МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ ЦЕНТР «МАЛА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ»

Валентина Войцехівська

Функціональні рівняння

КИЇВ – 2012

Рекомендовано науково-методичною радою Національного центру
«Мала академія наук України» (протокол № 2 від 15.05.2012 р.)

Войцехівська В. Функціональні рівняння / Валентина Войцехівська ; [відп. за вип. О. Лісовий]. – К. : ТОВ «Праймдрук», 2012. – 48 с.

У навчально-методичному виданні подано методичні рекомендації щодо вивчення теми «Функціональні рівняння» в курсі математики Малої академії наук України.

Видання розраховане на педагогічних працівників загальноосвітніх та позашкільних навчальних закладів, спеціалістів, які займаються організацією математичної освіти учнів.

Вступ

На сьогодні реформа освіти вимагає пошуку принципово нових теоретичних і практичних рішень щодо покращення загальної якості освіти. Пріоритетне місце у цьому контексті посідають проблеми навчання дисциплін природничо-математичного циклу. В Концепції Державної цільової соціальної програми підвищення якості шкільної природничо-математичної освіти на період до 2015 року зазначено, що в умовах розвитку високотехнологічного інформаційного суспільства в Україні виникає необхідність підвищення якості математичної освіти учнівської молоді.

Навчання в Малій академії наук України сприяє поглибленню математичних знань учнів, удосконаленню умінь та навичок розв’язувати задачі різних рівнів складності. Запорукою досягнення позитивних результатів є ефективне застосування новітніх методик під час розв’язування складних задач.

Особливе значення мають теми, вивчення яких вимагає глибокого розуміння математики як науки, сформованості основних математичних компетентностей учнів. Однією з таких тем є функціональні рівняння, які в курсі програми математики для загальноосвітніх навчальних закладів розглядаються недостатньо, але представлені в завданнях математичних олімпіад, турнірів, конкурсів, зокрема Всеукраїнського конкурсу-захисту науково-дослідницьких робіт учнів – членів МАН України.

Вивчення теми «Функціональні рівняння» курсу математики в Малій академії наук України передбачає вирішення таких завдань:

1. Поглиблення знань учнів з теми «Числова функція».

2. Розвиток інтересу до розв’язання нестандартних математичних задач та математики загалом.

3. Знайомство з основними методами розв’язання функціональних рівнянь.

4. Формування умінь і навичок складати математичні задачі.

5. Активізація навчально-пізнавальної та пошуково-дослідницької діяльності учнів.

6. Підготовка учнів до участі в олімпіадах і конкурсах.

7. Посилення прикладної спрямованості курсу математики та підвищення фундаментальної математичної підготовки.

Для якісного вивчення цієї теми педагог має з’ясувати, який матеріал необхідно повторити до початку викладання нової теми, підібрати задачі для перших уроків і скласти систему вправ для формування практичних навичок розв’язування функціональних рівнянь.

Однією з проблем є добір задач для розвитку конкретних здібностей, схильностей обдарованих учнів з огляду на особливості їх мислення і науковий потенціал. Необхідно створити таку систему задач, яка відповідала б сучасним вимогам позашкільного навчання у Малій академії наук.

Долучення учнів до розв’язування функціональних рівнянь сприятиме їх інтелектуальному розвитку, активізації пізнавальної діяльності.

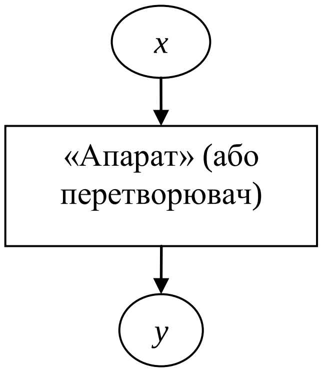
Методичні рекомендації щодо вивчення теми «Функціональні рівняння»

Вивчення теми «Функціональні рівняння» потрібно розпочати з актуалізації деяких фактів про функції.

Учні мають уявлення про числові функції та навички роботи з ними. Важливо, щоб розуміння поняття функції відповідало певному образу.

Сконструювати образ числової функції не важко, причому слово «образ» має зміст не математичного поняття.

Числову функцію можна уявити собі як деякий «апарат» («перетворювач»), який у разі вкладання деякого числа x шляхом перетворення видає нове число y.



Візьмемо, наприклад, функцію $y = \frac{1}{x^2}$. Якщо закласти в цей «перетворювач» число $x = 2$, то на «виході» отримаємо число $y = \frac{1}{4}$, а якщо закласти число $x = \frac{1}{3}$, матимемо $y = 9$. Символічно цей «перетворювач» можна записати так: $\frac{1}{\Delta^2}$. Зрозуміло, що цей «апарат» працює за таким принципом: кожне дійсне число $x \neq 0$ підноситься до квадрату, потім 1 ділиться на x^2. Отриманий результат і дає на «виході» нове число $y = \frac{1}{x^2}$.

Зазначимо, якщо в заданий апарат замість «Δ» поставимо вираз $\frac{1}{t}$ $(t \neq 0)$, то на виході отримаємо $y = t^2$, а якщо поставимо вираз $f(x)$, то отримаємо $y = \frac{1}{f^2(x)}$.

Слід зауважити, що в математиці існують ще й інші «апарати». Поряд із числовою функцією розглядають також такі поняття, як «оператор» і «функціонал» (ці терміни будуть зрозуміліші для учнів 10–11-х класів).

Числова функція є «апарат», який за числом дає число, тобто, в цей «апарат» закладаються числа, на «виході» одержуються числа *(див. рис. 1)*.

Оператор є «апарат», який за числовою функцією дає числову функцію, тобто в цей апарат закладаються функції, на «виході» одержуються також функції (прийнято говорити так: оператор діє на функцію, в результаті чого виникає нова функція *(див. рис. 1)*.

Функціонал є «апарат», який за числовою функцією дає число, тобто закладають в цей апарат функції, а на «виході» отримують числа.

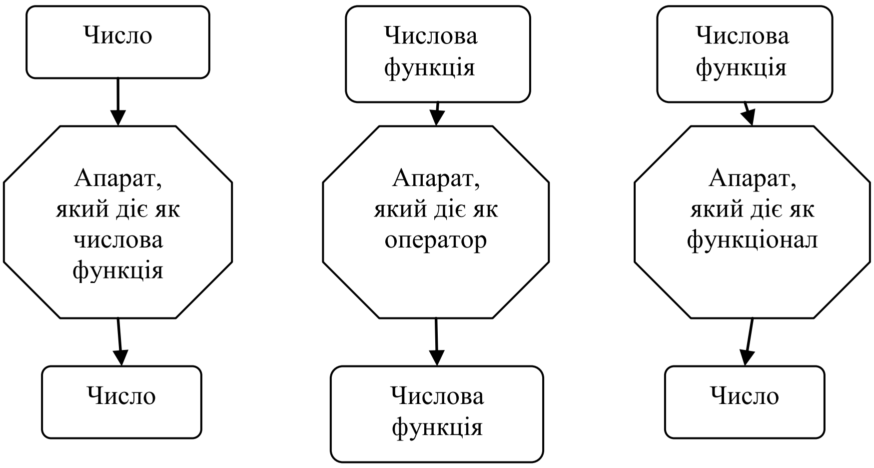


Рис. 1.

Прикладом оператора можуть слугувати такі операції: диференціювання та невизначений інтеграл *(див. рис. 2)*:

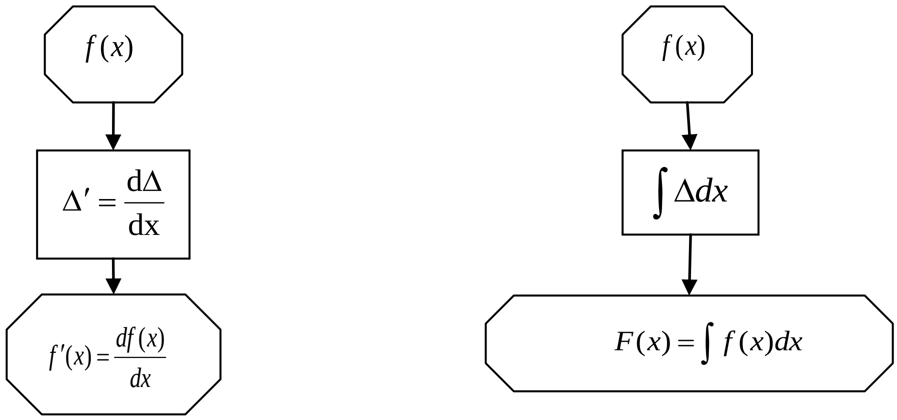


Рис. 2.

Прикладом функціоналу може слугувати визначений інтеграл, тобто вираз $\int_a^b f(x)dx$ *(див. рис. 3)*:

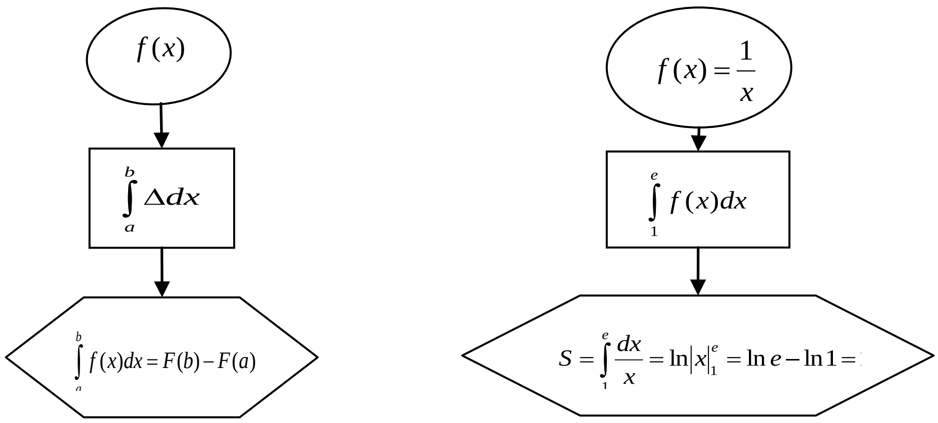


Рис. 3.

Потрібно відповісти на таке запитання: що необхідно задати, щоб виник апарат, який називається числовою функцією? (Запитання про те, як задаються такі «апарати», як оператор і функціонал, потребують додаткових занять).

Для задання такого «апарату», як числова функція, треба задати якесь правило або закон, за яким кожному допустимому числу на «вході» відповідатиме одне перетворене число на «виході».

Числа, які можуть подаватися на «вхід», об’єднаємо в одну множину і позначимо її через *D*, а числа, що отримуються на «виході», об’єднаємо теж в одну множину і позначимо її через *E*.

Візьмемо тепер дві непорожні множини *D* і *E* (необов’язково числові та різні) й поставимо у відповідність кожному елементу *x* із множини *D* за деяким законом або правилом (позначимо його через f) один і тільки один елемент y із множини E. Саме закон f і називається функцією (або відображенням), визначеною на множині D із значенням у множині E.

Таким чином, у заданні функції беруть участь три складові: дві множини D і E (не виключено, що $D = E$) і відповідність f, яка кожному елементу $x \in D$ відносить один елемент $y \in E$. Позначають так: $f: D \to E$ або $D \xrightarrow{f} E$, або $y = f(x)$, або (D, E, f).

Мовою теорії множин відповідність f є підмножиною множини $D \times E$, яка є декартовим прямим добутком множин D і E, тобто $f = \{(x, y): x \in D, y = f(x)\}$, характерною ознакою якої є відсутність у ній пар з однаковими першими компонентами. Множину f називають графіком функції. Отже, множина впорядкованих пар виду $\{\ldots,(x, y),\ldots\}$, тобто пар $\{\ldots(x, f(x)),\ldots\}$ з нерівними першими компонентами задає функцію, яку позначають так: $y = f(x)$. Під час позначення $y = f(x)$ довільний елемент x з множини D називають аргументом функції або незалежною змінною, а символ y – залежною змінною.

