Київський інститут «Слов'янський університет»

МЕТОДИ РОЗВ`ЯЗАННЯ ЗАДАЧ З МАТЕМАТИКИ

ПОСІБНИК ДЛЯ ПОСТУПАЮЧИХ У КИЇВСЬКИЙ ІНСТИТУТ «СЛОВ'ЯНСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ»

Київ - 2000

Демченко С.І., Чумаков О.Г. Методи розв`язання задач з математики. Посібник для поступаючих у Київський інститут «Слов'янський університет». Київ, 2000. 132 стор.

ISBN 5-87534-211-0

Кафедра фінансів і банківської справи факультету економіки і менеджменту Київського інституту «Слов'янський університет».

Посібник містить опис методів розв`язання задач, варіанти завдань та їх виконання. Базою для посібника є багаторічний досвід авторів з підготовки абітурієнтів до вступу в Київський інститут «Слов'янський університет», Київський національний університет ім.Т.Г.Шевченка, МГУ, МФТІ та інші престижні вузи.

Книга розрахована на учнів шкіл, ліцеїв, абітурієнтів, вчителів математики і репетиторів.

Рецензенти:
- Зав. кафедрою вищої математики і інформатики Київського інституту «Слов'янський університет» А.В.Кузьмін.
- Голова правління Народного банку Г.М.Корчинський.

Редактор українського випуску Г.В.Золотих.

Рекомендовано:
Кафедрою вищої математики і інформатики Київського інституту «Слов'янський університет».

З авторами можна зв'язатися електронною поштою: galina@narbank.kiev.ua, факсом (044)23-44-828 або через деканат факультету економіки і менеджменту Київського інституту «Слов'янський університет».
Інформація про Слов'янськкий університет доступна в Internet за адресою http://www.ksu.ukrpack.net .

ISBN 5-87534-211-0

ЗМІСТ.

Від авторів 5

Частина I.

Глава 1. Раціональні рівняння. 8
Глава 2. Ірраціональні рівняння. 14
Глава 3. Системи алгебраїчних рівнянь. 18
Глава 4. Логарифмічні рівняння. 20
Глава 5. Показникові рівняння 22
Глава 6. Системи логарифмічних і показникових рівнянь. 25
Глава 7. Алгебраїчні нерівності. 26
Глава 8. Логарифмічні нерівності 29
Глава 9. Показникові нерівності 30
Глава 10. Рівняння і нерівності з параметрами. 33
Глава 11. Тригонометричні тотожності. 35
Глава 12. Тригонометричні рівняння. 38
Глава 13. Арифметична прогресія 41
Глава 14. Геометрична прогресія. 42
Глава 15. Похідна та її застосування 44
Глава 16. Задачі на складання рівнянь. 55
Глава 17. Комбінаторика і біном Ньютона. 54
Глава 18. Планіметрія. 61
Глава 19. Стереометрія. 67
Глава 20. Задачі з геометрії з застосуванням тригонометрії. 72

Частина II.

Глава 21. Варіанти завдань. 77

Частина III.

Глава 22. Розв'язки задач, що включені у білети для співбесіди з математики. 91

Рекомендована і використовувана література. 131

ЗМІСТ 3
Від авторів 5
Глава 1. Раціональні рівняння 8
Глава 2. Ірраціональні рівняння 14

Глава 3. Системи алгебраїчних рівнянь. 18
Глава 4. Логарифмічні рівняння. 20
Глава 5. Показникові рівняння. 22
Глава 6. Системи логарифмічних і показникових рівнянь.......... 25
Глава 7. Алгебраїчні нерівності. 26
Глава 8. Логарифмічні нерівності. 29
Глава 9. Показникові нерівності. 30
Глава 10. Рівняння і нерівності з параметрами......................... 33
Глава 11. Тригонометричні тотожності. 35
Глава 12. Тригонометричні рівняння. 38
Глава 13. Арифметична прогресія. 41
Глава 14. Геометрична прогресія. 42
Глава 15. Похідна та її застосування. 44
Глава 16. Задачі на складання рівнянь.. 55
Глава 17. Комбінаторика і біном Ньютона.................................. 58
Глава 18. Планіметрія.. 61
Глава 19. Стереометрія. 67
Глава 20. Задачі з геометрії з застосуванням тригонометрії. 72
Глава 21. Варіанти завдань. 77
Глава 22. Розв'язки задач, що включені у білети для співбесіди з математики. 91
Рекомендована і використовувана література. 136

Від авторів

Сьогодні (2000-го року) знову зростає інтерес до вищої освіти, що помітно знизився було кінцем "перебудови". Усе більше молодих людей бажають стати власниками комплекту знань, навичок, вражень і дипломів, що можна одержати протягом навчання у вузі. Багато фахівців, що стали останніми 5÷15 роками практичними знавцями своєї справи, відчувають необхідність у додатковій теоретичній підготовці та/або документальному підтвердженні своєї кваліфікації шляхом отримання вищої (зокрема другої) освіти.

У школах рівень підготовки з математики дуже відрізняється. Багато абітурієнтів закінчили школу досить давно. Тому не дивно, що необхідними для вступу за багатьма фахами (зокрема, за дуже популярними зараз економічними) навичками розв`язання задач володіють не усі. Теоретичні питання найкраще повторити за тими підручниками для шкіл з поглибленим вивчанням математики, за якими сьогодні займаються старшокласники [6-11]. Але ж якщо Ви (чи, можливо, Ваші діти, онуки, друзі, учні?) бажаєте навчитися впевнено *розв'язувати задачі*, то цей посібник – для Вас.

Протягом декількох десятків років ми готували абітурієнтів до вступу в різноманітні престижні вузи. Всі автори мають багатий практичний досвід у навчанні абітурієнтів розв'язанню задач з математики. Один з авторів, Сергій Демченко, декілька років керував підготовкою команди Києва до республіканських і всесоюзних олімпіад школярів з математики, а також підготував десятки абітурієнтів до вступу в різноманітні вузи. Інший автор, Світлана Демченко, має практичний досвід підготування абітурієнтів до вступу у вузи в умовах ринкової економіки. Третій автор, Олександр Чумаков, має багатий досвід підготування абітурієнтів до вступу в найпрестижніші вузи СРСР і України: МГУ, МФТІ, МВТУ, Київський університет ім.Т.Шевченка, КПІ, ХАІ і т.д. *Чому* ж ми вважали за необхідне *підготувати новий посібник для* абітурієнтів? Виявилося, що доступні, у тому числі, безперечно професійно підготовлені, посібники визнаних знавців, не повною мірою задовольняють сучасним вимогам до підготування абітурієнтів.

Чим же цей посібник відрізняється від інших подібних? Чому саме він необхідний сьогодні для абітурієнтів? По-перше, багато з абітурієнтів запам'ятовують декілька методів розв'язання того або іншого класу задач, але часто утрудняються у виборі, а що ж із наявних знань потрібно застосувати для розв'язання конкретної задачі. Тому ми приділили особливу увагу *ознакам, що дозволяють* <u>*визначити відповідний*</u> *метод* вирішення задачі. По-друге, у різноманітних вузах відрізняється не тільки рівень вимог до абітурієнта, але і ступінь уваги до тих або інших розділів шкільного курсу математики. Тому в цьому посібнику максимальна увага надана саме тим *темам, що часто зустрічаються на іспитах і співбесідах з економічних фахів.* Знання, що стосуються меж, похідної, інтегралу, векторів, геометрії, стереометрії, на відміну від технічних вузів, перевіряються тут менш прискіпливо. Лише через непорозуміння на вступних іспитах може бути запропонована задача олімпіадного типу, що обов'язково потребує застосування нестандартних прийомів розв'язання.

Крім прикладів, що включені безпосередньо до опису кожного з методів розв'язання задач, у даному посібнику *наведено повний набір задач, що пропонувалися на вступній співбесіді в Слов'янський* університет у 1997-1999 роках, *із вирішеннями*. Ми дякуємо упорядникові завдань доценту кафедри вищої математики й інформатики В.М.Кириленку, що люб'язно надав нам їх умови, а також завідуючому кафедрою А.В.Кузьміну і декану факультету економіки і менеджменту Т.Н.Литвиненко за вказівки і побажання, що сприяли поліпшенню посібника. Ми також дякуємо Юлії Демченко, що допомогла у комп'ютерному наборі. Окрема подяка Г.В.Золотих, що відредагувала український переклад, у якому подається третє видання.

Найближчим часом читачі можуть очікувати виходу подібних наших посібників, у яких буде врахована специфіка тематики вступних іспитів (співбесід) для *вступаючих у педагогічні і технічні вузи,* включаючи умови і вирішення запропонованих останніми роками задач.

Надалі ми будемо розширювати тематику задач, як і раніше приділяючи максимальну увагу темам, що часто зустрічаються на вступних іспитах (співбесідах) до окремої групи фахів. Ми плануємо підтримувати актуальні версії посібника іншими слов'янськими мовами. Не виключено, що деякі варіанти будуть доступні тільки в Internet. Звертайтеся до нас за електронною адресою galina@narbank.kiev.ua.

Перша частина (глави 1÷20) являють собою універсальну методику розв'язання задач із прикладами, і принесе користь *всім* абітурієнтам. Друга частина (глави 21÷22) містить умови завдань, що пропонувалися в Слов'янському університеті, і їхні вирішення. На наш погляд, вона теж досить універсальна, оскільки методи вирішення не залежать від конкретного вузу. Проте *тематика задач* у кожному вузі дещо відрізняється.

У тексті посібника визначення виділені двома вертикальними лініями, а теореми, ознаки й інші формулювання – одною масною вертикальною лінією. Оскільки посилання на малюнки є тільки в тому ж абзаці, де вміщено власне малюнок, нумерація малюнків не знадобилася.

Автори з задоволенням врахують зауваження читачів посібника, що сприяють поліпшенню підготування абітурієнтів.

Щиро бажаємо Вам успіхів при підготуванні до вступу у вузи!

Глава 1.Раціональні рівняння.

Центральним питанням шкільного курсу алгебри є розв'язання рівнянь. Тому доцільно огляд методів розв'язання задач з математики починати з розгляду саме цієї теми. Нагадаємо основні визначення.

Рівність зі змінною називається рівнянням.
Областю визначення називається множина значень змінної, при яких ця рівність доречна.
Розв\`язати рівняння значить знайти всі значення змінної, при яких рівняння перетворюється у вірну числову рівність або тотожність.

- ***Рівняння першого степеня.***

Рівняння виду $ax + b = 0$, де $a \neq 0$, має єдине рішення $x = -\frac{b}{a}$.

- ***Рівняння другого степеня.***

Для розв'язання квадратного рівняння застосовується три формули.

а) Формула для повного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$, де $a \neq 0$;

маємо рішення: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Ця формула дає два рішення, якщо коефіцієнти рівняння – дійсні числа і дискримінант $D = b^2 - 4ac$ додатний. Якщо $D = 0$, то рівняння має один кратний корінь, а у випадку $D < 0$ рівняння не має дійсних коренів.

б) Формула парного коефіцієнта. Якщо b – парне число, то використовуємо формулу:

$x_{1,2} = \dfrac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}}{a}$, у якій вираз під коренем у 4 рази менший.

в) Формула для зведеного квадратного рівняння $x^2 + px + q = 0$. У цьому випадку маємо: $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$, що також застосовується для спрощення розрахунків.

- ***Рівняння третього степеня.***

Будь-яке кубічне рівняння виду: $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$, легко перетворити за допомогою заміни $x = y - \frac{a}{3}$ на рівняння, у якого коефіцієнт при x^2 дорівнює нулю. Таким чином, одержимо рівняння виду: $y^3 + py + q = 0$, для знаходження кореня якого існує формула:

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\ .$$

Застосування цієї формули на практиці дуже обмежено через те, що навіть при «гарних» коренях радикали дуже важко обчислюються. Тому практично для знаходження кореня кубічного рівняння застосовують теорему про раціональні корені багаточлена з цілими коефіцієнтами.

Нехай $a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ – багаточлен із цілими коефіцієнтами, що має раціональний корінь $x = \frac{p}{q}$, де p – ціле, а q – натуральне число. Тоді p є дільником a_3 (вільного члена), а q – дільником a_0 (першого коефіцієнта).

Знайшовши таким чином корінь $x = x_1$, ми потім виконуємо стандартне ділення нашого багаточлена на $(x - x_1)$ і одержимо багаточлен другого степеня, корені якого легко знайти. Фактично, ми спрощуємо хід розв'язання через угадування одного з коренів. Угадування стає можливим завдяки цілим коефіцієнтам.

Розглянемо <u>приклад</u>.

$2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 = 0.$

$x = \frac{p}{q}$, тоді $p = \pm1, \pm3$, (дільники $a_3 = 3$) і $q = 1, 2$ (дільники $a_0 = 2$). Звідси одержуємо список можливих коренів для угадування (завдяки теоремі про раціональні корені хоч один із них повинен підійти):

$x = \pm1, \pm3, \pm\frac{1}{2}\ , \pm\frac{3}{2}$. Виконуємо підстановку отриманих значень у рівняння до одержання вірної рівності.

$x = -1$: $\quad 2(-1)^3 - 7(-1)^2 + 2(-1) + 3 = -6 \neq 0$

$x = +1$: $\quad 2(+1)^3 - 7(+1)^2 + 2(+1) + 3 = 0,$

у такий спосіб один корінь знайдений (вгаданий). Далі виконуємо ділення багаточлена на багаточлен.

$$\begin{array}{l|l} \_\,2x^3 - 7x^2 + 2x + 3 & \underline{x - 1} \\ \underline{\ \ 2x^3 - 2x^2} & 2x^2 - 5x - 3 \\ \quad \_\ -5x^2 + 2x + 3 & \\ \quad\ \ \underline{-5x^2 + 5x} & \\ \qquad\quad \_\,-3x + 3 & \\ \qquad\quad\ \ \underline{-3x^2 + 3} & \end{array}$$

Після цього розв`язуємо квадратне рівняння для знаходження коренів, що залишилися. Вони можуть виявитися дійсними, кратними, або не існувати взагалі, тобто кубічне рівняння буде мати один або три корені (деякі з яких можуть бути кратними).

Тепер інші корені рівняння знайдемо як корені квадратного рівняння

$2x^2-5x-3=0$: $x_{2,3}=\frac{5\pm\sqrt{25+24}}{4}=\frac{5\pm7}{4}$, звідки $x_2=3$, $x_3=\frac{1}{2}$.

- ***Рівняння четвертого степеня.***

Розглянемо спочатку деякі спеціальні види таких рівнянь.

а) біквадратні рівняння.
Рівняння виду : $y=ax^4+bx^2+c=0$, розв`язуються шляхом заміни $y=x^2$.

б) рівняння що зводяться до біквадратних.
Як правило, це рівняння, у яких присутні елементи симетрії. Розв'язуються вони за допомогою заміни (наприклад, середнього арифметичного присутніх виразів).

Приклад : $x\cdot(x+2)\cdot(x+4)\cdot(x+6)=-15$. Провівши заміну $y=\frac{x+(x+2)+(x+4)+(x+6)}{4}=x+3$, одержимо

$(y-3)(y-1)(y+1)(y+3)=-15\Leftrightarrow(y^2-1)(y^2-9)=-15\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow y^4-10y^2+9=-15\Leftrightarrow y^4-10y^2+24=0\Leftrightarrow y^2{}_{1,2}=5\pm\sqrt{25-24}=5\pm1$.

Добувши квадратний корінь, отримаємо $y_{1,2}=\pm2$, $y_{3,4}=\pm\sqrt{6}$. Повернення до змінної x дає остаточний результат:

$x_1=-1$, $x_2=-5$, $x_{3,4}=-3\pm\sqrt{6}$.

в) зворотні рівняння .
Рівняння виду: $ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0$ називаються зворотними. Розв`язуються вони через ділення рівняння на x^2, групування однакових коефіцієнтів з подальшою заміною $y=x+\frac{1}{x}$.

Наприклад : $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0\Leftrightarrow6x^2-35x+62-35\frac{1}{x}+6\frac{1}{x^2}=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow6\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-35\left(x+\frac{1}{x}\right)+62=0$. Якщо $y=x+\frac{1}{x}$, то:

$6(y^2-2)-35y+62=0\Leftrightarrow6y^2-35y+50=0\Leftrightarrow y_{1,2}=\frac{35\pm\sqrt{1225-1200}}{12}=\frac{35\pm5}{12}$.

