробегает отрезок $[a, b]$; при этом разным функциям соответствуют разные графики. Следовательно, мощность множества всех числовых функций на $[a, b]$ не больше мощности множества всех подмножеств плоскости, т. е. не больше мощности гиперконтинуума.

Применяя теорему Кантора — Бернштейна, получаем требуемый результат.

98. Рассмотрим множество $\boldsymbol{Q}$ всех рациональных точек отрезка $[a, b]$, занумерованное каким-либо образом: $\boldsymbol{Q} = \{r_1, r_2, \ldots\}$. Поставим в соответствие каждой непрерывной на $[a, b]$ функции f последовательность действительных чисел $f(r_1), f(r_2), \ldots$ Так как непрерывная функция на $[a, b]$ полностью определяется своими значениями в точках множества $\boldsymbol{Q}$, то тем самым устанавливается взаимно однозначное соответствие между множеством всех непрерывных функций на $[a, b]$ и частью множества всех последовательностей действительных чисел. Значит, в силу результата задачи 95, мощность множества всех непрерывных функций на $[a, b]$ не больше мощности континуума. С другой стороны, она и не меньше мощности континуума, так как все функции, постоянные на отрезке $[a, b]$, уже образуют множество мощности континуума. Остается применить теорему Кантора — Бернштейна.

99. Мощность гиперконтинуума.

100. Обозначим через A множество всех функций вида kx, где $k > 0$; через B множество всех строго возрастающих непрерывных функций; через C множество всех непрерывных функций. Тогда $A \subset B \subset C$. Но A и C имеют мощность континуума; следовательно, B также имеет мощность континуума.

101. Мощность континуума. У к а з а н и е. Учтите, что множество всех точек разрыва монотонной функции не более чем счетно и что у такой функции все точки разрыва являются точками разрыва первого рода (см. решение задачи 67), а также то, что множество всех счетных подмножеств отрезка $[a, b]$ имеет мощность континуума (задача 96).

102. Мощность континуума.

104. Мощность континуума. Для доказательства установим взаимно однозначное соответствие между множеством A всех бесконечных десятичных дробей, в десятичном разложении которых отсутствует 7, и множеством B всех бесконечных д е в я т и р и ч н ы х дробей на отрезке $[0, 1]$: каждой десятичной дроби из A ставим в соответствие дробь из B, которая получится из первой дроби, если в ней повсюду цифру 9 заменить цифрой 7. Это соответствие взаимно однозначно. Но $\overline{\overline{B}} = \overline{\overline{[0, 1]}} = c$; следовательно, $\overline{\overline{A}} = c$.

105. Мощность континуума. Взаимно однозначное соответствие между множеством A десятичных дробей указанного вида и множеством B всех десятичных дробей устанавливаем следующим образом: каждой бесконечной дроби из A ставим в соответствие бесконечную дробь, получающуюся из нее вычеркиванием цифры, стоящей на третьем месте, например: дроби $x = 0{,}257361\ldots \in A$ соответствует дробь $y = 0{,}25361\ldots \in B$; дроби $x = 0{,}237758\ldots \in A$ соответствует дробь $y = 0{,}23758\ldots \in B$. Множество B имеет мощность континуума; следовательно, A также имеет мощность континуума.

106. Мощность континуума.

107. Мощность континуума (см. задачу 104).

108. Да; любое множество $A \setminus C$, где C — какое-либо конечное подмножество множества A, эквивалентно B.

109. $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$; $B = (B \setminus A) \cup (A \cap B)$. При этом $A \setminus B$ и $A \cap B$ не имеют общих точек, так же, как и множества $B \setminus A$ и $A \cap B$. Так как $A \setminus B \sim B \setminus A$ по условию и $A \cap B \sim A \cap B$, то $A \sim B$.

110. В условии задачи имеют место легко проверяемые соотношения:

$$B = A \cup (B \setminus A), \tag{1}$$

$$B \cup C = (A \cup (C \setminus B)) \cup (B \setminus A). \tag{2}$$

Объединяемые множества в правой части равенства (1) не имеют общих точек; то же верно и для правой части равенства (2). Множества A и $A \cup (C \setminus B)$ эквивалентны; это следует из того, что $A \subset A \cup (C \setminus B) \subset A \cup C$ и что по условию $A \sim A \cup C$. Итак, $A \sim A \cup (C \setminus B)$. Из этого соотношения, а также из равенств (1) и (2) вытекает, что $B \sim B \cup C$.

111. Неверно. П р и м е р:
$A = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$, $B = \{2, 3, 4, \dots\}$, $C = A$, $D = \{3, 4, 5, \dots\}$. Здесь $A \sim C$, $B \sim D$, $A \supset B$, $C \supset D$, но $A \setminus B$ не эквивалентно $C \setminus D$ ($A \setminus B$ состоит из одного элемента, а $C \setminus D$ — из двух).

113, 114. Не верны.

116. Мощность континуума.

117. Обозначим через C круг радиуса n с центром в начале координат. Ясно, что

$$E = \bigcup_{n=1}^{+\infty} (C_n \cap E).$$

Если бы все $C_n \cap E$ были не более чем счетны, то таким же было бы и множество E; но, по условию, E несчетно; следовательно, хотя бы одно из множеств $C_n \cap E$ несчетно.

Глава IV.

МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

118. Нет, не является (не выполнена уже аксиома тождества: из равенства $\sin^2 (x - y) = 0$ не вытекает, что $x = y$; нетрудно видеть, что не выполнена и аксиома треугольника).

119. Выполнение первых двух аксиом метрики очевидно. Чтобы проверить третью, надо сначала доказать, что для любых $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ имеет место неравенство $\operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta \geqslant \operatorname{arctg} (\alpha + \beta)$ (для этого достаточно доказать, что при фиксированном $\beta > 0$ функция $f(\alpha) = \operatorname{arctg} \alpha + \operatorname{arctg} \beta - \operatorname{arctg} (\alpha + \beta)$ возрастает: так как $f(0) = 0$, то при $\alpha > 0$ $f(\alpha) > 0$). Метрики ρ_1 и ρ эквивалентны, так как из $\operatorname{arctg} |x_n - a| \to 0$ следует: $|x_n - a| \to 0$, и обратно.

Покажем, что числовая прямая с метрикой ρ_1 является полным метрическим пространством. Пусть $|x_n|$ — фундаментальная последовательность в этом пространстве. Для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем $\delta > 0$ так, чтобы при $|x| < \delta$ было $\operatorname{tg} |x| < \varepsilon$. Далее для этого δ выберем номер N такой, что при $n, m \geqslant N$ выполняется неравенство $\operatorname{arctg} |x_n - x_m| < \delta$ (это можно сделать, так как последовательность $\{x_n\}$ фундаментальна). Тогда

$$|x_n - x_m| = \operatorname{tg} (\operatorname{arctg} |x_n - x_m|) < \varepsilon$$

для любых n, $m \geqslant N$. Следовательно, $\{x_n\}$ фундаментальна и в метрике ρ, а потому имеет предел $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$. Число a будет пределом данной последовательности и в метрике ρ_1, поскольку метрики ρ_1 и ρ эквивалентны.

120. Да. Выполнение аксиомы треугольника следует из неравенства $\sqrt{\alpha+\beta} \leqslant \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, которое имеет место при любых $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ (проверяется это неравенство извлечением квадратного корня из обеих частей очевидного неравенства $\alpha + \beta \leqslant \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta}$.

121. Эквивалентность метрик ρ_1, ρ_2 и ρ_3 следует из неравенств

$$|a_2 - a_1| + |b_2 - b_1| \leqslant 2 \max \{|a_2 - a_1|, \ |b_2 - b_1|\} \leqslant$$
$$\leqslant 2\sqrt{|a_2 - a_1|^2 + |b_2 - b_1|^2} \leqslant 2\,(|a_2 - a_1| + |b_2 - b_1|), \quad (1)$$

справедливых для любых действительных чисел a_1, a_2, b_1, b_2.

Пространство (X, ρ_3) полно, так как это евклидово пространство $\boldsymbol{R}^2$. Если последовательность $\{x_n(a_n, b_n)\}$ фундаментальна в метрике ρ_1 (или ρ_2), то из неравенств (1) следует, что $\{x_n\}$ фундаментальна в метрике ρ_3, а значит, $\{x_n\}$ сходится в метрике ρ_3. Тогда $\{x_n\}$ будет сходиться к тому же пределу и в метрике ρ_1 (соответственно и в метрике ρ_2) в силу эквивалентности метрик.

122. Да.

123. (X, ρ_1) и (X, ρ_2) — метрические пространства. (X, ρ_3) не является метрическим пространством; здесь не выполнена аксиома тождества: прямые
l_1: $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$; l_2: $x \cos(\pi - \alpha) + y \sin(\pi - \alpha) - p = 0$ не совпадают, тогда как $\rho_3(l_1, l_2) = 0$; с другой стороны, прямые L_1: $x \cos \alpha + y \sin \alpha = 0$; L_2: $x \cos(\pi + \alpha) + y \sin(\pi + \alpha) = 0$ совпадают, хотя $\rho_3(L_1, L_2) = 2\,|\sin \alpha| \neq 0$ (при $0 < \alpha < \pi$).

Пространства (X, ρ_1) и (X, ρ_2) полны. Действительно, если $\{l_n(\alpha_n, p_n)\}$ — фундаментальная последовательность в (X, ρ_1) (или в (X, ρ_2)), то $\{\alpha_n\}$ и $\{p_n\}$ — фундаментальные числовые последовательности. Пусть α_0 и p_0 — их пределы и

$$l_0\colon\ x \cos \alpha_0 + y \sin \alpha_0 - p_0 = 0.$$

Тогда $\rho_1(l_n, l_0) \to 0$ (соответственно $\rho_2(l_n, l_0) \to 0$).

124. Это семейство не является метрическим пространством, если X состоит более чем из одной точки. Действительно, тогда найдутся $E \subset X$ и $F \subset X$ такие, что $E \cap F \neq \varnothing$ (и, значит, $\rho(E, F) = 0$), но $E \neq F$.

125. Пространство (X, ρ) полно, так как любая фундаментальная последовательность в нем стационарна (т. е. все члены ее, начиная с некоторого номера, совпадают).

126. Прежде всего докажем, что для любых последовательностей $x(a_1, a_2, \ldots)$ и $y(b_1, b_2, \ldots)$, у которых ряд из модулей членов сходится, расстояние $\rho(x, y)$ будет определено. Действительно, ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} |a_i - b_i|$ сходится, так как $|a_i - b_i| \leqslant |a_i| + |b_i|$, а ряды $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} |a_i|$ и $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} |b_i|$ сходятся по условию.

Для проверки выполнения аксиомы треугольника (выполнение первых двух аксиом очевидно) заметим, что для любого номера i

и любого числа c_i

$$|a_i - b_i| \leqslant |a_i - c_i| + |c_i - b_i|,$$

а потому

$$\sum_{i=1}^{+\infty} |a_i - b_i| \leqslant \sum_{i=1}^{+\infty} |a_i - c_i| + \sum_{i=1}^{+\infty} |c_i - b_i|,$$

т. е. $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$, где $z = z(c_1, c_2, \ldots)$.

127. Условие задачи не является достаточным для сходимости в пространстве l_1. Пример. Пусть $a = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$ и $x_n = \Big(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{n \text{ раз}}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^k} \ldots\Big)$. Тогда $|x_{ni} - a_i| = 0$ при $n > i$ и, следовательно, $a_i = \lim\limits_{n \to +\infty} x_{ni}$ для любого i. Однако $\rho(x_n, a) = \sum\limits_{i=1}^{+\infty} |x_{ni} - 0| = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1$ при любом n.

128. Пусть $\{x_n(x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{ni}, \ldots)\}$ — фундаментальная последовательность элементов пространства l_1. По определению, для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что при любых $n \geqslant N$, $m \geqslant N$ имеет место:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{nk} - x_{mk}| < \varepsilon. \tag{1}$$

Из неравенства $|x_{ni} - x_{mi}| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_{nk} - x_{mk}|$ следует, что числовая последовательность $\{x_{ni}\}_{n=1}^{+\infty}$ при любом i фундаментальна и, значит, сходится. Пусть $a_i = \lim\limits_{n \to \infty} x_{ni}$. Покажем, что $a(a_1, \ldots, a_n, \ldots) \in l_1$ и $x_n \to a$ в l_1.

Действительно, из неравенства (1) следует, что $\sum\limits_{k=1}^{K} |x_{nk} - x_{mk}| < \varepsilon$ для любого K и всех $n, m \geqslant N$. Переходя в этом неравенстве к пределу сначала при $m \to +\infty$, а затем при $K \to +\infty$. получим:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |x_{nk} - a_k| \leqslant \varepsilon \tag{2}$$

для всех $n \geqslant N$. Так как $|a_k| \leqslant |x_{nk} - a_k| + |x_{nk}|$, то из неравенства (2) и сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |x_{nk}|$ следует, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ сходится, т. е. $a \in l_1$. А тогда (2) показывает, что $x_n \to a$.

129. Выполнение первых двух аксиом в $M(E)$ очевидно. Проверим выполнение аксиомы треугольника. Для любых ограниченных функций φ, ψ и χ на E имеем:

$$\rho(\varphi, \psi) = \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \psi(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t \in E} (|\varphi(t) - \chi(t)| + |\chi(t) - \psi(t)|) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{t \in E} |\varphi(t) - \chi(t)| + \sup_{t \in E} |\chi(t) - \psi(t)| = \rho(\varphi, \chi) + \rho(\chi, \psi).$$

Докажем, что пространство $M(E)$ полно. Пусть $\{\varphi_n\}$ — фундаментальная последовательность функций из $M(E)$. Тогда в каждой точке $t \in E$ числовая последовательность $\{\varphi_n(t)\}$ фундаментальна и, следовательно, стремится к некоторому пределу $\varphi(t)$. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем номер N такой, что $\sup\limits_{t \in E} |\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon$ для всех n, $m > N$. Переходя к пределу при $m \to +\infty$ в неравенстве $|\varphi_n(t) - \varphi_m(t)| < \varepsilon$, получаем:

$$|\varphi_n(t) - \varphi(t)| \leqslant \varepsilon$$

для всех $n > N$ и $t \in E$. Отсюда легко следует, что $\varphi \in M(E)$; а так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то отсюда же следует, что φ_n сходится к φ по метрике пространства $M(E)$.

130. Пусть $\{\varphi_n\}$ — фундаментальная последовательность в $C[a, b]$. Тогда в каждой точке $x \in [a, b]$ существует $\lim\limits_{n \to +\infty} \varphi_n(x)$; обозначим его $\varphi(x)$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что $|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)| < \varepsilon$ для всех n, $m > N$ и всех $x \in [a, b]$. Беря здесь $m \to +\infty$, получим в пределе $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leqslant \varepsilon$ для всех $n > N$ и всех $x \in [a, b]$. Тем самым $\varphi_n \to \varphi$ равномерно на $[a, b]$. Так как все φ_n непрерывны, то отсюда заключаем, что φ также непрерывна. Следовательно, $\varphi \in C[a, b]$ и $\varphi_n \to \varphi$ по метрике пространства $C[a, b]$.

131. Если ряды $\sum\limits_i a_i^2$ и $\sum\limits_i b_i^2$ сходятся, то и ряд $\sum\limits_i (a_i - b_i)^2$ сходится; это следует из того, что

$$(a_i - b_i)^2 = a_i^2 - 2a_ib_i + b_i^2 \leqslant a_i^2 + (a_i^2 + b_i^2) + b_i^2 = 2(a_i^2 + b_i^2).$$

Выполнение первых двух аксиом метрического пространства очевидно. Третья аксиома проверяется так: для n-мерного евклидова пространства справедливо неравенство

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i - c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (c_i - b_i)^2}.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to +\infty$, получаем:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} (a_i - b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} (a_i - c_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} (c_i - b_i)^2}.$$

Доказательство полноты пространства l_2 аналогично доказательству полноты пространства l_1 (см. решение задачи 128); только на последнем шаге надо вместо неравенства $|a_k| \leqslant |x_{nk} - a_k| + |x_{nk}|$ воспользоваться неравенством

$$a_k^2 \leqslant 2((x_{nk} - a_k)^2 + x_{nk}^2).$$

132. Аксиома треугольника проверяется интегрированием (в границах от a до b) неравенства

$$|\varphi(x)-\psi(x)| \leqslant |\varphi(x)-\chi(x)| + |\chi(x)-\psi(x)|.$$

Метрики в пространствах $C[a, b]$ и $C'[a, b]$ не эквивалентны. Например, последовательность функций

$$\varphi_n(x) = (-1)^n x^n,$$

заданных на $[0, 1]$, сходится к $\varphi(x)=0$ в метрике пространства $C'[0, 1]$, но не сходится вообще в пространстве $C[0,1]$. Аналогично строится пример для произвольного отрезка $[a, b]$.

133. Да. Действительно, умножая в неравенстве Коши — Буняковского обе части на 2 и затем прибавляя к обеим частям $\int\limits_a^b (\varphi(x))^2\,dx + \int\limits_a^b (\psi(x))^2 dx$, получим после преобразований:

$$\sqrt{\int\limits_a^b (\varphi+\psi)^2\,dx} \leqslant \sqrt{\int\limits_a^b \varphi^2 dx} + \sqrt{\int\limits_a^b \psi^2 dx}.$$

Пусть теперь u, v и w — произвольные непрерывные функции на $[a, b]$; подставляя в последнее неравенство $\varphi = u - v$, $\psi = v - w$, получим:

$$\rho(u, w) \leqslant \rho(u, v) + \rho(v, w),$$

т. е. аксиома треугольника выполнена. Выполнение аксиомы симметрии очевидно. Легко проверяется и выполнение аксиомы тождества.

134. Выполнение первых двух аксиом метрики очевидно. Справедливость аксиомы треугольника вытекает из неравенств

$$\sup_{x\in[a,b]} (|f_1(x)-f_2(x)| + |g_1(x)-g_2(x)|) \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in[a,b]} (|f_1(x)-f_3(x)| + |f_3(x)-f_2(x)| + |g_1(x)-g_3(x)| +$$
$$+ |g_3(x)-g_2(x)|) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} (|f_1(x)-f_3(x)| + |g_1(x)-g_3(x)|) +$$
$$+ \sup_{x\in[a,b]} (|f_3(x)-f_2(x)| + |g_3(x)-g_2(x)|).$$

Далее, если $\{(f_n, g_n)\}$ — фундаментальная последовательность в $F[a, b]$, то $\{f_n\}$ и $\{g_n\}$ — фундаментальные последовательности в $C[a, b]$, а стало быть, сходятся в $C[a, b]$. Обозначим предельные функции соответственно f и g. Из неравенства

$$\rho((f_n, g_n), (f, g)) \leqslant \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| + \sup_{x\in[a,b]} |g_n(x)-g(x)|$$

следует, что $\rho((f_n, g_n), (f, g)) \to 0$ при $n\to\infty$. Таким образом, $F[a, b]$ — полное пространство.

135. Вот пример фундаментальной последовательности функций из $C'[a, b]$, не имеющей предсла в этом пространстве:

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}1 \text{ при } a\leqslant x\leqslant \frac{a+b}{2}-\frac{1}{n}\frac{b-a}{2},\\ 0 \text{ при } \frac{a+b}{2}\leqslant x\leqslant b,\\ \text{линейна при } \frac{a+b}{2}-\frac{1}{n}\frac{b-a}{2}\leqslant x\leqslant\frac{a+b}{2}.\end{cases}$$

136. См. решение задачи 135.

137. Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность функций из E и f — ее предел в $C[a, b]$. Так как $A\leqslant f_n(x)\leqslant B$ для всех n и всех $x\in[a, b]$, а $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ в каждой точке $x\in[a, b]$, то и $A\leqslant f(x)\leqslant B$ в каждой точке $x\in[a, b]$, т. е. $f\in E$. Следовательно, E полно.

138. См. решение задачи 137.

139. Не следует. Например, в промежутке $\tau=\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ обычная метрика $\rho_1(x, y)=|x-y|$ и метрика $\rho_2(x, y)=|\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y|$ эквивалентны, однако пространство (τ, ρ_1) не полно, тогда как (τ, ρ_2) изометрично числовой прямой и потому полно.

140. Достаточность неравенств для эквивалентности метрик ρ_1 и ρ_2 очевидна. То, что эти неравенства не являются необходимыми, показывает пример, построенный в решении задачи 139.

141. В соответствии с задачей 140 эквивалентность метрик ρ_1 и ρ_2 в пространстве C_1 следует из неравенств

$$\sup_{x\in[a,\ b]}(|f(x)-g(x)|+|f'(x)-g'(x)|)\leqslant\sup_{x\in[a,\ b]}|f(x)-g(x)|+$$
$$+\sup_{x\in[a,\ b]}|f'(x)-g'(x)|\leqslant 2\sup_{x\in[a,\ b]}(|f(x)-g(x)|+|f'(x)-g'(x)|).$$

Докажем полноту пространства (C_1, ρ_1). Пусть $\{f_n\}$ — фундаментальная последовательность в (C_1, ρ_1). Тогда $\{f_n\}$ и $\{f_n'\}$ — фундаментальные и, значит, сходящиеся последовательности в $C[a, b]$. Пусть f и g — их пределы, т. е. $\{f_n\}$ равномерно сходится к f на $[a, b]$, а $\{f_n'\}$ — к g. Как известно из курса анализа, в этом случае $g=f'$. Следовательно, $\{f_n\}$ сходится к f в (C_1, ρ_1) и тем самым (C_1, ρ_1) полно.

Полнота пространства (C_1, ρ_2) доказывается аналогично.

142. Докажем, что расстояние между классами A и B не зависит от выбора точек $a\in A$ и $b\in B$. Пусть $a'\in A$ и $b'\in B$. Тогда

$$\rho(a', b')\leqslant\rho(a', a)+\rho(a, b)+\rho(b, b')=\rho(a, b).$$

Аналогично $\rho(a, b)\leqslant\rho(a', b')$ и, значит, $\rho(a, b)=\rho(a', b')$. Далее, если $a\in A$ и $b\in B$, $A\neq B$, то по определению $\rho(a, b)\neq 0$. Следовательно, аксиома тождества выполняется. Выполнение остальных аксиом метрики очевидно.

143. Не будет (не выполняется первая аксиома метрики). Разбиение множества X на классы следует произвести так, чтобы функции из одного класса отличались друг от друга на постоянную.

144. Выполнение аксиом метрики проверяется так же, как в задаче 126. Полнота пространства (X, ρ) доказывается по тому же плану, что и полнота пространства l_1 в задаче 128.

145. Полнота пространства $A \cap B$ очевидна. Докажем полноту пространства $A \cup B$. Пусть $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность точек из $A \cup B$. Тогда либо A, либо B содержит бесконечную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ из $\{x_n\}$. Последовательность $\{x_{n_k}\}$ также фундаментальна (в пространстве A, для определенности). Так как A полно, то $\{x_{n_k}\}$ сходится. Пусть $\rho(x_{n_k}, x_0) \to 0$. Из фундаментальности последовательности $\{x_n\}$ легко следует тогда, что и $\rho(x_n, x_0) \to 0$, т. е. последовательность $\{x_n\}$ сходится.

Пространство $A \setminus B$ может оказаться неполным. Пример. A — числовая прямая, B — отрезок $[-1, 1]$ с обычной метрикой.

146. Если последовательность $\{(x_n, y_n)\}$ фундаментальна в $X \times Y$, то, как видно из формулы (1), $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ фундаментальны (и, значит, сходятся) соответственно в X и Y. Пусть $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$; тогда $(x_0, y_0) = \lim\limits_{n\to\infty} (x_n, y_n)$ в пространстве $X \times Y$ с данной метрикой.

147. См. решение задачи 146.

148. Это непосредственно следует из формул (1) или (2).

Глава V.

ЗАМКНУТЫЕ И ОТКРЫТЫЕ МНОЖЕСТВА

149. Если $x \in \overline{V(x_0, \varepsilon)}$, то $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $x_n \in V(x_0, \varepsilon)$. Из неравенств $\rho(x, x_0) \leqslant \rho(x, x_n) + \rho(x_n, x_0) < \rho(x, x_n) + \varepsilon$ получаем (переходя к пределу при $n \to \infty$), что $\rho(x, x_0) \leqslant \varepsilon$. Но это и означает, что $x \in B(x_0, \varepsilon)$. Таким образом, $\overline{V(x_0, \varepsilon)} \subset B(x_0, \varepsilon)$.

Примером пространства, в котором $\overline{V(x_0, \varepsilon)} \neq B(x_0, \varepsilon)$, может служить непустое множество X, наделенное метрикой задачи 125 (т. е. $\rho(x, y) = 1$ при $x \neq y$ и $\rho(x, y) = 0$ при $x = y$). Для любой точки $x_0 \in X$ имеем: $\overline{V(x_0, 1)} = V(x_0, 1) = \{x_0\}$, а $B(x_0, 1) = X$. Поэтому, если X содержит более одной точки, то $\overline{V(x_0, 1)} \neq B(x_0, 1)$.

С другой стороны, для таких пространств, как $\boldsymbol{R}^n$, l_1, l_2, $C[a, b]$, при всех x_0 и ε будет $B(x_0, \varepsilon) = \overline{V(x_0, \varepsilon)}$. Докажем это, например, для пространства $C[a, b]$. Пусть $f \in B(f_0, \varepsilon)$; положим $f_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)f + \frac{1}{n}f_0$. Тогда $f_n \in V(f_0, \varepsilon)$ и $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$, так что $f \in \overline{V(f_0, \varepsilon)}$.

150. Пусть $\{A_\zeta\}$ — произвольное (конечное или бесконечное) семейство множеств и U — его объединение. Так как $A_\zeta \subset U$, то $\overline{A_\zeta} \subset \overline{U}$ для каждого ζ и, значит, $\bigcup\limits_\zeta \overline{A_\zeta} \subset \overline{U}$. В частности, $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. Пусть теперь $c \in \overline{A \cup B}$. Если бы $c \overline{\in} \overline{A} \cup \overline{B}$, то существовали бы $\varepsilon_A > 0$ и $\varepsilon_B > 0$ такие, что $V(c, \varepsilon_A)$ не пересекается с A, а $V(c, \varepsilon_B)$ — с B. Но тогда $V(c, \varepsilon)$, где $\varepsilon = \min\{\varepsilon_A, \varepsilon_B\}$, не пересекалось бы с $A \cup B$, а это противоречит тому, что c — точка прикосновения для $\overline{A \cup B}$. Таким образом, $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$ и, значит, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Для бесконечного семейства множеств равенство не всегда имеет место. Пусть, например, $A_n = \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $\bigcup\limits_n \overline{A}_n = \bigcup\limits_n A_n =]0, 1]$, а $\overline{\bigcup\limits_n A_n} = [0, 1]$, так что $\bigcup\limits_n \overline{A}_n \neq \overline{\bigcup\limits_n A_n}$. Другой пример: множество всех рациональных точек отрезка $[0, 1]$ есть объединение последовательности одноточечных (и потому замкнутых) множеств, а его замыканием служит весь отрезок $[0, 1]$.

151. Утверждение $x \in \mathbf{C}(E^\circ)$ означает, что x не есть внутренняя точка множества E, т. е. что никакая окрестность точки x не содержится в E. Но это равносильно тому, что всякая окрестность точки x содержит точку из $\mathbf{C}E$, т. е. $x \in \overline{\mathbf{C}E}$. Таким образом, $x \in \mathbf{C}(E^\circ)$ тогда и только тогда, когда $x \in \overline{\mathbf{C}E}$, т. е. $\mathbf{C}(E^\circ) = \overline{\mathbf{C}E}$. Заменив в этом равенстве E на $\mathbf{C}E$ и перейдя к дополнениям, получим второе равенство.

152. Равенство $A^\circ \cap B^\circ = (A \cap B)^\circ$ всегда верно. Для бесконечного семейства множеств $\{A_\zeta\}$ верно включение $\bigcap\limits_\zeta \overset{\circ}{A}_\zeta \supset (\bigcap\limits_\zeta A_\zeta)^\circ$, однако равенство справедливо не всегда (пример: $A_n = \left]-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[$ $(n = 1, 2, \ldots)$).

153. Включение $A^\circ \cup B^\circ \subset (A \cup B)^\circ$ очевидно. Однако равенство не всегда имеет место (пример: $A = [0, 1]$, $B = [1, 2]$).

154. Этому условию удовлетворяет, например, множество E_1 точек на прямой: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots, 0.$

Здесь $E_1' = \{0\}$ (одноточечное множество), $E_1'' = \varnothing$.

155. а) Пустое множество и вся плоскость; б) любое непустое открытое множество на плоскости, отличное от всей плоскости; в) прямая $x = 0$.

156. Точка a — граничная для E тогда и только тогда, когда каждая ее окрестность содержит как точку из E (т. е. $a \in \overline{E}$), так и точку из $\mathbf{C}E$ (т. е. $a \,\overline{\in}\, E^\circ$). Таким образом, $\operatorname{Fr} E = \overline{E} \setminus E^\circ$.

157. Согласно задаче 156, $\operatorname{Fr}(A \cup B) = \overline{A \cup B} \setminus (A \cup B)^\circ$. Но, очевидно, $(A \cup B)^\circ \supset A^\circ \cup B^\circ$, а по задаче 150 $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Следовательно,

$\operatorname{Fr}(A \cup B) \subset (\overline{A} \cup \overline{B}) \setminus (A^\circ \cup B^\circ) \subset (\overline{A} \setminus A^\circ) \cup (\overline{B} \setminus B^\circ) = \operatorname{Fr} A \cup \operatorname{Fr} B.$

Если же E является объединением бесконечной совокупности множеств, то аналогичное утверждение уже неверно. Например, возьмем на числовой прямой множества $E_n = \left[\frac{1}{n},\ 1 - \frac{1}{n}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Тогда $E = \bigcup\limits_n E_n =]0, 1[$, так что $\mathrm{Fr}\, E = \{0, 1\}$; но точки 0 и 1 не содержатся в $\bigcup\limits_n \mathrm{Fr}\, E_n = \bigcup\limits_n \left\{\frac{1}{n},\ 1 - \frac{1}{n}\right\}$.

158. Пусть a — точка прикосновения для $\overline{E}$ и $V(a)$ — произвольная ее окрестность. Тогда $V(a)$ содержит точку $b \in \overline{E}$. Рассмотрим окрестность $V(b)$ точки b, включающуюся в $V(a)$. Так как $b \in \overline{E}$, то $V(b)$ (а значит, и $V(a)$) содержит точку из E. Итак, произвольная окрестность $V(a)$ точки a содержит точку из E, т. е. $a \in \overline{E}$. Таким образом, $\overline{E}$ содержит все свои точки прикосновения, т. е. $\overline{E}$ замкнуто.

159. Пусть $a \in \overline{E'}$ и $V(a)$ — произвольная окрестность точки a. В $V(a)$ найдется точка $b \in E'$. Возьмем какую-либо ее окрестность $V(b) \subset V(a)$. Так как b — предельная точка для E, то в $V(b)$ (а значит, и в $V(a)$) содержится бесконечно много точек из E. Следовательно, $a \in E'$. Тем самым $\overline{E'} \subset E'$, т. е. E' замкнуто.

160. Это вытекает из легко проверяемого равенства $\mathrm{Fr}\, E = \overline{E} \cap \overline{\complement E}$ и из того, что множества $\overline{E}$ и $\overline{\complement E}$ замкнуты (задача 158). Замкнутость $\mathrm{Fr}\, E$ можно доказать также непосредственно — таким же способом, как и утверждение задачи 158.

161. Необходимость. Пусть метрики ρ_1 и ρ_2 эквивалентны и E замкнуто в (X, ρ_1). Если x_0 — точка прикосновения для E в (X, ρ_2), то существует последовательность $\{x_n\}$ точек из E такая, что $\rho_2(x_n, x_0) \to 0$. Тогда и $\rho_1(x_n, x_0) \to 0$, т. е. x_0 — точка прикосновения для E в (X, ρ_1) и, значит, $x_0 \in E$; тем самым E замкнуто в (X, ρ_2). Аналогично, если F замкнуто в (X, ρ_2), то F замкнуто в (X, ρ_1).

Достаточность. Пусть совокупности замкнутых множеств в (X, ρ_1) и в (X, ρ_2) совпадают, и пусть $\rho_1(x_n, x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. Если $\{x_n\}$ не сходится к x_0 в (X, ρ_2), то существуют подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ и число $\varepsilon > 0$ такие, что $\rho_2(x_{n_k}, x_0) > \varepsilon$ при любом k. Пусть E — множество, образованное точками x_{n_k}, и $\overline{E}$ — его замыкание в метрике ρ_2. Ясно, что $x_0 \,\overline{\in}\, \overline{E}$. Но так как $\overline{E}$ замкнуто в (X, ρ_2) (задача 158), то по условию оно замкнуто также в (X, ρ_1) и, значит, должно содержать x_0 (поскольку $\rho_1(x_{n_k}, x_0) \to 0$). Полученное противоречие показывает, что $\rho_2(x_n, 0) \to 0$. Аналогично из $\rho_2(y_n, y_0) \to 0$ вытекает $\rho_1(y_n, y_0) \to 0$, т. е. метрики ρ_1 и ρ_2 в X эквивалентны.

162. Объединение этих окружностей замкнуто, если последовательность $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ не ограничена, и не замкнуто, если она ограничена; в последнем случае замыкание объединения окружностей получится, если к ним добавить предельную окружность радиуса $a = \lim\limits_{n\to\infty} r_n$.

163. Это множество замкнуто, если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = +\infty$ (в этом случае оно совпадает со всей плоскостью); оно не замкнуто, если $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = a < +\infty$. В обоих случаях это множество является открытым.

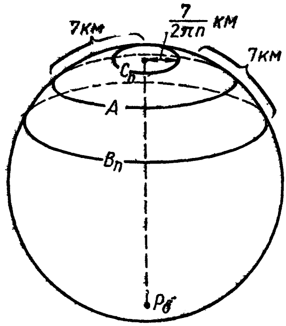


Рис. 16

164. Обозначим через C_n окружность радиуса $\frac{7}{2\pi n}$ км с центром на земной оси, расположенную в северном полушарии на поверхности Земли; длина этой окружности равна $\frac{7}{n}$ км (рис. 16). Через B_n обозначим окружность, расположенную на поверхности земного шара на 7 км южнее, чем C_n. Тогда искомое множество E таково:

$$E = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup P_0,$$

где P_0 — одноточечное множество, образованное Южным полюсом.

Множество E не замкнуто. Кроме точек окружностей $B_1, B_2, \ldots$, предельными являются также все точки окружности A, отстоящей на 7 км южнее Северного полюса (окружность A не входит в E). Поэтому

$$\overline{E} = E \cup A, \quad E' = (E \cup A) \setminus P_0.$$

165. Пусть ζ — точка прикосновения множества E_a, т. е. в E_a существует последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к ζ. Тогда $f(\zeta) = \lim\limits_{x_n\to\zeta} f(x_n)$ (в силу непрерывности функции f). Так как $f(x_n) \geqslant a$ для всех n, то также $f(\zeta) \geqslant a$. Следовательно, $\zeta \in E_a$ и, значит, E_a замкнуто.

166. Пусть $\varphi \in \overline{E}$. Тогда в E существует последовательность $\{f_n\}$, сходящаяся в $C[0, 1]$ к φ. Так как $f_n(x) \leqslant f_0(x)$ для всех $x \in [0, 1]$ и всех n, а $\varphi(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ в каждой точке $x \in [0, 1]$, то и $f(x) \leqslant f_0(x)$ для всех $x \in [0, 1]$, т. е. $\varphi \in E$. Следовательно, E замкнуто.

167. Требуется доказать равносильность включений а) $E \supset \overline{E}$, б) $E \supset E'$, в) $E \supset \operatorname{Fr} E$. Так как всегда справедливы включения $E' \subset \overline{E}$ и $\operatorname{Fr} E \subset \overline{E}$, то из а) следует б) и из а) следует в). С другой стороны, так как $\overline{E} \subset E \cup E'$, то из б) следует а); а так как $\overline{E} = E^\circ \cup \operatorname{Fr} E$ и $E^\circ \subset E$, то из в) следует а).

168. Согласно задаче 158, $\overline{E}$ замкнуто. С другой стороны, если $E \subset F$ и F замкнуто, то $\overline{E} \subset \overline{F} = F$. Тем самым $\overline{E}$ — наименьшее замкнутое множество, содержащее E.

169. Так как E' замкнуто (задача 159), то $E' \supset \overline{E'} \supset E''$. Совершенно так же $E'' \supset E'''$ и т. д.

170. Так как для любого E множество $\mathrm{Fr}\, E$ замкнуто (задача 160), то $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\, E) \subset \mathrm{Fr}\, E$ (задача 167). Если же E замкнуто, то $\mathrm{Fr}\, E \subset E$; следовательно, $(\mathrm{Fr}\, E)^\circ \subset E^\circ$ и потому, согласно задаче 156, $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\, E) = \mathrm{Fr}\, E \setminus (\mathrm{Fr}\, E)^\circ = (E \setminus E^\circ) \setminus (\mathrm{Fr}\, E)^\circ = E \setminus E^\circ = \mathrm{Fr}\, E$.

Для произвольного E равенство $\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\, E) = \mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\,(\mathrm{Fr}\, E))$ следует теперь из замкнутости множества $\mathrm{Fr}\, E$.

171. Если $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность точек из E, то $\{x_n\}$ фундаментальна и в X, а значит, сходится в X к некоторой точке x. Так как E замкнуто, то $x \in E$; поэтому $\{x_n\}$ сходится к x и в E. Следовательно, E полно.

172. Так как E незамкнуто, то существуют последовательность $\{x_n\}$ точек из E и точка $x \in X$ такие, что $x_n \to x$, но $x \overline{\in} E$. Тогда $\{x_n\}$ фундаментальна, но не сходится в E. Следовательно, E неполно.

173. Нет, не будет, так как X незамкнуто в пространстве $M[a, b]$ (см. задачу 129). Например, положим $f_n(x) = \sqrt{\left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{n}}$. Тогда $f_n \in X$ при каждом n, но $\{f_n\}$ сходится в $M[a, b]$ к функции $f(x) = \left|x - \frac{a+b}{2}\right|$, не имеющей производной в точке $\frac{a+b}{2} \in [a, b]$.

174. Это множество не является совершенным. Но добавление к нему одной точки (начала координат) делает его совершенным.

175. Объединение конечного семейства совершенных множеств всегда является совершенным множеством. Объединение же счетного семейства совершенных множеств не всегда совершенное множество (см. примеры в решении задачи 150).

176. Пусть E — данное множество и $x_0 \in E^\circ$. Надо доказать, что x_0 — внутренняя точка множества E°. Для этого опишем около x_0 окрестность $V(x_0)$, входящую в E (что возможно, так как x_0 — внутренняя точка множества E). Каждая точка $x \in V(x_0)$ также будет внутренней точкой множества E (так как около x можно описать окрестность $V(x)$, входящую в $V(x_0)$ и тем самым входящую в E). Итак, всякая точка $x \in V(x_0)$ является точкой из E°. Значит, x_0 — внутренняя точка множества E°. Таким образом, каждая точка множества E° является *его* внутренней точкой, т. е. E° — открытое множество.

177. Согласно предыдущей задаче, E° — открытое множество. С другой стороны, если $G \subset E$ и G — открытое, то $G = G^\circ \subset E^\circ$. Тем самым E° — наибольшее открытое множество, содержащееся в E.

178. Это следует из того, что $E = \bigcup_{x \in A} V(x, \varepsilon)$.

179. Указание. Используйте свойство непрерывной функции: если непрерывная функция положительна в точке x_0, то она положительна и в некоторой окрестности этой точки.

180. Пусть $\varphi \in E$, т. е. $A < \varphi(x) < B$ всюду на $[0, 1]$. Обозначим $\sup\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \beta$, $\inf\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x) = \alpha$. Ясно, что $\sup\limits_{x\in[0,1]} \varphi(x)$ не может равняться B, так как по свойствам функций, непрерывных на отрезке, $\sup \varphi(x)$ достигается в некоторой точке x' отрезка $[0, 1]$: $\beta = \varphi(x')$. Так как $\varphi(x') < B$, то $\beta < B$. Аналогично $\alpha > A$. Обозначим через ε наименьшее из чисел $\alpha - A$ и $B - \beta$. Тогда все функции χ, удовлетворяющие для каждого $x \in [0, 1]$ неравенствам $\varphi(x) - \varepsilon < \chi(x) < \varphi(x) + \varepsilon$, принадлежат множеству E. С другой стороны, эти функции χ образуют ε-окрестность функции φ, так как все эти функции, и только они, удовлетворяют условию: $\rho(\varphi, \chi) < \varepsilon$. Итак, вместе с функцией φ в множество E входит также некоторая ее окрестность, а это и означает, что E — открытое множество в $C[0, 1]$.

181. См. решение задачи 180.

182. Пусть E_k — открытый круг на плоскости с центром в начале координат и радиусом $\frac{1}{k}$. Тогда $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E_k$ является одноточечным множеством (образованным началом координат). Оно не является открытым множеством.

183. Неверно. Пример. E — множество на плоскости, являющееся объединением замкнутого круга D и одноточечного множества, лежащего вне D. Тогда $E^\circ = D^\circ$ и $\overline{E^\circ} = D$, но $E \neq D$.

Однако для всякого замкнутого множества E имеет место включение $\overline{E^\circ} \subset E$.

184. Нет. Пример. E — открытый круг на плоскости с выколотым центром; здесь $(\overline{E})^\circ \neq E$. Однако для всякого открытого множества E справедливо включение $(\overline{E})^\circ \supset E$.

185. Указание: примените результаты задач 183, 184.

186. Каждое из множеств E_n замкнуто (см. задачу 165). Так как f — непрерывная функция на отрезке, то существует N такое, что $|f(x)| \leqslant N$ для всех $x \in [a, b]$; следовательно, все E_n при $n > N$ пусты. Поэтому множество $E_1 \cup E_3 \cup \ldots \cup E_{2k-1} \cup \ldots$ есть объединение конечного числа непустых замкнутых множеств и, следовательно, замкнуто.

187. Неверно. Пример. Пусть

$$E_n = \left[-1 + \frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right] \cup \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] \quad (n \geqslant 2)$$

$\left(\text{тогда } \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} E_n = \left]-1, 1\right[\right)$ и $F = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \subset \bigcup\limits_{n=2}^{\infty} E_n$; здесь F не содержится в E_n ни при каком n.

188. Пример. Множество E всех чисел вида $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

189. Ясно, что $E \cap E' = \varnothing$. Если E' пусто, то E замкнуто. Если же E' непусто, то опишем около каждой точки множества E' открытый шар радиуса $\frac{1}{n}$, а объединение этих шаров (при фиксированном n) обозначим A_n; далее, положим $B_n = E \setminus A_n$. Тогда каждое B_n замкнуто (оно не имеет предельных точек), и $\bigcup_n B_n = E$. Следовательно, E есть множество типа F_σ.

190. I_E есть множество, все точки которого изолированные; следовательно, в силу предыдущей задачи, I_E — множество типа F_σ.

191. Такой пример можно привести не в любом пространстве (например, на прямой или в евклидовом пространстве любое множество изолированных точек не более чем счетно). Однако, например, в пространстве M ([0, 1]) (см. задачу 129) множество функций

$$f_\xi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } 0 \leqslant x < \xi, \\ 1 \text{ при } \xi \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}$$

где ξ пробегает интервал]0, 1[, является несчетным, а все его элементы изолированные.

Другой пример см. в решении задачи 373.

192. ε-окрестностью точки $x \in Z$ в Z для каждого $\varepsilon > 0$ служит $V(x, \varepsilon) \cap Z$, где $V(x, \varepsilon)$-окрестность этой точки в X. Поэтому $x \in \overline{E}^Z$ тогда и только тогда, когда 1) $x \in Z$; 2) $(V(x, \varepsilon) \cap Z) \cap E$ непусто для каждого $\varepsilon > 0$. А так как $(V(x, \varepsilon) \cap Z) \cap E = V(x, \varepsilon) \cap E$, то условие 2) означает, что $V(x, \varepsilon) \cap E$ непусто для каждого $\varepsilon > 0$, т. е. что $x \in \overline{E}^X$. Таким образом, $x \in \overline{E}^Z$ тогда и только тогда, когда $x \in \overline{E}^X \cap Z$. Тем самым утверждение а) доказано. Утверждение б) легко следует из него. Действительно, пусть E замкнуто в Z; тогда $E = \overline{E}^Z = \overline{E}^X \cap Z$, причем $\overline{E}^X$ замкнуто в X (задача 158). Обратно, пусть $E = F \cap Z$, где F — замкнутое множество в X; так как $E \subset F$, то $\overline{E}^X \subset F$ (задача 168); поэтому $E = F \cap Z \supset \overline{E}^X \cap Z = \overline{E}^Z \supset E$, откуда $E = \overline{E}^Z$, т. е. E замкнуто в Z.

193. Это следует из равносильности следующих утверждений относительно множества $E \subset Z$:

1) E открыто в Z;

2) $Z \setminus E$ замкнуто в Z;

3) $Z \setminus E = F \cap Z$, где F — замкнутое множество в X;

4) $E = G \cap Z$, где $G = X \setminus F$ — открытое множество в X (второе и третье утверждения равносильны согласно пункту б) задачи 192, а третье и четвертое равносильны, поскольку из включений $Z \subset X$ и $F \subset X$ следует, что $Z \setminus (F \cap Z) = (X \setminus F) \cap Z$).

194. Это следует из задач 192 и 193.

195. Согласно задаче 192 (или 193), $E = F \cap Z$, где F замкнуто (соответственно открыто) в X. Но тогда E замкнуто (соответственно открыто) в X, как пересечение двух замкнутых (соответственно открытых) множеств.

196. Пусть (x_0, y_0) — точка прикосновения множества $E \times F$. Каждая ее окрестность $V((x_0, y_0), \varepsilon)$ содержит хотя бы одну точку (x, y) из $E \times F$. Но тогда $x \in V(x_0, \varepsilon)$ и $y \in V(x_0, \varepsilon)$, так что x_0 и y_0 — точки прикосновения множеств E и F соответственно и, в силу замкнутости этих множеств, принадлежат им. Поэтому $(x_0, y_0) \in E \times F$.

197. Пусть $x \in (A \cup B)^\circ$, т. е. $V(x, r) \subset A \cup B$ при некотором $r > 0$. Тогда $V(x, r) \setminus B \subset A$. Но $V(x, r) \setminus B$ открыто; следовательно, $V(x, r) \setminus B \subset A^\circ$, откуда $V(x, r) \subset A^\circ \cup B$. Значит, $x \in (A^\circ \cup B)^\circ$. Тем самым $(A \cup B)^\circ \subset (A^\circ \cup B)^\circ$; обратное включение очевидно.

198. Верно. В самом деле, так как $A \subset \overline{A}$, то $d(x_0, \overline{A}) \leqslant d(x_0, A)$. С другой стороны, для каждого $\varepsilon > 0$ существует элемент $\overline{a}_\varepsilon \in \overline{A}$, для которого $\rho(x_0, \overline{a}_\varepsilon) \leqslant d(x_0, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2}$, а для этого $\overline{a}_\varepsilon$ — элемент $a_\varepsilon \in A$ такой, что $\rho(\overline{a}_\varepsilon, a_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда $\rho(x_0, a_\varepsilon) \leqslant \rho(x_0, \overline{a}_\varepsilon) + \rho(\overline{a}_\varepsilon, a_\varepsilon) < \rho(x_0, \overline{a}_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$d(x_0, A) \leqslant \rho(x_0, a_\varepsilon) \leqslant \rho(x_0, \overline{a}_\varepsilon) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant d(x_0, \overline{A}) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= d(x_0, \overline{A}) + \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то $d(x_0, A) \leqslant d(x_0, \overline{A})$.

199. Неверно. Например, если на прямой взять $x_0 = 2$ и $A = [0, 1] \cup \{2\}$, то $d(x_0, A) = 0$, в то время как $d(x_0, A^\circ) = 1$, поскольку $A^\circ =]0, 1[$.

200. Вообще для любой числовой ограниченной снизу функции f, определенной на произведении $A \times B$ любых двух множеств A и B, имеет место:

$$\inf_{x \in A,\, y \in B} f(x, y) = \inf_{x \in A} (\inf_{y \in B} (f(x, y)) = \inf_{y \in B} (\inf_{x \in A} f(x, y)). \qquad (1)$$

Действительно, так как, очевидно, $\inf\limits_{x \in A,\, y \in B} f(x, y) \leqslant \inf\limits_{y \in B} f(x, y)$ для каждого $x \in A$, то

$$\inf_{x \in A,\, y \in B} f(x, y) \leqslant \inf_{x \in A}) \inf_{y \in B} f(x, y)).$$

С другой стороны, для каждого $\varepsilon > 0$ существует пара $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ такая, что

$$f(x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leqslant \inf_{x \in A,\, y \in B} f(x, y) + \varepsilon.$$

Так как $\inf\limits_{x \in A} (\inf\limits_{y \in B} f(x, y)) \leqslant \inf\limits_{y \in B} f(x_\varepsilon, y) \leqslant f(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$, то

$$\inf_{x \in A} (\inf_{y \in B} f(x, y)) \leqslant \inf_{x \in A,\, y \in B} f(x, y) + \varepsilon.$$

Это неравенство верно для каждого $\varepsilon > 0$, поэтому

$$\inf_{x\in A}(\inf_{y\in B} f(x, y)) \leqslant \inf_{x\in A,\, y\in B} f(x, y).$$

Следовательно, $\inf\limits_{x\in A,\, y\in B} f(x, y) = \inf\limits_{x\in A}(\inf\limits_{y\in B} f(x, y))$. Совершенно так же доказываем второе из равенств (1).

Взяв в (1) множества A и B из метрического пространства (X, ρ) и положив $f = \rho$, получим требуемые соотношения.

201. В силу задач 198 и 200, имеем:

$$d(A, B) = \inf_{x\in A} d(x, B) = \inf_{x\in A} d(x, \overline{B}) = d(A, \overline{B}).$$

Аналогично доказываются остальные равенства.

202. Не для всех. Пример. Возьмем на прямой $A = [0, 1] \cup \{2\}$, $B = \{2\} \cup [3, 4]$; тогда $A^\circ =]0, 1[$, $B^\circ =]3, 4[$ и $d(A^\circ, B^\circ) = 2$, в то время как $d(A, B) = 0$.

203. Для каждой точки $x \in F_1$ положим $\varepsilon_x = \frac{1}{3} d(x, F_2)$. Аналогично для каждой точки $y \in F_2$ положим $\varepsilon_y = \frac{1}{3} d(y, F_1)$. Докажем, что множества $G_1 = \bigcup\limits_{x\in F_1} V(x, \varepsilon_x)$ и $G_2 = \bigcup\limits_{x\in F_2} V(y, \varepsilon_y)$ обладают требуемыми свойствами. Ясно, что они открыты, причем $G_1 \supset F_1$ и $G_2 \supset F_2$. Предположим, что существует точка $z \in G_1 \cap G_2$. Тогда найдутся точки $x \in F_1$, $y \in F_2$ такие, что $z \in V(x, \varepsilon_x)$, $z \in V(y, \varepsilon_y)$. Для них будем иметь:

$$\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y) < \frac{1}{3} d(x, F_2) + \frac{1}{3} d(y, F_1) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{3}\rho(x, y) + \frac{1}{3}\rho(x, y) = \frac{2}{3}\rho(x, y),$$

т. е. $\rho(x, y) < \frac{2}{3}\rho(x, y)$; но этого не может быть, поскольку $\rho(x, y) > 0$. Следовательно, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$.

204. Пусть A — множество типа G_δ, т. е. $A = \bigcap\limits_n \Gamma_n$, где Γ_n — открытые множества. Тогда $\mathbf{C}A = \mathbf{C}(\bigcap\limits_n \Gamma_n) = \bigcup\limits_n \mathbf{C}\Gamma_n$, где $\mathbf{C}\Gamma_n$ замкнуты. Итак, $\mathbf{C}A$ есть множество типа F_σ.

Пусть B — множество типа F_σ, т. е. $B = \bigcup\limits_n B_n$, где B_n — замкнутые множества. Тогда $\mathbf{C}B = \mathbf{C}(\bigcup\limits_n B_n) = \bigcap\limits_n \mathbf{C}B_n$, где $\mathbf{C}B_n$ — открытые множества. Итак, $\mathbf{C}B$ есть множество типа G_δ.

205. Пусть F — замкнутое множество. Рассмотрим для каждого натурального числа n открытое множество $G_n = \bigcup\limits_{x\in F} V\left(x, \frac{1}{n}\right)$. Очевидно, что $F \subset \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$. С другой стороны, если $y \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, то для каждого n найдется точка $x_n \in F$ такая, что $\rho(x_n, y) < \frac{1}{n}$. Следовательно, y — точка прикосновения для F; а так как F замкнуто, то $y \in F$. Таким образом, $F = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$, т. е. F — множество типа G_δ.

Справедливость второго утверждения задачи вытекает отсюда по двойственности (см. задачу 204).

206. В силу результата задачи 204, достаточно доказать, что CE — множество типа F_σ. Но CE есть объединение счетного числа прямых $x = r_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $y = r_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где $r_1, r_2, \ldots$ — множество рациональных чисел, занумерованное произвольным образом. Так как каждая прямая является замкнутым множеством на плоскости, то CE — множество типа F_σ.

207. Доказательство вытекает непосредственно из определения нижнего предела.

208. Выберем в каждом E_n по точке x. Последовательность $\{x_n\}$ обладает тем свойством, что каждое E_n содержит все члены этой последовательности, начиная с x_n. Поэтому $\rho(x_m, x_n) \leqslant \operatorname{diam} E_{\min(m,\,n)}$ и, значит, $\rho(x_m, x_n) \to 0$ при $m, n \to \infty$. Следовательно, $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Так как пространство полно, то существует $x = \lim x_n$. Покажем, что x есть точка прикосновения для каждого E_m. Действительно, произвольная окрестность $V(x, \varepsilon)$ точки x содержит все члены последовательности, начиная с некоторого N; при этом все члены с номерами $n \geqslant \max(m, N)$ входят в E_m. В силу замкнутости каждого E_m, точка x всем им принадлежит, т. е. $\bigcap\limits_m E_m \neq \varnothing$.

209. Нет. П р и м е р. Пусть $\{a_i\}$ — строго убывающая числовая последовательность, сходящаяся к 1, и X — счетное множество точек $x_1, x_2, \ldots$, в котором метрика введена формулами:

$$\rho(x_i, x_j) = a_{\min(i,\,j)} \quad \text{при } i \neq j,$$
$$\rho(x_i, x_i) = 0.$$

Так как каждая фундаментальная последовательность в X стационарна, то X полно. Замкнутые шары $B(x_i, a_i) = \{x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots\}$ образуют убывающую последовательность, имеющую пустое пересечение.

210. Нет. Например, в $\boldsymbol{R}^1$ последовательность интервалов $\left]0, \frac{1}{n}\right[$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет пустое пересечение.

211. Выберем по точке x_n в каждом $\overline{E}_n$. Как и в задаче 208, убедимся в том, что существует точка x, общая для всех $\overline{E}_n$. В силу условия б) задачи, она будет принадлежать и всем E_n.

212. Пусть E — непустое открытое множество на прямой, $x_0 \in E$. Обозначим через α нижнюю грань левых концов интервалов, содержащих x_0 и включающихся в E, а через β верхнюю грань правых концов таких интервалов (не исключено, что $\alpha = -\infty$ или $\beta = +\infty$). Тогда $]\alpha, \beta[\in E$, $\alpha \overline{\in} E$, $\beta \overline{\in} E$ (если бы, например, было $\beta \in E$, то, в силу открытости E, некоторый интервал $]\beta - \varepsilon,$

$\beta+\varepsilon[$ также включался бы в E; но тогда интервал $]\alpha, \beta+\varepsilon[$ включался бы в E, что противоречит выбору β).

Итак, каждая точка $x_0 \in E$ входит в некоторый интервал, включающийся в E, концы которого не принадлежат E. Докажем, что такой интервал (для данной точки x_0) единственный. Если бы нашлись два таких интервала $]\alpha_1, \beta_1[$ и $]\alpha_2, \beta_2[$, причем, например, $x_0 < \beta_1 < \beta_2$, то β_1 принадлежало бы интервалу $]\alpha_2, \beta_2[$ и, значит, входило бы в E вопреки предположению. Аналогично не может быть $\alpha_1 < \alpha_2$ или $\alpha_2 < \alpha_1$. Единственность доказана. Интервал, входящий в E, концы которого не принадлежат E, и будет *составляющим интервалом* для E. Множество составляющих интервалов не более чем счетно: фиксируя в каждом составляющем интервале по одной рациональной точке, мы получаем взаимно однозначное соответствие между множеством всех составляющих интервалов и некоторым подмножеством рациональных чисел (а это подмножество конечно или счетно).

213. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть $]a_1, b_1[, \ldots$ — смежные интервалы множества E причем они не имеют попарно общих концов. Допустим, что E имеет изолированную точку x_0. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что $]x_0-\varepsilon, x_0[\, \subset \mathbf{C}E$ и $]x_0, x_0+\varepsilon[\, \subset \mathbf{C}E$. Но тогда $]x_0-\varepsilon, x_0[$ и $]x_0, x_0+\varepsilon[$ включаются в некоторые смежные интервалы с общим концом x_0, что противоречит условию. Итак, E не имеет изолированных точек; кроме того, E замкнуто. Значит, E — совершенное множество.

214. Допустим, что $[a, b] = F \cup \Phi$, где F и Φ замкнуты, непусты и не пересекаются. Каждое из множеств F, Φ, будучи замкнутым, непустым и ограниченным снизу числовым множеством, обладает наименьшей точкой. При этом у одного из них, скажем, у множества F, этой точкой служит a. Пусть c — наименьшая точка множества Φ. Тогда $c > a$ (так как $F \cap \Phi = \varnothing$); значит, $[a, c[\, \subset F$, а потому и $[a, c] \subset F$ (так как F замкнуто). Следовательно, $c \in F \cap \Phi$, вопреки тому, что F и Φ не пересекаются.

215. Допустим, что $[a, b] = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$, где F_i $(i = 1, 2, \ldots)$ — непустые попарно не пересекающиеся замкнутые множества. Пусть F_{n_1} — множество с наименьшим номером, для которого $]a, b[\, \cap F_{n_1} \neq \varnothing$. Так как F_{n_1} не совпадает со всем отрезком $[a, b]$, то и $]a, b[\, \cap \mathbf{C}F_{n_1} \neq \varnothing$. Поэтому на интервале $]a, b[$ найдется точка α_1, являющаяся концом некоторого смежного интервала множества F_{n_1}. Обозначим через I_1 интервал, одним из концов которого служит эта точка, и такой, что $I_1 \subset \mathbf{C}F_{n_1}$, $\bar{I}_1 \subset\,]a, b[$.