Множину перших компонентів пар називають областю визначення функції і позначають $D(f)$ або $D(y)$, а множину других компонентів пар називають областю значень функції і позначають $E(f)$ або $E(y)$.

Якщо задана функція $y = f(x)$, а $\boldsymbol{x}$ – фіксований елемент з D, $\boldsymbol{y}$ – відповідний йому елемент з E, то кажуть, що $\boldsymbol{y}$ є образом елемента $\boldsymbol{x}$, а сам елемент $\boldsymbol{x}$ є прообразом елемента $\boldsymbol{y}$ під час відображення f. Множину D часто ще називають областю відправлення відображення, множину E – областю прибуття, а f – графіком відображення множини D на множину E.

Звернімося до рисунку 4. Він стосується конкретної числової функції: $y = \sqrt{1 - |x|}$. Областю визначення $D(y)$ є відрізок [-1, 1], а областю значень $E(y)$ – відрізок [0, 1].

Для зручності ці множини показані на окремих числових прямих *(рис. 4)*.

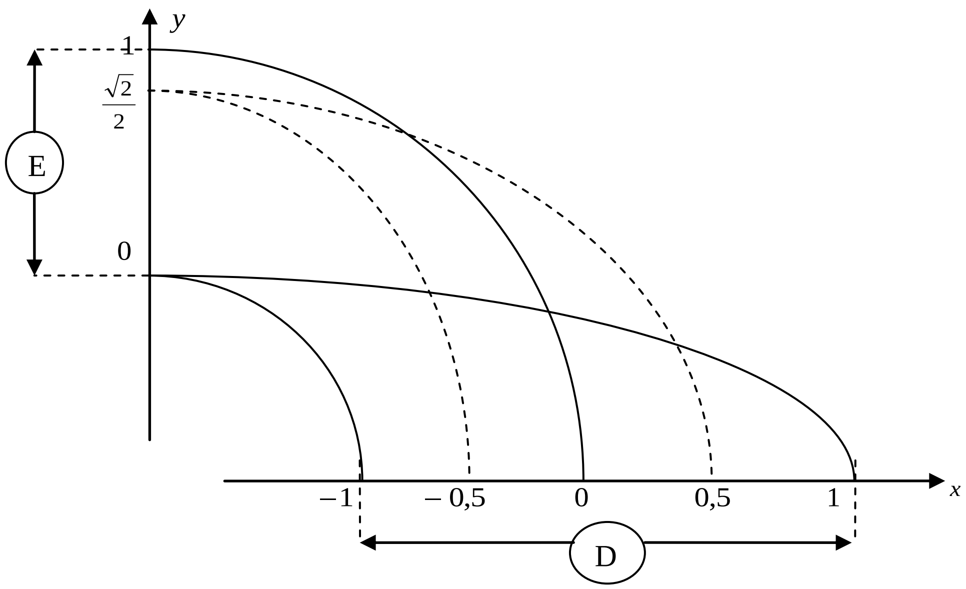


Рис. 4.

Елементи $x = -1$, $x = 1$ перетворюються за законом $f = \sqrt{1-|x|}$ на елемент $y = 0$, тобто елемент $y = 0 \in E$ є образом елементів $x = \pm 1 \in D$. Оскільки елемент $x = 0 \in D$ перетворився в елемент $y = 1 \in E$, то $x = 0$ є прообразом образа $y = 1$.

Таким чином, числова множина $D = [-1;1]$ перетворилася на іншу числову множину $E = [0;1]$ за законом $f = \sqrt{1-|x|}$.

Отже, числова функція – це відображення деякої числової множини D, яка є областю визначення функції, на іншу числову множину E, яка є множиною значень функції.

Таким чином, якщо *числова функція* – це відображення однієї числової множини на іншу числову множину, то *оператор* – це відображення деякої множини числових функцій на іншу множину функцій, а *функціонал* – це відображення деякої множини функцій на деяку числову множину. Як функція можуть виступати і числова функція, і оператор або функціонал.

Зрозуміло, що поняття функції є істотно ширшим, ніж поняття числової функції. У широкому розумінні поняття функції включає в себе і числову функцію, і оператор, і функціонал, оскільки це поняття ототожнюється з відображенням однієї множини на іншу незалежно від природи самих множин.

З арсеналу функцій (відображень) використовуватимемо лише числові функції, тому до числової функції застосовуватимемо термін «функція», виділяючи оператор, функціонал як самостійні поняття.

Функціональні рівняння

Означення. Функціональним рівнянням називають рівність, до складу якої входить незалежна змінна і невідома функція цієї змінної.

Наприклад, рівності виду: 1) $2f(\frac{1}{x})-xf(x)=x$, $x\in R\setminus\{0\}$, 2) $f(\sin x)+f(\cos x)=3$, 3) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ є функціональними рівняннями з невідомою функцією $f(x)$.

Функціональні рівняння можна розглядати як спосіб задання функції, а саме задання функції як розв'язок функціонального рівняння.

У таких рівняннях шукані функції пов'язані з відомими за допомогою операцій утворення складених функцій.

Розрізняють частинний та загальний розв'язки функціонального рівняння. Частинний розв'язок функціонального рівняння – це є функція або система функцій, яка задовольняє рівняння у заданій області визначення. Загальний розв'язок складає сукупність усіх функцій, які задовольняють рівняння. Будь-який розв'язок функціонального рівняння залежить від того, в якому класі функцій воно розв'язується (у класі обмежених, неперервних, диференційованих тощо).

Перш ніж вивчати основні методи розв'язання функціональних рівнянь, розглянемо такі задачі:

Задача 1. Покажіть, що задана функція $y=f(x)$ задовольняє задане функціональне рівняння:

1) $f(x)=x+\frac{1}{4x}$, $4f(\frac{1}{x})-f(x)=\frac{15}{4x}$, $x\neq 0$.

2) $f(x)=3x^2$, $f(\sin x)+f(\cos x)=3$.

3) $f(x)=\cos x$, $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$.

Розв'язання.

1) Якщо $f(x)=x+\frac{1}{4x}$, то $f(\frac{1}{x})=\frac{1}{x}+\frac{1}{4\cdot\frac{1}{x}}=\frac{x}{4}+\frac{1}{x}$, отже,

$4f(\frac{1}{x})-f(x)=4(\frac{x}{4}+\frac{1}{x})-(x+\frac{1}{x})=x+\frac{4}{x}-x-\frac{1}{4x}=\frac{4}{x}-\frac{1}{4x}=\frac{16-1}{4x}=\frac{15}{4x}$, $\quad x\neq 0$. Це і доводить, що задана функція задовольняє задане рівняння.

2) Якщо $f(x)=3x^2$, то $f(\sin x)=3(\sin x)^2=3\sin^2 x$, а $f(\cos x)=3(\cos x)^2=3\cos^2 x$, отже, $f(\sin x)+f(\cos x)=3\sin^2 x+3\cos^2 x=3(\cos^2 x+\sin^2 x)=3\equiv 3$.

Отже, функція $f(x)=3x^2$ задовольняє рівняння $f(\sin x)+f(\cos x)=3$.

3) Якщо $f(x)=\cos x$, то $f(x+y)=\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y$,

$f(y)=\cos y$, $f(x-y)=\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y$, тобто

$f(x+y)+f(x-y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y+\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y=2\cos x\cdot\cos y=2f(x)\cdot f(y)$

Отже, функція $f(x)=\cos x$ задовольняє рівняння

$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot f(y)$.

Задача 2. За яких a функція $f(x)=1-x-a$ буде розв'язком функціонального рівняння: $f(x-f(y))=1-x-y$.

Розв'язання. Припустимо, що функція $f(x)=1-x-a$ є розв'язком вихідного рівняння, тоді $f(y)=1-y-a$, а

$f(x-f(y))=1-(x-f(y))-a=1-x+f(y)-a=1-x+1-y-a-a=2-x-y-2a$.

Підставляючи останній вираз у вихідне рівняння, матимемо тотожність:

$2-x-y-2a\equiv 1-x-y$, звідки $a=\frac{1}{2}$.

Отже, функція $f(x)=\frac{1}{2}-x$ буде розв'язком рівняння.

Таким чином, розглянуті задачі відповідають таким вимогам:

1) задача не є складною і для її розв'язання використано мінімальні теоретичні відомості;

2) формулювання задачі спрямоване не лише на закріплення поняття про розв'язок функціонального рівняння, а й на розкриття ідеї одного з майбутніх методів розв'язання функціональних рівнянь.

Запитання: як знайти розв'язки функціонального рівняння? – Потрібно використати метод підстановок.

Розглянемо спочатку найпростіші функціональні рівняння, які можна розв'язати цим методом.

Задача 1. Знайти функцію, яка визначена для всіх дійсних x і задовольняє рівняння: $f(x^n y) = y^n f(x^n)$

Розв'язання. Якщо така функція існує, то замість x можемо підставляти у рівняння будь-який вираз, який не виходить за межі області визначення функції.

Якщо $x=1$, отримаємо $f(1)=a$, тоді $f(y)=ay^n$. Перевіримо, чи дійсно ця функція задовольняє це рівняння: якщо $f(x)=ax^n$, то $f(x^n y)=a(x^n y)^n$, а $f(x^n)=a(x^n)^n$. Отже, $f(x^n y)=a(x^n y)^n = a(x^n)^n y^n = y^n a(x^n)^n = y^n f(x^n)$.
Перевірка показує, що функція $f(x)=ax^n$ є розв'язком цього рівняння.

Можна запропонувати учням самостійно розв'язати таку задачу.

Задача 2. Знайти функцію, яка визначена $\forall x \neq 0$ і задовольняє рівняння:
$f(x) + 3f(\frac{1}{x}) = x^2$.

Якщо комусь із учнів буде важко знайти ідею розв'язання, таким учням можна допомогти: у вихідному рівнянні поміняти x на $\frac{1}{x}$ (бо $x \neq 0$). Після цього спитати, яке ж рівняння одержали, чи не таке: $f(\frac{1}{x}) + 3f(x) = \frac{1}{x^2}$? Тепер зрозуміло, що разом із вихідним рівнянням отримане рівняння утворює систему двох рівнянь з невідомими $f(x)$ і $f(\frac{1}{x})$:
$$\begin{cases} f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2, \\ f\left(\frac{1}{x}\right) + 3f(x) = \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння такої системи на (-3), а потім додамо з першим рівнянням, у результаті знаходимо: $f(x)=\frac{3}{8x^2}-\frac{x^2}{8}$. Залишилося лише зробити перевірку.

Задача 3. Треба знайти функцію f, яка визначена при всіх $x\neq 1, x\neq 0$ та задовольняє рівняння:

$$(x+1)f(x)+f\left(\frac{x}{x-1}\right)=x.$$

Розв'язання. Якщо така функція існує, то замість x можемо підставити в дане рівняння будь-який вираз, який не виходить за межі області визначення функції. Замінюючи x на $\frac{x}{x-1}$, отримаємо рівняння: $\frac{2x-1}{x-1}f\left(\frac{x}{x-1}\right)+f(x)=\frac{x}{x-1}$, яке містить ті самі невідомі $f(x)$ і $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Маємо таку систему відносно невідомих $f(x)$ і $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$: $\begin{cases}(x+1)f(x)+f\left(\frac{x}{x-1}\right)=x,\\ \frac{2x-1}{x-1}f\left(\frac{x}{x-1}\right)+f(x)=\frac{x}{x-1}.\end{cases}$

Розв'язавши її, маємо: $f(x)=\frac{x-1}{x}$. Перевірка показує, що ця функція задовольняє дане рівняння: $(x+1)\frac{x-1}{x}+\frac{\frac{x}{x-1}-1}{\frac{x}{x-1}}=\frac{x^2}{x}=x$ для $x\neq 0, x\neq 1$.

Логічно після розгляду таких прикладів сформулювати суть методу підстановок.