Таким чином, $y_1=\frac{5}{2}$ и $y_2=\frac{10}{3}$. Повернення до змінної x дає остаточний результат:

$x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}\Leftrightarrow2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow(x_1=2)\cup\left(x_2=\frac{1}{2}\right)$.

$x+\frac{1}{x}=\frac{10}{3}\Leftrightarrow3x^2-10x+3=0\Leftrightarrow(x_3=3)\cup\left(x_4=\frac{1}{3}\right)$.

г) рівняння, що зводяться до зворотних.

Рівняння виду: $ak^4x^4 + bk^3x^3 + ck^2x^2 + bkx + a = 0$ зводяться до зворотних за допомогою заміни $z = kx$.

д) рівняння, що розв'язуються методом заміни квадратної функції через нову змінну. Цей спосіб є головним для розв'язання рівнянь четвертого степеня.

Інструкції з його застосування наступні.

Переконатися, що після приведення до загального знаменника і приведення подібних ми одержуємо рівняння четвертого степеня, що підходить до одної з попередніх схем. Розкрити необхідну кількість дужок до одержання квадратних функцій. Отримавши однакові квадратні функції, зробити заміну виду $y = ax^2 + bx + c$. Бажано, щоб вираз для y опинився повним квадратом.

Наприклад : $\frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow \frac{1}{x^2+2x} - \frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{12}$. Очевидно, що можна заміняти або $(x^2 + 2x)$, або $(x^2 + 2x + 1)$. Друга заміна зручніша, оскільки ми заміняємо повний квадрат, що спростить подальше розв`язування. Отже, після заміни $y = x^2 + 2x + 1$ отримаємо:

$\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \Leftrightarrow 12y - 12y + 12 = y^2 - y \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0 \Leftrightarrow (y_1 = 4) \cup (y_2 = -3)$.

Очевидно, що $(x + 1)^2 \neq -3$, тому $(x + 1)^2 = 4 \Leftrightarrow x + 1 = \pm 2$.

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$.

- ***Рівняння зі змінною під знаком модуля.***

Такі рівняння розв'язуються наступним чином. На числовій осі відкладаємо корені виразів під знаком модуля. На кожному з утворених цими мітками інтервалів розкриваємо модуль. Це означає, що позитивний вираз під модулем не змінюється, а негативний – записується з протилежним знаком.

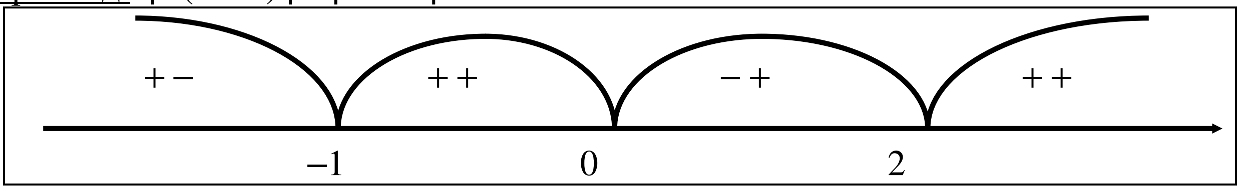
Доречно навести докладніший алгоритм (послідовність дій) розв`язання подібних рівнянь.

- Знайти всі значення аргументів, при яких модулі можуть виявитися рівними нулю. Відкласти ці значення на числовій осі і, таким чином, розбити її на ділянки, де модуль може бути розкритий однозначно;
- Для кожної ділянки переписати рівняння без модулів, оскільки на цій ділянці модуль може бути розкритий однозначно;
- Для кожної ділянки розв`язати рівняння, що отримане в результаті розкриття модулів;

- Для кожної ділянки відкинути ті корені отриманого в результаті розкриття модулів рівняння, що цій ділянці не належать;
- Відкинути повторні рішення, що могли бути отримані на межах ділянок (тобто коли значення змінної, що розділяє суміжні ділянки, є коренем рівнянь на обох ділянках одночасно);
- Записати як відповідь об'єднане рішення.

Відзначимо, що ту ж послідовність дій варто застосовувати при розв’язанні *нерівностей*, що містять модулі.

Приклад : $|\,x(x-2)\,|+|\,x+1\,|=7.$



а) $\begin{cases} x<-1, \\ x^2-2x+x+1=7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1, \\ x^2-3x-8=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-1 \\ x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{41}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{3-\sqrt{41}}{2}.$

б) $\begin{cases} (-1\le x\le 0)\bigcup(x\ge 2), \\ x^2-2x+x+1=7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1\le x\le 0)\bigcup(x\ge 2), \\ x^2-x-6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1\le x\le 0)\bigcup(x\ge 2), \\ (x=-2)\bigcup(x=3), \end{cases} \Leftrightarrow x=3.$

в) $\begin{cases} 0<x<2, \\ -x^2+2x+x+1=7, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2, \\ x^2-3x+6=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x<2, \\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{-15}}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow (x\in\varnothing).$

- ***Додаткові прийоми при розв'язанні рівнянь.***

а) Виділення цілої частини.

Цей прийом не змінює степеня рівняння, але дозволяє суттєво спростити обчислення. Виділяємо цілі частини дробів і групуємо окремо цілі і дробові частини.

Наприклад : $\dfrac{x-2}{x-1}+\dfrac{x+2}{x+1}=\dfrac{x-4}{x-3}+\dfrac{x+4}{x+3}-\dfrac{28}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x-1-1}{x-1}+\dfrac{x+1+1}{x+1}=\dfrac{x-3-1}{x-3}+\dfrac{x+3+1}{x+3}-\dfrac{28}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{x-1}+1+\dfrac{1}{x+1}=1-\dfrac{1}{x-3}+1+\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{28}{15} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x-1+x-1}{x^2-1}=\dfrac{-x-3+x-3}{x^2-9}-\dfrac{28}{15} \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{3}{x^2-9}+\dfrac{14}{15}$. Після заміни $y=x^2$, отримаємо $15y-135=45y-45+14y^2-140y+126 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 14y^2 - 110y + 216 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = \dfrac{55 \pm \sqrt{3025 - 3024}}{14} = \dfrac{55 \pm 1}{14}$.

Зворотною заміною отримаємо $x^2 = 4 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm 2$, $x^2 = \dfrac{27}{7} \Leftrightarrow x_{3,4} = \pm\dfrac{3\sqrt{21}}{7}$.

б) Додавання (віднімання) до двох квадратів подвоєного добутку.

Оскільки сума квадратів важко перетворюється, намагання замінити їх одним квадратом, додавши й віднявши подвоєний добуток, цілком слушно.

Наприклад: $x^2 + \dfrac{81x^2}{(9+x)^2} = 40 \Leftrightarrow x^2 + \dfrac{81x^2}{(9+x)^2} - 2x\cdot\dfrac{9x}{9+x} + 2x\cdot\dfrac{9x}{9+x} = 40 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - \dfrac{9x}{9+x})^2 + \dfrac{18x^2}{9+x} = 40 \Leftrightarrow (\dfrac{x^2}{9+x})^2 + \dfrac{18x^2}{9+x} = 40$. Заміна $y = (\dfrac{x^2}{9+x})$.

Отримаємо $y^2 + 18y - 40 = 0 \Leftrightarrow y_{1,2} = -9 \pm \sqrt{81+40} = -9 \pm 11$, звідки:

$\dfrac{x^2}{9+x} = -20 \Leftrightarrow x^2 + 20x + 180 = 0 \Leftrightarrow x = -10 \pm \sqrt{-80}$ – дійсних коренів немає .

$\dfrac{x^2}{9+x} = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 18 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{19}$.

в) Конструкція виду $F^2(x) + G^2(x) + F(x)\,G(x) = 0$

Такі рівняння розв'язуються як квадратні щодо частки від ділення цих функцій .

Зауваження щодо «зайвих» коренів.

Часто інші види рівнянь (показникові, тригонометричні, логарифмічні, із модулем і т.д.) різноманітними прийомами вдається звести до алгебраїчних рівнянь. При цьому варто перевіряти відповідність отриманих рішень алгебраїчного рівняння припустимим у вихідному рівнянні інтервалам.

Простіше кажучи, Ви можете перейти від вихідного рівняння (1) до більш простого рівняння (2). Проте якщо Ви не були достатньо уважні при переході (тобто не записали додаткових вимог до області визначення старих і нових аргументів, у результаті чого Ваш перехід виявився логічно нееквівалентним), то корені отриманого алгебраїчного рівняння (2) можуть не задовольняти вихідного рівняння (1).

Тому після складних (піднесення в степінь, взяття кореня, логарифмування, потенцування, домноження на вираз із змінною і т.д.) переходів від одного рівняння до іншого, рекомендується перевірити всі отримані корені на коректність шляхом підстановки у вихідне рівняння з детальною перевіркою на відповідність усіх значень області визначення функцій, що зустрічаються, (степінь, корінь, логарифм і т.д.).

Звертаємо увагу, що поява «зайвих» коренів не є результатом неправильного розв'язання алгебраїчного рівняння! Це – результат нееквівалентного переходу від інших, більш складних, рівнянь, до алгебраїчного. Поява таких «зайвих» коренів може бути виключена послідовним застосуванням виключно еквівалентних переходів від одного рівняння до іншого. Але найчастіше простіше знайти усі корені, включаючи «зайві», а потім відсіяти зайві шляхом підстановки. У розділах, присвячених розв'язанню більш складних, ніж алгебраїчні, рівнянь, ми навели відповідні приклади.

Загалом, ті ж зауваження можна віднести і до розв'язання нерівностей.

Наведемо декілька прикладів.

- Протягом розв'язання тригонометричного рівняння щодо змінної x була зроблена заміна $y = \sin x$ і отримано два корені алгебраїчного рівняння: $y = 1/2$ і $y = 2$. Оскільки $|\sin x| \le 1$, другий корінь необхідно відкинути.
- Протягом розв'язання показникового рівняння щодо змінної x була зроблена заміна $y = 2^x$ і отримано два корені алгебраїчного рівняння: $y = -1$ і $y = 1$. Оскільки значення показникової функції не може бути негативним, перший корінь необхідно відкинути.
- Протягом розв'язання рівняння з коренями щодо змінної x була зроблена заміна $y = \sqrt{x}$ і отримано два корені алгебраїчного рівняння: $y = -1$ і $y = 1$. Оскільки значення квадратного кореня не може бути негативним, перший корінь рівняння необхідно відкинути.
- Протягом розв'язання рівняння з модулями щодо змінної x , що отримано в результаті розкриття модулів на інтервалі $x \in [1; +\infty[$, було отримано корінь $x = 0$. Оскільки значення $x = 0$ не належить до інтервалу, для якого виконувалося розкриття модуля, цей корінь необхідно відкинути.

Глава 2.Ірраціональні рівняння.

Корені квадратні.

Загальна інструкція з розв'язку рівнянь із коренями квадратними може бути сформульована в такий спосіб. Підносимо в квадрат обидві частини рівняння стільки разів, скільки потрібно для зникнення коренів, слідкуючи за тим, щоб коефіцієнти при старшому степені змінної взаємно знищувався або ставали по модулю мінімальними. Першим звільняємо від коренів той вираз, коефіцієнти якого по модулю більше.

Приклад : $\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6$. Для того, щоб виконати першу частину інструкції, необхідно перенести один із коренів в іншу сторону (щоб коефіцієнти при першому степені x взаємно знищилися). Для того, щоб виконати другу частину інструкції, необхідно перенести в іншу сторону саме другий корінь, тому що коефіцієнт 15 більший за 3. При цьому бажано враховувати область визначення і вести перетворення еквівалентними переходами (інакше для відсіву отриманих зайвих коренів обов'язково прийдеться виконувати підстановку).

$$\sqrt{15-x}+\sqrt{3-x}=6 \Leftrightarrow \sqrt{15-x}=6-\sqrt{3-x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3, \\ 15-x=36-12\sqrt{3-x}+3-x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 3, \\ 3-x=4, \end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Розглянемо додаткові методи.

а) Якщо можна, то бажано не підносити в квадрат, а заміняти корінь через нову змінну (тому що піднесення до квадрату веде до збільшення цифрових коефіцієнтів).

Приклад : $x+\sqrt{x+20}=22$. Заміною $\sqrt{x+20}=y$ отримаємо

$y^2-20+y=22 \Leftrightarrow y^2+y-42=0 \Leftrightarrow (y=6)\cup(y=-7)$.

Звідси $\sqrt{x+20}=6 \Leftrightarrow x=16$.

б) Якщо під коренем знов знаходиться корінь, то його, як правило, позначають через нову перемінну. Це дає можливість оцінити вигляд виразів під первинними коренями.

Приклад : $\sqrt{x+8+2\sqrt{x+7}}+\sqrt{x+1-\sqrt{x+7}}=4$.

Заміною $y=\sqrt{x+7} \Rightarrow x=y^2-7$ отримаємо:

$$\sqrt{y^2-7+8+2y}+\sqrt{y^2-7+1-y}=4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(y+1)^2}+\sqrt{y^2-y-6}=4 \Leftrightarrow |y+1|+\sqrt{y^2-y-6}=4.$$

Через те, що $y\ge 0$, модуль можна опустити.

Маємо: $y+1+\sqrt{y^2-y-6}=4 \Leftrightarrow \sqrt{y^2-y-6}=3-y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-y\ge 0, \\ y^2-y-6=9-6y+y^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y\le 3, \\ 5y=15, \end{cases} \Leftrightarrow y=3$. Отримане значення підставляємо в рівняння заміни і знаходимо x.

$$\sqrt{x+7}=3 \Leftrightarrow x+7=9 \Leftrightarrow x=2.$$

в) Додавання двох квадратів до подвоєного добутку.

Даний прийом дозволяє перейти від добутку коренів до їхньої суми і тим самим спростити вираз.

Приклад : $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + (x-1) + (x+3) + 2\sqrt{(x-1)(x+3)} =$

$= 4 - 2x + x - 1 + x + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} + (\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3})^2 = 6.$

Зробимо заміну: $\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3} = y$. Одержимо квадратне рівняння $y^2+y-6=0$ з коренями $y = -3$ і $y = 2$. Перший корінь зайвий, бо сума двох радикалів не може бути від'ємною, тому використаємо лише другий.

$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 2-\sqrt{x-1} \Rightarrow$

$\Rightarrow x+3 = 4 - 4\sqrt{x-1} + x - 1 \Leftrightarrow 4\sqrt{x-1} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

Оскільки були нееквівалентні переходи, то робимо перевірку і переконуємося, що знайдений корінь є правильним розв'язком.

Зауваження: вирази під знаком кореня повинні бути невід'ємними. При піднесенні в квадрат ця вимога явно не враховується, тому не забувайте або використовувати еквівалентні переходи типу $\sqrt{y} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4, \\ y \geq 0, \end{cases}$ або відсівати отримані зайві рішення перевіркою, тобто шляхом підстановки у вихідне рівняння з ретельною перевіркою, чи не виявиться в ході обчислення вираз, що включає від'ємне значення під коренем.

Корені кубічні.

Загальна інструкція з розв'язку рівнянь із коренями кубічними може бути сформульована в такий спосіб. Підносимо в куб обидві частини рівняння по формулах:
$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, $\quad (a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$,
із наступною заміною виразів $(a + b)$ і $(a - b)$ з умови. Ця заміна може призводити до появи сторонніх коренів і, тому, обов'язково потрібно робити перевірку.

Приклад: $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2$. Піднесемо обидві частини даної рівності у куб і одержимо:
$(1 + x) + (1 - x) + 3\sqrt[3]{(1+x)(1-x)}\,(\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x}) = 8$. Тепер суму коренів заміняємо з умови двійкою:
$(1+x) + (1-x) + 3\sqrt[3]{(1+x)(1-x)} \cdot (2) = 8 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6\sqrt[3]{(1+x)(1-x)} = 6 \Leftrightarrow 1 - x2 = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

а) Найпоширенішим додатковим прийомом є введення двох нових змінних і розв'язок системи рівнянь.