Далее, среди множеств $F_{n_1+1}, F_{n_1+2}, \ldots$ найдем множество F_{n_2} с наименьшим номером, для которого $I_1 \cap F_{n_2} \neq \varnothing$ (и, значит, $I_1 \cap \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_{n_2-1}) = \varnothing$). Легко видеть, что тогда и $I_1 \cap \mathbf{C}F_{n_2} \neq \neq \varnothing$. Действительно, если бы интервал I_1 целиком содержался в F_{n_2}, то и точка α_1 входила бы в F_{n_2} (в силу замкнутости F_{n_2}); но

$\alpha_1 \in F_{n_1}$, а множества F_{n_1} и F_{n_2} не пересекаются. Итак, $I_1 \cap F_{n_2} \neq \emptyset$ и $I_1 \cap \complement F_{n_2} \neq \emptyset$. Поэтому на интервале I_1 найдется точка α_2, являющаяся концом смежного интервала множества F_{n_2}. Но тогда существует интервал I_2, одним из концов которого служит точка α_2, и такой, что $I_2 \subset \complement F_{n_2}$, $\overline{I}_2 \subset I_1$.

Продолжая таким же образом далее, получим в результате убывающую последовательность интервалов $I_0 =]a, b[$, I_1, I_2, ... такую, что $\overline{I}_k \subset I_{k-1}$, и строго возрастающую последовательность номеров n_1, n_2, ... такую, что

$$I_k \cap (F_1 \cup \ldots \cup F_{n_k-1}) = \emptyset \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Тогда должна существовать точка, принадлежащая всем интервалам I_k (а именно общая точка отрезков $\overline{I}_k$, $k = 1, 2, \ldots$). Эта точка не принадлежит ни одному из множеств F_n, хотя принадлежит отрезку $[a, b]$. Следовательно, $[a, b] \neq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} F_i$, что противоречит допущению.

216. Если $]a, b[= \bigcup\limits_i F_i$, где F_i — попарно не пересекающиеся непустые замкнутые множества, то $[a, b] = \{a\} \cup \{b\} \cup (\bigcup\limits_i F_i)$, что противоречит результату задачи 215.

217. Утверждения задач 216 и данной равносильны, поскольку $]a, b[$ и $\boldsymbol{R}^1$ гомеоморфны.

218. Можно, например, следующим образом: пусть c_1 — середина смежного интервала первого ранга $\left(\text{т. е. } c_1 = \frac{1}{2}\right)$, c_2 — середина смежного интервала второго ранга, лежащего справа от c_1 (т. е середина интервала $\left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[\right)$, и вообще c_{k+1} — середина смежного интервала $(k + 1)$-го ранга, лежащего справа от c_k. Тогда канторово множество D разбивается на следующие попарно не пересекающиеся непустые замкнутые множества:

$$D = \{1\} \cup (D \cap [0, c_1]) \cup (D \cap [c_1, c_2]) \cup \ldots \cup \\ \cup (D \cap [c_k, c_{k+1}]) \cup \ldots$$

219. Множество $[a, b] \cap E$ замкнуто. Докажем, что оно не содержит изолированных точек.

Пусть $x_0 \in [a, b] \cap E$. Так как $a \overline{\in} E$, $b \overline{\in} E$, то x_0 — внутренняя точка отрезка $[a, b]$. Опишем произвольную окрестность $V(x_0) \subset [a, b]$. В этой окрестности найдется точка $x \in E$, отличная от x_0. Но $x \in [a, b] \cap E$. Следовательно, в произвольной окрестности точки x_0 нашлась отличная от x_0 точка $x \in [a, b] \cap E$; значит, x_0 не является изолированной точкой множества $[a, b] \cap E$. Итак, $[a, b] \cap E$ — совершенное множество.

220. Рассмотрим любой интервал Δ на прямой. По условию существует $x \in \Delta \cap \complement E$. Так как $\complement E$ открыто, то $\Delta \cap \complement E$ тоже открыто и существует интервал Δ', содержащий точку x, такой, что $\Delta' \subset \Delta \cap \complement E$. Отсюда $\Delta' \subset \Delta$, $\Delta' \cap E = \emptyset$ и, значит, E нигде не плотно.

221. Рассмотрим два случая: 1) концы интервала α и β оба не принадлежат E; 2) хотя бы один из этих концов принадлежит E.

В первом случае имеет место равенство $]\alpha, \beta[\cap E = [\alpha, \beta] \cap E$; в правой части этого равенства стоит совершенное множество (см. задачу 219); следовательно, и множество $]\alpha, \beta[\cap E$ является совершенным.

Рассмотрим второй случай: пусть $\alpha \in E$, $\beta \in E$ (если бы только одна из точек α, β принадлежала E, доказательство было бы аналогичным). Так как E нигде не плотно, то на любом интервале $]\alpha, \alpha'[$ найдутся точки, не принадлежащие E. Отсюда следует, что существует последовательность точек $a_1 > a_2 > \ldots > a_n > \ldots$, не принадлежащих E, сходящаяся к α. Из тех же соображений вытекает, что найдется последовательность точек $b_1 < b_2 < \ldots < b_n < \ldots$, не принадлежащих E, сходящаяся к β; при этом всегда можно считать, что $a_1 < b_1$ (рис. 17). Но тогда $]\alpha, \beta[\cap E$ является объединением следующих множеств:

$]a_1, b_1[\cap E$, $]a_2, a_1[\cap E$, $]a_3, a_2[\cap E$, $]a_4, a_3[\cap E$, ...
и

$$]b_1, b_2[\cap E, \;]b_2, b_3[\cap E, \;]b_3, b_4[\cap E, \; \ldots$$

Все эти множества совершенные (см. первый случай). Если среди них лишь конечное число непустых, то их объединение, т. е. $]\alpha, \beta[\cap E$, также совершенное множество; в противном же случае $]\alpha, \beta[\cap E$ есть объединение счетной совокупности попарно не пересекающихся непустых совершенных множеств.

222. Заметим сначала, что $P \setminus Q = P \cap \mathbf{C}Q$, где $\mathbf{C}Q$ — открытое множество. Пусть $\mathbf{C}Q = \bigcup\limits_i]\alpha_i, \beta_i[$, где $]\alpha_i, \beta_i[$ — составляющие интервалы. Тогда $P \setminus Q = \bigcup\limits_i (]\alpha_i, \beta_i[\cap P)$. Согласно предыдущей задаче, каждое множество $]\alpha_i, \beta_i[\cap P$ либо совершенное, либо есть объединение счетной совокупности попарно не пересекающихся непустых совершенных множеств; но тогда и их объединение $P \setminus Q$ является либо совершенным, либо объединением счетной совокупности попарно не пересекающихся непустых совершенных множеств.

223. Пусть $A = \bigcup\limits_n E_n$, где E_n — нигде не плотные совершенные множества. Множество A можно записать следующим образом:

$$A = E_1 \cup (E_2 \setminus E_1) \cup (E_3 \setminus (E_1 \cup E_2)) \cup \ldots \cup (E_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} E_i)) \cup \ldots \quad (1)$$

Слагаемые правой части попарно не пересекаются; каждое из них является либо нигде не плотным совершенным множеством, либо непустой разностью двух нигде не плотных совершенных; во втором

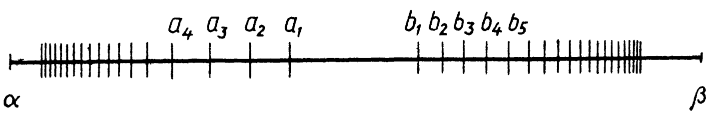
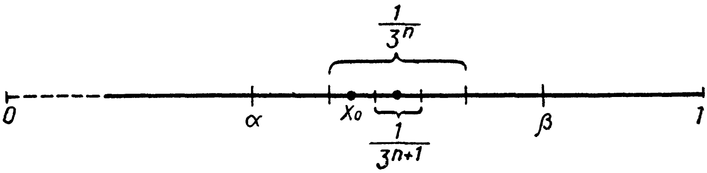


Рис. 17



Рис, 18

случае на основании предыдущей задачи оно представимо в виде объединения счетной совокупности попарно не пересекающихся непустых совершенных множеств.

Отсюда следует (в силу равенства (1)), что и множество A представимо в виде объединения счетной совокупности попарно не пересекающихся нигде не плотных совершенных множеств.

224. Множество D замкнуто (как дополнение к открытому), и никакие два его смежных интервала, по построению, не имеют общих концов. Следовательно, D — совершенное множество (см. задачу 213).

Докажем, что D нигде не плотно на прямой. Возьмем произвольный интервал $I =]\alpha, \beta[$. Если он не содержит точек из D, то в качестве интервала, содержащегося в I и полностью свободного от точек множества D, берем сам этот интервал. Если же имеется точка $x_0 \in D$, содержащаяся в I, то мы можем найти отрезок какого-либо достаточно высокого ранга n, содержащий x_0 и включающийся в I (такой найдется, так как длина каждого отрезка n-го ранга равна $\left.\frac{1}{3^n}\right)$. Возьмем интервал длины $\frac{1}{3^{n+1}}$ с центром в середине этого отрезка (рис. 18). Этот интервал не содержит точек из D и вместе с тем содержится в I.

225. Смежный интервал первого ранга состоит из всех чисел, в троичном разложении которых первый знак обязательно равен единице*. Каждый смежный интервал второго ранга состоит из всех чисел, в троичном разложении которых (при фиксированном первом знаке, отличном от единицы) второй знак обязательно равен единице. Вообще каждый смежный интервал k-го ранга состоит из всех чисел, в троичном разложении которых (при фиксированных первых $k-1$ знаках, отличных от единицы) на k-м месте обязательно стоит единица. Отсюда вытекает, что множество, оставшееся после исключения из $[0, 1]$ всех смежных интервалов, состоит из тех и только тех чисел отрезка $[0, 1]$, которые могут быть

---

* Слово «обязательно» надо понимать в том смысле, что если x допускает два различных разложения в троичную дробь — одно с единицей на первом месте, а другое без единицы на первом месте $\left(\text{например, } x = \frac{1}{3}\right)$, то мы x не включаем в интервал первого ранга; иными словами, в интервал первого ранга войдут те и только те числа x, которые при любом разложении в троичную дробь имеют на первом месте после запятой единицу.

записаны в виде троичной дроби, не содержащей единицы в числе своих троичных знаков.

226. Точки первого рода канторова множества состоят из всех тех чисел, которые являются троично рациональными (т. е. могут быть представлены в виде конечной троичной дроби) и вместе с тем допускают троичное разложение, не содержащее единиц в числе своих троичных знаков.

Точки второго рода — это те точки, в троичном разложении которых отсутствуют единицы и которые являются троично иррациональными (т. е. в их разложении имеется и бесконечно много нулей, и бесконечно много двоек).

227. Между десятичными дробями 0,1 и 0,2 имеется бесконечное множество точек первого рода; одна из них $x = \frac{1}{9}$ (ее разложение в троичную дробь таково: $x = 0{,}0100\ldots$; следовательно, эта точка троично рациональна; ее троичное разложение может быть записано без единиц: $x = 0{,}00222\ldots$; следовательно, эта точка принадлежит канторову множеству).

228. Между этими числами имеется бесконечно много точек второго рода; например, одной из них является точка x, троичное разложение которой имеет вид: $0{,}00202020202\ldots$ $\left(\text{так как } x = \frac{2}{3^3} + \frac{2}{3^5} + \frac{2}{3^7} + \ldots = \frac{1}{12}, \text{ то } \frac{1}{20} < x < \frac{1}{10}\right)$; x является точкой второго рода канторова множества, так как ее троичное разложение содержит бесконечно много двоек, бесконечно много нулей и не содержит единиц; притом она рациональна.

229. В качестве H можно взять множество точек, разложение которых в троичную дробь состоит лишь из чисел 0 и 2, причем на местах с номерами вида $3n + 1$ стоят только нули, а на местах с номерами вида $3n + 2$ — только двойки. Ясно, что H содержится в D, не содержит его точек первого рода, замкнуто и не имеет изолированных точек.

230. Не существует. Докажем это. Возьмем точку x_0 первого рода канторова множества D и опишем около нее произвольную окрестность I. Так как D не имеет изолированных точек, то $I \cap D$ также не имеет изолированных точек. Следовательно, $\overline{I \cap D}$ — совершенное множество. Но непустое совершенное множество (а оно непусто, так как содержит точку x_0) имеет мощность континуума (задача 253). Тогда и $I \cap D$ имеет мощность континуума (оно отличается от своего замыкания не более чем на две крайние точки). Следовательно, $I \cap D$ не может состоять только из точек первого рода (их всего счетное множество), но должно содержать также точки второго рода. Таким образом, всякий интервал I, содержащий хотя бы одну точку первого рода множества D, содержит бесконечно много точек второго рода.

Заметим, что это рассуждение верно не только для канторова множества, но и для любого совершенного множества на прямой.

231. Так как множество D несчетно, то различных расстояний от данной точки $x \in D$ до точек $y \in D$ должно быть также несчетное множество (для каждого числа $a > 0$ множеству D принадлежит не больше двух точек y_1 и y_2, отстоящих от x на расстоянии a). Значит, среди всевозможных расстояний $\rho(x, y)$ $(y \in D)$ найдутся иррациональные (так как рациональных чисел имеется только счетное множество).

232. Перенумеруем все точки множества E:

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

Рассмотрим всевозможные расстояния $\rho(x_i, x_j)$ между точками x_i, x_j множества E. Их счетное множество. Опишем произвольным радиусом ε_1, отличным от каждого $\rho(x_i, y_j)$ (такое число обязательно найдется, так как всего чисел на прямой несчетное множество), окрестность около x_1; назовем ее I_1. Далее, среди точек x_2, x_3, ..., x_k, ... найдем первую, не вошедшую в I_1; пусть это будет x_{k_2}; она не совпадает ни с одним из концов интервала I_1, так как $\varepsilon_1 \neq \rho(x_1, x_i)$ для любого x_i. Опишем около x_{k_2}окрестность радиуса ε_2, отличного от каждого $\rho(x_i, x_j)$, не пересекающуюся с I_1 и не имеющую с ним общих концов; обозначим ее I_2.

Следующим шагом находим среди точек x_{k_2+1}, x_{k_2+2}, ... первую, не входящую ни в I_1, ни в I_2; пусть это будет x_{k_3}; она не совпадает ни с одним из концов как I_1, так и I_2; поэтому около нее можно описать окрестность радиуса ε_3, отличного от всех $\rho(x_i, x_j)$, не пересекающуюся ни с I_1, ни с I_2 и не имеющую с ними общих концов; обозначим ее I_3.

Продолжая далее таким же образом, мы построим последовательность попарно не пересекающихся интервалов I_1, I_2, ... Дополнение F к объединению этих интервалов является искомым совершенным множеством. Действительно, F замкнуто, как дополнение к открытому множеству (к объединению интервалов I_k). Оно не пусто, так как содержит, например, концы всех интервалов I_k. Оно не имеет изолированных точек, так как по построению его смежные интервалы I_1, I_2, ... не имеют общих концов. Следовательно, множество F совершенно и непусто.

233. Множество F не имеет изолированных точек, так как ни одно из множеств E, E_1, E_2, E_3, ... не имеет изолированных точек.

Множество F замкнуто, так как его дополнением является открытое множество $\bigcup_i (]\alpha_i, \beta_i[\setminus E_i])$; отсюда также следует, что все интервалы, на которые распадаются множества $]\alpha_i, \beta_i[\setminus E_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$, и только они, являются смежными интервалами к F.

Докажем, что F нигде не плотно. Пусть $]a, b[$ — произвольный интервал; в силу того что E нигде не плотно, $]a, b[$ содержит интервал I, полностью свободный от точек множества E; но тогда $I \subset$ $\subset]\alpha_{n_0}, \beta_{n_0}[$ для некоторого n_0. Интервал I полностью свободен от точек множеств E_1, E_2, ..., E_{n_0-1}, E_{n_0+1} ...; а так как E_{n_0} — нигде не плотное множество, то в I найдется подинтервал I_0, свободный также и от точек множества E_{n_0}. Итак, интервал I_0 свободен от точек *всех* множеств E, E_1, E_2, ..., т. е. от точек множества F.

234. Докажем, что если выполнены условия б) и в), то а) выполняться не может. Действительно, по предложению E содержит две различные точки x, y; пусть, скажем, $x < y$. Так как E замкнуто и нигде не плотно, то существует смежный к E интервал $]\alpha, \beta[\subset\,]x, y[$. Тогда $\alpha \in E$, $\beta \in E$, но ни одна точка γ, заключенная между α и β, не принадлежит E, т. е. условие а) не выполняется.

Примером множества, для которого выполняются а) и б), может служить любой отрезок. В качестве примера, в котором выполняются а) и в), можно взять множество, получающееся из канторова множества D выкидыванием концов смежных интервалов; оно содержит более одной точки, так как D имеет мощность континуума, а концы смежных интервалов образуют счетное множество. Наконец, примером множества, удовлетворяющего условиям б) и в), служит D.

235. Натуральный ряд (и вообще всякая неограниченная монотонная последовательность).

236. В любом отрезке с центром в начале координат имеется лишь конечное число членов данной последовательности (если бы их было бесконечно много, то, по теореме Больцано — Вейерштрасса, из них можно было бы выделить сходящуюся подпоследовательность). Следовательно, для любого $M > 0$ существует такое $N > 0$, что $|a_n| > M$ для всех номеров $n > N$, а это и означает, что

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty.$$

237. Примером может служить последовательность, составленная из всех рациональных чисел, занумерованных произвольным образом.

238. Пусть F — предельное множество последовательности $\{a_n\}$ и ξ — точка прикосновения множества F. Тогда существует последовательность $\{x_k\}$ точек из F, сходящаяся к ξ. Так как x_1 — предельная точка последовательности $\{a_n\}$, то найдется номер n_1 такой, что $\rho(a_{n_1}, x_1) < 1$. Далее, так как и x_2 — предельная точка заданной последовательности, то существует номер n_2, больший, чем n_1, и такой, что $\rho(a_{n_2}, x_2) < \frac{1}{2}$. Если теперь уже выбраны номера $n_1, n_2, \ldots, n_{k-1}$ такие, что $n_1 < n_2 < \ldots < n_{k-1}$ и $\rho(a_{n_i}, x_i) < \frac{1}{i}$ для $i = 1, 2, \ldots, k-1$, то в качестве n возьмем номер $n_k > n_{k-1}$, для которого $\rho(a_{n_k}, x_k) < \frac{1}{k}$.

По индукции получим подпоследовательность $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$ исходной последовательности $\{a_n\}$, сходящуюся к ξ.

Действительно,

$$\rho(a_{n_k}, \xi) \leqslant \rho(a_{n_k}, x_k) + \rho(x_k, \xi),$$

откуда следует, что $a_{n_k} \to \xi$ при $k \to \infty$. Но это означает, что $\xi \in F$.

Итак, любая точка прикосновения ξ множества F принадлежит этому множеству; следовательно, оно замкнуто.

239. Случай $F = \varnothing$ рассмотрен в задаче 235. Если F непусто и конечно, $F = \{a_1, \ldots, a_k\}$, то требуемым свойством будет обладать последовательность $a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, \ldots$

Пусть теперь F бесконечно. Тогда существует счетное множество E, замыкание которого равно F. А именно в качестве E можно взять объединение следующих двух множеств: множества E_1 всех концов смежных интервалов к F и множества E_2 всех рациональных точек, являющихся внутренними точками множества F (конечно, E_2 может оказаться и пустым; это будет в том случае, когда F нигде не плотно). Легко видеть, что каждая точка x_0 множества F является точкой прикосновения для E: если x_0 — внутренняя точка множества F, то в любой ее окрестности $V(x_0)$ найдутся точки из E_2; если же x_0 — граничная точка множества F, то в любой ее окрестности $V(x_0)$ найдутся точки из E_1. Таким образом, $F \subset \overline{E}$. С другой стороны, так как $E \subset F$ и F замкнуто, то $\overline{E} \subset F$. Тем самым $F = \overline{E}$.

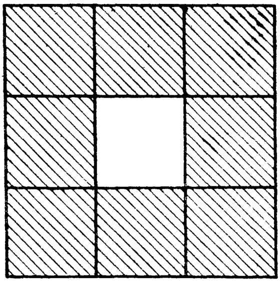
Расположим теперь точки множества E произвольным образом в последовательность $\{a_n\}$. Если E не имеет изолированных точек, то эта последовательность и будет искомой. Но в любом случае требуемым свойством будет обладать последовательность $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$

240. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность, сходящаяся к точке x. Очевидно, x — предельная точка для $\{x_n\}$. С другой стороны, пусть y — любая точка, отличная от x. Отделим x и y друг от друга непересекающимися окрестностями $V(x)$ и $V(y)$. В $\mathbf{C}V(x)$, а значит, и в $V(y)$ может находиться лишь конечное число членов из $\{x_n\}$, т. е. y — не предельная точка для $\{x_n\}$.

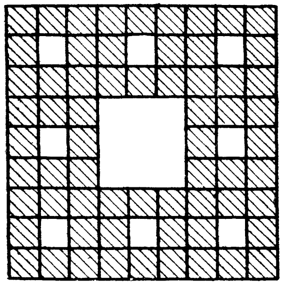
Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность с предельным множеством, образованным одной точкой x_0, и пусть $V(x_0)$ — произвольная окрестность точки x_0. Если бы в $\mathbf{C}V(x_0)$ находилось бесконечное число членов из $\{x_n\}$, то, в силу теоремы Больцано — Вейерштрасса, из них можно было бы выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x. Так как $x_{n_k} \in \mathbf{C}V(x_0)$ и $\mathbf{C}V(x_0)$ замкнуто, то $x \in \mathbf{C}V(x_0)$, т. е. $x \neq x_0$; следовательно, у $\{x_n\}$ существовали бы по крайней мере две предельные точки (x_0 и x), что противоречит условию. Итак, вне любой окрестности точки x_0 лежит не более чем конечное множество точек из $\{x_n\}$, т. е. $x_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

241. $\{a_n\}$, где $a_{2k} = k$, $a_{2k-1} = 1$.

242. Пусть A — совершенное подмножество множества иррациональных точек отрезка $[0, 1]$. Такое множество можно построить



а)



б)

Рис. 19

по схеме решения задачи 232, если в качестве ε_k брать иррациональные числа, меньшие единицы, удовлетворяющие принципам выбора в решении задачи 232. Тогда искомым совершенным множеством будет $A \times A$. Заметим, что $A \times A$ нигде не плотно, так как оно замкнуто, и его дополнение всюду плотно.

243. Квадрат $[a, b] \times [c, d]$ $(a < b,\ c < d)$ есть объединение попарно не пересекающихся вертикальных отрезков: $x = k$, $c \leqslant y \leqslant d$ $(a \leqslant k \leqslant b)$. Множество этих отрезков имеет мощность континуума. Каждый из них является непустым совершенным множеством.

244. Назовем замкнутыми квадратами первого ранга те восемь замкнутых квадратов, которые остаются на плоскости после выбрасывания центрального открытого квадрата, а сам этот выбрасываемый квадрат назовем открытым квадратом первого ранга (рис. 19, *а*). Аналогично определим замкнутые квадраты второго ранга (их число равно 8^2, сторона каждого из них равна $\frac{1}{3^2}$, см. рис. 19, *б*) и открытые квадраты второго ранга (их число равно 8, сторона каждого равна $\left.\frac{1}{3^2}\right)$. Продолжая так дальше, мы определим открытые и замкнутые квадраты всех рангов.

Ясно, что $A = \bigcap\limits_n P_n$, где P_n — объединение всех замкнутых квадратов ранга n. Так как каждое множество P_n замкнуто, то и их пересечение (т. е. A) тоже замкнуто.

Чтобы доказать, что A нигде не плотно, рассмотрим произвольный открытый круг J. Этот круг либо полностью свободен от точек множества A, либо содержит хотя бы одну его точку M; докажем, что и в этом последнем случае в круге J найдется меньший круг, полностью свободный от точек множества A. Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим замкнутый квадрат K_n ранга n, содержащий точку M и такой, чтобы его диагональ была меньше расстояния от точки M до границы круга J (это можно сделать, так как диагонали замкнутых квадратов стремятся к нулю при стремлении

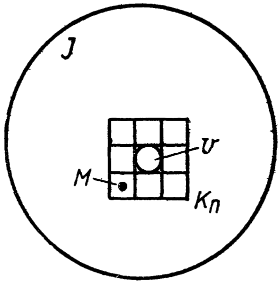


Рис. 20

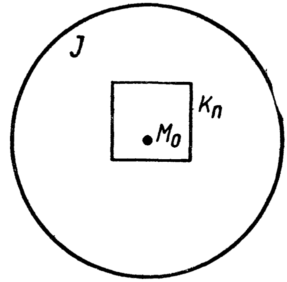


Рис. 21

их ранга n к бесконечности). Этот квадрат целиком лежит внутри круга J (рис. 20). Тогда открытый квадрат $n+1$-го ранга, лежащий в середине квадрата K_n, полностью свободен от точек множества A (и тоже лежит внутри круга J). Следовательно, круг V, вписанный в этот открытый квадрат, будет лежать внутри круга J и не будет содержать точек множества A. Итак, A — нигде не плотное множество на плоскости.

Подобным же путем доказывается, что A не имеет изолированных точек. Пусть $M_0 \in A$; опишем около M_0 произвольную окрестность J и рассмотрим замкнутый квадрат K_n, содержащий M_0 и включающийся в J (рис. 21). Границы этого квадрата будут принадлежать A и содержаться в J. Значит, M_0 не является изолированной точкой.

Так как A замкнуто и не содержит изолированных точек, то A — совершенное множество.

Выясним арифметическую структуру множества A. На первом этапе мы исключаем из основного квадрата такие точки $M(x, y)$, у которых разложение и абсциссы, и ординаты в троичную дробь обязательно содержит единицу на первом месте. На втором этапе исключаются, кроме того, все такие точки, у которых и абсцисса, и ордината содержат единицу на втором месте, и т. д. Таким образом, в множестве A останутся те и только те точки $M(x, y)$, у которых абсциссу и ординату можно разложить в троичные дроби $x = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$, $y = 0{,}\ b_1b_2b_3\ldots$ так, чтобы ни при каком k не выполнялось равенство $a_k = b_k = 1$. Так, например, $M_1(0{,}212121\ldots,\ 0{,}121212\ldots) \in A$; $M_2(0{,}202020\ldots,\ 0{,}202020\ldots) \in A$; $M_3(0{,}1000\ldots,\ 0{,}1111\ldots) \in A$ (в последнем случае, хотя $a_1 = b_1 = 1$, абсциссу этой точки можно переписать так: $0{,}02222\ldots$)*. С другой стороны, $M_4(0{,}1010\ldots,\ 0{,}1021\ldots) \bar{\in} A$ (эта точка исключается уже на первом шаге; она входит в открытый квадрат первого ранга).

---

* Здесь и далее координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4 заданы с помощью троичных дробей.

245. Исследование аналогично проведенному в решении задачи 244. Арифметическая структура множества B такова: в него входят те и только те точки $M(x, y)$ основного квадрата, у которых как абсцисса x, так и ордината y могут быть записаны в виде троичных дробей, не содержащих единицы среди своих троичных знаков.

246. Исследование проводится аналогично. Арифметическая структура множества E такова: оно состоит из всех точек $M(x, y)$ основного квадрата, абсциссы которых произвольны ($0 \leqslant x \leqslant 1$), а ординаты могут быть записаны в виде троичной дроби, не содержащей единицы среди своих троичных знаков.

247. $A = \{[0, 1] \times [0, 1]\} \setminus \{CD \times CD\}$, где CD — дополнение к канторову множеству D до всего отрезка $[0, 1]$; $B = D \times D$; $E = [0, 1] \times D$.

248. Так как G плотно в X, то S_0 содержит точку $x_0 \in G$. Но x_0 — внутренняя точка множества G. Поэтому некоторая ее окрестность $V(x_0, \varepsilon_0)$ также входит в G. Эту окрестность можно выбрать столь малого радиуса, чтобы она содержалась в S_0 и G вместе со своим замыканием: $\overline{V(x_0, \varepsilon_0)} \subset S_0 \cap G$.

249. Пусть $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, \ldots$ — последовательность открытых множеств, плотных в X, и S_0 — произвольный открытый шар. Согласно задаче 248, найдется открытый шар S_1 такой, что $\overline{S_1} \subset S_0 \cap G_1$, причем S_1 можно выбрать так, чтобы $\operatorname{diam} S_1 < 1$. Согласно той же задаче, найдется открытый шар S_2 такой, что $\overline{S_2} \subset S_1 \cap G_2$, причем S_2 можно выбрать так, чтобы $\operatorname{diam} S_2 < \frac{1}{2}$; далее, найдется открытый шар S_3 с $\operatorname{diam} S_3 < \frac{1}{3}$ такой, что $\overline{S_3} \subset S_2 \cap G_3$, и т. д. В итоге у нас получится последовательность открытых шаров $\{S_n\}$ такая, что $\overline{S_{n+1}} \subset S_n$ ($n = 1, 2, \ldots$), причем все они содержатся в ранее выбранном шаре S_0. Следовательно, согласно задаче 211, существует точка ξ, общая для всех этих шаров и, значит, тоже содержащаяся в S_0. С другой стороны, ξ содержится в каждом G_k (так как $\xi \in \overline{S_k} \subset S_{k-1} \cap G_k$). Таким образом, в произвольном шаре S_0 нашлась точка $\xi \in \bigcap_k G_k$. А это и означает, что $\bigcap_k G_k$ плотно в X.

250. Пусть ρ — обычное расстояние на прямой, $X = \{r_1, r_2, \ldots\}$ — множество рациональных точек на прямой, занумерованных произвольным образом. Тогда (X, ρ) — неполное метрическое пространство. Множества $F_n = \{r_1, \ldots, r_n\}$ ($n = 1, 2, \ldots$) замкнуты в (X, ρ), и, значит, множества $G_n = X \setminus F_n$ открыты. Кроме того, G_n плотны в X. Но $\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n = \varnothing$.

251. Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_n, \ldots$ — открытые множества, плотные в X, и $E = \bigcap_k G_k$. Согласно задаче 249, E плотно в X.

Возьмем в X какие-либо два непересекающихся шара S_0 и S_1 и в каждом из них выберем шары δ_0 и δ_1 так, чтобы $\overline{\delta}_0 \subset S_0 \cap G_1$, $\overline{\delta}_1 \subset S_1 \cap G_1$, причем $\operatorname{diam} \delta_0 < 1$, $\operatorname{diam} \delta_1 < 1$ (см. задачу 248). Назовем δ_0 и δ_1 *шарами первого ранга.*

Для дальнейшего заметим, что в каждом шаре $S \subset X$ можно выбрать два непересекающихся шара. Действительно, в S существуют две различные точки x и y, так как X не имеет изолированных точек. Точки x и y можно отделить друг от друга непересекающимися шарами, причем столь малых радиусов, чтобы эти шары входили в S.

Используя этот результат, рассмотрим теперь какие-либо два непересекающихся шара S_{00} и S_{01}, включающиеся в δ_0, и два непересекающихся шара S_{10} и S_{11}, включающиеся в δ_1. В каждом из них найдем по шару δ_{00}, δ_{01}, δ_{10}, δ_{11} так, чтобы

$$\overline{\delta}_{00} \subset S_{00} \cap G_2,\ \overline{\delta}_{01} \subset S_{01} \cap G_2,\ \overline{\delta}_{10} \subset S_{10} \cap G_2,$$
$$\overline{\delta}_{11} \subset S_{11} \cap G_2,$$

и диаметр каждого из этих шаров был меньше $\frac{1}{2}$. Шары δ_{00}, δ_{01}, δ_{10}, δ_{11} назовем *шарами второго ранга.* Вообще, если построены шары k-го ранга, то для построения шаров $k+1$-го ранга поступаем следующим образом: пусть $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ (где $i_1, i_2, \ldots, i_k$ — нули или единицы) — какой-либо шар k-го ранга, причем $\operatorname{diam} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} < \frac{1}{k}$. Выделим в нем два непересекающихся шара $S_{i_1 i_2 \ldots i_k 0}$ и $S_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}$ и в каждом из них найдем по шару $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_k 0}$ и $\delta_{i_1 i_2 \ldots i_k 1}$ так, чтобы

$$\overline{\delta}_{i_1 i_2 \ldots i_k 0} \subset S_{i_1 i_2 \ldots i_k 0} \cap G_{k+1},\ \overline{\delta}_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} \subset S_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} \cap G_{k+1}$$

и

$$\operatorname{diam} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_k 0} < \frac{1}{k+1},\ \operatorname{diam} \delta_{i_1 i_2 \ldots i_k 1} < \frac{1}{k+1}.$$

Все полученные таким образом шары назовем *шарами $k+1$-го ранга.* Их вдвое больше, чем шаров k-го ранга. Ясно, что: а) различные шары k-го ранга (при фиксированном k), и даже их замыкания, не пересекаются друг с другом; б) с возрастанием номера k диаметры шаров стремятся к 0; в) для любой последовательности нулей и единиц $i_1, i_2, \ldots, i_k, \ldots$ имеем:

$$\delta_{i_1} \supset \overline{\delta}_{i_1 i_2},\ \delta_{i_1 i_2} \supset \overline{\delta}_{i_1 i_2 i_3},\ \ldots$$

Из свойств б) и в) вытекает, что для любой последовательности нулей и единиц $i_1, i_2, \ldots$ существует единственная точка $x_{i_1 i_2 i_3}$, общая для всех шаров δ_{i_1}, $\delta_{i_1 i_2}$, $\delta_{i_1 i_2 i_3}$, ... (см. задачу 211); вместе с тем из свойства а) следует, что двум *различным* последовательностям $i_1, i_2, i_3, \ldots$ и $i'_1, i'_2, i'_3, \ldots$ соответствуют две *различные* точки

$x_{i_1 i_2 i_3} \ldots$ и $x_{i'_1 i'_2 i'_3} \ldots$; следовательно, множество A всех таких точек $x_{i_1 i_2 i_3} \ldots$ будет иметь ту же мощность, что и множество всевозможных последовательностей из нулей и единиц, т. е. мощность континуума.

Докажем, что $A \subset E$. Пусть $i_1, i_2, i_3, \ldots$ — произвольная последовательность нулей и единиц; для любого номера k имеем:

$$x_{i_1 i_2 i_3 \ldots} \in \overline{\delta}_{i_1 i_2 \ldots i_k} \subset G_k.$$

Следовательно, $x_{i_1 i_2 i_3} \in \bigcap\limits_k G_k = E$, т. е. любая точка множества A является элементом множества E. Так как, по доказанному, A имеет мощность континуума, то мощность множества E не меньше мощности континуума.

252. Построим на отрезке $[0, 1]$ последовательность совершенных множеств $A_1, A_2, A_3, \ldots$ следующим образом. В качестве A_1 возьмем канторово множество D. Для построения A_n при $n > 1$ разобьем $[0, 1]$ на n равных отрезков и на каждом из них построим нигде не плотное совершенное множество тем же процессом, каким строилось D на $[0, 1]$; объединение этих n множеств примем за A_n. Положим теперь $A = \bigcup\limits_n A_n$, $B = [0, 1] \setminus A$. Каждый интервал $]\alpha, \beta[\subset [0, 1]$ содержит отрезок вида $\left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ с достаточно большим n. По построению $A_n \cap \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$ есть совершенное множество, подобное канторову, и потому имеет мощность континуума. А так как $[0, 1] \supset A \cap\,]\alpha, \beta[\, \supset A_n \cap \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right]$, то и $A \cap\,]\alpha, \beta[$ имеет мощность континуума.

Докажем теперь, что $B \cap\,]\alpha, \beta[$ имеет мощность континуума. Возьмем произвольный отрезок $[\gamma, \delta] \subset\,]\alpha, \beta[$. Имеем:

$$B \cap [\gamma, \delta] = \bigcap_n \{[\gamma, \delta] \setminus A_n\}.$$

Но $[\gamma, \delta]$ — замкнутое и потому полное подпространство числовой прямой (наделенной обычной метрикой), а $[\gamma, \delta] \setminus A_n$ — открытые в нем множества (см. задачу 193). Так как они всюду плотны в $[\gamma, \delta]$, то, в силу результата задачи 251, $B \cap [\gamma, \delta]$ имеет мощность, не меньшую мощности континуума. А так как $[0, 1] \supset B \cap\,]\alpha, \beta[\, \supset B \cap [\gamma, \delta]$, то $B \cap\,]\alpha, \beta[$ имеет мощность континуума.

253. Это непосредственно вытекает из задачи 251, если учесть, что совершенное множество E само является полным пространством без изолированных точек и что $E = \bigcap\limits_n E_n$, где $E_n = E$ при $n = 1, 2, \ldots$, так что каждое E_n открыто и плотно в E.

254. Пусть $B_1, B_2, \ldots, B_k, \ldots$ — плотные множества типа G_δ в X и B — их пересечение. Тогда для любого k $B_k = \bigcap\limits_i G_{ki}$, где G_{ki} — открытые множества. Так как $G_{ki} \supset B_k$, то все G_{ki} также плотны в X. Следовательно, $B = \bigcap\limits_k (\bigcap\limits_i G_{ki}) = \bigcap\limits_{k, i} G_{ki}$ есть пересече-

ние конечной или счетной совокупности плотных открытых множеств G_{kl}. Но тогда B является множеством типа G_δ, плотным в X (см. задачу 249).

255. В качестве множеств E_n можно взять множества G_n из решения задачи 250.

256. Как известно, множество всех простых чисел бесконечно и, значит, счетно. Перенумеруем их: $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$, $p_5 = 11, \ldots$ и обозначим через E_k множество всех чисел вида $r + \sqrt{p_k}$, где r пробегает все рациональные числа, а p_k фиксировано. Тогда каждое E_k счетно и всюду плотно на прямой (оно получается из множества всех рациональных чисел сдвигом на $\sqrt{p_k}$). Докажем, что множества E_k попарно не пересекаются.

Пусть $k \neq i$ и, следовательно, $p_k \neq p_i$. Возьмем произвольный элемент $\xi = r_1 + \sqrt{p_k}$ из множества E_k и произвольный элемент $\eta = r_2 + \sqrt{p_i}$ из множества E_i и докажем, что $\xi \neq \eta$. Допустим что $\xi = \eta$; тогда $r_1 + \sqrt{p_k} = r_2 + \sqrt{p_i}$, откуда $(r_1 - r_2)^2 = (\sqrt{p_i} - \sqrt{p_k})^2$ или $\sqrt{p_i p_k} = \frac{p_i + p_k - (r_1 - r_2)^2}{2}$; мы получили заведомо неверный результат (квадратный корень из произведения двух различных простых чисел оказался рациональным числом). Следовательно, наше допущение, что $\xi = \eta$, неверно; значит, $E_i \cap E_k = \varnothing$ при любых различных i и k.

257. Множество E всех рациональных чисел, как всякое счетное множество, есть объединение счетной совокупности одноточечных и, значит, замкнутых множеств. Следовательно, E — множество типа F_σ.

С другой стороны, E всюду плотно на прямой. Если бы оно было множеством типа G_δ, то множество E_1, полученное из E сдвигом на $\sqrt{2}$ (т. е. множество всех чисел вида $r + \sqrt{2}$, где $r \in E$), также было бы всюду плотным множеством типа G_δ. Но в этом случае и их пересечение было бы всюду плотным множеством (см. задачу 254), тогда как на самом деле $E_1 \cap E = \varnothing$. Следовательно, допущение, что E является множеством типа G_δ, неверно.

258. Для доказательства надо использовать результаты задач 204 и 257.

259. См. решение задачи 257. Указание. Сдвиг надо производить на число a, выбранное так, чтобы множество точек вида $x + a$ (где $x \in E$) не пересекалось с E (это возможно в силу счетности E, см. задачу 71).

Требуемый результат можно получить и другим способом — как следствие задачи 251.

260. См. задачу 259.

261. Если бы множество $[0, 1[\, \cap I$, где I — множество всех иррациональных чисел, имело тип F_σ, то любое множество вида $[k, k + 1[\, \cap I$, где k — целое, также имело бы тип F_σ, так как оно конгруэнтно данному. Но тогда объединение $\bigcup_k \{[k, k+1[\cap I\}$, где k пробегает все целые числа, также было бы множеством типа F_σ, что невозможно, так как оно совпадает со всем множеством I (см. задачу 258).

Доказательство того, что $[\alpha, \beta[\cap I$ при любых α и β, где $\alpha < \beta$, не есть множество типа F_σ, проводится аналогично; только сдвиги производятся не на целые числа, а на целые кратные какого-либо фиксированного рационального числа $r \in]0, \beta - \alpha]$.

Чтобы доказать, что $[\alpha, \beta[\cap E$, где E — множество всех рациональных чисел, не есть множество типа G_δ, достаточно заметить, что его дополнение $[\alpha, \beta[\cap I$ до полуинтервала $[\alpha, \beta[$ не есть множество типа F_σ.

262. Например, множество M, составленное из всех отрицательных рациональных и всех положительных иррациональных чисел. Если бы M имело тип G_δ, то его часть, попавшая в промежуток $[-1, 0[$, также имела бы тип G_δ, что неверно (см. задачу 261); если бы M имело тип F_σ, то его часть, попавшая в промежуток $[1, 2[$, также имела бы тип F_σ, что тоже неверно.

263. Пусть A нигде не плотно, V — какой-либо шар, а V_1 — открытый шар, содержащийся в V, свободный от точек множества A. Тогда V_1 не содержит также точек множества $\overline{A}$, и тем самым $\overline{A}$ нигде не плотно.

264. Прямое утверждение доказывается без труда. Обратное утверждение неверно. Пример. Множество рациональных чисел всюду плотно на прямой, но и его дополнение всюду плотно.

265. Пусть S — любой открытый шар. Согласно задаче 248, $S \cap E$ содержит вместе с замыканием некоторый шар S_0, очевидно свободный от точек $\mathbf{C}E$. Значит, $\mathbf{C}E$ нигде не плотно.

266. Пусть $E = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$, где $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — нигде не плотные множества и S — произвольный шар. Так как E_1 нигде не плотно, то найдется шар S_1 в S, свободный от точек E_1. Далее, так как E_2 нигде не плотно, то в S_1 найдется шар S_2, свободный от точек E_2; а так как $S_2 \subset S_1$, то S_2 не содержит также точек множества E_1. Продолжая этот процесс, мы получим, после n шагов, шар S_n, свободный от точек множеств $E_1, E_2, \ldots, E_n$ и, значит, свободный от точек множества E, причем $S_n \subset S$. Следовательно, E нигде не плотно. Для объединения счетной совокупности множеств это утверждение опровергается примером множества рациональных точек на прямой, которое всюду плотно, но является объединением счетной совокупности одноточечных и, значит, нигде не плотных множеств.

267. Пусть $X = \bigcup_i E_i$, где E_i нигде не плотны в X. Пусть $V(x_1, \varepsilon_1)$ — шар, свободный от точек множества E_1; $V(x_2, \varepsilon_2)$ — шар, свободный от точек множества E_2, включающийся вместе со своим замыканием в $V(x_1, \varepsilon_1)$ и такой, что $\varepsilon_2 < \frac{1}{2}$; $V(x_3, \varepsilon_3)$ — шар, свободный от точек множества E_3, включающийся вместе с замыканием в $V(x_2, \varepsilon_2)$ и такой, что $\varepsilon_3 < \frac{1}{3}$, и т. д. Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ фундаментальна и, следовательно, в силу полноты пространства, имеет предел: $\zeta = \lim x_n$ $(\zeta \in X)$. Так как $\zeta \in \overline{V(x_{i+1}, \varepsilon_{i+1})}$ для всех i, а $\overline{V(x_{i+1}, \varepsilon_{i+1})} \subset V(x_i, \varepsilon_i)$, то $\zeta \overline{\in} E_i$ для всех i. Значит $\zeta \overline{\in} \bigcup_i E_i$, что противоречит тому, что $X = \bigcup_i E_i$. Итак, X — множество второй категории.

268. Множество E всех рациональных точек на прямой, наделенное обычным расстоянием, есть неполное метрическое пространство, являющееся объединением счетной совокупности нигде не плотных (а именно одноточечных) множеств; следовательно, E — множество первой категории.

269. Противоречия нет. Канторово множество D нигде не плотно как подмножество пространства $\boldsymbol{R}^1$, но не является таковым в самом себе, где оно, наоборот, всюду плотно.

270. Пусть x_0 — изолированная точка метрического пространства X. Одноточечное множество $\{x_0\}$ открыто в X. Если E — какое-либо нигде не плотное множество в X, то существует непустое открытое множество $U \subset \{x_0\}$ такое, что $U \cap E = \varnothing$. Но единственное непустое подмножество в $\{x_0\}$ есть оно само. Поэтому $U = \{x_0\}$ и $x_0 \overline{\in} E$ для каждого нигде не плотного множества E. Значит, X не представимо в виде объединения любого, в том числе и счетного, семейства нигде не плотных множеств.

271. Пусть X — числовая прямая с выколотой точкой, например, $X = \boldsymbol{R}^1 \setminus \{0\}$; ρ — обычное расстояние на X. Тогда (X, ρ) — неполное метрическое пространство без изолированных точек. Любое множество E, нигде не плотное в X, нигде не плотно и в $\boldsymbol{R}^1$. Действительно, для любой точки $x \in \boldsymbol{R}^1$ и любой ее окрестности $V(x)$ найдется интервал $I \subset V(x)$, не содержащий точки 0 и, значит, входящий в X. Так как E нигде не плотно в X, то в I содержится интервал I_1, не пересекающийся с E. Но $I_1 \subset V(x) \subset \boldsymbol{R}^1$. А это и доказывает, что E нигде не плотно в $\boldsymbol{R}^1$.

Если теперь предположить, что $X = \bigcup_n E_n$, где все E_n нигде не плотны в X, то $\boldsymbol{R}^1$ представится в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств:

$$\boldsymbol{R}^1 = \bigcup_n E_n \cup \{0\}.$$

Но это невозможно, поскольку $\boldsymbol{R}^1$ — полное пространство (см. задачу 267). Следовательно, X — множество второй категории.

272. Пусть X — полное метрическое пространство и E — множество первой категории в X, так что $E = \bigcup_n E_n$, где все E_n нигде не плотны в X. Предположим, что $\mathbf{C}E$ — множество первой категории, т. е. $\complement E = \bigcup_n S_n$, где S_n — нигде не плотные множества в X. Тогда $X = (\bigcup_n E_n) \cup (\bigcup_n S_n)$, что противоречит теореме Бэра. Значит, $\complement E$ — множество второй категории.

273. Множество $\complement E$ — первой категории, так как оно является объединением прямых $x = r_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $y = r_k$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где r_k пробегает все рациональные числа (каждая прямая — нигде не плотное множество на плоскости). Следовательно, E — множество второй категории (см. задачу 272).

274. Пусть $x \in \overline{D}_E$. В любой окрестности $V(x)$ найдется точка $x_0 \in D_E$. Возьмем окрестность $V(x_0) \subset V(x)$. Так как $V(x_0) \cap E$ — множество второй категории, то и $V(x) \cap E$ — множество второй категории, т. е. $x \in D_E$. Следовательно, D_E замкнуто.

Пусть теперь $x_0 \in D_E$. Так как для любой окрестности $V(x_0)$ множество $V(x_0) \cap E$ второй категории, и, следовательно, бесконечно, то $V(x_0)$ содержит бесконечное число точек из E. Значит, $x_0 \in E'$.

275. Пусть E нигде не плотно и I — произвольный интервал на прямой. Интервал I_{-a}, полученный из I сдвигом на $-a$, содержит подинтервал J, свободный от точек множества E. Но тогда интервал J_a, который получится из I сдвигом на a, включается в I и не содержит ни одной точки из E. Следовательно, E_a нигде не плотно.

Если же E всюду плотно и I — произвольный интервал, то I_a содержит точку $x_0 \in E$; а тогда $x_0 + a \in I \cap E_a$ и, следовательно, E_a всюду плотно.

276. Пусть E^a — множество всех точек вида $a - x$, где x пробегает E. Как легко проверить, E^a — открытое всюду плотное множество на прямой. Поэтому из задачи 249 следует, что $E \cap E^a \neq \varnothing$. Пусть $x_1 \in E \cap E^a$; тогда $x_1 \in E$ и $x_1 = a - x_2$, где $x_2 \in E$. Следовательно, $a = x_1 + x_2$, где $x_1, x_2 \in E$.

277. Если множество E всюду плотно на прямой, то любой интервал $]\alpha, \beta[$ содержит бесконечно много точек из E, так как в противном случае на $]\alpha, \beta[$ нашелся бы интервал, полностью свободный от точек множества E. Если теперь из E исключить конечное подмножество A, то на произвольном интервале $]\alpha, \beta[$ все же останется бесконечно много точек из $E \setminus A$. Значит, $E \setminus A$ всюду плотно на прямой.

278. В задаче 256 была построена последовательность $E_1, E_2, \ldots$ попарно не пересекающихся всюду плотных счетных множеств на прямой. Обозначим дополнение к объединению этих множеств через I (его пересечение с любым интервалом несчетно) и рассмотрим счетную совокупность множеств:

$$E_k \cup (I \cap \,]k-1, k[) \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Ясно, что эти множества попарно не пересекаются, а каждое из них всюду плотно на прямой и несчетно.

279. Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка пространства $X \times Y$ и $V((x_0, y_0), \varepsilon)$ — произвольная ее окрестность. Так как E нигде не плотно в X, то окрестность $V\left(x_0, \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}\right)$ содержит шар $V(z_0, \delta)$ радиуса $\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, свободный от точек множества E. Но тогда шар $V((z_0, y_0), \delta)$ содержится в $V((x_0, y_0), \varepsilon)$ и свободен от точек множества $E \times F$.

280. Согласно задаче 196, множество $E \times F$ замкнуто. Предположим теперь, что оно имеет изолированную точку (x_0, y_0), т. е. существует $\varepsilon > 0$ такое, что $V((x_0, y_0), \varepsilon)$ не содержит ни одной точки из $E \times F$, отличной от (x_0, y_0). Но тогда $V(x_0, \varepsilon)$ не содержит ни одной точки из E, отличной от x_0 (если бы нашлась точка $x \neq x_0$ такая, что $x \in V(x_0, \varepsilon) \cap E$, то мы имели бы $(x, y_0) \in V((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (E \times F)$ и $(x, y_0) \neq (x_0, y_0)$). Аналогично $V(y_0, \varepsilon)$ не содержит ни одной точки из F. Но это противоречит тому, что E или F — совершенное множество.

281. Пусть (x_0, y_0) — произвольная точка из $X \times Y$ и $V((x_0, y_0), \varepsilon)$ — произвольная ее окрестность. Существуют x из E такое, что $\rho_X(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$, и y из F такое, что $\rho_Y(y, y_0) < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$. Но тогда $(x, y) \in V((x_0, y_0), \varepsilon) \cap (E \times F)$. Тем самым $E \times F$ плотно в $X \times Y$.

282. Луч $[0, +\infty[$. Действительно, любой интервал $]\alpha, \beta[$, где $0 \leqslant \alpha < \beta$, содержит число вида $\frac{p^2}{q^2}$ (это число легко найти: сначала найдем рациональное число $\frac{p}{q}$, заключенное между $\sqrt{\alpha}$ и $\sqrt{\beta}$, а затем возведем его в квадрат).

283. Луч $[1, +\infty[$.

284. Отрезок $[0, 1]$.

285. Для каждого натурального числа k существует такое целое число n_k, что $n_k < k\zeta < n_k + 1$; положим $x_k = -n_k + k\zeta$; ясно, что $0 < x_k < 1$. Покажем теперь, что произвольный интервал u содержит число вида $m + n\zeta$ с целыми m и n. Пусть i — натуральное число такое, что $\frac{1}{i} < |u|$, где $|u|$ — длина интервала u. Тогда среди чисел $x_1, x_2, \ldots, x_{i+1}$ найдется по меньшей мере два таких, расстояние между которыми меньше, чем $\frac{1}{i}$:

$$|x_{k_1} - x_{k_2}| < \frac{1}{i},$$

или, считая, что, например, $x_{k_1} > x_{k_2}$:

$$0 < x_{k_1} - x_{k_2} < \frac{1}{i}.$$

Положим $\delta = x_{k_1} - x_{k_2}$ и разобьем прямую точками, кратными δ:

$$\ldots, -3\delta, -2\delta, -\delta, 0, \delta, 2\delta, 3\delta, \ldots$$

Так как $0 < \delta < |u|$, то по крайней мере одна из этих точек, скажем $p\delta$, где p — целое число, попадет в интервал u. Но

$$p\delta = p(x_{k_1} - x_{k_2}) = p((-n_{k_1} + k_1\zeta) - (-n_{k_2} + k_2\zeta)) = m + n\zeta,$$

где $m = pn_{k_2} - pn_{k_1}$ и $n = pk_1 - pk_2$ — целые. Таким образом, любой наугад выбранный интервал u содержит по меньшей мере одну точку вида $m + n\zeta$, т. е. множество этих точек всюду плотно на прямой.

286. Да. Это следует из результата предыдущей задачи. Действительно, пусть $]\alpha, \beta[$ — произвольный интервал. Так как $\left]\frac{\alpha}{2}, \frac{\beta}{2}\right[$ содержит число вида $m + n\zeta$ (где m и n — целые), то $]\alpha, \beta[$ содержит число $2m + 2n\zeta$.

287. Допустим, что существует дуга $\Delta_0 \subset \Gamma$, свободная от точек множества M. Обозначим через Δ_k дугу, которая получается в результате поворота дуги Δ_0 на k радиан по часовой стрелке. Ясно, что Δ_k при любом целом $k \geqslant 0$ также свободна от точек из M.

Дуги $\Delta_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_k, \ldots$, имеющие одинаковую длину и расположенные на окружности Γ конечной длины, не могут все попарно не пересекаться. Пусть, например, $\Delta_{i_0} \cap \Delta_{i_0+m} \neq \varnothing$. При этом $\Delta_{i_0} \neq \Delta_{i_0+m}$, поскольку угол m не может быть кратным углу 2π в силу иррациональности числа π. Из того, что $\Delta_{i_0} \cap \Delta_{i_0+m} \neq \varnothing$, вытекает, что при повороте любого Δ_k по часовой стрелке на угол m мы получим дугу Δ_{k+m}, пересекающуюся с Δ_k по непустому множеству. В частности, по непустому множеству пересекаются любые две соседние дуги из последовательности

$$\Delta_0, \Delta_m, \Delta_{2m}, \ldots$$

Но тогда эти дуги покрывают всю окружность Γ, что невозможно, поскольку ни одно Δ_k не содержит точек из M (рис. 22).

Итак, на окружности Γ не существует дуги, свободной от точек множества M, т. е. M плотно на Γ.

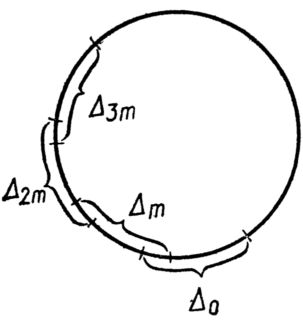


Рис. 22

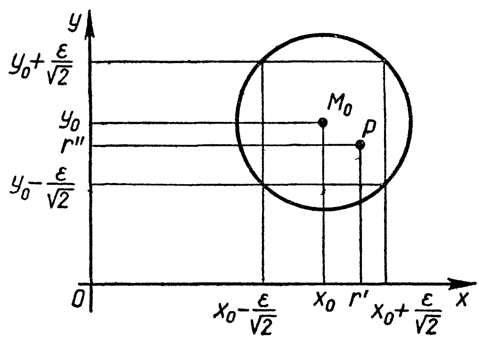


Рис. 23

288. ε-окрестность произвольной точки $M(x_0, y_0)$ плоскости Oxy содержит рациональную точку $P(r', r'')$, где

$$x_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < r' < x_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad y_0 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < r'' < y_0 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

(рис. 23).

289. См. решение задачи 224.

290. Это множество строится следующим образом: делим отрезок на десять равных частей и выбрасываем интервал $]0{,}4,\ 0{,}6[$. Затем каждый из оставшихся отрезков первого ранга:

$[0,\ 0{,}1], \ldots, [0{,}3,\ 0{,}4], [0{,}6,\ 0{,}7], \ldots, [0{,}9,\ 1]$ делим на десять равных частей и выбрасываем в каждом из них два средних интервала вместе с разделяющей их точкой, т. е. из отрезка $[0,\ 0{,}1]$ — интервал $]0{,}04,\ 0{,}06[$, из отрезка $[0{,}1,\ 0{,}2]$ — интервал $]0{,}14,\ 0{,}16[$ и т. д. Затем каждый из оставшихся отрезков второго ранга делим на десять равных частей и выбрасываем два средних интервала вместе с разделяющей их точкой и т. д.

Доказательство того, что E нигде не плотно и совершенно, проводится так же, как для канторова множества.

291. Это множество не замкнуто. Его замыкание состоит из всех (в том числе и рациональных) точек отрезка $[0,\ 1]$, обладающих десятичным разложением, не содержащим цифры 5. Как само заданное множество, так и его замыкание не содержат изолированных точек. Как заданное множество, так и его замыкание нигде не плотны на прямой.

292. Такое множество образуют концы смежных интервалов к D. Его плотность в D легко следует из описания арифметической структуры точек первого и второго рода множества D (см. решение задачи 226).

293. См. решение задачи 239.

294. Пусть φ — произвольный элемент пространства $C[0,\ 1]$. Согласно определению расстояния в $C[0,\ 1]$, окрестность $V(\varphi, \varepsilon)$ состоит из всех функций $\chi \in C[0,\ 1]$ таких, что $\varphi(x) - \varepsilon < \chi(x) < \varphi(x) + \varepsilon$ для всех $x \in [0,\ 1]$. Но согласно аппроксимационной теореме Вейерштрасса, существует такой многочлен P, что $\varphi(x) - \varepsilon < P(x) < \varphi(x) + \varepsilon$ для всех $x \in [0,\ 1]$; таким образом, множество всех многочленов плотно в $C[0,\ 1]$.

295. Пусть ε — произвольное положительное число. Для любой функции $\varphi \in C[0,\ 1]$ существует такой многочлен P, что $\rho(\varphi, P) < \frac{\varepsilon}{2}$ (теорема Вейерштрасса). Пусть $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$. Заменим все a_i рациональными числами b_i такими, что $|a_i - b_i| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$, и обозначим через Q получившийся многочлен с рациональными коэффициентами b_i:

$$Q(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_n x^n.$$

Тогда для всех $x \in [0, 1]$,

$$|P(x) - Q(x)| = |(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \dots + (a_n - b_n)x^n| \leqslant |a_0 - b_0| + |a_1 - b_1| + \dots + |a_n - b_n| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \cdot (n+1) = \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. $\rho(P, Q) < \frac{\varepsilon}{2}$. Но тогда

$$\rho(\varphi, Q) \leqslant \rho(\varphi, P) + \rho(P, Q) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, множество многочленов с рациональными коэффициентами плотно в $C[0, 1]$.