Суть методу підстановок полягає у тому, що:

1) *рівняння має розв'язок*;

2) *для змінних, які входять до даного рівняння, використовують деякі підстановки, що не виходять за область визначення шуканої функції; так отримують систему рівнянь, де одним із невідомих є шукана функція*;

3) *за допомогою перевірки впевнюються, що знайдена функція задовольняє умови задачі*.

Бажано зазначити важливість кожного пункту методу підстановок.

Головними труднощами під час використання цього методу є вдалий підбір підстановок. Розглянемо деякі приклади.

Задача 4. Знайти функцію f, яка визначена при всіх $x \in R$ і задовольняє рівняння: $f(x+y)+f(y-x)-(y+2)f(x)+y(x^2-2y)=0$.

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує, тоді в результаті підстановки $x=0$, отримаємо: $f(y)+f(y)-(y+2)f(0)-2y^2=0$. Нехай $f(0)=a$ (припустимо, що така функція існує, це підкреслює важливість першого пункту суті методу підстановок), тоді $f(y)=y^2+\frac{1}{2}ay+a$ (*). Перевірка показує, що вираз (*) дає розв'язок функціонального рівняння лише при $a=0$. Остаточно маємо $f(t)=t^2$.

Ця задача підтверджує, що перевірка є важливою частиною розв'язання функціонального рівняння.

Розв'яжемо попередню задачу іншими підстановками, відмінними від попередніх, та порівняємо результати.

Якщо така функція існує, то, ввівши $y=0$, отримаємо:

$f(x)+f(-x)-2f(x)=0$, тобто $f(x)=f(-x)\ \forall x \in R$, а це означає, що

$f(y-x)=f(x-y)$ і вихідне рівняння запишеться так:

$f(x+y)+f(x-y)-(y+2)f(x)+y(x^2-2y)=0$, а при $x=-y$:

$f(0)+f(2x)-(2-x)f(x)-x(x^2+2x)=0$, (1)

а при $x=y$: $f(2x)+f(0)-(2+x)f(x)+x(x^2-2x)=0$. (2)

Віднявши (1) від (2), матимемо $(x+2)f(x)+(x-2)f(x)=2x^3$, звідки $x=0$ або $f(x)=x^2$.

Таким чином, $f(x)=x^2$ є розв'язком вихідного рівняння, про що свідчить перевірка.

Задача, розв'язана різними підстановками, доводить, що розв'язок цього функціонального рівняння не залежить від однозначності вибору підстановок, тобто, різним підстановкам відповідає один і той самий розв'язок.

Задача 5. Знайти всі функції $f: R \to R$ такі, що рівність $f(x - f(y)) = f(f(y)) + x \cdot f(y) + f(x) - 1$ виконується $\forall x, y \in R.$

Розв'язання. Припустимо, що такі функції існують, тоді знайдеться таке значення $y \in R,$ що $f(y) = x$ (де $x \in R$), і будемо мати: $f(0) = f(x) + x^2 + f(x) - 1$ (1), звідки $f(x) = \dfrac{a+1-x^2}{2}$, де $f(0) = a.$ Зрозуміло, коли знайдемо $f(0)$, то знайдемо і $f(x).$ Помилково думати, що $f(0)$ можна знайти з рівності (1), ввівши $x = 0,$ бо при $x = 0$ з (1) випливає $f(0) = 1,$ а це означає, що $f(y) = 0.$ Може не знайтися такого $y,$ щоб $f(y) = 0.$ На це обов'язково слід звернути увагу учнів і запитати: як знайти значення $f(0) = a$? Звичайно ж, можна перевіркою.

Якщо $f(x) = \dfrac{a+1-x^2}{2}$, то $f(x - f(y)) = \dfrac{a+1-(x - f(y))^2}{2} = \dfrac{a+1-(x - \frac{a+1-y^2}{2})^2}{2}$,

$f(f(y)) = \dfrac{a+1-(f(y))^2}{2} = \dfrac{a+1-(\frac{a+1-y^2}{2})^2}{2}$, і будемо мати тотожність:

$$\frac{a+1-(x - \frac{a+1-y^2}{2})^2}{2} \equiv \frac{a+1-(\frac{a+1-y^2}{2})^2}{2} + x \cdot (\frac{a+1-y^2}{2}) + \frac{a+1-x^2}{2} - 1, \quad (2) \text{ де } x, y \in R.$$

Рівність (2) виконується $\forall x, y \in R,$ якщо $\dfrac{a+1}{2} = 1,$ тобто при $a = 1.$ Таким чином, $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2}$. Підстановка показує, що функція $f(x) = \dfrac{2-x^2}{2}$ задовольняє умову.

Задача 6. Розв'язати функціональне рівняння $(D(f) = R)$:

1) $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$,

2) $f(xy) = (f(x))^y$,

3) $f(xy) = \sin y \cdot f(x).$

Розв'язання. Припустимо, що такі функції існують.

1) Якщо $x = y$, отримаємо $f(2x) - f(0) = 4x^2$, і нехай $f(0) = a$, тоді $f(2x) = 4x^2 + a$. Замінюючи тепер x на $\dfrac{t}{2}$, матимемо $f(t) = t^2 + a$.

Перевірка показує, що $f(x) = x^2 + a$ є шуканою.

2) Підстановка $x=1$ дає змогу отримати вираз для $f(y)$, тобто $f(y)=(f(1))^y$, ввівши $a=f(1)$, матимемо $f(y)=a^y$ або $f(x)=a^x$. Зробимо перевірку: $a^{xy}=(a^x)^y=a^{xy}$. Отже, $f(x)=a^x$ є шуканою.

3) Підстановкою $x=1$ отримаємо $f(y)=a\sin y$, де $a=f(1)$. У результаті перевірки впевнюємося, що лише при $a=0$ маємо функцію, яка задовольняє рівняння, тобто $f(x)=0$.

Задачі, розв'язання яких потребує однієї або двох нескладних підстановок.

1. Розв'язати функціональні рівняння $(D(f)=R)$.

1) $f(x+y)=f(x)+y$ Відповідь: $f(x)=x+a$.

2) $f(x+y)=f(x)e^y$ Відповідь: $f(x)=ae^x$.

3) $f(x+y)+f(x-y)=2x^2+2y^2$ Відповідь: $f(x)=x^2$.

4) $af(x)+f\left(\dfrac{1}{x}\right)=ax$ при $x\neq 0, a\neq \pm 1$ Відповідь: $f(x)=\dfrac{a(1-ax^2)}{x(1-a^2)}$.

5) $xf(a-x)-2(a-x)f(x)=1$ при $x\neq 0, x\neq a$ Відповідь: $f(x)=\dfrac{1}{x-a}$.

2. Знайти всі функції $f:R\to R$, якщо рівність $2f(x)+f(1-x)=x^2$ виконується для всіх $x\in R$.

3. Знайти функцію $f:R\to R$, якщо вона задовольняє рівняння: $f((x+y)^2)=f(x^2)+f(y^2)+2xy$.

4. Знайти функцію, яка задовольняє рівняння $(x-2)f(x)+f\left(-\dfrac{2}{x}\right)-xf(2)=5$ при $x\neq 0$ і дослідити її на парність і періодичність.

5. Чи існує така функція f, що для всіх $x,y\in R$ таких, що $x+y\neq 0$ і $y\neq 0$, виконується рівність: $f(xy)=\dfrac{f(x)+f(y)}{x+y}$.

Така система вправ відповідає принципам:

1) доступності – поняття і терміни задач відомі або інтуїтивно зрозумілі учням; розв’язання таких задач передбачає одну або дві нескладні підстановки, а перевірка не потребує великих обчислень;

2) диференціації – складніші задачі (№ 1 (4, 5), № 4, № 5) розв’язують «сильніші» учні, а менш підготовлені виконують простіші задачі;

3) різноманітності – хоча до системи включені однакові за змістом і методом розв’язання задачі, кожна з них має своєрідний набір підстановок.

Розглянемо тепер рівняння, в яких підстановки не так очевидні, причому іноді їх декілька.

Задача 1. Розв’язати функціональне рівняння $(D(f)=R)$: $f(x+y)+f(x-y)-2f(x)(x+y)=2xy(3y-x^2)$.

Розв’язання. Якщо послідовно ввести 1) $x=0, y=t$; 2) $x=t-1, y=1$; 3) $x=-1, y=t-1$, отримаємо систему:

$$\begin{cases} f(t)+f(-t)-2a(1+t)=0 \\ f(t-2)+f(t)=-2(t-1)(2t-t^2-4) \\ f(t-2)+f(-t)-2bt=-2(t-1)(3t-4) \end{cases}, \text{ де } f(0)=a, f(-1)=b.$$

Розв’язуючи цю систему стосовно невідомих $f(t), f(-t), f(t-2)$, отримаємо $f(t)=t^3+t(a-b-1)+a$. Підстановкою впевнюємося, що лише при $a=0, b=-1$ функція $f(t)=t^3+t(a-b-1)+a$ задовольняє це рівняння.

Отже, $f(x)=x^3$ є єдиним розв’язком.

Як бачимо, перевірка дала змогу визначити значення a і b, за яких знайдений клас функцій дійсно є розв’язком.

Задача 2. Розв’язати функціональне рівняння $(D(f)=R)$: $f(x+y)-f(x-y)=2f(x+\frac{\pi}{2})\sin y$.

Розв’язання. Помітимо, що при $y=\pm\frac{\pi}{2}$ $\sin y=\pm1$, тоді здійснимо підстановки: 1) $x=0, y=t$; 2) $x=-\frac{\pi}{2}+t, y=-\frac{\pi}{2}$; 3) $x=-\frac{\pi}{2}, y=-\frac{\pi}{2}+t$.

Отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} f(t) - f(-t) = 2f(\frac{\pi}{2})\sin t, \\ f(t-\pi) - f(t) = -2f(t), \\ f(t-\pi) - f(-t) = -2f(0)\cos t. \end{cases}$$

Позначивши $b = f(\frac{\pi}{2}),\ a = f(0)$ та розв'язавши систему, отримаємо: $f(t) = a\cos t + b\sin t$.

Перевірка показує, що $f(t) = a\cos t + b\sin t$ є шуканою.

Аналогічно прикладам 1, 2 розв'язуються рівняння $(D(f) = R)$:

1) $f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)\cos y$;

2) $f(x+y) + 2f(x-y) = 3xf(x) - y$;

3) $f(x+y) - 2f(x-y) = 2f(y)\cos x$;

4) $2f(x+y) - f(x-y) - (1-y)f(x) = y(6x + x^2 + y)$.

Задача 3. Знайти функцію f з областю визначення $D(f) = R \setminus \left\{-2;0;\frac{1}{3}\right\}$, що задовольняє функціональне рівняння: $2f\left(\frac{x}{x-1}\right) - 3f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) = \frac{13x-4}{2x-3x^2}$. (1)

Розв'язання. Нехай $\frac{3x-2}{2x+1} = \frac{t}{t-1}$, тобто $x = \frac{3t-2}{t-3}$, враховуючи те, що

$$\frac{x}{x-1} = \frac{\frac{3t-2}{t-3}}{\frac{3t-2}{t-3} - 1} = \frac{3t-2}{2t+1}, (x \neq 1, t \neq -\frac{1}{2}), \qquad \frac{13x-4}{2x-3x^2} = \frac{(t-3)(5t-2)}{2t-3t^2}, (x \neq 0, x \neq \frac{2}{3}, t \neq 0, t \neq \frac{2}{3}),$$

дістанемо при підстановці у це рівняння: $2f\left(\frac{3t-2}{2t+1}\right) - 3f\left(\frac{t}{t-1}\right) = \frac{(t-3)(5t-2)}{2t-3t^2}$.

Позначивши t через x, матимемо: $2f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right) - 3f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{(x-3)(5x-2)}{2x-3x^2}$. (2)

Розв'язуючи систему рівнянь (1)-(2) стосовно змінних $f\left(\frac{3x-2}{2x+1}\right)$ і $f\left(\frac{x}{x-1}\right)$, отримаємо: $f\left(\frac{x}{x-1}\right) = \frac{x-1}{x}, (x \neq -\frac{1}{2}, x \neq 0, x \neq \frac{2}{3})$.