Приклад: $\dfrac{(34-x)\sqrt[3]{x+1}-(x+1)\sqrt[3]{34-x}}{\sqrt[3]{34-x}-\sqrt[3]{x+1}}=30$. Зробивши заміну $\begin{cases}\sqrt[3]{34-x}=a,\\ \sqrt[3]{x+1}=b.\end{cases}$ одержимо:

$\begin{cases}\dfrac{a^3b-b^3a}{a-b}=30,\\ a^3+b^3=35.\end{cases}$ Тут друге рівняння отримане безпосередньо із системи заміни піднесенням у куб і додаванням рівнянь. Далі розв'язуємо отриману систему.

$$\begin{cases}\dfrac{ab(a^2-b^2)}{a-b}=30,\\ a^3+b^3=35,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab(a+b)=30,\\ a^3+b^3=35,\end{cases}$$

Домножимо перше рівняння на 3 і, склавши з другим, одержимо:

$(a+b)^3=125 \Leftrightarrow a+b=5$.

Підставивши отримане в перше рівняння, одержуємо $ab = 6$. Потім залишається розв'язати просту систему $\begin{cases}a+b=5,\\ ab=6.\end{cases}$ Звідси маємо два комплекти розв'язків (2; 3) і (3; 2). Тепер перейдемо до визначення x.

$$\begin{cases}\sqrt[3]{34-x}=2,\\ \sqrt[3]{x+1}=3,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}34-x=8,\\ x+1=27,\end{cases}\Leftrightarrow x=26.\quad \begin{cases}\sqrt[3]{34-x}=3,\\ \sqrt[3]{x+1}=2,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}34-x=27,\\ x+1=8,\end{cases}\Leftrightarrow x=7.$$

Корені довільного степеня.

Загальна інструкція з розв'язку рівнянь із коренями довільного степеня може бути сформульована в такий спосіб. Переходимо до запису у вигляді степенів з однаковим знаменником. Потім призводимо вираз до загального знаменника і виносимо загальний множник. Потім робимо заміну.

Приклад: $5\sqrt[15]{x^{22}}+\sqrt[15]{x^{14}\sqrt{x}}-22\sqrt[15]{x^7}=0 \Leftrightarrow 5x^{\frac{44}{30}}+x^{\frac{29}{30}}-22x^{\frac{14}{30}}=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^{\frac{14}{30}}\cdot(5x+x^{\frac{1}{2}}-22)=0$.

Тепер ми одержуємо перший розв'язок $x_1 = 0$. Для розв'язку другого рівняння використаємо заміну $\sqrt{x}=y$, зробивши яку маємо:

$5y^2+y-22=0 \Leftrightarrow y_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+440}}{10}=\dfrac{-1\pm 21}{10}$.

Оскільки $\sqrt{x}\geq 0$, то зворотною заміною отримаємо остаточний результат:

$\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow x=4$.

Глава 3.Системи алгебраїчних рівнянь.

Існує набір звичайних методів розв'язку систем рівнянь, таких як визначення одної змінної через інші з одного рівняння і підстановка в друге, додавання і віднімання рівнянь із визначеними коефіцієнтами одне з іншого і т.д. Проте тут ми хотіли б розглянути деякі найтиповіші класи систем із специфічними методами розв'язку.

- ***Симетричні системи .***

Існує значний клас систем, у яких нічого не змінюється від заміни однієї змінної на іншу. Найпростішою серед них є наступна:

$\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$ У цьому випадку *x, y* є коренями рівняння $z^2 - az + b = 0$, тому отримаємо дві пари розв\`язків $\begin{cases} x=z_1, \\ y=z_2, \end{cases}$ и $\begin{cases} x=z_2, \\ y=z_1. \end{cases}$ Таким чином, розв\`язання таких систем виконується за допомогою нових змінних: $a = x + y$, $b = xy$ (або $a = x^k + y^k$, $b = (xy)^k$). Чим більше натуральне число *k*, тим простіший подальший розв\`язок. Найпростішим є випадок $k = 1$.

Приклад 1: $\begin{cases} x+y+xy=7, \\ x^2+y^2+xy=13, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=7-(x+y), \\ (x+y)^2-xy=13. \end{cases}$ Заміною: $\begin{cases} x+y=a, \\ xy=b. \end{cases}$ отримаємо: $\begin{cases} b=7-a, \\ a^2-b=13, \end{cases} \Rightarrow a^2 + a - 20 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=4, \\ a=-5. \end{array}\right.$, тобто дві можливі системи:

$\begin{cases} x+y=4, \\ xy=3, \end{cases}$ та $\begin{cases} x+y=-5, \\ xy=12. \end{cases}$ Розв\`яжемо їх. Перша $x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4-3}$ дає дві пари рішень (1, 3), (3, 1). Друга $x^2 + 5x + 12 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{25-48}}{2}$ – не має рішень.

Приклад 2: $\begin{cases} x^4+y^4=82, \\ xy=3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^4+y^4=82, \\ x^4y^4=81, \end{cases} \Rightarrow (x^4)^2 - 82(x^4) + 81 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^4)_{1,2} = 41 \pm \sqrt{1681-81} = 41 \pm 40$. Отримавши чотири значення *x*: ± 1, ± 3 та обрахувавши для кожного з них відповідне *y*, за допомогою перевірки впевнимося, що усі чотири пари розв\`язків: (1, 3), (–1, –3), (3, 1), (–3, –1) підходять.

Як зауваження, можна відзначити, що часто заміною $z = x + a$, $s = y+b$ систему можна перетворити на симетричну і розв\`язати, як було описано вище.

• ***Циклічні системи.***

Досить поширеними є системи, у яких рівняння виглядають однаково, а змінні циклічно заміняють одна одну. Розв'язок таких систем базується на додаванні (множенні) усіх рівнянь системи з подальшим відніманням (діленням) отриманого таким чином рівняння з усіх інших рівнянь системи.

Приклад: $\begin{cases} \dfrac{3}{xy}+\dfrac{15}{yz}=2, \\ \dfrac{15}{yz}+\dfrac{5}{xz}=2, \\ \dfrac{5}{xz}+\dfrac{3}{xy}=2, \end{cases} \Rightarrow 2(\dfrac{3}{xy}+\dfrac{5}{xz}+\dfrac{15}{yz})=6 \Leftrightarrow \dfrac{3}{xy}+\dfrac{5}{xz}+\dfrac{15}{yz}=3.$

Віднімемо з отриманого кожне рівняння системи й одержимо систему, що перетворилася до циклічної щодо множення.

$$\begin{cases} \dfrac{3}{xy}=1, \\ \dfrac{5}{xz}=1, \\ \dfrac{15}{ez}=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=3, \\ xz=5, \\ yz=15, \end{cases} \Rightarrow (xyz)^2=225 \Rightarrow xyz=\pm 15.$$

Розділивши отриманий вираз на кожне рівняння системи, одержуємо два розв'язки (1, 3, 5), (–1, –3, –5).

• ***Системи однорідних рівнянь.***

Однорідними називаються рівняння, у яких сумарний степінь невідомих кожного доданка однаковий. Діленням на одну зі змінних у цьому загальному степені ми одержуємо рівняння щодо добутку змінних.

Приклад: $\begin{cases} 2x^2-3xy+y^2=3, \\ x^2+2xy-2y^2=6, \end{cases} \Rightarrow 4x^2-6xy+2y^2=x^2+2xy-2y^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 3x^2-8xy+4y^2=0 \Rightarrow 3\frac{x^2}{y^2}-8\frac{x}{y}+4=0 \Rightarrow \left(\frac{x}{y}\right)_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{3}=\frac{4\pm 2}{3}.$$

Отже $\dfrac{x}{y}=2$ або $\dfrac{x}{y}=\dfrac{2}{3}$. У обох випадках знайдемо вираз x через y і підставимо в перше рівняння вихідної системи. Одержимо:

$\begin{cases} x = 2y, \\ 8y^2 - 6y^2 + y^2 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y = \pm 1, \end{cases}$ а для другого випадку $\begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y, \\ \dfrac{8}{9}y^2 - 2y^2 + y^2 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3}y, \\ -y^2 = 27, \end{cases}$ – розв`язків нема.

Отже, маємо тільки два розв`язки: (2, 1), (–2, –1).

Застосування теореми Вієта .

Змінні шукаємо як корені рівняння, коефіцієнти якого знаходяться з теореми Вієта. Найпростіший випадок таких систем продемонстрований в описі симетричних систем.

Розглянемо випадок трьох змінних.

$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ xy + xz + yz = 3, \\ xyz = 1. \end{cases}$ Виходячи з цієї теореми *x, y, z* будуть коренями наступного кубічного рівняння: $s^3 - 3s^2 + 3s - 1 = 0 \Leftrightarrow (s - 1)^3 = 0$. Таким чином, всі три корені дорівнюють одиниці. Отже, $x = y = z = 1$.

Глава 4.Логарифмічні рівняння.

Основні властивості логарифмічної функції $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$:

- Область визначення функції – множина всіх позитивних дійсних чисел, а область значень функції – множина всіх дійсних чисел.
- $\log_a 1 = 0$.
- $\log_a x + \log_a y = \log_a (xy)$, $x > 0$, $y > 0$.
- При $a > 1$ функція монотонно зростає, а при $0 < a < 1$ – монотонно спадає.

Часто для скорочення записів використовуються позначення:

$\lg x$ – замість $\log_{10} x$ (десятковий логарифм);

$\ln x$ – замість $\log_e x$ (натуральний логарифм), де $e \approx 2.719841984$;

Справедливі також наступні формули:

- Якщо $a > 0$, то $x = a^{\log_a x}$.
- $\log_{a^m} x^n = \dfrac{n}{m} \log_a x$.
- $\log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}$.

- $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$, $b > 0$, $b \neq 1$.

Практично всі логарифмічні рівняння розбиваються на три умовних типи, кожний із який має свої ознаки і свій спосіб розв'язку. Для того, щоб визначити їх, треба спочатку перейти до однієї основи, обираючи для цього найбільше просте з чисел, що зустрічаються в прикладі.

- ***<u>Якщо всі логарифми в першому степені.</u>***

Інструкції такі: константи подаємо у вигляді логарифмів, негативні доданки переносимо в протилежну сторону, множники заносимо усередину логарифма в показник степеня. Потім переходимо від суми логарифмів до логарифмів добутку і прирівнюємо вирази під логарифмом.

<u>Приклад</u>: $\lg 5 + \lg (x + 10) = 1 - \lg (2x - 1) + \lg (21x - 20) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg 5 + \lg (x + 10) + \lg (2x - 1) = = \lg 10 + \lg (21x - 20) \Rightarrow$

$\Rightarrow \lg[\, 5(x + 10)(2x - 1)] = \lg [10(21x - 20)] \Rightarrow 5(x + 10)(2x - 1) = 10(21x - 20) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 19x - 10 = 42x - 40 \Leftrightarrow 2x^2 - 23x + 30 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{23 \pm \sqrt{529 - 240}}{4} = \dfrac{23 \pm 17}{4}$.

Отримаємо два розв`язки: $x_1 = 10$, $x_2 = 1.5$, перевіркою переконуємося, що обидва вони підходять.

- ***<u>Якщо не всі логарифми в першому степені.</u>***

У цьому випадку інструкції протилежні попереднім. Переходимо від логарифмів добутку і частки до суми і різниці логарифмів. Показники степеня виносимо за знак логарифма. Потім робимо заміну типу $y = \log_a f(x)$.

<u>Наприклад</u>: $\lg^2 (100x) + \lg^2 (10x) = 14 + \lg \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lg 100 + \lg x)^2 + (\lg 10 + \lg x)^2 = 14 - \lg x$. Замінивши $\lg x = y$, отримаємо:

$(2 + y)^2 + (1 + y)^2 = 14 - y \Leftrightarrow 2y^2 + 7y - 9 = 0 \Leftrightarrow (y = 1) \cup (y = -4.5)$.

Зворотною заміною остаточно отримаємо $x_1 = 10$, $x_2 = 0.00001\sqrt{10}$.

- ***<u>Логарифми в показнику степеня.</u>***

У цьому випадку логарифмуємо обидві частини рівняння по тій основі, що вже є. Далі одержуємо конструкцію попереднього типу і діємо відповідно до її інструкцій.

Наприклад: $\frac{10x^{2\lg^2 x}}{x^3} = \frac{x^{3\lg x}}{10} \Leftrightarrow 100x^{2\lg^2 x} = x^{3+3\lg x} \Leftrightarrow \lg\,(100x^{2\lg^2 x}) = \lg\,(x^{3+3\lg x})$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg 100 + \lg\,(x^{2\lg^2 x}) = \lg\,(x^{3+3\lg x}) \Leftrightarrow 2 + (2\lg^2 x)\cdot(\lg x) = (3 + 3\lg x)\cdot(\lg x)$.

Заміною $y = \lg x$ отримаємо рівняння:

$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow 2(y + 1)(y^2 - y + 1) - 3y(y + 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y + 1)(2y^2 - 5y + 2) = 0 \Leftrightarrow (y = -1) \bigcup (y = 2) \bigcup (y = 0.5)$, з якого отримаємо відповідь: $(x = 0.1) \bigcup (x = 100) \bigcup (x = \sqrt{10})$.

Глава 5.Показникові рівняння.

Основні властивості показникової функції $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$:

- Область визначення функції – множина всіх дійсних чисел, а область значень функції – множина всіх позитивних дійсних чисел.
- $a^0 = 1$.
- $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$.
- При $a > 1$ функція монотонно зростає, а при $0 < a < 1$ – монотонно спадає.

Практично всі показникові рівняння розбиваються на три умовних типи, кожний із який має свої ознаки і свій спосіб розв'язку. Для того, щоб визначити їх, треба спочатку перейти до однієї основи, обираючи для цього найбільше просте з чисел, що зустрічаються в прикладі.

• *Якщо показники степеня відрізняються на число.*

У цьому випадку ми робимо показники степеня в точності однаковими, виносячи все зайве з показників степеня. Потім, якщо основ дві, то ділимо усі рівняння на одне з них у загальному степені. Далі показникову функцію лишаємо в одній стороні рівняння, а все інше переносимо в іншу і перетворюємо до деякого степеня нашої основи. Потім прирівнюємо показники.

Приклад: $3\cdot 4^x + \frac{1}{3}\cdot 9^{x+2} = 6\cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2}\cdot 9^{x+1} \Leftrightarrow \frac{9}{2}\cdot 9^x + \frac{81}{3}\cdot 9^x = 24\cdot 4^x - 3\cdot 4^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\frac{63}{2})\cdot 9^x = 21\cdot 4^x \Leftrightarrow (\frac{9}{4})^x = 21\cdot\frac{2}{63} \Leftrightarrow (\frac{9}{4})^x = (\frac{9}{4})^{-0.5} \Leftrightarrow x = -0.5$.

- ***Якщо показники степеня відрізняються в декілька раз.***

У цьому випадку ми робимо показники строго пропорційними, забираючи всі добавки з показників степеня і робимо заміну $y = a^x$, тоді $y^k = a^{kx}$.

Приклад: $3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} = 0.2 \Leftrightarrow \frac{3}{5} \cdot 5^{2x} - \frac{2}{5} \cdot 5^x - \frac{1}{5} = 0$.

Заміною $y = 5^x$ отримаємо: $3y^2 - 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow (y = 1) \cup (y = -\frac{1}{3})$.

Оскільки показникова функція позитивна, то: $5^x = 1 = 5^0 \Leftrightarrow x = 0$.

- ***Конструкція виду: $(F(x))^{g(x)} = (F(x))^{q(x)}$.***

Дана конструкція фактично перегукується з третім типом логарифмічних рівнянь і має схожий розв'язок. Тонкощі полягають у тому, що при цілому показнику степеня основа може бути і негативною.

Інструкція виглядає так. Переносимо усе в одну сторону й один з виразів виносимо за дужку. Одержуємо:

$(F(x))^{g(x)} [(F(x))^{q(x) - g(x)} - 1] = 0$.

Прирівнюємо до нуля кожний співмножник.

Перша група розв'язків $F(x) = 0$. У цьому випадку показники степеня вихідного рівняння повинні бути позитивні.

Оперувати з другим співмножником треба так, щоб не втратити розв`язки для цілих показників у вигляді: $|F(x)|^{q(x) - g(x)} = 1$.