296. Пусть $f(-x) = -f(x)$ для всех $x \in [-1, 1]$. По теореме Вейерштрасса, для любого $\varepsilon > 0$ найдется многочлен $Q(x)$ такой, что

$$|f(x) - Q(x)| < \varepsilon \text{ для всех } x \in [-1, 1]. \qquad (1)$$

Так как вместе с x также $-x \in [-1, 1]$, то и $|f(-x) - Q(-x)| < \varepsilon$ для всех $x \in [-1, 1]$. Но

$$|f(-x) - Q(-x)| = |-f(x) - Q(-x)| = |f(x) - (-Q(-x))|.$$

Следовательно,

$$|f(x) - (-Q(-x))| < \varepsilon \text{ для всех } x \in [-1, 1]. \qquad (2)$$

Из неравенств (1) и (2) получаем:

$$\left| f(x) - \frac{Q(x) - Q(-x)}{2} \right| < \varepsilon.$$

Многочлен $P(x) = \frac{Q(x) - Q(-x)}{2}$ является искомым. Действительно, пусть

$$Q(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_nx^n.$$

Тогда

$$-Q(-x) = -a_0 + a_1x - a_2x^2 + a_3x^3 - \dots + (-1)^{n+1}a_nx^n \qquad \text{и}$$

$P(x)$ содержит лишь нечетные степени x.

Для случая, когда $f(x)$ — четная функция, рассуждение аналогично.

297. Для любого натурального числа k найдем многочлен P_k такой, что $|P_k(x) - f(x)| < \frac{1}{2^k}$ для всех $x \in [-k, k]$. Последовательность $\{P_k\}$ будет искомой.

298. Пусть $\{P_k\}$ — данная последовательность многочленов, сходящаяся к f равномерно на Ox. Тогда существует номер N такой, что для всех m, $n > N$ и всех вещественных x выполняется неравенство

$$|P_m(x) - P_n(x)| < 1.$$

Зафиксируем номер $n_0 > N$. Многочлены $P_m(x) - P_{n_0}(x)$ ограничены на всей прямой, что возможно, лишь когда $P_m(x) - P_{n_0}(x) = \alpha_m$, где α_m — постоянные. Отсюда $f(x) - P_{n_0}(x) = \lim\limits_{m\to+\infty} \alpha_m$ для всех x, так что $f(x) - P_{n_0}(x) = c$, где c — постоянная. Следовательно, $f(x) = P_{n_0}(x) + c$, т. е. $f(x)$ — многочлен.

299. Пусть E_1 — множество всех многочленов с рациональными коэффициентами. Оно счетно (см. задачу 62 или 65). Расположим его как-нибудь в последовательность $E_1 = \{g_1, g_2, \ldots\}$ и положим $E_n = \{g_n, g_{n+1}, \ldots\}$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Из результата задачи 295 следует, что E_1 плотно в $C[0, 1]$. Остальные множества плотны в $C[0, 1]$, так как отличаются от E_1 только на конечные множества точек. Поскольку $C[0, 1]$ полно (задача 130), никакая последовательность его плотных подмножеств с пустым пересечением не может состоять из одних открытых множеств (см. задачу 249).

300. Докажем сначала, что E замкнуто. Пусть $P_k \to f$, где $P_k \in E$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $f \in C[0, 1]$. Выберем в $[0, 1]$ какие-нибудь $N + 1$ попарно различных точек $x_1, \ldots, x_{N+1}$. Тогда для $i = 1, \ldots, N + 1$ будем иметь: $P_k(x_i) \to f(x_i)$, или $P_k(x_i) = f(x_i) + \gamma_{ik}$, где $\gamma_{ik} \to 0$ при $k \to +\infty$. Обозначим $P_k(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_{kn} x^n$ и разрешим (при фиксированном k) систему линейных уравнений $\sum\limits_{n=0}^{N} a_{kn} x_i^n = f(x_i) + \gamma_{ik}$ $(i = 1, \ldots, N + 1)$ относительно a_{kn}. Так как $\lim\limits_{k\to+\infty} \gamma_{ik} = 0$, то, как легко видеть, $a_{kn} \to a_n$ при $k \to +\infty$, где $(a_1, \ldots, a_{N+1})$ — решение системы линейных уравнений

$$\sum_{n=0}^{N} a_n x_i^n = f(x_i) \ (i = 1, \ldots, N + 1). \text{ Тогда } \lim_{k\to+\infty} P_k(x) =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_{kn} x^n = \sum_{n=0}^{N} a_n x^n \text{ для всех } x \in [0, 1],$$

т. е. $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} a_n x^n$ и, значит $f \in E$. Следовательно E замкнуто, так что $\complement E$ открыто.

Но тогда, в силу результата задачи 265, нам достаточно для любого $P \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ найти элемент из $C[0, 1]$, входящий в $V(P, \varepsilon)$ и не принадлежащий E. Таким элементом будет, например, функция $\varphi(x) = P(x) + \frac{\varepsilon}{2} x^{N+1}$. Итак, E нигде не плотно в $C[0, 1]$.

301. Пусть $\zeta(a_1, a_2, \ldots)$ — произвольная точка из l_2. Так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{+\infty} a_i^2$ сходится, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует N такое, что

$\sum\limits_{i=N+1}^{+\infty} a_i^2 < \varepsilon^2$. Обозначим через z последовательность $(a_1, a_2, \ldots, a_N, 0, \ldots)$. Ясно, что $z \in E$ и $\rho(\zeta, z) < \varepsilon$. Итак, E плотно в l_2.

302. Пусть U — произвольный шар в l_2. Этот шар либо полностью свободен от точек множества E, либо содержит точку $\zeta \in E$, $\zeta = (z_1, \ldots, z_N, 0, 0, \ldots)$. В последнем случае возьмем $\varepsilon > 0$ такое, что $V(\zeta, \varepsilon) \subset U$, и рассмотрим точку $\eta\left(z_1, \ldots, z_N, \frac{\varepsilon}{2}, 0, \ldots\right)$. Тогда для любой точки $x \in E$ имеем: $\rho(x, \eta) \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. $V\left(\eta, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset \subset CE$. Кроме того, $V\left(\eta, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subset V(\zeta, \varepsilon) \subset U$. Таким образом, в U всегда найдется шар, свободный от точек множества E, т. е. E нигде не плотно.

Глава VI. КОМПАКТНОСТЬ, СЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ, СВЯЗНОСТЬ

303. Если множество E не ограничено, т. е. $\operatorname{diam} E = \sup\limits_{x,\, y \in E} \rho(x, y) = +\infty$, то, какова бы ни была точка $x_0 \in E$, $\sup\limits_{x \in E} \rho(x_0, x) = +\infty$ (так как если $\rho(x_0, x) \leqslant M$ для всех $x \in E$, то $\rho(x, y) \leqslant \leqslant \rho(x, x_0) + \rho(x_0, y) \leqslant 2M$ для всех $x, y \in E$). Поэтому, зафиксировав какую-нибудь точку $x_0 \in E$, можно найти в E последовательность точек $\{x_n\}$, для которой $\rho(x_0, x_n) \to +\infty$. Тогда $\rho(x_0, x_{n_k}) \to \to +\infty$ и для любой ее подпоследовательности $\{x_{n_k}\}$, а потому последняя не будет фундаментальной и, значит, сходящейся. Следовательно, E не является относительно компактным.

Точно так же, если E не замкнуто, то найдется последовательность его точек, сходящаяся к точке прикосновения множества E, не принадлежащей E; но из такой последовательности нельзя выделить подпоследовательности, сходящейся к точке из E, так что E некомпактно.

304. Достаточность очевидна, так же как и относительная компактность любого компактного множества. Замкнутость компактного множества установлена в решении предыдущей задачи:

305. Вытекает из результата предыдущей задачи.

306. Пусть $\{x_n\}$ — последовательность точек из $\overline{E}$. Рассмотрим последовательность $\{y_n\}$ точек из E такую, что $\rho(y_n, x_n) < \frac{1}{n}$. Так как E относительно компактно, то $\{y_n\}$ обладает подпоследовательностью $\{y_{n_k}\}$, сходящейся к точке $c \in X$. Тогда последовательность $\{x_{n_k}\}$ сходится к той же точке c, а так как $\overline{E}$ замкнуто, то $c \in \overline{E}$. Итак, $\overline{E}$ компактно.

307. Указание. Построить конечную ε-сеть.

308. См. указание к предыдущей задаче.

309. Последовательность функций

$$f_n(x) = A \sin 2^n \pi x \; (n = 1, 2, \ldots),$$

где $A > 0$, удовлетворяет условию $|f_n(x)| \leqslant A$ для всех $x \in [0, 1]$ и всех n. Вместе с тем не только сама эта последовательность, но и никакая ее подпоследовательность не может сходиться в $C[0, 1]$, так как расстояние между любыми двумя различными членами этой последовательности не меньше числа A. Чтобы убедиться в этом, заметим, что функция $f_i(x) = A \sin 2^i \pi x$ равна A при $x = \frac{1}{2^{i+1}}$, а функция $f_k(x) = A \sin 2^k \pi x$, где $k > i$, равна 0 при том же значении x. Поэтому

$$\rho(f_i, f_k) = \sup_{x \in [0,1]} |f_i(x) - f_k(x)| \geqslant \left| f_i\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right) - f_k\left(\frac{1}{2^{i+1}}\right) \right| = A.$$

Следовательно, никакая подпоследовательность данной последовательности не является фундаментальной и, значит, не сходится.

310. Рассмотрим счетное множество точек $e_1(1, 0, 0, 0, \ldots)$, $e_2(0, 1, 0, 0, \ldots)$, ... из l_2 (у e_n единица стоит на n-м месте, а на остальных местах — нули). Оно ограничено и замкнуто, но никакая подпоследовательность последовательности $\{e_n\}$ не фундаментальна и, значит, не сходится, поскольку $\rho(e_i, e_k) = \sqrt{2}$ при $i \neq k$.

311. Относительно компактные множества A и B ограничены (задача 303). Выберем в каждом из них по точке $a \in A$, $b \in B$. Тогда для любых точек $x \in A$, $y \in B$ будем иметь: $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, a) + \rho(a, b) + \rho(b, y) \leqslant \operatorname{diam} A + \rho(a, b) + \operatorname{diam} B < +\infty$.

312. Пусть $\{x_n\}$ — произвольная последовательность точек из $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$. Так как число членов этой последовательности бесконечно, то хотя бы одно из множеств $A_1, \ldots, A_k$ содержит ее бесконечную подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Тогда $\{x_{n_k}\}$ (а значит, и $\{x_n\}$) содержит сходящуюся подпоследовательность, если множества $A_1, \ldots, A_k$ относительно компактны, и подпоследовательность, сходящуюся к точке из $\bigcup_{i=1}^{k} A_i$, если эти множества компактны.

313. Очевидно, всякое подмножество относительно компактного множества относительно компактно. Поэтому пересечение любой совокупности относительно компактных множеств относительно компактно. Если же рассматриваемые множества компактны, то они замкнуты (задача 303) и потому замкнуто также их пересечение. Так как это пересечение, кроме того, относительно компактно, то оно компактно (задача 304).

314. Необходимость. Пусть $A \times B$ компактно, а $\{x_n\}$ —

произвольная последовательность точек из A. Последовательность $\{(x_n, y)\}$, где y — какая-либо точка из B, обладает подпоследовательностью $\{(x_{n_k}, y)\}$, сходящейся к некоторой точке $(x, y') \in A \times B$ (так что $x \in A$). Так как $\rho(x_{n_k}, x) \leqslant \rho((x_{n_k}, y),(x, y'))$, то $x_{nk} \to x$. Значит, A компактно. Аналогично доказывается компактность B.

Достаточность. Пусть A и B компактны, а $\{(x_n, y_n)\}$ — произвольная последовательность точек из $A \times B$. Последовательность $\{x_n\}$ обладает подпоследовательностью $\{x_{n_k}\}$, сходящейся к некоторой точке $x \in A$; далее, последовательность $\{y_{n_k}\}$ обладает подпоследовательностью $\{y_{n_{k_l}}\}$, сходящейся к некоторой точке $x \in B$. Тогда подпоследовательность $\{(x_{n_{k_l}}, y_{n_{k_l}})\}$ последовательности $\{(x_n, y_n)\}$ будет сходиться к точке $(x, y) \in \in A \times B$.

315. См. решение предыдущей задачи.

316. Пусть E — компакт, $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность его точек. Она обладает подпоследовательностью $\{x_{n_k}\}$, сходящейся к некоторой точке $c \in E$. Тогда и $x_n \to c$, так как

$$\rho(x_n, c) \leqslant \rho(x_n, x_{nk}) + \rho(x_{nk}, c) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при $n > N$, $k > N$ (а значит, и $n_k > N$), где N выбрано так, чтобы было $\rho(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $m > N$, $n > N$ и $\rho(x_{n_k}, c) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $k > N$.

317. Выберем в каждом A_n по точке a_n. Так как все эти точки лежат в компактном множестве A_1, то последовательность $\{a_n\}$ обладает подпоследовательностью $\{a_{n_k}\}$, сходящейся к некоторой точке $a \in A_1$. Отбрасывая в $\{a_{n_k}\}$ первые $k - 1$ членов, получим последовательность $a_{n_k}, a_{n_{k+1}}, a_{n_{k+2}}, \ldots$, сходящуюся к той же точке a и состоящую из точек, содержащихся в A_{n_k}. Так как A_{n_k} замкнуто (см. задачу 303), то заключаем, что $a \in A_{n_k}$ для любого k и, значит $a \in \bigcap\limits_k A_{n_k} = \bigcap\limits_n A_n$. Следовательно, $\bigcap\limits_n A_n \neq \varnothing$. Если $\operatorname{diam} A_n \to 0$, то для всякой другой точки $b \in \bigcap\limits_n A_n$ будем иметь $\rho(a, b) \leqslant \operatorname{diam} A_n$ при всех n, а потому $\rho(a, b) = 0$, т. е. $a = b$.

318. Допустим, что это не так; тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для каждого n найдется точка $x_n \in A_n$, не содержащаяся в $V(K, \varepsilon)$. Так как все эти точки принадлежат компакту A_1, то последовательность $\{x_n\}$ обладает сходящейся подпоследовательностью $\{x_{n_k}\}$; так как для любого n все члены этой последовательности с номерами $k \geqslant n$ принадлежат A_n, а A_n замкнуто, то и $\xi = \lim x_{n_k} \in A_n$ для всех n, т. е. $\xi \in K$. А так как, с другой стороны, $x_{n_k} \bar{\in} V(K, \varepsilon)$, то $\rho(x_{n_k}, \xi) \geqslant \varepsilon$ для всех k. Это противоречит тому, что $x_{n_k} \to \xi$.

319. Это непосредственно следует из результата предыдущей задачи.

320. Так как $\overline{E}_{i+1} \subset E_i \subset \overline{E}_i$, то $\bigcap_i \overline{E}_{i+1} \subset \bigcap_i E_i \subset \bigcap_i \overline{E}_i$. Крайние члены последних включений непусты (теорема Кантора) и совпадают. Следовательно, $\bigcap_i E_i = \bigcap_i \overline{E}_i \neq \varnothing$. Недостаточность условия б′) для справедливости утверждения задачи видна на примере последовательности интервалов $]0, 1[$, $\left]0, \frac{1}{2}\right[$, $\left]0, \frac{1}{3}\right[$, ..., $\left]0, \frac{1}{n}\right[$, ...

321. Обозначим $K_n = \overline{G} \setminus G_n$. Ясно, что K_n — компакты, причем $\bigcap_n K_n = \operatorname{Fr} G$ и $\operatorname{Fr} G_n \subset K_n$. Так как $\{K_n\}$ — убывающая последовательность компактов, то, в силу результата задачи 318, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что $K_n \subset V(\operatorname{Fr} G, \varepsilon)$ при $n > N$; но тогда и $\operatorname{Fr} G_n \subset V(\operatorname{Fr} G, \varepsilon)$.

322. Пусть $f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}$, а E_n — множество всех функций $f \in C[-1, 1]$, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant f(x) \leqslant f_n(x)$ для всех $x \in [-1, 1]$ и условию $f(0) = 1$. Множества E_n замкнуты, ограничены ($\rho(f, g) \leqslant 1$ для всех $f, g \in E_n$) и $E_{n+1} \subset E_n$. Однако $\bigcap_n E_n = \varnothing$.

Другой пример см. в решении задачи 209.

323. Положим $A_n = E_1 \cap \ldots \cap E_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Множества A_n непусты по условию, компактны (см. задачу 313) и $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, а потому, в силу теоремы Кантора, $\bigcap_n E_n = \bigcap_n A_n \neq \varnothing$.

324. Нет (см. задачу 322).

325. Необходимость. Пусть E — относительное компактное множество и ε — произвольное положительное число. Обозначим через x_1 произвольный элемент из E. Если все точки из E отстоят от x_1 меньше чем на ε, то искомая ε-сеть построена (она состоит из одного x_1). Если же это не так, то найдется $x_2 \in E$ такое, что $\rho(x_1, x_2) \geqslant \varepsilon$. Если точки x_1, x_2 в свою очередь не образуют ε-сети, то найдется $x_3 \in E$ такое, что $\rho(x_1, x_3) \geqslant \varepsilon$, $\rho(x_2, x_3) \geqslant \varepsilon$. Если и точки x_1, x_2, x_3 не образуют ε-сети, то найдется $x_4 \in E$ такое, что $\rho(x_i, x_4) \geqslant \varepsilon$ при $i = 1, 2, 3$. Этот процесс обязательно оборвется на некотором номере n_0, так как если бы он продолжался неограниченно, то из последовательности $\{x_n\}$ нельзя было бы выделить сходящейся подпоследовательности (любая ее подпоследовательность не фундаментальна). Итак, множество $x_1, \ldots, x_{n_0}$ образует искомую ε-сеть, а значит, E вполне ограничено.

Достаточность. Пусть E — вполне ограниченное множество в полном метрическом пространстве X и $\{x_n\}$ — последовательность точек из E. Докажем, что у нее существует сходящаяся подпоследовательность.

Возьмем какую-нибудь конечную сеть для $\varepsilon_1 = 1$ и около каждого ее элемента опишем шар радиуса 1. Хотя бы один из этих шаров — обозначим его V_1 — включает бесконечное число членов последовательности $\{x_n\}$ (под этим мы подразумеваем, что имеется бесконечно много номеров таких, что члены последовательности с этими номерами содержатся в рассматриваемом шаре). Пусть x_{n_1} — один из этих членов.

Далее, возьмем конечную сеть для $\varepsilon_2 = \frac{1}{2}$ и около каждого ее элемента опишем шар радиуса $\frac{1}{2}$. Хотя бы один из этих шаров — назовем его V_2 — включает бесконечно много элементов последовательности $\{x_n\}$ из числа тех, которые попали в V_1. Обозначим через x_{n_2} какой-либо из них, с единственным условием, что $n_2 > n_1$.

Вообще, пусть уже построены элементы $x_{n_1}, \ldots, x_{n_k}$, где $n_1 < \ldots < n_k$, $x_{n_i} \in V_i$ $(i = 1, \ldots, k)$ и V_i — шар радиуса $\varepsilon_i = \frac{1}{i}$, включающий бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ из числа содержащихся в шаре V_{i-1}. Тогда строим конечную сеть для $\varepsilon_{k+1} = \frac{1}{k+1}$ и около каждого ее элемента описываем шар радиуса $\frac{1}{k+1}$. Тот шар, который включает бесконечно много членов последовательности $\{x_n\}$ из числа входящих в V_k, обозначим V_{k+1} и примем за $x_{n_{k+1}}$ какой-либо из этих членов, с единственным условием, чтобы было $n_{k+1} > n_k$. Неограниченно продолжая этот процесс, мы получим подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$ последовательности $\{x_n\}$. Она фундаментальна, так как при $i \geqslant k$, $j \geqslant k$ имеем: $x_{n_i} \in V_k$, $x_{n_j} \in V_k$ и, значит, $\rho(x_{n_i}, x_{n_j}) \leqslant \frac{2}{k}$. В силу полноты пространства X, она сходится. Значит, E — относительно компактное множество.

326. См. доказательство необходимости в решении предыдущей задачи.

327. Это непосредственно следует из теоремы Хаусдорфа (задача 325) и результата задачи 304.

328. Пусть ε — произвольное положительное число, A — относительно компактная $\frac{\varepsilon}{2}$ сеть для E, а B — конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для относительно компактного множества A (существующая в силу теоремы Хаусдорфа). Множество B является конечной ε-сетью для E; следовательно, E относительно компактно.

Если X неполно, то утверждение задачи становится неверным. П р и м е р. X — множество всех рациональных чисел с обычной метрикой, E — множество рациональных чисел x из $[0, 1]$. Множество E не является относительно компактным, хотя для него при любом

$\varepsilon > 0$ существует относительно компактная (даже конечная) ε-сеть.

329. Так как E ограничено, то оно включается в некоторый параллелепипед $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \ldots \times [a_n, b_n]$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и разобьем каждый отрезок $[a_i, b_i]$, точками $a_i = x_i^{(1)} < x_i^{(2)} < \ldots < x_i^{(p_i-1)} < x_i^{(p_i)} = b_i$ так, чтобы расстояние между любыми двумя соседними точками было меньше $\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Тогда множество всех точек из R^n вида $(x_1^{(s_1)}, x_2^{(s_2)}, \ldots, x_n^{(s_n)})$, где $s_1, s_2, \ldots, s_n$ принимают, независимо друг от друга, значения $s_1 = 1, 2, \ldots, p_1$, $s_2 = 1, 2, \ldots, p_2, \ldots, s_n = 1, 2, \ldots, p_n$, является конечной ε-сетью для E в пространстве R^n. Следовательно, E вполне ограничено, а значит, в силу полноты R^n и первой теоремы Хаусдорфа, относительно компактно.

330. Это следует из задач 329 и 304.

331. Пусть E — относительно компактное множество в l_2. Если бы оно не было нигде не плотным, то его замыкание $\overline{E}$ включало бы некоторый шар $V \subset l_2$. Пусть $a = (a_1, a_2, \ldots)$ — центр этого шара. Построим последовательность $\{b_i\}$ $(b_i \in l_2)$ следующим образом: $b_1 = \left(a_1 + \frac{\delta}{2}, a_2, a_3, \ldots\right)$, $b_2 = \left(a_1, a_2 + \frac{\delta}{2}, a_3, \ldots\right)$, $b_3 = \left(a_1, a_2, a_3 + \frac{\delta}{2}, \ldots\right)$, ..., где δ — радиус шара V. Все b_i содержатся в V, а значит, и в $\overline{E}$. Но так как $\rho(b_i, b_j) = \sqrt{\left(\frac{\delta}{2}\right)^2 + \left(\frac{\delta}{2}\right)^2} = \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ при $i \neq j$, то никакая подпоследовательность последовательности $\{b_n\}$ не фундаментальная и, следовательно, не сходится, что противоречит компактности $\overline{E}$ (см. задачу 306).

332. Доказательство аналогично приведенному в решении предыдущей задачи. Если центр фигурирующего там шара V радиуса δ есть функция f_0, то за b_i можно принять функции $f_0 + f_i$, где f_i — функции из решения задачи 309, в которых A заменено на δ, а отрезок $[0, 1]$ линейно преобразован в отрезок $[a, b]$.

333. Если множество E компактно, то оно обладает свойством H, так как любое замкнутое подмножество компакта есть компакт (см. задачу 305).

Пусть теперь множество E обладает свойством H. Докажем, что оно замкнуто. Пусть $x_0 \in \overline{E}$, так что $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$, где $\{x_n\}$ — некоторая последовательность точек из E. Пусть, далее, $V(x_0)$ и $B(x_0)$ — открытый и замкнутый шары одинакового радиуса с центром в x_0. Так как, начиная с некоторого номера, $x_n \in E \cap V(x_0) \subset E \cap B(x_0)$, а $E \cap B(x_0)$ замкнуто, то $x_0 \in E \cap B(x_0)$ и, значит, $x_0 \in E$. Следовательно, E замкнуто.

334. Утверждение следует из результата задачи 330. С другой стороны, пространство $C[0, 1]$ полно (задача 130), а замкнутый единичный шар в нем не обладает свойством H, так как он некомпактен в $C[0, 1]$ (см. задачу 309).

335. Пусть V — произвольный открытый шар в $C[a, b]$. Тогда $\overline{V} \cap E$ компактно в $C[a, b]$ и, значит, нигде не плотно (см. задачу 332). Следовательно, найдется шар $V_1 \subset V$, свободный от точек множества $\overline{V} \cap E$, а значит, и от точек множества E.

336. Необходимость. Пусть E бикомпактно. Рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\}$ точек из E. Допустим, что ни одна ее подпоследовательность не сходится к точке из E. Тогда каждая точка $z \in E$ обладает окрестностью $V(z)$, содержащей лишь конечное (быть может, пустое) число членов последовательности. Эти окрестности $V(z)$ образуют открытое покрытие множества E. Так как E бикомпактно, то существует конечное число точек $z_1, \ldots, z_k \in E$ такое, что $E \subset V(z_1) \cup \ldots \cup V(z_n)$. Но это невозможно, поскольку множество, стоящее справа, содержит конечное число членов последовательности, тогда как E содержит все ее члены. Полученное противоречие показывает, что каждая последовательность точек из E обладает подпоследовательностью, сходящейся к точке из E, т. е. E компактно.

Достаточность. Пусть E компактно. Допустим, что существует открытое покрытие $\{G_\alpha\}$ множества E, из которого нельзя выделить конечного покрытия. Зададим убывающую последовательность чисел $\{\varepsilon_n\}$, стремящуюся к 0. Построим конечную ε_1-сеть для E (задача 325) и около каждой ее точки опишем шар радиуса ε_1. Замыкание каждого из этих шаров имеет с E компактное пересечение (см. задачу 305) с диаметром не больше чем $2\varepsilon_1$; следовательно, E представляется в виде объединения конечного числа компактов с диаметрами не больше чем $2\varepsilon_1$. Если, как мы предположили, E не может быть покрыто конечным числом множеств G_α, то по крайней мере один из этих компактов также не имеет такого конечного покрытия. Обозначим его E_1.

Далее, построим конечную ε_2-сеть для E_1 и, описав около каждой точки этой сети шар радиуса ε_2, представим E, как и в предыдущем случае, в виде объединения конечного числа компактов с диаметрами не больше чем $2\varepsilon_2$. Тот из них, который не покрывается конечным числом множеств G_α, обозначим E_2.

Продолжая неограниченно этот процесс, получим убывающую последовательность компактов $E \supset E_1 \supset E_2 \supset \ldots$, ни один из которых не может быть покрыт конечным числом множеств G_α, причем $\operatorname{diam} E_n \to 0$. Пусть ξ — их общая точка (задача 317). Так как $\xi \in E$, то найдется множество G_{α_0} из нашего открытого покрытия такое, что $\xi \in G_{\alpha_0}$. Пусть $V(\xi, \delta) \subset G_{\alpha_0}$ и $2\varepsilon_{n_0} < \delta$. Тогда $E_{n_0} \subset G_{\alpha_0}$. Мы пришли к противоречию: с одной стороны, по построению, ни одно из E_n не может быть покрыто конечным числом множеств семейства $\{G_\alpha\}$; с другой стороны, множество E_{n_0} включается в одно из множеств этого семейства (в G_{α_0}). Полученное противоречие доказывает, что E бикомпактно.

337. Пусть k_0 таково, что $\frac{1}{2^{k_0}} < \varepsilon$. Тогда точка 0, а также точки $\frac{1}{2^{k_0}}, \frac{1}{2^{k_0+1}}, \frac{1}{2^{k_0+2}}, \ldots$ покрыты интервалом $]-\varepsilon, \varepsilon[$; остальные же точки покрыты интервалами $\left]\frac{1-\varepsilon}{2^k}, \frac{1+\varepsilon}{2^k}\right[$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, k_0 - 1$.

338. Нельзя, поскольку каждая точка множества E покрыта только одним интервалом из данной системы.

339. Нельзя, поскольку E не ограничено, а объединение любого конечного числа интервалов из данной системы — ограниченное множество.

340. Допустим, что из данного покрытия можно выделить конечное покрытие круга E; пусть его образуют круги $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Тогда $\bigcup_{i=1}^{n} C_i \supset E$ и, значит, $\overline{\bigcup_{i=1}^{n} C_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{C}_i \supset \overline{E}$ (см. задачу 150). Но это невозможно, так как каждый замкнутый круг $\overline{C}_i$ содержит лишь одну точку окружности, ограничивающей круг $\overline{E}$, и, значит, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{C}_i$ не покрывает всего круга $\overline{E}$.

341. Можно. Для этого достаточно из всего покрытия выделить те круги, центры которых лежат в рациональных точках окружности C (мы называем точку окружности рациональной точкой, если ее радиус-вектор составляет угол $r\pi$ с фиксированным неподвижным радиусом, где r — рациональное число).

Докажем, что E покрывается этой счетной системой кругов. Рассмотрим произвольную точку $P \in E$ (рис. 24). Пусть она отстоит от O на расстоянии d $(d < 1)$ и луч OP пересекает C в точке P_0 $\left(\text{при этом } |PP_0| = \left|d - \frac{1}{3}\right| < \frac{2}{3}\right)$. Если P_0 — рациональная точка, то круг с центром в P_0 содержит P. Если же P_0 — иррациональная точка, то, в силу плотности множества рациональных точек на C, найдется рациональная точка $P_1 \in C$ такая, что $|P_0P_1| < \frac{2}{3} - \left|d - \frac{1}{3}\right|$. Тогда круг с центром в P_1 содержит точку P, так как

$$\rho(P, P_1) \leqslant \rho(P, P_0) + \rho(P_0, P_1) < \left|d - \frac{1}{3}\right| + \left(\frac{2}{3} - \left|d - \frac{1}{3}\right|\right) = \frac{2}{3}.$$

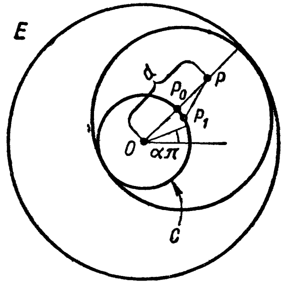


Рис. 24

342. Окружности радиуса $\frac{2}{3}$ с центрами в точках окружности C пересекают окружность радиуса $1 - \varepsilon$ (с центром O) в двух точках каждая, отсекая от нее дуги одной и той же длины. Пусть n — натуральное число, превосходящее отношение длины всей окружности радиуса $1-\varepsilon$ к длине этих дуг. Если на C взять n равноотстоящих точек и принять их за центры открытых кругов радиуса $\frac{2}{3}$, то мы и получим конечное покрытие, выделенное из заданного бесконечного.

343. Пример 1. Открытое множество $]0, 1[$ покрыто интервалами $\left]\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right[$ $(n=1, 2, \ldots)$. Если из этого покрытия выбросить хоть один интервал, то оставшаяся система не будет покрывать всего множества $]0, 1[$. Тем более из этой системы интервалов нельзя выделить конечного покрытия.

Пример 2. Интервалы $\left]\frac{1}{n}, 1\right[$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ образуют открытое покрытие открытого множества $]0, 1[$, не содержащее конечного покрытия.

344. Нет. Пример. Компактное множество $[0, 1]$ покрыто системой отрезков $\left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], \ldots, \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right], \ldots$ и $[-1, 0]$, из которой нельзя выделить конечного покрытия (более того, из этой системы нельзя исключить ни одного отрезка, не оставив хотя бы одну точку отрезка $[0, 1]$ непокрытой).

345. Счетное множество всех точек $(x_1, \ldots, x_n) \in \boldsymbol{R}^n$ с рациональными координатами $x_1, \ldots, x_n$ плотно в $\boldsymbol{R}^n$.

346. Счетное множество, плотное в $C[a, b]$, можно построить так. Для каждого натурального числа n разобьем отрезок $[a, b]$ на n отрезков точками

$$x_0^{(n)}=a,\ x_1^{(n)}=a+\frac{b-a}{n},\ x_2^{(n)}=a+2\cdot\frac{b-a}{n},\ \ldots,\ x_n^{(n)}=b$$

и рассмотрим множество A_n всех функций φ на $[a, b]$, принимающих в точках $x_i^{(n)}$ $(i=0, 1, \ldots, n)$ рациональные значения и линейных на отрезках $[x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$ $(i=1, \ldots, n)$, т. е. определенных условиями:

$$\varphi(x)=\varphi(x_{i-1}^{(n)})+\frac{x-x_{i-1}^{(n)}}{x_i^{(n)}-x_{i-1}^{(n)}}\left(\varphi(x_i^{(n)})-\varphi(x_{i-1}^{(n)})\right) \text{ при } x_{i-1}^{(n)}\leqslant x\leqslant x_i^{(n)}$$

$$(i=1, \ldots, n),$$

где $\varphi(x_0^{(n)}), \ldots, \varphi(x_n^{(n)})$ — рациональные числа.

Рассмотрим далее множество $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Мощность этого множества функций счетна (доказать!), и все они принадлежат пространству $C[a, b]$.

Покажем, что A плотно в $C[a, b]$. Пусть $f \in C[a, b]$ и $\varepsilon>0$. Так как f равномерно непрерывна на $[a, b]$, то существует $\delta>0$ такое, что $|f(x')-f(x'')|<\frac{\varepsilon}{5}$ для любых точек $x', x'' \in [a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta$. Возьмем натуральное число n, для которого $\frac{b-a}{n} < \delta$, и рассмотрим функцию $\varphi \in A_n$, принимающую в точках $x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ рациональные значения такие, что $|\varphi(x_i^{(n)}) - f(x_i^{(n)})| < \frac{\varepsilon}{5}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$. Для всякой точки $x \in [a, b]$ найдется i такое, что $x \in [x_{i-1}^{(n)}, x_i^{(n)}]$. Тогда

$$|\varphi(x) - \varphi(x_{i-1}^{(n)})| \leqslant |\varphi(x_i^{(n)}) - \varphi(x_{i-1}^{(n)})| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi(x_i^{(n)}) - f(x_i^{(n)})| + |f(x_i^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)})| +$$
$$+ |f(x_{i-1}^{(n)}) - \varphi(x_{i-1}^{(n)})| < \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \frac{3\varepsilon}{5}$$

и, следовательно,

$$|\varphi(x) - f(x)| \leqslant |\varphi(x) - \varphi(x_{i-1}^{(n)})| +$$
$$+ |\varphi(x_{i-1}^{(n)}) - f(x_{i-1}^{(n)})| + |f(x_{i-1}^{(n)}) - f(x)| <$$
$$< \frac{3\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} + \frac{\varepsilon}{5} = \varepsilon.$$

Таким образом, $\rho(\varphi, f) = \max\limits_{x \in [a, b]} |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon$; значит, счетное множество A плотно в $C[a, b]$.

Замечание. Другим примером счетного множества, плотного в $C[a, b]$, является множество всех многочленов с рациональными коэффициентами (см. задачу 295).

347. Счетным множеством, плотным в l_2, будет, например, множество всех точек $(x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, у которых лишь конечное число координат $x_1, x_2, \ldots$ отлично от нуля, причем все эти координаты рациональны. Доказательство счетности этого множества предоставляем читателю. Покажем, что оно плотно в l_2. Пусть $a(a_1, a_2, \ldots) \in l_2$ и $\varepsilon > 0$ Найдем такое n, что для точки $a'(a_1, \ldots, a_n, 0, 0, \ldots)$ будет $\rho(a, a') < \frac{\varepsilon}{2}$ (см. решение задачи 301). Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — рациональные числа такие, что $|a_i - x_i| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{n}}$ при $i = 1, \ldots, n$; обозначим через x точку из l_2 с координатами $(x_1, \ldots, x_n, 0, 0, \ldots)$. Тогда

$$\rho(a, x) \leqslant \rho(a, a') + \rho(a', x) < \frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4n} \cdot n} = \varepsilon,$$

что и доказывает наше утверждение.

348. Счетным множеством, плотным в этом пространстве, будет, например, множество всех пар функций из счетного множества, плотного в пространстве $C[a, b]$ (например, из множества A, построенного в решении задачи 346).

349. Необходимость очевидна: если X сепарабельно, то плотное в нем конечное или счетное множество является ε-сетью для X при любом $\varepsilon > 0$.

Достаточность. Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ существует не более чем счетная ε-сеть M_ε. Тогда не более чем счетное множество $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_{\frac{1}{n}}$ плотно в X. Значит, X сепарабельно.

350. Для компакта при любом $\varepsilon > 0$ существует конечная ε-сеть (задача 327); остается применить результат предыдущей задачи.

351. Покажем, что никакое счетное множество $E = \{f_1, f_2, f_3, \ldots\}$ ограниченных функций на $[a, b]$ не плотно в $M[a, b]$. Отметим на отрезке $[a, b]$ какое-нибудь счетное множество точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$ и определим функцию $f \in M[a, b]$ условиями: $f(x) = 0$, если x не совпадает ни с одной из точек $x_1, x_2, x_3, \ldots$, и

$$f(x_k) = \begin{cases} -1, \text{ если } f_k(x_k) \geqslant 0, \\ 1, \text{ если } f_k(x_k) < 0 \end{cases}$$

($k = 1, 2, 3, \ldots$). Тогда $\rho(f, f_k) = \sup\limits_{x \in [a, b]} |f(x) - f_k(x)| \geqslant 1$, а потому f не является точкой прикосновения множества E. Следовательно, E не плотно в $M[a, b]$. Итак, пространство $M[a, b]$ несепарабельно.

352. Можно считать, что X бесконечно, так как в случае конечного X утверждение тривиально. Возьмем счетное множество $B = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, плотное в X, и последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \ldots$, стремящуюся к нулю (например, $\varepsilon_k = \frac{1}{k}$). Для каждой точки $x_i \in B$ выберем в каждой из окрестностей $V(x_i, \varepsilon_k)$, которые имеют непустое пересечение с E, по точке $x_{ik} \in E$. Множество A всех таких точек $x_{ik} \in V(x_i, \varepsilon_k) \cap E$ не более чем счетно. Покажем, что $\bar{A} \supset E$. Пусть $x_0 \in E$ и $\varepsilon > 0$ — произвольное число. Возьмем k столь большим, чтобы было $\varepsilon_k < \frac{\varepsilon}{2}$. Так как B плотно в X, то $V(x_0, \varepsilon_k)$ содержит некоторую точку $x_i \in B$. Тогда $x_0 \in V(x_i, \varepsilon_k)$, так что $V(x_i, \varepsilon_k) \cap E \neq \varnothing$, и потому $V(x_i, \varepsilon_k)$ содержит некоторую точку $x_{ik} \in A$. Но $V(x_i, \varepsilon_k) \subset V(x_0, \varepsilon)$; действительно, если $x \in V(x_i, \varepsilon_k)$, то $\rho(x_0, x) \leqslant \rho(x_0, x_i) + \rho(x_i, x) < \varepsilon_k + \varepsilon_k < \varepsilon$. Значит, каждая окрестность $V(x_0, \varepsilon)$ точки x_0 содержит точку из A, т. е. $x_0 \in \bar{A}$. Таким образом, $\bar{A} \supset E$.

353. Назовем рациональным кругом на плоскости всякий круг, у которого координаты центра и радиус рациональны. Множество всех рациональных кругов счетно (задача 63). Докажем, что оно образует базис открытых множеств на плоскости. Для этого сначала докажем, что любой круг включает рациональный круг, содержащий его центр. Пусть E — круг радиуса R с центром C

(рис. 25). Возьмем внутри концентрического круга радиуса $\frac{R}{3}$ точку C_1 с рациональными координатами. Тогда круг с центром C_1 и рациональным радиусом r, заключенным между $\frac{R}{3}$ и $\frac{2R}{3}$, обладает требуемым свойством: он содержит точку C $\left(\text{так как } \rho(C, C_1) < \frac{R}{3} < r\right)$ и включается в E, так как для любой точки P, для которой $\rho(P, C_1) < r$, будем иметь:

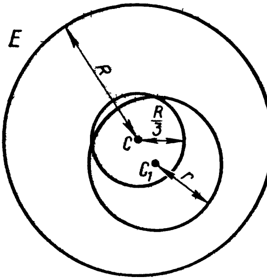


Рис. 25

$$\rho(P, C) \leqslant \rho(P, C_1) + \rho(C_1, C) < r + \frac{R}{3} <$$

$$< \frac{2R}{3} + \frac{R}{3} = R.$$

Пусть теперь G — произвольное открытое множество на плоскости. Опишем вокруг каждой точки $x \in G$ какой-нибудь открытый круг $V(x) \subset G$ и построим какой-нибудь рациональный круг $E(x)$, включающийся в $V(x)$ (а значит, и в G) и содержащий точку x. Очевидно, тогда будем иметь: $G = \bigcup\limits_{x \in G} E(x)$. Таким образом, каждое открытое множество на плоскости является объединением некоторого семейства рациональных кругов.

354. Нет. Пример. Пусть **A** — семейство следующих интервалов на числовой прямой: $\left]r_k - \frac{1}{2^{k+1}}, r_k + \frac{1}{2^{k+1}}\right[$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где r_k — все рациональные числа, занумерованные каким-либо способом; и пусть **B** — семейство всех интервалов с рациональными концами. Очевидно, семейства **A** и **B** удовлетворяют условиям задачи, причем **B** — базис. Однако **A** не является базисом, так как объединением интервалов из семейства **A**, во всяком случае, нельзя получить никакого интервала, длина которого больше двух. Действительно, пусть такой интервал нашелся. Возьмем какой-нибудь содержащийся в нем отрезок длины 2. Тогда интервалы семейства **A** образуют его открытое покрытие, из которого, в силу компактности отрезка, можно выделить покрытие конечным числом этих интервалов. Но это невозможно, поскольку сумма длин любого конечного числа интервалов из **A** меньше суммы длин всех интервалов из **A**, т. е. меньше 2.

355. Если X имеет счетный базис, то, взяв в каждом из множеств этого базиса по точке, получим не более чем счетное множество точек, которое, как легко видеть, плотно в X; значит, X сепарабельно.

Обратно, пусть X сепарабельно и $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$—счетное плотное в X множество (случай конечного A тривиален). Тогда семейство открытых шаров $\left\{V\left(x_i, \frac{1}{k}\right)\right\}$ $(i = 1, 2, 3...)$ счетно. Покажем, что оно образует базис пространства X. Для этого покажем сначала, что для каждого шара $V(x_0, \varepsilon)$ существуют i и k такие, что $x_0 \in V\left(x_i, \frac{1}{k}\right) \subset V(x_0, \varepsilon)$. Действительно, пусть k столь велико, что $\frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$. Шар $V\left(x_0, \frac{1}{k}\right)$ содержит некоторую точку $x_i \in A$, откуда $x_0 \in V\left(x_i, \frac{1}{k}\right)$; кроме того, $V\left(x_i, \frac{1}{k}\right) \subset V(x_0, \varepsilon)$, так как если $x \in V\left(x_i, \frac{1}{k}\right)$, то $\rho(x_0, x) \leqslant \rho(x_0, x_i) + \rho(x_i, x) < \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} < \varepsilon$. Если теперь G — произвольное открытое множество в X, то каждая точка $x_0 \in G$ обладает окрестностью $V(x_0, \varepsilon)$, лежащей в G; следовательно, некоторый открытый шар $V\left(x_i, \frac{1}{k}\right)$ лежит в $V(x_0, \varepsilon)$, а значит, и в G и содержит точку x_0. Объединением таких шаров $V\left(x_i, \frac{1}{k}\right)$, построенных для всех точек $x_0 \in G$, очевидно, служит G. Тем самым семейство $\left\{V\left(x_i, \frac{1}{k}\right)\right\}$ есть базис открытых множеств в X.

356. Пусть $E = \bigcup\limits_{\alpha} G_\alpha$, и $\{\Gamma_n\}$ — счетный базис пространства X. Для каждого α и каждой точки $x \in G_\alpha$ выберем множество из базиса, включающееся в G_α и содержащее эту точку. Пусть отобранные таким способом множества базиса (расположенные, например в порядке возрастания их номеров) будут $\Gamma_{n_1}, \Gamma_{n_2}, \ldots, \Gamma_{n_k}, \ldots$; ясно, что $E = \bigcup\limits_{k} \Gamma_{n_k}$. Далее, для каждого k выберем одно из подмножеств семейства $\{G_\alpha\}$, содержащее Γ_{n_k}; обозначим его G_{α_k}. Тогда, очевидно, $E = \bigcup\limits_{k} G_{\alpha_k}$.

357. Верно. Если X не имеет счетного или конечного базиса, то для некоторого $\varepsilon > 0$ оно не имеет счетной или конечной ε-сети (см. задачи 349 и 355). Зафиксируем это ε и опишем около каждой точки $x \in X$ ε-окрестность $V(x, \varepsilon)$. Тогда $X = \bigcup\limits_{x \in X} V(x, \varepsilon)$. Семейство открытых множеств $\{V(x, \varepsilon)\}$ несчетно, и из него нельзя выделить счетного семейства с тем же объединением, так как если бы было $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} V(x_n, \varepsilon) = X$, то счетное множество $\{x_1, x_2, \ldots\}$ являлось бы ε-сетью для X, что противоречит выбору числа ε. Итак, если X не имеет конечного или счетного базиса, то существует семейство открытых в X множеств, из которого нельзя выделить счетного подсемейства с тем же объединением.

358. Сепарабельное метрическое пространство есть пространство со счетным (или конечным) базисом, скажем, $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ (задача 355).

Каждое открытое множество G пространства есть объединение хотя бы одной совокупности $\{\Gamma_{n_1}, \ldots, \Gamma_{n_k}, \ldots\}$ множеств из базиса. Тем самым каждому открытому множеству G пространства можно поставить в соответствие множество $\{n_1, \ldots, n_k, \ldots\}$ натуральных чисел, причем разным открытым множествам, очевидно, будут соответствовать разные множества натуральных чисел. Поэтому мощность совокупности всех открытых множеств пространства не превосходит мощности множества всех подмножеств натурального ряда, т. е. мощности континуума.

359. Это вытекает из результата предыдущей задачи, поскольку между совокупностью всех замкнутых и совокупностью всех открытых множеств пространства можно установить взаимно однозначное соответствие, относя каждому замкнутому множеству открытое множество, являющееся его дополнением.

360. Пусть $A = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ — не более чем счетное плотное множество в сепарабельном пространстве X. Если A конечно, то и X конечно (A не может иметь других точек прикосновения, кроме точек из A). Пусть A счетно. Выберем для каждой точки $x \in X$ некоторую сходящуюся к ней последовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \ldots$ точек из A. Так как множество всех последовательностей $n_1, n_2, \ldots$ натуральных чисел имеет мощность континуума (задача 80) и так как разным точкам из X в силу однозначности предела будут отвечать разные сходящиеся к ним последовательности точек из A, то мощность X не превосходит мощности континуума.

361. Согласно результату задачи 359, мощность совокупности всех замкнутых множеств пространства X не превосходит мощности континуума. С другой стороны, все одноточечные множества из X замкнуты, а они уже образуют множество мощности континуума; для доказательства утверждения остается применить теорему Кантора — Бернштейна.

362. Компакт есть сепарабельное пространство (задача 350), а потому имеет мощность, не превосходящую мощности континуума (задача 360). С другой стороны, компакт есть полное пространство (задача 316), а так как по условию это пространство не содержит изолированных точек, то, согласно результату задачи 253, мощность его не меньше мощности континуума.

363. Ясно, что каждая точка конденсации множества A, как и каждая точка конденсации множества B, есть вместе с тем точка конденсации для объединения $A \cup B$. Следовательно, $S_{A \cup B} \supset \supset S_A \cup S_B$. Докажем обратное включение. Пусть $x_0 \in S_{A \cup B}$. Если $x_0 \overline{\in} S_A$, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $V(x_0, \varepsilon_0)$ содержит конечное или счетное множество точек из A. Тем же свойством обладают тогда и все окрестности $V(x_0, \delta)$ с $\delta < \varepsilon_0$. Так как всякая окрестность точки x_0 содержит несчетное множество точек из $A \cup B$, то каждая из указанных окрестностей $V(x_0, \delta)$ должна содержать несчетное множество точек из B (если бы $V(x_0, \delta)$ имела конечное или счетное множество точек как из A, так и из B, то она имела бы не более чем счетное множество точек и из $A \cup B$). Но всякая окрестность точки x_0 включает окрестность $V(x_0, \delta)$ с достаточно малым $\delta < \varepsilon_0$; поэтому каждая окрестность $V(x_0, \varepsilon)$ содержит несчетное множество точек из B, т. е. $x_0 \in S_B$. Итак, для произвольной точки $x_0 \in S_{A \cup B}$ справедливо по крайней мере одно из соотношений: $x_0 \in S_A$ или $x_0 \in S_B$. Значит, $S_{A \cup B} \subset S_A \cup S_B$. Сравнивая это с полученным ранее включением $S_{A \cup B} \supset S_A \cup S_B$, заключаем, что $S_{A \cup B} = S_A \cup S_B$.

364. Нет. П р и м е р. Рассмотрим на плоскости последовательность концентрических окружностей A_n радиусов $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Множество S_{A_n} точек конденсации каждого множества A_n совпадает с самим A_n. Однако множество $S_{\bigcup\limits_n A_n}$ точек конденсации объединения $\bigcup\limits_n A_n$ не совпадает с $\bigcup\limits_n A_n = \bigcup\limits_n S_{A_n}$, а получается добавлением к нему еще одной точки — общего центра окружностей A_n. Итак, в данном случае $S_{\bigcup\limits_n A_n} \supset \bigcup\limits_n S_{A_n}$, но $S_{\bigcup\limits_n A_n} \neq \bigcup\limits_n S_{A_n}$.

Включение $S_{\bigcup\limits_n A_n} \supset \bigcup\limits_n S_{A_n}$, очевидно, всегда имеет место, поскольку точка конденсации каждого A_n является вместе с тем точкой конденсации объединения $\bigcup\limits_n A_n$.

365. Справедливость утверждения легко следует из того, что, какова бы ни была точка $x_0 \in X$, каждая ее окрестность $V(x_0, \varepsilon)$ (будучи открытым множеством) включает некоторое множество из базиса, содержащее x_0, и, обратно, каждое множество из базиса, содержащее точку x_0, включает все ее окрестности $V(x_0, \varepsilon)$ достаточно малого радиуса ε.

366. Сепарабельное метрическое пространство есть пространство со счетным (или конечным) базисом (задача 355). Пусть $\{G_n\}$ — не более чем счетный базис пространства X. Если ни одна точка множества E не является его точкой конденсации, то в силу результата предыдущей задачи, для каждой точки $x \in E$ найдется множество G_{n_x} из базиса, в котором содержатся эта точка x и не более чем счетное множество других точек из E. Таким образом, множество E в этом случае складывается из не более чем счетной совокупности не более чем счетных множеств, а потому само не более чем счетно. Следовательно, хотя бы одна точка несчетного множества E должна быть его точкой конденсации (в частности, множество S_E непусто).

367. Замкнутость S_E доказывается легко (причем в любом метрическом пространстве X, а не только в сепарабельном). Докажем отсутствие изолированных точек у множества S_E. Пусть $x_0 \in S_E$; тогда для произвольной окрестности $V(x_0, \varepsilon)$ множество

$(E \setminus \{x_0\}) \cap V(x_0, \varepsilon)$ несчетно; значит, по теореме Линделёфа, существует точка конденсации x_1 этого множества, принадлежащая ему (и, значит, отличная от x_0). Но тогда x_1 будет точкой конденсации и для E. Итак, в произвольной окрестности точки $x_0 \in S_E$ нашлась точка из S_E, отличная от x_0. Значит, S_E не имеет изолированных точек.

Приведем пример. Пусть $X = \{a\} \cup [\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n]$, где E_n — попарно не пересекающиеся несчетные множества, а a — точка, не принадлежащая ни одному E_n. Метрику в X введем следующим образом: $\rho(a, x) = \frac{1}{n}$ при $x \in E_n$, $\rho(x, y) = \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}$ при $x \in E_n$, $y \in E_m$ и $x \neq y$. Полученное метрическое пространство несепарабельно; все его точки, кроме a, изолированы. Если теперь взять $E = X$, то S_E есть одноточечное множество $\{a\}$; оно замкнуто, но несовершенно.

368. Так как точки конденсации любого множества являются его точками прикосновения, а множество F замкнуто, то $S_F \subset F$. Поэтому $F = S_F \cup (F \setminus S_F)$. Согласно предыдущей задаче, S_F совершенно. Остается показать, что $F \setminus S_F$ конечно или счетно. Но это следует из теоремы Линделёфа (задача 366), так как если бы $F \setminus S_F$ было несчетно, то одна из его точек была бы его точкой конденсации, а значит, и подавно точкой конденсации множества F, т. е. принадлежала бы S_F, что невозможно.

369. Пусть $F = P \cup N$ — какое-нибудь представление множества F в виде объединения совершенного множества P и не более чем счетного множества $N = F \setminus P$. Докажем: а) $P \subset S_F$. Пусть $x \in P$ и ε — произвольное положительное число. Множество $V\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap P$ не имеет изолированных точек. Действительно, любая его изолированная точка, будучи внутренней для $V\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, являлась бы изолированной для P; а это противоречит тому, что P — совершенное множество. Поэтому $\overline{V\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap P}$ также не имеет изолированных точек. Поскольку множество $\overline{V\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap P}$ замкнуто, оно совершенно и, следовательно, несчетно (см. задачу 253). Но $V(x, \varepsilon) \supset \overline{V\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)} \supset \overline{V\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap P}$. Таким образом, $V(x, \varepsilon)$ при любом $\varepsilon > 0$ содержит несчетное множество точек из P, а значит, и из F, т. е. $x \in S_F$. б) $S_F \subset P$. Действительно, если $x \overline{\in} P$, то некоторая окрестность $V(x, \varepsilon)$ точки x не пересекается с P. Тогда $V(x, \varepsilon) \cap F \subset N$, т. е. $V(x, \varepsilon)$ содержит не более чем счетное множество точек из F и потому $x \overline{\in} S_F$.

Таким образом, $P = S_F$, а значит, $N = F \setminus S_F$.

370. Пусть X — множество рациональных точек на прямой с обычной метрикой и $F = X$. Тогда множества $P = F \cap [a, b]$ и $N = F \setminus P$ при произвольных a и b, $a < b$ дают разбиение F на два множества, из которых P совершенно, а N счетно.

371. По теореме Кантора — Бендиксона (задача 368) F есть объединение совершенного множества P и не более чем счетного множества N. Если P пусто, то F не более чем счетно. Если же P непусто, то, как следует из результатов задач 253 и 360, оно имеет мощность континуума. А так как N не более чем счетно, то и множество $F = P \cup N$ имеет в этом случае мощность континуума.

372. Согласно результату задачи 352, E, рассматриваемое как подпространство пространства X, сепарабельно. Но единственным плотным множеством в пространстве, все точки которого изолированные, является само пространство. Следовательно, E не более чем счетно.

373. Пусть X — несчетное множество, наделенное метрикой, введенной в задаче 125, т. е. определенной следующим образом:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = y, \\ 1, \text{ если } x \neq y. \end{cases}$$

Если за E принять само X, то все его точки будут изолированы, хотя оно и несчетно.

374. Не может. Действительно, в противном случае несчетное множество $E \setminus E'$, не пересекающееся с E', не содержало бы ни одной своей предельной точки, а значит, и ни одной своей точки конденсации. Но, в силу сепарабельности плоскости (задача 345), это противоречит теореме Линделёфа (задача 366).

375. Метод доказательства указан в условии задачи.

376. Если бы точка $x_0 \in E$ была изолированной, то E было бы объединением двух разъединенных множеств $\{x_0\}$ и $E \setminus \{x_0\}$, что противоречит связности E.

377. Равенство $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \varnothing$ равносильно тому, что $\overline{A} \cap B = \varnothing$ и $A \cap \overline{B} = \varnothing$, т. е. что B не содержит точек прикосновения множества A и A не содержит точек прикосновения множества B.

378. а) Если A и B оба замкнуты, то $(\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A \cap B = \varnothing$, так как $\overline{A} = A$, $\overline{B} = B$. б) Если A и B оба открыты, то $\overline{A} \cap B = \varnothing$, так как все точки множества B внутренние, а потому не могут быть точками прикосновения множества A; точно так же $A \cap \overline{B} = \varnothing$.

379. Так как E несвязно, то $E = A \cup B$, где A и B — разъединенные множества; тогда, в частности, $\overline{A} \cap B = \varnothing$. Так как E замкнуто, то $\overline{A} \subset E$. Таким образом, $\overline{A} \subset E \setminus B = A$, т. е. A замкнуто. Аналогично проверяется замкнутость B.

380. Так как E несвязно, то $E = A \cup B$, где A и B — разъединенные множества. Каждая точка $x_0 \in A$ обладает окрестностью $V(x_0, \varepsilon) \subset E$ (поскольку E открыто). Так как x_0 не является точкой прикосновения для B, то найдется окрестность $V(x_0, \delta) \subset \subset V(x_0, \varepsilon)$, не содержащая точек из B; но $V(x_0, \varepsilon) \subset E$; поэтому $V(x_0, \delta) \subset E \setminus B = A$, т. е. $x_0 \in A^\circ$. Таким образом, A открыто. Аналогично доказывается, что B открыто.

381. Допустим, что E несвязно. Тогда $E = A \cup B$, где A и B — непересекающиеся непустые замкнутые множества (см. задачу 379). При этом хотя бы одно из множеств $A \cap F$, $B \cap F$ пусто (если бы они оба были непусты, то множество $E \cap F = (A \cap F) \cup \cup (B \cap F)$ было бы несвязно). Пусть, например, $A \cap F = \varnothing$. Тогда

$$E \cup F = (A \cup B) \cup F = A \cup (B \cup F),$$

причем A и $B \cup F$ замкнуты, непусты и не пересекаются (так как $A \cap (B \cup F) = (A \cap B) \cup (A \cap F) = \varnothing$); но это противоречит связности $E \cup F$. Полученное противоречие доказывает связность множества E. Аналогично проверяется связность F.

382. Пример в пространстве $\boldsymbol{R}^1$: $E = [0, 1] \cup [2, 3]$, $F = [0, 2[$.

383. Допустим, что $\overline{E}$ — несвязное множество, так что $\overline{E} = A \cup B$, где A и B — непересекающиеся непустые замкнутые множества (см. задачу 379). Тогда множества $E \cap A$ и $E \cap B$ непусты (если бы, например, $E \cap A$ было пустым, то имело бы место включение $E \subset B \subset \overline{E}$, где B замкнуто и отлично от $\overline{E}$; а это невозможно в силу результата задачи 168. Следовательно, множества $E \cap A$ и $E \cap B$ разъединены (поскольку разъединены A и B). Но это противоречит связности E, так как $E = (E \cap A) \cup \cup (E \cap B)$. Итак, допустив, что $\overline{E}$ несвязно, мы пришли к противоречию. Значит, $\overline{E}$ связно.

Пример. Пусть E — множество всех рациональных чисел на прямой. Тогда E несвязно, а $\overline{E}$ связно.

384. Это следует из результата задачи 383, если учесть, что H является замыканием множества E в пространстве H (см. задачу 192).

385. Если бы E было несвязным, то его можно было бы представить в виде объединения двух разъединенных множеств A и B. Пусть $x \in A$, $y \in B$. По условию задачи существует связное множество $Q \subset E$, содержащее точки x и y. Тогда $Q = (Q \cap A) \cup \cup (Q \cap B)$, где $Q \cap A$, $Q \cap B$ — разъединенные множества; но это невозможно в силу связности множества Q.