І, нарешті, ввівши $\frac{x}{x-1}=z$, де $z\neq\left\{-2;0;\frac{1}{3}\right\}$, причому $\frac{x-1}{x}=\frac{1}{z}$, дістанемо $f(z)=\frac{1}{z}$.

Перевіркою переконуємося, що функція $f(z)=\frac{1}{z}$ задовольняє умову задачі.

Задача 4. Знайти функцію f з областю визначення $D(f)=R\setminus\{0;1\}$, що задовольняє функціональне рівняння: $f(x)+f(\frac{x-1}{x})=1+x.$

Розв'язання: Нехай $\frac{x-1}{x}=t,(x\neq 0),$ тобто $x=\frac{1}{1-t},(t\neq 1),$ дістанемо при підстановці в це рівняння: $f(\frac{1}{1-t})+f(t)=\frac{2-t}{1-t},(t\neq 1)$.

Позначивши t через x, матимемо: $f(\frac{1}{1-x})+f(x)=\frac{2-x}{1-x},(x\neq 1)$

Тепер введемо в дане рівняння $x=\frac{u-1}{u},(u\neq 0)$, тобто $u=\frac{1}{1-x},(x\neq 1)$, дістанемо з урахуванням того, що $\frac{x-1}{x}=\frac{\frac{u-1}{u}-1}{\frac{u-1}{u}}=\frac{1}{1-u},(u\neq 1)$. При підстановці матимемо: $f(\frac{u-1}{u})+f(\frac{1}{1-u})=\frac{2u-1}{u}$.

Позначивши u через x, матимемо: $f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=\frac{2x-1}{x},\ x\in R\setminus\{0;1\}.$

Таким чином, дістанемо систему:

$$\begin{cases} f(x)+f(\frac{x-1}{x})=1+x \\ f(\frac{1}{1-x})+f(x)=\frac{2-x}{1-x} \\ f(\frac{x-1}{x})+f(\frac{1}{1-x})=\frac{2x-1}{x} \end{cases}$$

, розв'язком якої є функція $f(x)=\frac{x^3-x^2-1}{2x(x-1)},x\in R\setminus\{0;1\}.$

Аналогічно можна розв'язати такі функціональні рівняння:

1. $f(x)+f(\frac{4}{2-x})=x,D(f)=R\setminus\{0;2\}.$

2. $f(x)+xf(\frac{x}{2x-1})=2,D(f)=R\setminus\left\{\frac{1}{2};1\right\}.$

3. $xf(x)+2f(\frac{x-1}{x+1})=1,D(f)=R\setminus\{-1;0;1\}.$

4. $f(x)+f(\frac{a^2}{a-x})=x, D(f)=R\setminus\{0;a\}.$

5. $f(\frac{x}{1-x})+f(-\frac{1}{x})=x, D(f)=R\setminus\{0;1\}.$

6. $xf(x)+2f(-\frac{1}{x})=3, D(f)=R\setminus\{0\}.$

7. $f(\frac{x+1}{x-2})+2f(\frac{x-2}{x+1})=x, D(f)=R\setminus\{-1;2;0;1\}.$

Блок такого типу задач надає можливість створити умови для узагальнення учнями цілого класу рівнянь $Af\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)+Bf\left(\frac{c_1x+d_1}{c_2x+d_2}\right)=c$, а саме: під час розв'язування функціональних рівнянь виду $af(x)+bf(\varphi(x))=c$, де a,b,c – відомі сталі або змінні величини, φ – відома функція, f – шукана функція, x – множина, яка визначається залежно від a,b,c,φ, найчастіше використовують підстановки, які зводять ці рівняння до системи лінійних рівнянь. Зауважимо лише, що рівняння виду $Af\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)+Bf\left(\frac{c_1x+d_1}{c_2x+d_2}\right)=c$ завжди можна привести до вигляду $af(x)+bf(\varphi(x))=c$ (*), звичайно, на області визначення.

Це рівняння можна розв'язати так, як розв'язано задачу 4. Рівняння виду (*) можна розв'язати за допомогою матриць і груп, за допомогою рекурентних послідовностей.

Отже, ця система вправ відповідає таким принципам:

1) однотипності – для формування навичок та умінь, вироблення стійких асоціацій необхідні однотипні задачі, розв'язання яких дає змогу не лише знайти певний алгоритм, а й узагальнити цілий клас функціональних рівнянь;

2) послідовного зростання труднощів – варто поступово ускладнювати навчальні задачі з метою збереження інтересу й уваги, дотримання принципу доступності, розвитку розумових і математичних здібностей;

3) узагальнення та пошуково-дослідницькому – своє місце мають посідати задачі, під час розгляду яких виникають запитання:

– Які властивості розв'язаних задач є випадковими, а які – закономірними?

– Як зміниться результат, якщо узагальнити умову задачі?

Пошук відповідей на такі запитання має дослідницький характер і сприяє розвитку навчально-дослідницької діяльності та систематичності її здійснення.

Проілюструємо приклади функціональних рівнянь, що були в останні роки на обласних, всеукраїнських, міжнародних та інших олімпіадах з математики.

Ці рівняння відповідають як вище зазначеним принципам, так і таким, як:

1) принцип професійної спрямованості – надзвичайно важливо, щоб учень аналізував свою діяльність, умів визначати свій рівень під час вивчення конкретної теми, тому до системи задач цієї теми включають задачі з олімпіад і конкурсів різного рівня з метою досягнення кожним учнем свого максимального рівня;

2) принципи внутрішніх зв'язків – плануючи узагальнюючі заняття, слід пам'ятати, що жодний метод сам по собі не дає оптимальних результатів і лише в поєднанні з іншими чи в певному взаємозв'язку, коли один з методів є провідним, інші – допоміжними, можна очікувати на високу результативність навчання і розуміння внутрішньої логіки математики. До системи вправ необхідно включити такі задачі, розв'язання яких ґрунтується на використанні класичних методів тем олімпіадного рівня, зокрема на методі скінченних різниць, методі математичної індукції, принципі крайнього тощо.

Таке поєднання методів під час розгляду однієї теми є принципово важливим, позаяк є необхідною умовою для розуміння математики.

Задача 1 (Обласна олімпіада юних математиків, 1989 р.).

Знайдіть усі функції $f : R \to R$, для яких за будь-яких x, y виконується рівність: $f(x - f(y)) = 1 - x - y.$

Розв'язання. Оскільки $y \in R$, а $y = 0$ і $f(0) = a$. Підставивши $y = 0$ і $f(0) = a$ в задане рівняння, отримаємо: $f(x - a) = 1 - x$, далі, підставивши $x - a = t$, тобто

$x = t + a$, матимемо: $f(t) = 1 - t - a$. Підстановка показує, що це рівняння можливе при $a = \frac{1}{2}$.

Отже, $f(x) = \frac{1}{2} - x$ – єдина функція, яка задовольняє умову.

Задача 2 (Всеукраїнська олімпіада юних математиків, 1996 р.).

Знайдіть усі функції f, визначені на множині дійсних чисел, які набувають дійсних значень і для всіх $x, y \in R$ задовольняють співвідношення: $f(x^3 - y^3) = (f(x+y))^3$.

Розв'язання. Підставимо $x = y = 0$, тоді $f(0) = (f(0))^3$. Нехай $f(0) = a$, тоді $a^3 - a = 0$, звідси $a = 0$ або $a = \pm 1$.

Для $x = -y = \sqrt[3]{\frac{t}{2}}$ маємо $f(t) = (f(0))^3 = a^3 = a = 0$.

Отже, функція f в усіх точках набуває одного й того самого значення $a = f(0)$. Тому шуканими функціями можуть бути лише такі функції: $f(x) \equiv 0, f(x) \equiv 1, f(x) \equiv -1$.

Перевірка показує, що всі вони задовольняють це рівняння.

Задача 3 (Друга Соросівська олімпіада з математики).

Знайти всі функції f, визначені на всій множині дійсних чисел, і такі, що $f(x+y) = f(x)\cos y + f(y)\cos x$ для всіх $x, y \in R$.

Розв'язання. Оскільки $\cos\frac{\pi}{2}$=0, то корисною буде така підстановка: $x = \frac{\pi}{2} + t, y = \frac{\pi}{2}$.

Підставимо в задане рівняння: $f(\pi + t) = f(\frac{\pi}{2} + t)\cos\frac{\pi}{2} + f(\frac{\pi}{2})\cos(\frac{\pi}{2} + t)$ або $f(\pi + t) = -f(\frac{\pi}{2})\sin t$. Нехай $f(\frac{\pi}{2}) = a$, тоді $f(\pi + t) = -a\sin t$.

Підставивши $\pi + t = x$, тобто $t = x - \pi$, одержимо: $f(x) = -a\sin(x - \pi) = a\sin x$. Перевірка показує, що $f(x) = a\sin x$ задовольняє це рівняння за будь-яких $a \in R$.

Задача 4 (з матеріалів заключного туру 54-ї Московської математичної олімпіади, 1991 р.).

Функція $f(x)$ за кожного значення $x \in (-\infty;+\infty)$ задовольняє рівність: $f(x)+(x+\frac{1}{2})f(1-x)=1.$

1. Знайдіть $f(0)$ та $f(1)$.

2. Знайдіть усі функції $f(x)$.

Розв'язання. Підставимо $1-x=t$, тобто $x=1-t$ в це рівняння: $f(1-t)+(\frac{3}{2}-t)f(t)=1$. Позначивши t через x, одержимо таку систему:

$\begin{cases} f(x)+(x+\frac{1}{2})f(1-x)=1 \\ f(1-x)+(\frac{3}{2}-x)f(x)=1 \end{cases}$. Звідси $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\frac{1}{2}-x}, x \neq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}, x=\frac{1}{2} \end{cases}$. Отже, $f(0)=2, f(1)=-2.$

Задача 5 (Третя Соросівська олімпіада).

Знайдіть усі функції f, які визначені на множині невід'ємних дійсних чисел, набувають дійсних значень і для будь-яких дійсних x, y задовольняють рівність: $f((x+y)^2)=f(x^2)+f(y^2)+2xy$.

Розв'язання. Спочатку підставимо $x=y=0$ і отримаємо $f(0)=0$. Далі підставимо $x=-y$, одержимо:

$f(0)=2f(x^2)-2x^2$ або $f(x^2)=x^2$, тобто $f(t)=t$ для всіх невід'ємних t.

Отже, $f(x)=x$, це підтверджує перевірка.

Задача 6. Знайти всі функції f і g, які задовольняють тотожність: $f(x)+f(y)+g(x)-g(y)=\sin x+\sin y$.

Розв'язання. При $x=y$ маємо $f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+\sin y)$, і тотожність матиме вигляд:

$g(x)-g(y)=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)-\frac{1}{2}(\sin y-\cos y)$ або

$g(y)-\frac{1}{2}(\sin y-\cos y)=g(x)-\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)$.

Зрозуміло, що функція $g(x)=\frac{1}{2}(\sin x-\cos x)+c, c\in R$.

Перевірка показує, що знайдені функції задовольняють цю тотожність.

Задача 7. Знайти всі функції $f: R \to R$, такі, що $\forall x, y, z \in R$: $f(xy) + f(yz) - f(x) f(xz) \geq 1$.

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує, тоді в результаті підстановок:

1) $x = y = z = 1: f(1) + f(1) - f^2(1) \geq 1$, звідки $(f(1)-1)^2 \leq 0$, тобто $f(1) = 1$.

2) $x = z = 1: f(y) + f(y) - f^2(1) \geq 1,\ f(y) \geq 1$, або $f(x) \geq 1$.

3) $z = y = 1: f(x) + f(1) - f^2(x) \geq 1,\ f(x)(1 - f(x)) \geq 0$, тому $0 \leq f(x) \leq 1$.