Логарифмуючи цей вираз, одержимо:

$\lg\{|F(x)|^{q(x) - g(x)}\} = \lg 1 \Leftrightarrow (g(x) - q(x))\lg\{|F(x)|\} = 0$.

Отримано ще дві серії розв`язків:

$g(x) - q(x) = 0$, тобто показники рівні і

$\lg\{|F(x)|\} = 0 \Leftrightarrow |F(x)| = 1 \Leftrightarrow F(x) = \pm 1$.

Природно, потрібно не забути перевірку на зайві розв`язки.

Приклад: $(x+1)^{x^2+3x} = (x + 1)^{10x-12} \Leftrightarrow (x + 1)^{10x-12} [(x+1)^{x^2-7x+12} - 1] = 0$.

Перша серія розв`язків ($F(x) = 0$) дає $(x + 1)^{10x-12} = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$.
Перевірка: $(0)^{-2} = (0)^{-22}$ – розв`язок $x = -1$ не підходить!
Далі шукаємо розв`язки у вигляді $|F(x)|^{q(x) - g(x)} = 1$:
$(x+1)^{x^2-7x+12} = 1 \Rightarrow |x+1|^{x^2-7x+12} = 1 \Rightarrow \lg\{|x+1|^{x^2-7x+12}\} = \lg 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow (x^2 - 7x + 12) \cdot \lg|x + 1| = 0$.
Другу серію розв`язків шукатимемо як корені першого співмножника:
$x^2 - 7x + 12 = 0 \Leftrightarrow (x = 3) \cup (x = 4)$.
Перевірки: $4^{18} = 4^{18}$ та $5^{28} = 5^{28}$ підтверджують їх правильність.

Третю серію розв`язків шукатимемо як корені другого співмножника:
$\lg|x+1|=0 \Leftrightarrow |x+1|=1 \Leftrightarrow (x=0)\bigcup(x=-2)$.
Перевірки: $1^0=1^{-12}$ та $(-1)^{-2}=(-1)^{-32}$ підтверджують їх правильність також.
Отже, можливих розв`язків чотири: $(x=3)\bigcup(x=4)\bigcup(x=0)\bigcup(x=-2)$

- ***Додаткові прийоми:***

- ***Взаємно обернені вирази.***

Досить поширеним при розв`язку показникових рівнянь є застосування пар взаємно обернених виразів, таких як:

$(2+\sqrt{3})$ и $(2-\sqrt{3})$, $(7+\sqrt{48})$ и $(7-\sqrt{48})$, і т. д .

Розв'язок у цьому випадку знаходиться легко якщо замінити один із членів пари через y, а другий – через y^{-1}.

- ***Мінімакс.***

Конструкції, у яких мінімум однієї частини рівняння більше або дорівнює максимуму інший, дозволяють знайти значення цього екстремуму і потім отримати розв`язок прирівнявши обидві частини до цього загального значення.

Приклад: $2^{x^2}=1-x^2$. Оскільки ліва частина більше або дорівнює одиниці, а права менше або дорівнює одиниці, то розв'язок може бути тільки в тому випадку, коли і ліва і права частини одночасно дорівнюють одиниці:

$$\begin{cases}2^{x^2}=1,\\ 1-x^2=1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2=0,\\ -x^2=0,\end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

- ***Монотонність.***

Цей прийом полягає у вгадуванні одного розв`язку, з подальшим доведенням його єдиності за допомогою монотонності функції.

Приклад: $3^x+4^x=5^x$. Загальновідомий розв`язок – $x=2$. Доведемо, що інших немає. Розділимо обидві частини рівняння на 5^x. Одержимо в лівій частині суму двох монотонно спадаючих функцій, а в правій частині рівняння – константу:

$\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$. При $x<2$ завдяки монотонності функції $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x>\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$, а при $x>2$ – $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x<\left(\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^2=1$. Отже, рівність досягається лише коли $x=2$. Таким чином, ми довели, що $x=2$ – єдиний розв`язок.

Глава 6.Системи логарифмічних і показникових рівнянь.

Розв'язок систем логарифмічних і показникових рівнянь йде, як правило, одним з наступних шляхів.

- ***Розв'язок одного з рівнянь.***

Розв'язок одного з рівнянь системи до одержання простого співвідношення між змінними і підстановка поданої в такий спосіб однієї змінної в інше рівняння з наступним його розв'язком.

Приклад: $\begin{cases} 3^y 9^x = 81, \\ \lg(y+x)^2 - \lg x = 2\lg 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{y+2x} = 3^4, \\ \lg(y+x)^2 = \lg x + 2\lg 3, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y+2x=4, \\ \lg(y+x)^2 = \lg x + \lg 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ \lg(4-2x+x)^2 = \lg(9x), \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ (4-x)^2 = 9x, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ x^2-17x+16=0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-2x, \\ \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=16, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1, \\ y=2, \end{cases} \\ \begin{cases} x=16, \\ y=-28. \end{cases} \end{array}\right.$

Перевіркою переконуємося, що обидва отримані розв'язки підходять.

- ***Розв'язок кожного з рівнянь.***

Розв'язок кожного з рівнянь системи до одержання простого співвідношення між змінними, що вже не містить логарифмічної чи показникової функції і наступний розв'язок звичайної системи.

Приклад: $\begin{cases} \lg(x^2+y^2) = 1+\lg 8, \\ \lg(x+y) - \lg(x-y) = \lg 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2+y^2) = \lg 10 + \lg 8, \\ \lg(x+y) = \lg 3 + \lg(x-y), \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg(x^2+y^2) = \lg 80, \\ \lg(x+y) = \lg(3x-3y), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=80, \\ x+y=3x-3y, \\ x+y>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y, \\ x^2+y^2=80, \\ x+y>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y, \\ 5y^2=80, \\ y>0, \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y, \\ y>0, \\ y=\pm 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y, \\ y=4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8, \\ y=4. \end{cases}$

- ***<u>Логарифмування одного з рівнянь.</u>***

Логарифмуванням одного з рівнянь по вже наявній в системі основі дозволяє перейти після замін змінних до звичайної системи рівнянь.

<u>Приклад</u>: $\begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ x^y = 4^6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ \log_4(x^y) = \log_4 4^6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 + \log_4 x, \\ y\log_4 x = 6. \end{cases}$

Далі можна логарифм позначити через нову змінну або просто знайти його вираз через інші змінні з першого рівняння і підставити в друге й одержати просте квадратне рівняння щодо *y*.

$$\begin{cases} \log_4 x = y - 1, \\ y(y-1) = 6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x = y - 1, \\ y^2 - y - 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x = y - 1, \\ \left[\begin{array}{l} y = 3, \\ y = -2, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3, \\ \log_4 x = 2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2, \\ \log_4 x = -3, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 3, \\ x = 16, \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2, \\ x = \dfrac{1}{64}. \end{cases} \end{array}\right.$$

- ***<u>Застосування тотожності</u>*** $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$.

<u>Приклад</u>: $\begin{cases} x^{\log_3 y} + 2y^{\log_3 x} = 27, \\ \log_3 y - \log_3 x = 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^{\log_3 y} = 27, \\ \log_3 y = 1 + \log_3 x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_3 y} = 9, \\ \log_3 y = \log_3(3x), \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x^{\log_3 y} = \log_3 9, \\ y = 3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 y \cdot \log_3 x = 2, \\ y = 3x, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x, \\ \log_3(3x)\cdot\log_3 x = 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x, \\ (1 + \log_3 x)\log_3 x = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x, \\ a = \log_3 x, \\ a^2 + a - 2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x, \\ \left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1, \\ \log_3 x = -2, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = \dfrac{1}{9}, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3, \\ y = 9, \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{9}, \\ y = \dfrac{1}{3}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Глава 7.Алгебраїчні нерівності.

Істотна відмінність нерівностей від рівнянь у тому, що їх розв'язок, як правило, ведеться винятково еквівалентними переходами.

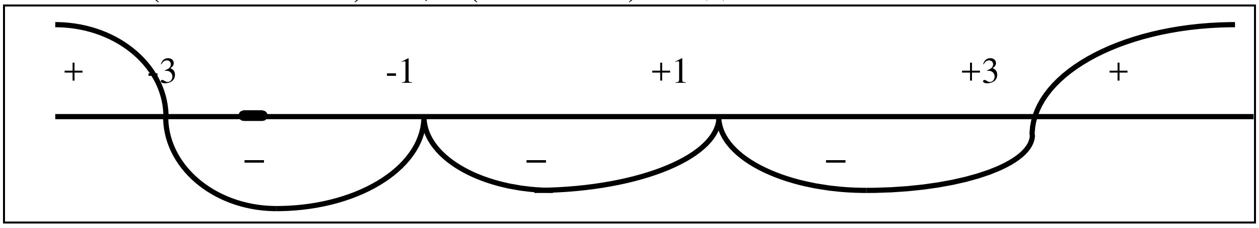
- ***<u>Раціональні нерівності.</u>***

Раціональні нерівності розв'язуються наступним чином. Переносимо усе в одну сторону, призводимо вираз до загального знаменника і виносимо загальний множник. Потім усі вирази у дужках розкладаємо на множники. Відкидаємо нерозкладні квадратні тричлени, у яких дискримінант менше нуля (враховуємо, що їх знак для всіх *x* збігається зі знаком коефіцієнта при

x^2) і їм подібного виразу, знак яких однаковий для всіх значень змінної. Далі застосовуємо метод інтервалів. На числовій прямій відкладаємо корені усіх виразів у дужках. Потім визначаємо знак виразу при значеннях змінної, що менші за менший корінь виразів у дужках. Далі при переході через точку, що відповідає кореню виразу в дужках, змінюємо знак на протилежний, якщо степінь кореня непарний, і не змінюємо знака, якщо вона парний. Якщо нерівність несувора, то до розв'язку приєднуються нулі чисельника, що не є коренями знаменника.

Приклад: $\frac{(2x^2-3x+50)(x+1)^3(x-1)^2(x+3)}{(-x^2+x-1)(x+1)(x-3)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{(x+1)^3(x-1)^2(x+3)}{(x+1)(x-3)} \leq 0$,

оскільки $(2x^2-3x+50) > 0$, а $(-x^2+x-1) < 0$ для всіх значень змінної.



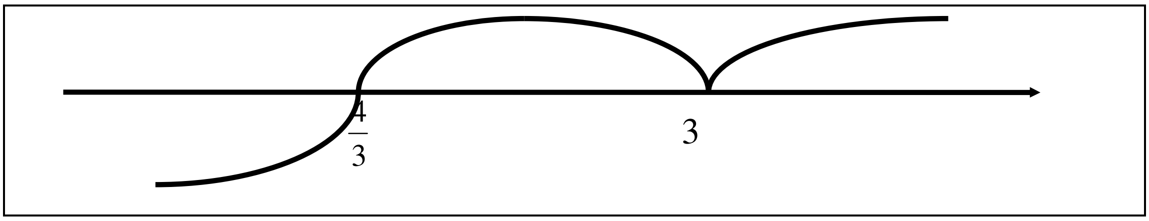
Таким чином, розв'язком нерівності буде: $(-3 \leq x < -1) \cup (-1 < x < 3)$.

- ***Нерівності з модулями.***

Нерівності з модулями вирішуються так само, як рівняння, шляхом розкриття модуля окремо на кожному інтервалі. Але в одному випадку, коли обидві частини нерівності позитивні, можна спростити розв'язок, якщо піднести обидві частини нерівності формально в квадрат, потім перенести усе в одну сторону і розкласти як різницю квадратів. Далі застосовуємо метод інтервалів.

Приклад: $\left|\frac{3x+1}{x-3}\right| < 3 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3x+1}{x-3}\right)^2 < 3^2 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{3x+1}{x-3}-3\right)\cdot\left(\frac{3x+1}{x-3}+3\right) < 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{10(6x-8)}{(x-3)^2} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-\frac{4}{3}}{(x-3)^2} < 0$.



Відповідь: $x < \frac{4}{3}$.

• *Ірраціональні нерівності.*

Є дві головних схеми розв'язку ірраціональних нерівностей, що використовуються в ситуаціях, коли вираз поза коренем невід'ємний і коли він завжди негативний.

$$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > g^2(x), \\ g(x) \ge 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) < 0, \\ f(x) \ge 0. \end{cases} \end{array}\right. \qquad \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0, \\ f(x) \ge 0, \\ f(x) < g^2(x). \end{cases}$$

Приклад: $\sqrt{x^2-4x} > x-3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-3 \ge 0, \\ x^2-4x > (x-3)^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x-3<0, \\ x^2-4x \ge 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 3, \\ 2x > 9, \end{cases} \\ \begin{cases} x<3, \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 4, \\ x \le 0, \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 4.5, \\ x \le 0. \end{array}\right.$

Як бачимо, навіть у такому нескладному прикладі було декілька побічних коренів. Таким чином, підносити нерівність у квадрат треба з великою обережністю.

Якщо коренів декілька, то процедура виглядає так:

$$\sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} < \sqrt{x-1} + \sqrt{x-2}, \\ x \ge 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 < x-1+x-2+2\sqrt{(x-1)(x-2)}, \\ x \ge 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2-3x+2} > 6-x, \\ x \ge 2, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2, \\ 6-x \ge 0, \\ 4(x^2-3x+2) > 36-12x+x^2, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ 6-x<0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 2, \\ x \le 6, \\ 3x^2-28>0, \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2, \\ x > 6, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 \le x \le 6, \\ \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{\frac{28}{3}}, \\ x < -\sqrt{\frac{28}{3}}, \end{array}\right. \end{cases} \\ x > 6, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{\frac{28}{3}} < x \le 6, \\ x > 6, \end{array}\right. \Leftrightarrow x > \sqrt{\frac{28}{3}}.$$

Відповідь: $x > \frac{2}{3}\sqrt{21}$.

Глава 8.Логарифмічні нерівності.

Розв'язок логарифмічних нерівностей ведеться тими ж прийомами, що і розв'язок логарифмічних рівнянь із використанням монотонності логарифмічної функції.

$$\log_{a(x)} f(x) < \log_{a(x)} g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ 0 < f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) > g(x).> 0. \end{cases} \end{array}\right.$$

Практично всі логарифмічні нерівності розбиваються на три умовні типи, кожний із який має свої ознаки і свій спосіб розв'язку. Для того, щоб визначити їх, треба спочатку перейти до однієї основи, обираючи для цього найбільше просте з чисел, що зустрічаються в прикладі.

- ***<u>Якщо всі логарифми в першому степені.</u>***

Інструкції такі: константи подаємо у вигляді логарифмів, негативні доданки переносимо в протилежну сторону, множники заносимо усередину логарифму в показник степеня. Потім переходимо від суми логарифмів до логарифмів добутку (додаючи при цьому умови додатності виразів під логарифмом) і, використовуючи монотонність, позбуваємося від логарифмів.

<u>Приклад</u>: $\lg 5 + \lg (x + 10) < 1 - \lg (2x - 1) + \lg (21x - 20) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg 5 + \lg (x + 10) + \lg (2x - 1) < \lg 10 + \lg (21x - 20) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg(5(x+10)(2x-1)) < \lg(10(21x-20)), \\ x+10>0, \\ 2x-1>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5(x+10)(2x-1) < 10(21x-20), \\ x>-10, \\ x>0.5, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0.5, \\ 2x^2-23x+30<0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0.5, \\ 1.5<x<10, \end{cases} \Leftrightarrow 1.5 < x < 10.$$

- ***<u>Не всі логарифми в першому степені.</u>***

У цьому випадку інструкції протилежні попереднім. Переходимо від логарифмів добутку і частки до суми і різниці логарифмів. Показники степеня виносимо за знак логарифму. Потім робимо заміну типу $y = log_a f(x)$ і розв’язуємо дробово–раціональну нерівність.