386. Пусть E — рассматриваемое множество. Обозначим через E_1 множество точек из E с отрицательными абсциссами, через E_2 — с положительными. Тогда $E = E_1 \cup E_2$, причем $(E_1 \cap \overline{E_2}) \cup \cup (\overline{E_1} \cap E_2) = \varnothing$, т. е. множества E_1 и E_2 разъединены (см. задачу 377).

387. Пусть X — прямая, плоскость или трехмерное евклидово пространство с обычной метрикой и пусть точки a и b принадлежат X. Прямолинейный отрезок с концами a и b будем обозначать $[a, b]$.

Если $a = b$, то отрезок $[a, b]$ состоит из одной точки и потому связен. Пусть $a \neq b$ и $[a, b] = F \cup \Phi$, где F и Φ — непустые замкнутые множества. Докажем, что $F \cap \Phi \neq \varnothing$. Для этого разделим отрезок $[a, b]$ пополам и обозначим через $[a_1, b_1]$ какую-нибудь его половину, содержащую как точки из F, так и точки из Φ; по крайней мере одна половина отрезка $[a, b]$ обладает этим свойством (если, например, середина отрезка принадлежит множеству F, то в качестве $[a_1, b_1]$ берем ту половину $[a, b]$, которая содержит хотя бы одну точку множества Φ). Аналогично поступим с отрезком $[a_1, b_1]$: разделим его пополам и обозначим через $[a_2, b_2]$ какую-нибудь его половину, содержащую как точки из F, так и точки из Φ. Неограниченно продолжая этот процесс, мы получим убывающую последовательность отрезков $\{[a_n, b_n]\}$, длины (т. е. диаметры) которых стремятся к нулю, причем каждый из этих отрезков содержит как точки из F, так и точки из Φ. Пусть C — общая точка всех этих отрезков (см. задачу 208). Каждая ее окрестность содержит $[a_n, b_n]$ с достаточно большим номером n и, следовательно, точки и из F, и из Φ. Поэтому C — точка прикосновения и для F, и для Φ. Так как оба эти множества замкнуты, то $C \in F \cap \Phi$, т. е. $F \cap \Phi \neq \varnothing$. Применяя результат задачи 379, заключаем, что отрезок $[a, b]$ связен.

Заметим, что для случая отрезка на прямой утверждение настоящей задачи следует также из задачи 214.

388. Любые две точки замкнутого круга (шара) соединяются содержащимся в нем прямолинейным отрезком на плоскости (в трехмерном евклидовом пространстве). Утверждения задачи вытекают поэтому из результатов предыдущей задачи и задачи 385.

389. Предположим, что E несвязно, т. е. $E = A \cup B$, где A и B — разъединенные множества. Хотя бы одно из множеств E_1, E_2 имеет непустое пересечение и с A, и с B (в самом деле, если, например, $E_2 \cap A = \varnothing$, то $B \supset E_2$ и $E_1 \supset A$; поэтому $E_1 \cap B \supset E_1 \cap E_2 \neq \varnothing$ и $E_1 \cap A \neq \varnothing$). Пусть, скажем, $E_1 \cap A \neq \varnothing$ и $E_1 \cap B \neq \varnothing$. Тогда $E_1 = (E_1 \cap A) \cup (E_1 \cap B)$, и множества $E_1 \cap A$ и $E_1 \cap B$ разъединены, так как A и B разъединены. Но это противоречит условию связности E_1. Итак, предположение, что E несвязно, привело к противоречию; значит, E связно.

390. Для любых двух точек $x, y \in E$ имеем $x \in E_{n_1}$, $y \in E_{n_2}$; тогда $x \in E_n$, $y \in E_n$, где $n = \max\{n_1, n_2\}$, т. е. существует связное множество, включающееся в E и содержащее x и y. Поэтому, согласно результату задачи 385, множество E связно.

391. Из результата задачи 389 следует (после применения индукции), что для любого номера n множество $F_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} E_i$ связно. А тогда $\{F_n\}$, как возрастающая последовательность связных множеств, имеет связное объединение (см. предыдущую задачу). Но $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$; следовательно, $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$ также связно.

392. Множества $H_i = E_i \cup E_{i+1}$ связны и удовлетворяют условию

$$H_i \cap H_{i+1} = (E_i \cup E_{i+1}) \cap (E_{i+1} \cup E_{i+2}) \supset E_{i+1} = \varnothing$$

для каждого номера i. Согласно результату предыдущей задачи связно и их объединение $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} H_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} (E_i \cup E_{i+1}) = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} E_i$.

393. Любые две точки данного множества можно соединить ломаной, входящей в это множество и состоящей не более чем из трех звеньев, параллельных осям координат; но ломаная есть связное множество (см. задачи 387 и 389). Значит, в силу результата задачи 385, рассматриваемое множество связно.

394. Пусть E — связное множество на прямой и x_1, x_2 — любые две различные его точки. Если бы какая-нибудь точка c, заключенная между x_1 и x_2, не принадлежала E, то E можно было бы представить в виде объединения двух разъединенных множеств $A =]-\infty, c[\cap E$ и $B =]c, +\infty[\cap E$; но это противоречит связности E. Итак, если множество E связно, то вместе с любыми двумя своими точками оно содержит и весь отрезок, соединяющий эти точки.

Обратно, пусть множество E на прямой таково, что каковы бы ни были точки $x_1 \in E$, $x_2 \in E$, где $x_1 < x_2$, отрезок $[x_1, x_2]$ полностью входит в E. Тогда множество E связно в силу результатов задач 385 и 387.

395. Связность каждого из этих множеств вытекает из результатов предыдущей задачи.

Докажем, что этими множествами исчерпываются все связные множества на прямой.

Пусть E — связное непустое и неодноточечное множество на прямой, $a = \inf E$, $b = \sup E$. Рассмотрим сначала тот случай, когда a и b — конечные числа ($a < b$). Тогда любое число c, заключенное между a и b, входит в E. Действительно, так как $b = \sup E$, то существует точка $b_1 \in E$ такая, что $c < b_1 \leqslant b$. Точно так же устанавливается, что существует $a_1 \in E$, где $a \leqslant a_1 < c$. Но тогда, в силу связности E, на основании результата предыдущей задачи заключаем, что $[a_1, b_1] \subset E$ и, значит, $c \in E$. Итак, интервал $]a, b[$ включается в E, а точки, лежащие за пределами отрезка $[a, b]$, не принадлежат E. Следовательно, E является одним из следующих множеств: $]a, b[$, $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$.

Если $a = -\infty$, а b конечно, то E равно $]-\infty, b[$ или $]-\infty, b]$; если a конечно, а $b = +\infty$, то E равно $]a, +\infty[$ или $[a, +\infty[$; наконец, если $a = -\infty$, $b = +\infty$, то $E =]-\infty, +\infty[$. Во всех этих случаях доказательство проводится так же, как и в том случае, когда a и b конечны.

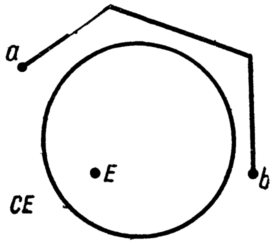


Рис. 26

396. Доказательство проводится так же, как при решении задач 387 и 388. Под отрезком в пространстве $\boldsymbol{R}^n$, соединяющим точки $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$, понимается совокупность точек с координатами $c_k = (1 - \lambda)\, a_k + \lambda b_k$ ($k = 1, \ldots, n$), где λ пробегает отрезок $[0, 1]$ числовой прямой.

397. Если бы в X было такое множество E, то его дополнение $\mathbf{C}E = X \setminus E$ также было бы непустым множеством, одновременно открытым и замкнутым. Но тогда все пространство X было бы объединением двух непересекающихся непустых замкнутых множеств E и $\mathbf{C}E$, что, в силу результата задачи 378, противоречит связности X.

398. Нельзя. В самом деле, допустим, что открытый круг E можно представить в виде $E = G_1 \cap G_2$, где G_1 и G_2 — открытые множества, отличные от всей плоскости и вместе составляющие всю плоскость. Тогда мы имели бы (в силу закона двойственности):

$$\mathbf{C}E = \mathbf{C}G_1 \cup \mathbf{C}G_2,$$

где $\mathbf{C}G_1$ и $\mathbf{C}G_2$ — непересекающиеся непустые замкнутые множества, т. е. множество $\mathbf{C}E$ было бы несвязным.

На самом же деле $\mathbf{C}E$ связно. Действительно, любые две его точки a и b можно соединить ломаной, принадлежащей $\mathbf{C}E$ (рис. 26), а ломаная является связным множеством (см. задачи 387 и 389); поэтому связность $\mathbf{C}E$ вытекает из результата задачи 385.

399. Необходимость. Пусть $E \times F$ связно. Так как по условию $E \times F$ непусто, то множества E и F также непусты. Докажем, что эти множества связны. Если бы одно из них, например E, было несвязным, то его можно было бы представить в виде объединения $E = A \cup B$, где A и B — разъединенные множества. Тогда, как легко видеть, множества $A \times F$ и $B \times F$ также разъединены (они непусты, так как F непусто). Но $E \times F = (A \times F) \cup (B \times F)$; поэтому $E \times F$ было бы несвязным, что противоречит условию.

Достаточность. Пусть множества E и F связны. Возьмем две любые точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) из $E \times F$; рассмотрим множества $\{x_1\} \times F$ и $E \times \{y_2\}$. Пересечение этих множеств непусто: оно состоит из точки (x_1, y_2). Кроме того, каждое из этих множеств связно, так как $\{x_1\} \times F$ изометрично F, $E \times \{y_2\}$ изометрично E, а множества F и E связны. Значит, объединение $(\{x_1\} \times F) \cup (E \times \{y_2\})$ связно (задача 389). Но это объединение содержит обе точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2). Следовательно, в силу результата задачи 385, $E \times F$ связно.

Замечание. Вместо метрики для $E \times F$ из задачи 146 можно взять метрику из задачи 147 — важен лишь тот факт, что подпространства $\{x\} \times F$ и $E \times \{y\}$ пространства $E \times F$ изометричны исходным пространствам F и E.

400. Пусть x_0 — произвольная точка из G. Рассмотрим множество A всех точек множества G, которые можно соединить с точкой x_0, лежащей в G ломаной, каждое звено которой параллельно одной из осей координат. Множество A непусто, так как оно содержит точку x_0. Покажем, что множества A и $G \setminus A$ открыты.

Пусть $x \in A$. Так как G открыто, то существует круг $V(x, \varepsilon)$, лежащий в G. Каждую его точку x' можно соединить с точкой x ломаной, лежащей в $V(x, \varepsilon)$ и состоящей не более чем из двух звеньев, каждое из которых параллельно одной из осей координат. Дополнив этими звеньями ломаную, соединяющую x с x_0, мы получим в G ломаную, соединяющую точки x_0 и x', звенья которой параллельны осям координат. Значит, $x' \in A$, т. е. $V(x, \varepsilon) \subset \subset A$. Следовательно, A открыто.

Пусть теперь $x \in G \setminus A$. Так как $x \in G$, то существует круг $V(x, \varepsilon) \subset G$. Если бы некоторая его точка x' принадлежала A, то мы получили бы, вопреки предположению, что и $x \in A$ (поскольку x можно соединить с x' ломаной, лежащей в $V(x, \varepsilon)$, звенья которой параллельны осям координат). Таким образом, $V(x, \varepsilon) \subset G \setminus A$ и $G \setminus A$ открыто.

Итак, множества A и $G \setminus A$ открыты, причем A непусто. Так как G связно, то $G \setminus A$ пусто (см. задачу 378). Но это и означает, что утверждение задачи справедливо.

401. Докажем, что любые две точки $x \in E$ и $y \in E$ можно соединить связным множеством, включающимся в E. В качестве такого множества можно взять $A(x) \cup A(y)$, где $A(x)$ и $A(y)$ — какие-либо множества из семейства $\{A_\alpha\}$, содержащие соответственно точки x и y. Так как $A(x)$ и $A(y)$ связны, а $A(x) \cap A(y) \neq \neq \varnothing$, то $A(x) \cup A(y)$ связно (задача 389). Поэтому, в силу результата задачи 385, E связно.

З а м е ч а н и е. Из доказательства видно, что достаточно требовать, чтобы множества A_α ($\alpha \in \mathrm{A}$) попарно пересекались, пересечение же всех этих множеств может быть и пустым.

402. Этой компонентой является объединение всех связных подмножеств множества E, содержащих x_0 (оно непусто, так как, во всяком случае, включает множество $\{x_0\}$; связность объединения вытекает из результата задачи 401). Единственность компоненты легко доказывается.

403. Согласно результату задачи 383, $\overline{A}$ вместе с A связно. А так как $A \subset \overline{A} \subset E$, то, по определению компоненты, $\overline{A} = A$, т. е. A замкнуто.

404. Это вытекает из результатов задач 389 и 402.

405. Множество всех иррациональных точек на прямой; канторово совершенное множество; множество из задачи 191.

406. Такой компонентой является объединение всех связных подмножеств множества E, содержащих какую-нибудь фиксированную точку $x_0 \in F$. Единственность легко доказывается.

Глава VII. МЕРА МНОЖЕСТВ (В ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ)

407. Ось Ox имеет плоскую меру нуль. Следовательно, все подмножества оси Ox измеримы на плоскости Oxy и их плоская мера равна нулю.

408. Канторово совершенное множество D имеет линейную меру нуль. Следовательно, каждое его подмножество также имеет линейную меру нуль и поэтому измеримо. Но совокупность всех подмножеств канторова множества имеет мощность гиперконтинуума (2^c), так как $\overline{\overline{D}} = c$. Значит, совокупность U *всех* измеримых множеств на числовой прямой имеет мощность большую или равную 2^c: $\overline{\overline{\mathrm{U}}} \geqslant 2^c$.

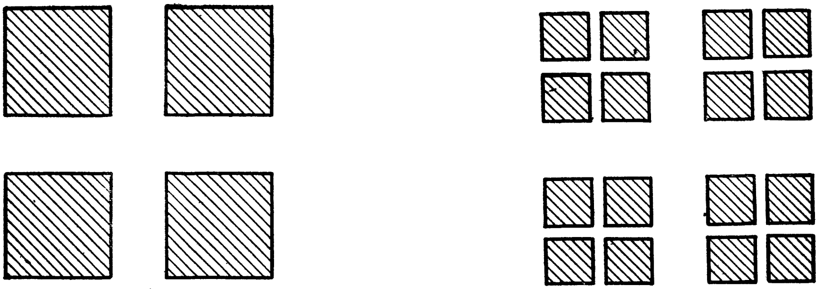
С другой стороны, так как совокупность всех вообще множеств на прямой имеет мощность 2^c, то $\overline{\overline{\mathrm{U}}} \leqslant 2^c$. Следовательно, $\overline{\overline{U}} = 2^c$.

409. В качестве примера можно взять совершенное множество, построенное в задаче 289, приняв $\sum\limits_n a_n = 0{,}1$. Тогда сумма длин выброшенных интервалов равна 0,1, а значит, мера оставшегося совершенного множества равна $1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

410. В задаче 289 взять $\sum\limits_n a_n = 1 - a$.

411. Нет. Дополнение $\complement E$ к нигде не плотному совершенному множеству $E \subset [0, 1]$ до всего отрезка $[0, 1]$ содержит интервалы и, значит, имеет положительную меру, так что $mE = 1 - m(\complement E) < 1$.

412. Построение этого примера проводится примерно так же, как и построение совершенного множества в задаче 289. Зададим произвольный сходящийся ряд с положительными членами $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, сумма которого равна $1 - a$. Проведем теперь в основном квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$ две вертикальные и две горизонтальные прямые так, чтобы площадь креста, вырезаемого этими прямыми, равнялась a_1 и чтобы четыре четырехугольника, оставшиеся после отбрасывания этого креста, были замкнутыми квадратами (рис. 27, *а*). Эти замкнутые квадраты назовем квадратами первого ранга; их объединение обозначим P_1 (P_1 — замкнутое множество). Далее, в каждом из квадратов первого ранга проведем по две вертикальные и по две горизонтальные прямые так, чтобы каждый крест, вырезаемый этими прямыми, имел площадь $\frac{a^2}{4}$ и чтобы после отбрасывания этого креста в каждом квадрате первого ранга осталось по четыре замкнутых квадрата; назовем последние квадратами второго ранга, их объединение обозначим P_2; число квадратов второго ранга равно 4^2 (рис. 27, *б*). Вообще, если построены квадраты k-го ранга (их число равно 4^k), то даль-



а) б)

22	23	26	27	38	39	42	43
21	24	25	28	37	40	41	44
20	19	30	29	36	35	46	45
17	18	31	32	33	34	47	48
16	13	12	11	54	53	52	49
15	14	9	10	55	56	51	50
2	3	8	7	58	57	62	63
1	4	5	6	59	60	61	64

в)

Рис. 27

нейшее построение проводится так: в каждом из квадратов k-го ранга проводим по две вертикальные и по две горизонтальные прямые так, чтобы крест, вырезаемый этими прямыми, имел площадь $\frac{a_{k+1}}{4^k}$ и чтобы оставшиеся четырехугольники были замкнутыми квадратами; назовем их квадратами $(k+1)$-го ранга; обозначим их объединение P_{k+1} (число всех квадратов $(k+1)$-го ранга равно 4^{k+1}).

Если взять теперь пересечение всех P_k, то мы получим совершенное множество меры a. Последнее следует из того, что дополнением к этому множеству является объединение всех выброшенных крестов; а мера этого объединения равна $1-a$:

$$a_1 + 4 \cdot \frac{a_2}{4} + 4^2 \cdot \frac{a_3}{4^2} + \ldots + 4^k \cdot \frac{a_{k+1}}{4^k} + \ldots =$$
$$= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{k+1} + \ldots = 1 - a.$$

Итак, дополнение к построенному совершенному множеству до квадрата $[0,1] \times [0,1]$ имеет меру $1-a$, значит, само оно имеет меру a.

413. Мера дополнительного множества равна сумме площадей выбрасываемых квадратов всех рангов, т. е.

$$mCA = \frac{1}{9} + \frac{1}{9^2} \cdot 8 + \ldots + \frac{1}{9^k} \cdot 8^{k-1} + \ldots = \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{8}{9}} = 1.$$

Следовательно, $mA = 0$.

414. Мера дополнительного множества равна сумме площадей всех выбрасываемых «крестов», т. е.

$$mCB = \frac{5}{9} + \frac{5}{9^2} \cdot 4 + \frac{5}{9^3} \cdot 4^2 + \ldots + \frac{5}{9^{k+1}} \cdot 4^k + \ldots = 1.$$

Следовательно, $mB = 0$.

415. Мера дополнительного множества равна сумме площадей всех выбрасываемых прямоугольников, т. е.

$$mCE = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \cdot 2 + \frac{1}{3^3} \cdot 2^2 + \ldots + \frac{1}{3^{k+1}} \cdot 2^k + \ldots = 1.$$

Следовательно, $mE = 0$.

416. Пусть $E \subset [a, b]$. Рассмотрим функцию $f(x)$ на $[a, b]$, определенную формулой

$$f(x) = m([a, x] \cap E).$$

Очевидно, что $f(a) = \theta$, $f(b) = mE = p$ и $f(x)$ монотонно возрастает (хотя не обязательно строго). Докажем, что функция $f(x)$ непрерывна. Пусть $x, x + h \in [a, b]$ и $h > 0$. Тогда

$$f(x + h) - f(x) = m([a, x + h] \cap E) - m([a, x] \cap$$
$$\cap E) = m(]x, x + h] \cap E) \leqslant m\,]x, x + h] = h.$$

Следовательно, $f(x + h) - f(x) \to 0$ при $h \to +0$, т. е. $f(x)$ непрерывна справа во всех точках $x \in [a, b[$. Аналогично доказывается, что $f(x)$ непрерывна слева во всех точках $x \in]a, b]$.

Итак, $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Поэтому ее значения заполняют весь отрезок $[f(a), f(b)]$. В частности, так как $f(a) < q < f(b)$, то найдется $\zeta \in]a, b[$ такое, что $f(\zeta) = q$. Но $f(\zeta) = m([a, \zeta] \cap E)$. Следовательно, множество $[a, \zeta] \cap E$, включающееся в E, имеет меру, в точности равную q.

417. Случай, когда множество E ограничено, рассмотрен в решении предыдущей задачи. Если же E — неограниченное множество на прямой, то поступаем следующим образом. Положим

$$E_n = E \cap [-n, n].$$

Ясно, что $E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_n \subset \ldots$, причем $\bigcup\limits_n E_n = E$. Тогда $mE = \lim\limits_{n \to \infty} mE_n$, т. е. $\lim\limits_{n \to \infty} mE_n = p$. Так как по условию $q < p$, то существует такой номер n_0, что $mE_{n_0} > q$. Обозначим $mE_{n_0} = r$. Множество E_{n_0} ограничено и имеет меру $r > q$. Согласно предыдущей задаче, оно обладает измеримым подмножеством A, мера которого равна q. Остается заметить, что $A \subset E$.

418. Пусть q' — какое-либо число, заключенное между p и q $(q < q' < p)$. Согласно предыдущей задаче, существует ограниченное измеримое множество $A \subset E$ такое, что $mA = q'$. Пусть $A \subset [a, b]$. Так как $mA > q$, то существует замкнутое множество $B \subset A$ такое, что $mB > q$ (см. свойство 11, с. 46).

Наконец, так же, как это было сделано в решении задачи 416, устанавливаем, что на отрезке $[a, b]$ имеется точка ζ такая, что $m([a, \zeta] \cap B) = q$.

Множество $[a, \zeta] \cap B$ замкнуто, как пересечение двух замкнутых множеств. Обозначим его через C:

$$C = [a, \zeta] \cap B, \; mC = q.$$

Как всякое замкнутое множество на прямой, C разбивается на совершенное множество D и не более чем счетное множество N (см. задачу 368). Так как мера N равна нулю, то $mD = mC = q$. Остается заметить, что $D \subset E$.

419. Так как $mE > 0$, то, в силу предыдущей задачи, E обладает ограниченным совершенным подмножеством D положительной меры. Поскольку D непусто, его мощность не меньше мощности континуума (см. задачу 253). Поэтому $\overline{\overline{E}} \geqslant c$. Но, с другой стороны, E — подмножество числовой прямой, которая также имеет мощность континуума, и потому $\overline{\overline{E}} \leqslant c$. Следовательно, $\overline{\overline{E}} = c$.

420. Если E — ограниченное плоское множество, то поступаем следующим образом. Пусть E проектируется на ось Ox в отрезок $[a, b]$. Рассмотрим множество E_x тех точек из E, абсциссы которых не превосходят x, и определим на $[a, b]$ функцию f, положив $f(x) = mE_x$. Тогда $f(a) = 0$, $f(b) = p$. Легко доказать, что f — непрерывная функция на $[a, b]$. Так как $f(a) < q < f(b)$, то, следовательно, на $[a, b]$ найдется точка ζ такая, что $f(\zeta) = q$. Тогда $M = E_\zeta$ и будет искомым множеством: $M \subset E$, причем $mM = q$.

Если E не ограничено, мы поступаем так же, как в задаче 417.

421. Опираясь на результат задачи 420, поступаем так же, как в аналогичном случае при решении задачи 418.

422. Не может. Если множество E содержит внутреннюю точку x_0, то в E входит и некоторая окрестность $V(x_0)$ этой точки. Но тогда $mE \geqslant mV(x_0) > 0$.

423. Нельзя. Если бы мера замкнутого множества $E \subset [a, b]$, отличного от $[a, b]$, равнялась $b - a$, то $[a, b] \setminus E$ содержало бы внутренние точки и имело бы меру нуль. А это невозможно (см. предыдущую задачу).

424. Все три возможности осуществимы. П р и м е р ы:

а) если $E_n = \left[-\frac{1}{n}, +\infty\right[$, то $E = [0, +\infty[$, так что $mE = +\infty$;

б) если $E_n = [-1, 0] \cup [n, +\infty[$, то $E = [-1, 0]$, так что $mE = 1$;

в) если $E_n = [n, +\infty[$, то $E = \varnothing$, так что $mE = 0$.

425. Обе возможности осуществимы. Примеры:

а) если $E_n = \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$, то $E = [0, 1[$, так что $mE < +\infty$;

б) если $E_n = [0, n]$, то $E = [0, +\infty[$, так что $mE = +\infty$.

426. Обозначим через E_1 множество всех тех точек отрезка $[0, 1]$, в разложении которых в бесконечную двоичную дробь на втором месте стоит нуль; через E_2 — множество всех тех точек, в разложении которых на втором и четвертом местах стоят нули; через E_3 — множество всех тех точек, в разложении которых на втором, четвертом и шестом местах стоят нули и т. д. Ясно, что $E_1 \supset E_2 \supset E_3 \supset \ldots$ и что $mE_k = \frac{1}{2^k}$ при любом k (каждое множество E есть объединение 2^k попарно не пересекающихся полуоткрытых промежутков длины $\frac{1}{4^k}$). Так как $E = \bigcap\limits_{k=1}^{n} E_k$, то

$$mE = \lim_{k\to\infty} mE_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2^k} = 0.$$

То, что E нигде не плотно, доказывается так же, как для канторова множества (задача 224).

427. Может; например, множество $E = \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} \left]k, \; k + \frac{1}{2^k}\right[$ не ограничено, а его мера равна единице.

428. Пусть I — произвольный интервал на прямой. Он не может содержаться в E, так как в противном случае $mE \geqslant mI > 0$. Таким образом, $I \cap \complement E \neq \varnothing$. Так как E замкнуто, то $\complement E$ открыто. Следовательно, $I \cap \complement E$ — непустое открытое множество; но тогда существует интервал, включающийся в I и свободный от точек множества E. Тем самым E — нигде не плотное множество на прямой.

Доказательство для плоскости и трехмерного пространства аналогично.

429. Нет. Пример. Пусть E — множество всех рациональных чисел на отрезке $[0, 1]$. Тогда $mE = 0$, а $m\overline{E} = 1$.

430. Нет. Пример. Пусть F — нигде не плотное совершенное множество положительной меры на отрезке $[0, 1]$ (см., например, задачу 410), а E — множество его точек первого рода (т. е. множество концов всех смежных интервалов). Тогда E — нигде не плотное счетное множество, а всякое счетное множество есть множество меры нуль. В то же время $\overline{E} = F$ и, следовательно, $m\overline{E} = mF > 0$.

431. Так как E — множество положительной меры, то оно имеет мощность континуума (задача 419). Пусть x_0 — произвольная точка из E. Тогда множество всевозможных чисел вида $\rho(x_0, x)$, где $x \in E$, имеет мощность континуума; следовательно, не все эти числа могут быть рациональными. Иначе говоря, найдется такая точка $x \in E$, что $\rho(x_0, x)$ иррационально.

432. Занумеруем все рациональные числа интервала $]0, 1[$:

$$r_1, r_2, \ldots, r_k, \ldots$$

и для каждого натурального числа k обозначим через E_k множество, получившееся из E сдвигом на r_k, т. е. множество всех точек вида $x + r_k$, где r_k фиксировано, а $x \in E$. Множества E_k конгруэнтны E и потому все имеют меру μ. Если бы они попарно не пересекались, то, положив $H = \bigcup_k E_k$, мы имели бы $mH = mE_1 + mE_2 + \ldots + mE_k + \ldots = \mu + \mu + \ldots + \mu + \ldots = +\infty$, что невозможно, так как $H \subset [a, b+1]$ и, значит, $mH \leqslant b + 1 - a$. Итак, существуют такие два различных номера i и j, что $E_i \cap E_j = \varnothing$. Пусть $\zeta \in E_i \cap E_j$. Тогда $\zeta = x + r_i = y + r_j$, где $x, y \in E$, откуда $|x - y| = |r_i - r_j| \neq 0$, так что $\rho(x, y)$ рационально.

433. В силу результата задачи 417, E содержит о г р а н и ч е н н о е подмножество E_0, мера которого также положительна; остается применить к множеству E_0 результат предыдущей задачи.

434. E — нигде не плотное совершенное множество на отрезке $[0, 1]$ (см., например, задачу 290). Мера дополнительного множества равна сумме длин смежных интервалов:

$$m\mathrm{C}E = \frac{1}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9^2}{10^3} + \ldots + \frac{9^k}{10^{k+1}} + \ldots = 1.$$

Следовательно, $mE = 0$.

435. Это множество является дополнительным (до отрезка $[0, 1]$) к тому, которое рассмотрено в предыдущей задаче; поэтому оно всюду плотно на отрезке $[0, 1]$ и открыто; его мера равна 1.

436. Часть этого множества, расположенная на отрезке $[n, n+1]$ (n — целое), получается из множества E задачи 434 сдвигом на n и потому имеет меру нуль. Все множество H представляет собой объединение этих частей:

$$H = \bigcup_n \{H \cap [n, n+1]\},$$

и потому также имеет меру нуль.

437. Обозначим через A_k множество всех чисел отрезка $[0, 1]$, в бесконечном десятичном разложении которых фигурирует цифра k. Множество A_k можно получить, если к множеству точек, десятичное разложение которых невозможно без цифры k, добавить те точки, которые допускают два различных способа разложения и в б е с к о н е ч н о м разложении которых имеется цифра k. Таким образом, A_k есть объединение открытого и счетного множеств; следовательно, A_k — множество типа F_σ. Указанное открытое множество, а с ним и A_k, плотно в $[0, 1]$; $mA_k = 1$ (см. задачу 435).

Интересующее нас множество E является пересечением всех A_k ($k = 1, 2, \ldots, 9$). Следовательно, E — множество типа F_σ. Чтобы найти меру E, найдем сначала меру его дополнения относительно отрезка $[0, 1]$:

$$\mathbf{C}E = \mathbf{C}(\bigcap_{k=1}^{9} A_k) = \bigcup_{k=1}^{9} \mathbf{C}A_k;$$

но $m\mathbf{C}A_k = 0$ ($k = 1, \ldots, 9$); следовательно, $m\mathbf{C}E = 0$, так что $mE = 1$. Отсюда, в частности, следует, что E плотно на отрезке $[0, 1]$.

438. Это — совершенное нигде не плотное множество. Оно содержится в множестве A, получающемся следующим образом: разделив отрезок $[0, 1]$ на 1000 отрезков длины 0,001 и удалив из него интервал $]0{,}222,\ 0{,}223[$, получим множество A_1, составленное из 999 отрезков; заменив каждый из них содержащимся в нем множеством, получающимся подобным сжатием множества A_1 в 1000 раз, получим множество A_2, составленное из 999^2 отрезков длины $0{,}001^2$; заменив каждый из них содержащимся в нем множеством, получающимся подобным сжатием множества A_1 в 1000^2 раз, получим множество A_3, составленное из 999^3 отрезков длины $0{,}001^3$, и т. д.; за A принимаем пересечение $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots$ всех этих множеств. Так как $mA = 1 - (0{,}001 + 999 \cdot 0{,}001^2 + 999^2 \cdot 0{,}001^3 + \ldots) = 0$, то и рассматриваемое множество тоже имеет меру нуль.

439. Объединение всех этих интервалов представляет собой открытое множество

$$\left(-\frac{1}{20},\ \frac{1}{9}+\frac{1}{20}\right) \cup \left(\frac{2}{9}-\frac{1}{20},\ \frac{1}{3}+\frac{1}{20}\right) \cup \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{20},\ \frac{7}{9}+\frac{1}{20}\right) \cup$$
$$\cup \left(\frac{8}{9}-\frac{1}{20},\ 1+\frac{1}{20}\right).$$

Его мера равна $4 \cdot \left(\frac{1}{10}+\frac{1}{9}\right) = \frac{38}{45}$.

440. Мера объединения всех интервалов u_i и v_i не превосходит суммы их длин; поэтому

$$m((\bigcup_i u_i) \cup (\bigcup_i v_i)) \leqslant \sum_i \frac{b_i - a_i}{4} + \sum_i \frac{b_i - a_i}{4} =$$
$$= \frac{1}{2} \sum_i (b_i - a_i).$$

Но $\sum\limits_i (b_i - a_i) = m\mathbf{C}E = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Итак,

$$m((\bigcup_i u_i) \cup (\bigcup_i v_i)) \leqslant 0{,}2.$$

Так как мера множества $(\bigcup\limits_i u_i) \cup (\bigcup\limits_i v_i)$ меньше меры множества E, то это множество не может покрыть всего E.

441. Можно. Пусть $\{\gamma_i\}$ — какая-либо последовательность положительных чисел, такая, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\gamma_i$ сходится и его сумма меньше 1. Пусть, кроме того, $\{\eta_i\}$ — какая угодно убывающая последовательность положительных чисел, стремящаяся к нулю.

Впишем* в отрезок $[0, 1]$ нигде не плотное совершенное множество A_1 меры γ_1, каждый смежный интервал которого имеет длину меньше чем η_1.

Далее, в каждый смежный интервал $]\alpha, \beta[$ множества A_1 впишем нигде не плотное совершенное множество меры $(\beta-\alpha)\gamma_2$, каждый смежный интервал которого, расположенный на $]\alpha, \beta[$, имеет длину $< \eta_2$. Объединение всех этих совершенных множеств обозначим A_2; ясно, что $mA_2 = \gamma_2 m\mathrm{C}A_1 < \gamma_2$ (здесь и дальше дополнения берутся до всего отрезка $[0, 1]$). В силу результата задачи 233, $A_1 \cup A_2$ — нигде не плотное совершенное множество и каждый его смежный интервал имеет длину меньше η_2; при этом $0 < m(A_1 \cup A_2) < \gamma_1 + \gamma_2$.

Пусть уже построены нигде не плотные совершенные множества $A_1, \ldots, A_n$ на $[0, 1]$ с нигде не плотным совершенным объединением $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$. В каждый смежный интервал $]\alpha, \beta[$ этого объединения впишем нигде не плотное совершенное множество меры $(\beta-\alpha)\gamma_{n+1}$, каждый смежный интервал которого, расположенный на $]\alpha, \beta[$, имеет длину меньше чем η_{n+1}. Объединение всех этих совершенных множеств обозначим A_{n+1}; ясно, что

$$mA_{n+1} = \gamma_{n+1} m\left(\mathrm{C}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)\right) < \gamma_{n+1}.$$

Тогда $\bigcup_{i=1}^{n+1} A_i$ — нигде не плотное совершенное множество; его мера меньше чем $\sum_{i=1}^{n+1}\gamma_i$; каждый его смежный интервал имеет длину меньше η_{n+1}.

Покажем, что множества $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ и $A = \mathrm{C}B$ удовлетворяют требованиям задачи. Пусть $]a, b[$ — произвольный интервал, входящий в $[0, 1]$, и n таково, что $\eta_n < \frac{b-a}{3}$. Так как $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ — нигде не плотное совершенное множество и длины всех его смежных интервалов меньше чем η_n, то внутри $]a, b[$ найдется хотя бы один смежный интервал этого множества; обозначим его I.
Тогда $I \cap A_1 = \varnothing$ для $i = 1, 2, \ldots, n$;

---

* Вписать в отрезок $[a, b]$ или в интервал $]a, b[$ совершенное множество — это значит построить совершенное множество, включающееся в $[a, b]$ или в $]a, b[$.

$m(I \cap A_{n+1}) = |I|\gamma_{n+1}$, где $|I|$ — длина интервала I; далее, $m(I \cap A_{n+2}) \leqslant |I|\gamma_{n+2}$, $m(I \cap A_{n+3}) \leqslant |I|\gamma_{n+3}$ и т. д. Так как $B \supset A_{n+1}$ и $]a, b[\supset I$, то $]a, b[\cap B \supset I \cap A_{n+1}$; следовательно

$$m(]a, b[\cap B) \geqslant m(I \cap A_{n+1}) = |I|\gamma_{n+1} > 0.$$

Чтобы доказать теперь, что $m(]a, b[\cap \complement B) > 0$, напомним, что множества A_i попарно не пересекаются. Поэтому

$$m(I \cap B) = \sum_{i=1}^{\infty} m(I \cap A_i) \leqslant |I|\gamma_{n+1} + |I|\gamma_{n+2} +$$

$$+ |I|\gamma_{n+3} + \ldots < |I| \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i < |I|.$$

Но $m(I \cap \complement B) = |I| - m(I \cap B)$. Следовательно, $m(I \cap \complement B) > 0$. А так как $I \subset]a, b[$, то и подавно

$$m(]a, b[\cap \complement B) > 0.$$

442. Может. П р и м е р. Построим для каждого натурального числа n нигде не плотное совершенное множество E_n на $[a, b]$ такое, что $mE_n = b - a - \frac{1}{n}$ (см. задачу 410), и положим $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Так как $E_n \subset E \subset [a, b]$, то $b - a - \frac{1}{n} = mE_n \leqslant mE \leqslant b - a$ для любого n и, следовательно, $mE = b - a$.

443. Да. Проведем соответствующее построение на отрезке $[0, 1]$.

Прежде всего построим на отрезке $[0, 1]$ нигде не плотное совершенное множество E_1 меры $\frac{1}{2}$. Далее, в каждый смежный интервал $]\alpha_{1i}, \beta_{1i}[$ множества E_1 впишем нигде не плотное совершенное множество E_{1i}, мера которого равна половине длины интервала $]\alpha_{1i}, \beta_{1i}[$. Тогда $m(\bigcup_1^{\infty} E_{1i}) = \frac{1}{2^2}$. Множество $E_2 = E_1 \cup (\bigcup_1^{\infty} E_{1i})$ совершенно и нигде не плотно (см. задачу 233). В каждый его смежный интервал $]\alpha_{2i}, \beta_{2i}[$ впишем нигде не плотное совершенное множество E_{2i}, мера которого равна половине длины интервала $]\alpha_{2i}, \beta_{2i}[$. Тогда $m(\bigcup_1^{\infty} E_{2i}) = \frac{1}{2^3}$, а множество $E_3 = E_2 \cup (\bigcup_1^{\infty} E_{2i})$ совершенно и нигде не плотно. Продолжая этот процесс неограниченно, мы получим счетную совокупность попарно не пересекающихся нигде не плотных совершенных множеств

$$E_1; E_{11}, \ldots, E_{1i}, \ldots; E_{21}, \ldots, E_{2i}, \ldots; \ldots$$
$$\ldots; E_{k1}, \ldots, E_{ki}, \ldots; \ldots$$

При этом

$$mE_1=\frac{1}{2},\ m(\bigcup_i E_{1i})=\frac{1}{2^2},\ \dots,\ m(\bigcup_i E_{ki})=\frac{1}{2^{k+1}},\ \dots,$$

и потому

$$m(E_1\cup(\bigcup_i E_{1i})\cup\ \dots\cup(\bigcup_i E_{ki})\cup\dots)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^{k+1}}+\dots=1.$$

Таким образом, счетная совокупность множеств E_1 и E_{ki} ($k=1,\ 2,\ \dots,\ i=1,2,\dots$) удовлетворяет всем условиям задачи.

444. Существует; в качестве такого множества можно взять $[0,1]\setminus E$, где E — объединение всех множеств, построенных при решении предыдущей задачи.

445. Так как $1-\varepsilon<mE_k\leqslant mE\leqslant 1$, а ε можно взять произвольно малым, то $mE=1$.

446. По свойству аддитивности меры имеем:

$$mE_1+mE_2=mE_1+m(E_2\setminus E_1)+m(E_1\cap E_2)=$$
$$=m(E_1\cup E_2)+m(E_1\cap E_2).$$

447. Для совокупности из двух измеримых множеств E_1 и E_2 это соотношение доказано в предыдущей задаче, причем в этом случае имеет место равенство. Для любой конечной совокупности множеств $\{E_i\}$ докажем неравенство по индукции. Пусть

$$\sum_{i=1}^{k}mE_i\leqslant m(\bigcup_{i=1}^{k}E_i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}m(E_i\cap E_j). \tag{1}$$

Тогда

$$\sum_{i=1}^{k+1}mE_i=\sum_{i=1}^{k}mE_i+mE_{k+1}\leqslant m(\bigcup_{i=1}^{k}E_i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}m(E_i\cap E_j)+mE_{k+1}=$$
$$=m(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i)+m((\bigcup_{i=1}^{k}E_i)\cap E_{k+1})+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}m(E_i\cap E_j)\leqslant$$
$$\leqslant m(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i)+\sum_{1\leqslant i\leqslant k}m(E_i\cap E_{k+1})+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k}m(E_i\cap E_j)=$$
$$=m(\bigcup_{i=1}^{k+1}E_i)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant k+1}m(E_i\cap E_j).$$

Для счетной совокупности множеств требуемое неравенство получается предельным переходом в неравенстве (1) при $k\to\infty$ (при этом надо использовать свойство 13 из введения к данной главе).

448. Так как $\bigcap_{i=1}^{n}A_i=\mathbf{C}(\bigcup_{i=1}^{n}\mathbf{C}A_i)$, то

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = 1 - m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{C}A_i\right). \qquad (1)$$

Но

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{C}A_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} m\mathrm{C}A_i = \sum_{i=1}^{n} (1 - mA_i) = n - \sum_{i=1}^{n} mA_i.$$

А так как по условию $\sum\limits_{i=1}^{n} mA_i > n - 1$, то $n - \sum\limits_{i=1}^{n} mA_i < 1$.

Следовательно,

$$m\left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{C}A_i\right) < 1. \qquad (2)$$

Сопоставляя (1) и (2), получим окончательно:

$$m\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) > 0.$$

449. Выберем сначала замкнутое множество $F_1 \subset E_1$ такое, что $mF_1 > mE_1 - \frac{\varepsilon}{2}$ (см. свойство 11 из введения к этой главе). Дальнейшее построение ведем по индукции. Пусть для всех $k < n$ построены замкнутые множества F_k такие, что $F_k \subset E_k$, $mF_k > mE_k - \frac{\varepsilon(2^k - 1)}{2^k}$ и $F_1 \supset F_2 \supset \ldots \supset F_{n-1}$. Выберем в качестве F_n замкнутое множество, удовлетворяющее условиям

$$F_n \subset E_n \cap F_{n-1} \text{ и } mF_n > m(E_n \cap F_{n-1}) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Так как $m(E_n \cap F_{n-1}) = mE_n + mF_{n-1} - m(E_n \cup F_{n-1})$ (см. задачу 446), то тогда

$$mF_n > mE_n + mF_{n-1} - m(E_n \cup F_{n-1}) - \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Учитывая теперь, что $E_n \cup F_{n-1} \subset E_{n-1}$ и потому $m(E_n \cup F_{n-1}) \leqslant mE_{n-1}$ и что, по индуктивному предположению, $mE_{n-1} < mF_{n-1} + \frac{\varepsilon(2^{n-1} - 1)}{2^{n-1}}$, получим окончательно:

$$mF_n > mE_n + mF_{n-1} - \left(mF_{n-1} + \frac{\varepsilon(2^{n-1} - 1)}{2^{n-1}}\right) - \frac{\varepsilon}{2^n} =$$

$$= mE_n - \varepsilon \cdot \frac{2^n - 1}{2^n}.$$

Итак, $F_n \subset E_n$, $mF_n > mE_n - \varepsilon \cdot \frac{2^n - 1}{2^n} > mE_n - \varepsilon$, $F_n \subset F_{n-1}$. Искомая последовательность замкнутых множеств построена.

450. Если $k = 0$, то $kE = \{0\}$, и утверждение задачи очевидно.

Пусть теперь $k \neq 0$. Докажем сначала, что для любого множества A на прямой имеет место:

$$\overline{m}(kA) = |k| \cdot \overline{m}A.$$

Действительно, любому покрытию множества A системой интервалов $\{I_\alpha\}$ отвечает покрытие множества kA системой интервалов $\{kI_\alpha\}$ и, обратно, любое покрытие множества kA имеет вид $\{kI_\alpha\}$, где $\{I_\alpha\}$ — некоторое покрытие множества A. Отсюда и из равенства $\mu(kI) = |k|\cdot\mu I$, справедливого для любого интервала I, получаем: $\overline{m}(kA) = \inf \sum\limits_\alpha \mu(kI_\alpha) = \inf \sum\limits_\alpha |k|\cdot\mu I_\alpha =$
$= |k|\cdot\inf \sum\limits_\alpha \mu I_\alpha = |k|\cdot\overline{m}A.$

Поэтому если E и kE оба измеримы, то

$$m(kE) = \overline{m}(kE) = |k|\cdot\overline{m}E = |k|\cdot mE.$$

Осталось доказать, что из измеримости E следует измеримость kE. Пусть A — произвольное множество на прямой. Так как E измеримо, то для множества $\frac{1}{k}A$ имеем:

$$\overline{m}\left(\frac{1}{k}A\right) = \overline{m}\left(\left(\frac{1}{k}A\right)\cap E\right) + \overline{m}\left(\left(\frac{1}{k}A\right)\cap \mathbf{C}E\right) =$$
$$= \overline{m}\left(\left(\frac{1}{k}A\right)\cap \frac{1}{k}(kE)\right) + \overline{m}\left(\left(\frac{1}{k}A\right)\cap \frac{1}{k}\mathbf{C}(kE)\right) =$$
$$= \overline{m}\left(\frac{1}{k}(A\cap kE)\right) + \overline{m}\left(\frac{1}{k}(A\cap \mathbf{C}(kE))\right) =$$
$$= \frac{1}{|k|}\cdot(\overline{m}(A\cap kE) + \overline{m}(A\cap\mathbf{C}(kE))),$$

откуда

$$|k|\cdot\overline{m}\left(\frac{1}{k}A\right) = \overline{m}(A\cap kE) + \overline{m}(A\cap\mathbf{C}(kE)).$$

А так как $|k|\cdot\overline{m}\left(\frac{1}{k}A\right) = \overline{m}\left(k\cdot\frac{1}{k}A\right) = \overline{m}A$, то

$$\overline{m}A = \overline{m}(A\cap kE) + \overline{m}(A\cap\mathbf{C}(kE)).$$

Но это и означает, в силу произвольности множества A, что kE измеримо.

451. Для каждого натурального числа n обозначим через F_n совершенное множество такое, что

$$F_n \subset E \cap \left(\left]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\right),$$
$$mF_n \geqslant \frac{1}{2}\, m\left(E\cap\left(\left]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\right)\right)$$

(если $m\left(E\cap\left(\left]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\right)\right) > 0$, то существование такого множества F_n следует из результата задачи 418; если же $m\left(E\cap\left(\left]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\right)\right) = 0$, то в качестве F_n можно взять пустое множество). Положим $Q = (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \cup \{0\}$. Ясно, что Q — совершенное множество. Кроме того, для любого $\delta > 0$ имеем:

$$Q \cap]-\delta, \delta[\supset Q \cap \left]-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right[= \left(\bigcup_{n=N}^{\infty} F_n\right) \cup \{0\},$$

где N — натуральное число, такое, что $\frac{1}{N} < \delta$. Поэтому

$$m(Q \cap]-\delta, \delta[) \geqslant m\,(\bigcup_{n=N}^{\infty} F_n) =$$

$$= \sum_{n=N}^{\infty} mF_n \geqslant \frac{1}{2} m\left(E \cap \left]-\frac{1}{N}, \frac{1}{N}\right[\right) > 0.$$

452. Все внутренние точки круга $x^2 + y^2 \leqslant 1$ являются точками плотности, а все точки его дополнения — точками разрежения. Плотность круга в точках границы $x^2 + y^2 = 1$ равна $\frac{1}{2}$.

454. В качестве такого множества можно взять круговой сектор с центром в точке M_0 и центральным углом $2\pi\alpha$.

455. Построим множество, имеющее в точке 0 плотность, равную α.

Для каждого натурального числа n рассмотрим объединение двух промежутков

$$I_n = \left]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[$$

и возьмем такое измеримое множество $A_n \subset I_n$, что $mA_n = \alpha \cdot mI_n$; например, можно взять $A_n = \left]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n} + \alpha\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1} + \alpha\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\right[$. Докажем, что множество $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ имеет в точке 0 плотность, равную α.

Рассмотрим произвольное положительное число $\delta < 1$; пусть n — такое натуральное число, что $\frac{1}{n+1} \leqslant \delta < \frac{1}{n}$.

Тогда $V\left(0, \frac{1}{n+1}\right) \subset V(0, \delta) \subset V\left(0, \frac{1}{n}\right)$, и потому

$$\frac{m(E \cap V(0, \delta))}{mV(0, \delta)} \leqslant \frac{m\left(E \cap V\left(0, \frac{1}{n}\right)\right)}{mV\left(0, \frac{1}{n+1}\right)} = \tag{1}$$

$$= \frac{\alpha \cdot mV\left(0, \frac{1}{n}\right)}{mV\left(0, \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\alpha \cdot \frac{2}{n}}{\frac{2}{n+1}} = \alpha\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leqslant \alpha(1 + 2\delta)$$

(последнее неравенство следует из того, что $\frac{1}{n} \leqslant \frac{2}{n+1} < 2\delta$). С другой стороны,

$$\frac{m(E \cap V(0, \delta))}{mV(0, \delta)} \geqslant \frac{m\left(E \cap V\left(0, \frac{1}{n+1}\right)\right)}{mV\left(0, \frac{1}{n}\right)} = \frac{\alpha \cdot mV\left(0, \frac{1}{n+1}\right)}{mV\left(0, \frac{1}{n}\right)} =$$
$$= \frac{\alpha \cdot \frac{2}{n+1}}{\frac{2}{n}} = \alpha\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \geqslant \alpha(1-\delta). \tag{2}$$

Из неравенств (1) и (2) получаем, что $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{m(E \cap V(0, \delta))}{mV(0, \delta)} = \alpha$.

Итак, множество E имеет в точке 0 плотность, равную α. Если же $x_0 \neq 0$, то в качестве искомого множества можно взять множество всех точек вида $x_0 + y$, где $y \in E$.

456. Для каждого натурального числа n положим

$$E_n = E \cap \left(\left]-\frac{1}{n}, -\frac{1}{n+1}\right] \cup \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right[\right)$$

и обозначим через F_n совершенное множество такое, что $F_n \subset E_n$ и $mF_n \geqslant \left(1 - \frac{1}{n}\right) mE_n$. Пусть $F = \left(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n\right) \cup \{0\}$. Очевидно, F — совершенное множество, содержащееся в E. Возьмем произвольное $\delta > 0$. Обозначая через N целую часть числа $\frac{1}{\delta}$, получим:

$$\frac{m(F \cap V(0, \delta))}{2\delta} \geqslant \frac{m\left(F \cap V\left(0, \frac{1}{N+1}\right)\right)}{\frac{2}{N}} =$$
$$= \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} mF_n\right) \cdot \frac{N}{2} \geqslant \left(\sum_{n=N+1}^{\infty} mE_n - \frac{1}{N} \sum_{n=N+1}^{\infty} mE_n\right) \cdot \frac{N}{2} =$$
$$= m\left(E \cap V\left(0, \frac{1}{N}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right) \cdot \frac{N}{2} =$$
$$= \frac{m\left(E \cap V\left(0, \frac{1}{N}\right)\right)}{\frac{2}{N}} \cdot \frac{N-1}{N}.$$

Предел последнего выражения при $\delta \to 0$ равен 1. Следовательно, $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{m(F \cap V(0, \delta))}{2\delta} = 1$, т. е. 0 является точкой плотности для F.

457. Представим E в виде объединения двух множеств: $E =$

$=(E \cap A) \cup (E \cap \complement A)$. Множество $E \cap A$ измеримо (как часть множества A меры нуль). Если бы было измеримо и множество $E \cap \complement A$, то было бы измеримо и их объединение E, что противоречит условию. Следовательно, $E \cap \complement A$ неизмеримо.

458. Если A и B — интервалы, то утверждение задачи очевидно. Если A и B — произвольные открытые множества, то $A \times B$ также открыто; при этом $A = \bigcup\limits_i A_i$, $B = \bigcup\limits_j B_j$, где A_i, равно как и B_j, — попарно не пересекающиеся интервалы. Тогда

$$A \times B = \bigcup_{i,\, j} (A_i \times B_j)$$

и

$$m_2 (A \times B) = \sum_{i,\, j} m_2 (A_i \times B_j) = \sum_{i,\, j} (m_1 A_i \cdot m_1 B_j) =$$
$$= \sum_i m_1 A_i \cdot \sum_j m_1 B_j = m_1 A \cdot m_1 B.$$

459. Пусть ε — произвольное положительное число и A_n ($n = 1, 2, \ldots$) — открытые множества на прямой, содержащие A и такие, что $m_1 A_n < \frac{\varepsilon}{n \cdot 2^{n+1}}$. Так как $A \times B \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (A_n \times]-n, n[)$, то

$$\overline{m}_2 (A \times B) \leqslant m_2 \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \times]-n, n[)\Big) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m_2 (A_n \times]-n, n[) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{n \cdot 2^{n+1}} \cdot 2n = \varepsilon$$

(см. предыдущую задачу).

Следовательно, $m_2 (A \times B) = 0$.

460. Если A и B — множества типа G_δ, то

$$A = \bigcap_i A_i, \quad B = \bigcap_j B_j, \quad \text{где } A_1 \supset A_2 \supset \ldots,\ B_1 \supset B_2 \supset \ldots \text{ —}$$

открытые множества на прямой. Тогда $A \times B = \bigcap\limits_i (A_i \times B_i)$, где $\{A_i \times B_i\}$ — убывающая последовательность открытых множеств на плоскости. Следовательно, $A \times B$ измеримо и $m_2 (A \times B) =$

$$= \lim_{i \to \infty} m_2 (A_i \times B_i) = \lim_{i \to \infty} m_1 A_i \cdot m_1 B_i = m_1 A \cdot m_1 B.$$

Если A и B — произвольные измеримые множества конечной меры, то существуют множества $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$ типа G_δ такие, что $\widetilde{A} \supset A$, $\widetilde{B} \supset B$ и $m_1 (\widetilde{A} \setminus A) = m_1 (\widetilde{B} \setminus B) = 0$ (см. ниже, задачу 465). Так как

$$\widetilde{A} \times \widetilde{B} = (A \times B) \cup ((\widetilde{A} \setminus A) \times B) \cup (A \times (\widetilde{B} \setminus B)) \cup$$
$$\cup ((\widetilde{A} \setminus A) \times (\widetilde{B} \setminus B)),$$

то, согласно результату предыдущей задачи, $A \times B$ отличается от измеримого множества $\widetilde{A} \times \widetilde{B}$ лишь на множество меры нуль. Следовательно, $A \times B$ измеримо и

$$m_2(A \times B) = m_2(\widetilde{A} \times \widetilde{B}) = m_1\widetilde{A} \cdot m_1\widetilde{B} = \\ = m_1A \cdot m_1B.$$

461. Положим $A_n = A \cap [-n, n]$, $B_n = B \cap [-n, n]$. Тогда $\{A_n \times B_n\}$ — возрастающая последовательность измеримых множеств. Применяя результат предыдущей задачи, будем иметь:

$$m_2(A \times B) = m_2(\bigcup_n (A_n \times B_n)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} m_2(A_n \times B_n) = \lim_{n\to\infty} (m_1A_n \cdot m_1B_n) = +\infty.$$

462. В качестве такого множества M можно взять множество $A \times A$, построенное в решении задачи 242, если выбирать ε_k удовлетворяющими дополнительному условию

$$\varepsilon_k < \frac{1}{2^{k+2}}. \text{ Тогда } m_1([0,\ 1] \setminus A) \leqslant 2\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k < \frac{1}{2},$$

и, значит, $m_1A > \frac{1}{2}$. Следовательно, $m_2(A \times A) = (m_1A)^2 > \frac{1}{4} > 0$.

463. Используя свойства внешней меры, получаем:

$$\overline{m}E \leqslant \overline{m}(E \cup H) \leqslant \overline{m}E + \overline{m}H = \overline{m}E$$

и

$$\overline{m}E \leqslant \overline{m}((E \setminus H) \cup H) \leqslant \overline{m}(E \setminus H) \leqslant \overline{m}E.$$

Отсюда $\overline{m}E = \overline{m}(E \cup H) = \overline{m}(E \setminus H)$.

464. По определению внешней меры, существует покрытие $\{D_n\}$множества E открытыми параллелепипедами такое, что $\sum\limits_n mD_n < \overline{m}E + \varepsilon$. Положив $A = \bigcup\limits_n D_n$, получим: A открыто, $A \supset E$, $\overline{m}E \leqslant \overline{m}A$, $mA \leqslant \sum\limits_n mD_n < \overline{m}E + \varepsilon$; т. е.

$$mA - \varepsilon < \overline{m}E \leqslant mA.$$

465. Если $\overline{m}E = +\infty$, то полагаем $B = X$. Если же $\overline{m}E < +\infty$, то, в силу результата задачи 464, для каждого n существует открытое множество A_n такое, что $A_n \supset E$ и $mA_n - \frac{1}{n} < \overline{m}E \leqslant$ $\leqslant mA_n$. Положим $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Тогда $B \supset E$, B — множество типа G_δ и $\overline{m}E \leqslant mB \leqslant mA_n < \overline{m}E + \frac{1}{n}$ для каждого n, откуда $mB =$ $= \overline{m}E$.

466. Согласно результату предыдущей задачи, существуют множества B и C типа G_δ такие, что

$$B \supset E,\ C \supset I \setminus E,\ mB = \overline{m}E,\ mC = \overline{m}(I \setminus E). \qquad (1)$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $B \subset I$, $C \subset I$ (если это не так, возьмем вместо B и C их пересечения с I; это будут тоже множества типа G_δ, включающие соответственно E и $I \setminus E$, и для них также выполняются равенства (1)). Так как $I = B \cup C$, то, в силу результата задачи 446 и равенств (1),

$$m(B \cap C) = mB + mC - m(B \cup C) = \overline{m}E + \overline{m}(I \setminus E) - \\ -mI = 0$$

(мы воспользовались равенством $mI = \overline{m}E + \overline{m}(I \setminus E)$, данным по условию). Отсюда следует, что множество $B \setminus E$ измеримо (как подмножество множества $B \cap C$, имеющего нулевую меру). Но тогда и E измеримо, как разность измеримых множеств B и $B \setminus E$.

467. а) Покажем сначала, что из условия (1) следует условие (2): (1) $\Rightarrow$ (2). Положим $E_n = E \cap \overline{D}((-n, \ldots, -n),\ (n, \ldots, n))$; тогда $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$. Если E измеримо, то все E_n измеримы. В силу результата задачи 464, при заданном $\varepsilon > 0$ для каждого n существует открытое множество $G_n \supset E_n$ такое, что $mG_n < mE_n + \frac{\varepsilon}{2^n}$, откуда $m(G_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^n}$. Тогда $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} G$ — открытое множество, содержащее E. Так как $G \setminus E \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(G_n \setminus E_n)$, то,

$$m(G \setminus E) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} m(G_n \setminus E_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon.$$

б) (2) $\Rightarrow$ (4). Пусть выполнено условие (2). Для каждого n существует открытое множество $G_n \supset E$ такое, что $\overline{m}(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$. Тогда для множества $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ типа G_δ будем иметь: $A \supset E$, $\overline{m}(A \setminus E) \leqslant \overline{m}(G_n \setminus E) < \frac{1}{n}$ при любом n, и, значит, $\overline{m}(A \setminus E) = 0$.

в) (4) $\Rightarrow$ (1). Если существует множество A типа G_δ такое, что $A \supset E$ и $\overline{m}(A \setminus E) = 0$, то E измеримо, как разность измеримых множеств — множества A типа G_δ и множества $A \setminus E$ меры нуль.