Зважаючи на пункти 2) і 3) отримаємо: $f(x) = 1$. Легко перевірити, що ця функція задовольняє вихідну нерівність.

Задача 8. Знайти всі функції $f: R \to R$, які $\forall x, y, z \in R$ задовольняють рівняння: $f(x+y) = \{f(x)\} + \{f(y)\}$.

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує, тоді в результаті підстановок:

1) $x = y = 0$: $f(0) = 2\{f(0)\}$. Але $f(0) = [f(0)] + \{f(0)\}$, тому $[f(0)] = \{f(0)\}$, звідки $f(0) = 0$.

2) $y = 0: f(x) = \{f(x)\} + \{f(0)\} = \{f(x)\} \forall x \in R$, тому $0 \leq f(x) < 1$.

3) $x = y: f(2x) = 2\{f(x)\}$, звідки $f(2^n x) = 2^n \{f(x)\} = 2^n f(x)$.

Отже, $f(x) = \dfrac{f(2^n x)}{2^n} = 0$ при $n \to \infty$(бо $f(x)$ обмежена, згідно з пунктом 2).

Перевірка показує, що знайдена функція $f(x) = 0$ задовольняє це рівняння.

Задача 9. Знайти всі такі функції $f: R \to R$, що $\forall x, y \in R$: $f(x^2 + y) = f(x) + f(y^2)$.

Розв'язання. Якщо така функція існує, то при:

1) $x = y = 0: f(0) = 0$,

2) $y = -x^2: f(x) + f(x^4) = 0$,

3) $y = 0: f(x^2) = f(x) \Rightarrow f(x^4) = f(x^2)$.

Отже, з $(2) - (3) \Rightarrow f(x) = 0$. Перевірка показує, що знайдена функція задовольняє умову задачі.

Задача 10. Знайти всі такі функції $f: R \to R$, для яких виконуються умови:

а) $f(x)=0$ має один розв'язок;

б) $f(y+f(x))=f(x^2-y)+4f(x)y \quad \forall x,y\in R$.

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує, тоді в результаті підстановок:

1) $y=x^2$ отримаємо: $f(x^2+f(x))=f(0)+4f(x)x^2$; (1)

2) $y=-f(x)$ отримаємо: $f(0)=f(x^2+f(x))-4f^2(x)$. (2)

Додавши рівності (1) та (2), матимемо: $4f(x)(x^2-f(x))=0$, звідки $f(x)=0$ або $f(x)=x^2$.

Але $f(x)=0$ не задовольняє умову задачі, тому $f(x)=x^2$ – єдиний шуканий розв'язок.

Задача 11. Знайти всі такі функції $f:R\to R$, що $\forall x,y\in R: xf(y)+yf(x)=(x+y)f(x^2+y^2)$.

Розв'язання. Якщо така функція існує, то при:

1) $x=-y$: $-yf(y)+yf(-y)=0$, звідки $y(f(-y)-f(y))=0$ і $\forall y\neq 0$: $f(y)=f(-y)$.

Отже, $\forall y$: $f(y)=f(-y)$.

2) $x=0$: $yf(0)=yf(y^2)$, звідки $y(f(0)-f(y^2))=0$ $\forall y\neq 0: f(y^2)=f(0)$. Але $f(y^2)=f(-y^2)$, тому $f(x)=f(0)$ $\forall x\neq 0$.

Таким чином, $f(x)$ має вигляд $f(x)=\begin{cases} c, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$. Оскільки при $x=0,\, y\neq 0\Rightarrow x^2+y^2\neq 0$ і $0\cdot f(y)+yf(0)=yf(0)=y\cdot a;\quad (x+y)\cdot f(x^2+y^2)=cy,$ тобто $c=a$.

Отже, $f(x)=c,\ \forall x\in R$. Ця функція задовольняє умови задачі.

Відповідь. $f(x)=c,\ c\in R$.

Задача 12. Нехай Q^+ – множина додатних раціональних чисел. Знайти всі функції $f:Q^+\to Q^+$, які для кожного $x\in Q^+$ задовольняють умови:

1) $f(x+1)=f(x)+1$,

2) $f(x^2)=(f(x))^2$.

Розв’язання. Нехай $x=1$, тоді за умовою 2 маємо $f(1)=f^2(1)$, звідси $f(1)=0$ або $f(1)=1$. Оскільки $0\notin Q^+$, то $f(1)=1$. Покажемо за індукцією, що $f(n)=n,\ n\in N$.

Справді, нехай $f(n-1)=n-1$. Тоді за умовою 1 дістанемо, що $f(n)=f(n-1+1)=f(n-1)+1=n-1+1=n$.

Далі за індукцією покажемо, що $f(n+x)=f(x)+n$.

Якщо $n=1$, маємо умову 1. Нехай $f(x+n-1)=f(x)+n-1$. Оскільки $x+n-1\in Q^+$, то $f(x+n)=f(y+1)=f(y)+1=f(x+n+1)=f(x)+n-1+1=f(x)+n$.

Тепер нехай $r=\dfrac{m}{n}$ – довільне раціональне число, таке, що $r\in Q^+$. Зробимо підстановку $x=n+\dfrac{m}{n}$, де $m,n\in N$. Але $x\in Q^+$, то згідно з умовою 2 матимемо:

$$f\left(\left(n+\frac{m}{n}\right)^2\right)=f^2\left(n+\frac{m}{n}\right) \text{ або } f\left(n^2+2m+r^2\right)=f^2(n+r).$$

Оскільки $n^2+2m=l\in N,$ то згідно з умовою 2:

$$f\left(n^2+2m+r^2\right)=f\left(l+r^2\right)=f\left(r^2\right)+l,\ f(r+n)=f(t)+n.$$

Отже, рівність (*) можна подати також у вигляді:

$f\left(r^2\right)+l=\left(f(r)+n\right)^2$ або $f(r^2)+n^2+2m=f^2(r)+2nf(r)+n^2$, звідки $m=nf(r)$, тому що $f\left(r^2\right)=f^2(r)$. Таким чином, $f(r)=r.$

Перевірка підтверджує, що ця функція задовольняє умову задачі.

Отже, $f(x)=x, x\in Q^+$.

Ця задача була у завданнях Всеукраїнської математичної олімпіади юних математиків IV етапу (метод розв’язання схожий на метод Коші – аналітичний метод).

Задача 13 (Міжнародна олімпіада з математики, 1992 р.).

Нехай R – множина дійсних чисел. Знайдіть усі функції $f:R\to R$, такі, що $f\left(x^2+f(y)\right)=y+f^2(x)$ для всіх $x,y\in R$.

Розв’язання. Позначимо $a=f(0)$ і при $x=0, y=0$ з даного рівняння отримаємо:

$f(f(y)) = y + a^2$ для всіх $y \in R$ (1)

$f(x^2 + a) = f^2(x)$ для всіх $x \in R$. (2)

З рівності (2) при $x = 0$ випливає, що $f(a) = a^2$. (3)

Додавши (2) з (3), отримаємо: $a^2 + f(x^2 + a) = f^2(x) + f(a)$.

З останнього випливає, що $f(a^2 + f(x^2 + a)) = f(f^2(x) + f(a))$.

Згідно з (1) і (3) прийдемо до рівності $x^2 + a + a^4 = a + (x + a^2)^2$, звідки $a = 0$. Підставляючи $a = 0$ в (1) та (2), будемо мати: $f(f(y)) = y$ i $f(x^2) = f^2(x)$ (4) (5).

З рівності (5) випливає, що $f(x) \geq 0$ при $x \geq 0$. Якщо $f(x) = 0$ для деякого x, то $0 = f^2(x) = f(x^2) = f(x^2(x)) = x + f(x^2) = x.$. Отже, $f(x) > 0$ при $x > 0$.
Змінюючи y на $f(y)$ в цьому рівнянні та використовуючи (4), (5), отримаємо $f(x^2(y)) = f(x^2) + f(y)$, а отже, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ при $x \geq 0$.

Остання рівність дає змогу сказати, що $f(x) = x$.

Задача 14. Знайти всі такі функції $f : R \to R$, що $\forall x, y \in R : f(x^4 + y) = x^3 f(x) + f(f(y))$.

Розв’язання. Якщо така функція існує, то при:

1) $y = 0$: $f(x^4) = x^3 f(x) + f(f(0))$;

2) $x = 0$: $f(y) = f(f(y))$;

3) $x = 1$ в (1): $f(1) = f(1) + f(f(0)) = f(1) + f(0)$, звідки $f(0) = 0$;

4) тобто при $y = 0$, отримаємо: $f(x^4) = x^3 f(x)$ і при $x = -x$:

$f(x^4) = (-x)^3 f(-x) = x^3 f(x)$, звідки $x^3(f(-x) + f(x)) = 0$, тобто

$\forall x \neq 0 : f(-x) = -f(x)$;

5) отже, $\forall x : f(-x) = -f(x)$.

Якщо існує $x_0 : f(x_0) = 0$ і $x_0 \notin \{0, -1, 1\}$, то $f(x_0^4) = 0, f(x_0^{16}) = 0, \ldots, f(x_0^{4^k}) = 0, \ldots$

(зрозуміло, що $x_0^{4^a} \neq x_0^{4^b}$), тому $f(x) = 0$ – має нескінченну множину розв’язків.

Отже, $\forall x \notin \{0, -1, 1\}$ $f(x) \neq 0$.

Якщо $f(1)=0,$ то при $x=1$ у початковій умові, отримаємо: $f(1+y)=f(f(y))=f(y)$. Тоді $f(n)=f(n-1)=...=f(1)=0$ і $\forall x\in Z: f(x)=0.$ Аналогічно для $f(-1)=0$.

Отже, $f(1)\neq 0,\ f(-1)\neq 0$. Тому існує єдине значення $x,$ таке, що $f(x)=0.$

Покажемо, що f – ін'єктивна. Припустимо, що $f(x)=f(y),\ x\neq y;\ \Delta=x-y\neq 0$.

Вважатимемо, що $y<0$. Якщо $x,y>0$, то $f(-x)=f(-y)$ з (5) і як x,y беремо $-x,-y$. Тоді $f(z^4+y)=z^3f(z)+f(y)$ і $f(z^4+x)=z^3f(z)+f(x)$, а з цих двох рівностей випливає, що $f(z^4+x)=f(z^4+y)\ \forall z\in R$.

Оскільки $y<0,$ то існує $z_0=\sqrt[4]{-y}$, тоді $f(z_0^4+x)=f(0)=0$. Але $f(z_0^4+x)=f(x-y)=f(\Delta)\neq 0$, бо при $f(\Delta)=0$ мали б $\Delta=0$. Отже, f – ін'єктивна, тому з (2) випливає, що $f(x)=f(f(x))$, звідки $x=f(x)\ \forall x\in R.$

Перевіркою переконуємося, що ця функція задовольняє умову задачі.

Отже, $f(x)=x, x\in R$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти всі функції $f:R\to R$, що $\forall x,y,z\in R:\ 3f(x+2y+3z)\leq f(x+y)+f(y+z)+f(z+x)$.
2. Знайти всі функції $f:R\to R$, для яких $\forall x,y,z\in R:\ f(x^2+y)+f(f(x)-y)=2f(f(x))+2y^2$.
3. Знайти всі такі функції $f:R\to R$, що $\forall x,y\in R:\ f(xf(x)+f(y))=x^2+y.$
4. Знайти всі дійсні функції $f(x)$, визначені на множині всіх дійсних чисел, такі, що для будь-яких дійсних x, y виконується рівність: $f(x+2^y)=f(2^x)+f(y)$.
5. Знайти всі такі функції $f:R\to R$, які задовольняють умови:

   а) $|f(x)|\geq 1,$

   б) $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1+f(x)f(y)}\ \ \forall x,y\in R$.
6. Знайти всі функції $f:R\to R$, які задовольняють умови:

   а) $f(x)+f(y)-1\leq f(x+y)\leq f(x)+f(y)\ \ \forall x,y\in R$, б) $f(x) \geq x + f(0) \quad \forall x \in [0;1)$,

в) $f(-1) = f(1) = 0$.