<u>Приклад</u>: $\lg^2 (100x) + \lg^2 (10x) < 14 + \lg \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow$

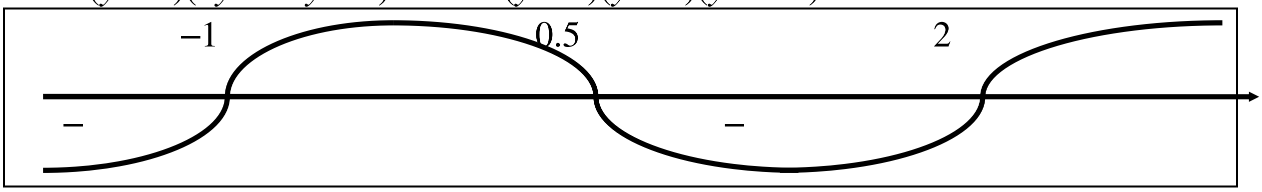
$\Leftrightarrow(\lg 100 + \lg x)^2 + (\lg 10 + \lg x)^2 = 14 - \lg x$. Заміною $\lg x = y$ отримаємо:

$(2 + y)^2 + (1 + y)^2 < 14 - y \Leftrightarrow 2y^2 + 7y - 9 < 0 \Leftrightarrow -4.5 < y < 1$.
Зворотною заміною отримаємо відповідь $-4.5 < \lg x < 1 \Leftrightarrow 0.00001\sqrt{10} < x < 10$.

- ***Логарифми в показнику степеня.***

У цьому випадку логарифмуємо обидві частини нерівності по тій основі, що вже є. Далі одержуємо конструкцію другого типу і діємо відповідно до інструкцій для неї.

Приклад: $100x^{2\lg^2 x} < x^{3+3\lg x} \Leftrightarrow \lg(100x^{2\lg^2 x}) < \lg(x^{3+3\lg x}) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \lg 100 + \lg(x^{2\lg^2 x}) < \lg(x^{3+3\lg x}) \Leftrightarrow 2 + (2\lg^2 x)(\lg x) < (3 + 3\lg x)(\lg x)$.
Заміною $y = \lg x$ отримаємо рівняння:
$2y^3 - 3y^2 - 3y + 2 < 0 \Leftrightarrow 2(y + 1)(y^2 - y + 1) - 3y(y + 1) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (y + 1)(2y^2 - 5y + 2) < 0 \Leftrightarrow (y + 1)(y - 2)(y - 0.5) < 0$.



Розглянувши інтервали, зворотною заміною отримаємо розв'язок:

$$\left[\begin{array}{l} 0.5 < \lg x < 2, \\ \lg x < -1, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{10} < x < 100, \\ 0 < x < 0.1\,. \end{array}\right.$$

Глава 9.Показникові нерівності.

Розв'язок показникових нерівностей ведеться тими ж прийомами, що і розв'язок показникових рівнянь із використанням монотонності показникової функції.

$$a(x)^{f(x)} < a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Практично всі показникові нерівності розбиваються на три умовні типи, кожний із яких має свої ознаки і свій спосіб розв'язку. Для того, щоб визначити їх, треба спочатку перейти до однієї основи, обираючи для цього найпростіше з чисел, що зустрічаються в прикладі.

- ***Якщо показники степеня відрізняються на число.***

У цьому випадку ми робимо показники степеня в точності однаковими, виносячи все зайве з показників степеня. Потім, якщо основ дві, то розділимо обидві частини нерівності на одну з них у загальному степені. Далі показникову функцію лишаємо в одній частині нерівності, а все інше переносимо в іншу і перетворимо до деякого степеня нашої основи. Потім використовуємо монотонність показникової функції.

Приклад: $3\cdot 4^x + \frac{1}{3}\cdot 9^{x+2} < 6\cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2}\cdot 9^{x+1} \Leftrightarrow \frac{9}{2}\cdot 9^x + \frac{81}{3}\cdot 9^x < 24\cdot 4^x - 3\cdot 4^x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\frac{63}{2})\cdot 9^x < 21\cdot 4^x \Leftrightarrow (\frac{9}{4})^x < 21\cdot\frac{2}{63} \Leftrightarrow (\frac{9}{4})^x < (\frac{9}{4})^{-0.5} \Leftrightarrow x < -0.5.$

- ***Якщо показники степеня відрізняються в деяке число раз.***

У цьому випадку ми робимо показники строго пропорційними, забираючи всі добавки з показників степеня і робимо заміну $y = a^x$, тоді $y^k = a^{kx}$ і вирішуємо дробово–раціональна нерівність.

Приклад: $3\cdot 5^{2x-1} - 2\cdot 5^{x-1} < 0.2 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\cdot 5^{2x} - \frac{2}{5}\cdot 5^x - \frac{1}{5} < 0$.

За допомогою заміни $y = 5^x$ отримаємо:

$3y^2 - 2y - 1 < 0 \Leftrightarrow (y-1)(y+\frac{1}{3}) < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} < y < 1.$

Оскільки показникова функція при основі 5 монотонно зростаюча, то:

$-\frac{1}{3} < 5^x < 1 \Leftrightarrow x < 0.$

- ***Конструкція виду: (F(x))$^{g(x)}$ < (F(x))$^{q(x)}$.***

Дана конструкція вирішується по таких формулах:

$$a(x)^{f(x)} < a(x)^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a(x) > 1, \\ f(x) < g(x), \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a(x) < 1, \\ f(x) > g(x). \end{cases} \end{array}\right.$$

Приклад: $(x+1)^{x^2+3x} < (x+1)^{10x-12} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1>1, \\ x^2+3x<10x-12, \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x+1<1, \\ x^2+3x>10x-12, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ x^2-7x+12<0, \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x<0, \\ x^2-7x+12>0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>0, \\ 3<x<4, \end{cases} \\ \begin{cases} -1<x<0, \\ \left[\begin{array}{l} x>4, \\ x<3, \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3<x<4, \\ -1<x<0. \end{array}\right.$$

Додаткові прийоми:

- ***Взаємно обернені вирази.***

Досить поширеним у показникових рівняннях є застосування пар взаємно обернених виразів, таких як

$(2+\sqrt{3})$ і $(2-\sqrt{3})$, $(7+\sqrt{48})$ і $(7-\sqrt{48})$, і т.д.

Розв'язок у цьому випадку знаходиться легко якщо замінити один із членів пари через y, а другий – через y^{-1}.

- ***Мінімакс.***

Таким терміном називають використання того факту, що мінімум однієї частини рівняння більше або дорівнює максимуму іншій. Знаходимо ці екстремуми і потім прирівнюємо їх до цього загального значення.

Приклад: $2^{x^2} \le 1-x^2$. Оскільки ліва частина більше або дорівнює одиниці, а права – менше або дорівнює одиниці, то розв'язок може бути тільки в тому випадку, коли і ліва, і права частини одночасно дорівнюють одиниці:

$$\begin{cases} 2^{x^2}=1, \\ 1-x^2=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0, \\ -x^2=0, \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$$

- ***Монотонність.***

У цьому випадку ми вгадуємо значення змінної, при якому досягається рівність, а потім знаходимо відповідь використовуючи монотонність функцій.

Приклад: $3^x + 4^x \le 5^x$. Загальновідомо, що рівність досягається при $x = 2$. Розділимо обидві частини нерівності на 5^x. Отримаємо в лівій частині суму двох монотонно спадаючих функцій, а в правій частині нерівності – константу:

$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$. Одиниця – це саме те значення змінної, при якому досягається рівність. Тому залишається лише перевірити виконання нерівності справа й зліва від одиниці. При $x < 2$ очікувана нерівність не виконується:

$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x > \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, а при $x > 2$ – виконується:

$\left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x < \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1.$

Таким чином, ми отримали відповідь: $x \geq 2$.

Глава 10. Рівняння і нерівності з параметрами.

Розв'язок рівнянь і нерівностей із параметрами ведеться, як правило, тільки еквівалентними переходами і при цьому розглядаються окремо точки, у яких змінюється кількість коренів або нерівність перетворюється в рівність.

• ***Рівняння з параметрами.***

При розв'язку рівнянь із параметрами дослідження починається з коефіцієнта при старшому степені x (дорівнює або не дорівнює нулю). Потім у кожному з цих випадків досліджується питання про зміну кількості розв'язків рівняння. Розв'язок рівнянь із параметрами ведеться, як правило, тільки еквівалентними переходами. Потім усі отримані розв'язки, кожний окремо, підставляємо в усі умови і вибираємо загальне. Відповідь записується у виді послідовних зон зміни параметра, що не перекриваються.

Приклад: $ax^2 + 2ax - (a + 2) = 0$. Розглянемо випадок, коли рівняння перестає бути квадратним ($a = 0$). Тоді воно перетворюється на рівність: $-2 = 0$, що не виконується ніколи. Отже, при $a = 0$ рішень нема. Відзначимо, що відсутність дослідження подібних випадків є найтиповішою помилкою при розв'язанні рівнянь і нерівностей з параметрами. Тепер розглянемо випадок $a \neq 0$. Тоді $x = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + a(a+2)}}{a} = \frac{a \pm \sqrt{2a(a+1)}}{a}$. Отже, коли вираз під коренем додатній, тобто при $a < -1$ та $a > 0$, рівняння має два корені. При $a = -1$ маємо один корінь $x = 1$.

Відповідь: при $a < -1$ – два корені, $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2a(a+1)}}{a}$,

при $a = -1$ – один корінь, $x = 1$,

при $-1 < a \leq 0$ – коренів немає,

при $a > 0$ – два корені, $x_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{2a(a+1)}}{a}$.

• ***Нерівності з параметрами.***

При розв'язку нерівностей із параметрами, на відміну від рівнянь, питання про кількість коренів не досліджується, а вся увага концентрується на еквівалентності переходів.

Приклад: $x^2 + 2x + a > 0$. У випадку негативного дискримінанта нерівність буде вірною для всіх значень x. Тобто $1 - a < 0 \Leftrightarrow a > 1$. У випадку невід'ємного дискримінанта нерівність буде вірною для

$(x > -1 + \sqrt{1-a}\,)$ и $(x < -1 - \sqrt{1-a}\,)$.

Відповідь: $a \le 1,\ x \in (-\infty\,;-1-\sqrt{1-a}\,) \cup (-1+\sqrt{1-a}\,;+\infty)$,

$a > 1,\ x \in (-\infty\,;+\infty)$.

• ***Задачі з параметрами, пов'язані з дослідженням коренів квадратного рівняння.***

При розв'язку таких задач використовується або алгебраїчний підхід, пов'язаний із теоремою Вієта, або опис розташування параболи щодо коренів рівняння через абсцису її вершини, дискримінант і значення в точках, що відповідають кореням рівняння (метод парабол).

Приклад 1: При яких значеннях k корені рівняння $x^2 - (2k + 1)\,x + k^2 = 0$ відносяться як 1:4. Розв'язок знаходимо з теореми Вієта:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2k+1, \\ x_1 \cdot x_2 = k^2, \\ x_2 = 4x_1, \\ (2k+1)^2 - 4k^2 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 = 2k+1, \\ 4(x_1)^2 = k^2, \\ 4k+1 > 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_1 = 2k+1, \\ 2x_1 = \pm k, \\ k > -\dfrac{1}{4}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pm 5k = 4k+2, \\ k > -\dfrac{1}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} k = 2, \\ k = -\dfrac{2}{9}, \end{array}\right. \\ k > -\dfrac{1}{4}, \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 2, \\ k = -\dfrac{2}{9}. \end{array}\right.$$

Приклад 2: Знайти всі значення параметра, при яких обидва корені квадратного рівняння $x^2 - ax + 2 = 0$ дійсні і належать проміжку $]0\ ;\ 3[$. Вирішимо завдання методом парабол. У цьому випадку парабола розташована гілками нагору (коефіцієнт при x^2 додатній) і задовольняє умовам:

$$\begin{cases} D>0, \\ F(0)>0, \\ F(3)>0, \\ 0<\dfrac{-b}{2a}<3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-8>0, \\ 2>0, \\ 9-3a+2>0, \\ 0<\dfrac{a}{2}<3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a>2\sqrt{2}, \\ a<-2\sqrt{2}, \end{array}\right. \\ a<\dfrac{11}{3}, \\ 0<a<6, \end{cases} \Leftrightarrow 2\sqrt{2}<a<\frac{11}{3}.$$

Глава 11. Тригонометричні тотожності.

Головні формули.

Співвідношення між головними функціями того самого аргументу.

$\sin^2 x+\cos^2 x=1;$	$\mathrm{tg}x\cdot\mathrm{ctg}x=1;$
$\mathrm{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z;$	$\mathrm{ctg}x=\dfrac{\cos x}{\sin x}\quad x\neq\pi k,\ k\in Z;$
$1+\mathrm{tg}^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x},\ x\neq\dfrac{\pi}{2}(2k+1),\ k\in Z;$	$1+\mathrm{ctg}^2 x=\dfrac{1}{\sin^2 x}\quad x\neq\pi k,\ k\in Z.$

Формули приведення.

Формулами приведення називаються формули, що виражають тригонометричні функції кутів $90°\pm\alpha$, $180°\pm\alpha$, $270°\pm\alpha$, $360°\pm\alpha$ через тригонометричні функції кута α. При цьому знак функції визначається знаком вихідної функції в даній чверті, а функція не змінюється, якщо додатковий кут прилягає до горизонтального діаметра і функція змінюється на відповідну, якщо додатковий кут прилягає до вертикального діаметра.

Формули додавання.

$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\cos x\cdot\sin y;$	$\sin(x-y)=\sin x\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y;$
$\cos(x+y)=\cos x\cdot\cos y-\sin x\cdot\sin y;$	$\cos(x-y)=\cos x\cdot\cos y+\sin x\cdot\sin y;$
$\mathrm{tg}(x+y)=\dfrac{tgx+tgy}{1-tgx\cdot tgy},\ x,y,x+y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$	
$\mathrm{tg}(x-y)=\dfrac{tgx-tgy}{1+tgx\cdot tgy},\ x,y,x-y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$	

Формули подвійного аргументу.

$\sin 2x=2\sin x\cdot\cos x;$
$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x;$
$\mathrm{tg}\,2x=\dfrac{2tgx}{1-tg^2x},\ x\neq\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k,\ k\in Z,\ x\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z.$

Формули половинного аргументу.

$\sin^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{2}$;	$\cos^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1+\cos x}{2}$;
$\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{1-\cos x}{\sin x}$, $x\neq\ \pi k$, $k\in$ Z.	

Формули перетворення суми в добуток.

$\sin x+\sin y=2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$;	$\sin x-\sin y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$;
$\cos x+\cos y=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cdot\cos\dfrac{x-y}{2}$;	$\cos x-\cos y=-2\sin\dfrac{x+y}{2}\cdot\sin\dfrac{x-y}{2}$;
$\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y=\dfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$, $x,\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in$ Z;	$\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}y=\dfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cdot\cos y}$, $x,\ y\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $k\in$ Z.

Формули перетворення добутку в суму.

$\sin x\cdot\sin y=\dfrac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$,
$\cos x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}(\cos(x-y)+\cos(x+y))$,
$\sin x\cdot\cos y=\dfrac{1}{2}(\sin(x-y)+\sin(x+y))$.

Вираз $\sin x$ та $\cos x$ через $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

$\sin x=\dfrac{2tg\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$, $x\neq\ \pi(1+\ 2k)$, $k\in$ Z;	$\cos x=\dfrac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}$, $x\neq\ \pi(1+2k)$, $k\in$ Z.

Формула додавання гармонійних коливань.

$a\cdot\sin x+b\cdot\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(x+\varphi)$, здесь $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Формула застосовується, як правило, для кута φ , пропорційного 30° чи 45°

Безпосередній доказ тотожностей йде, як правило, від перетворення більш складної частини до більш простого або шляхом перетворення обох виразів до якогось простого. Тому велике значення одержують перетворення, що дозволяють спростити, згорнути або яким-небудь чином понизити степінь виразів.

- ***Добуток косинусів аргументів, що подвоюються.***

Дана схема є головною для доказу тотожностей, у котрих деякий тригонометричний вираз дорівнює константі. Для розв'язку таких тотожностей ми перетворимо суми в добуток синусів і косинусів, які за формулами приведення перетворимо до конструкції наступного вигляду:

$$\sin x\cdot\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\ldots=\frac{1}{2}\sin 2x\cdot\cos 2x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\ldots=$$

$$=\frac{1}{4}\sin 4x\cdot\cos 4x\cdot\cos 8x\cdot\ldots=\frac{1}{8}\sin 8x\cdot\cos 8x\cdot\ldots=\frac{1}{16}\sin 16x\cdot\ldots.$$

<u>Приклад</u>: $\cos 36°-\cos 72°=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2\sin 18°\cdot\sin 54°=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\cos 72°\cdot\cos 36°=\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin 36°\cdot\cos 36°\cdot\cos 72°}{\sin 36°}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 72°\cdot\cos 72°}{\sin 36°}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{4}\cdot\frac{\sin 144°}{\sin(180°-36°)}=\frac{1}{4}.$$

- ***Різниця тангенсів, що подвоюються.***

Розв’язання ведеться аналогічно попередньому випадку з застосуванням формули : $\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha=2\mathrm{ctg}\,2\alpha$.