г) (1) $\Rightarrow$ (3). Пусть E измеримо. Тогда измеримо и $\complement E$. Следовательно (в силу пункта а)), для каждого $\varepsilon > 0$ существует открытое множество $G \supset \complement E$ такое, что $m(G \setminus \complement E) < \varepsilon$. Положив

$F = \mathbf{C}G$ (F — замкнуто), получим: $F \subset E$, $E \setminus F = \mathbf{C}F \setminus \mathbf{C}E = G \setminus \mathbf{C}E$; следовательно,

$$m(E \setminus F) = m(G \setminus \mathbf{C}E) < \varepsilon.$$

д) (3) $\Rightarrow$ (1). Пусть для каждого $\varepsilon > 0$ существует замкнутое множество $F \subset E$ такое, что $\overline{m}(E \setminus F) < \varepsilon$. Тогда и $\overline{m}(\mathbf{C}F \setminus \mathbf{C}E) < \varepsilon$, где $\mathbf{C}F \supset \mathbf{C}E$ и $\mathbf{C}F$ открыто.

Следовательно (в силу пунктов б) и в)), множество $\mathbf{C}E$ измеримо; но тогда измеримо и E.

е) Эквивалентность условий (1) и (5) доказывается аналогично.

468. Эквивалентность измеримости множества E выполнению любого из условий а) и б) непосредственно следует из результатов предыдущей задачи.

469. Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть E измеримо, $mE < +\infty$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества E счетным семейством $\{D_i\}$ открытых параллелепипедов такое, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} mD_i < mE + \frac{\varepsilon}{2}$. Так как ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} mD_i$ сходится, то найдется номер N такой, что $\sum\limits_{i=N+1}^{\infty} mD_i < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда $H = D_1 \cup \ldots \cup D_N$ будет искомым множеством: оно состоит из конечного числа параллелепипедов и $m(E \,\Delta\, H) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Для произвольного $\varepsilon > 0$ построим множество H, составленное из конечного числа открытых параллелепипедов и такое, что $\overline{m}(E \,\Delta\, H) < \frac{\varepsilon}{3}$, тогда подавно $\overline{m}(E \setminus H) < \frac{\varepsilon}{3}$. Покроем множество $E \setminus H$ семейством открытых параллелепипедов $\{D_n\}$ так, чтобы $\sum\limits_n mD_n < \overline{m}(E \setminus H) + \frac{\varepsilon}{3} < \frac{2\varepsilon}{3}$. Множество $G = H \cup (\bigcup\limits_n D_n)$ открыто, $G \supset E$ (так как

$$E \subset H \cup (E \setminus H) \subset H \cup (\bigcup_n D_n) = G),$$

и

$$\overline{m}(G \setminus E) = \overline{m}((H \cup (\bigcup_n D_n)) \setminus E) \leqslant$$

$$\leqslant \overline{m}((H \setminus E) \cup (\bigcup_n D_n)) \leqslant \overline{m}(H \setminus E) + \overline{m}(\bigcup_n D_n) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Но тогда, в силу результата задачи 467, множество E измеримо.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

Глава VIII.

ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ

470. Неверно. Прообраз множества $f(A)$ может включать точки, лежащие за пределами множества A; например, если $f(x) = x^2$, $A = [0, 2] \subset \boldsymbol{R}^1$, то $f(A) = [0, 4]$, а $f^{-1}(f(A)) = [-2, 2]$. Здесь $f^{-1}(f(A)) \neq A$. Однако включение $f^{-1}(f(A)) \supset A$ верно всегда.

471. Равенство $f(f^{-1}(B)) = B$ справедливо для любого B из множества значений функции f.

472. Равенство $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ справедливо для любых множеств A и B из области определения функции f.

Равенство $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ справедливо не всегда. Так, например, если $A = \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$, $B = \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $f(x) = \sin x$, то

$$f(A) = [0, 1],\ f(B) = [-1, 1],$$

$$f(A \cap B) = f\left(\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right] \neq f(A) \cap f(B) = [0, 1].$$

Однако всегда верно включение $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

473. Первое справедливо для любого, а не только взаимно однозначного отображения f.

Докажем второе.

а) Пусть $y_0 \in f(\bigcap\limits_k A_k)$; тогда в множестве $\bigcap\limits_k A_k$ найдется точка x_0 такая, что $y_0 = f(x_0)$; значит, $x_0 \in A_k$ для всех k, откуда $y_0 = f(x_0) \in f(A_k)$ для всех k, т. е. $y_0 \in \bigcap\limits_k f(A_k)$. Итак, $f(\bigcap\limits_k A_k) \subset \bigcap\limits_k f(A_k)$. При доказательстве этого включения мы не пользовались тем, что отображение f взаимно однозначно; следовательно, это включение справедливо для любого отображения f.

б) Пусть $y_0 \in \bigcap\limits_k f(A_k)$. Тогда $y_0 \in f(A_k)$ для любого k. Так как отображение f является взаимно однозначным отображением R на $f(R)$, то существует, и притом только одна, точка $x_0 \in R$ такая, что $f(x_0) = y_0$. Значит, эта точка x_0 принадлежит всем A_k, т. е. $x_0 \in \bigcap\limits_k A_k$. Поэтому $y_0 = f(x_0) \in f(\bigcap\limits_k A_k)$. Итак,

$$\bigcap_k f(A_k) \subset f(\bigcap_k A_k).$$

Объединяя результаты, полученные в а) и б), получим нужное равенство.

474. Равенство (1) справедливо для любого отображения f. Равенство (2) перестает быть верным, если отображение f не является взаимно однозначным.

475. Равенство $f(R \setminus A) = f(R) \setminus f(A)$ справедливо для взаимно однозначного отображения f. Для произвольных отображений f справедливо лишь включение $f(R \setminus A) \supset f(R) \setminus f(A)$. Так, например, если $f(x) = x^2$, $R =]-\infty, +\infty[$, $A = [0, +\infty[$, то $f(R \setminus A) = f(]-\infty, 0[) =]0, +\infty[$, а $f(R) \setminus f(A) = \varnothing$.

476. Верны.

477. Справедливо.

478. Верны.

Глава IX.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

479. Обозначим через A_n множество всех тех точек x пространства X, в которых $\omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n}$. Покажем, что A_n замкнуто. Пусть a — точка прикосновения множества A_n. Во всякой окрестности $V(a, \varepsilon)$ найдется точка $x \in A_n$; при этом некоторая окрестность $V(x, \delta)$ точки x включается в $V(a, \varepsilon)$. Колебание функции f в $V(x, \delta)$, а значит, и в $V(a, \varepsilon)$ больше или равно $\omega(f, x) \geqslant \frac{1}{n}$. Устремляя ε к нулю, найдем, что колебание в точке a также не меньше $\frac{1}{n}$, т. е. $a \in A_n$. Итак, A_n замкнуто.

Далее, $E = A_1 \cup A_2 \cup \ldots$; следовательно, E является множеством типа F_σ в X.

480. Это следует из предыдущей задачи и из того, что дополнение к множеству типа F_σ есть множество типа G_δ (задача 204).

481. Пусть $E = \{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$. Построим следующую функцию:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \text{ при } x = r_k, \text{ где } k = 1, 2, 3, \ldots, \\ 0 \text{ при } x \overline{\in} E. \end{cases}$$

Эта функция разрывна в каждой точке r_k; действительно, в любой окрестности $V(r_k)$ найдутся точки, не принадлежащие заданному счетному множеству E; в этих точках функция равна нулю; поэтому $\omega f \geqslant \frac{1}{k}$ для любой окрестности $V(r_k)$ точки r_k; следовательно, колебание функции в точке r_k также $\geqslant \frac{1}{k}$; значит, функция разрывна в точке r_k.

Пусть теперь $x_0 \overline{\in} E$. Для каждого $\varepsilon > 0$ найдется окрестность точки x_0, не содержащая ни одной точки r_k с номерами $k < \frac{1}{\varepsilon}$ (таких точек r_k лишь конечное число). Для всех точек x, попавших в эту окрестность, имеет место неравенство $|f(x)| < \varepsilon$, т. е. $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следовательно, функция f непрерывна в точке x_0.

482. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(x - x_k)$ равномерно сходится на всей числовой прямой, то его сумма непрерывна в тех точках, в которых все функции $a_k = \varphi(x - x_k)$ непрерывны; следовательно, сумма ряда непрерывна во всех точках x, отличных от $x_1, x_2, x_3, \ldots$ В каждой же из точек x_1, x_2, x_3 сумма ряда терпит разрыв.

483. Это следует из того, что множество всех точек разрыва любой функции, определенной на всей прямой, является множеством типа F_σ (задача 479). Множество же CE, дополнительное к счетному всюду плотному множеству E, не может быть множеством типа F_σ (см. задачу 260).

484. Пример. $f(x) = (x^2 - 1)\chi(x)$, где $\chi(x)$ — функция Дирихле, т. е.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & \text{если } x \text{ рационально}, \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

485. Пример. $f(x) = \chi(x) \cdot \sin \pi x$, где $\chi(x)$ — функция Дирихле.

486. Все точки, принадлежащие смежным интервалам канторова множества, являются точками непрерывности этой функции. Все точки канторова множества — ее точки разрыва (так как в любой окрестности каждой точки канторова множества имеются точки из смежных интервалов). Все эти точки являются точками разрыва второго рода.

487. Пример.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10^k} & \text{для точек } x = \frac{p}{10^k}, \text{ где } \frac{p}{10^k} \neq 0 \text{—несократимая дробь}, \\ 0 & \text{для точек } x, \text{ не представимых в виде } \frac{p}{10^k}, \\ 1 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Исследование этой функции проводится так же, как в задаче 481.

488. Заданная функция непрерывна во всех точках смежных интервалов и разрывна во всех точках канторова множества.

489. Если $\lim c_n = 0$, то эта функция непрерывна во всех точках отрезка $[0, 1]$. Если $\lim c_n$ существует и отличен от нуля, то эта функция разрывна во всех точках канторова множества и непрерывна во всех точках смежных интервалов.

490. В случае 1) функция $f(x)$ разрывна в концах смежных интервалов канторова множества и непрерывна в остальных точках отрезка $[\theta, 1]$.

В случаях 2) и 3) функция $f(x)$ разрывна во всех точках канторова множества D и непрерывна на $[0, 1] \setminus D$.

491. Пример.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} \text{ при } x = \frac{p}{q}, \text{ где } \frac{p}{q} \neq 0 \text{—несократимая дробь}, \\ 0 \text{ при } x \text{ иррациональном}, \\ 1 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Исследование этой функции проводится так же, как в задаче 481.

492. Не существует (см. задачу 483).

493. Такой будет, например, функция $F(x)$, равная произведению функции $f(x)$, построенной в задаче 489 (при $c_n \to 0$), на функцию Дирихле:

$$F(x) = f(x) \cdot \chi(x).$$

494. Такой будет, например, функция, имеющая значение 1 в точках канторова множества, и 0 вне его.

Другим примером может служить функция, построенная в задаче 488.

495. Данная функция разрывна во всех точках числовой прямой, кроме точки $x = 0$; в этой точке функция непрерывна.

496. Данная функция непрерывна во всех точках отрезка $[0, 1]$.

497. Если функция $f(x)$ не ограничена на A, то равенство очевидно: обе его части равны $+\infty$. Пусть теперь $f(x)$ ограничена на A и $\sup\limits_{x \in A} f(x) = M$, $\inf\limits_{x \in A} f(x) = m$. Так как для любых $\xi \in A$ и $\eta \in A$ имеем: $m \leqslant f(\xi) \leqslant M$, $M \geqslant f(\eta) \geqslant m$, то

$$m - M \leqslant f(\xi) - f(\eta) \leqslant M - m,$$

т. е.

$$|f(\xi) - f(\eta)| \leqslant M - m = \underset{A}{\omega} f,$$

откуда

$$\sup_{\xi,\, \eta \in A} |f(\xi) - f(\eta)| \leqslant \underset{A}{\omega} f. \tag{1}$$

Для доказательства обратного неравенства возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем в множестве A такие две точки x_1 и x_2, что

$$f(x_1) < m + \varepsilon, \; f(x_2) > M - \varepsilon.$$

Тогда

$$|f(x_2) - f(x_1)| \geqslant f(x_2) - f(x_1) > M - m - 2\varepsilon,$$

и, следовательно $\sup\limits_{\xi,\, \eta \in A} |f(\xi) - f(\eta)| \geqslant M - m - 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, вытекает, что

$$\sup_{\xi,\, \eta \in A} |f(\xi) - f(\eta)| \geqslant M - m, \text{ т. е.}$$

$$\sup_{\xi,\, \eta \in A} |f(\xi) - f(\eta)| \geqslant \underset{A}{\omega} f. \tag{2}$$

Сравнивая неравенства (1) и (2), получаем требуемое равенство.

498. В силу результата предыдущей задачи, для любых двух точек $\xi, \eta \in A$ имеем:

$$|(f(\xi)+g(\xi))-(f(\eta)+g(\eta))| \leqslant |f(\xi)-f(\eta)| + |g(\xi)-g(\eta)| \leqslant \underset{A}{\omega} f + \underset{A}{\omega} g.$$

Беря в левой части верхнюю грань по всем $\xi, \eta \in A$, получим:

$$\underset{A}{\omega}(f+g) \leqslant \underset{A}{\omega} f + \underset{A}{\omega} g. \tag{1}$$

Пусть теперь хотя бы одно из чисел $\underset{A}{\omega} f$, $\underset{A}{\omega} g$ конечно; предположим, что $\underset{A}{\omega} g \leqslant \underset{A}{\omega} f$ (и, значит, $\underset{A}{\omega} g < +\infty$). Так как $f = (f+g) + (-g)$, то из неравенства (1), примененного к функциям $f+g$ и $-g$, следует:

$$\underset{A}{\omega} f \leqslant \underset{A}{\omega}(f+g) + \underset{A}{\omega}(-g) = \underset{A}{\omega}(f+g) + \underset{A}{\omega} g.$$

Поскольку $\underset{A}{\omega} g$ конечно, получаем:

$$\underset{A}{\omega}(f+g) \geqslant \underset{A}{\omega} f - \underset{A}{\omega} g = |\underset{A}{\omega} f - \underset{A}{\omega} g|.$$

499. Так как ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ равномерно сходится, то для любого $\varepsilon > 0$ существует такой номер N, что $\left|\sum_{N+1}^{+\infty} f_k(x)\right| < \frac{\varepsilon}{4}$ для всех $x \in X$.

Выберем такую окрестность $V(x_0)$ точки x_0, что

$$\underset{E\cap V(x_0)}{\omega} f_k < \omega[f_k, x_0, E] + \frac{\varepsilon}{2N}$$

для $k = 1, 2, \ldots, N$. Тогда

$$\omega\left[\sum_{k=1}^{+\infty} f_k, x_0, E\right] \leqslant \underset{E\cap V(x_0)}{\omega}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} f_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \underset{E\cap V(x_0)}{\omega} f_k + \underset{E\cap V(x_0)}{\omega}\left(\sum_{k=N+1}^{+\infty} f_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{N} \omega[f_k, x_0, E] + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \omega[f_k, x_0, E] + \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то

$$\omega\left[\sum_{k=1}^{+\infty} f_k, x_0, E\right] \leqslant \sum_{k=1}^{+\infty} \omega[f_k, x_0, E].$$

500. Так как для любых $\xi \in E$ и $\eta \in E$ имеет место неравенство

$$||f(\xi)| - |f(\eta)|| \leqslant |f(\xi) - f(\eta)|,$$

то, в силу результата задачи 497, $\underset{A}{\omega}|f| \leqslant \underset{A}{\omega} f$ для любого множества $A \subset E$. Отсюда вытекает, что $\omega[|f|, x_0] \leqslant \omega[f, x_0]$. А так как функция f непрерывна в точке x_0, то $\omega[f, x_0] = 0$, и, значит, $\omega[|f|, x_0] = 0$; но это означает, что функция $|f|$ также непрерывна в точке x_0.

501. Пример.

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ для рациональных } x \in [0, 1], \\ -1 \text{ для иррациональных } x \in [0, 1]. \end{cases}$$

502. Эта функция непрерывна во всех иррациональных точках и разрывна во всех рациональных точках; ее исследование проводится примерно так же, как исследование функции в задаче 481.

503. Пример. $f(x, y) = 0$ в тех точках (x, y), где y иррационально (при любом x), $f(x, y) = 1$ в тех точках (x, y), где y рационально (при любом x).

504. Функция $f(x, y)$ непрерывна во всех тех точках квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$, где обе координаты иррациональны; она непрерывна также в точках, где одна из координат иррациональна, а другая равна 0; кроме того, она непрерывна в точке $(0, 0)$. Во всех остальных точках квадрата функция разрывна.

Докажем, например, разрывность функции $f(x, y)$ в точке $\left(\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}\right)$, где $\frac{p}{q} > 0$, $\frac{p_1}{q_1} > 0$ — рациональные числа, записанные в виде несократимых дробей с положительными знаменателями. В этой точке значение функции равно нулю. В любой окрестности этой точки найдутся точки с иррациональной абсциссой и с ординатой $\frac{p_1}{q_1}$; значение функции в таких точках равно $\frac{1}{q_1}$, а потому колебание функции в любой окрестности точки $\left(\frac{p}{q}, \frac{p_1}{q_1}\right)$ больше или равно $\frac{1}{q_1}$. Значит, эта точка является точкой разрыва.

Исследование функции в остальных точках проводится аналогично.

505. Пусть f — функция, определенная и непрерывная на компактном множестве E. Рассмотрим произвольную последовательность $\{y_n\}$ точек из $f(E)$. Для каждого n существует точка $x_n \in E$ такая, что $f(x_n) = y_n$. В силу компактности E, последовательность $\{x_n\}$ обладает подпоследовательностью $\{x_{n_k}\}$, сходящейся к некоторой точке $a \in E$. Так как функция f непрерывна в точке a и $\lim\limits_{k\to+\infty} x_{n_k} = a$, то $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) = f(a)$, т. е.

$$\lim_{k\to+\infty} y_{n_k} = f(a) \in f(E).$$

Итак, всякая последовательность $\{y_n\}$ точек из $f(E)$ обладает подпоследовательностью, сходящейся к точке из $f(E)$. Значит, $f(E)$ — компакт.

506. Примеры. а) Пусть $f(x) = e^x$; эта функция непрерывна на замкнутом множестве $]-\infty, 0]$ числовой прямой. Однако образом этого множества является незамкнутое множество $]0, 1]$.

б) Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $E =]-\infty, +\infty[$, $f(E) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Множество E замкнуто, тогда как $f(E)$ незамкнуто.

507. Пусть $f(x) = \sin x$, $E =]0, 2\pi[$. Тогда $f(E) = [-1, 1]$, а это множество не является открытым на числовой прямой.

508. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность точек из $f^{-1}(F)$, сходящаяся к точке $\xi \in X$. Функция $f(x)$ непрерывна всюду на X, и в частности в точке ξ; поэтому

$$f(\xi) = \lim_{n \to \infty} f(x_n).$$

Так как $f(x_n) \in F$, а множество F замкнуто, то и $f(\xi) \in F$, т. е. $\xi \in f^{-1}(F)$. Итак, каждая сходящаяся последовательность точек из $f^{-1}(F)$ сходится к точке из $f^{-1}(F)$; следовательно, множество $f^{-1}(F)$ замкнуто.

509. Пусть $x_0 \in f^{-1}(G)$; тогда $y_0 = f(x_0) \in G$. Пусть $V(y_0) =]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ — окрестность точки y_0, включающаяся в G. В силу непрерывности функции в точке x_0, существует окрестность $V(x_0, \delta)$ такая, что для всех $x \in V(x_0, \delta)$ имеем: $|f(x) - y_0| < \varepsilon$, т. е. $f(x) \in V(y_0) \subset G$. Следовательно, $V(x_0, \delta) \subset f^{-1}(G)$, т. е. вместе с точкой $x_0 \in f^{-1}(G)$ в это множество входит и некоторая окрестность точки x_0. Значит, $f^{-1}(G)$ — открытое множество.

Заметим, что этот результат можно получить также из результата предыдущей задачи переходом к дополнениям.

510. Может. П р и м е р ы: а) $f(x) = c$; здесь прообразом компактного одноточечного множества $\{c\}$ является вся числовая прямая; б) $f(x) = \sin x$; здесь прообразом отрезка $[-1,1]$ является вся ось Ox.

511. Н е о б х о д и м о с т ь условия доказана в задаче 509. Докажем его д о с т а т о ч н о с т ь. Возьмем произвольную точку x_0 числовой прямой и рассмотрим произвольную окрестность $]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ точки $y_0 = f(x_0)$; прообразом этой окрестности является по условию некоторое открытое множество G, причем $x_0 \in G$. Пусть $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ — окрестность точки x_0, входящая в G. Тогда $f(x) \in]y_0 - \varepsilon, y_0 + \varepsilon[$ для всех $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$; но это и означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Так как x_0 — произвольная точка числовой прямой, то функция $f(x)$ непрерывна на всей числовой прямой.

512. Пусть $]a, b[$ — произвольный интервал на числовой прямой. Он является дополнением к множеству $]-\infty, a] \cup [b, +\infty[$, а прообраз этого множества замкнут, как объединение двух замкнутых множеств (см. задачу 476). Поэтому прообраз интервала $]a, b[$ открыт (см. задачу 477).

Итак, прообразы всех интервалов открыты; но тогда, на основании результата предыдущей задачи, функция $f(x)$ непрерывна.

513. Пусть x_0 — точка непрерывности функции $f(x)$, причем $f(x_0) = n_0$; докажем, что существует окрестность этой точки, все точки которой являются точками непрерывности функции $f(x)$. Пусть $V(x_0)$ — такая окрестность точки x_0, что для всех $x \in V(x_0)$ выполняются неравенства $f(x_0) - \frac{1}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{1}{2}$, т. е.

$$n_0 - \frac{1}{2} < f(x) < n_0 + \frac{1}{2}.$$

Так как функция, по условию, принимает только целые значения, то это означает, что $f(x) = n_0$ для всех $x \in V(x_0)$. Таким образом, функция постоянна на $V(x_0)$, а значит, непрерывна во всех точках этой окрестности.

Итак, если $x_0 \in E$, где E — множество точек непрерывности функции $f(x)$, то некоторая окрестность $V(x_0)$ этой точки также входит в E; а это означает, что E — открытое множество.

Множество точек разрыва функции $f(x)$ замкнуто, как дополнение к открытому множеству.

514. Множество $f(E)$ компактно (см. задачу 505), а всякое компактное множество ограничено (см. задачу 303).

515. Непустое множество $f(E)$ компактно и, следовательно, замкнуто (см. задачу 303). Но тогда оно содержит все свои точки прикосновения, и в частности точку $A = \inf\limits_{x \in E} f(x)$ и точку $B = \sup\limits_{x \in E} f(x)$ (то, что, например, A есть точка прикосновения для $f(E)$, следует из того, что в любом интервале $]A - \varepsilon, A + \varepsilon[$ найдется хотя бы одна точка из $f(E)$; в противном случае число $A + \varepsilon$ было бы одной из нижних границ функции $f(x)$ на E, а это противоречит тому, что A есть наибольшая из нижних границ).

516. Пусть E — множество всех непрерывных функций $x(t)$ на $[0, 1]$ таких, что $x(0) = 1$, $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$ при $t \in [0,1]$. Множество E ограничено и замкнуто в $C[0, 1]$, которое является полным пространством (см. задачу 130). Поставим в соответствие каждому элементу $x \in E$ число $f(x) = \frac{1}{\int\limits_0^1 x(t)\,dt}$. Функция $f(x)$ непрерывна на E, но не ограничена на нем (непрерывность следует из того, что $\int\limits_0^1 x(t)dt$ непрерывно зависит от x в $C[0, 1]$ и не обращается в нуль на E; неограниченность следует из того, что $\int\limits_0^1 x(t)dt$ может быть сделан сколь угодно малым для надлежащим образом подобранных $x(t)$ из E.

517. В качестве E можно взять то множество в $C[0, 1]$, которое было построено в предыдущей задаче, а в качестве $f(x)$ — функцию $f(x) = \int\limits_0^1 x(t)\,dt$. Непрерывность и ограниченность $f(x)$ на E очевидны. Однако нет такой непрерывной функции $a(t)$, принадлежащей E, для которой $f(a) = \inf\limits_{x \in E} f(x)$, так как $\inf\limits_{x \in E} f(x) = 0$, а для любой функции $x(t)$ из E имеет место $f(x) = \int_0^1 x(t)\,dt > 0$.

518. Для любых $x' \in X$, $x'' \in X$ имеют место неравенства: $\rho(x', y_0) - \rho(x'', y_0) \leqslant \rho(x', x'')$, $\rho(x'', y_0) - \rho(x', y_0) \leqslant \rho(x', x'')$, откуда $|\rho(x', y_0) - \rho(x'', y_0)| \leqslant \rho(x', x'')$, а это означает, что функция $\rho(x, y_0)$ равномерно непрерывна в X (и, следовательно, непрерывна в X).

519. Пусть $y \in E$. Тогда для любых $x' \in X$ и $x'' \in X$ имеем:

$$d(x', E) \leqslant \rho(x', y) \leqslant \rho(x', x'') + \rho(x'', y),$$

т. е.

$$\rho(x'', y) \geqslant d(x', E) - \rho(x', x'').$$

Переходя в этом неравенстве к нижней грани по всем $y \in E$, получим:

$$d(x'', E) = \inf_{y \in E} \rho(x'', y) \geqslant d(x', E) - \rho(x', x''),$$

или

$$d(x', E) - d(x'', E) \leqslant \rho(x', x'').$$

Меняя ролями x' и x'', получим: $d(x'', E) - d(x', E) \leqslant \rho(x', x'')$, откуда $|d(x', E) - d(x'', E)| \leqslant \rho(x', x'')$. Следовательно, функция $d(x, E)$ равномерно непрерывна и, значит, непрерывна в X.

520. Рассмотрим $\rho(x_0, y)$ как функцию от y на компакте E. В силу ее непрерывности (см. задачу 518), существует точка $y_0 \in E$ такая, что $\rho(x_0, y_0) = \inf\limits_{y \in E} \rho(x_0, y)$ (см. задачу 515), т. е. $\rho(x_0, y_0) = d(x_0, E)$.

521. Построим в пространстве X замкнутый шар $B = B(x_0, r)$ такой, что множество $E \cap B$ непусто. В силу компактности этого множества, в нем найдется точка y_0 такая, что $\rho(x_0, y_0) = d(x_0, E \cap B)$ (см. предыдущую задачу). Тогда $\rho(x_0, y_0) = d(x_0, E)$, так как для любого $y \in E$ выполняется неравенство $\rho(x_0, y) \geqslant \rho(x_0, y_0)$: для $y \in E \cap B$ это следует из выбора точки y_0, а для $y \in E \setminus (E \cap B)$ — из того, что $\rho(x_0, y) > r \geqslant \rho(x_0, y_0)$.

522. Для любых $x \in E$, $y \in F$ имеем: $\rho(x, y) \geqslant d(y, E) \geqslant \inf\limits_{y \in F} d(y, E)$, т. е.

$$\rho(x, y) \geqslant \inf_{y \in F} d(y, E);$$

переходя в этом неравенстве к нижней грани по всем $x \in E$, $y \in F$, получим: $\inf\limits_{x \in E, y \in F} \rho(x, y) \geqslant \inf\limits_{y \in F} d(y, E)$, или

$$d(E, F) \geqslant \inf_{y \in F} d(y, E). \qquad (1)$$

С другой стороны, при фиксированном $y \in F$ имеем:

$$\inf_{x \in E,\, z \in F} \rho(x, z) \leqslant \inf_{x \in E} \rho(x, y), \text{ т. е. } d(E, F) \leqslant d(y, E).$$

Так как это неравенство справедливо при любом $y \in F$, то оно сохранится и для нижней грани (по всем $y \in F$), т. е.

$$d(E, F) \leqslant \inf_{y \in F} d(y, E). \qquad (2)$$

Сравнивая неравенства (1) и (2), получаем искомое равенство.

523. Согласно задаче 519, $d(y, E)$ есть непрерывная функция от y. Поэтому в компакте F найдется точка y_0 такая, что $d(y_0, E) = \inf_{y \in F} d(y, E)$, т. е. $d(y_0, E) = d(E, F)$ (см. задачи 515 и 522). Так как E обладает свойством H, то, в силу результата задачи 521, существует точка $x_0 \in E$ такая, что $\rho(x_0, y_0) = d(E, y_0)$. Следовательно, $\rho(x_0, y_0) = d(E, F)$.

524, 525. Это следует непосредственно из задачи 523 (если учесть также результат задачи 334).

526. Пример. Гипербола на плоскости и ее асимптота.

527. Пример. Кривая $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ и прямая $y = -1$.

528. Пусть $E = \{f_1, f_2, \ldots\}$, где f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — непрерывная на $[0, 1]$ функция, определенная следующим образом:

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n+1} \text{ при } x \in \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right], \\ \text{линейна на } \left[1 - \dfrac{1}{n}, \ 1 - \dfrac{1}{n+1}\right], \\ 0 \text{ при } x \in \left[1 - \dfrac{1}{n+1}, \ 1\right] \end{cases}$$

(см. рис. 28). Множество E ограничено и замкнуто в полном пространстве $C[0, 1]$ (замкнутость E следует из того, что $\rho(f_m, f_n) \geqslant \dfrac{1}{2}$ при $m \neq n$).

В качестве множества F возьмем одноточечное множество, состоящее из функции $y_0(x)$, тождественно равной нулю на $[0, 1]$. Тогда $\rho(f_n, y_0) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n+1} > \dfrac{1}{2}$, $d = (E, F) = d(E, y_0) = \inf_n \rho(f_n, y_0) = \dfrac{1}{2}$, так что $d(E, F) \neq \rho(f_n, y_0)$ ни для какого элемента f_n множества E.

529. Это следует из неравенств

$$|\rho(x_1, y_1) - \rho(x_2, y_2)| \leqslant \rho(x_1, x_2) + \rho(y_1, y_2) \leqslant \sqrt{2}\, R((x_1, y_1), (x_2, y_2))$$

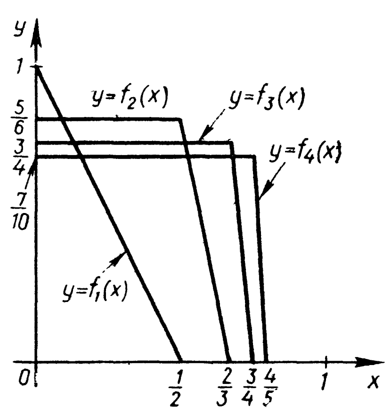


Рис. 28

(первое из них легко выводится из неравенства треугольника, второе следует из неравенства $a + b \leqslant \sqrt{2}\sqrt{a^2 + b^2}$, справедливого для любых чисел $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$).

530. $\rho(x, y)$ — функция, непрерывная на компакте $E \times E$ (см. задачи 314 и 529). Следовательно, в силу результата задачи 515, найдется точка $(x_0, y_0) \in E \times E$, в которой эта функция достигает своей верхней грани, т. е.

$$\rho(x_0, y_0) = \sup_{x \in E,\ y \in E} \rho(x, y) = \operatorname{diam} E.$$

531. Пусть $\rho(x_1, x_2) = a$. Рассмотрим окрестности $V_1 = V\left(x_1, \frac{a}{3}\right)$, $V_2 = V\left(x_2, \frac{a}{3}\right)$. Искомая функция может быть задана равенством $f(x) = \dfrac{d(x, V_1)}{d(x, V_1) + d(x, V_2)}$.

532. В качестве искомой функции можно взять, например, следующую:

$$f(x) = p_1 \frac{\rho(x, \bigcup\limits_{i \neq 1} E_i)}{\rho(x, E_1) + \rho(x, \bigcup\limits_{i \neq 1} E_i)} + p_2 \frac{\rho(x, \bigcup\limits_{i \neq 2} E_i)}{\rho(x, E_2) + \rho(x, \bigcup\limits_{i \neq 2} E_i)} + \ldots + p_n \frac{\rho(x, \bigcup\limits_{i \neq n} E_i)}{\rho(x, E_n) + \rho(x, \bigcup\limits_{i \neq n} E_i)}.$$

Легко видеть, что $f(x) = p_k$ при $x \in E_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Покажем, что эта функция определена и непрерывна на всей числовой прямой. Действительно, множество $\bigcup\limits_{i \neq 1} E_i$ замкнуто, как сумма конечного числа замкнутых множеств $E_2, E_3, \ldots, E_n$; поэтому множества E_1 и $\bigcup\limits_{i \neq 1} E_i$ не имеют общих точек прикосновения и, следовательно, знаменатель первой дроби ни в одной точке не равен нулю; это же справедливо и для знаменателей всех остальных дробей. Но тогда из непрерывности функций $\rho(x, E_k)$ и $\rho(x, \bigcup\limits_{i \neq k} E_i)$ $(k = 1, \ldots, n)$ вытекает непрерывность функции $f(x)$.

533. Искомую функцию можно задать следующим образом:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \frac{\rho(x, \bigcup\limits_{i \neq k} E_i)}{\rho(x, E_k) + \rho(x, \bigcup\limits_{i \neq k} E_i)}.$$

534. Допустим, что такая функция $f(x)$ существует. Пусть $x_0 \in E_1$ — точка прикосновения для $\bigcup\limits_{i \neq 1} E_i$. Тогда в любой окрестности $V(x_0)$ точки x_0 найдутся точки из E_i со сколь угодно большими номерами i (так как объединение конечного числа множеств E_i замкнуто); следовательно, в этой окрестности найдутся точки, в которых значения функции $f(x)$ сколь угодно близки к нулю (так как $p_i \to 0$ при $i \to +\infty$); но тогда в любой окрестности точки x_0

колебание функции $f(x)$ больше или равно $|f(x_0)| = |p_1|$, а это означает, что функция $f(x)$ разрывна в точке x_0.

535. Пусть $f(x)$ — функция, непрерывная на связном множестве E. Допустим, что $f(E)$ несвязно. Тогда $f(E) = A \cup B$, где A и B — разъединенные множества. Рассмотрим множества $A_1 = f^{-1}(A)$ и $B_1 = f^{-1}(B)$. Они непусты, их объединение равно E, и ни одно из них не содержит точек прикосновения другого: если бы, например, $a \in A_1$ была точкой прикосновения для B_1, то некоторая последовательность $\{x_n\}$ точек из B_1 сходилась бы к a; но тогда, в силу непрерывности функции $f(x)$, последовательность $\{f(x_n)\}$ точек из B сходилась бы к $f(a) \in A$, что противоречит разъединенности множеств A и B. Итак, A_1 и B_1 — разъединенные множества, объединение которых равно E. Но это противоречит связности E.

536. Согласно результату предыдущей задачи, $f(E)$ — связное множество на прямой. Поэтому вместе с точками A и B множество $f(E)$ содержит и весь соединяющий их отрезок (см. задачу 394). Следовательно, $C \in f(E)$, т. е. существует точка $c \in E$ такая, что $f(c) = C$.

537. В силу результатов задач 505 и 535, $f(E)$ — непустое компактное связное множество на прямой. Но такими являются только отрезки и одноточечные множества (см. задачи 303 и 395).

538. Нет, не является. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0 \end{cases}$$

обладает свойством Дарбу на отрезке $[-1, 1]$, но разрывна в точке $x_0 = 0$. (Однако можно легко доказать, что функция, обладающая свойством Дарбу, не может иметь точек разрыва первого рода.)

539. 1) Функция $\sin\dfrac{1}{x}$ не является равномерно непрерывной на интервале $]0, 1[$, так как для всякого $\delta > 0$ колебание этой функции на интервале $\left]0, \dfrac{1}{2}\min(\delta, 1)\right[$, длина которого меньше чем δ, равно 2.

2) Функция $x \sin\dfrac{1}{x}$ равномерно непрерывна на $]0, +\infty[$. Докажем это. Доопределим данную функцию в точке 0, положив

$$f(x) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0. \end{cases}$$

Полученная функция $f(x)$ непрерывна на луче $[0, +\infty[$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f(x) \to 1$ при $x \to +\infty$, то найдется x_0 такое, что $|f(x) - 1| < \dfrac{\varepsilon}{4}$ для любого $x \geqslant x_0$. На отрезке $[0, x_0]$ функция $f(x)$ равномерно непрерывна как функция, непрерывная на отрезке. Значит, найдется такое $\delta > 0$, что для всех $x', x'' \in [0, x_0]$, для которых $|x' - x''| < \delta$, будет

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда для всех точек $x', x'' \in]0, +\infty[$, $x' < x''$ таких, что $x'' - x' < \delta$, имеем: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$; если $x', x'' \in]0, x_0]$, то $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; если $x', x'' \in]x_0, +\infty[$, то $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - 1| + |1 - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon$; наконец, если $x' \in]0, x_0]$, $x'' \in]x_0, +\infty[$, то $|f(x') - f(x'')| \leqslant |f(x') - f(x_0)| + |f(x_0) - 1| + |1 - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$. Итак, функция $f(x)$, а значит, и совпадающая с ней на луче $]0, +\infty[$ функция $x \sin \frac{1}{x}$ равномерно непрерывны на этом луче.

3) Функция $3x$ равномерно непрерывна на числовой прямой. Действительно, поставив в соответствие каждому $\varepsilon > 0$ число $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$, получим, что из $|x' - x''| < \delta$ следует: $|3x' - 3x''| < \varepsilon$.

4) Функция x^2 не равномерно непрерывна на всей числовой прямой.

5) Функция $\frac{\sin x}{x}$ равномерно непрерывна на луче $]0, +\infty[$.

540. Допустим, что функция $f(x)$ не является равномерно непрерывной на E. Тогда существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для любого $\delta > 0$ найдутся точки x' и x'' из E, расстояние между которыми меньше чем δ, тогда как $|f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0$. В частности, для $\delta_n = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ найдутся точки $x'_n, x''_n \in E$ такие, что $\rho(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n}$, $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0$.

Рассмотрим последовательность $\{x'_n\}$. В силу компактности E, из нее можно выбрать подпоследовательность $\{x'_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in E$. Тогда x_0 является пределом также для подпоследовательности $\{x''_{n_k}\}$. Действительно, $\rho(x''_{n_k}, x_0) \leqslant \rho(x''_{n_k}, x'_{n_k}) + \rho(x'_{n_k}, x_0) < \frac{1}{n_k} + \rho(x'_{n_k}, x_0)$ и $\frac{1}{n_k} + \rho(x'_{n_k}, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$; поэтому $\rho(x''_{n_k}, x_0) \to 0$ при $k \to \infty$.

В точке x_0 функция f непрерывна относительно E. Но тогда $\lim\limits_{k\to\infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0)$ и $\lim\limits_{k\to\infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0)$. Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| = 0.$$

А это противоречит тому, что $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0$ для любого номера n_k. Полученное противоречие доказывает, что функция f равномерно непрерывна на E.

541. Пусть функция $f(x)$ равномерно непрерывна на E. Найдем такое число $\delta > 0$, что $|f(x') - f(x'')| < 1$ для любых $x' \in E$, $x'' \in E$ таких, что $\rho(x', x'') < \delta$. В силу задачи 326, существует конечная δ-сеть $x_1, \ldots, x_n$ для множества E, содержащаяся в самом E. Пусть A — наибольшее, а B — наименьшее из чисел $f(x_1), \ldots, f(x_n)$. Тогда для любого $x \in E$ получим:

$$A - 1 \leqslant f(x) \leqslant B + 1.$$

542. Да. Это следует из неравенства

$$|(f(x') + g(x')) - (f(x'') + g(x''))| \leqslant |f(x') - f(x'')| + |g(x') - g(x'')|.$$

543. Не всегда. Например, функции $f(x) = x$ и $g(x) = x$ равномерно непрерывны на всей числовой прямой, однако их произведение $f(x)\,g(x) = x^2$ не является равномерно непрерывной функцией на $]-\infty, +\infty[$.

544. Да. Это следует из неравенств

$$\begin{gathered}|f(x')\,g(x') - f(x'')\,g(x'')| \leqslant |f(x')\,g(x') - f(x')\,g(x'')| + \\ + |f(x')\,g(x'') - f(x'')\,g(x'')| = |f(x')| \cdot |g(x') - g(x'')| + \\ + |g(x'')| \cdot |f(x') - f(x'')| \leqslant A \cdot |g(x') - g(x'')| + B \cdot |f(x') - \\ - f(x'')|,\end{gathered}$$

где $A = \sup\limits_{x \in E} |f(x)|$, $B = \sup\limits_{x \in E} |g(x)|$ (ограниченность функции, равномерно непрерывной на относительно компактном множестве, была доказана в задаче 541).

545. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдем такое N, что для всех $x \geqslant N$ имеет место $|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{4}$, где $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. Тогда для любых точек $x_1 \geqslant N$, $x_2 \geqslant N$ справедливо неравенство $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

На отрезке $[0, N]$ функция непрерывна; следовательно, она равномерно непрерывна на нем. Найдем $\delta > 0$ такое, что для всех $x' \in [0, N]$, $x'' \in [0, N]$, $|x' - x''| < \delta$ имеет место $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}$. окажем, что это число δ «годится» для всего луча $[0, +\infty[$. Пусть $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$ и $|x_1 - x_2| < \delta$. Если $x_1 \in [0, N]$ и $x_2 \in [0, N]$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; если $x_1 \geqslant N$, $x_2 \geqslant N$, то $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$; наконец, если одна из этих точек, например x_1, принадлежит $[0, N]$, а другая больше чем N, то

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(N)| + |f(N) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак, из $|x_1 - x_2| < \delta$ всегда следует: $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$. В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, это означает, что функция $f(x)$ равномерно непрерывна на луче $[0, +\infty[$.

546. Неверно. Например, функция $\sin x^2$ непрерывна и ограничена на всей числовой прямой, однако она не равномерно непрерывна на ней. Действительно, каким бы малым ни взять положительное число $\delta > 0$, всегда найдется интервал вида $]\sqrt{k\pi}, \sqrt{(k+1)\pi}[$, длина которого меньше чем δ (так как длины этих интервалов стремятся к нулю при $k \to +\infty$). Вместе с тем колебание функции $\sin x^2$ на этом интервале равно 1. Следовательно, для $\varepsilon = 1$ не существует такого $\delta > 0$, чтобы на всяком интервале длины, меньшей чем δ, колебание функции было бы меньше чем ε.

547. Не является (хотя, как следует из результата задачи 488, она непрерывна во всех точках множества E).

548. Эта функция разрывна во всех точках первого рода множества D и непрерывна во всех точках множества $\complement D$, а также во всех точках второго рода множества D. На множестве $\complement D$ функция не является равномерно непрерывной.

549. Пусть $x \in \bar{E}$. В силу равномерной непрерывности функции f на E, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что из $x', x'' \in E$, $\rho(x', x'') < \delta$ следует: $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. В частности, если $x', x'' \in V\left(x, \frac{\delta}{2}\right) \cap E$, то $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Поэтому для всякой последовательности $\{x_k\}$ точек из E, сходящейся к x, последовательность чисел $\{f(x_k)\}$ фундаментальна и, в силу полноты числовой прямой, имеет предел $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k)$. Этот предел не зависит от выбора последовательности точек множества E, сходящейся к x: если бы для каких-либо двух сходящихся к x последовательностей $\{x'_k\}$ и $\{x''_k\}$ мы имели $\lim\limits_{k\to+\infty} f(x'_k) \neq \lim\limits_{k\to+\infty} f(x''_k)$, то последовательность $\{x_n\}$, где $x_{2k-1} = x'_k$, $x_{2k} = x''_k$, также сходилась бы к x, однако последовательность $\{f(x_n)\}$ не имела бы предела.

Положив теперь $\varphi(x) = \lim\limits_{k\to+\infty} f(x_k)$, где $\{x_k\}$ — какая-нибудь последовательность точек из E, сходящаяся к точке x, мы получим функцию φ, определенную на множестве $\bar{E}$. На множестве E она совпадает с функцией f, так как если $x \in E$, то можно положить $x_k = x$ для всех k.

Докажем, что функция φ равномерно непрерывна на $\bar{E}$. Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и возьмем $\delta > 0$ такое, что из $x, y \in E$, $\rho(x, y) < \delta$ следует: $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть x' и x'' — произвольные точки из $\bar{E}$ такие, что $\rho(x', x'') < \delta$ и $\{x'_k\}$, $\{x''_k\}$ — какие-нибудь последовательности точек из E, сходящиеся соответственно к x' и x''. Выберем k столь большим, чтобы выполнялись следующие неравенства:

$$\rho(x_k', x_k'') < \delta, \ |f(x_k') - \varphi(x')| < \frac{\varepsilon}{4}, \ |f(x_k'') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{4}$$

(неравенству $\rho(x_k', x_k'') < \delta$ можно удовлетворить, если взять $x_k' \in V(x', \eta)$, $x_k'' \in V(x'', \eta)$, где $\eta = \frac{1}{2}(\delta - \rho(x', x''))$; действительно, при этом $\rho(x_k', x_k'') \leqslant \rho(x_k', x') + \rho(x', x'') + \rho(x'', x_k'') < 2\eta + \rho(x', x'') = \delta$).

Тогда получим:

$$|\varphi(x') - \varphi(x'')| \leqslant |\varphi(x') - f(x_k')| + |f(x_k') - f(x_k'')| + |f(x_k'') - \varphi(x'')| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.$$

Таким образом, для любых точек x', x'' из $\overline{E}$ таких, что $\rho(x', x'') < \delta$, имеем: $|\varphi(x') - \varphi(x'')| < \varepsilon$. В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, это означает, что φ равномерно непрерывна на $\overline{E}$. Тем более она непрерывна на $\overline{E}$.

Условием непрерывности функция φ определена на $\overline{E}$ однозначно. Действительно, пусть ψ — какая-либо непрерывная на $\overline{E}$ функция, совпадающая с f на множестве E. Тогда для любой точки $x \in \overline{E}$ и любой последовательности $\{x_k\}$ точек из E, сходящейся к x, имеем:

$$\psi(x) = \lim_{k\to+\infty} \psi(x_k) = \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = \varphi(x).$$

550. Продолжим сначала функцию f с сохранением непрерывности на замкнутое множество $\overline{E}$, как это сделано в предыдущей задаче. Чтобы продолжить полученную функцию φ на всю прямую, достаточно продолжить ее линейно на всех смежных интервалах множества $\overline{E}$: если смежный интервал $]\alpha, \beta[$ конечен, то для точек $x \in]\alpha, \beta[$ полагаем $\varphi(x) = \varphi(\alpha) + \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))$; если же смежный интервал бесконечен, т. е. имеет вид $]-\infty, \alpha[$ или $]\alpha, +\infty[$, то на нем можно положить функцию постоянной, $\varphi(x) \equiv \varphi(\alpha)$. Построенная таким образом функция φ определена на всей числовой прямой. Покажем, что она непрерывна во всех точках прямой.

Ясно, что φ непрерывна на всех смежных интервалах множества $\overline{E}$. Пусть теперь $x_0 \in \overline{E}$. В силу непрерывности φ на $\overline{E}$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \overline{E}$ имеем: $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$. Если интервал $]x_0, x_0 + \delta[$ не содержит точек множества $\overline{E}$, то на отрезке $[x_0, x_0 + \delta]$ функция φ линейна, а потому непрерывна справа в точке x_0. Если же интервал $]x_0, x_0 + \delta[$ содержит точки из $\overline{E}$, то положим $x_1 = \sup(]x_0, x_0 + \delta[\cap \overline{E})$. Так как $\overline{E}$ замкнуто, то $x_1 \in \overline{E}$. Покажем, что $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| < \varepsilon$ для всех $x \in]x_0, x_1[$. Если $x \in \overline{E}$, то это следует из того, что $]x_0, x_1[\subset]x_0-\delta, x_0+\delta[$. Если же x лежит в каком-нибудь смежном интервале $]\alpha, \beta[$ множества $\overline{E}$, то $\varphi(x)$ заключено между числами $\varphi(\alpha)$ и $\varphi(\beta)$ (в силу линейности φ на $]\alpha, \beta[$). А так как $]\alpha, \beta[\subset]x_0, x_1[\subset]x_0-\delta, x_0+\delta[$ и $\alpha \in \overline{E}, \beta \in \overline{E}$, то $\varphi(x_0)-\varepsilon < \varphi(\alpha) < \varphi(x_0)+\varepsilon$ и $\varphi(x_0)-\varepsilon < \varphi(\beta) < \varphi(x_0)+\varepsilon$. Поэтому и $\varphi(x_0)-\varepsilon < \varphi(x) < \varphi(x_0)+\varepsilon$, т. е. $|\varphi(x)-\varphi(x_0)| < \varepsilon$. Следовательно, функция φ непрерывна *справа* в точке x_0. Точно так же доказывается ее непрерывность *слева* в этой точке.

Таким образом, $\varphi(x)$ непрерывна во всех точках числовой прямой и совпадает с $f(x)$ на множестве E.

551. Пример. Функция $\sin\frac{1}{x}$ непрерывна и ограничена на $]0, 1[$, однако ее нельзя продолжить с сохранением непрерывности даже на отрезок $[0, 1]$, так как она не имеет предела при $x \to +0$.

552. Действительно, если бы такая функция f могла быть продолжена с сохранением непрерывности на всю числовую прямую, то продолженная функция была бы непрерывна на $\overline{E}$. Но $\overline{E}$ замкнуто и ограничено и, следовательно, компактно (см. задачу 330). Поэтому, согласно задаче 540, продолженная функция была бы равномерно непрерывна на $\overline{E}$, а значит, и на E. Но на E она совпадает с f; поэтому f была бы равномерно непрерывна на E, что противоречит условию.

553. Возьмем такое $\delta > 0$, чтобы для всевозможных x', x'' таких, что $|x'-x''| < \delta$, было $|f(x')-f(x'')| < 1$; такое δ найдется в силу равномерной непрерывности функции f. Пусть x — произвольное число. Разобьем отрезок $[0, x]$ (при $x > 0$) или $[x, 0]$ (при $x < 0$) точками

$$\frac{1}{n}x, \quad \frac{2}{n}x, \quad \ldots, \quad \frac{n-1}{n}x,$$

где n подобрано так, что $\frac{1}{n}|x| < \delta \leqslant \frac{1}{n-1}|x|$. Тогда

$$|f(x)-f(0)| \leqslant \left|f(x)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right| + \left|f\left(\frac{n-1}{n}x\right)-f\left(\frac{n-2}{n}x\right)\right| + \ldots$$
$$\ldots + \left|f\left(\frac{2}{n}x\right)-f\left(\frac{1}{n}x\right)\right| + \left|f\left(\frac{1}{n}x\right)-f(0)\right|.$$

Так как, в силу выбора числа δ, каждая разность в правой части неравенства меньше чем 1, то

$$|f(x)-f(0)| < n,$$

откуда $|f(x)| < |f(0)| + n$; далее, так как $\frac{1}{n-1}|x| \geqslant \delta$, то $n \leqslant \frac{|x|}{\delta} + 1$; поэтому

$$|f(x)| < |f(0)| + \frac{1}{\delta}|x| + 1 = \\ = A|x| + B,$$

где

$$A = \frac{1}{\delta},\ B = |f(0)| + 1.$$

554. Пусть E — множество тех непрерывных функций $x(t)$ на $[0, 1]$, для которых $x(0) = 1$ и $0 \leqslant x(t) \leqslant 1$ при $t \in [0, 1]$. Это множество замкнуто и ограничено в пространстве $C[0, 1]$. Функция $f(x)$, заданная на этом множестве равенством $f(x) = \frac{1}{\int_0^1 x(t)\,dt}$, непрерывна на E.

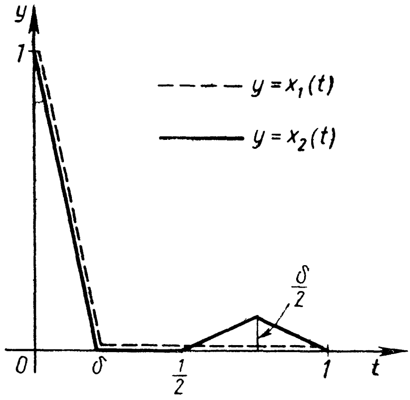


Рис. 29

Вместе с тем она не является равномерно непрерывной на E, так как не существует $\delta > 0$ такого, что из $\rho(x_1, x_2) < \delta$ ($x_1 \in E$, $x_2 \in E$) вытекает: $|f(x_1) - f(x_2)| < 1$. В самом деле, допустим, что такое $\delta > 0$ существует; не ограничивая общности, можно считать $\delta \leqslant 0{,}4$. Беря в качестве $x_1(t)$ и $x_2(t)$ функции, графики которых даны на рисунке 29, будем иметь:

$$\rho(x_1, x_2) = \frac{\delta}{2} < \delta, \text{ но } |f(x_1) - f(x_2)| = \left| \frac{1}{\frac{\delta}{2}} - \frac{1}{\frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{8}} \right| = \frac{2}{5\delta} \geqslant 1,$$

вопреки выбору δ. Итак, $f(x)$ не является равномерно непрерывной на E.

555. Для любых $x_1 \in C[0, 1]$, $x_2 \in C[0, 1]$ имеем:

$$|f(x_1) - f(x_2)| = \left| \int_0^1 x_1(t)\,dt - \int_0^1 x_2(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^1 |x_1(t) - x_2(t)|\,dt \leqslant \\ \leqslant \int_0^1 \rho(x_1, x_2)\,dt = \rho(x_1, x_2),$$

откуда и следует равномерная непрерывность $f(x)$ (для любого $\varepsilon > 0$ в качестве δ можно взять $\delta = \varepsilon$).

556. Пусть E — множество всех точек пространства l_2, у которых одна из координат равна единице, а все остальные — нулю (т. е. точек вида $(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$. Это множество ограничено. Зададим на E функцию f, положив $f(x_n) = n^2$, где x_n — точка из E, у которой 1 стоит на n-м месте. Эта функция равномерно непрерывна на множестве E, но не ограничена на нем.

557. Представим E в виде объединения счетного семейства замкнутых множеств:

$$E = F_1 \cup F_2 \cup F_3 \cup \ldots \cup F_k \cup \ldots;$$

всегда можно считать, что $F_1 \subset F_2 \subset F_3 \subset \ldots$ (в противном случае мы заменили бы F_2 на $F_1 \cup F_2$, F_3 на $F_1 \cup F_2 \cup F_3$ и т. д.; тогда новая последовательность замкнутых множеств возрастает; объединением же этих множеств по-прежнему является множество E).

Построим теперь на $\boldsymbol{R}^1$ последовательность функций $\{f_k\}$, определенных условиями:

$$f_k(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{10^k} & \text{в рациональных точках, принадлежащих множеству } F_k; \\ \dfrac{2}{10^k} & \text{в иррациональных точках множества } F_k; \\ 0 & \text{в точках, не принадлежащих } F_k. \end{cases}$$

Функция $f_k(x)$ разрывна во всех точках множества F_k и непрерывна на $\mathbf{C}F_k$ (действительно, около каждой точки $x_0 \in \mathbf{C}F_k$ можно описать окрестность $V(x_0)$, которая входит в $\mathbf{C}F_k$; всюду в этой окрестности функция постоянна и, значит, непрерывна).

Положим теперь

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x).$$

Этот ряд равномерно сходится на $\boldsymbol{R}^1$, так как $|f_k(x)| \leqslant \frac{2}{10^k}$ для всех k и всех $x \in \boldsymbol{R}^1$. В любой точке $\xi \in \mathbf{C}E$ каждая функция $f_k(x)$ непрерывна; поэтому из равномерной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ вытекает непрерывность функции $f(x)$ в этой точке.

Пусть теперь $\xi \in E$. В этом случае найдется такой номер k, что $\xi \in F_k$, но $\xi \,\overline{\in}\, F_{k-1}$ (здесь мы полагаем $F_0 = \varnothing$). Тогда ξ является точкой разрыва для функций $f_k, f_{k+1}, \ldots$ и при $k > 1$ точкой непрерывности для функций $f_1, \ldots, f_{k-1}$. При этом

$$\omega[f_k, \xi] \geqslant \frac{1}{10^k},$$

а

$$\omega\Big[\sum_{j \neq k} f_j,\ \xi\Big] \leqslant \sum_{j \neq k} \omega[f_j,\ \xi] \leqslant \frac{2}{10^{k+1}} + \frac{2}{10^{k+2}} + \ldots = \frac{2}{9 \cdot 10^k}$$

(см. задачу 499). Поэтому, в силу результата задачи 498, имеем:

$$\omega[f,\ \xi] = \omega\Big[f_k + \sum_{j \neq k} f_j,\ \xi\Big] \geqslant \omega[f_k,\ \xi] - \omega\Big[\sum_{j \neq k} f_j,\ \xi\Big] \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{10^k} - \frac{2}{9 \cdot 10^k} > 0.$$

Следовательно, функция $f(x)$ разрывна в точке ξ.

Итак, $f(x)$ непрерывна всюду на множестве E и разрывна всюду на $\mathbf{C}E$.

558. Доказательство сводится к непосредственной проверке формул.

559. $\chi_M(x) = \chi_{E_1}(x)\,\chi_{E_2}(x)\,\dots\,\chi_{E_n}(x);$

$$\chi_N(x) = \sum_{i=1}^{n} \chi_{E_i}(x) - \sum_{i<j} \chi_{E_i}(x)\chi_{E_j}(x) + \sum_{i<j<k} \chi_{E_i}(x)\chi_{E_j}(x)\chi_{E_k}(x) - \\ - \dots + (-1)^{n+1}\chi_{E_1}(x)\chi_{E_2}(x)\dots\chi_{E_n}(x).$$

560. Если точка x_0 является граничной для множества E, то в любой окрестности этой точки колебание характеристической функции равно 1, и, следовательно, функция разрывна в точке x_0.

Если же точка x_0 не является граничной, то она является внутренней либо для E, либо для $\mathrm{C}E$. Значит, найдется окрестность точки x_0, в которой колебание функции $\chi_E(x)$ равно нулю; следовательно, в этой точке функция непрерывна.

561. Непрерывность этих функций вытекает из тождеств

$$\max\{\varphi(x),\ \psi(x)\} = \frac{\varphi(x) + \psi(x) + |\varphi(x) - \psi(x)|}{2},$$

$$\min\{\varphi(x),\ \psi(x)\} = \frac{\varphi(x) + \psi(x) - |\varphi(x) - \psi(x)|}{2}$$

и результата задачи 500.

562. Обозначим

$$[f(x)]_{-\infty}^{b} = \begin{cases} f(x), \text{ если } f(x) \leqslant b, \\ b, \text{ если } f(x) > b. \end{cases}$$

Ясно, что $[f(x)]_{-\infty}^{b} = \min\{f(x), b\}$. На основании результатов предыдущей задачи $[f(x)]_{-\infty}^{b}$ непрерывна на E. Далее, $[f(x)]_a^b = \max\{a, [f(x)]_{-\infty}^{b}\}$. Следовательно, и $[f(x)]_a^b$ непрерывна на E.

563. Н е о б х о д и м о с т ь этого условия доказана в предыдущей задаче. Докажем его д о с т а т о ч н о с т ь.