7. Нехай $S = \{0,1,2,...\}$ – множина невід'ємних цілих чисел. Знайти всі функції *f*, які визначені на *S* і набувають своїх значень у *S*, такі, що $f(m + f(n)) = f(f(m)) + f(n)$ для всіх $m, n \in S$.

8. Нехай S – множина чисел, які належать *R*, більших за -1. Знайти всі функції $f : S \to S$, які задовольняють умови:

а) $f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x), \forall x, y \in S$,

б) $\dfrac{f(x)}{x}$ строго зростає на кожному з проміжків $-1 < x < 0$, $x > 0$.

9. Нехай Q^+ – множина додатних раціональних чисел. Наведіть приклад функції $f : Q^+ \to Q^+$, такої, що $f(xf(y)) = \dfrac{f(x)}{y}, \forall x, y \in Q^+$.

Розглянемо розв'язування задач такого типу.

Задача 1. Чи існує така функція $f : R \to R$, що $\forall x, y \in R$ задовольняє дві умови:

а) якщо $x \neq y$, то $f(x) = f(y)$;

б) $f(x^2 - 2005x) - f^2(2x - 2006) \geq \dfrac{1}{4} \quad \forall x \in R$?

Розв'язання. Припустимо, що така функція f існує, тоді з умови б) знайдемо значення цієї функції в тих точках, де $x^2 - 2005x = 2x - 2006$, тобто:

1) при $x = 1$ із нерівності $f(x^2 - 2005x) - f^2(2x - 2006) \geq \dfrac{1}{4}$

випливає: $f(-2004) - f^2(-2004) \geq \dfrac{1}{4}$, звідки $(f(-2004) - \dfrac{1}{2})^2 \leq 0$, отже $f(-2004) = \dfrac{1}{2}$;

2) при $x = 2006$ із нерівності $f(x^2 - 2005x) - f^2(2x - 2006) \geq \dfrac{1}{4}$ випливає:

$f(2006) - f^2(2006) \geq \dfrac{1}{4}$, звідки $(f(2006) - \dfrac{1}{2})^2 \leq 0$ і $f(2006) = \dfrac{1}{2}$.

Таким чином, для двох різних чисел $x=-2004$ і $y=2006$ ми отримали $f(x)-f(y)=\frac{1}{2}$, що суперечить умові а). Отже, такої функції не існує.

Задача 2. Чи існує така функція $f:R\to R,$ що $\forall x,y\in R:\ f(x^2y^2)=\max(f(x),y^2)+\min(f(y),x^2)$?

Розв'язання цієї задачі базуватиметься на відомій рівності: $\min(a,b)+\max(a,b)=a+b$. При $x=y$ отримаємо з цього рівняння таке: $f(x^4)=\max(f(x),x^2)+\min(f(x),x^2)=f(x)+x^2$. Підставивши $x=1$, будемо мати, що $f(1)=f(1)+1$, тобто $0=1$. Це протиріччя і доводить, що такої функції f не існує.

Задача 3. Чи існує така функція $f:R\to R,$ що задовольняє дві умови:

а) f – диференційована на R;

б) $f'(2005)=1$;

в) $(f(2005+x))^3=(f(2005-x))^2+x\quad \forall x\in R$?

Розв'язання. Припустимо, що така функція f існує, тоді з третьої умови матимемо: $(*)\ \ 3f^2(2005+x)\cdot f'(2005+x)=2f(2005-x)\cdot f'(2005-x)+1$,
бо f – диференційована на R.

Підставивши $x=0$ у рівність $(*)$, будемо мати:
$3f^2(2005)\cdot f'(2005)=2f(2005)\cdot f'(2005)+1$, але за умовою $f'(2005)=1$, тому:
$3f^2(2005)-2f(2005)-1=0$, звідки $f(2005)=1$ або $f(2005)=-\frac{1}{3}$.

Останнє суперечить означенню числової функції, бо одному значенню $x=2005$ відповідають за законом f два різні значення 1 і $-\frac{1}{3}$.

Отже, такої функції не існує.

Задача 4. Чи існує функція $f:R\to R$, що задовольняє дві такі умови:

а) множина значень f збігається з R;

б) для всіх $x\in R$ виконується $f\big(f(x)\big)=\big(f(x)+1\big)(x+1)$?

Розв'язання. З умови а) випливає, що знайдеться $y\in R$ таке, що $f(y)=-1$. Підставимо це у дане рівняння й одержимо $f\big(f(y)\big)=0$, тобто $f(-1)=0$.

Підставляючи в дане рівняння $x=-1$, маємо $f(f(-1))=0$, тобто $f(0)=0$. Тепер підставимо у рівняння $x=0$ й одержимо $f(0)=1$.

Одержали, що при $x=0$ $f(0)=1$ і $f(0)=0$. Це суперечить означенню функції. Значить, такої функції не існує.

Задача 5. Чи існує функція $f: R^2 \to R$, що задовольняє такі умови:

а) функція набуває всіх дійсних значень;

б) $f(x,y)=-f(y,x) \forall x,y \in R$;

в) $f(x, f(y,z)) = 2001 f(f(x,y),z) \forall x,y,z \in R$.

Розв'язання. Покажемо, що такої функції не існує:

$$f(f(x,y),z) = -f(z, f(x,y)) = -2001 f(f(z,x),y) = 2001 f(y, f(z,x)) = 2001^2 f(f(y,z),x) =$$
$$= -2001^2 f(x, f(y,z)) = -2001^3 f(f(x,y),z)$$

Звідси $f(f(x,y),z)=0 \forall x,y,z \in R$, що суперечить пункту а) умови.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Чи існує функція f, яка визначена і диференційована на R, така, що:

а) $f(x) \geq f(x+\sin x)$ $\forall x \in R$,

б) $f'(x)=0$ має скінчену кількість коренів?

2. Чи існують такі функції $f(x)$ і $g(x)$, що $\forall x,y \in R$: $x^2+xy+y^2 = f(x)+g(y)$?

3. Чи існує такий многочлен $P(x)$, що $\forall x \in R: P'(x) \cdot P''(x) > P(x) \cdot P'''(x)$?

4. Чи існує функція $y=f(x)$, яка одночасно задовольняє дві умови:

а) для всіх $x \in R$ виконується рівність $f(f(x))=-x$;

б) для будь-яких $a<b$ функція $f(x)$ на проміжку $[a;b]$ набуває всіх проміжних значень між $f(a)$ та $f(b)$?

5. Чи існує функція $f(x)$, яка задовольняє такі умови:

а) $f(x+y)=f(x)+f(y)$ для всіх $\forall x,y \in R$;

б) $f(1)=\sqrt{2}$, $f(\sqrt{2})=1$;

в) $f(x)$ є обмеженою на проміжку $[1;\sqrt{2}]$.

Відповідей до задач 1–5 не існує.

Інші методи

Зауважимо, що існують інші методи розв’язання функціональних рівнянь: метод Коші, який полягає в тому, що розв’язок рівняння, тобто функцію $f(x)$, знаходять спочатку для $x \in N$, потім для всіх $x \in Q$ і, нарешті, для всіх $x \in R$, цей метод застосовують за умови неперервності і монотонності функції $f(x)$); метод граничного переходу, метод диференціювання, метод крайнього, метод математичної індукції, метод зведення до рівняння у скінченних різницях. Ці методи базуються на методі підстановок. Використання того чи іншого методу під час розв’язання функціонального рівняння залежить від умови задачі.

Перед ознайомленням з іншими методами слід запропонувати учням самостійно розв’язати такі задачі:

Задача 1. Функція $f(x)$ $\forall$ $x \in R$ задовольняє рівняння: $f(x+1) = f(x) + 2x - 2005$. Знайти $f(2005)$, якщо $f(0) = 0$.

Задача 2. Нехай маємо функцію *f*: *Z*→*N*, яка для будь-якого цілого *k* задовольняє умову: $6f(k+4) - 3f(k+3) - 2f(k+2) - f(k+1) = 0$. Довести, що функція *f* є сталою.

Задача 3. Функція f задана на проміжку $[1;+\infty)$ і при всіх $x \geq 1$ задовольняє нерівність $\frac{f(2x)}{\sqrt{2}} \leq f(x) \leq x$. Довести, що $f(x) < \sqrt{2x}$ при кожному $x \geq 1$.

Розв’язати запропоновані задачі, використовуючи лише підстановки без допоміжних математичних засобів, неможливо. Для розв’язання потрібно використати такі методи, як: метод крайнього, метод математичної індукції, метод зведення до рівняння у скінчених різницях.

Метод скінчених різниць

Задача 1. Знайти всі функції $f: N \to N$, для яких $f(1)=1$ і при $\forall x,\ y \in N$: $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$.

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує. Нехай $y=1$, тоді $f(x+1) - f(x) = x+1$.

Послідовно підставляючи замість x $1,2,3,...,(n-1)$, отримаємо:

$f(2) - f(1) = 2$,

$f(3) - f(2) = 3$,

....

$f(n) - f(n-1) = n$.

Додавши ці рівності, отримаємо $f(n) = f(1) + 2 + 3 + ... + n = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n-1)}{2}$,

тобто, $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

Перевіркою переконуємося, що $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$ задовольняє умову задачі.

Задача 2. Функція $f(x)$ $\forall$ $x \in R$ задовольняє рівняння: $f(x+1) = f(x) + 2x - 2005$. Знайти $f(2005)$, якщо $f(0) = 0$.

Розв'язання. Припустимо, що така функція існує $f(x)$, для якої $f(x+1) = f(x) + 2x - 2005$ $\forall$ $x \in R$.

Послідовно підставляючи замість x $0, 1, 2, 3,..., 2004$, отримаємо:

$f(1) = f(0) + 2 \cdot 0 - 2005$,

$f(2) = f(1) + 2 \cdot 1 - 2005$,

....

$f(2004) = f(2003) + 2 \cdot 2003 - 2005$,

$f(2005) = f(2004) + 2 \cdot 2004 - 2005$.

Додавши ці 2005 рівностей, отримаємо

$$f(2005) = 2(1+2+...+2004) - 2005\cdot 2005 = 2\cdot\frac{1+2004}{2}\cdot 2004 - 2005^2 = -2005.$$

Тобто $f(2005) = -2005.$

Аналогічно розв'язуються такі задачі:

Задача 3. Функція $f(x)\ \forall\ x \in R$ задовольняє рівняння: $f(x+1) = f(x) + 2x + 3$. Знайти $f(2002)$, якщо $f(0) = 1$.

Задача 4. Функція $f(x)\ \forall\ x \in R$ задовольняє рівняння: $f(x+1) = f(x) + 2x + 1$. Знайти $f(2002)$, якщо $f(0) = 0$.

Принцип крайнього у функціональних рівняннях

Під час розв'язування багатьох задач варто розглянути елемент, на якому деяка величина набуває найбільшого або найменшого значення. Наприклад, найбільше або найменше число, найбільший або найменший кут, лівий кінець відрізка, правий кінець відрізка тощо.

Якщо задача містить невідомі або конфігурації, які є в певному розумінні рівноправними, то доцільно зосередити увагу на «крайньому» елементі. Розгляд крайнього елемента в таких задачах – це та ідея, яка сприяє пошуку правильного шляху розв'язання. Такий підхід називають принципом (правилом) крайнього.

Задача 1. Нехай R – множина всіх дійсних чисел. Чи існує функція $f : R \to R$, яка одночасно задовольняє такі три умови:

1) існує таке додатне число с, що для $\forall x \in R$ виконується нерівність $|f(x)| < c$;

2) $f(1) = 1$;

3) для всіх $x \neq 0$ виконується рівність $f\left(x + \frac{1}{x^2}\right) = f(x) + \left(f\left(\frac{1}{x}\right)\right)^2$?