<u>Приклад</u>: $\mathrm{ctg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\alpha-2\mathrm{tg}\,2\alpha-4\mathrm{tg}\,4\alpha-8\mathrm{tg}\,8\alpha=16\mathrm{ctg}\,16\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\mathrm{ctg}\,2\alpha-2\mathrm{tg}\,2\alpha-4\mathrm{tg}\,4\alpha-8\mathrm{tg}\,8\alpha=16\mathrm{ctg}\,16\alpha\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\mathrm{ctg}\,4\alpha-4\mathrm{tg}\,4\alpha-8\mathrm{tg}\,8\alpha=16\mathrm{ctg}\,16\alpha\Leftrightarrow 8\mathrm{ctg}\,8\alpha-8\mathrm{tg}\,8\alpha=16\mathrm{ctg}\,16\alpha$.

- ***Сума синусів і сума косинусів.***

$$\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\ldots+\sin k\alpha=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\cdot\sin\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

$$\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha+\ldots+\cos k\alpha=\frac{\sin\frac{k\alpha}{2}\cdot\cos\frac{(k+1)\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}};$$

Ці тотожністі легко довести множенням обох частин рівності на $\sin\frac{\alpha}{2}$ і розкладанням добутків у суму, після чого усі доданки, крім першого й останнього в лівій частині, взаємно знищаться.

- ***Тотожністі, у котрих α, β, γ – кути деякого трикутника.***

У цьому випадку заміною $\gamma=180°-\alpha-\beta$ одержимо звичайну тотожність.

Приклад: Довести, що $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$, де α, β, γ – внутрішні кути деякого трикутника.

Розв'язок: $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos(90° - \frac{\alpha+\beta}{2}) =$

$=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 2(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2})\sin\frac{\alpha+\beta}{2} =$

$=\sin(\alpha+\beta) + \sin\alpha + \sin\beta = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$.

- ***Обчислити значення одної тригонометричної функції з іншої.***

Задано значення одної тригонометричної функції. Треба обчислити значення іншої тригонометричної функції. У таких випадках, якщо не вдається безпосередньо виразити невідому тригонометричну функцію через відому, то їх обидві виражають через третю функцію, значення якої знаходять із другої рівності і підставляють у першу.

Приклад: нехай $\cos 2x = m$. Знайти $\sin^6 x + \cos^6 x$.

Розв'язок: $\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin^2 x\cos^2 x) =$

$= 1\cdot[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x\cos^2 x] = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 1 - \frac{3}{4}(1 - \cos^2 2x) = \frac{1+3m^2}{4}$.

Глава 12. Тригонометричні рівняння.

Розв'язок найпростіших тригонометричних рівнянь.

$\sin x = a; \Rightarrow x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z,\ \arcsin a \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.	
$\sin x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;	$\sin x = -1 \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;
$\cos x = a; \Rightarrow x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z,\ \arccos a \in [0, \pi]$.	
$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2\pi k,\ k \in Z$;	$\cos x = -1 \Rightarrow x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$;
$\sin x = 0 \Rightarrow x = \pi k,\ k \in Z$;	$\cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$;
$\operatorname{tg} x = a; \Rightarrow x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$; $\operatorname{arctg} a \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.	$\operatorname{tg} x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z$.

ctg $x = a$; $\Rightarrow x = \operatorname{arcctg} a + \pi k$, $k \in Z$; arcctg $a \in\ ]\,0,\pi[$.	ctg $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$.

Головною проблемою, що треба вирішувати при розв'язку тригонометричних рівнянь, насправді є не самий розв'язок, а його дослідження або добір коренів. Іншими словами, найважливішим є правильно згрупувати розв'язки рівняння і відкинути ті, що не підходять області визначення.

Найпростіший шлях вирішити цю проблему – це її цілком виключити. Використовуючи формули зниження степеня, треба намагатися одержати рівняння першого степеня і тим самим виключити добір коренів.

Розглянемо як виглядає практично розв'язок і добір коренів.

Приклад 1. $\sin^3 x\cdot(1 + \operatorname{ctg} x) + \cos^3 x \cdot(1 + \operatorname{tg} x) = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 x(\sin x + \cos x) + \cos^2 x(\sin x + \cos x) = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x}, \\ \sin x \cdot \cos x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 2\sqrt{\sin x \cdot \cos x}, \\ \sin x \cdot \cos x \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sin x + \cos x)^2 = 4\sin x \cdot \cos x, \\ \sin x > 0, \\ \cos x > 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x = 2\sin 2x, \\ 2\pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1, \\ 2\pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k, \\ 2\pi k < x < \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in Z.$$

Тут ми виключили розв'язки виду $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in Z$, тому що це сторонні корені, що виникли через піднесення в квадрат.

Приклад 2. $\cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \dfrac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \dfrac{1}{16}, \\ x \neq \pi k, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \dfrac{1}{16}\sin x, \\ x \neq \pi k, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8\sin 2x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \sin x, \\ x \neq \pi k, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\sin 4x \cdot \cos 4x \cdot \cos 8x = \sin x, \\ x \neq \pi k, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin 8x \cdot \cos 8x = \sin x, \\ x \neq \pi k, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 16x - \sin x = 0, \\ x \neq \pi k, k \in Z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\frac{15}{2}x\cdot\cos\frac{17}{2}x=0, \\ x\neq \pi k, k\in Z, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi m}{15}, m\in Z, \\ x=\frac{\pi}{17}(1+2n), n\in Z, \end{array}\right. \\ x\neq \pi k, k\in Z, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi m}{15}, \left[\begin{array}{l} m\neq\frac{15k}{2}, m\in Z, k\in Z, \\ \frac{2m}{15}\neq\frac{2n+1}{17}, m\in Z, n\in Z, \end{array}\right. \\ x=\frac{\pi}{17}(1+2n), n\neq\frac{17k-1}{2}, n\in Z, k\in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi m}{15}, \left[\begin{array}{l} m\neq\frac{15(2r)}{2}, m\in Z, r\in Z, \\ 34m\neq 30n+15, m\in Z, n\in Z, \end{array}\right. \\ x=\frac{\pi}{17}(1+2n), n\neq\frac{17(2s+1)-1}{2}, n\in Z, s\in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi m}{15}, \left[\begin{array}{l} m\neq 15r, m\in Z, r\in Z, \\ \varnothing, \end{array}\right. \\ x=\frac{\pi}{17}(1+2n), n\neq 17s+8, n\in Z, s\in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{2\pi m}{15}, m\neq 15r, m\in Z, r\in Z, \\ x=\frac{\pi}{17}(1+2n), n\neq 17s+8, n\in Z, s\in Z. \end{array}\right.$$

Тут для розв'язку ми умножили обидві частини рівняння на sin$x$, але для того, щоб не привнести сторонніх коренів (тому що корені рівняння sin x = 0 не є коренями вихідного рівняння), виключили їх із розв'язку. Крім цього, із першого розв'язку ми видалили його перетинання з другим розв'язком. Також на останньому етапі нам прийшлося застосовувати методику розв'язку Діофантових рівнянь (у цілих числах) для чого ми підставили замість k відповідно ($2r$) та ($2s$+1).

- ***Додаткові прийоми при розв'язку тригонометричних рівнянь.***

а) Однорідні рівняння.

Рівняння, що містять синус і косинус одного аргументу в кожному доданку в одному і тому ж сумарному степені, вирішуються діленням на синус або косинус у загальному степені, (за умови, що вони не дорівнюють нулю) і розв'язком рівняння щодо тангенса або котангенса.

Приклад: $2\sin^3 x + 2\sin^2 x\cdot\cos x - \sin x\cdot\cos^2 x - \cos^3 x = 0$.

Легко бачити, що корені рівняння cos x = 0 не є коренями вихідного рівняння, тому ми можемо розділити наше рівняння на $\cos^3 x$. Одержимо кубічне рівняння щодо тангенса.

$2\mathrm{tg}^3\,x + 2\mathrm{tg}^2\,x - \mathrm{tg}\,x - 1 = 0 \Leftrightarrow (\mathrm{tg}\,x + 1)(2\mathrm{tg}^2\,x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} tgx = -1, \\ tgx = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{4}(4k-1), k \in Z, \\ x = \pm arctg\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$

б) Мінімакс.

Найчастіше зустрічається наступний приклад такого роду:

$\sin^{2k+2} x + \cos^{2k+2} x = 1$, ($k \in N$). Оскільки $|\sin x| \le 1$, $|\cos x| \le 1$, то ми можемо подати праву частину як ($\sin^2 x + \cos^2 x$), перенести все в праву частину і впевнитися, що сума двох невід'ємних виразів прирівнюється нулю. А це можливо тільки тоді, коли обидва вони одночасно дорівнюють нулю.

$\sin^2 x + \cos^2 x - \sin^{2k+2} x - \cos^{2k+2} x = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x\,(1 - \sin^{2k} x) + \cos^2 x\,(1 - \cos^{2k} x) = 0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin x = \pm 1, \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \cos x = \pm 1, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}m,\ m \in Z.$$

Глава 13. Арифметична прогресія.

Послідовність, що задається першим членом a_1 і рекурентним співвідношенням $a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$, називається арифметичною прогресією.

Сума n членів арифметичної прогресії S_n обчислюється за формулою:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n.$$

Розглянемо головні постановки задач на арифметичну прогресію.

• ***<u>Знайти перший член і різницю.</u>***

Якщо відома формула суми n членів для прогресії, то легко найти формулу n–го члена $a_n = S_n - S_{n-1}$ і різницю $d = a_n - a_{n-1}$.

<u>Приклад</u>: Відомо, що при будь-якому n сума n членів арифметичної прогресії обчислюється за формулою: $S_n = 5n^2 + 2n$. Знайти її перші три члена.

$a_n = S_n - S_{n-1} = 5n^2 + 2n - 5(n-1)^2 - 2(n-1) = 10n - 3.$

Відповідь отримаємо підставивши n=1,2,3 : $a_1 = 7$, $a_2 = 17$, $a_3 = 27$,

- ***Три числа, що утворюють арифметичну прогресію.***

Якщо в задачі йдеться про три числа, що утворюють арифметичну прогресію, то одне з них дорівнює полусумі двох інших.

Приклад: Дані три позитивних числа a, b, c, такі, що a^2, b^2, c^2 – три послідовних члена арифметичної прогресії. Довести, що числа $\frac{1}{b+c}$, $\frac{1}{a+c}$, $\frac{1}{a+b}$ також є трьома послідовними членами арифметичної прогресії.

Розв'язок : $2b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2b^2 + 2ac + 2bc + 2ab = (a^2 + ab + ac + bc) + (c^2 + ab + bc + ac) \Rightarrow$

$\Rightarrow 2(b+c)(a+b) = (a+b)(a+c) + (b+c)(a+c) \Rightarrow \frac{2}{a+c} = \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+b}$.

- ***Знайти суму членів послідовності.***

Як правило, у таких випадках застосовується розкладання кожного доданка на різницю двох виразів, що потім взаємно знищуються.

Приклад: Нехай a_1, a_2, ..., a_n утворюють арифметичну прогресію.

Довести, що $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + ... + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

Розв'язок: $\frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_2a_3} + ... + \frac{1}{a_na_{n+1}} = \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + ... + \frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) =$

$= \frac{1}{d} \cdot \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1a_{n+1}} = \frac{1}{d} \cdot \frac{dn}{a_1a_{n+1}} = \frac{n}{a_1a_{n+1}}$.

Глава 14. Геометрична прогресія.

Послідовність, що задається першим членом b_1 і рекурентним співвідношенням $b_n = b_1 + q^{n-1}$, називається геометричною прогресією.

Сума n членів геометричної прогресії S_n обчислюється за формулою:

$S_n = \frac{b_1 - b_n \cdot q}{1-q} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, $q \neq 1$.

Якщо $|q| < 1$, то при необмеженому збільшенні n ($n \to \infty$) сума S_n прямує до числа $\frac{b_1}{1-q}$, яке називають сумою нескінченної геометричної прогресії і позначають буквою S: $S = \frac{b_1}{1-q}$.

Розглянемо головні постановки задач на геометричну прогресію.

- ***Знайти перший член і знаменник прогресії.***

Якщо відома формула суми n членів для прогресії, то легко знайти формулу n–го члена $b_n = S_n - S_{n-1}$ і знаменник $q = b_n : b_{n-1}$. Якщо ж відомі будь-які два з цих співвідношень, то їх виражають через перший член і знаменник і вирішують систему рівнянь.

<u>Приклад</u>: Відомо, що сума членів нескінченної геометричної прогресії дорівнює 4, а сума кубів – 192. Знайти перший член і знаменник прогресії.

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 4, \\ \dfrac{b_1^3}{1-q^3} = 192, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ \dfrac{4^3(1-q)^3}{1-q^3} = 192, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ 1-2q+q^2 = 3(1+q+q^2), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 = 4(1-q), \\ 2q^2+5q+2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b_1 = 4(1-q), \\ \left[\begin{array}{l} q = -2, \\ q = -\dfrac{1}{2}, \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = -2, \\ b_1 = 12, \end{cases} \\ \begin{cases} q = -\dfrac{1}{2}, \\ b_1 = 6, \end{cases} \end{array}\right.$$. Оскільки $|q| < 1$, то $\begin{cases} b_1 = 6, \\ q = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Три числа утворюють геометричну прогресію.

У цьому випадку використовують співвідношення: $b_2^2 = b_1 \cdot b_3$.

<u>Приклад</u>: Знайти три числа, що утворюють геометричну прогресію, якщо їхній добуток дорівнює 64, а середнє арифметичне – $\dfrac{14}{3}$.

Розв'язок. $\begin{cases} b_2^3 = 64, \\ \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{b_2}{q} + b_2 + b_2 q\right) = \dfrac{14}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 4, \\ \dfrac{4}{q} + 4 + 4q = 14, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_2 = 4, \\ \left[\begin{array}{l} q = 2, \\ q = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right. \end{cases}$

Відповідь: 2, 4, 8; 8, 4, 2.

- ***Знайти суму членів послідовності.***

У цьому випадку суму членів послідовності подають у вигляді сум декількох прогресій, суми членів яких знаходять за відомими формулами.

<u>Приклад</u> 1: Знайти суму : $(x + \dfrac{1}{x})^2 + (x^2 + \dfrac{1}{x^2})^2 + ... + (x^n + \dfrac{1}{x^n})^2$.

Розв'язок: $(x + \dfrac{1}{x})^2 + (x^2 + \dfrac{1}{x^2})^2 + ... + (x^n + \dfrac{1}{x^n})^2 =$

$= [x^2 + x^4 + ... + x^{2n}] + 1 + [\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^4} + ... + \dfrac{1}{x^{2n}}] + 2n - 1 =$

$$= \frac{1}{x^{2n}} \cdot \frac{(x^{4n+2}-1)}{x^2-1} - 1 + 2n = \frac{x^{4n+2}-1-x^{2n+2}+x^{2n}}{x^{2n}(x^2-1)} + 2n = \frac{(x^{2n+2}+1)(x^{2n}-1)}{x^{2n}(x^2-1)} + 2n.$$

Приклад 2: Знайти суму: $2 + 22 + 222 + ... + \underbrace{22...22}_{n}$.

Розв'язок: $2 + 22 + 222 + ... + \underbrace{22...22}_{n} = \frac{2}{9}\cdot(9 + 99 + 999 + ... + \underbrace{99...99}_{n}) =$

$= \frac{2}{9}\cdot[\ (10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + ... + (10^n-1)\ ] =$

$= \frac{2}{9}\cdot[\ 10\ + 10^2 + 10^3 + ... + 10^n - n\ ] = \frac{2}{9}\cdot\left[\frac{10}{9}(10^n-1) - n\right].$

Глава 15. Похідна та її застосування.