Допустим, что на прямой нашлась точка разрыва x_0 функции $f(x)$. Если колебание γ функции $f(x)$ в точке x_0 конечно, то функция $[f(x)]_{-a}^{a}$ при $a > |f(x_0)| + \gamma$ совпадает с $f(x)$ в некоторой окрестности точки x_0. Но тогда и функция $[f(x)]_{-a}^{a}$ разрывна в точке x_0.

Если же в точке разрыва x_0 колебание функции $f(x)$ равно $+\infty$, то в любой окрестности точки x_0 колебание функции $[f(x)]_{-a}^{a}$ при $a > |f(x_0)|$ не меньше чем $a - |f(x_0)|$. Следовательно, и в этом случае функция $[f(x)]_{-a}^{a}$ разрывна в точке x_0.

Итак, разрыв функции $f(x)$ в какой-либо точке x_0 влечет за собой разрыв функции $[f(x)]_{-a}^{a}$ в той же точке для достаточно больших a, что противоречит условию.

564. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на два непересекающихся множества: множество A типа F_σ, всюду плотное на $[0, 1]$, и множество B типа G_δ, также всюду плотное на $[0, 1]$, причем каждое из них имеет мощность континуума в любом интервале $]\alpha, \beta[\subset [0, 1]$ (пример такого разбиения см. в решении задачи 252). После этого построение искомой функции $f(x)$ может быть проведено так же, как в задаче 557.

565. Эта функция разрывна во всех точках множества A и непрерывна во всех точках множества E. Равномерно непрерывной на множестве E функция $f(x, y)$ не является. Исследование этой функции аналогично исследованию функции в задаче 488.

566. Эта функция непрерывна (а следовательно, и равномерно непрерывна) на замкнутом квадрате $[0, 1] \times [0, 1]$, а значит, и на E. Исследование этой функции аналогично исследованию функции в задаче 489.

567. На множестве $0 < x^2 + y^2 < 4$ функция непрерывна, но не равномерно непрерывна. В кольце $1 < x^2 + y^2 < 4$ эта функция равномерно непрерывна: действительно, она непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна в замкнутом кольце $1 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 4$. Значит, она равномерно непрерывна и на любом его подмножестве, в частности в открытом кольце $1 < x^2 + y^2 < 4$.

568. Так как функция $f(x)$ по условию непрерывна в точке x_0 относительно множества D, то $x_0 \in D$. В качестве $f(x)$ можно взять, например, функцию

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in D, \\ 0 \text{ при } x \overline{\in} D. \end{cases}$$

569. Верно. Для доказательства достаточно воспользоваться определением непрерывности по Гейне.

570. Неверно. Пример. Обозначим через σ замкнутую область, ограниченную первым завитком архимедовой спирали $\rho = a\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ и отрезком $[0, 2\pi a]$ на оси абсцисс (рис. 30). Пусть

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \sigma, \\ 0 \text{ при } x \overline{\in} \sigma. \end{cases}$$

Эта функция в точке (0, 0) непрерывна по любому лучу, исходящему из начала координат; однако она не является полностью непрерывной в точке (0, 0).

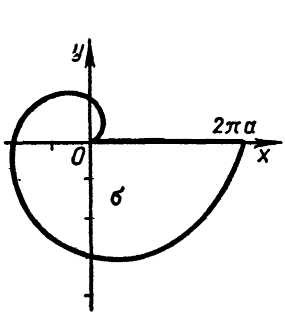


Рис. 30

571. Нет. Пример. Пусть L — винтовая линия, расположенная в трехмерном евклидовом пространстве:

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt;$$

пусть M_0 — точка с координатами $(a, 0, 0)$. Определим функцию $f(x, y, z)$ следующим образом:

$$f(x, y, z) = \begin{cases} 0 \text{ всюду на } L, \text{ кроме точки } M_0; \\ 1 \text{ в точке } M_0, \text{ а также во всех точках пространства } \boldsymbol{R}^3, \text{ не принадлежащих кривой } L. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна относительно любой плоскости, проходящей через точку M_0, но не является полностью непрерывной в этой точке.

572. Нет. Пример.

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ во всех точках плоскости с координатами } (x, 0), \\ \text{где } x > 0; \\ 0 \text{ во всех остальных точках плоскости (включая} \\ \text{и начало координат).} \end{cases}$$

Функция $f(x, y)$ непрерывна в точке $(0, 0)$ относительно любой архимедовой спирали, однако она не является полностью непрерывной в этой точке.

Глава X.

НЕПРЕРЫВНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

573. Пусть $y \in f(E)$, т. е. $y = f(x)$, где $x \in E$. Так как E_1 плотно в E, то $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$, где $\{x_n\}$ — некоторая последовательность точек из E_1. Но тогда, в силу непрерывности отображения f, $y = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, где $y_n = f(x_n) \in f(E_1)$ для всех n. Следовательно, $f(E_1)$ плотно в $f(E)$.

574. $\ln(x^2 + 1)$ — непрерывная функция, определенная на $E = \boldsymbol{R}^1$, принимающая неотрицательные значения, равная 0 при $x = 0$ и стремящаяся к $+\infty$ при $x \to \infty$. Поэтому множеством ее значений служит луч $[0, +\infty[$. Так как множество E_1 всех рациональных чисел всюду плотно в E, то остается применить результат предыдущей задачи.

575. См. решение задачи 505.

576. Необходимость доказывается так же, как в задаче 508.

Достаточность. Если прообраз замкнутого множества $F \subset Y$ замкнут в X, то прообраз его дополнения $Y \setminus F$ открыт в X, так как

$$f^{-1}(Y \setminus F) = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(F) = X \setminus f^{-1}(F).$$

Но любое открытое множество в Y является дополнением к некоторому замкнутому; следовательно, прообраз любого открытого множества в Y есть открытое множество в X; в частности, прообраз любой окрестности точки пространства Y открыт.

Докажем, что отображение f непрерывно в любой точке $x_0 \in X$. Возьмем произвольную окрестность $V(f(x_0), \varepsilon)$ точки $f(x_0)$. Ее прообраз $f^{-1}(V(f(x_0), \varepsilon))$ открыт в X. Значит, точка $x_0 \in f^{-1}(V(f(x_0), \varepsilon))$ является внутренней точкой этого прообраза, т. е. найдется такая ее окрестность $V(x_0, \delta)$, что $V(x_0, \delta) \subset f^{-1}(V(f(x_0), \varepsilon))$; тогда $f(V(x_0, \delta)) \subset V(f(x_0), \varepsilon)$. Но это означает, что для всех точек $x \in V(x_0, \delta)$ будет выполняться неравенство $\rho(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$. Таким образом, отображение f непрерывно во всех точках пространства X, т. е. на всем пространстве.

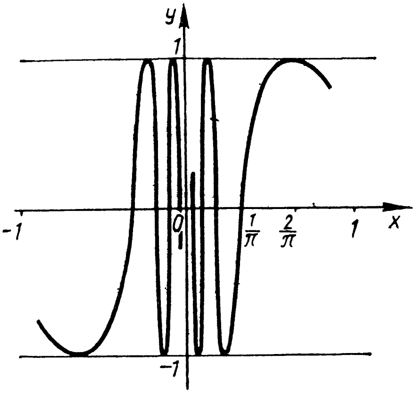


Рис. 31

577. Необходимость доказывается так же, как в задаче 509.

Достаточность доказывается повторением второй половины доказательства достаточности из решения предыдущей задачи.

578. Доказывается повторением второй половины доказательства достаточности из решения задачи 576.

579. См. решение задачи 535.

580. Это следует из связности жордановой кривой (см. предыдущую задачу и задачу 387) и результата задачи 385.

581. Множество A на плоскости, являющееся объединением графика функции $\sin\frac{1}{x}$ на $[-1, 0[\ \cup\ ]0, 1]$ с отрезком, соединяющим точки $(0, -1)$ и $(0, 1)$ (см. рис. 31). Так как A — ограниченное замкнутое множество на плоскости, то оно компактно.

Докажем, что A связно. Обозначим через C множество всех точек вида $\left(x, \sin\frac{1}{x}\right)$, где $x \in\ ]0, 1]$, а через D — множество всех точек вида $\left(x, \sin\frac{1}{x}\right)$, где $x \in [-1, 0[$. Множества C и D оба связны, так как они линейно связны. Значит, множества $\bar{C}$ и $\bar{D}$ также связны (задача 383). Но их пересечение непусто (оно состоит из «предельного» отрезка, соединяющего точки $(0, -1)$ и $(0,1)$. Поэтому множество $A = \bar{C} \cup \bar{D}$ связно (см. задачу 389).

Но вместе с тем множество A не является линейно связным. Действительно, рассмотрим произвольную плоскую жорданову кривую $f(t)$ $(t \in [a, b])$, носитель которой включается в A и содержит точку $(1, \sin 1)$. Не ограничивая общности, можно считать, что $(1, \sin 1) = f(a)$. Докажем, что носитель этой кривой не может содержать, например, точки $(0, 0)$.

Функция $f(t)$ непрерывна на компакте $[a, b]$ и, значит, равномерно непрерывна на нем. Следовательно, для $\varepsilon = 1$ найдется $\delta > 0$ такое, что при $|t' - t''| < \delta$ $(t', t'' \in [a, b])$ имеем: $\rho(f(t'), f(t'')) < 1$. Разобьем отрезок $[a, b]$ на n частей точками $t_0 = a, t_1, t_2, \ldots, t_n = b$ так, чтобы было $t_i - t_{i-1} < \delta$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $F_i = f([t_{i-1}, t_i])$ — связное подмножество множества A, причем $\operatorname{diam} F_i < 1$. Покажем, что каждое F_i $(i = 1, \ldots, n)$ включается в C. Действительно, если бы F_1 не включалось в C, то ортогональная проекция F_1^x множества F_1 на ось Ox содержала бы некоторую точку $\alpha \leqslant 0$. Но отображение проектирования на ось непрерывно (см. ниже, задачу 595); поэтому F_1^x — связное множество на $[-1, 1]$. Так как $(1, \sin 1) \in F_1$, то $1 \in F_1^x$; но тогда $]0, 1] \subset \subset [\alpha, 1] \subset F_1^x$ (см. задачу 394). Значит, F_1 содержало бы все точки графика функции $\sin \frac{1}{x}$, абсциссы которых принадлежат $]0, 1]$, т. е. бесконечное число «волн» этой «синусоиды». Но это невозможно, поскольку $\operatorname{diam} F_1 < 1$, а амплитуда волны равна 2. Следовательно, F_1 включается в C.

Далее, F_2 содержит хотя бы одну точку из C (а именно точку $f(t_1)$, принадлежащую $F_1 \cap F_2$). Но тогда точно так же убеждаемся, что $F_2 \subset C$ и т. д.

Таким образом, множество $f([a, b]) = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$ целиком включается в C и, значит, не может содержать точки $(0, 0)$. Итак, точки $(1, \sin 1)$ и $(0, 0)$ нельзя соединить никакой жордановой кривой, т. е. A не является линейно связным.

582. Для множества G на плоскости это следует из результата задачи 400, если учесть, что ломаная с конечным числом звеньев является носителем жордановой кривой. Для $G \subset \boldsymbol{R}^n$ при любом $n \geqslant 2$ доказательство аналогично.

583. В силу взаимной однозначности отображения f, обратное отображение существует; покажем на примерах, что оно не обязано быть непрерывным. а) Занумеруем все рациональные числа на оси Oy. Эту нумерацию можно рассматривать как непрерывное взаимно однозначное отображение множества E всех натуральных чисел оси Ox на множество E_1 всех рациональных чисел оси Oy. Однако обратное отображение разрывно в каждой точке множества E_1. б) Пусть E — промежуток $[0,2\pi[$ оси Ox, E_1 — окружность на плоскости Oxy с центром в точке 0. Поставим в соответствие каждой точке $x \in [0, 2\pi[$ ту точку M окружности, радиус-вектор которой составляет с положительным направлением оси абсцисс угол x (рис. 32). Ясно, что это отображение непрерывно и взаимно однозначно. Однако обратное отображение терпит разрыв в той точке окружности M_0, которая соответствует точке $x = 0$.

584. Согласно задаче 575, множество E_1 компактно. Обозначим через φ функцию, обратную для функции f. Докажем, что функция φ непрерывна в каждой точке $y_0 \in E_1$ относительно множества E_1, т. е. что для всякой окрестности $V(x_0, \varepsilon)$ точки $x_0 = \varphi(y_0)$ найдется такая окрестность $V(y_0, \delta)$ точки y_0, что для всех точек $y \in V(y_0, \delta) \cap E_1$ имеет место $\varphi(y) \in V(x_0, \varepsilon)$.

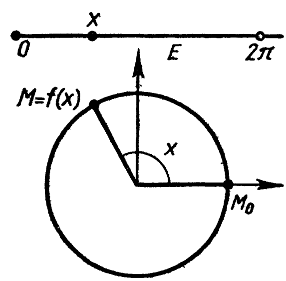


Рис. 32

Для этого заметим, что множество $E \setminus V(x_0, \varepsilon)$ замкнуто, а потому компактно (см. задачу 305); следовательно, его непрерывный образ $F = f(E \setminus V(x_0, \varepsilon))$ является компактным (см. задачу

575), а потому замкнутым (см. задачу 303) подмножеством множества E_1. При этом (в силу взаимной однозначности отображения f) $y_0 \overline{\in} F$. Следовательно, точка y_0 обладает окрестностью $V(y_0, \delta)$, не содержащей ни одной точки из F. Но тогда $\varphi(V(y_0, \delta) \cap E_1)$ не содержит ни одной точки из $\varphi(E)$, т. е. из $E \setminus V(x_0, \varepsilon)$. Значит, $\varphi(V(y_0, \delta) \cap E_1) \subset V(x_0, \varepsilon)$, т. е. для всех $y \in V(y_0, \delta) \cap E_1$ имеет место $\varphi(y) \in V(x_0, \varepsilon)$. Так как y_0 — произвольная точка из E_1, то φ непрерывна на множестве E_1.

585. Допустим, что E_1 имеет изолированную точку, например точку y_0; пусть $x_0 \in E$ — прообраз точки y_0. Обозначим через $V(y_0, \varepsilon)$ ту окрестность точки y_0, которая не содержит других точек из E_1. В силу непрерывности отображения f, найдется окрестность $V(x_0, \delta)$ такая, что $f(V(x_0, \delta) \cap E) \subset V(y_0, \varepsilon)$. Но тогда, в силу взаимной однозначности отображения f, множество $V(x_0, \delta) \cap E$ состоит только из одной точки x_0; поэтому x_0 является изолированной точкой множества E. Но это противоречит условию задачи.

Итак, допущение, что E_1 имеет хотя бы одну изолированную точку, приводит нас к противоречию; значит, множество E_1 не может иметь изолированных точек.

Это утверждение теряет силу, если отображение f не взаимно однозначно. Так, например, функция, определенная на отрезке $E = [0, 1]$ равенством $f(x) = 3$ для всех $x \in E$, непрерывна на E; при этом множество E не имеет изолированных точек, а E_1 содержит изолированную точку $y = 3$ (оно само состоит из одной только этой точки).

586. Неверно. П р и м е р. Отображение множества E всех натуральных чисел оси Ox на множество E_1 всех рациональных чисел оси Oy (см. например, пункт а), приведенный в решении задачи 583); это отображение к тому же и взаимно однозначно.

587. В этом случае обратное отображение множества E_1 на E также непрерывно и взаимно однозначно (см. задачу 584). Так как E_1 не имеет изолированных точек, то, согласно результату задачи 585, их не имеет и E.

588. Это следует из задач 575 и 579.

589. Это вытекает из задачи 585.

590. П р и м е р, показывающий, что полнота пространства не является топологическим свойством: непрерывная функция e^x отображает всю числовую ось $\boldsymbol{R}^1$ взаимно однозначно на промежуток $]0, +\infty[$ и имеет непрерывную обратную функцию $\ln y$; однако метрическое пространство $\boldsymbol{R}^1$ полно (см. введение к главе IV), тогда как промежуток $]0, +\infty[$ (рассматриваемый как подпространство пространства $\boldsymbol{R}^1$, т. е. снабженный обычной метрикой) не является полным, так как фундаментальная последовательность $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ в нем не сходится.

591. Пусть τ — некоторое топологическое свойство. Если множество E не обладает свойством τ и f — гомеоморфизм E на E_1, то E_1 также не обладает свойством τ. Действительно, из определения гомеоморфизма видно, что отображение, обратное гомеоморфному, тоже будет гомеоморфным. Следовательно, отображение, обратное f, является гомеоморфизмом E_1 на E. Поэтому, если бы E_1 обладало свойством τ, то и E обладало бы этим свойством.

592. Предположим, что существует взаимно однозначное непрерывное отображение f отрезка $[0, 1]$ на замкнутый квадрат $E_1 = [0, 1] \times [0, 1]$. Тогда обратное отображение φ также непрерывно (см. задачи 330 и 584). Пусть $M_0 \in E_1$ — образ точки $\frac{1}{2} \in [0, 1]$ при отображении f:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = M_0.$$

Множество $E_1 \setminus \{M_0\}$ связно, так как любые две его точки можно соединить ломаной, лежащей в E_1, а ломаная является связным множеством (см. задачи 387 и 389). Но тогда множество $\varphi(E_1 \setminus \{M_0\}) = [0, 1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ должно быть связным (см. задачу 579), а оно несвязно. Полученное противоречие показывает, что не существует непрерывного взаимно однозначного отображения отрезка на квадрат.

593. Без ограничения общности можно считать, что $a = (0, 0, \ldots, 0,1)$. Гомеоморфное отображение множества $S^m \setminus \{a\}$ на пространство $\boldsymbol{R}^m$ осуществляется с помощью равенства

$$\zeta_i = \frac{x_i}{1 - x_{m+1}} \quad (i = 1, \ldots, m).$$

594. а) Если t_0 не двоично рациональна, или если t_0 есть 0 или 1, то это очевидно. Если же t_0 — двоично рациональная точка отрезка $[0, 1]$, отличная от 0 и 1, то ей соответствуют две различные последовательности отрезков, содержащих эту точку: $\delta_1 \supset \delta_2 \supset \ldots$ и $\delta_1' \supset \delta_2' \supset \ldots$; им отвечают две различные последовательности вложенных квадратов: $V_1 \supset V_2 \supset \ldots$ и $V_1' \supset V_2' \supset \ldots$ Однако, начиная с того номера, когда эти последовательности становятся различными, δ_n и δ_n' будут соседними отрезками; а тогда, согласно построению, квадраты V_n и V_n' имеют общую сторону и, стало быть, вместе образуют прямоугольник $V_n \cup V_n' = W_n$. Очевидно, $W_n \supset W_{n+1}$ (начиная с того номера n, для которого $\delta_n \neq \delta_n'$) и $\operatorname{diam} W_n = \frac{\sqrt{5}}{2^n} \to 0$, а потому $\bigcap\limits_n W_n$ состоит из одной точки, т. е. $\bigcap\limits_n V_n = \bigcap\limits_n V_n' = (\bigcap\limits_n W_n)$.

б) Каждая точка квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ входит в некоторый квадрат первого ранга V_1, в некоторый квадрат второго ранга V_2 (содержащийся в V_1), в некоторый квадрат третьего ранга V_3 (содержащийся в V_2) и т. д. и является единственной точкой пересечения этой убывающей последовательности квадратов. В силу построения, эта последовательность соответствует убывающей последовательности отрезков $\delta_1 \supset \delta_2 \supset \delta_3 \supset \ldots$, единственная точка пересечения которых имеет своим образом взятую точку квадрата.

в) Пусть $t_0 \in [0, 1]$ и $\{t_k\}$ — произвольная последовательность точек отрезка $[0, 1]$, сходящаяся к t_0. Если t_0 не двоично рациональна или если t_0 равна 0 или 1, то для всякого содержащего эту точку отрезка δ_n (произвольного ранга) найдется такой номер N, что при $k > N$ все t_k попадут в δ_n; а значит, $f(t_k) \in V_n$, $f(t_0) \in \in V_n$, где V_n — квадрат n-го ранга, отвечающий δ_n. Если же t_0 — двоично рациональна и отлична от 0 и 1, то t_0 (при достаточно большом n) будет попадать не внутрь, а на границу отрезка δ_n и соседнего с ним отрезка δ_n'; но тогда найдется такой номер N, что при $k > N$ все t_k попадут в $\delta_n \cup \delta_n'$, а значит, каждое $f(t_k)$ попадет либо в V_n, либо в V_n', тогда как $f(t_0) \in V_n \cap V_n'$ (см. пункт а)). Таким образом, в обоих случаях при $k > N$ будем иметь: $\rho(f(t_k), f(t_0)) \leqslant \operatorname{diam} V_n$; так как $\operatorname{diam} V_n = \frac{\sqrt{2}}{2^n} \to 0$ при $n \to \to +\infty$, то отсюда следует, что $\lim\limits_{k \to +\infty} f(t_k) = f(t_0)$. Это и доказывает непрерывность построенного в задаче отображения f.

г) То, что отображение f не является взаимно однозначным, следует из задачи 592. В этом же можно убедиться и непосредственно. Действительно, прообраз всякой точки M_0, лежащей на общей стороне двух квадратов некоторого ранга, занумерованных несоседними номерами, содержит по крайней мере две различные точки (эти точки лежат в двух несоседних отрезках, которые отвечают взятым квадратам); если точка M_0 лежит в общей вершине четырех квадратов некоторого ранга, то ее прообраз состоит даже из трех различных точек.

595. Если проектирование проводится под углом α к оси Ox, то для любых двух точек M_1 и M_2 множества E имеет место соотношение

$$\rho(P_1, P_2) \leqslant \frac{\rho(M_1, M_2)}{\sin\alpha},$$

где P_1 и P_2—проекции точек M_1 и M_2 на ось Ox (рис. 33). Отсюда следует, что проектирование является не только непрерывным, но даже равномерно непрерывным отображением множества E на ось Ox.

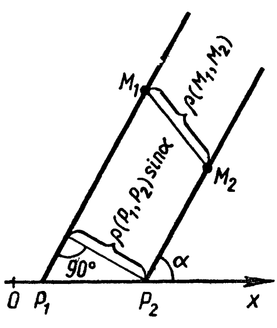


Рис. 33

596. Да, проекция плоского открытого множества всегда открыта на прямой.

597. Если E — ограниченное замкнутое множество на плоскости, то его проекция на ось всегда ограничена и замкнута (см. задачи 330, 595, 575 и 303). Если же E — неограниченное замкнутое множество на плоскости, то его проекция может оказаться и незамкнутым множеством; так, например, график функции $\operatorname{tg} x$ является замкнутым множеством на плоскости, а его ортогональная проекция на ось абсцисс не замкнута.

598. Допустим, что проекции некоторого плоского множества E на обе оси являются счетными множествами. Проведем через каждую точку множества E прямые, перпендикулярные первой оси, и прямые, перпендикулярные второй оси; таких прямых окажется лишь счетное множество; следовательно, и точек пересечения перпендикуляров на первую ось с перпендикулярами на вторую ось будет лишь счетное множество. Но E содержится в этом множестве точек пересечения; значит, и E — счетное множество, что противоречит условию.

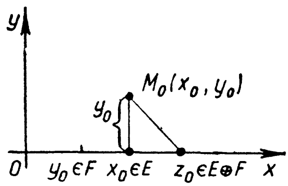


Рис. 34

599. Непосредственно проверяется что каждая точка z_0 той косоугольной проекции, о которой идет речь в условии задачи, изображает сумму двух чисел: $x_0 \in E$ и $y_0 \in F$, и, обратно, любая сумма указанного вида изображается некоторой точкой z_0 из этой косоугольной проекции (рис. 34).

600. Если E и F ограничены и замкнуты, то множество $E \times F$ очевидно, тоже ограничено и, согласно задаче 196, замкнуто. Чтобы получить $E \oplus F$, надо (см. предыдущую задачу) спроектировать $E \times F$ на ось Ox под углом 135°; следовательно, множество $E \oplus F$ тоже ограничено и замкнуто (см. решение задачи 597).

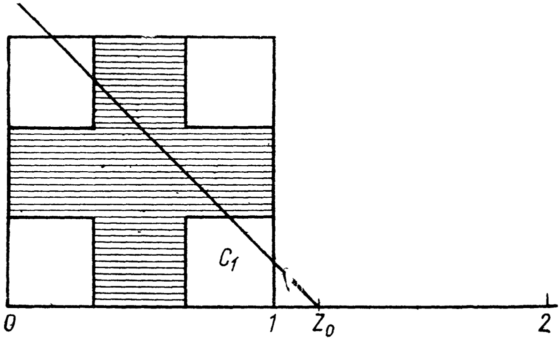
601. Арифметическая сумма $D \oplus D$ двух канторовых совершенных множеств совпадает с отрезком $[0, 2]$. Докажем это.

Произведение $D \times D$ совпадает с «кладбищем Серпинского» (см. задачу 245). Проведем через произвольную точку z_0 отрезка $[0, 2]$ оси Ox прямую, наклоненную к оси абсцисс под углом 135°. Ясно, что эта прямая пересечет по крайней мере один из квадратов первого ранга (рис. 35); обозначим этот квадрат через C_1. Далее, та же прямая пересечет по меньшей мере один квадрат второго ранга из числа квадратов, входящих в C_1; обозначим его C_2. В нем найдется квадрат третьего ранга C_3, с которым эта прямая пересечется по непустому множеству, и т. д.

Обозначим общую часть прямой и квадрата C_k через u_k; множества u_k замкнуты, ограничены, и каждое последующее вложено в предыдущее: $u_{k+1} \subset u_k$. Но тогда $\bigcap_k u_k$ непусто; оно состоит из одной точки, так как $\operatorname{diam} u_k \to 0$. Эта точка принадлежит множеству $D \times D$, и ее косоугольная проекция совпадает с точкой z_0, а потому, в силу результата задачи 599, $z_0 \in D \oplus D$.

Итак, каждая точка $z_0 \in [0, 2]$ принадлежит арифметической сумме $D \oplus D$. С другой стороны, непосредственно ясно, что ни одна точка, лежащая вне отрезка $[0, 2]$, не может принадлежать этой арифметической сумме. Следовательно, $D \oplus D = [0, 2]$.

602. Пусть c — произвольная точка множества $A \oplus B$; тогда $c = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$. Так как A открыто, то существует окрестность $V(a)$, целиком входящая в A. Но тогда множество всех точек вида $x + b$, где $x \in V(a)$, образует окрестность точки



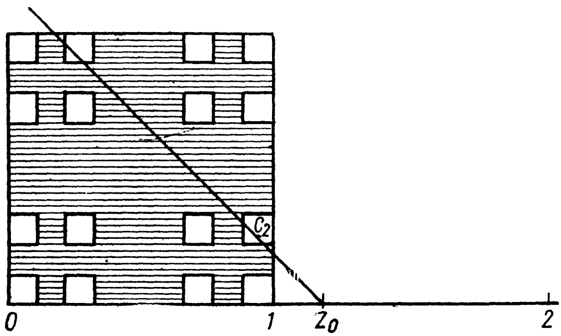


Рис. 35

$c = a + b$; это множество входит в $A \oplus B$. Следовательно, для любой точки $c \in A \oplus B$ существует ее окрестность, входящая в $A \oplus B$. Значит, множество $A \oplus B$ открыто.

603. Пусть $\sup E_1 = a$, $\sup E_2 = b$; тогда если $z \in E_1 \oplus E_2$, то $z = x + y$, где $x \in E_1$, $y \in E_2$; следовательно, $z = x + y \leqslant a + b$. С другой стороны, для всякого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $x \in E_1$, $y \in E_2$, что $x > a - \frac{\varepsilon}{2}$, $y > b - \frac{\varepsilon}{2}$, а тогда $x + y \in E_1 \oplus E_2$ и $x + y > a + b - \varepsilon$. Это доказывает первое равенство;. второе равенство доказывается аналогично.

604. На основании результата задачи 599 множество $E \oplus F$ можно получить, проектируя множество $E \times F$ на ось Ox с углом проектирования, равным 135°. Но если множества E и F связны, то и множество $E \times F$ тоже связно (см. задачу 399); а так как проектирование является непрерывным отображением (см. задачу 595), то оно переводит связное множество в связное (см. задачу 579).

605. Отрезок [0, 1]. Доказательство проводится так же, как в задаче 601.

606. Доказательство аналогично тому, которое проводилось при решении задачи 602.

607. Теорема Лагранжа дает для любых $x', x'' \in \boldsymbol{R}^1$:

$$f(x') - f(x'') = f'(c)(x' - x'')$$

(для некоторого c между x' и x''), откуда

$$|f(x') - f(x'')| \leqslant K|x' - x''|.$$

Так как $K < 1$, то выполняются условия теоремы Банаха (теорема 5 введения к настоящей главе), из которой и следует утверждение задачи.

608. Указание. В силу теоремы Дарбу (см. ниже, теорему 3 введения к главе XI), $f'(x)$ не меняет знака; следовательно, $f(x)$ строго монотонна. Далее, в силу теоремы Лагранжа, $|f(x) - f(0)| = |f'(c)| \cdot |x| \geqslant K \cdot |x| \geqslant |x|$, откуда следует, что функция $f(x)$ принимает значения на всей числовой оси (так как она монотонна и не ограничена ни снизу, ни сверху). Следовательно, для функции $f(x)$ существует обратная функция $\varphi(y)$, определенная на всей числовой оси и такая, что $|\varphi'(y)| = \frac{1}{|f'(x)|} \leqslant \frac{1}{K} < 1$. После этого пишется уравнение $\varphi(y) = y$, эквивалентное данному, и к нему применяется теорема Банаха.

609. Пусть $x(x_1, x_2, \ldots) \in l_2$, т. е. ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} x_i^2$ сходится. Покажем, что тогда $z(z_1, z_2, \ldots) \in l_2$, где $z_i = \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{ik}x_k$. Действительно, применение неравенства Коши—Буняковского (см. введение к главе IV) дает

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |c_{ik}x_k|\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} c_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty,$$

а значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{ik}x_k$ сходится (даже абсолютно) и $z_i^2 = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{ik}x_k\right)^2 \leqslant \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_{ik}^2 \cdot \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^2$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{\infty} z_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^2\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 < +\infty,$$

т. е. $z \in l_2$.

Рассмотрим теперь точку $y(y_1, y_2, \ldots)$, где $y_i = z_i + b_i$. Так как $z(z_1, z_2, \ldots) \in l_2$ и $b(b_1, b_2, \ldots) \in l_2$, то и $y \in l_2$ (см. решение задачи 131).

Таким образом, отображение, переводящее точки $x(x_1, x_2, \ldots)$ в точки $y(y_1, y_2, \ldots)$, есть отображение пространства l_2 в себя.

Покажем, что это отображение сжимающее. Пусть $x'(x_1', x_2', \dots) \in l_2$ и $x''(x_1'', x_2'', \dots) \in l_2$, а $y'(y_1', y_2', \dots)$, $y''(y_1'', y_2'', \dots)$ — точки, получаемые в результате нашего отображения, т. е.

$$y_i' = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}x_k' + b_i, \quad y_i'' = \sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}x_k'' + b_i.$$

Имеем:

$$\rho(y', y'') = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (y_i' - y_i'')^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}(x_k' - x_k'')\right)^2}.$$

Если положить $x_k' - x_k'' = x_k$, $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}x_k = z_i$, то выражение, стоящее под корнем в правой части, есть $\sum_{i=1}^{\infty} z_i^2$. Выше мы показали, что $\sum_{i=1}^{\infty} z_i^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} c_{ik}^2\right) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2$. Но $\sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k' - x_k'')^2 = \rho(x', x'')$. Поэтому последнее неравенство дает:

$$\rho(y', y'') \leqslant \sum_{i,\,k=1}^{\infty} c_{ik}^2 \cdot \rho(x', x'').$$

Так как по условию $\sum_{i,\,k=1}^{\infty} c_{ik}^2 < 1$, то это означает, что наше отображение сжимающее, а тогда, по теореме Банаха, для него существует одна и только одна неподвижная точка. Но это равносильно утверждению задачи.

610. Нет, так как область определения отображения есть $E = [1, +\infty[$, а значения $f(x)$ выходят за пределы E.

611. Пространство E, в котором определена функция $f(x)$, является неполным (ось Ox за вычетом точки O); следовательно, к данному случаю теорема Банаха неприменима.

Глава XI.
ЧИСЛОВЫЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ (МОНОТОННОСТЬ, ОГРАНИЧЕННАЯ ВАРИАЦИЯ)

612.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Здесь

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \sin\frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

613. Пусть $E \subset [0, 1]$ — заданное непустое нигде не плотное замкнутое множество, $]\alpha_n, \beta_n[$ — его смежные интервалы, содержащиеся в $[0, 1]$ ($n = 1, 2, 3 \ldots$), $\beta_0 = \inf E$, $\alpha_0 = \sup E$.

Искомую функцию определим условиями:

$$f(x) = \begin{cases} (x-\alpha_n)^2 (\beta_n - x)^2 \sin \dfrac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n - x)^2} & \text{при } x \in]\alpha_n, \beta_n[, \\ 0 \quad \text{при } x \in F, \\ 0 \quad \text{при } x < \beta_0 \text{ и при } x > \alpha_0. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ определена на всей числовой оси и имеет производную во всех точках числовой оси, в частности во всех точках отрезка $[0, 1]$, а именно:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x-\alpha_n)(\beta_n - x)(\alpha_n + \beta_n - 2x) \sin \dfrac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n - x)^2} - \\ - \dfrac{2(\alpha_n + \beta_n - 2x)}{(x-\alpha_n)(\beta_n - x)} \cos \dfrac{1}{(x-\alpha_n)^2(\beta_n - x)^2} \quad \text{при } x \in]\alpha_n, \beta_n[, \\ 0 \text{ при } x \in E, \\ 0 \text{ при } x < \beta_0 \text{ и при } x > \alpha_0. \end{cases}$$

Производная $f'(x)$ непрерывна всюду вне множества E и разрывна во всех точках этого множества.

614. Построим на отрезке $[0, 1]$ нигде не плотное совершенное множество положительной меры (см. задачу 410). Пусть $]\alpha_n, \beta_n[$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$) — смежные интервалы этого множества. Тогда функция, построенная в предыдущей задаче, будет удовлетворять всем предъявляемым требованиям.

615. Нет. Точная производная $f'(x)$ должна обладать свойством Дарбу, т. е. принимать все промежуточные значения. Этим свойством не обладает функция Дирихле.

616. Нет, так как точная производная может иметь точки разрыва только второго рода, тогда как разрывная монотонная функция имеет точки разрыва только первого рода.

617. Нет. П р и м е р. Функция $f(x) = |x|$ имеет во всех точках как правую, так и левую производную; однако ни та, ни другая не обладают свойством Дарбу. Например:

$$f'_{\text{лев}}(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } x \leqslant 0, \\ 1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

618. Например, функция $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{|x - x_k|}{2^k}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$ — все возможные точки множества E, занумерованные натуральными числами. Эта функция непрерывна, как сумма ряда непрерывных функций, равномерно сходящегося на любом отрезке. Найдем производную от $f(x)$ при $x \,\overline{\in}\, E$.

Имеем:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{|x+h-x_k|}{2^k}-\frac{|x-x_k|}{2^k}\right)=$$

$$=\sum{}'\frac{|x+h-x_k|-|x-x_k|}{2^k h}+\sum{}''\frac{|x+h-x_k|-|x-x_k|}{2^k h}, \qquad (1)$$

где сумма Σ' распространена на те значения k, для которых $|x-x_k|>|h|$, а сумма Σ'' — на остальные значения k. В первой из этих сумм $x+h-x_k$ и $x-x_k$ имеют одинаковый знак; поэтому в этой сумме $\frac{|x+h-x_k|-|x-x_k|}{2^k h}=\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}$.

Если $x \bar{\in} E$, то при достаточно малом $|h|$ вторая из этих сумм становится сколь угодно малой по модулю, а первая — сколь угодно близкой к сумме ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}$; в самом деле, для всякого натурального числа N можно найти такое $\delta>0$, чтобы в окрестность $]x-\delta,\ x+\delta[$ не попали те x_k, для которых $k\leqslant N$; тогда при $|h|<\delta$

$$\left|\sum{}''\frac{|x+h-x_k|-|x-x_k|}{2^k h}\right|\leqslant\sum{}''\frac{|h|}{2^k\cdot|h|}=$$

$$=\sum{}''\frac{1}{2^k}\leqslant\sum_{k>N}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^N} \qquad \text{и}$$

$$\left|\sum{}'\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}\right|\leqslant\sum_{k>N}\frac{1}{2^k}=\frac{1}{2^N}.$$

Поэтому, переходя в равенстве (1) к пределу при $h\to 0$, получим, что при $x \bar{\in} E$

$$f'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-x_k)}{2^k}.$$

Итак, $f'(x)$ существует во всех точках $x \bar{\in} E$. Убедимся теперь в том, что ни в одной точке множества E производная $f'(x)$ не существует.

Пусть x_{k_0} — какая-либо точка множества E. Представим $f(x)$ в виде суммы двух функций:

$$f(x)=\frac{|x-x_{k_0}|}{2^{k_0}}+\sum_{k\neq k_0}\frac{|x-x_k|}{2^k}.$$

Тем же способом, которым мы доказывали существование производной у функции $f(x)$ в точках $x \bar{\in} E$, проверяется, что функция $\sum\limits_{k\neq k_0}\frac{|x-x_k|}{2^k}$ имеет производную в точке x_{k_0}; функция же $\frac{|x-x_{k_0}|}{2^{k_0}}$ не имеет производной в этой точке. Следовательно, сумма этих функций, т. е. функция $f(x)$, не имеет производной в точке x_{k_0}.

619. Да, функция $f(\varphi(t))$ монотонна на отрезке $[a, b]$; при этом, если f — возрастающая функция, то и суперпозиция $f(\varphi(t))$ возрастает, а если f — убывающая функция, то и суперпозиция убывает.

620. Нет. Пример. Пусть $\varphi(t)$ определена на отрезке $[0, 2]$ равенствами:

$$\varphi(t) = \begin{cases} t & \text{при } t \in [0, 1[, \\ t + 1 & \text{при } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Эта функция разрывна при $t = 1$ и для нее $\varphi(0) = 0$, $\varphi(2) = 3$. Определим теперь на отрезке $[0, 3]$ оси Ox монотонно возрастающую функцию

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \in [0, 1], \\ 1 & \text{при } x \in]1, 2[, \\ x - 1 & \text{при } x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Легко видеть, что суперпозиция $f(\varphi(t))$ тождественно равна t при $0 \leqslant t \leqslant 2$; следовательно, она непрерывна всюду, и в частности в точке $t = 1$.

Заметим, однако, что если функция $f(x)$ строго монотонна, а функция $\varphi(t)$ разрывна в точке t_0, то суперпозиция $f(\varphi(t))$ обязательно терпит разрыв в точке t_0.

621. Для определенности будем считать, что $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$. Возьмем произвольное положительное ε, не превосходящее $b - a$. В силу строгого возрастания функции, имеем: $f(b - \varepsilon) < f(b)$. Найдем такое N, что для всех $n > N$ имеет место: $f(x_n) > f(b - \varepsilon)$; это можно сделать, так как $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(b)$. В силу строгого возрастания функции, из $f(x_n) > f(b - \varepsilon)$ вытекает, что $x_n > b - \varepsilon$; следовательно, для всех $n > N$ имеем: $b - \varepsilon < x_n \leqslant b$, откуда $|x_n - b| < \varepsilon$. Но это и означает, в силу произвольности числа $\varepsilon > 0$, что $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = b$.

622. Функции $m(x)$ и $M(x)$ определены на всем отрезке $[a, b]$ (если считать, что отрезок $[a, x]$ при $x = a$ есть одноточечное множество $\{a\}$). Какова бы ни была функция $f(x)$, функция $M(x) = \sup\limits_{z \in [a, x]} f(z)$ возрастает на отрезке $[a, b]$, так как если $h > 0$, то $[a, x] \subset [a, x + h]$, и, следовательно, $\sup\limits_{z \in [a, x+h]} f(z) \geqslant \sup\limits_{z \in [a, x]} f(z)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна, то $M(x)$ также непрерывна. Для того чтобы доказать это, покажем сначала, что для любых чисел $c, d \in [a, b]$, $c < d$ имеет место неравенство

$$\sup_{z \in [a, d]} f(z) \leqslant \sup_{z \in [a, c]} f(z) + \underset{[c, d]}{\omega f}. \qquad (1)$$

Действительно, $\sup\limits_{z \in [a, d]} f(z)$ равен наибольшему из чисел $\sup\limits_{z \in [a, c]} f(z)$ и $\sup\limits_{z \in [c, d]} f(z)$. Если наибольшим является $\sup\limits_{z \in [a, c]} f(z)$, то

$$\sup_{z \in [a, d]} f(z) = \sup_{z \in [a, c]} f(z) \leqslant \sup_{z \in [a, c]} f(z) + \underset{[c, d]}{\omega f},$$

так как $\underset{[c,\ d]}{\omega f} \geqslant 0$. Если же наибольшим является $\sup\limits_{z \in [c,\ d]} f(z)$, то

$$\sup_{z \in [a,\ d]} f(z) = \sup_{z \in [a,\ c]} f(z) + \left(\sup_{z \in [c,\ d]} f(z) - \sup_{z \in [a,\ c]} f(z)\right);$$

но $\sup\limits_{z \in [a,\ c]} f(z) \geqslant f(c) \geqslant \inf\limits_{z \in [c,\ d]} f(z)$; поэтому

$$\sup_{z \in [a,\ d]} f(z) \leqslant \sup_{z \in [a,\ c]} f(z) + \left(\sup_{z \in [c,\ d]} f(z) - \inf_{z \in [c,\ d]} f(z)\right) =$$

$$= \sup_{z \in [a,\ c]} f(z) + \underset{[c,\ d]}{\omega f}.$$

Таким образом, неравенство (1) доказано. Из него, в частности, следует, что при $x \in [a, b]$ и при $0 < h \leqslant b - x$

$$\sup_{z \in [a,\ x+h]} f(z) \leqslant \sup_{z \in [a,\ x]} f(z) + \underset{[k,\ k+h]}{\omega} f.$$

Отсюда, принимая во внимание, что $M(x)$ — возрастающая функция, получаем:

$$0 < M(x+h) - M(x) < \underset{[x,\ x+h]}{\omega} f.$$

При $h \to 0$ правая часть неравенства стремится к нулю, так как $f(z)$ непрерывна; но тогда и $M(x+h) \to M(x)$; значит, $M(x)$ непрерывна справа в точке x.

Для того чтобы доказать непрерывность $M(x)$ в точке x слева, применим неравенство (1) к точкам $x - h$, x отрезка $[a, b]$ $(h > 0)$:

$$\sup_{z \in [a,\ x]} f(z) \leqslant \sup_{z \in [a,\ x-h]} f(z) + \underset{[x-h,\ x]}{\omega} f,$$

откуда

$$0 \leqslant M(x) - M(x-h) \leqslant \underset{[x-h,\ x]}{\omega} \cdot f.$$

Следовательно, $M(x-h) \to M(x)$ при $h \to 0$; значит, $M(x)$ непрерывна и слева в точке x.

Итак, если функция $f(x)$ непрерывна всюду на $[a, b]$, то и $M(x)$ непрерывна всюду на $[a, b]$.

Аналогично доказываются монотонность и непрерывность функции $m(x)$.

623. Если $f(x)$ — возрастающая функция на $[a, b]$, то $\sup f(z) = f(x)$, т. е. $M(x) = f(x)$ для всех $x \in [a, b]$.

Для функции $\widetilde{M}(x) = \sup\limits_{z \in [a,\ x[} f(z)$ аналогичное равенство не всегда имеет место. Пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} x & \text{для } x \in [0, 1[, \\ x + 1 & \text{для } x \in [1, 2]. \end{cases}$

Эта функция возрастает (и даже строго возрастает) на отрезке $[0, 2]$. Для нее $\widetilde{M}(x) = \begin{cases} x & \text{для } x \in]0, 1], \\ x + 1 & \text{для } x \in]1, 2]. \end{cases}$

Как мы видим, $f(x) \neq \widetilde{M}(x)$ в точке $x = 1$.

Обобщая этот пример, можно построить такую монотонную функцию $f(x)$, для которой равенство $f(x) = \widetilde{M}(x)$ не выполняется на счетном множестве точек.

624. Пусть, для определенности, $f(x)$ возрастает на отрезке $[a, b]$. Тогда $\inf\limits_{x [a, b]} f(x) = f(a)$, $\sup\limits_{x [a, b]} f(x) = f(b)$. Допустим, что эта функция разрывна в точке c, где $a \leqslant c \leqslant b$; тогда по крайней мере на одном из интервалов $]f(c-0), f(c)[$, $]f(c), f(c+0)[$ оси Oy нет значений функции. Но это значит, что функция $f(x)$ принимает в качестве своих значений не все числа отрезка $[f(a), f(b)]$.

Следовательно, если функция возрастает на $[a, b]$ и принимает на этом отрезке в качестве своих значений в с е числа из $[f(a), f(b)]$, то она непрерывна на $[a, b]$. Случай убывающей функции аналогичен.

625. Можно; достаточно положить

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \in E, \\ \sup\limits_{\zeta<x} f(\zeta) & \text{при } x \in [a, b] \setminus E,\ x > x_0, \\ \inf\limits_{\zeta\in E} f(\zeta) & \text{при } x \in [a, b] \setminus E,\ x \leqslant x_0, \end{cases}$$

где $x_0 = \inf E$.

Ясно, что $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая функция, определенная всюду на $[a, b]$ и совпадающая с $f(x)$ на множестве E.

626. Нельзя. Если, например, $f(x)$ не ограничена сверху, то она не определена в точке b (иначе было бы $f(x) \leqslant f(b)$ всюду на E. Но тогда и доопределить ее в точке b с сохранением монотонности нельзя. Если же $f(x)$ не ограничена снизу, то ее нельзя доопределить с сохранением монотонности в точке a.

627. Д о с т а т о ч н о с т ь очевидна: если $f(x)$ строго монотонна, то она в з а и м н о о д н о з н а ч н о отображает свою область определения $[a, b]$ на свою область значений $E_1 = f([a, b])$; а это есть необходимое и достаточное условие существования обратной функции, отображающей E_1 на $[a, b]$ и ставящей в соответствие каждой точке $y \in E_1$ ту единственную точку $x \in [a, b]$, для которой $f(x) = y$.

Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет обратную функцию, т. е. взаимно однозначно отображает $[a, b]$ на $E_1 = f([a, b])$. Тогда $f(a) \neq f(b)$, так как равенство $f(a) = f(b)$ противоречит взаимной однозначности этого отображения. Положим для определенности, что $f(a) < f(b)$. Тогда в точке a функция достигает наименьшего значения на $[a, b]$. Действительно, если бы в некоторой точке $x_0 \in]a, b[$ было $f(x_0) < f(a)$, то, в силу теоремы о промежуточных значениях непрерывной функции, между точками x_0 и b нашлась бы точка ζ такая, что $f(\zeta) = f(a)$ (так как $f(x_0) < f(a) < f(b)$, см. рис. 36); но это противоречит тому, что $f(x)$ взаимно однозначно отображает отрезок $[a, b]$ на множество E_1.

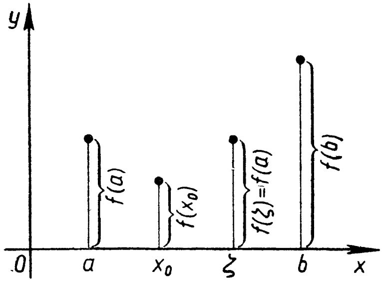


Рис. 36

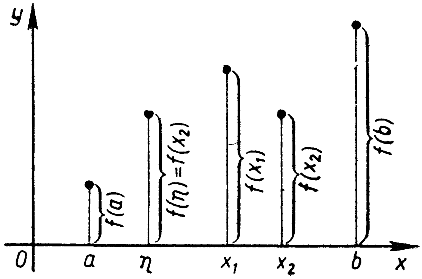


Рис. 37

Докажем теперь, что функция $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$. Допустим, что это не так; тогда найдется хотя бы одна пара точек x_1, $x_2 \in [a, b]$, $x_1 < x_2$ такая, что $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. Равенство здесь исключено из-за взаимной однозначности отображения f; значит, $f(x_1) > f(x_2)$. Но тогда на участке $[a, x_1]$ найдется точка η такая, что $f(\eta) = f(x_2)$ (так как $f(a) < f(x_2) < f(x_1)$) (см. рис. 37). А это также противоречит взаимной однозначности отображения f. Значит, для любых точек $x_1 < x_2$, лежащих на отрезке $[a, b]$, имеет место неравенство $f(x_1) < f(x_2)$, т. е. функция $f(x)$ строго возрастает на $[a, b]$.

628. Если обе функции возрастают или обе убывают, то их сумма монотонна. Однако если одна из этих функций возрастает, а другая убывает, то сумма может оказаться немонотонной. Например, обе функции $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = -x^2$ монотонны на $[0, 1]$, однако их сумма $f(x) = x + (-x^2)$ не монотонна на $[0, 1]$.

Произведение двух *неотрицательных* возрастающих функций монотонно. В общем случае это не так. Например, обе функции $\varphi(x) = x$, $\psi(x) = x - 1$ возрастают на $[0, 1]$, однако их произведение $f(x) = x(x-1)$ не монотонно на этом отрезке.

629. Сначала докажем, что для любого натурального n множество E_n тех точек, где колебание функции больше или равно $\frac{1}{n}$, не более чем счетно. Для этого опишем около каждой точки $x \in]a, b[$ окрестность $]x - \delta, x + \delta[$ (δ зависит от x) такую, что колебание функции на $]x-\delta, x[$ и на $]x, x+\delta[$ *меньше* чем $\frac{1}{n}$. Далее, из покрытия интервала $]a, b[$ интервалами $]x - \delta, x + \delta[$ выберем не более чем счетное покрытие $]x_1 - \delta_1, x_1 + \delta_1[, \ldots,]x_s - \delta_s, x_s + \delta_s[, \ldots$ (см. задачи 345, 355 и 356). Ясно, что ни в одной точке ξ интервала $]a, b[$, отличной от точек $x_1, \ldots, x_s, \ldots$, колебание не может превзойти числа $\frac{1}{n}$, так как любая такая точка ξ является внутренней либо для некоторого интервала $]x_i - \delta_i, x_i[$, либо для некоторого интервала $]x_i, x_i + \delta_i[$. Следовательно, $E_n \subset$

$\subset \{x_1, \ldots, x_s, \ldots\}$, и, значит, E_n не более чем счетно. Но тогда и множество всех точек разрыва $E = \bigcup_n E_n$ не более чем счетно.

630. Пусть $r_1, r_2, r_3, \ldots$ — все рациональные точки числовой прямой $\boldsymbol{R}^1$, занумерованные каким-либо способом; построим функцию $f(x)$ следующим образом: для любого $x \in \boldsymbol{R}^1$ положим

$$f(x) = \sum_{r_k < x} \frac{1}{2^k},$$

где суммирование производится по всем номерам k таким, что $r_k < x$. Эта функция определена для всех x, так как ряд $\sum\limits_{r_k<x} \frac{1}{2^k}$ всегда сходится; она строго возрастает, так как для любых чисел $x_1 < x_2$ найдется рациональное число r_{k_0} такое, что $x_1 < r_{k_0} < x_2$, откуда $f(x_2) \geqslant f(x_1) + \frac{1}{2^{k_0}} > f(x_1)$. Эта функция разрывна в каждой рациональной точке r_n; действительно, для любого $x > r_n$

$$f(x) = \sum_{r_k<x} \frac{1}{2^k} = \sum_{r_k<r_n} \frac{1}{2^k} + \sum_{r_n \leqslant r_k \leqslant x} \frac{1}{2^k} >$$
$$> \sum_{r_k<r_n} \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^n} = f(r_n) + \frac{1}{2^n};$$

переходя в этом неравенстве к пределу при $x \to r_n + 0$, получим: $f(r_n + 0) \geqslant f(r_n) + \frac{1}{2^n}$. Значит, в каждой точке r_n функция $f(x)$ разрывна справа и ее правый скачок $f(r_n + 0) - f(r_n)$ больше или равен $\frac{1}{2^n}$.

Докажем, что функция $f(x)$ не имеет разрывов в других точках и что в рациональных точках r_n скачки равны в точности $\frac{1}{2^n}$. Это вытекает из следующих соображений: для м о н о т о н н о в о з р а с т а ю щ е й функции разность между ее верхней и ее нижней гранью больше или равна сумме s всех скачков; но $\sup\limits_{x \in \boldsymbol{R}^1} f(x) = \sum\limits_k \frac{1}{2^k} = 1$, $\inf\limits_{x \in \boldsymbol{R}^1} f(x) = 0$; следовательно, $s \leqslant 1$. С другой стороны, сумма всех скачков больше или равна сумме правых скачков в точках r_n; поэтому $s \geqslant \sum\limits_n \frac{1}{2^n} = 1$. Сравнивая это с полученным выше неравенством, находим, что $s = 1$. Следовательно, правые скачки в точках r_n исчерпывают все возможные скачки функции (т. е. в остальных точках функция непрерывна); при этом в самих точках r_n скачки равны в точности $\frac{1}{2^n}$ (в противном случае было бы $s > 1$).

631. Эта задача является обобщением предыдущей; построение такой функции проводится так же, как в предыдущей задаче.

632. Возрастание функции $\tau(x)$ на отрезке $[0, 1]$ вытекает из самого построения функции. Чтобы доказать, что $\tau(x)$ непрерывна на $[0, 1]$, достаточно заметить, что если бы она была разрывна в какой-то точке $x_0 \in [0, 1]$, то (в силу монотонности функции) хотя бы один из интервалов $]\tau(x_0 - 0), \tau(x_0)[$, $]\tau(x_0), \tau(x_0 + 0)[$ не содержал бы ни одного значения функции. Однако это невозможно, так как значениями функции являются, в частности, все двоично рациональные числа отрезка $[0, 1]$, а они расположены всюду плотно на этом отрезке.

633. Может. В качестве примера такой функции можно взять функцию Кантора $\tau(x)$, построенную в предыдущей задаче. Она монотонна и непрерывна всюду на отрезке $[0, 1]$ и отлична от постоянной; вместе с тем ее производная $\tau'(x)$ существует всюду на $\mathbf{C}D$ и во всех точках множества $\mathbf{C}D$ она равна нулю. Следовательно, $\tau'(x) = 0$ почти всюду на $[0, 1]$ (так как $m\,\mathbf{C}D = 1$).

634. Пусть $f(x)$ возрастает на $]a, b[$, непрерывна и ограничена на этом интервале. Доопределим ее на концах интервала, положив $f(a) = f(a + 0)$, $f(b) = f(b - 0)$ (пределы функции $f(x)$ при $x \to a + 0$ и при $x \to b - 0$ существуют, так как эта функция монотонна и ограничена на $]a, b[$). Теперь функция определена и непрерывна на всем отрезке $[a, b]$, в том числе также в точках a и b. Но тогда она равномерно непрерывна на $[a, b]$ (см. задачу 540), а значит, и на любом подмножестве отрезка $[a, b]$, в частности на интервале $]a, b[$. В случае, когда $f(x)$ убывает на $]a, b[$, доказательство аналогично.

635. Справедливо. Если функция $f(x)$ ограничена и монотонна на $]-\infty, +\infty[$, то она имеет конечные пределы $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Но тогда равномерная непрерывность функции на всей прямой $]-\infty, +\infty[$ доказывается тем же методом, которым мы решали задачу 545.

636. Разделим отрезок $[0, 1]$ точками

$$0 = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = 1$$

так, чтобы на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ колебание функции $f(x)$ было меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Далее, на каждом отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ определим функцию $\varphi(x)$ так, чтобы выполнялись условия:

$$\varphi(x_{k-1}) = f(x_{k-1}),\ \varphi(x_k) = f(x_k);$$

$\varphi(x)$ монотонна и непрерывна на $[x_{k-1}, x_k]$, $\varphi'(x) = 0$ почти всюду на $[x_{k-1}, x_k]$.

Функцию, удовлетворяющую этим условиям, можно построить так же, как строилась функция Кантора в задаче 632.

Построенная таким способом функция $\varphi(x)$ определена и непрерывна на всем отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяет условиям а) и б).

Нетрудно также проверить, что для любого $x \in [0, 1]$ она удовлетворяет неравенству $|f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$.

637. Построим непрерывную функцию $\varphi(x)$, равную нулю на множестве E и положительную вне его (например, $\varphi(x) = d(x, E)$, см. задачу 519). Далее обозначим $f(x) = \int\limits_a^x \varphi(t)\,dt$. Тогда $f'(x) = \varphi(x)$ для всех $x \in [a, b]$; в частности, $f'(x) = 0$ для всех $x \in E$. Кроме того, $f(x)$ является строго возрастающей функцией; для проверки этого возьмем две точки x_1 и x_2 ($a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$) и найдем между этими точками отрезок $[\alpha, \beta]$, свободный от точек множества E. Тогда

$$f(x_2) - f(x_1) = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(t)\,dt \geqslant \int\limits_{\alpha}^{\beta} \varphi(t)\,dt = \varphi(c)(\beta - \alpha),$$

где $c \in [\alpha, \beta]$; так как $c \overline{\in} E$, то $\varphi(c) > 0$; следовательно, $f(x_2) > f(x_1)$.

638. Нет. Пусть $]\alpha, \beta[$ — интервал, целиком содержащийся в E (если E замкнуто и не является нигде не плотным, то такой интервал наверняка найдется. Если для некоторой функции $f(x)$ ее производная равна нулю всюду на E, то, в частности, $f'(x) = 0$ всюду на интервале $]\alpha, \beta[$, и, значит, на этом интервале функция $f(x)$ постоянна. Следовательно, она не может быть строго монотонной на $[a, b]$.

639. Сначала докажем, что $f(0) = 0$; действительно, $f(0 + 0) = f(0) + f(0) = 2f(0)$, т. е. $f(0) = f(0)$, откуда $f(0) = 0$.

Далее, для любого целого $k > 0$ имеет место $f(kx) = k \cdot f(x)$; поэтому $f(1) = f\left(k \cdot \frac{1}{k}\right) = k \cdot f\left(\frac{1}{k}\right)$, откуда $f\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{f(1)}{k} = \frac{a}{k}$, где $a = f(1)$. Наконец, $f\left(\frac{p}{q}\right) = p \cdot f\left(\frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{a}{q} = a \cdot \frac{p}{q}$, т. е. $f(x) = ax$ для любого *рационального* $x > 0$.

Пусть теперь x — положительное иррациональное число; построим возрастающую последовательность рациональных чисел $r_1 < r_2 < r_3 < \ldots$, сходящуюся к x, и убывающую последовательность рациональных чисел $r_1' > r_2' > r_3' > \ldots$, также сходящуюся к x. Тогда, в силу монотонности $f(x)$, $f(r_k) \leqslant f(x) \leqslant f(r_k')$ для любого k, т. е. $ar_k \leqslant f(x) \leqslant ar_k'$. Устремляя теперь k к бесконечности, получим: $ax \leqslant f(x) \leqslant ax$, откуда $f(x) = ax$. Значит, $f(x) = ax$ при любых положительных x (как рациональных, так и иррациональных).