Розв'язання. Припустимо, що функція f задовольняє три дані умови. Нехай m – таке найменше натуральне число, яке для всіх $x \in R$ $f(x) \leq \frac{m}{4}$. З умов (2) та (3) випливає, що $f(2) = f(1 + 1^2) = f(1) + (f(1))^2 = 2$, і тому $m \geq 8$. Знайдеться x_0 – таке, що $f(x_0) > \frac{m-1}{4}$, тоді $\left(f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right)^2 = f\left(x_0 + \frac{1}{x_0^2}\right) - f(x_0) < \frac{m}{4} - \frac{m-1}{4} = \frac{1}{4}$,

$\left|f\left(\frac{1}{x_0}\right)\right| < \frac{1}{2}$.

Використовуючи умову (3) для $x = \frac{1}{x_0}$, маємо

$\left(\frac{m-1}{4}\right)^2 < \left(f(x_0)\right)^2 = f\left(\frac{1}{x_0}+x_0^2\right) - f\left(\frac{1}{x_0}\right) < \frac{m}{4}+\frac{1}{2}$. Тому $\left(\frac{m-1}{4}\right)^2 < \frac{m}{4}+\frac{1}{2}$, тобто $m^2 - 6m + 7 < 0$. Але для $m \geq 8$ це неможливо, значить, такої функції *f* не існує.

Задача 2. Нехай маємо функцію *f*: *Z*→*N*, яка для будь-якого цілого *k* задовольняє умову: $6f(k+4) - 3f(k+3) - 2f(k+2) - f(k+1) = 0$. Довести, що функція *f* є сталою.

Доведення. Оскільки *f* має своїми значеннями натуральні числа, то існує таке ціле число k_0, що $f(k_0) \leq f(k)$ для будь-якого цілого *k*. Тоді правильними є такі нерівності: $f(k_0) \leq f(k_0 - 1)$, $f(k_0) \leq f(k_0 - 2)$, $f(k_0) \leq f(k_0 - 3)$, звідки $6f(k_0) - 3f(k_0 - 3) - 2f(k_0 - 2) - f(k_0 - 1) = 0$, $(k + 4 \to k_0)$. (1)

За умовою, ліва частина (1) дорівнює нулю, а тому

$f(k_0) = f(k_0 - 3) = f(k_0 - 2) = f(k_0 - 1)$. (2)

Виходячи з умови, дістанемо:

$f(k_0 - 1) = \frac{1}{6}\left(3f(k_0) + 2f(k_0 - 1) + f(k_0 - 2)\right) = f(k_0)$,

$f(k_0 - 4) = 6f(k_0 - 1) - 3f(k_0 - 2) - 2f(k_0 - 3) = f(k_0)$, звідки, в силу (2), маємо, що $f(k) = f(k_0) = c$, для будь-якого цілого *k*, де $c = const$.

Метод математичної індукції

Задача 1. Функція $f(x)$ визначена на відрізку $[0;1]$ і набуває значення з цього проміжку.

Відомо, що існує таке число λ з проміжку $(0;1)$, для якого $f(\lambda)\neq 0$ та $f(\lambda)\neq\lambda$, а також $f(f(x)+y)=f(x)+f(y)$ для всіх $x,y\in[0;1]$.

а) Навести приклад такої функції.

б) Довести, що для будь-якого $x\in[0;1]$ $\underbrace{f(f\ldots f(x)\ldots)}_{19 разів}=\underbrace{f(f\ldots f(x)\ldots)}_{98 разів}$.

Спроба розв'язати цю задачу відомими методами, які було розглянуто вище, не дасть бажаного результату.

а) Навести приклад такої функції не важко, дійсно, візьмемо число $\beta\in(0;1)$ таке, що $\beta<\lambda$.

Умову задачі задовольнятиме, наприклад, функція f така, що $f(x)=0$ для $0\leq x<\beta$, $f(x)=1$ для $\beta<x\leq 1$.

Щодо пункту б) умови задачі, то краще використати метод математичної індукції.

Позначимо $f(0)=a$. Якщо $a=0$, то, підставивши у рівняння $y=0$, отримаємо $f(f(x))=f(x)$, звідки випливає твердження задачі.

Нехай $a\in(0;1]$, тоді $f(a)=f(f(0)+0)=f(0)+f(0)=2a$, і далі за індукцією доводимо, що $\underbrace{f(f\ldots f(x)\ldots)}_{n}=(n+1)a$. У деякий момент ця величина перевищить 1, що суперечить даній множині значень f.

Задача 2. На відрізку $0\leq x\leq 1$ задано функцію f. Відомо, що ця функція невід'ємна і $f(1)=1$. Крім цього, для будь-яких двох чисел x_1 і x_2 таких, що $\begin{cases} x_1\geq 0, x_2\geq 0 \\ x_1+x_2\leq 1\end{cases}$, виконується нерівність: $f(x_1+x_2)\geq f(x_1)+f(x_2)$ (*).

а) Доведіть: якою б не була функція f, що задовольняє перелічені умови, для всіх x буде виконуватися нерівність $f(x) \le 2x$;

б) Чи правильно, що для всіх x $f(x) \le 1{,}9x$?

Розв'язання.

а) Функція f монотонно не спадає на $[0;1]$, оскільки з $1 \ge x \ge y \ge 0$ випливає $f(x) = f(x-y+y) \overset{(*)}{\ge} f(x-y) + f(y) \ge f(y)$, оскільки $f(t) \ge 0$ і, крім того, $f(x+x) = f(2x) \overset{(*)}{\ge} f(x) + f(x) = 2f(x)$ при $\forall x \ge 0$. Користуючись цим, отримаємо:

при $\frac{1}{2} < x \le 1$: $\quad f(x) \le f(1) \le 2x$,

при $\frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}$: $\quad f(x) \le \frac{1}{2} f(2x) \le \frac{1}{2} \le 2x$,

… … … … …

при $\frac{1}{2^{n+1}} < x \le \frac{1}{2^n}$: $\quad f(x) \le \frac{1}{2} f(2x) \le \frac{1}{2^n} \le 2x$,

а оскільки $f(0) = 0$, то $f(2x) \le 2x$ при всіх x.

б) Відповідь: неправильно. Приклад: $f(x) = \begin{cases} 0, при\ 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 1, при\ \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases}$.

Для цієї функції виконуються всі умови задачі, але $f(0{,}51) = 1 > 1{,}9 \cdot 0{,}51 = 0{,}969$.

Задача 3. Функція f задана на проміжку $[1;+\infty)$ і при всіх $x \ge 1$ задовольняє нерівність $\frac{f(2x)}{\sqrt{2}} \le f(x) \le x$. Довести, що $f(x) < \sqrt{2x}$ при кожному $x \ge 1$.

Доведення. Розіб'ємо промінь $[1;+\infty)$ на інтервали $[2^{n-1};2^n), n \in N$. Зрозуміло, що при довільному $n \in N$ такі інтервали повністю покривають промінь $[1;+\infty)$.

Доведемо індукцією по n нерівність $f(x) < \sqrt{2x}$ на кожному з інтервалів $[2^{n-1};2^n)$.

База індукції. Для $1 \le x < 2$ $\quad f(x) \le x = \sqrt{x}\sqrt{x} < \sqrt{2}\sqrt{x} = \sqrt{2x}$.

Крок індукції. Припустимо, що для всіх x з інтервалу $[2^{n-1};2^n)$ нерівність $f(x)<\sqrt{2x}$ має місце. Нехай тепер $2^n \le x < 2^{n+1}$, тоді $f(x) \le \sqrt{2} f(\frac{x}{2}) < \sqrt{2}\sqrt{x} = \sqrt{2x}$, оскільки $2^{n-1} \le \frac{x}{2} < 2^n$. Отже, нерівність має місце і для $n+1$, а це означає, що для всіх $n \in N$, тобто $f(x)<\sqrt{2x}$ для всіх $x \in [1;+\infty)$.

Задача 4 (Московська математична олімпіада, 1977 р.).

Знайти всі функції $f: N \to N$, для яких виконується така умова: $f(n+1) > f(f(n))$ для всіх $n \in N$.

Розв'язання. Доведемо спочатку за допомогою методу математичної індукції, що для будь-якого натурального k правильним є таке твердження: якщо $n \ge k$, то $f(n) > k$.

Справді, для $k=1$ це твердження є очевидним. Нехай воно є правильним для k і нехай $n \ge k+1$. Тоді $n-1 \ge k$, отже, на підставі індуктивного припущення маємо: $f(n-1) \ge k$. Але тоді і $f(f(n-1)) \ge k$, бо $m = f(n-1) \in N,\ m \ge k$.

Зважаючи на умову задачі, дістанемо $f(n) > f(f(n-1)) \ge k$.

Отже, $f(n) > k$, а тому $f(n) > k+1$. Таким чином, $f(n) > k$, якщо $n \ge k$ при всіх $k \in N$.

Припустимо тепер, що для деякого k_0 має місце $f(k_0) > k_0$. Позначимо через A_0 множину всіх значень $f(n)$, для яких $n > k_0$.

Нехай l – найменший елемент множини A_0. Оскільки $n-1 \ge k_0$, то $f(n-1) > k_0$. Справді, якщо $n-1 > k_0$, то це випливає з нерівності $f(n-1) \ge n-1$. Якщо $n-1 = k_0$, то $f(n-1) = f(k_0) > k_0$.

Нехай $m = f(f(n-1))$, тоді, оскільки $f(n-1) > k_0$, то $m \in A_0$. Але за умовою $f(n) > f(f(n-1))$, тобто $l > m$, що суперечить вибору l як найменшого елемента з множини A_0.

Отже, припущення про те, що для деякого k_0 має місце $f(k_0) > k_0$, є неправильним, і для всіх $n \in N$ має місце $f(n) = n$.

Безпосередньою перевіркою переконуємось, що функція $f(n) = n$ задовольняє умову задачі.

Задача 5 (Соросівська олімпіада України, 1995 р.).

Функція $f : Z \to Z$ задовольняє такі умови:

1) $f(f(n)) = n$ для всіх цілих n;

2) $f(f(n+2)+2) = n$ для всіх цілих n;

3) $f(0) = 1$.

Знайдіть значення $f(1995)$ та $f(-1994)$.

Розв'язання.

а) Підставимо $n = 0$ в 1), отримаємо $f(f(0)) = 0$, тобто $f(1) = 0$, бо $f(0) = 1$. З умов (1) та (2) випливає, що: $f(f(n)) = f(f(n+2)+2)$, тобто $\forall n \in Z$ $f(n) = f(n+2)+2$.

б) Далі за індукцією n (в обидва боки) доведемо, що $f(n) = 1-n \ \ \forall\, n \in Z$.

База індукції: $f(0) = 1$; $f(1) = 0$.

Крок індукції: припустимо, що $f(n) = 1-n$.

Доведемо, що $f(n+2) = 1-(n+2)$ та $f(n-2) = 1-(n-2)$, використовуючи (а): $f(n+2) = f(n)-2 = 1-n-2 = 1-(n+2)$, $f(n-2) = f(n)+2 = 1-n+2 = 1-(n-2)$.

Індуктивний крок ми здійснювали через 2, але база індукції була перевірена для двох сусідніх значень, тому ми довели, що $f(n) = 1-n \ \ \forall\, n \in Z$.

Тому $f(1995) = 1-1995 = -1994$, $f(-1994) = 1-(-1994) = 1995$.

Задача 6 (Московська математична олімпіада, 1982 р.).

Функція $f(n)$ визначена для всіх натуральних n і набуває цілих невід'ємних значень. Відомо, що ця функція задовольняє такі умови:

1) $\forall\, m, n \in N$ $f(n + m) - f(n) - f(m)$ набуває значень 0 або 1;

2) $f(2) = 0$;

3) $f(3) > 0$;

4) $f(9999) = 3333$.

Знайти $f(1982)$.