Основні формули:

$(a)' = 0.$

$(x^p)' = px^{p-1}$, $p \in \mathrm{R}$.

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a.$

$(e^x)' = e^x.$

$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$

$(\sin x)' = \cos x.$

$(\cos x)' = -\sin x.$

$(\mathrm{tg}\ x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$

$(\mathrm{ctg}\ x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$

$(F(ax+b))' = a \cdot F'(ax+b).$

$(ay)' = a(y)'$.

$(y+z)' = (y)' + (z)'.$

$(y \cdot z)' = (y)'z + y\,(z)'.$

$\left(\frac{y}{z}\right)' = \frac{y'z - yz'}{z^2}.$

Похідна має багато застосувань. Так, найвідомішими у фізиці є швидкість, як похідна шляху, і прискорення, як похідна швидкості.
У шкільному курсі математики найчастіше розглядаються наступні застосування.

- ***Інтервали монотонності функції і екстремуми.***

Якщо функція визначена на всьому інтервалі і безупинна, то вона:

- монотонно зростає, якщо її похідна позитивна ***або***
- монотонно спадає, якщо її похідна негативна.

Там, де похідна міняє знак з «+» на «–», буде максимум, а з «–» на «+» – мінімум.

- ***Інтервали опуклості і точки перегину.***

Якщо функція і її похідна визначені на всьому інтервалі і неперервні, то вона:

- опукла униз, якщо її друга похідна позитивна ***або***
- опукла нагору, якщо її друга похідна негативна.

Там, де друга похідна змінює знак, буде точка перегину.

- ***Кут нахилу дотичної до графіка.***

Рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$ має такий вид:
$y = f'(x_0)\,(x - x_0) + y_0$, де $(x_0\,,\,y_0)$ – точка торкання. Таким чином, $f'(x_0)$ – тангенс кута нахилу дотичної до графіку.

- ***Дослідження функції і побудова графіків.***

Дослідження функції містять наступні етапи:

- Область визначення функції.
- Парність, непарність, періодичність.
- Нулі функції й інтервали сталості знаку.
- Асимптоти, поводження на нескінченності і поблизу меж області визначення.
- Екстремуми й інтервали монотонності.
- Точки перегину й інтервали опуклості.

Для виконання цих етапів необхідно вміти складати і вирішувати рівняння і нерівності, знаходити границі, обчислювати першу і другу похідну. Результати дослідження функції наочно подати у вигляді таблиці, що відбиває поводження функції, її першої і другої похідної у всіх істотних точках, при наближенні до них справа і зліва, а також в інтервалах між цими точками. Цю таблицю можна заповнювати поступово в міру дослідження функції. Істотними точками є:

- межі області визначення;
- межі інтервалів періодичності (якщо функція періодична);
- $x = 0$;
- нулі функції ($y = 0$);
- межі області визначення першої похідної $y'(x)$;
- нулі першої похідної ($y'(x) = 0$);
- межі області визначення другої похідної $y''(x)$;
- нулі другої похідної ($y''(x) = 0$);

Часто для полегшення побудови графіка до істотних точок добавляють ще декілька значень x, для яких значення $y(x)$ нескладно обчислюється, наприклад, $x = \pm 1/2$, ± 1, ± 2, ± 3. Відзначимо, що дослідження функцій із нетривіальним асимптотичним поводженням поблизу меж області визначення або інтервалу періодичності абітурієнтам не пропонується. Покажемо, що повинно бути в такій таблиці:

Значення аргументу x	Значення функції $y(x)$	Поведінка похідної $y'(x)$	Знак другої похідної $y''(x)$
	Формула для $y(x)$	Формула для $y'(x)$	Формула $y''(x)$
Межі області визначення або інтервали періодичності.	Деяке значення y, $-\infty$, $+\infty$ або відсутність деякого значення.	знак, 0, $-\infty$, $+\infty$ або відсутність деякого значення.	знак, 0, $-\infty$, $+\infty$ або відсутність деякого значення.
При прямуванні до меж області визначення або інтервалів періодичності, причому в межах області визначення окремо розглянути ліву і праву границю.	Асимптотично наближається до деякого значення y, до $-\infty$, до $+\infty$, до іншої простої функції (найчастіше –до лінійної, тобто $y = kx + b$).	Знак, асимптотично прямує до деякого значення y' (наприклад, $y' = 0$), до $-\infty$, до $+\infty$.	Знак.
Нулі функції.	$y = 0$.		
Точки, де значення $y(x)$ легко обчислюється: $x =$	Обчислені значення $y(x)$.		

0, ±1/2, ±1, ±2...			
Межі області визначення першої похідної.	Значення.	До чого прямує.	
Нулі першої похідної.	Значення.	Вказати інтервали сталості знаку, тобто де функція спадає та зростає.	Знак.
Межі області визначення другої похідної $y''(x)$.	Значення.	Значення (якщо є).	До чого прямує.
Нулі другої похідної.	Значення.	Значення.	Вказати інтервали сталості знаку, тобто де функція опукла догори чи вниз.

Розглянемо приклади дослідження функції і побудови графіка.

<u>Приклад</u> 1. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2-1}{x}$ і побудувати графік.

- Область визначення функції: $]-\infty; 0[\ \bigcup\ ]0; +\infty[$
- Функція непарна ($y(x) = -y(-x)$), графік симетричний відносно початку координат.
- Нулі функції: $y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1. \end{array}\right.$
- Інтервали знакосталості: $y < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ 0 < x < 1, \end{array}\right.$ $y > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1 < x < 0, \\ x > 1. \end{array}\right.$
- Знайдемо похилу асимптоту $y = k{\cdot}x + b$.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (1 - \dfrac{1}{x^2}) = 1.$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(\mathrm{x}) - k\mathrm{x}] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (-\dfrac{1}{x}) = 0.$

Отримали $y = x$ – похила асимптота.

Розглянемо знак відхилення від асимптоти $\Delta = [f(x) - k{\cdot}x - b] = -\dfrac{1}{x}$.

При $x\to +\infty \Rightarrow \Delta < 0$, тобто графік функції наближається до асимптоти знизу;
при $x\to -\infty \Rightarrow \Delta > 0$, тобто графік функції наближається до асимптоти згори;
Вертикальна асимптота $x = 0$.

При $\begin{cases} x \to 0, \\ x < 0, \end{cases}$ $y \to +\infty$; при $\begin{cases} x \to 0, \\ x > 0 \end{cases}$, $y \to -\infty$.

- $y' = 1 + \frac{1}{x^2} > 0$. Екстремумів нема.

Функція зростає на кожному з двох інтервалів області визначення.

- $y'' = -\frac{2}{x^3}$. Точок перегину нема.

Функція опукла вниз при ($x < 0$) и опукла вверх при ($x > 0$).

Запишемо властивості функції у зведену таблицю.

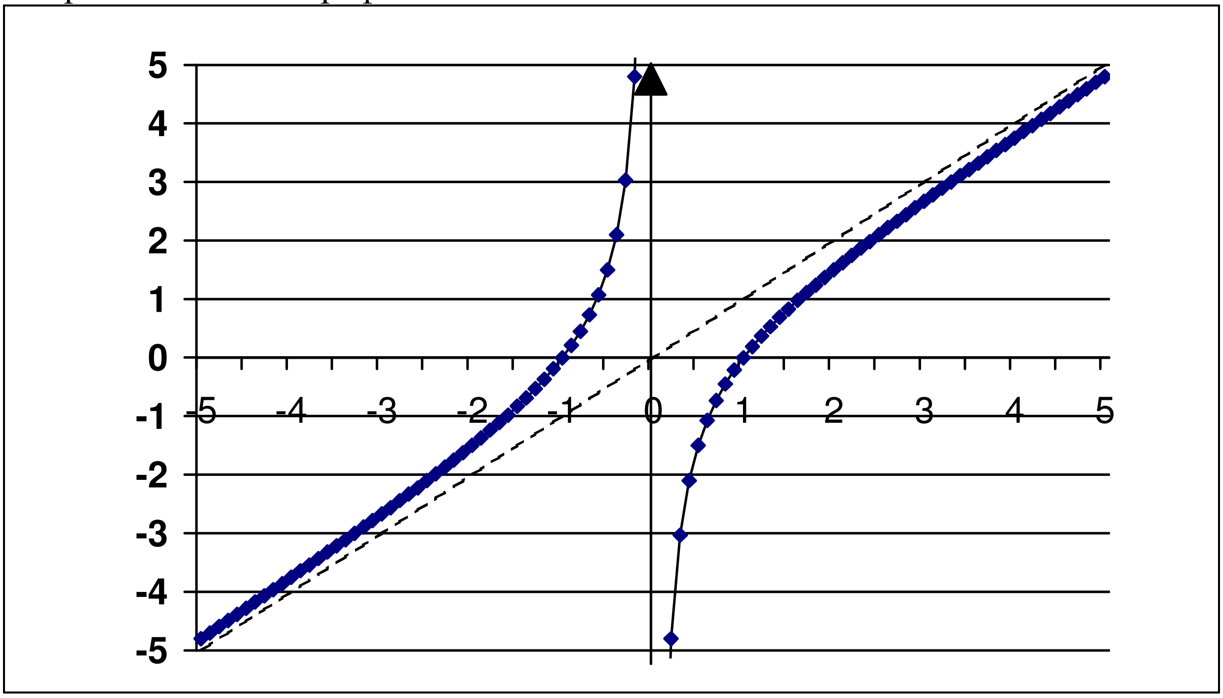
Аргумент x	Значення функції $y(x) = \frac{x^2-1}{x}$	Похідна $y'(x) = 1 + \frac{1}{x^2}$	Друга похідна $y''(x) = -\frac{2}{x^3}$
$-\infty$	$-\infty$	1	0
$x \to -\infty$	$y \to x$ зверху $(y \to x + 0)$	$y' \to 1+0$	$y'' \to +0$
$x \in]-\infty; -1[$	$y \in]-\infty; 0[$	$y' > 0$, y зростає.	$y'' > 0$, y опукла вниз.
$x = -5$	–4.80	$y' > 0$	$y'' > 0$
$x = -4$	–3.75	$y' > 0$	$y'' > 0$
$x = -3$	–2.67	$y' > 0$	$y'' > 0$
$x = -2$	–1.50	$y' > 0$	$y'' > 0$
$x = -1$	0	$y' = 2$	$y'' > 0$
$x \in [-1; 0[$	$y \in]0; \infty[$	$y' > 0$	$y'' > 0$
$x = -0.5$	1.50	$y' > 0$	$y'' > 0$
$x \to -0$	$y \to \infty$	$y' \to \infty$	$y'' \to \infty$
$x \to +0$	$y \to -\infty$	$y' \to \infty$	$y'' \to -\infty$
$x \in]0; 1]$	$y \in]-\infty; 0]$	$y' > 0$, y зростає.	$y'' < 0$, y опукла вгору.
$x = 0.5$	–1.50	$y' > 0$	$y'' < 0$
$x = 1$	0	$y' = 2$	$y'' < 0$
$x \in [1; \infty[$	$y \in [0; \infty[$	$y' > 0$	$y'' < 0$
$x = 2$	1.50	$y' > 0$	$y'' < 0$
$x = 3$	2.67	$y' > 0$	$y'' < 0$
$x = 4$	3.75	$y' > 0$	$y'' < 0$
$x = 5$	4.80	$y' > 0$	$y'' < 0$
$x \to \infty$	$y \to x$ знизу	$y' \to 1 + 0$	$y'' \to -0$

	$(y \to x - 0)$		
∞	∞	1	0

Тепер залишилось:

- нанести на графік істотні точки;
- пунктиром провести асимптоту;
- зробити засічки в точках $x = -1$, $x = 1$, щоб їх нахил приблизно відповідав відомим значенням похідної 2;
- з'єднати нанесені точки і засічки плавною лінією;
- продовжити лінію вліво від $x = -5$ та вправо від $x = 5$, наближуючи графік до асимптоти $y = x$;
- продовжити лінію нагору від $x = -0.5$ та вниз від $x = 0.5$, наближуючи графік до вертикальної осі.

Отримаємо такий графік:



Приклад 2. $y = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$.

- Область визначення: $]-\infty; 0[\bigcup] 0; +\infty[$
- Функція не парна, не непарна, не періодична.
- Нулі функції: $y = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 3. \end{array}\right.$

- Межі сталості знаку: $y > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ 0 < x < 1, \\ x > 3, \end{array}\right.$ $y < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.
- Зайдемо похилу асимптоту $y = k \cdot x + b$.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x^3} = 0.$

$b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - k\cdot x] = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^2-4x+3}{x^2} = 1.$

Отримана горизонтальна асимптота $y = 1$.

Розглянемо знак відхилення віт асимптоти $\Delta = [f(x) - k\cdot x - b] = = \dfrac{-4x+3}{x^2}$.

При $x \to +\infty \Rightarrow \Delta < 0$, тобто графік функції наближається до асимптоти знизу;

при $x \to -\infty \Rightarrow \Delta > 0$, тобто графік функції наближається до асимптоти зверху;

Вертикальна асимптота $x = 0$.

При $\begin{cases} x \to 0 \\ x < 0 \end{cases} \Rightarrow y \to +\infty$; при $\begin{cases} x \to 0 \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow y \to +\infty$.

- $y' = +\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{6}{x^3} = \dfrac{4(x-1.5)}{x^3}$. Мінімум у точці $(1.5; -\dfrac{1}{3})$.

Функція зростає на інтервалі $]-\infty; 0[$ від значення 1 до $+\infty$

та на інтервалі $]1.5; +\infty[$ від значення $-\dfrac{1}{3}$ до значення 1.

Функція спадає на інтервалі $]0; 1.5]$ від значення $+\infty$ до значення $-\dfrac{1}{3}$.

- $y'' = -\dfrac{8(x-\frac{9}{4})}{x^4}$. Точка перегину $(\dfrac{9}{4}; \dfrac{-5}{27})$.

Функція опукла вниз при $(x < 0) \cup (0 < x < \dfrac{9}{4})$ та опукла вверх при $(x > \dfrac{9}{4})$.

Запишемо властивості функції у зведену таблицю.