Наконец, если $x < 0$, то $f(x) + f(-x) = f(0)$, т. е. $f(x) = f(0) - f(-x) = -f(-x)$; но в этом случае $-x > 0$; поэтому $f(-x) = a \cdot (-x)$. Следовательно,

$$f(x) = -f(-x) = -a(-x) = ax.$$

Итак, $f(x) = ax$ для *всех* x.

640. Вариация этой функции равна $|k| \cdot A$.

641. Вариация функции равна 7. В этом убеждаемся следующим образом: разобьем отрезок $[0, 1]$ точками $0 = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1} < x_n = 1$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f(x_1) - f(x_0)| + (|f(x_2) - f(x_1)| + \ldots +$$
$$+ |f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})|) + |f(x_n) - f(x_{n-1})| = (1 - x_1) + (x_{n-1} - x_1) +$$
$$+ (5 - (1 - x_{n-1})) = 5 + 2(x_{n-1} - x_1) < 7.$$

При этом $\sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|$ может быть сделана сколько угодно близкой к числу 7. Поэтому $\sup \sum\limits_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = 7$, т. е. вариация функции $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ равна 7.

642. Вариация функции равна 23.

643. Для этого следует положить $f(1) = a$, где a — какое угодно число, заключенное между $f(1-0)$ и $f(1+0)$ (т. е. $0 \leqslant a \leqslant 1$). В этом случае вариация функции на $[0, 2]$ будет равна 5.

644. Эта функция непрерывна и имеет производную во всех точках отрезка $[0, 1]$:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \cdot \cos\dfrac{\pi}{x} + \pi \sin\dfrac{\pi}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

На участке $[0, 1]$ производная ограничена:

$$|f'(x)| = \left|2x\cos\frac{\pi}{x} + \pi\sin\frac{\pi}{x}\right| \leqslant \left|2x\cos\frac{\pi}{x}\right| + \left|\pi\sin\frac{\pi}{x}\right| \leqslant 2 + \pi.$$

А непрерывная функция с ограниченной производной является функцией ограниченной вариации (см. ниже, задача 648).

645. Пусть k — произвольное натуральное число. Разобьем отрезок $\left[0, \dfrac{2}{\pi}\right]$ точками

$$0 < \frac{2}{\pi(2k+1)} < \frac{2}{\pi(2k-1)} < \ldots < \frac{2}{3\pi} < \frac{2}{\pi}$$

на $k+1$ отрезок и составим сумму σ_k модулей приращений функции на этих отрезках:

$$\sigma_k = \left(\frac{2}{\pi(2k+1)} - 0\right) + \left(\frac{2}{\pi(2k+1)} + \frac{2}{\pi(2k-1)}\right) +$$
$$+ \left(\frac{2}{\pi(2k-1)} + \frac{2}{\pi(2k-3)}\right) + \ldots + \left(\frac{2}{5\pi} + \frac{2}{3\pi}\right) + \left(\frac{2}{3\pi} + \frac{2}{\pi}\right) =$$
$$= \frac{2}{\pi}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{7} + \ldots + \frac{2}{2k+1}\right).$$

В квадратных скобках стоит k-я частная сумма расходящегося ряда $1 + \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{7} + \ldots + \dfrac{2}{2k+1} + \ldots$; при достаточно большом

k эта сумма делается сколь угодно большой. Следовательно, для любого $A > 0$ можно найти такое число k (и, следовательно, такое разбиение отрезка $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$), что $\sigma_k > A$. Но это означает, что сумма σ_k модулей приращений функции может быть сделана сколь угодно большой, т. е. что функция $f(x)$ имеет неограниченную вариацию на отрезке $\left[0, \frac{2}{\pi}\right]$.

646. Допустим, что $F(x) = f(ax+b)$ имеет неограниченную вариацию на отрезке $\left[-\frac{b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]$. Тогда для любого натурального числа N можно найти такое разбиение отрезка $\left[-\frac{b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]$ точками $-\frac{b}{a} = \zeta_0 < \zeta_1 < \ldots < \zeta_{n-1} < \zeta_n = \frac{1-b}{a}$, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |F(\zeta_k) - F(\zeta_{k-1})| > N$. Разобьем теперь отрезок $[0, 1]$ точками $\eta_k = a\zeta_k + b$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\eta_k) - f(\eta_{k-1})| = \sum_{k=1}^{n} |f(a\zeta_k + b) - f(a\zeta_{k-1} + b)| =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |F(\zeta_k) - F(\zeta_{k-1})| > N. \qquad (1)$$

Итак, если бы функция $F(x)$ имела неограниченную вариацию на $\left[-\frac{b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]$, то $f(x)$ также имела бы неограниченную вариацию на $[0, 1]$. Следовательно, функция $F(x)$ имеет ограниченную вариацию на $\left[-\frac{b}{a}, \frac{1-b}{a}\right]$.

Переходя теперь к верхним граням в равенстве (1), убеждаемся, что $\overset{1}{\underset{0}{V}} f = \overset{\frac{1-b}{a}}{\underset{-\frac{b}{a}}{V}} F$.

647. Решение этой задачи аналогично предыдущей.

648. Пусть $|f'(x)| \leqslant A$ всюду на $[a, b]$; тогда при любом разбиении отрезка $[a, b]$ точками

$$a = \zeta_0 < \zeta_1 < \ldots < \zeta_{n-1} < \zeta_n = b$$

имеем, в силу формулы Лагранжа:

$$|f(\zeta_k) - f(\zeta_{k-1})| = |f'(\tau_k)(\zeta_k - \zeta_{k-1})| \leqslant A \cdot |\zeta_k - \zeta_{k-1}|$$

(здесь τ_k — некоторая точка, лежащая между ζ_{k-1} и ζ_k). Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k) - f(\zeta_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} A |\zeta_k - \zeta_{k-1}| =$$

$$= A \sum_{k=1}^{n} |\zeta_k - \zeta_{k-1}| = A(b-a).$$

Итак, при любом разбиении отрезка $[a, b]$ сумма модулей приращений не превосходит числа $A(b-a)$. Значит, функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$.

649. Если E имеет лишь конечное число граничных точек, то $\chi_E(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, — это утверждение тривиально. Если же E имеет бесконечное множество граничных точек, то $\chi_E(x)$ имеет неограниченную вариацию на отрезке $[a, b]$. Докажем это. Зададим произвольное натуральное число N и из множества всех граничных точек, лежащих внутри $]a, b[$, выберем N точек, расположив их в порядке возрастания:

$$a < x_1 < x_2 < \ldots < x_N < b.$$

Около этих точек построим попарно не пересекающиеся окрестности $V(x_1)$, $V(x_2)$, $\ldots$, $V(x_N)$ и в каждой из этих окрестностей возьмем по две точки ζ_i и η_i такие, что $\zeta_i \in E$, $\eta_i \,\overline{\in}\, E$. Тогда

$$\mathop{\mathrm{V}}_a^b \chi_E \geqslant \sum_{i=1}^{N} |\chi_E(\eta_i) - \chi_E(\zeta_i)| = N$$

Итак, вариация функции $\chi_E(x)$ на отрезке $[a, b]$ больше любого наперед заданного натурального числа N; следовательно, она равна бесконечности.

650. Не обязательно. Пример. Пусть

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{k} \sin k\pi (x(k+1) - 1) & \text{на отрезке } \left[\frac{1}{k+1}, \frac{1}{k}\right], \\ 0 & \text{вне этого отрезка.} \end{cases}$$

Ряд $\sum\limits_k f_k(x)$ равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$; каждая из функций $f_k(x)$ имеет ограниченную вариацию на этом отрезке, однако сумма ряда представляет собой функцию неограниченной вариации на $[0, 1]$.

651. Пусть $|f(x) - f(y)| \leqslant A|x - y|$ для всех $x \in [a, b]$, $y \in [a, b]$. Тогда для любого разбиения $a = \zeta_0 < \zeta_1 < \ldots < \zeta_{n-1} < \zeta_n = b$ отрезка $[a, b]$ имеет место

$$\sum_{k=1}^{n} |f(\zeta_k) - f(\zeta_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} A|\zeta_k - \zeta_{k-1}| = A(b-a).$$

Следовательно, функция $f(x)$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$.

652. Возьмем две произвольные точки ζ и η $(\zeta < \eta)$ отрезка $[a, b]$ и разделим отрезок $[\zeta, \eta]$ на n равных частей, где n — произвольное натуральное число:

$$\zeta = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = \eta, \quad x_i - x_{i-1} = \frac{\eta - \zeta}{n}.$$

Тогда

$$|f(\eta)-f(\zeta)|=|f(x_n)-f(x_0)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\leqslant$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}A|x_i-x_{i-1}|^{\alpha}=\sum_{i=1}^{n}A\left|\frac{\eta-\zeta}{n}\right|^{\alpha}=A\left|\frac{\eta-\zeta}{n}\right|^{\alpha}\cdot n=\frac{A|\eta-\zeta|^{\alpha}}{n^{\alpha-1}},$$

где A — константа Гёльдера. Неравенство $|f(\eta)-f(\zeta)|\leqslant\frac{A|\eta-\zeta|^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}$ справедливо при любом натуральном числе n. Переходя к пределу при $n\to+\infty$ и учитывая, что $\alpha>1$ (и потому $\alpha-1>0$), получим:

$$|f(\eta)-f(\zeta)|\leqslant\lim_{n\to+\infty}\frac{A|\eta-\zeta|^{\alpha}}{n^{\alpha-1}}=0,$$

откуда $f(\zeta)=f(\eta)$. Итак, значения функции одинаковы для любых двух точек отрезка $[a, b]$, т. е. функция $f(x)$ постоянна на этом отрезке.

653. Пусть $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant A|x_1-x_2|^{\alpha}$ для любых $x_1\in[a, b]$, $x_2\in[a, b]$. Пусть $\beta<\alpha$. Тогда

$$|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant A|x_1-x_2|^{\alpha}=A\cdot|x_1-x_2|^{\alpha-\beta}\cdot|x_1-x_2|^{\beta}\leqslant$$
$$\leqslant A\cdot(b-a)^{\alpha-\beta}\cdot|x_1-x_2|^{\beta}.$$

Итак, для любых двух точек x_1, x_2 отрезка $[a, b]$ выполняется неравенство $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant B|x_1-x_2|^{\beta}$, где $B=A(b-a)^{\alpha-\beta}$. Следовательно, функция $f(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка β.

654. Пусть $|f(x_1)-f(x_2)|\leqslant A|x_1-x_2|^{\alpha}$ для любых $x_1, x_2\in\in[a, b]$. Будем считать для определенности, что $m>0$. Возьмем два произвольных числа $\zeta, \eta\in\left[\frac{a-n}{m}, \frac{b-n}{m}\right]$ и оценим разность $F(\zeta)-F(\eta)$:

$$|F(\zeta)-F(\eta)=|K|\cdot|f(m\zeta+n)-f(m\eta+n)|\leqslant$$
$$\leqslant|K|\cdot A\cdot|m\zeta-m\eta|^{\alpha}=|K|\cdot Am^{\alpha}\cdot|\zeta-\eta|^{\alpha}$$

(заметим, что если ζ и η принадлежат отрезку $\left[\frac{a-n}{m}, \frac{b-n}{m}\right]$, то $m\zeta+n$ и $m\eta+n$ принадлежат отрезку $[a, b]$; поэтому мы имели право применить неравенство Гёльдера к разности $f(m\zeta+n)-f(m+ +n)$). Итак, $F(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера порядка α на соответствующем отрезке с константой $|K|Am^{\alpha}$ (если $m<0$, то с константой $|K|\cdot A\cdot|m|^{\alpha}$).

655. Пример. Функция

$$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{\ln x} & \text{при } x\in\left]0, \dfrac{1}{2}\right],\\ 0 & \text{при } x=0\end{cases}$$

непрерывна на отрезке $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ и строго возрастает на этом отрезке, а следовательно, имеет на нем ограниченную вариацию. Докажем, что эта функция не удовлетворяет условию Гёльдера ни при каком $\alpha > 0$. Пусть α — какое-либо число, заключенное между нулем и единицей. Покажем, что для любого $A > 0$ найдутся две точки x_1, $x_2 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ такие, что $|f(x_2) - f(x_1)| > A\,|x_2 - x_1|^\alpha$. В качестве x_1 возьмем точку $x_1 = 0$; для того чтобы подобрать x_2 проверим, что $\frac{|f(x) - f(0)|}{|x-0|^\alpha} \to +\infty$ при $x \to 0$; действительно, применяя правило Лопиталя, находим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{|f(x)-f(0)|}{|x-0|^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{\ln x}}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0}\frac{-x^{-\alpha}}{\ln x} = \lim_{x\to 0}\alpha x^{-\alpha} = +\infty.$$

Но тогда для любого $A > 0$ можно подобрать такое x_2, что $\frac{|f(x_2)-f(0)|}{|x_2-0|^\alpha} > A$, откуда $|f(x_2) - f(0)| > A\,|x_2 - 0|^\alpha$. Следовательно, $f(x)$ не удовлетворяет условию Гёльдера при $0 < \alpha < 1$, а значит, в силу результата задачи 653 и при любом $\alpha > 0$.

656. Пусть $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ — произвольный сходящийся ряд с убывающими положительными членами; пусть его сумма равна s. Построим на $[0, s]$ функцию $f(x)$ следующим образом:

$f(x) = 0$ в точках $x = 0,\ a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ \ldots;$

$f(x) = \frac{1}{n}$ в точках $x = a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$;

$f(s) = 0$;

$f(x)$ линейна на каждом отрезке вида $\left[a_1 + \ldots + a_{n-1},\ a_1 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}\right]$ и на каждом отрезке вида $\left[a_1 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2},\ a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n\right]$ (в частности, на отрезках $\left[0, \frac{a_1}{2}\right]$, $\left[\frac{a_1}{2}, a_1\right]$); схематический график этой функции см. на рисунке 38. Эта функция непрерывна на отрезке $[0,s]$ и имеет на нем неограниченную вариацию, каков бы ни был исходный ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ Чтобы убедиться в последнем, разобьем отрезок $[0, s]$ точками

$\frac{a_1}{2},\ a_1,\ a_1 + \frac{a_2}{2},\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + \frac{a_3}{2},\ \ldots,\ a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k,$

где k — произвольно взятое натуральное число; вычислим сумму σ_k модулей приращений функции для этого разбиения:

$$\sigma_k = \left|f\left(\frac{a_1}{2}\right) - f(0)\right| + \left|f(a_1) - f\left(\frac{a_1}{2}\right)\right| + \left|f\left(a_1 + \frac{a_2}{2}\right) - f(a_1)\right| + \ldots$$
$$\ldots + \left|f(a_1 + \ldots + a_k) - f\left(a_1 + \ldots + a_{k-1} + \frac{a_k}{2}\right)\right| +$$

$$+|f(s)-f(a_1+\ldots+a_k)|=1+$$
$$+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k}=2\Big(1+\frac{1}{2}+$$
$$+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{k}\Big).$$

Отсюда видно, что, выбрав достаточно большое k, можно сделать сумму σ_k сколь угодно большой. Следовательно,

$$\overset{s}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f=+\infty.$$

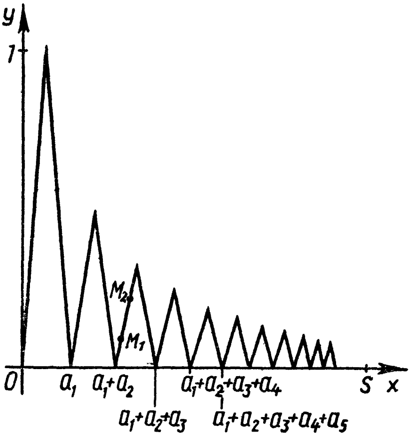


Рис. 38

Подберем теперь ряд $a_1+a_2+ + \ldots + a_n + \ldots$ так, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условию Гёльдера заданного порядка α. Пусть $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ — две точки графика функции $f(x)$, принадлежащие одному и тому же прямолинейному отрезку графика (см. рис. 38). Если, например,

$a_1+\ldots+a_{n-1}\leqslant x_1<x_2\leqslant a_1+\ldots+a_{n-1}+\dfrac{a_n}{2}$, то $|y_2-y_1|=$ $=K|x_2-x_1|$, где $K=\dfrac{\frac{1}{n}}{\frac{a_n}{2}}=\dfrac{2}{na_n}$. Следовательно, в этом случае

$$|y_2-y_1|=\frac{2}{na_n}|x_2-x_1|=\frac{2|x_2-x_1|^{1-\alpha}}{na_n}|x_2-x_1|^{\alpha}<$$
$$<\frac{2a_n^{1-\alpha}}{na_n}|x_2-x_1|^{\alpha}=\frac{2}{na_n^{\alpha}}|x_2-x_1|^{\alpha}.$$

То же самое верно и для случая, когда

$$a_1+\ldots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}\leqslant x_1<x_2\leqslant a_1+\ldots+a_n.$$

Возьмем в качестве $\{a_n\}$ последовательность $\left\{\dfrac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}\right\}$; это можно сделать, так как $\dfrac{1}{\alpha}>1$ и, следовательно, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{\alpha}}}$ — сходящийся ряд с убывающими положительными членами. Тогда $\dfrac{2}{na_n^{\alpha}}=\dfrac{2}{n\cdot\frac{1}{n}}=$

$= 2$; поэтому, согласно предыдущему, для любых двух точек x_1 и x_2, для которых соответствующие точки графика принадлежат одному и тому же прямолинейному отрезку графика, имеет место

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant 2|x_2 - x_1|^\alpha.$$

Пусть теперь x_1 и x_2 — два числа на отрезке $[0, s]$, для которых соответствующие точки графика M_1 и M_2 не лежат на одном и том же прямолинейном отрезке, причем $x_1 < x_2$. Тогда найдутся точки $M_1'(x_1', f(x_1))$ и $M_2'(x_2', f(x_2))$, лежащие на одном прямолинейном отрезке графика, у которых ординаты совпадают с ординатами точек M_1 и M_2, а абсциссы удовлетворяют неравенствам:

$$x_1 \leqslant x_1' \leqslant x_2' \leqslant x_2. \tag{1}$$

Действительно, точки M_1 и M_2 расположены на боковых сторонах некоторых равнобедренных треугольников G_1 и G_2, каждый из которых образован двумя соседними прямолинейными отрезками графика и отрезком оси Ox (в частности, G_1 и G_2 могут совпадать). Если $f(x_1) \geqslant f(x_2)$, то в качестве M_1' и M_2' берем точки, расположенные на правой стороне треугольника G_1 и имеющие те же ординаты, что и точки M_1, M_2 соответственно (рис. 39, *а*).

Если же $f(x_1) < f(x_2)$, то берем в качестве M_1' и M_2' точки, расположенные на левой стороне треугольника G_2 и имеющие те же ординаты, что и точки M_1, M_2 соответственно (рис. 39, *б*).

Легко видеть, что в каждом из этих случаев абсциссы точек удовлетворяют неравенствам (1). Так как точки M_1' и M_2' лежат на одном прямолинейном отрезке графика, то, согласно предыдущему,

$$|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant 2|x_2' - x_1'|^\alpha \leqslant 2|x_2 - x_1|^\alpha.$$

Итак, неравенство $|f(x_2) - f(x_1)| \leqslant 2|x_2 - x_1|^\alpha$ выполняется для любых двух чисел x_1, x_2 отрезка $[0, s]$; значит, функция $f(x)$ удовлетворяет на этом отрезке условию Гёльдера порядка α.

Заметим, что $f(x)$ не удовлетворяет на отрезке $[0, s]$ условию

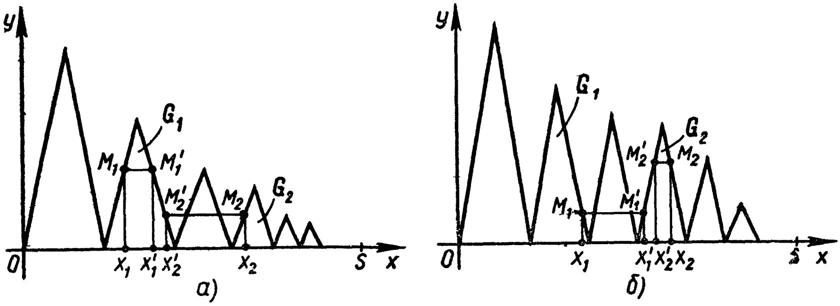


Рис. 39

Гёльдера порядка β ни для какого $\beta > \alpha$. Это следует из того, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|f(b_n) - f(c_n)|}{|b_n - c_n|^{\beta}} = \infty,$$

где $b_n = a_1 + \ldots + a_{n-1} + a_n$, $c_n = a_1 + \ldots + a_{n-1} + \frac{a_n}{2}$; действительно,

$$\frac{|f(b_n) - f(c_n)|}{|b_n - c_n|^{\beta}} = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{a_n}{2}\right)^{\beta}} = \frac{\frac{1}{n}}{\left(\frac{1}{2n^{\frac{1}{\alpha}}}\right)^{\beta}} = 2^{\beta}\cdot n^{\frac{\beta}{\alpha}-1},$$

а последнее выражение стремится к бесконечности при $n \to \infty$.

657. Обозначим через $\varphi_{\alpha}(x)$ функцию $f(x)$, построенную в решении предыдущей задачи для заданного числа α. Она удовлетворяет условию Гёльдера порядка α, но не удовлетворяет условию Гёльдера порядка β ни для какого $\beta > \alpha$. Обозначим, кроме того, через σ_n сумму ряда $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^n}$.

Построим теперь искомую функцию $f(x)$. Для этого нанесем на отрезок $[0, 1]$ последовательность точек ξ_2, ξ_3, ξ_4, ...,

$$0 = \xi_2 < \xi_3 < \xi_4 < \ldots < \xi_n < \ldots,$$

где $\xi_n \to 1$ при $n \to \infty$, и на каждом отрезке $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ зададим $f(x)$ следующим образом:

а) если n четное, то полагаем $f(x) = \frac{1}{n}\varphi_{\frac{1}{n}}\left(\frac{\sigma_n \cdot (x - \xi_n)}{\xi_{n+1} - \xi_n}\right)$ (график этой функции получается из графика $\varphi_{\frac{1}{n}}$ сжатием в n раз по оси ординат, сжатием в отношении $\frac{\sigma_n}{\xi_{n+1} - \xi_n}$ по оси абсцисс и переносом вдоль оси абсцисс вправо на величину ξ_n).

б) если n нечетное, то полагаем $f(x) = \frac{1}{n}\varphi_{\frac{1}{n}}\left(\frac{\sigma_n \cdot (\xi_{n+1} - x)}{\xi_{n+1} - \xi_n}\right)$ (график этой функции получается аналогично графику предыдущей с добавлением зеркального отражения от вертикальной прямой).

Таким образом, функция $f(x)$ определена всюду на $[0, 1[$; доопределив ее в точке $x = 1$ равенством $f(1) = 0$, мы получим функцию $f(x)$, определенную и непрерывную всюду на отрезке $[0, 1]$. Функция $f(x)$ имеет неограниченную вариацию на этом отрезке и даже на отрезках $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ (схематический график этой функции см. на рисунке 40).

Функция $f(x)$ на отрезке $[\xi_n, \xi_{n+1}]$ не удовлетворяет условию Гёльдера порядка $\frac{1}{n-1}$ (хотя она удовлетворяет на нем условию

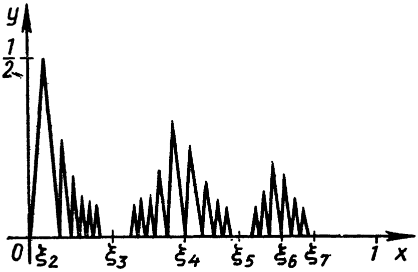


Рис. 40

Гёльдера порядка $\frac{1}{n}$); следовательно, на всем отрезке $[0, 1]$ она не удовлетворяет условию Гёльдера ни для какого $\alpha > 0$.

658. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} |(f(x_i) + g(x_i)) - (f(x_{i-1}) + g(x_{i-1}))| = \sum_{i=1}^{n} |(f(x_i) - f(x_{i-1})) + (g(x_i) - g(x_{i-1}))| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |g(x_i) - g(x_{i-1})| \leqslant \mathop{\mathrm{V}}_a^b f + \mathop{\mathrm{V}}_a^b g;$$

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) g(x_i) - f(x_{i-1}) g(x_{i-1})| =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)(g(x_i) - g(x_{i-1})) + (f(x_i) - f(x_{i-1})) g(x_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \cdot |g(x_i) - g(x_{i-1})| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| \cdot |g(x_{i-1})| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{x \in [a, b]} |f(x)| \cdot \mathop{\mathrm{V}}_a^b g + \sup_{x \in [a, b]} |g(x)| \cdot \mathop{\mathrm{V}}_a^b f.$$

Таким образом, суммы, стоящие в левых частях, ограничены для всевозможных разбиений отрезка $[a, b]$ числами, стоящими в правых частях этих неравенств, т. е. функции $f(x) + g(x)$ и $f(x) \times g(x)$ имеют ограниченную вариацию на $[a, b]$. Переходя к верхним граням этих сумм по всевозможным разбиениям отрезка $[a, b]$, получаем указанные неравенства для $\mathop{\mathrm{V}}_a^b (f + g)$ и $\mathop{\mathrm{V}}_a^b (f \cdot g)$.

659. Рассмотрим произвольное разбиение отрезка $[a, b]$

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

и оценим сумму модулей приращений функции $\frac{1}{f(x)}$ для выбранного разбиения:

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{1}{f(x_i)} - \frac{1}{f(x_{i-1})} \right| = \sum_{i=1}^{n} \frac{|f(x_i) - f(x_{i-1})|}{|f(x_i)| \cdot |f(x_{i-1})|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|}{c^2},$$

так как $|f(x_i)| \geqslant c$, $|f(x_{i-1})| \geqslant c$. Неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{1}{f(x_i)}-\frac{1}{f(x_{i-1})}\right| \leqslant \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|$$

справедливо для любых разбиений отрезка $[a, b]$. Беря верхнюю грань (по всевозможным разбиениям) от правой и левой частей этого неравенства, получим:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\frac{1}{f} \leqslant \frac{1}{c^2}\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f,$$

откуда следует ограниченность вариации функции $\dfrac{1}{f(x)}$.

660. Для произвольных разбиений $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{r-1} < x_r = c$ и $c = x_r < x_{r+1} < \ldots < x_{r+s-1} < x_{r+s} = b$ отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ имеем:

$$\sum_{i=1}^{r}|f(x_i)-f(x_{i-1})| + \sum_{i=r+1}^{r+s}|f(x_i)-f(x_{i-1})| =$$
$$= \sum_{i=1}^{r+s}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f.$$

Переходя в левой части к верхним граням по всем разбиениям отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$, получаем:

$$\overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f.$$

Чтобы получить теперь неравенство противоположного знака, рассмотрим произвольное разбиение $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ отрезка $[a, b]$. Тогда точка c попадет в один из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$; пусть, например, $c \in [x_{r-1}, x_r]$.
Так как

$$|f(x_r)-f(x_{r-1})| = |(f(x_r)-f(c)) + (f(c)-f(x_{r-1}))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_r)-f(c)| + |f(c)-f(x_{r-1})|,$$

то будем в этом случае иметь:

$$\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{r-1}|f(x_i)-f(x_{i-1})| + \right.$$
$$\left. + |f(c)-f(x_{r-1})|\right) + \left(|f(x_r)-f(c)| + \sum_{i=r+1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|\right) \leqslant$$
$$\leqslant \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f.$$

Переходя в левой части к верхней грани по всем разбиениям отрезка $[a, b]$, получим неравенство

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f \leqslant \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f.$$

Из двух найденных неравенств вытекает искомое равенство:

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \overset{c}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f + \overset{b}{\underset{c}{\mathrm{V}}} f.$$

661. а) Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть функция $F(x)$ непрерывна в точке x_0; докажем непрерывность функции $f(x)$ в точке x_0. Пусть $h > 0$; тогда

$$|f(x_0+h) - f(x_0)| \leqslant \overset{x_0+h}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f;$$

но, в силу результата предыдущей задачи,

$$\overset{x_0+h}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f = \overset{x_0+h}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \overset{x_0}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = F(x_0+h) - F(x_0).$$

Значит, $|f(x_0+h) - f(x_0)| \leqslant F(x_0+h) - F(x_0)$. В силу непрерывности функции $F(x)$ в точке x_0, отсюда следует, что $f(x_0+h) - f(x_0) \to 0$ при $h \to +0$, т. е. функция $f(x)$ непрерывна справа в точке x_0. Аналогично доказывается, что $f(x)$ непрерывна слева в точке x_0.

б) Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \in [a, b[$. Докажем непрерывность справа функции $F(x)$ в этой точке. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и докажем, что найдется $h > 0$ такое, что $|F(\xi) - F(x_0)| < \varepsilon$ при $x_0 < \xi < x_0 + h$. Для этого построим такое разбиение отрезка $[x_0, b]$ точками $x_0 < x_1 < < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, при котором сумма модулей приращений функции $f(x)$ отличается от вариации $\overset{b}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f$ меньше чем на $\frac{\varepsilon}{2}$; при этом всегда можно считать точку x_1 столь близкой к x_0, что $|f(x_1) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ (если бы точка x_1 не удовлетворяла этому условию, мы бы добавили к точкам деления отрезка еще одну точку, достаточно близкую к x_0; добавление этой точки к точкам деления отрезка может только увеличить нашу сумму). Итак,

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| > \overset{b}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f - \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$\overset{b}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f < \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2} =$$

$$= |f(x_1) - f(x_0)| + \sum_{k=2}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| + \frac{\varepsilon}{2} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \overset{b}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}} f + \frac{\varepsilon}{2} = \overset{b}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}} f + \varepsilon.$$

Поэтому

$$\overset{b}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f - \overset{b}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}} f < \varepsilon,$$

т. е. $\overset{x_1}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f < \varepsilon$, откуда $\overset{x_1}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \overset{x_0}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f < \varepsilon$ (см. предыдущую задачу). Обозначив теперь $x_1 = x_0 + h$, получим:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) < \varepsilon.$$

Так как $F(x)$ — возрастающая функция, то для любого ξ, $x_0 < \xi < x_0 + h$, имеет место

$$|F(\xi) - F(x_0)| < \varepsilon,$$

откуда и следует непрерывность *справа* функции $F(x)$ в точке x_0.

Непрерывность *слева* в точке $x_0 \in]a, b]$ доказывается аналогично.

662. Пусть функция $F(t) = \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ имеет предел при $t \to +\infty$. Тогда, в силу критерия Коши существования предела функции, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $t_0 \in [a, +\infty[$ такое, что для любых t', t'', удовлетворяющих условиям $t'' > t' > t_0$, выполняется неравенство $|F(t'') - F(t')| < \varepsilon$, т. е. $|\overset{t''}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \overset{t'}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f| < \varepsilon$. Но $\overset{t''}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \overset{t'}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \overset{t''}{\underset{t'}{\mathrm{V}}} f$, и, значит, $\overset{t''}{\underset{t'}{\mathrm{V}}} f < \varepsilon$. Тогда и подавно $|f(t'') - f(t')| < \varepsilon$. Следовательно, для функции f также выполнен критерий Коши, т. е. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ существует.

Таким образом, если $\lim\limits_{t \to +\infty} \overset{t}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$ существует, то и $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ существует.

Обратное утверждение неверно. Пример. Пусть $f(x) = \frac{1}{x} \sin x$. Тогда

$$\overset{n\pi}{\underset{\pi}{\mathrm{V}}} f \geqslant \left| f\left(\frac{3\pi}{2}\right) - f(\pi) \right| + \left| f(2\pi) - f\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right| + \ldots +$$

$$+ \left| f(n\pi) - f\left(n\pi - \frac{\pi}{2}\right) \right| = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{2n-1}\right) \to +\infty$$

при $n \to +\infty$, так как ряд $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}$ расходится. Однако $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$ существует (этот предел равен нулю).

663. Первое утверждение является непосредственным следствием результата задачи 661.

Докажем первое из приведенных в задаче равенств. Существование предела $F(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} F(x)$ вытекает из монотонности функции $F(x)=\overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f$. Существование предела $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ доказывается так же, как в предыдущей задаче. Переходя теперь в неравенстве $|f(x_0+h)-f(x_0)|\leqslant F(x_0+h)-F(x_0)$ к пределу при $h\to+0$ (доказательство этого неравенства см. в решении задачи 661), получим:

$$|f(x_0+0)-f(x_0)|\leqslant F(x_0+0)-F(x_0). \tag{1}$$

Чтобы доказать неравенство противоположного знака, зададим произвольное $\varepsilon>0$ и для всякого отрезка $[x_0, x_0+h]\subset[a, b]$ построим такое его разбиение $x_0<x_1<\ldots<x_n=x_0+h$, что

$$\overset{x_0+h}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|+\varepsilon.$$

Тогда

$$|f(x_1)-f(x_0)|\geqslant\overset{x_0+h}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f-\sum_{i=2}^{n}|f(x_i)-f(x_{i-1})|-\varepsilon\geqslant$$

$$\geqslant\overset{x_0+h}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f-\overset{x_0+h}{\underset{x_1}{\mathrm{V}}} f-\varepsilon=\overset{x_1}{\underset{x_0}{\mathrm{V}}} f-\varepsilon=F(x_1)-F(x_0)-\varepsilon$$

(см. задачу 660). Так как $x_0<x_1\leqslant x_0+h$, то, переходя к пределу в неравенстве $|f(x_1)-f(x_0)|\geqslant F(x_1)-F(x_0)-\varepsilon$ при $h\to+0$, получим:

$$|f(x_0+0)-f(x_0)|\geqslant F(x_0+0)-F(x_0)-\varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon>0$, имеем: $|f(x_0+0)-f(x_0)|\geqslant F(x_0+0)-F(x_0)$. Сравнивая это неравенство с ранее доказанным неравенством (1), получим:

$$|f(x_0+0)-f(x_0)|=F(x_0+0)-F(x_0).$$

Второе приведенное в задаче равенство доказывается аналогично.

664. Проверим, что ρ удовлетворяет аксиомам метрики: 1) $\rho(f, f)=0$ для любого $f\in V(a, b)$. Если $\rho(f, g)=0$, то $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f-g)=0$ и $|f(a)-g(a)|=0$, откуда следует, что функция $f-g$ постоянна на отрезке $[a, b]$ и эта постоянная равна нулю, т. е. $f=g$; 2) $\rho(f, g)=\rho(g, f)$, так как $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f-g)=\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g-f)$; 3) $\rho(f, h)\leqslant\rho(f, g)+\rho(g, h)$,
так как

$$|f(a)-h(a)|\leqslant|f(a)-g(a)|+|g(a)-h(a)| \quad \text{и}$$

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f-h)\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f-g)+\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(g-h) \text{ (см. задачу 658).}$$

Докажем полноту пространства $V(a, b)$. Пусть $f_1, f_2, f_3, \ldots$ — произвольная фундаментальная последовательность из этого метрического пространства. Имеем при $m < n$ и $x \in [a, b]$:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))| +$$
$$+ |f_n(a) - f_m(a)| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f_n - f_m) + |f_n(a) - f_m(a)| =$$
$$= \rho(f_n, f_m).$$

Значит, для каждого $x \in [a, b]$ последовательность чисел $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \ldots$ тоже будет фундаментальной. Поэтому существует предел $\lim\limits_{m \to \infty} f_m(x)$, который мы обозначим через $f(x)$.

Покажем, что функция f принадлежит пространству $V(a, b)$, т. е. является функцией ограниченной вариации на $[a, b]$, и что $f_m \to f$ в смысле метрики этого пространства.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. Пусть N_1 — такое число, что при $m > N_1$, $n > N_1$ будет: $\rho(f_m, f_n) < \frac{\varepsilon}{4}$. Рассмотрим произвольное разбиение

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{s-1} < x_s = b$$

отрезка $[a, b]$. Пусть $n > N_1$ столь велико, что $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \frac{\varepsilon}{4s}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, s$. Тогда для произвольного $m > N_1$ будем иметь:

$$|(f(x_i) - f_m(x_i)) - (f(x_{i-1}) - f_m(x_{i-1}))| \leqslant$$
$$\leqslant |f(x_i) - f_n(x_i)| + |(f_n(x_i) - f_m(x_i)) - (f_n(x_{i-1}) -$$
$$- f_m(x_{i-1}))| + |f_n(x_{i-1}) - f(x_{i-1})| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{4s} + |(f_n(x_i) - f_m(x_i)) - (f_n(x_{i-1}) - f_m(x_{i-1}))| + \frac{\varepsilon}{4s}.$$

Значит,

$$\sum_{i=1}^{s} |(f(x_i) - f_m(x_i)) - (f(x_{i-1}) - f_m(x_{i-1}))| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{4} + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f_n - f_m) + \frac{\varepsilon}{4} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{3\varepsilon}{4}.$$

Так как это верно для всех разбиений отрезка $[a, b]$, то функция $f - f_m$ при $m > N_1$ есть функция ограниченной вариации на $[a, b]$, для которой $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f - f_m) \leqslant \frac{3\varepsilon}{4}$. Так как $f = (f - f_m) + f_m$, а $f_m \in V(a, b)$, то и f — функция ограниченной вариации на $[a, b]$ (см. задачу 658), т. е. $f \in V(a, b)$.

Пусть теперь N_2 таково, что при $m > N_2$ будет: $|f(a) - f_m(a)| < \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда при $m > N$, где $N = \max(N_1, N_2)$, будем иметь:

$$\rho(f, f_m) = |f(a) - f_m(a)| + \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}(f - f_m) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{3\varepsilon}{4} = \varepsilon;$$

в силу произвольности $\varepsilon > 0$, это означает, что $\lim\limits_{m\to\infty} f_m = f$ в смысле метрики пространства $V(a, b)$. Итак, каждая фундаментальная последовательность пространства $V(a, b)$ сходится в этом пространстве, т. е. $V(a, b)$ полно.

665. Доказательство можно провести аналогично тому, которое дано в решении предыдущей задачи.

Можно также выбрать из каждого класса $\widetilde{f}$ по одному элементу f, удовлетворяющему условию $f(a) = 0$. Тем самым мы отобразим пространство $\widetilde{V}(a, b)$ на некоторое подпространство $V_0(a, b)$ метрического пространства $V(a, b)$ из предыдущей задачи. При этом значение функции ρ_1 для любых двух элементов $\widetilde{f}, \widetilde{g}$ пространства $\widetilde{V}(a, b)$ будет равно расстоянию между их образами в $V_0(a, b)$. Следовательно, $\widetilde{V}(a, b)$ — метрическое пространство с метрикой ρ_1, изометричное $V_0(a, b)$. Так как $V_0(a, b)$ замкнуто в $V(a, b)$ и, значит, полно, то и $\widetilde{V}(a, b)$ — полное пространство.

666. Функция $f(x) = \cos^2 x$ представима в виде разности возрастающих функций следующим образом:

$$f(x) = \overset{x}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f - \varphi(x),$$

где $\varphi(x) = \overset{x}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f - f(x)$. Здесь

$$\overset{x}{\underset{0}{\mathrm{V}}} f = \begin{cases} 1 - \cos^2 x & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1 + \cos^2 x & \text{при } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right], \end{cases}$$

и, значит,

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1 - 2\cos^2 x & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 1 & \text{при } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

(см. рис. 41).

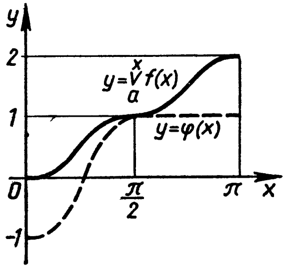


Рис. 41

667. $\sin x = \varphi(x) - \psi(x)$, где

$$\varphi(x) = \begin{cases} \sin x & \text{при } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 2 - \sin x & \text{при } x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right], \\ 4 + \sin x & \text{при } x \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right], \end{cases}$$

$$\psi(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\in\left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ 2-2\sin x \text{ при } x\in\left]\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right], \\ 4 \text{ при } x\in\left]\frac{3}{2}\pi, 2\pi\right] \end{cases}$$

(рис. 42).

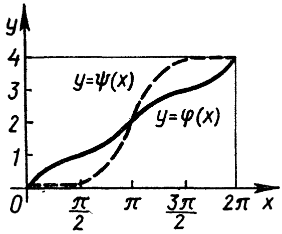


Рис. 42

668. $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, где

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } x\in[0, 1[, \\ 2 \text{ при } x=1, \\ 3 \text{ при } x\in]1, 2], \end{cases}$$
$$\psi(x)=\begin{cases} 2x^2 \text{ при } x\in[0, 1[, \\ 2 \text{ при } x\in[1, 2] \end{cases}$$

(рис. 43).

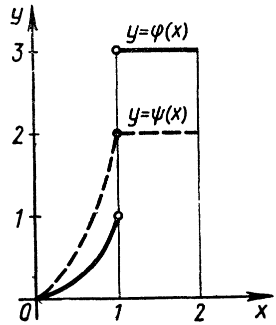


Рис. 43

669. $\overset{2}{\underset{0}{\mathrm{V}}}f=7$; $\overset{1}{\underset{0}{\mathrm{V}}}f=5$; $\overset{2}{\underset{1}{\mathrm{V}}}f=2$. Функцию $f(x)$ можно представить следующим образом в виде разности монотонных: $f(x)=\varphi(x)-\psi(x)$, где

$$\varphi(x)=\begin{cases} x^2 \text{ при } x\in[0, 1[, \\ 5 \text{ при } x=1, \\ x+5 \text{ при } x\in]1, 2], \end{cases}$$
$$\psi(x)=\begin{cases} 0 \text{ при } x\in[0, 1], \\ 2 \text{ при } x\in]1, 2]. \end{cases}$$

670. Это следует из того, что $|\alpha-\beta|\geqslant||\alpha|-|\beta||$ для любых чисел α и β. Поэтому при любом разбиении $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ отрезка $[a, b]$ имеет место

$$\sum_{k=1}^{n}||f(x_k)|-|f(x_{k-1})||\leqslant\sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x_{k-1})|\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}f.$$

Следовательно, функция $|f(x)|$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$, причем

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}|f|\leqslant\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}f.$$

671. Нет. Пример. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} -1 \text{ при } x \text{ иррациональном}, \\ 1 \text{ при } x \text{ рациональном}. \end{cases}$$

Тогда $|f(x)|=1$ для всех x; следовательно, $|f(x)|$ имеет ограниченную вариацию на любом отрезке $[a, b]$, тогда как $f(x)$ — функция неограниченной вариации на том же отрезке.

672. Справедливо. Действительно, возьмем произвольное разбиение $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n-1}<x_n=b$ отрезка $[a, b]$ и обозначим через σ сумму модулей приращений функции $f(x)$ для этого

разбиения. Если на каком-либо участке $[x_{k-1}, x_k]$ этого разбиения функция $f(x)$ не меняет знака, то на этом участке приращение функции равно по абсолютной величине приращению модуля функции. Если же на участке $[x_{k-1}, x_k]$ функция $f(x)$ меняет знак, то в силу непрерывности она обращается в нуль в некоторой точке ζ_k, $x_{k-1} < \zeta_k < x_k$ (см. задачу 536). Так как на участках $[x_{k-1}, \zeta_k]$ и $[\zeta_k, x_k]$ приращение функции равно по абсолютной величине приращению ее модуля, то

$$|f(x_k)-f(x_{k-1})| \leqslant |f(x_k)-f(\zeta_k)| + |f(\zeta_k) - \\ - f(x_{k-1})| = ||f(x_k)|-|f(\zeta_k)|| + ||f(\zeta_k)| - |f(x_{k-1})||.$$

Итак, сумма σ модулей приращений функции $f(x)$ для заданного разбиения не превосходит суммы σ^* модулей приращений функции $|f(x)|$ для некоторого разбиения отрезка $[a, b]$ (а именно для того разбиения, которое получится, если к точкам x_k добавить точки ζ_k, выбранные выше). Но σ^* не больше вариации функции $|f(x)|$ (по условию $|f(x)|$ — функция ограниченной вариации). Поэтому $\sigma \leqslant \sigma^* \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, |f|$. Итак, для любого разбиения отрезка $[a, b]$ сумма σ не превосходит числа $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}|f|$; следовательно, $f(x)$ — функция ограниченной вариации, причем

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} |f|.$$

З а м е ч а н и е. Из решения задачи 670 вытекает, что $\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, |f| \leqslant \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f$. Сравнивая это неравенство с полученным выше, заключаем, что для н е п р е р ы в н о й функции $f(x)$ имеет место равенство

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f = \overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, |f|.$$

673. а) Н е о б х о д и м о с т ь. Пусть $f(x)$ — функция ограниченной вариации на $[a, b]$; функция $\varphi(x) = \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}}\, f$ является возрастающей на $[a, b]$ функцией; очевидно, что она удовлетворяет заданному неравенству при любом $h > 0$, так как

$$|f(x+h)-f(x)| \leqslant \overset{x+h}{\underset{x}{\mathrm{V}}} f = \overset{x+h}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f - \overset{x}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f = \\ = \varphi(x+h) - \varphi(x)$$

(см. задачу 660).

б) Д о с т а т о ч н о с т ь. Пусть $f(x)$ — функция, заданная на $[a, b]$, и $\varphi(x)$ — такая возрастающая на $[a, b]$ функция, что для любого $x \in [a, b]$ и любого $h > 0$ (при условии, что $x + h \in [a, b]$) выполнено неравенство

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \varphi(x+h) - \varphi(x).$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ и оценим сумму σ модулей приращений функции $f(x)$:

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leqslant \sum_{k=1}^{n} (\varphi(x_k) - \varphi(x_{k-1})) = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Итак, σ не превосходит числа $\varphi(b) - \varphi(a)$ при любом разбиении отрезка $[a, b]$; следовательно, $f(x)$ — функция ограниченной вариации, причем

$$\overset{b}{\underset{a}{\mathrm{V}}} f \leqslant \varphi(b) - \varphi(a).$$

674. Спрямляемость этой кривой следует из того, что функция

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, 1]$ (последнее доказывается так же, как при решении задачи 644).

675. Неспрямляемость этой кривой вытекает из того, что функция, графиком которой она является, не имеет ограниченной вариации на отрезке $[0, 1]$ (последнее доказывается таким же методом, как при решении задачи 645).

676. Покажем, например, что функция $\varphi(t)$ имеет неограниченную вариацию на отрезке $[0, 1]$. Рассмотрим для произвольного n разбиение квадрата $[0, 1] \times [0,1]$ на 4^n замкнутых квадратов n-го ранга. Пусть эти квадраты занумерованы по правилу, указанному в условии задачи 594, и точка $M_i(x_i, y_i)$ является центром квадрата n-го ранга с номером i ($i = 1, 2, \dots, 4^n$). Выберем для каждого i на отрезке $[0, 1]$ оси Ot один из прообразов t_i точки M_i (при отображении, задающем кривую Пеано). Тогда t_i является точкой i-го отрезка n-го ранга, соответствующего i-му квадрату n-го ранга, причем все t_i попарно различны. Так как отрезки занумерованы слева направо, то отсюда следует, что $0 = t_0 < t_1 < t_2 < < \dots < t_{4^n} < 1$, т. е. точки t_i задают некоторое разбиение отрезка $[0, 1]$. Оценим для этого разбиения сумму σ_n модулей приращений функции $\varphi(t)$. Для этого возьмем разбиение квадрата $[0, 1] \times \times [0, 1]$ на замкнутые квадраты $(n-1)$-го ранга и рассмотрим j-й квадрат $(n-1)$-го ранга. В силу построения, составляющие его квадраты n-го ранга будут занумерованы числами $4j-3$, $4j-2$, $4j-1$, $4j$ и квадраты с соседними номерами имеют общую сторону. Ясно, что из них хотя бы два квадрата с соседними номерами имеют общую в е р т и к а л ь н у ю сторону. Пусть это будут, например, квадраты с номерами $4j-1$ и $4j$. Тогда

$$|\varphi(t_{4j}) - \varphi(t_{4j-1})| = |x_{4j} - x_{4j-1}| = \frac{1}{2^n}$$

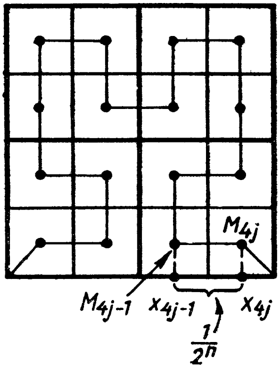


Рис. 44

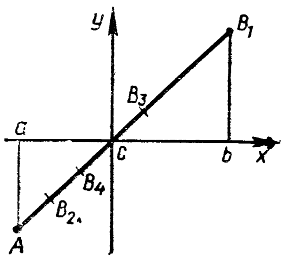


Рис. 45

(см. рис. 44). Поэтому на отрезке $[t_{4j-4}, t_{4j}]$ сумма модулей приращений функции $\varphi(t)$ не меньше $\frac{1}{2^n}$. Так как число таких отрезков равно 4^{n-1}, то для суммы σ_n модулей приращений функций $\varphi(t)$ на всем отрезке $[0, 1]$ получим:

$$\sigma_n \geqslant 4^{n-1} \cdot \frac{1}{2^n} = 2^{n-2}.$$

Следовательно, $\sigma_n \to \infty$ при $n \to \infty$, т. е. функция $\varphi(t)$ имеет неограниченную вариацию на $[0, 1]$.

Аналогично проверяется, что функция $\psi(t)$ имеет неограниченную вариацию.

Замечание. Из полученного результата и из теоремы 6 введения к этой главе следует, что кривая Пеано не спрямляема.

677. Когда параметр t пробегает значения от 1 до 0, точка $M(x, y)$ на плоскости, действительно, движется по отрезку, соединяющему точки (a, a) и (b, b). Но при этом точка M совершает колебательные движения по этому отрезку; таким образом, кривой, заданной этими параметрическими уравнениями, является не указанный выше отрезок, а ломаная $AB_1B_2B_3 \ldots C$ с бесконечным числом звеньев, которые все лежат на этом отрезке (см. рис. 45). Эта ломаная не спрямляема.

678. Функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют ограниченную вариацию на $[0, 1]$ (см. задачу 648); следовательно, кривая $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ спрямляема.

Глава XII.

ИЗМЕРИМЫЕ ФУНКЦИИ, ИНТЕГРАЛЫ РИМАНА И ЛЕБЕГА

679. Пусть a — произвольное число. Легко видеть, что

$$E((f(x))^3 > a) = E(f(x) > \sqrt[3]{a}).$$

Так как по условию $f(x)$ — измеримая функция, то множество $E(f(x) > \sqrt[3]{a})$ измеримо; следовательно, множество $E((f(x))^3 > a)$ также измеримо при любом a; значит, функция $(f(x))^3$ измерима.

680. Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{на каком-либо неизмеримом множестве } A, \\ -1 & \text{на } CA. \end{cases}$$

Функция $f(x)$ неизмерима, тогда как функция $(f(x))^2$, тождественно равная единице, измерима.

681. Если функция $f(x)$ измерима, то измеримость функции $|f(x)|$ следует из равенства, справедливого при любом $a > 0$:

$$E(|f(x)| > a) = E(f(x) < -a) \cup E(f(x) > a).$$

Пример, построенный в предыдущей задаче, показывает, что из измеримости $|f(x)|$ не вытекает, вообще говоря, измеримость $f(x)$.

682. Измеримость функций $m(x)$ и $M(x)$ следует из результата задачи 681 и равенств

$$\min\{f(x),\ g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2},$$

$$\max\{f(x),\ g(x)\} = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}.$$

683. Построим последовательность точек $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 > \ldots$, сходящуюся к a, и последовательность $\beta_1 < \beta_2 < \beta_3 < \ldots$, сходящуюся к b. Ясно, что

$$]a, b[= \bigcup_{i=1}^{\infty} [\alpha_i, \beta_i].$$

Так как функция $f(x)$ по условию измерима на любом $[\alpha_i, \beta_i]$, то для всякого числа c множество

$$E_i = [\alpha_i, \beta_i] \cap E(f(x) > c)$$

измеримо. Но $\bigcup\limits_i E_i =]a, b[\cap E(f(x) > c)$.

Следовательно, и множество $]a, b[\cap E(f(x) > c)$ измеримо при любом c; значит, $f(x)$ измерима на интервале $]a, b[$. А так как отрезок $[a, b]$ отличается от интервала $]a, b[$ лишь множеством меры нуль, то функция $f(x)$ измерима и на отрезке $[a, b]$.

684. Измерима; она отличается от функции $\varphi(x) = x^3$ только на множестве меры нуль (на подмножестве канторова множества). Значит, функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ эквивалентны. Но $\varphi(x)$ измерима на отрезке $[0, 1]$; следовательно, и $f(x)$ измерима на этом отрезке.

685. Рассмотрим функцию $\varphi_n(x) = \dfrac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$; она определена и измерима на $\left[a,\ b - \frac{1}{n}\right]$. Предел $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi_k(x) = f'(x)$ существует для всех $x \in \left[a,\ b - \frac{1}{n}\right]$; следовательно, функция $f'(x)$ измерима на отрезке $\left[a,\ b - \frac{1}{n}\right]$.

А так как промежуток $[a, b[$ является объединением промежутков $\left[a,\ b - \frac{1}{n}\right]$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то $f'(x)$ измерима на промежутке $[a, b[$

(в этом мы убеждаемся так же, как и в задаче 683). Но тогда $f'(x)$ измерима и на всем отрезке $[a, b]$.

686. Если $\chi_E(x)$ — характеристическая функция множества E, то

$$E(\chi_E(x) > a) = \begin{cases} R, & \text{если } a < 0 \text{ (здесь } R \text{ — все пространство)}, \\ E, & \text{если } 0 \leqslant a < 1, \\ \varnothing & \text{если } a \geqslant 1. \end{cases}$$

Отсюда видно, что если E — измеримое множество, то функция $\chi_E(x)$ измерима, а если E — неизмеримое множество, то функция $\chi_E(x)$ неизмерима.

687. Построим функцию $f(x)$ следующим образом: пусть E — измеримое множество на прямой, обладающее тем свойством, что для любого интервала $]\alpha, \beta[$ мера множества $E \cap]\alpha, \beta[$ отлична от нуля и мера множества $CE \cap]\alpha, \beta[$ также отлична от нуля (пример такого множества можно получить, взяв арифметическую сумму множества B, построенного при решении задачи 441, с множеством всех целых чисел). В качестве искомой функции $f(x)$ возьмем характеристическую функцию $\chi_E(x)$ множества E; она разрывна в любой точке x_0 (так как колебание функции на любом интервале, содержащем эту точку, равно 1). Если изменить значения этой функции на множестве меры нуль, то на каждом интервале ее колебание может только увеличиться; следовательно, и после изменения значений этой функции на каком угодно множестве меры нуль она остается разрывной в любой точке.

688. Обозначим $[f(x)]_a^b = \varphi(x)$. Ясно, что

$$E(\varphi(x) > c) = \begin{cases} E & \text{при } c < a, \\ E(f(x) > c) & \text{при } a \leqslant c < b, \\ \varnothing & \text{при } c \geqslant b. \end{cases}$$

Так как $f(x)$ — измеримая функция, то множества $E(\varphi(x) > c)$ измеримы при любом c. Значит, функция $\varphi(x)$ измерима.

689. Пусть $f(x)$ — произвольная функция; произведение $\chi(x) \cdot f(x)$ почти всюду равно нулю. Следовательно, функция $\chi(x) \cdot f(x)$ эквивалентна функции, тождественно равной нулю, т. е. измеримой функции. Значит, сама функция $\chi(x) \cdot f(x)$ измерима.

690. Очевидно, всякая монотонная функция измерима; а любая функция ограниченной вариации есть разность двух монотонных; следовательно, она также измерима.

691. Пусть E_1 — интервал $]\alpha, \beta[$ на числовой прямой. Тогда $]\alpha, \beta[=]-\infty, \beta[\cap]\alpha, +\infty[$. В силу измеримости функции $f(x)$, прообразы бесконечных интервалов $]-\infty, \beta[$ и $]\alpha, +\infty[$ измеримы, а так как прообраз пересечения двух множеств равен пересечению их прообразов (см. задачу 476), то

$$f^{-1}(]\alpha, \beta[) = f^{-1}(]-\infty, \beta[) \cap f^{-1}(]\alpha, +\infty[);$$

следовательно, прообраз интервала — измеримое множество.

Если E_1 — произвольное открытое множество на числовой прямой, то оно является объединением конечной или счетной совокупности интервалов (см. задачу. 212); чтобы доказать, что $f^{-1}(E_1)$ — измеримое множество, надо использовать тот факт, что прообраз объединения множеств равен объединению их прообразов (см. задачу 478).

Если E_1 — замкнутое множество, то $E_1 = R^1 \setminus E_2$, а E_2 — некоторое открытое множество; так как прообраз всей прямой — измеримое множество и прообраз открытого множества E_2 также измерим, то измеримым является и прообраз их разности (см. задачу 477).

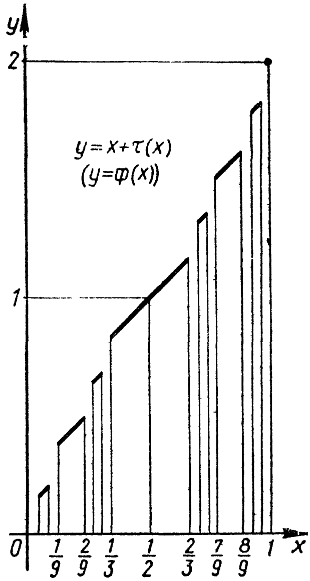


Рис. 46

692. Прообраз измеримого множества не обязан быть измеримым. П р и м е р. Рассмотрим функцию Кантора $\tau(x)$, построенную в задаче 632. Как мы знаем, она монотонна и непрерывна на отрезке $E = [0, 1]$ и отображает его н а в е с ь отрезок $E_1 = [0, 1]$ оси Oy. При этом канторово множество $D \subset E$ отображается на множество всех чисел отрезка E_1, а множество CD — на множество двоично рациональных чисел этого отрезка.

Построим теперь функцию $\Phi(x) = x + \tau(x)$. Она строго возрастает и непрерывна; она отображает отрезок $[0, 1]$ оси Ox в з а и м н о о д н о з н а ч н о на отрезок $[0, 2]$ оси Oy; при этом множество CD перейдет в множество меры 1 (так как каждый интервал из CD перейдет в интервал такой же длины) и, следовательно, множество D — в такое замкнутое подмножество F отрезка $[0, 2]$ оси Oy, мера которого также равна 1 (схематический график функции $\Phi(x)$ см. на рисунке 46).

Построим, наконец, функцию, обратную $\Phi(x)$; обозначим ее $\varphi(y)$. Она непрерывна (следовательно, измерима) и отображает отрезок $[0, 2] \subset Oy$ взаимно однозначно на отрезок $[0, 1] \subset Ox$; при этом множество F, мера которого равна 1, переходит в D (рис. 47).

Множество F (как и всякое множество положительной меры) содержит неизмеримое подмножество (см. свойство 16 из введения к главе VII), которое мы обозначим через A. Образ $\varphi(A)$ этого подмножества будет частью канторова множества $D = \varphi(F)$. Но всякое подмножество множества меры нуль измеримо. Следовательно, $B = \varphi(A)$ измеримо. Итак, множество B измеримо, тогда как его прообраз $A = \varphi^{-1}(B)$ неизмерим.