Розв'язання. Підставимо в 1) m = n =1, тоді $f(2)-2f(1)=0$ або $f(2)-2f(1)=1$.

Отже, $f(2)-2f(1)\geq 0$, звідки $f(1)\leq \frac{1}{2} f(2) = 0$. Але за означенням $f(1) \geq 0$, тому $f(1)=0$.

Якщо m = 2, n = 1, то $f(3)-f(2)-f(1)\leq 1$. Оскільки $f(3)>0$, то $f(3)=1$.

Підставивши в 1) n = 3 при довільному m, дістанемо $f(m+3) = f(m) + f(3)$ або $f(m+3) = f(m) + f(3)+1$.

Отже, $f(m+3) \geq f(m)+1$. (1)

Доведемо, що при будь-яких m і k виконується нерівність

$f(m+3k) \geq f(m)+ k$. (2).

Зафіксуємо m і доведемо (2) індукцією по k. При k =1 маємо (1).

Нехай твердження (2) справджується для деякого k. Доведемо, що (2) є справедливим і для k+1.

Справді, $f(m+3(k+1)) = f((m+3k)+3) \overset{(1)}{\geq} f(m+3k)+1 \overset{(2)}{\geq} f(m) + (k+1)$, що і треба було довести. Оскільки $3333 = f(9999) = f(3+3\cdot 3332) \overset{(2)}{\geq} f(3)+3332$, то для всіх m і k таких, що $m + k \leq 3333$, виконується рівність $f(3m+3k) = f(3m) + k$, а тому остаточно маємо $3f(1982) + 2 \geq f(3\cdot 1982) = 1982 \geq 3f(1982)$, звідки $f(1982) = 660$.

Відповідь: $f(1982) = 660$.

Розглянемо використання цього методу підстановок під час розв'язання функціональних рівнянь, у яких невідомими є функція з двома змінними.

Задача 1. Відомо, що функція $f(x,y)$ для кожної пари цілих невід'ємних чисел задовольняє умови:

1) $f(0,y)=y+1$;

2) $f(x+1,0)=f(x,1)$;

3) $f(x+1,y+1)=f(x, f(x+1,y))$.

Знайдіть значення $f(4,1982)$.

Ідея розв'язання така: співвідношення (3) з умови задачі дає змогу послідовно знаходити рекурентні співвідношення, які пов'язують значення $f(x_0, y)$ та $f(x_0, y+1)$ при $x_0 = 1, 2, 3, 4$. Знаючи значення $f(x_0, 0)$, неважко вивести формулу для $f(x_0, y)$, використовуючи стандартні прийоми.

Домовимося, що цифра, яка стоїть під знаком «дорівнює», означатиме номер використаного співвідношення з умови задачі.

а) Підставимо в (3) x=0, отримаємо:

$$f(1, y+1) = f(0, f(1, y)) \underset{(1)}{=} f(1, y)+1 \qquad (4)$$

Доведемо за індукцією, що $f(1, y) = 2 + y$ (4′)

Маємо $f(1,0) \underset{(2)}{=} f(0,1) = 1+1 = 2 = 2+0$.

Припустимо, що $f(1, n) = 2 + n$, тоді внаслідок (4)

$f(1,n + 1)=f(1,n) + 1 =(2 + n) + 1 = (n + 1) +2$, що й треба було довести.

б) Підставимо в (3) $x = 1$, знаходимо: $f(2, y+1) \underset{(3)}{=} f(1, f(2, y)) \underset{(4')}{=} f(2, y) + 2.$ (5)

Доведемо за індукцією, що $f(2, y) = 2y + 3$. (5′)

Дійсно, при $y = 0$: $f(2,0) \underset{(2)}{=} f(1,1) \underset{(4')}{=} 2+1 = 2 \cdot 0 + 3$. Нехай $f(2, n) = 2n + 3$, тоді

$$f(2, n+1) \underset{(5)}{=} f(2, n) + 2 = (2n+3) + 2 = 2(n+1) + 3.$$

в) Підставимо в (3) $x = 2$, отримаємо: $f(3, y+1) \underset{(3)}{=} f(2, f(3, y)) \underset{(5')}{=} 2f(3, y) + 3.$ (6)

Знайдемо спочатку значення $f(3,0)$: $f(3,0) = f(2,1) = 5,$ згідно з (2) умови. Тому

$$f(3, y+1) = 2 \cdot (\ldots 2 \cdot ((2 \cdot 5 + 3) + 3) + \ldots) + 3, \text{ звідки}$$

$$f(3, y+1) = 5 \cdot 2^y + 3(1 + 2 + \ldots + 2^{y-1}) = 8 \cdot 2^y - 3 = 8^{3+y} - 3 \qquad (6')$$

г) Нарешті, підставимо в (3) $x = 3$, отримаємо:

$$f(4, y+1) = f(3, f(4, y)) = 2^{f(4,y)+3} - 3. \qquad (7)$$

Зі співвідношення (2) знаходимо: $f(4,0) = f(3,1) = 2^4 - 3$. Рівність (7) дає змогу легко довести за індукцією, що $f(4, y) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$, де показник містить $(y+2)$ двійки.

Отже, $f(4,1981) = 2^{2^{\cdot^{\cdot^{2}}}} - 3$ (у показнику 1983 двійки).

Задача 2. Знайдіть усі функції двох змінних $f(x, y)$, що визначені для всіх додатних x, y, приймають додатні значення і для всіх додатних x, y, z задовольняють умови:
$$1) f(x, y) + f(x, z) = f(x, y + z + 1);$$
$$2) f(x, y) f(y, x) = xy$$

Відповідь: $f(x, y) = \dfrac{y+1}{x+1} x$.

Задачі для самостійного розв'язання

1. Знайти всі функції $f : R^2 \to R,$ які при будь-яких дійсних x, y, z задовольняють умови:

$$1)(x + y) f(x, y) = f(x^2, y^2),$$
$$2) f(x, y) = f(x + z, y + z),$$
$$3) f(1,0) = 1.$$

2. Знайти всі функції $f : R \times R \to R,$ які задовольняють такі умови: $f(x, f(y, z)) + f(f(x, y), z) = 2y$ та $f(x, f(x, y)) = y$ для всіх дійсних $x, y.$

Щоб зосередити увагу учнів на тому, що вибір методу розв'язання функціонального рівняння залежить від того, у якому класі слід шукати розв'язки (чи то в класі неперервних, диференційованих тощо), слід розглянути задачі, які містять в умові один і той самий вигляд рівняння, але функції, що його задовольняють, представляють різні класи.

Задача 1. Знайти всі функції $f : N \to N$, для яких $f(1) = 1$ і при $\forall x$, $y \in N$: $f(x + y) = f(x) + f(y) + xy$.

Розв'язання. Нехай $y = 1$, тоді $f(x+1) - f(x) = x + 1.$

Тепер, підставляючи послідовно замість x $1, 2, 3, \ldots, (n-1)$, отримаємо:

$f(2) - f(1) = 2$

$f(3) - f(2) = 3$

....

$f(n) - f(n-1) = n$.

Додавши усі ці рівності, отримаємо $f(n) = 1 + 2 + ... + n = \frac{n(n-1)}{2}$.

Тобто $f(x) = \frac{1}{2}x(x-1)$.

Перевіркою переконуємося, що послідовність задовольняє умову задачі.

Задача 2. Розв'язати функціональне рівняння $f(x+y) = f(x) + f(y) + xy$ на множині функцій $f: R \to R$, неперервних у точці $x = 0$.

Розв'язання. При $y = 0$ отримаємо, що $f(0) = 0$, а тоді, перейшовши до границі у вихідному рівнянні, отримаємо: $\lim\limits_{y\to 0} f(x+y) = f(x)$. Це означає, що f неперервна на всій числовій прямій. Далі, зафіксувавши y, отримаємо: $f'(x+y) = f'(x) + y$ або $f''(x+y) = f''(x)$, звідки $f''(x) = a$ $(a = const)$.

Отже, $f(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c$. Перевіркою знаходимо, що $a = 1, b \in R, c = 0$.

Відповідь. $f(x) = \frac{x^2}{2} + bx$.

Задача 3. Знайти всі диференційовані функції $f: R \to R$, для яких $f(1) = 1$ та $\forall x, y \in R: f(x+y) = f(x) + f(y) + xy.$

Розв'язання. Нехай y – фіксоване число, тоді $f'(x+y) = f'(x) + y$, а тому $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f'(x+y) - f'(x)}{y} = \lim\limits_{y\to 0} \frac{y}{y} = 1$. Але $\lim\limits_{y\to 0} \frac{f'(x+y) - f'(x)}{y} = f''(x)$, тому $f''(x) = 1$ $\forall x \in R$.

Таким чином, $f'(x) = x + b$, а $f(x) = \frac{x^2}{2} + bx + c$.

З огляду на те, що $f(x) = 1$ і при $x = 0$, з рівняння випливає: $f(0) = 0$, матимемо: $\begin{cases} b + c = \frac{1}{2} \\ c = 0 \end{cases}$, тобто $b = \frac{1}{2}$, $c = 0$, а $f(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x(x+1)$ – шукана функція.

СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Лопшиц А. М. Функциональные уравнения / А. М. Лопшиц // Квант. – 1975. – № 1. – С. 30–35.

2. Лейфура В. М. Математичні олімпіади школярів України. 1991–2000 рр. / В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – К. : Техніка, 2003. – 541 с.

3. Радченко В. М. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язання / В. М. Радченко, В. А. Ясінський. – Львів : Євросвіт, 1999. – 128 с.

4. Конет І. М. Обласні математичні олімпіади / І. М. Конет, В. Г. Паньков, В. М. Радченко, Ю. В. Теплінський. – Кам’янець-Подільський : Абетка, 2000. – 304 с.

5. Бродский Я. С. Функциональные уравнения / Я. С. Бродский, А. К. Слипенко. – К. : Вища школа, 1983. – 96 с.

6. Смишляєв В. К. Найпростіші функціональні рівняння / В. К. Смишляєв, М. В. Смишляєва // У світі математики. – 1978. – № 9. – С. 203–211.

7. Недокіс В. А. Розв’язування найпростіших функціональних рівнянь методом підстановок / В. А. Недокіс // У світі математики. – 1978. – № 4. – С. 33–40.

8. Недокіс В. А. Про функціональне рівняння Коші / В. А. Недокіс // У світі математики. – 1998. – Т. 4, випуск 2. – С. 53–62.

9. Зарубежные математические олимпиады / [под ред. И. Н. Сергеева]. – М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 416 с. – (Б-ка мат. кружка).

10. Никольский С. М. Элементы математического анализа / С. М. Никольский. – М. : Наука, 1981. – 224 с.

11. Шунда Н. М. Практикум з математичного аналізу : Інтегральне числення. Ряди : навч. посібник / Н. М. Шунда, А. А. Томусяк. – К. : Вища школа, 1995. – 541 с.

12. Тарасов Л. В. Математический анализ : беседы об основных понятиях : пособие для учащихся / Л. В. Тарасов. – М. : Просвещение, 1979. – 144 с.

13. Фомин А. А. Международные математические олимпиады / А. А. Фомин, Г. М. Кузнецова. – М. : Дрофа, 1998. – 160 с.

ЗМІСТ

Вступ 3
Методичні рекомендації щодо вивчення теми «Функціональні рівняння» 5
Функціональні рівняння 11
Метод скінчених різниць 34
Принцип крайнього у функціональних рівняннях 36
Метод математичної індукції 38
Список рекомендованої літератури 46

Навчально-методичне видання

Валентина Войцехівська

Функціональні рівняння

Відповідальний за випуск О. Лісовий

Редактор А. Саібова

Формат 60х84 1/16. Друк цифровий.
Папір офсетний 80 г/м2.
Наклад 500 прим.

Видавництво: ТОВ «Праймдрук»
01023, м. Київ, вул. Еспланадна, 20, офіс 213
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
серія ДК № 4222 від 07.12.2011.