693. Из того, что функция $f(x)$ измерима на E, и из того, что множество E_0, включенное в E, измеримо, еще не следует измери-

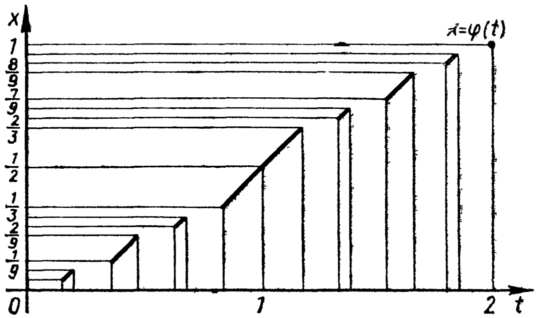


Рис. 47

мость множества $f(E_0)$. Пример. Рассмотрим функцию $\Phi(x) = x + \tau(x)$, где $\tau(x)$ — канторова функция (см. решение предыдущей задачи). Функция $\Phi(x)$ переводит (взаимно однозначно и непрерывно) отрезок $[0, 1]$ оси Ox в отрезок $[0, 2]$ оси Oy, а канторово множество $D \subset [0, 1]$ — в некоторое подмножество $F \subset [0,2]$, причем $mF = 1$. Пусть A — неизмеримое подмножество множества F, а $B = \Phi^{-1}(A)$ — прообраз множества A. Тогда множество B измеримо (как часть канторова множества, которое имеет меру нуль).

Итак, B измеримо, а $A = \Phi(B)$ неизмеримо. Функция, с помощью которой осуществляется отображение, измерима (даже непрерывна).

694. Пусть a — произвольное число. Тогда множество тех $x \in E_1$, для которых выполнено неравенство $f(x) > a$, есть прообраз открытого множества $]a, +\infty[$ числовой оси, а потому открыто в E_1 (см. задачу 509), т. е. является пересечением множества E_1 с некоторым открытым множеством Γ числовой оси (см. задачу 193). Поэтому условие $f(\varphi(t)) > a$ равносильно условию $\varphi(t) \in E_1 \cap \Gamma$, т. е. условию $\varphi(t) \in \Gamma$ (поскольку условие $\varphi(t) \in E_1$ выполняется для всех $t \in E$). Следовательно, множество всех тех $t \in E$, для которых $f(\varphi(t)) > a$, есть прообраз $\varphi^{-1}(\Gamma)$ множества Γ. Но если φ — измеримая функция, а Γ — открытое множество, то множество $\varphi^{-1}(\Gamma)$ измеримо (см. задачу 691). Итак, для любого a множество всех тех t, для которых $f(\varphi(t)) > a$, измеримо. Значит, функция $f(\varphi(t))$ измерима.

695. Из того, что $\varphi(t)$ непрерывна на $E = [\alpha, \beta]$, а $f(x)$ измерима на $E_1 = \varphi(E)$, еще не следует, что суперпозиция $f(\varphi(t))$ измерима на E. Пример. Пусть $\varphi(t)$ — функция, обратная к функции $\Phi(x) = x + \tau(x)$, где $\tau(x)$ канторова функция $\varphi(t)$, рассмотренная в задаче 692. При решении этой задачи было показано, что $\varphi(t)$ взаимно однозначно и непрерывно отображает отрезок $[0, 2]$ на отрезок $[0, 1]$ и что на отрезке $[0, 1]$ имеется измеримое множество B, прообраз которого $A = \varphi^{-1}(B)$ является неизмеримым множеством на отрезке $[0, 2]$.

В качестве измеримой функции $f(x)$ примем теперь характеристическую функцию множества B. Она измерима, так как измеримо множество B.

Однако функция $f(\varphi(t))$ неизмерима. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно доказать, что множество всех тех t, для которых $f(\varphi(t)) > 0$, неизмеримо. Но неравенство $f(\varphi(t)) > 0$ равносильно тому, что $\varphi(t) \in B$; а множество тех t, для которых $\varphi(t) \in B$, есть множество A, т. е. неизмеримое множество.

Итак, множество A тех точек t, для которых $f(\varphi(t)) > 0$, неизмеримо. Значит, эта функция неизмерима.

696. Для любого $\sigma > 0$ справедливо соотношение

$$E(|(f+g)-(f_n+g_n)| > \sigma) \subset E\left(|f-f_n| > \frac{\sigma}{2}\right) \cup E\left(|g-g_n| > \frac{\sigma}{2}\right).$$

Действительно, если $x \bar{\in} E\left(|f-f_n| > \frac{\sigma}{2}\right) \cup E\left(|g-g_n| > \frac{\sigma}{2}\right)$,

то $|f(x)-f_n(x)| \leqslant \frac{\sigma}{2}$, $|g(x)-g_n(x)| \leqslant \frac{\sigma}{2}$ и

$$|(f(x)+g(x))-(f_n(x)+g_n(x))| \leqslant |f(x)-f_n(x)| + |g(x)-$$

$$-g_n(x)| \leqslant \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} = \sigma, \text{ т. е. } x \bar{\in} E(|(f+g)-(f_n+g_n)| > \sigma).$$

Из полученного включения следует:

$$mE(|f+g-f_n-g_n| > \sigma) \leqslant mE\left(|f-f_n| > \frac{\sigma}{2}\right) +$$

$$+ mE\left(|g-g_n| > \frac{\sigma}{2}\right) \to 0$$

при $n \to \infty$ для любого фиксированного $\sigma > 0$. Следовательно, $\{f_n + g_n\}$ сходится по мере к функции $f + g$.

Заметим далее, что $mE(|\varphi| > t) \to 0$ при $t \to +\infty$ для любой измеримой функции φ на множестве E конечной меры (это следует из свойства 14 введения к главе VII). Поэтому для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $t > 0$, что

$$mE(|f| > t) < \varepsilon, \quad mE(|g| > t) < \varepsilon.$$

Из тождества

$$fg - f_n g_n = f\cdot(g-g_n) + g\cdot(f-f_n) - (f-f_n)\cdot(g-g_n)$$

следует неравенство

$$|fg - f_n g_n| \leqslant |f|\cdot|g-g_n| + |g|\cdot|f-f_n| + |f-f_n|\cdot|g-g_n|.$$

Отсюда получаем включение, справедливое при любом $\sigma > 0$:

$$E(|fg - f_n g_n| > \sigma) \subset \left(E(|f| > t) \cup E\left(|g - g_n| > \frac{\sigma}{3t}\right)\right) \cup$$
$$\cup \left(E(|g| > t) \cup E\left(|f - f_n| > \frac{\sigma}{3t}\right)\right) \cup \left(E\left(|f - f_n| > \sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right) \cup\right.$$
$$\left.\cup\, E\left(|g - g_n| > \sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right)\right)$$

(проверяется аналогично предыдущему включению). Тогда имеем следующую оценку по мере:

$$mE(|fg - f_n g_n| > \sigma) \leqslant mE\left(|g - g_n| > \frac{\sigma}{3t}\right) +$$
$$+ mE\left(|f - f_n| > \frac{\sigma}{3t}\right) + mE\left(|g - g_n| > \sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right) +$$
$$+ mE\left(|f - f_n| > \sqrt{\frac{\sigma}{3}}\right) + 2\varepsilon.$$

Переходя к верхнему пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, mE(|fg - f_n g_n| > \sigma) \leqslant 2\varepsilon,$$

откуда, в силу произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} mE(|fg - f_n g_n| > \sigma) = 0.$$

Следовательно, $\{f_n g_n\}$ сходится к fg по мере.

Для доказательства последнего утверждения задачи достаточно показать, что $\left\{\frac{1}{q_n}\right\}$ сходится к $\frac{1}{q}$ по мере. Так как $g(x) \neq 0$ почти всюду на E, то $mE(|g| < t) \to 0$ при $t \to +0$ (см. свойство 14 из введения к главе VII). Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и выберем $t > 0$ такое, что $mE(|g| < t) < \varepsilon$. При любом $\sigma > 0$ и любом n справедливо включение

$$E\left(\left|\frac{1}{g} - \frac{1}{g_n}\right| > \sigma\right) \subset E\left(|g - g_n| > \frac{\sigma t^2}{2}\right) \cup E(|g| < t) \cup$$
$$\cup\, E\left(|g - g_n| > \frac{t}{2}\right).$$

Действительно, если x не входит в правую часть этого включения, то из неравенств $|g(x)| \leqslant t$, $|g(x) - g_n(x)| \geqslant \frac{t}{2}$ следует, что $|g_n(x)| \geqslant$ $\geqslant \frac{t}{2}$; но тогда $\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g_n(x)}\right| = \left|\frac{g(x) - g_n(x)}{g(x)\, g_n(x)}\right| \leqslant \frac{\frac{\sigma t^2}{2}}{t \cdot \frac{t}{2}} = \sigma$, т. е. x не входит и в левую часть.

Из этого включения получаем:

$$mE\left(\left|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_n}\right|>\sigma\right)\leqslant mE\left(|g-g_n|>\frac{\sigma t^2}{2}\right)+mE\left(|g-g_n|>\frac{t}{2}\right)+\varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, mE\left(\left|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_n}\right|>\sigma\right)\leqslant\varepsilon$$

при любом $\varepsilon>0$; значит,

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, mE\left(\left|\frac{1}{g}-\frac{1}{g_n}\right|>\sigma\right)=0$$

и $\left\{\frac{1}{g_n}\right\}$ сходится по мере к $\frac{1}{q}$.

697. Предположим, $f(x)>a$ на множестве положительной меры. Тогда, в силу свойства 13 из введения к главе VII, для некоторого натурального n_0 будем иметь:

$f(x)>a+\frac{1}{n_0}$ на некотором множестве E' положительной меры; пусть $mE'=\alpha>0$. Но $f_n(x)\leqslant a$, так что $E\left(|f-f_n|>\frac{1}{n_0}\right)\supset$ $\supset E'$; следовательно,

$$mE\left(|f-f_n|>\frac{1}{n_0}\right)\geqslant\alpha>0$$

при любом n, т. е. последовательность $\{f_n(x)\}$ не сходится по мере к $f(x)$. Получим противоречие.

698. Если $mE=+\infty$, то теорема 1 (теорема Лебега), вообще говоря, неверна. Пример. Пусть $E=[0,+\infty[$ и

$$f_n(x)=\begin{cases}1 \text{ при } x\in[n,n+1[,\\ 0 \text{ при } x\in[0,n[\ \cup\ [n+1,+\infty[.\end{cases}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ почти всюду на E сходится к функции $\varphi(x)$, тождественно равной нулю. Однако $mE\left(|\varphi-f_n|>\frac{1}{2}\right)=1$ при любом n, т. е. $\{f_n\}$ не сходится к φ по мере.

Теорема 2 остается верной и при $mE=+\infty$. Докажем это. Пусть $E_k=E\cap V(0,k)$ ($V(0,k)$ — шар радиуса k с центром в начале координат). Если последовательность $\{f_n\}$ сходится по мере на E, то она сходится по мере и на E_1; но тогда из нее можно извлечь подпоследовательность $\{f_{n_i}\}$, сходящуюся почти всюду на E_1. Далее, так как последовательность $\{f_{n_i}\}$ сходится по мере на E, то она сходится по мере и на E_2; извлечем из нее сходящуюся почти всюду на E_2 подпоследовательность $\{f_{n_{i_j}}\}$. Аналогично находим подпоследовательность $\{f_{i_{j_e}}\}$, сходящуюся почти всюду на

E_3, и т. д. Выделяя теперь из таблицы

$$\begin{array}{llll} f_{n_1} & f_{n_2} & f_{n_3} & \ldots \\ f_{ni_1} & f_{ni_2} & f_{ni_3} & \ldots \\ f_{n_{i_{j_1}}} & f_{n_{i_{j_2}}} & f_{n_{i_{j_3}}} & \ldots \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \end{array}$$

диагональную последовательность $f_{n_1}, f_{ni_2}, f_{n_{i_{j_3}}}, \ldots,$ получим подпоследовательность последовательности $\{f_n\}$, сходящуюся почти всюду на E.

699. Заметим сначала, что любое натуральное число n может быть представлено, и притом единственным образом, в виде $n = 2^k + i$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leqslant i < 2^k$. Зададим теперь на $E = [0, 1]$ следующую последовательность функций $\{f_n(x)\}$:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in \left[\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right[, \\ 0 \text{ в остальных точках отрезка } [0, 1], \end{cases}$$

где i и k — числа, соотнесенные числу n указанным выше образом (рис. 48).

Ясно, что эта последовательность сходится по мере к функции $\varphi(x)$, тождественно равной нулю, так как

$$mE(|\varphi - f_n| > \sigma) = \begin{cases} 0 \text{ при } \sigma \geqslant 1, \\ \frac{1}{2^k} \text{ при } 0 < \sigma < 1. \end{cases}$$

С другой стороны, $\{f_n(x)\}$ не сходится к нулю ни в одной точке множества $E = [0, 1]$.

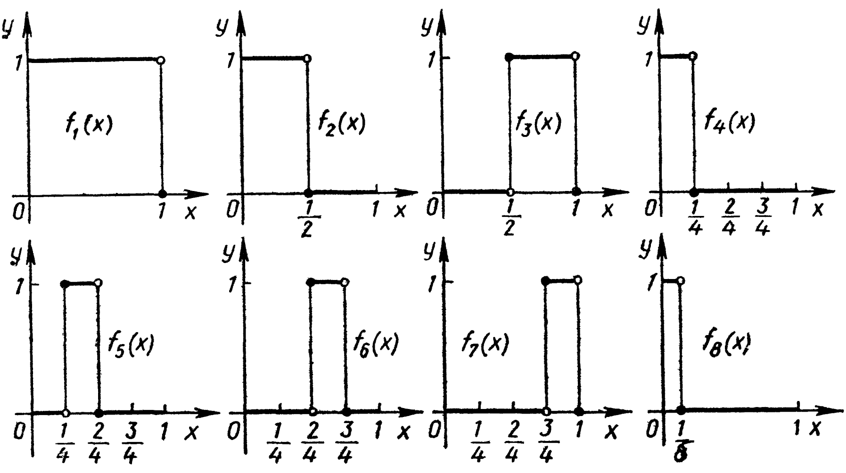


Рис. 48

700. Подпоследовательность функций $f_1, f_2, f_4, f_8, f_{16}, \ldots$ из последовательности $\{f_n\}$, построенной в решении задачи 699, сходится к функции $\varphi(x) = 0$ всюду на $E = [0, 1]$, кроме точки $x = 0$.

701. Если мера множества E конечна, то это утверждение верно; оно сразу следует из теоремы Егорова (с. 82), если учесть, что сходящаяся почти всюду на E последовательность функций сходится на E и по мере.

Если же $mE = +\infty$, то данное утверждение неверно. Пример. Последовательность функций $f_n(x) = \frac{x^2}{n}$ сходится почти всюду (и даже всюду) на $E =]-\infty, +\infty[$ к функции $\varphi(x) = 0$. Однако ни для какого подмножества $E_1 \subset E$ бесконечной меры нельзя извлечь из $\{f_n(x)\}$ подпоследовательность, равномерно сходящуюся на E_1.

702. Всякая функция ограниченной вариации на $[a, b]$ ограничена и имеет не более счетного множества точек разрыва на $[a, b]$ (см. следствие из теоремы 1, с. 73); следовательно, мера множества точек разрыва равна нулю. Поэтому такая функция интегрируема по Риману на $[a, b]$ (см. введение к настоящей главе, с. 82).

703. Нет. Если функция разрывна всюду на непустом открытом множестве $G \subset [a, b]$, то множество ее точек разрыва имеет положительную меру. Такая функция не может быть интегрируемой по Риману на отрезке $[a, b]$ (см. введение к настоящей главе).

704. Функция

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ при } x \neq 0, \\ 0 \text{ при } x = 0 \end{cases}$$

не интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$ (в силу неограниченности), однако она интегрируема на любом отрезке $[\alpha, \beta]$, где $0 < \alpha < \beta < 1$.

705. Так как функция интегрируема по Риману на любом отрезке $[\alpha, \beta]$ таком, что $a < \alpha < \beta < b$, то она, в частности, интегрируема на отрезках $\left[a + \frac{c}{n}, b - \frac{c}{n}\right]$, где $c = \frac{b-a}{3}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$; следовательно, на каждом таком отрезке множество точек разрыва имеет меру нуль. Обозначим через E_n множество точек разрыва функции на $\left[a + \frac{c}{n}, b - \frac{c}{n}\right]$; тогда множество всех точек разрыва на отрезке $[a, b]$ равно объединению всех E_n, к которому, может быть, добавлены точки a и b (или одна из них). Но так как $mE_n = 0$ при любом n, то и $m\left(\bigcup_n E_n\right) = 0$. Добавление к множеству $\bigcup_n E_n$ одной или двух крайних точек отрезка $[a, b]$ не изменит меры этого множества. Итак, множество всех точек разрыва функции на отрезке $[a, b]$ имеет меру нуль. Так как функция по условию ограничена на $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на $[a, b]$.

706. Функция $\varphi(x)$ может оказаться неинтегрируемой по Риману (хотя $\varphi(x)$ всегда будет интегрируемой по Лебегу (см. свойство 8 на с. 84). Пример.

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x = r_1, r_2, \ldots, r_n, \\ 0 \text{ в остальных точках } [a, b] \end{cases}$$

(здесь $r_1, r_2, \ldots$ — все рациональные числа отрезка $[a, b]$, перенумерованные произвольным образом). Функция $\varphi(x)$ есть характеристическая функция множества рациональных чисел отрезка $[a, b]$. Она всюду разрывна и поэтому не интегрируема по Риману на $[a, b]$.

707. Пусть функции $\varphi_n(x)$ интегрируемы по Риману на отрезке $[a, b]$ и последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на этом отрезке. Докажем, что $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$.

а) Функция $f(x)$ ограничена. Действительно, если последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$, то для любого $\varepsilon > 0$, и в частности для $\varepsilon = 1$, найдется N такое, что для всех $n \geqslant N$ имеет место

$$|f(x) - \varphi_n(x)| < 1.$$

При $n = N$ это неравенство принимает вид $|f(x) - \varphi_N(x)| < 1$, или $\varphi_N(x) - 1 < f(x) < \varphi_N(x) + 1$. Так как функции $\varphi_N(x) - 1$ и $\varphi_N(x) + 1$ ограничены на $[a, b]$, то и $f(x)$ ограничена на $[a, b]$.

б) Множество точек разрыва функции $f(x)$ имеет меру нуль. Действительно, обозначим через E_n множество точек разрыва функции $\varphi_n(x)$; тогда $mE_n = 0$, а значит, и $m(\bigcup\limits_n E_n) = 0$. В каждой точке x_0, принадлежащей множеству $[a, b] \setminus \bigcup\limits_n E_n$, все функции $\varphi_n(x)$ непрерывны; но тогда и функция $f(x)$, являющаяся их пределом, непрерывна в точке x_0 (в силу равномерной сходимости последовательности $\{\varphi_n(x)\}$). Значит, функция может быть разрывна только в точках множества $\bigcup\limits_n E_n$, т. е. только на множестве меры нуль.

Итак, функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, и мера множества ее точек разрыва равна нулю. Следовательно, $f(x)$ интегрируема по Риману на $[a, b]$.

Равенство $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_a^b \varphi_n(x)\,dx$ доказывается так же, как и аналогичное равенство для равномерно сходящихся последовательностей непрерывных функций, т. е. исходя из того, что

$$\int\limits_a^b \varphi_n(x)dx - \int\limits_a^b f(x)\,dx < \varepsilon \text{ при } |\varphi_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

708. Неверно. Например, если E — множество рациональных чисел на [0, 1], то $mE = 0$, однако $\chi_E(x)$ не интегрируема на [0, 1] (множество точек разрыва этой функции совпадает со всем отрезком [0, 1]).

709. Неверно. Пример. Пусть E — совершенное нигде не плотное множество меры $\frac{1}{2}$, расположенное на отрезке [0, 1]. Тогда $\chi_E(x)$ разрывна во всех точках множества E, т. е. на множестве положительной меры; следовательно, функция $\chi_E(x)$ не интегрируема по Риману на [0, 1].

710. Неверно. Пример. Пусть F—совершенное нигде не плотное множество меры $\frac{1}{2}$ на отрезке [0, 1] и E — множество концов всех его смежных интервалов. Тогда E — нигде не плотное множество меры нуль (так как E — счетное множество). Однако характеристическая функция $\chi_E(x)$ разрывна не только в точках множества E, но и всюду на F, т. е. на множестве положительной меры. Следовательно, она не интегрируема по Риману.

711. Интегрируема. Это следует из того, что все граничные точки замкнутого множества включаются в это множество. Следовательно, мера множества граничных точек множества E равна нулю. А характеристическая функция $\chi_E(x)$ разрывна только в граничных точках множества E.

712. Верно. В этом случае функция $\chi_E(x)$ разрывна во всех точках множества $\overline{E}$ и непрерывна во всех точках дополнения $[a, b] \setminus \overline{E}$. Следовательно, множество точек разрыва функции $\chi_E(x)$ имеет меру нуль. Так как эта функция, кроме того, ограничена на $[a, b]$, то она интегрируема по Риману на этом отрезке.

713. Функции примеров 486, 488, 489, 502 интегрируемы по Риману на отрезке [0, 1]; они все ограничены; функция примера 489 при $c_n \to 0$, кроме того, непрерывна; для функций из примеров 486, 488 и 489 при $\lim\limits_{n\to\infty} c_n \neq 0$ множество точек разрыва — канторово множество, т. е. множество меры нуль; для функции примера 502 множество точек разрыва есть множество рациональных чисел, которое также имеет меру нуль.

Функция примера 495 не интегрируема по Риману на [0, 1]; она ограничена, но множество ее точек разрыва — промежуток]0, 1] — имеет положительную меру.

714. Все эти функции ограничены и измеримы на отрезке [0, 1] и, следовательно, интегрируемы по Лебегу. Вычислим их интегралы:

а) для вычисления интеграла от функции из примера 486 разобьем область интегрирования на два непересекающихся множества: $[0, 1] = D \cup CD$, где D — канторово множество, а CD — дополнение к нему до всего отрезка [0, 1]. Используя аддитивность интеграла Лебега, получим:

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx=(L)\int_D f(x)\,dx+(L)\int_{CD} f(x)\,dx.$$

Интеграл по множеству D равен нулю, так как $mD=0$. На CD функция постоянна, поэтому

$$(L)\int_{CD} f(x)\,dx=2\cdot mCD=2\cdot 1=2.$$

Следовательно,

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx=0+2=2.$$

б) Для вычисления интеграла от функции задачи 489 разобьем область интегрирования на счетную совокупность попарно не пересекающихся множеств:

$$[0,1]=D\cup\,]a_1,b_1[\,\cup\,]a_2,b_2[\,\cup\ldots\cup\,]a_n,b_n[\,\cup\ldots,$$

где D — канторово множество, а $]a_n, b_n[$ — его смежные интервалы, занумерованные в порядке убывания их длин, т. е. $]a_1, b_1[$ — интервал длины $\frac{1}{3}$, $]a_2, b_2[$ и $]a_3, b_3[$ — интервалы длины $\frac{1}{3^2}$, $]a_4, b_4[$, ..., $]a_7, b_7[$ — интервалы длины $\frac{1}{3^3}$ и т. д. При этом интервалы одинаковой длины нумеруем слева направо. Используя полную аддитивность интеграла Лебега, получим:

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx=(L)\int_D f(x)\,dx+\sum_{n=1}^{+\infty}(L)\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx.$$

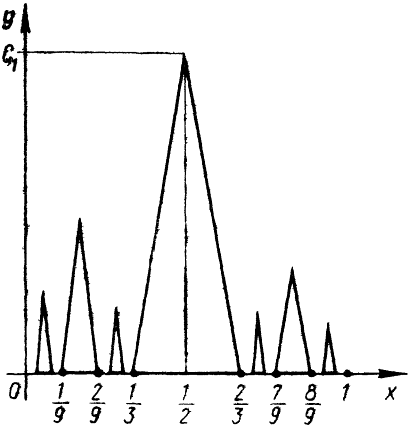


Рис. 49

Так как $mD=0$, то первый интеграл равен нулю. Остальные интегралы вычисляются легко: на каждом интервале $]a_n, b_n[$ функция интегрируема по Риману и поэтому

$$(L)\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx=(R)\int_{a_n}^{b_n} f(x)\,dx.$$

Интегралы Римана в данном случае равны площадям соответствующих треугольников (см. график функции, рис. 49):

$$(R)\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = \frac{c_1\cdot\frac{1}{3}}{2},\quad (R)\int_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx = \frac{c_2\cdot\frac{1}{3^2}}{2},$$

$$(R)\int_{a_3}^{b_3} f(x)\,dx = \frac{c_3\cdot\frac{1}{3^2}}{2},\quad (R)\int_{a_4}^{b_4} f(x)\,dx = \frac{c_4\cdot\frac{1}{3^3}}{2},\ \ldots,$$

$$(R)\int_{a_7}^{b_7} f(x)\,dx = \frac{c_7\cdot\frac{1}{3^3}}{2},\quad (R)\int_{a_8}^{b_8} f(x)\,dx = \frac{c_8\cdot\frac{1}{3^4}}{2},\ \ldots$$

Суммируя, получим формулу, дающую искомый интеграл Лебега:

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\frac{c_3}{3^2}+\frac{c_4}{3^3}+\ldots+\frac{c_7}{3^3}+\frac{c_8}{3^4}+\ldots\right)$$

(так как функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[0, 1]$, то ряд, стоящий в правой части равенства, сходится; впрочем, в этом можно убедиться и непосредственно, исходя из того, что последовательность $\{c_n\}$ сходится и потому ограничена).

В частности, для функции задачи 488 имеем: $c_n = 1$ для всех n, поэтому здесь

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{4}{3^3}+\frac{8}{3^4}+\ldots\right) = \frac{1}{6\cdot\left(1-\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{2}.$$

в) Функция $f(x)$ из задачи 495 эквивалентна функции $-x^2$. Поэтому

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx = (L)\int_0^1 (-x^2)\,dx = (R)\int_0^1 (-x^2)\,dx = -\frac{1}{3}.$$

г) Функция $f(x)$ из задачи 502 эквивалентна функции, тождественно равной нулю. Поэтому здесь

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx = (L)\int_0^1 0\cdot dx = 0.$$

715. Разобьем область интегрирования на попарно не пересекающиеся множества D, A_1, A_2, $\ldots$, A_k, $\ldots$, где D — канторово множество, A_k ($k = 1, 2, \ldots$) — объединение всех смежных интервалов k-го ранга $\left(\text{т. е. интервалов длины } \frac{1}{3^k}\right)$. Используя полную аддитивность интеграла Лебега, получим:

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx = (L)\int_D f(x)\,dx + \sum_{k=1}^{\infty}(L)\int_{A_k} f(x)\,dx.$$

Так как $mD = 0$, то $(L)\int\limits_D f(x)\,dx = 0$. На каждом из остальных множеств функция постоянна. Поэтому для каждого номера k имеем:

$$(L)\int\limits_{A_k} f(x)\,dx = \frac{1}{2^k}\cdot mA_k = \frac{1}{2^k}\cdot 2^{k-1}\cdot\frac{1}{3^k} = \frac{1}{2\cdot 3^k}.$$

Следовательно,

$$(L)\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2\cdot 3^k} = \frac{1}{4}.$$

716. Интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$, так как она ограничена на этом отрезке $[0, 1]$ и множество ее точек разрыва (множество D) имеет меру нуль. Интеграл Римана от этой функции равен вычисленному выше интегралу Лебега. Следовательно,

$$(R)\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}.$$

717. Эта функция не интегрируема по Риману на отрезке $[0, 1]$ (она разрывна на множестве положительной меры — ее точками разрыва являются все точки отрезка $[0, 1]$, кроме точки $x = 1$). По Лебегу эта функция интегрируема, так как она измерима и ограничена. Для вычисления интеграла Лебега от $f(x)$ заменим подынтегральную функцию эквивалентной ей функцией $\varphi(x) = x^3$, которая интегрируема по Риману на $[0, 1]$. Получим:

$$(L)\int\limits_0^1 f(x)\,dx = (L)\int\limits_0^1 \varphi(x)\,dx =$$

$$= (L)\int\limits_0^1 x^3\,dx = (R)\int\limits_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

718. Функция $\chi_E(x)$ измерима и ограничена; следовательно, она интегрируема по Лебегу. Для вычисления ее интеграла, разобьем $[a, b]$ на два множества: E и $\mathbf{C}E$ (где $\mathbf{C}E = [a, b] \setminus E$). Тогда

$$\int\limits_a^b \chi_E(x)\,dx = \int\limits_E \chi_E(x)\,dx + \int\limits_{\mathbf{C}E} \chi_E(x)\,dx = mE + 0 = mE.$$

719. Функция $f(x)$ не интегрируема по Риману (она разрывна на множестве E положительной меры), но интегрируема по Лебегу. Вычислим ее интеграл на $[0, 1]$:

$$(L)\int\limits_0^1 f(x)\,dx = (L)\int\limits_E f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\,dx.$$

На множестве E функция постоянна (равна нулю); поэтому

$(L)\int\limits_E f(x)\,dx = 0\cdot mE = 0$. На интервале $]\alpha_n, \beta_n[$ — функция интегрируема по Риману; поэтому

$$(L)\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\,dx = (R)\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\,dx = \frac{\beta_n-\alpha_n}{2}\cdot 1.$$

Итак,

$$(L)\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\beta_n-\alpha_n}{2}.$$

Но $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)$ — эта сумма длин смежных интервалов; она равна мере множества $\mathbf{C}E$ $\left(\text{т. е. } \frac{1}{2}\right)$. Следовательно, окончательно

$$(L)\int\limits_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{4}.$$

720. Разобьем E на два множества: множество A тех точек, где $f(x)\geqslant c$, и множество B тех точек, где $0\leqslant f(x) < c$. Тогда

$$(L)\int\limits_E f(x)\,dx = (L)\int\limits_A f(x)\,dx + (L)\int\limits_B f(x)\,dx \geqslant (L)\int\limits_A f(x)\,dx,$$

так как $(L)\int\limits_B f(x)\,dx \geqslant 0$ (в силу неотрицательности подынтегральной функции). На множестве A имеет место $f(x)\geqslant c$; мера A по условию равна a. Поэтому

$$(L)\int\limits_E f(x)\,dx \geqslant (L)\int\limits_A f(x)\,dx \geqslant c\cdot mA = c\cdot a.$$

721. Данная функция почти всюду на $[0, 1]$ равна x^3. Следовательно, интегралы Лебега от $f(x)$ и от x^3 равны друг другу; поэтому

$$(L)\int\limits_0^1 f(x)\,dx = (L)\int\limits_0^1 x^3\,dx = (R)\int\limits_0^1 x^3\,dx = \frac{1}{4}.$$

722. Обозначим смежные интервалы канторова множества D, расположенные в порядке убывания их длин, через $]\alpha_n, \beta_n[$. Тогда

$$(L)\int\limits_0^1 f(x)\,dx = (L)\int\limits_D f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}(L)\int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f(x)\,dx.$$

Интеграл по D равен нулю, так как $mD = 0$; интегралы же по промежуткам $]\alpha_n, \beta_n[$ могут быть вычислены как интегралы Римана;

следовательно, каждый из них равен площади соответствующего полукруга. Поэтому

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi(\beta_n-\alpha_n)^2}{8}.$$

Но для канторова множества имеем: $\beta_1-\alpha_1=\frac{1}{3}$, $\beta_2-\alpha_2=\beta_3-\alpha_3=\frac{1}{3^2}$, $\beta_4-\alpha_4=\ldots=\beta_7-\alpha_7=\frac{1}{3^3}$, $\beta_8-\alpha_8=\ldots=\beta_{15}-\alpha_{15}=\frac{1}{3^4}$ и т. д.

Поэтому

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{\pi}{8}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2^2}{3^6}+\ldots+\frac{2^{n-1}}{3^{2n}}+\ldots\right)=\frac{\pi}{8}\cdot\frac{1}{7}=\frac{\pi}{56}.$$

723. Разобьем отрезок $[0, 1]$ на два отрезка: $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ и $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$; на первом из них функция $f(x)$ эквивалентна функции x^3, на втором — функции x^2; поэтому

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{3}} x^3\,dx+\int_{\frac{1}{3}}^1 x^2\,dx=\frac{1}{4\cdot 3^4}+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3\cdot 3^3}\right)=\frac{35}{108}.$$

724. Множество E является объединением отрезков $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$, $\left[\frac{1}{5}, \frac{1}{4}\right]$, $\left[\frac{1}{7}, \frac{1}{6}\right]$, ..., $\left[\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right]$, ..., а также множества меры нуль, состоящего из двух точек: 0 и 1. На каждом из этих отрезков функция интегрируема по Риману; поэтому

$$\int_E f(x)\,dx=\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 3x^2\,dx+\int_{\frac{1}{5}}^{\frac{1}{4}} 3x^2\,dx+\ldots+\int_{\frac{1}{2n+1}}^{\frac{1}{2n}} 3x^2\,dx+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}-\frac{1}{5^3}+\ldots+\frac{1}{(2n)^3}-\frac{1}{(2n+1)^3}+\ldots$$

Этот ряд абсолютно сходится, и его сумма с точностью до 0,01 равна 0,10.

725.

$$(L)\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}\sin\pi x\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^1\cos\pi x\,dx=0.$$

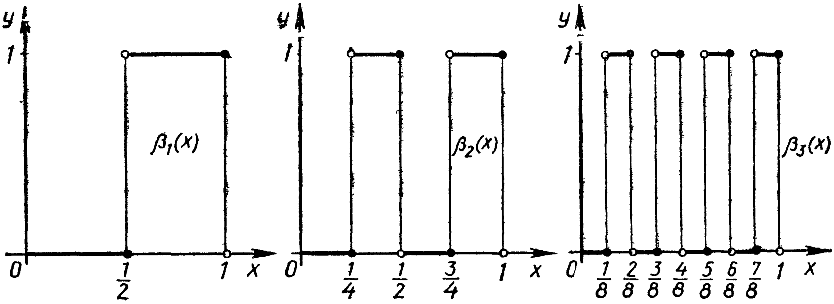


Рис. 50

726. Функция $\beta_1(x)$ является характеристической функцией множества $E_1 = \left]\frac{1}{2}, 1\right]$, $\beta_2(x)$ — характеристической функцией множества $E_2 = \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{3}{4}, 1\right]$, $\beta_3(x)$ — характеристической функцией множества $E_3 = \left]\frac{1}{8}, \frac{1}{4}\right] \cup \left]\frac{3}{8}, \frac{1}{2}\right] \cup \left]\frac{5}{8}, \frac{3}{4}\right] \cup \left]\frac{7}{8}, 1\right]$ и т. д. (см рис. 50). Далее, произведение $\beta_i(x) \cdot \beta_j(x)$ является характеристической функцией множества $E_i \cap E_j$ (см. задачу 558); в частности, $(\beta_i(x))^2$ есть характеристическая функция множества E_i, т. е. $(\beta_i(x))^2 = \beta_i(x)$. Легко видеть, что все множества E_i имеют меру $\frac{1}{2}$, а множества $E_i \cap E_j$ имеют меру $\frac{1}{4}$ (при $i \neq j$). Поэтому

$$\int_0^1 \beta_i(x) \cdot \beta_j(x)\, dx = m(E_i \cap E_j) = \frac{1}{4}$$

при $i \neq j$,

$$\int_0^1 (\beta_i(x))^2\, dx = \int_0^1 \beta_i(x)\, dx = mE_i = \frac{1}{2}.$$

727. Функции $\varphi_k(x)$ легко выражаются через функции $\beta_k(x)$, рассмотренные в предыдущей задаче: $\varphi_k(x) = 2\beta_k(x) - 1$. Поэтому

$$\int_0^1 \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x)\, dx = \int_0^1 (2\beta_i(x) - 1) \cdot (2\beta_j(x) - 1)\, dx =$$

$$= 4\int_0^1 \beta_i(x)\beta_j(x)\, dx - 2\int_0^1 \beta_i(x)\, dx - 2\int_0^1 \beta_j(x)\, dx + \int_0^1 dx = 0$$

при $i \neq j$. Аналогично получаем:

$$\int_0^1 (\varphi_i(x))^2\, dx = 1.$$

728. Производная $\varphi'(x)$ измерима на отрезке $[a, b]$ (см. задачу 685) и, кроме того, по условию ограничена; следовательно, $\varphi'(x)$ интегрируема по Лебегу на отрезке $[a, b]$.

729. Не следует. В качестве примера возьмем последовательность функций $\{f_n(x)\}$, построенных в решении задачи 699. Ясно, что $\int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2^k}$ (см. рис. 48). Так как при $n \to +\infty$ также и $k \to +\infty$, то

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,dx = 0.$$

Однако $\{f_n(x)\}$ не стремится к нулю ни в одной точке отрезка $[0, 1]$.

730. Этот результат легко получается из теоремы о том, что функция от c $(L)\int\limits_a^c f(x)\,dx$ имеет производную для почти всех $c \in [a, b]$ и эта производная почти всюду равна значению подынтегральной функции в точке c. Из тождества

$$\int\limits_a^c f(x)\,dx \equiv 0$$

вытекает, что производные от обеих его частей равны друг другу, т. е. что для почти всех $c \in [a, b]$ имеет место равенство $f(c) = 0$.

731. Для вычисления интеграла от функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}$ построим ее срезку числом $t > 1$ (рис. 51):

$$[f(x)]_t = \begin{cases} t & \text{при } x \in \left]1,\ 1+\frac{1}{t^3}\right[, \\ \frac{1}{\sqrt[3]{x-1}} & \text{при } x \in \left[1+\frac{1}{t^3},\ 2\right[. \end{cases}$$

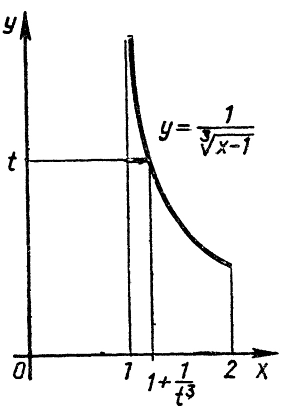


Рис. 51

Вычислим интеграл от срезки:

$$(L)\int\limits_{]1,\,2[} [f(x)]_t\,dx = \int\limits_1^{1+\frac{1}{t^3}} t\,dx + \int\limits_{1+\frac{1}{t^3}}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}} =$$

$$= \left(t\left(1+\frac{1}{t^3}\right) - t\right) + \left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2t^2}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2t^2}.$$

Чтобы вычислить интеграл от $f(x)$, надо найти предел интеграла от срезки при $t \to +\infty$:

$$(L)\int\limits_{]1,\,2[} f(x)\,dx = \lim_{t\to+\infty}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2t^2}\right) = \frac{3}{2}.$$

732. Вычисляя аналогично предыдущему, найдем:

$$(L)\int\limits_{]0,\,1[} \frac{1}{x}\,dx = +\infty;\ (L)\int\limits_{]0,\,1[} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty.$$

Следовательно, обе эти функции не суммируемы на интервале $]0, 1[$.

733. Функция $f(x)$ эквивалентна функции $\varphi(x)$, равной $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ на промежутке $]0, 1]$ и нулю в точке $x = 0$; следовательно,

$$(L)\int\limits_{[0,\,1]} f(x)\,dx = (L)\int\limits_{[0,\,1]} \varphi(x)\,dx =$$
$$= (L)\int\limits_{]0,\,1]} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Вычисляя последний интеграл как предел интеграла от срезки подынтегральной функции, находим, что он равен $\frac{3}{2}$. Следовательно,

$$(L)\int\limits_{[0,\,1]} f(x)\,dx = \frac{3}{2}.$$

734. Здесь $f(x)$ на промежутке $]0, 1]$ эквивалентна функции $\frac{1}{\sqrt{x}}$; следовательно,

$$(L)\int\limits_{[0,\,1]} f(x)\,dx = (L)\int\limits_{]0,\,1]} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Последний интеграл легко вычисляется (он равен 2). Следовательно,

$$(L)\int\limits_{[0,1]} f(x)\,dx = 2.$$

735. Если $f(x)$ ограничена и измерима на множестве E, то $(f(x))^{10}$ и $|f(x)|$ также ограничены и измеримы на этом множестве и, следовательно, интегрируемы. Функция $\frac{1}{f(x)}$ может оказаться и неограниченной, а неограниченная функция может быть неинтегрируемой; например, функция $f(x) = x^2$ ограничена и измерима на $E = [0, 1]$, тогда как функция $\frac{1}{x^2}$ не ограничена и не интегрируема на этом отрезке (см. задачу 732).

736. Найдем срезку функции $f(x)$ числом $t > 0$:

$$[f(x)]_t = \begin{cases} 0 \text{ для } x \in D, \\ k \text{ для } x \in E_k\ (1 \leqslant k \leqslant n), \\ t \text{ для } x \in M_n, \end{cases}$$

где E_k — объединение смежных интервалов ранга k (очевидно, $mE_k = \frac{2^{k-1}}{3^k}$), n — целая часть числа t, M_n — объединение всех смежных интервалов рангов больших чем n (мера множества M_n равна

$$\sum_{i=n+1}^{+\infty} \frac{2^{i-1}}{3^i} = \frac{2^n}{3^n}\Big).$$

Вычислим интеграл от срезки;

$$\int_0^1 [f(x)]_t\, dx = \int_D 0 \cdot dx + \sum_{k=1}^{n} \int_{E_k} k \cdot dx +$$

$$+ \int_{M_n} t \cdot dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^{k-1}}{3^k} + t \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

Чтобы вычислить интеграл от $f(x)$, надо найти предел интеграла от срезки при $t \to +\infty$. Заметим, что если $t \to +\infty$, то и $n \to +\infty$. Так как $t\left(\frac{2}{3}\right)^n \leqslant (n+1) \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$, а предел последнего выражения при $n \to +\infty$ равен нулю, то $t \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$ при $t \to +\infty$. Следовательно,

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^1 [f(x)]_t\, dx = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot 2^{k-1}}{3^k}\right) +$$

$$+ \lim_{t \to +\infty} \left(t \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot 2^{k-1}}{3^k} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}.$$

Сумма последнего ряда находится следующим образом: обозначим сумму более общего ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1}$ через $\varphi(q)$. Этот ряд является степенным; следовательно, его можно почленно интегрировать на любом отрезке, лежащем внутри интервала сходимости, в частности на отрезке $[0, q]$, где $|q| < 1$. Поэтому

$$\int_0^q \varphi(q)\, dq = \sum_{k=1}^{\infty} q^k,$$

т. е.

$$\int_0^q \varphi(q)\, dq = \frac{1}{1-q}.$$

Беря теперь производную от обеих частей равенства, получим:

$$\varphi(q) = \frac{1}{(1-q)^2}. \quad \text{Следовательно,} \quad \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

В частности,

$$\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{\left(1-\frac{2}{3}\right)^2} = 9.$$

Итак, окончательно:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} = \frac{1}{3}\cdot 9 = 3.$$

737. Необходимость. Пусть ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot mE_k$ расходится. Из определения множеств E_k следует, что $\int_{E_k} f(x)\,dx \geqslant k \cdot mE_k$. Поэтому для любого натурального числа N справедливы неравенства

$$\int_E [f(x)]_N dx \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{E_k} f(x)\,dx \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} k \cdot mE_k.$$

Так как $\sum_{k=0}^{N-1} k \cdot m\,E_k \to +\infty$ при $N \to +\infty$, то и $\int_E [f(x)]_N dx \to +\infty$ при $N \to +\infty$; следовательно, функция $f(x)$ не суммируема на множестве E.

Достаточность. Пусть ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot mE_k$ сходится. Тогда и ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)\,mE_k$ сходится, так как он может быть разбит на два сходящихся ряда: $\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot mE_k$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} mE_k$. Отсюда, очевидно, следует, что функция $g(x) = k+1$ при $x \in E_k\,(k = 0, 1, 2, \ldots)$ суммируема на E и ее интеграл равен $\sum_{k=0}^{+\infty}(k+1)\,mE_k$. Тогда из неравенств $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ при $x \in E$ вытекает, по свойству 5) интеграла Лебега от неограниченных функций (с. 85), что и $f(x)$ суммируема на E.

738. Используя обозначения предыдущей задачи, легко убедиться в том, что для любого натурального числа k имеет место равенство

$$\widetilde{E}_k = E_k \cup E_{k+1} \cup E_{k+2} \cup \ldots,$$

откуда (так как $E_i \cap E_j = \varnothing$ при $i \neq j$)

$$m\widetilde{E}_k = mE_k + mE_{k+1} + mE_{k+2} + \ldots;$$

полагая здесь $k=1, 2, 3, \ldots$, имеем:

$$\begin{aligned} m\widetilde{E}_1 &= mE_1 + mE_2 + mE_3 + \ldots + mE_n + \ldots, \\ m\widetilde{E}_2 &= \qquad\quad mE_2 + mE_3 + \ldots + mE_n + \ldots, \\ m\widetilde{E}_3 &= \qquad\qquad\quad mE_3 + \ldots + mE_n + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Суммируя почленно эти равенства от первого до N-го, где N — какое-нибудь натуральное число, получим:

$$\sum_{k=1}^{N} m\widetilde{E}_k = mE_1 + 2mE_2 + 3mE_3 + \ldots + N \cdot mE_N +$$

$$+ N \cdot mE_{N+1} + N \cdot mE_{N+2} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} k \cdot mE_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} N \cdot mE_k.$$

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k$ сходится, то $\sum_{k=N+1}^{\infty} N \cdot mE_k \leqslant \sum_{k=N+1}^{\infty} k \cdot mE_k$ и мы получаем:

$$\sum_{k=1}^{N} m\widetilde{E}_k \leqslant \sum_{k=1}^{N} k \cdot mE_k + \sum_{k=N+1}^{\infty} k \cdot mE_k = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k,$$

т. е. ряд $\sum_{k=1}^{\infty} m\widetilde{E}_n$ сходится (как ряд с неотрицательными членами, частичные суммы которого ограничены постоянным числом).

Обратно, если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} m\widetilde{E}_k$, то

$$\sum_{k=1}^{N} k \cdot mE_k = \sum_{k=1}^{N} m\widetilde{E}_k - \sum_{k=N+1}^{\infty} N \cdot mE_k \leqslant \sum_{k=1}^{N} m\widetilde{E}_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} m\widetilde{E}_k,$$

а значит, сходится и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k$.

Итак, сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} m\widetilde{E}_k$ равносильна сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot mE_k$. Но тогда из результатов предыдущей задачи вытекает, что для суммируемости неотрицательной функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы ряд $\sum_{k} m\widetilde{E}_k$ сходился.

739. Пусть $f(x)$ — ограниченная функция, причем

$\sup\limits_{x\in[0,\,a]} f(x) = B$, $\inf\limits_{x\in[0,\,a]} f(x) = A$. Разобьем произвольным образом отрезок $[A, B]$ оси Oy на части: $A = y_0 < y_1 < \ldots < y_{n-1} < y_n = B$. Обозначим

$$e_i = E\,(y_{i-1} \leqslant f(x) < y_i),\quad e_i' = E\,(y_{i-1} \leqslant f(kx) < y_i).$$

Ясно, что $x \in e_i$ тогда и только тогда, когда $\frac{1}{k}x \in e_i'$, т. е. $e_i' = \frac{1}{k}e_i$. Следовательно, $me_i' = \frac{1}{k}me_i$ (см. задачу 450).

Вычислим теперь для этого разбиения нижние суммы Лебега s и s' для функций $f(x)$ и $f(kx)$ соответственно:

$$s = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}me_i,$$

$$s' = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}me_i' = \sum_{i=1}^{n} y_{i-1}\cdot\frac{1}{k}me_i = \frac{1}{k}s.$$

Аналогично получаем, что $S' = \frac{1}{k}S$, где S и S' — верхние суммы Лебега для функций $f(x)$ и $f(kx)$. Отсюда легко следует, что если $f(x)$ суммируема на $[0, a]$, то $f(kx)$ суммируема на $\left[0, \frac{a}{k}\right]$ и имеет место равенство

$$\int\limits_0^{\frac{a}{k}} f(kx)\,dx = \frac{1}{k}\int\limits_0^{a} f(x)\,dx. \tag{1}$$

Если $f(x)$ не ограничена на $[0, a]$ и неотрицательна, то мы пишем сначала равенство (1) для срезок $[f(x)]_t$ и $[f(kx)]_t$, а затем переходим к пределу при $t \to +\infty$.

Если же $f(x)$ — знакопеременная функция, не ограниченная на $[0, a]$, то мы пишем сначала равенство (1) для функций

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при } f(x) \geqslant 0, \\ 0 & \text{при } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad f_-(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } f(x) \geqslant 0, \\ -f(x) & \text{при } f(x) < 0, \end{cases}$$

а затем почленно вычитаем из равенства (1), написанного для $f_+(x)$, аналогичное равенство для функции $f_-(x)$.

740. Заметим прежде всего, что если функция $\frac{1}{x}\cos\frac{k}{x}$ не суммируема на $]0, 1[$ при каком-либо $k > 0$, то она не суммируема на этом интервале и при любом другом $k > 0$ (это легко вытекает из результата предыдущей задачи).

Докажем, что $\frac{1}{x}\cos\frac{2}{x}$ — несуммируемая функция на $]0,1[$. Если бы она была суммируема на этом интервале, то была бы суммируема и функция $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$; но тогда, согласно свойству 5) интеграла Лебега от неограниченных функций (с. 85), была бы суммируема и функция $\frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x}$, потому что $\left|\frac{1}{x}\cdot\cos^2\frac{1}{x}\right| \leqslant \left|\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\right|$. А так как $\cos\frac{2}{x} = 2\cos^2\frac{1}{x} - 1$ и, значит, $\frac{1}{x} = 2\cdot\frac{1}{x}\cos^2\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{2}{x}$, то отсюда вытекала бы суммируемость функции $\frac{1}{x}$ на $]0,1[$, что неверно (см. задачу 732).

Полученное противоречие показывает, что функция $\frac{1}{x}\cos\frac{2}{x}$ несуммируема на $]0,1[$. Но тогда и любая функция вида $\frac{1}{x}\cos\frac{k}{x}$ также несуммируема на $]0, 1[$.

741. Пусть $\chi_{E_1}(x)$, $\chi_{E_2}(x)$, ..., $\chi_{E_n}(x)$ — характеристические функции множеств E_1, E_2, ..., E_n; рассмотрим интеграл I от суммы этих функций:

$$I = \int_a^b (\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x) + \ldots + \chi_{E_n}(x))\,dx =$$

$$= \int_a^b \chi_{E_1}(x)\,dx + \ldots + \int_a^b \chi_{E_n}(x)\,dx = mE_1 + \ldots + mE_n. \qquad (1)$$

Заметим теперь, что $\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x) + \ldots + \chi_{E_n}(x) \geqslant q$ в любой точке $x \in [a, b]$ (это следует из того, что любая точка $x \in [a, b]$ принадлежит по меньшей мере q из заданных множеств E_i; поэтому по меньшей мере q слагаемых суммы $\chi_{E_1}(x) + \chi_{E_2}(x) + \ldots + \chi_{E_n}(x)$ в точке x равны 1). Поэтому

$$I \geqslant \int_a^b q\,dx = q\,(b - a). \qquad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), получаем:

$$mE_1 + mE_2 + \ldots + mE_n \geqslant q\,(b - a). \qquad (3)$$

Если бы для всех i было $mE_i < \frac{q\,(b-a)}{n}$, то мы бы имели $\sum_{i=1}^{n} mE_i < q\,(b-a)$, что противоречит неравенству (3). Итак, хотя бы для одного из E_i имеет место

$$mE_i \geqslant \frac{q\,(b-a)}{n}.$$

742. Обозначим через F_i множество тех точек x из E, где $i - 1 \leqslant |f(x)| < i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда $E = F_1 \cup F_2 \cup \ldots$. Ясно, что функция $f(x)$ суммируема на множествах F_i. Возьмем какой-нибудь ряд Σa_i с положительными членами и зададим функцию

$\varphi(x)$ на E следующим образом:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{a_i}{\int\limits_{F_i} |f(t)|dt} & \text{при } x \in F_i, \text{ если } \int\limits_{F_i} |f(t)|\,dt > 0, \\ 1 & \text{при } x \in F_i, \text{ если } \int\limits_{F_i} |f(t)|\,dt = 0. \\ (i = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Тогда $\varphi(x)$ — измеримая функция, принимающая положительные значения при всех $x \in E$, и

$$\int\limits_E |f(x)\varphi(x)|\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{F_i} |f(x)\varphi(x)|\,dx \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} a_i < +\infty;$$

следовательно, функция $|f(x)\varphi(x)|$ суммируема на E. Но тогда и функция $f(x)\varphi(x)$ суммируема на E в силу свойства 4) интеграла Лебега от неограниченных функций (с. 85).

743. Пример. Пусть $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$ на $E =]0, 1[$ и $f_n(x) = [\varphi(x)]_n$. Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится всюду на $E =]0, 1[$ к несуммируемой функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{x}$.

744. Пример. Пусть $E = [0, 1]$ и

$$f_n(x) = \begin{cases} n \text{ на } \left[0, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0 \text{ на } \left]\dfrac{1}{n}, 1\right]. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ для всех $x \in]0, 1]$. Однако предел интегралов отличен от нуля:

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,1]} f(x)\,dx = 1 \neq 0.$$

745. Пример. Пусть $E = [0, 1]$ и

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ на } \left[\dfrac{1}{n+1}, \dfrac{1}{n}\right], \\ 0 \text{ в остальных точках отрезка } [0,1]. \end{cases}$$

Тогда $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ всюду на $[0,1]$ и

$$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_{[0,1]} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \ln\frac{n+1}{n} = 0.$$

Однако не существует суммируемой на $[0, 1]$ функции $G(x)$, которая превосходила бы все функции $f_n(x)$ почти всюду на $[0, 1]$. Действительно, любая функция $G(x)$, удовлетворяющая неравенству $G(x) \geqslant |f_n(x)|$ для всех n и почти всех x, будет удовлетворять неравенству $G(x) \geqslant \frac{1}{x}$ почти всюду на $[0, 1]$; а такая функция не суммируема на $[0, 1]$, так как $\frac{1}{x}$ не суммируема (см. свойство 5 интеграла Лебега от неограниченных функций, с. 85).

746. Пример. Для $n = 2^k + i$, где $k = 0, 1, 2, \ldots, 0 \leqslant i < 2^k$, положим

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} k \text{ при } \frac{i}{2^k} \leqslant x < \frac{i+1}{2^k}, \\ 0 \text{ в остальных точках отрезка } [0,1] \end{cases}$$

(т. е. $\varphi_n(x) = k \cdot f_n(x)$, где $f_n(x)$ — функции, построенные в решении задачи 699).

Так же, как в задаче 699, убеждаемся, что последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$ сходится по мере на $E = [0, 1]$ к функции, тождественно равной нулю (так как $mE(\varphi_n > \sigma) \leqslant \frac{1}{2^k}$ при любом $\sigma > 0$), но не сходится к ней в обычном смысле ни в одной точке этого отрезка. Легко видеть, что

$$\int\limits_{[0,1]} \varphi_n(x)\, dx = \frac{k}{2^k}.$$

Так как из $n \to +\infty$ следует $k \to +\infty$, то последовательность этих интегралов сходится к нулю при $n \to +\infty$. Однако не существует суммируемой функции (и вообще конечнозначной функции) $G(x)$ такой, что $|f_n(x)| \leqslant G(x)$ для всех n почти всюду на $[0, 1]$.

747. Пусть сначала функция $f(x)$ неотрицательна на $[a, b]$. Надо доказать, что

$$\lim_{t \to a+0} \int\limits_t^b f(x)\, dx = (L) \int\limits_a^b f(x)\, dx, \tag{1}$$

т. е. что разность

$$(L) \int\limits_a^b f(x)\, dx - \int\limits_t^b f(x)\, dx \tag{2}$$

может быть сделана сколь угодно малой по модулю при t, достаточно близком к a. Пусть $\varepsilon > 0$ — произвольное положительное число, а N — такое число, что $(L) \int\limits_a^b f(x)\, dx - (L) \int\limits_a^b [f(x)]_N\, dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Преобразуем разность (2) следующим образом:

$$\left| (L) \int\limits_a^b f(x)\, dx - (L) \int\limits_t^b f(x)\, dx \right| = \left| (L) \int\limits_a^t f(x)\, dx \right| =$$

$$= \left| (L) \int\limits_a^t (f(x) - [f(x)]_N)\, dx + (L) \int\limits_a^t [f(x)]_N\, dx \right|; \tag{3}$$

под знаком каждого из интегралов в последней части равенства стоит неотрицательная функция; поэтому здесь знаки модуля могут быть отброшены. Оценим теперь каждый интеграл в отдельности:

$$(L)\int_a^t (f(x)-[f(x)]_N)\,dx \leqslant (L)\int_a^b (f(x)-[f(x)]_N)\,dx =$$

$$= (L)\int_a^b f(x)\,dx - (L)\int_a^b [f(x)]_N\,dx < \frac{\varepsilon}{2};$$

$$(L)\int_a^t [f(x)]_N\,dx \leqslant N(t-a).$$

Но $N(t-a) < \frac{\varepsilon}{2}$ при $0 < t-a < \frac{\varepsilon}{2N}$. Итак для всех t, удовлетворяющих неравенству $0 < t-a < \frac{\varepsilon}{2N}$, имеем, согласно равенству (3):

$$\left|(L)\int_a^b f(x)\,dx - \int_t^b f(x)\,dx\right| < \varepsilon,$$

откуда следует, что

$$\lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если теперь суммируемая функция $f(x)$ принимает на $[a, b]$ значения разных знаков и непрерывна всюду на $]a, b]$, то мы представляем ее в виде

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x),$$

где

$$f_+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)),\quad f_-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)).$$

Функции $f_+(x)$ и $f_-(x)$ обе непрерывны на промежутке $]a, b]$ и неотрицательны. Поэтому

$$(L)\int_a^b f(x)\,dx = (L)\int_a^b f_+(x)\,dx - (L)\int_a^b f_-(x)\,dx =$$

$$= \lim_{t\to a+0}\int_t^b f_+(x)\,dx - \lim_{t\to a+0}\int_t^b f_-(x)\,dx = \lim_{t\to a+0}\int_t^b f(x)\,dx.$$

Итак, для любой суммируемой функции $f(x)$, непрерывной всюду на $[a, b]$, кроме точки a, несобственный интеграл Коши равен интегралу Лебега.

748. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & \text{на }]0,\ 1],\\ 0 & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Эта функция интегрируема по Коши на [0, 1]. Действительно,

$$(C)\int_0^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx=\lim_{t\to+0}\int_t^1 \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}\,dx=\lim_{t\to+0}\int_{\frac{1}{t}}^{1} z\cdot\cos z\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)dz=$$

$$=\lim_{t\to+0}\int_1^{\frac{1}{t}}\frac{\cos z}{z}\,dz=\int_1^{+\infty}\frac{\cos z}{z}\,dz,$$

а несобственный интеграл $\int_1^{+\infty}\frac{\cos z}{z}\,dz$, как известно из анализа, существует.

Что же касается интеграла Лебега от функции $\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ на участке [0, 1], то он не существует (см. задачу 740).

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