Аргумент x	Значення функції $y(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$	Похідна $y'(x) = \dfrac{4(x-1.5)}{x^3}$	Друга похідна $y''(x) = -\dfrac{8(x-\frac{9}{4})}{x^4}$
$-\infty$	1	0	0
$x \to -\infty$	$y \to 1$ зверху ($y \to 1+0$)	$y' \to +0$	$y'' \to +0$
$x \in]-\infty; 0[$	$y \in]1; \infty[$	$y' > 0$,	$y'' > 0$,

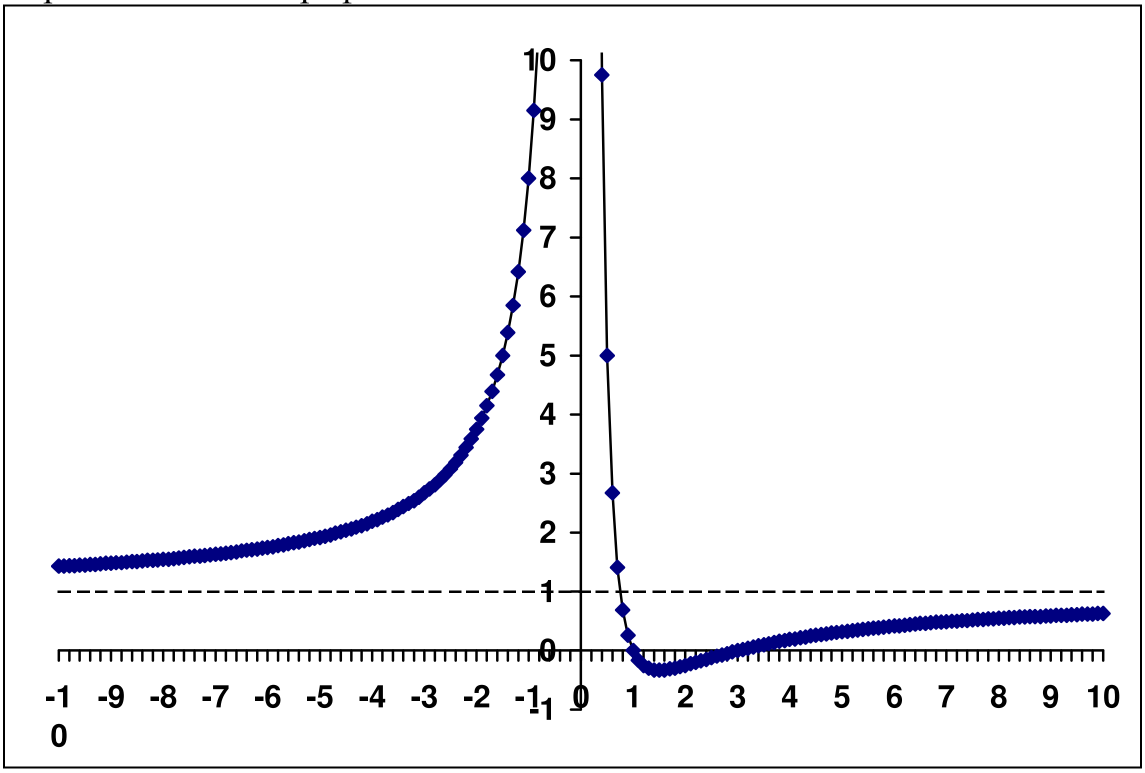
		y зростає.	y опукла вниз.
$x=-5$	1.92	$y'>0$	$y''>0$
$x=-4$	2.19	$y'>0$	$y''>0$
$x=-3$	2.67	$y'>0$	$y''>0$
$x=-2$	3.75	$y'>0$	$y''>0$
$x=-1$	8.00	$y'>0$	$y''>0$
$x\to-0$	$y\to\infty$	$y'\to\infty$	$y''\to\infty$
$x\to+0$	$y\to\infty$	$y'\to-\infty$	$y''\to\infty$
$x\in]\,0;\,1.5[$	$y\in]\,-0.33;\,\infty[$	$y'<0$, y спадає.	$y''>0$, y опукла вниз.
$x=0.5$	5	$y'<0$	$y''>0$
$x=1$	0	$y'=-2$	$y''=10$
$x=1.5$	–0.33	0, мінімум.	$y''>0$
$x\in]1.5;\,2.25[$	$y\in]\,-0.33;\,-0.18[$	$y'>0$, y зростає.	$y''>0$, y опукла вниз.
$x=2$	–0.25	$y'>0$	$y''>0$
$x=2.25$	–0.18	$y'>0$	0, точка перегину.
$x\in]2.25;\,\infty[$	$y\in]\,-0.18;\,1[$	$y'>0$, y зростає.	$y''<0$, y опукла нагору.
$x=3$	0	$y'=1/3$	$y''<0$
$x=4$	0.19	$y'>0$	$y''<0$
$x=5$	0.323	$y'>0$	$y''<0$
$x\to\infty$	$y\to1$ знизу $(y\to1-0)$	$y'\to+0$	$y''\to-0$
∞	1	0	0

Тепер залишилось:

- нанести на графік істотні точки;
- пунктиром провести асимптоту;
- зробити засічки в точках $x=1$, $x=3$, щоб їх нахил приблизно відповідав відомим значенням похідної –2 та 1/3;
- з'єднати нанесені точки і засічки плавною лінією;
- продовжити лінію вліво від $x=-5$ та вправо від $x=5$, наближуючи графік до горизонтальної асимптоти $y=1$;
- продовжити лінію вверх від $x=-1$ та $x=0.5$, наближуючи графік до вертикальної осі;

- продовжити лінію нагору від $x = -0.5$ та вниз від $x = 0.5$, наближуючи графік до вертикальної осі.

Отримаємо такий графік:



<u>Приклад</u> 3. $y = x^2 - \dfrac{1}{x}$.

- Область визначення: $]-\infty;\ 0\ [\ \bigcup\ ]\ 0;\ +\infty[$.
- Функція не парна, не непарна, не періодична.
- Нулі функції: $y = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
- Межі знакосталості: $y > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > 1, \end{array}\right.$ $y < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.
- Похила асимптота $y = k{\cdot}x + b$.

$k = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x^3 - 1}{x^2}$ – не існує, тому похилої асимптоти нема. На нескінченності функція прямує до $y = x^2$ (тобто, її графік – до параболи).

Розглянемо знак відхилення від асимптоти $\Delta = [f(x) - x^2] = \dfrac{-1}{x}$.

При $x \to +\infty \Rightarrow \Delta < 0$, тобто графік функції наближається до параболи знизу;

при $x \to -\infty \Rightarrow \Delta > 0$, тобто графік функції наближається до параболи зверху.

Вертикальна асимптота $x = 0$.

При $\begin{cases} x \to 0, \\ x < 0, \end{cases} \Rightarrow y \to +\infty$; при $\begin{cases} x \to 0, \\ x > 0, \end{cases} \Rightarrow y \to -\infty$.

- $y' = 2x + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3+1}{x^2}$. Мінімум у точці $(-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}};\ \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2})$.

Функція зростає на інтервалі $[-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; 0[$ від $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$ до $+\infty$

та на інтервалі $]0; +\infty[$ від $-\infty$ до $+\infty$.

Функція спадає на інтервалі $]-\infty;\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}]$ від $+\infty$ до $\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}$.

- $y'' = 2\cdot\dfrac{(x^3-1)}{x^3}$. Точка перегибу (1; 0),

Функція опукла вниз при $(x < 0) \cup (x > 1)$

та опукла вверх при $(0 < x < 1)$.

Запишемо властивості функції в зведену таблицю. При цьому положення точок екстремуму і перегину краще приблизно вказати десятковими дробами для зручності нанесення на графік.

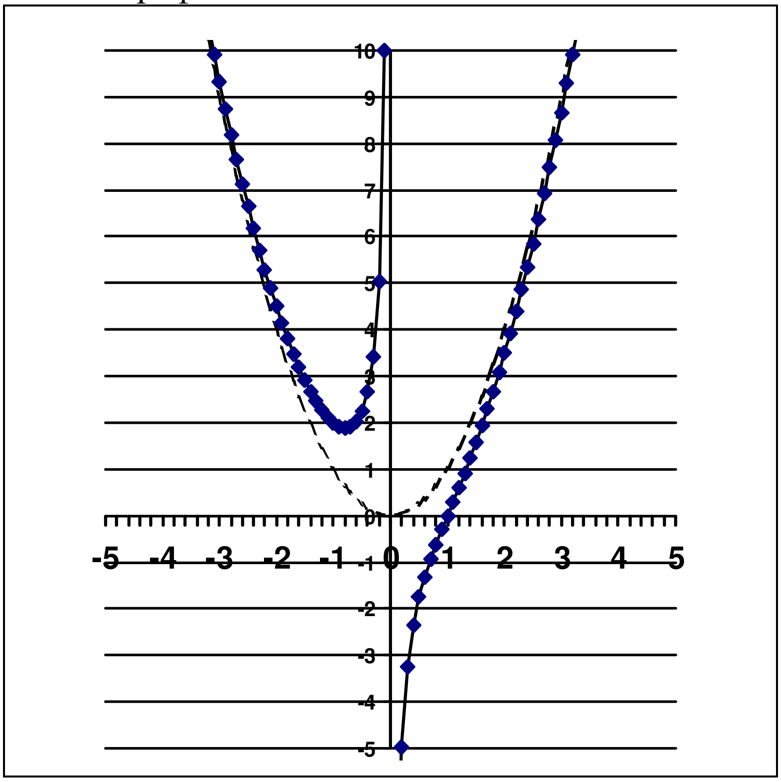
Аргумент x	Функція $y(x) = x^2 - \dfrac{1}{x}$	Похідна $y'(x) = 2x + \dfrac{1}{x^2}$	Друга похідна $y''(x) = 2\cdot\dfrac{(x^3-1)}{x^3}$
$-\infty$	∞	$-\infty$	2
$x \to -\infty$	$y \to x^2$ зверху.	$y' \to -\infty$	$y'' \to 2+0$
$x \in]-\infty;\ -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}[$	$y \in]\ \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2};\ \infty[$	$y' < 0$, y спадає.	$y'' > 0$, y опукла вниз.
$x = -3$	9.33	$y' < 0$	$y'' > 0$
$x = -2$	4.50	$y' < 0$	$y'' > 0$
$x = -1$	2.00	$y' < 0$	$y'' > 0$
$x = -\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} \approx -0.8$	$\dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2} \approx 1.89$	0, мінімум	$y'' > 0$
$x \in]-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}; 0[$	$y \in]\ \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{2}; \infty[$	$y' > 0$, y зростає.	$y'' > 0$, y опукла вниз.
$x = -0.5$	2.25	$y' > 0$	$y'' > 0$
$x \to -0$	$y \to \infty$	$y' \to \infty$	$y'' \to \infty$
$x \to +0$	$y \to -\infty$	$y' \to \infty$	$y'' \to -\infty$
$x \in]0; 1[$	$y \in]0;\ \infty[$	$y' > 0$, y зростає	$y'' < 0$, y опукла нагору.
$x = 0.5$	-1.75	$y' > 0$	$y'' < 0$

$x = 1$	0	$y' = 3$	$y'' = 0$, точка перегину.
$x \in]1;\infty[$	$y \in]\,0;\infty[$	$y' > 0$, y зростає.	$y'' > 0$, y опукла вниз.
$x = 2$	3.50	$y' > 0$	$y'' > 0$
$x = 3$	8.67	$y' > 0$	$y'' > 0$
$x \to \infty$	$y \to x^2$ знизу	$y' \to \infty$	$y'' \to 2 - 0$
∞	∞	∞	2

Тепер залишилось:

- нанести на графік істотні точки;
- пунктиром провести асимптоту $y = x^2$;
- зробити засічку в точці $x = 1$, щоб її нахил приблизно відповідав відомому значенню похідної 3;
- з'єднати нанесені точки і засічки плавною лінією;
- продовжити лінію вліво від $x = -3$ та вправо від $x = 3$, наближуючи графік до асимптоти $y = x^2$;
- продовжити лінію вверх від $x = -1$ та $x = 0.5$, наближуючи графік до вертикальної осі;
- продовжити лінію вверх від $x = -0.5$ та вниз від $x = 0.5$, наближуючи графік до вертикальної осі.

Отримаємо такий графік:



Глава 16. Задачі на складання рівнянь.

- ***<u>Задачі на рух.</u>***

Задачі на рух є досить простими і зрозумілими з погляду побутової логіки. Головних принципів можна відзначити чотири.

<u>Перший</u> – при <u>прямуванні об'єктів назустріч один одному</u> зміна відстані відбувається зі швидкістю, що дорівнює сумі швидкостей об'єктів, що рухаються. Інакше кажучи, відстань дорівнює добутку часу до зустрічі на суму швидкостей.

<u>Другий</u> – при <u>прямуванні об'єктів в одному напрямку</u> зміна відстані відбувається зі швидкістю, рівною різниці швидкостей об'єктів, що рухаються. Інакше кажучи, відстань дорівнює добутку часу до зустрічі на різницю швидкостей.

<u>Третій</u> – при прямуванні річкою або інших подібних ситуаціях буває корисним застосування своєрідного принципу відносності – <u>зменшувати або збільшувати швидкості об'єктів на величину швидкості течії</u>.

Четвертий – якщо змінних більше, ніж рівнянь, треба правильно визначати, а що ж треба знайти. Можливо, треба шукати не змінні, а їхню частку або іншу функцію.

Приклад 1. Дві групи туристів повинні йти назустріч одна одній з турбаз A і B, відстань між якими 30 км. Якщо перша група вийде на дві години раніше за другу, то вони зустрінуться через 2.5 години після виходу другої групи. Якщо ж друга група вийде на дві години раніше за першу, то вони зустрінуться через 3 години після виходу першої групи. З якою середньою швидкістю йде кожна група?

Розв'язок. Нехай V_1 – швидкість першої групи, V_2 – швидкість другої групи. Застосувавши перший принцип, отримаємо:

$$\begin{cases} 30 - 2V_1 = 2.5(V_1 + V_2), \\ 30 - 2V_2 = 3(V_1 + V_2), \end{cases} \Rightarrow 60 - 2(V_1 + V_2) = 5.5(V_1 + V_2) \Rightarrow (V_1 + V_2) = 8.$$

Відповідь: $V_1 = 5$, $V_2 = 3$.

Приклад 2. З пункту A по одному шосе виїздять одночасно два автомобілі, а через годину за ними виїздить третій. Ще через годину відстань між третім і першим автомобілями зменшилося в півтора разу, а між третім і другим – у два рази. Швидкість якого автомобіля, першого або другого, більше і в скільки разів? (Відомо, що третій автомобіль не обганяв перших двох).

Розв'язок. Нехай V_1 – швидкість першого, V_2 – другого, а V_3 – третього автомобіля, тоді, ми отримаємо систему з двох рівнянь з трьома невідомими. Застосувавши четвертий принцип, знайдемо шукане відношення:

$$\begin{cases} 1.5(V_1 \cdot 1 - (V_3 - V_1)) = V_1, \\ 2(V_2 \cdot 1 - (V_3 - V_2)) = V_2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2V_1 = 1.5V_2, \\ 3V_2 = 2V_3, \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} \cdot \frac{V_1}{V_2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{V_1}{V_2} = \frac{9}{8}.$$

Звертаємо увагу, що значення V_1 та V_2 залишилися невідомими, але шуканим було лише їх відношення.

• ***Задачі на роботу.***

Задачі на роботу, як правило, розв'язуються виходячи з наступних міркувань. Уся робота приймається за одиницю, за x приймається продуктивність праці (частка роботи виконувана за одиницю часу) першого колективу, за y – продуктивність праці другого колективу і т.д. При спільній роботі продуктивності додаються. Основна формула: виконана доля роботи дорівнює добутку продуктивності праці на час роботи.

Приклад. Бригада слюсарів може виконати деяке завдання з обробки деталей на 15 годин швидше, ніж бригада учнів. Якщо бригада учнів відпрацює 18 годин, виконуючи це завдання, а потім бригада слюсарів продовжить виконання цього завдання протягом 6 годин, то і тоді буде виконано тільки

0.6 усього завдання. Скільки часу потрібно бригаді учнів для самостійного виконання всього завдання?

Розв'язок. Нехай x – продуктивність праці бригади слюсарів, y – продуктивність праці бригади учнів, $\frac{1}{x}$ – час виконання всієї роботи бригадою слюсарів, $\frac{1}{y}$ – час виконання всієї роботи бригадою учнів. Застосувавши основне правило, отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{y} + 15, \\ 18y + 6x = 0.6, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0.1 - 3y, \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{0.1 - 3y} + 15, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0.1 - 3y, \\ 45y^2 - 5.5y + 0.1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0.1 - 3y, \\ \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{10}, \\ y = \frac{1}{45}, \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0.1, \\ x = -0.2, \end{cases} \\ \begin{cases} y = \frac{1}{45}, \\ x = \frac{1}{30}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Відповідь: $1/y$ =45 годин.

- ***Задачі на відсотки.***

Задачі на відсотки, як правило, мають наступний зміст. Дано декілька сумішей, що містять деякі компоненти. Потім шляхом перемішування складається нова суміш, у котрої вихідні суміші взяті у деяких пропорціях. В задачі необхідно визначити співвідношення компонентів в отриманій суміші. Розв'язок таких задач отримається наступним чином. На кожному етапі (до змішування, після, очікуваний результат) необхідно обчислити сумарну масу кожної з компонент (враховуючи відсотки). Далі, враховуючи умови задачі, отримаємо шукані співвідношення, розв’язавши які, отримаємо відповідь.

Розв'язок добре інтерпретувати на схемі, у котрої кожний квадрат містить опис складової і відсотки.

Приклад. Зливок сплаву міді (Cu) і цинку (Zn) масою в 36 кг містить 45% міді. Яку масу міді потрібно додати до цього зливку, щоб отриманий після переплавки сплав містив 60% міді?

Розв'язок. Означимо через x необхідну масу міді, що додається.

Тоді на першому етапі отримаємо:

До з’єднання	Мідь (Cu)	Цинк (Zn)	Разом
Зливок 1	$36 \times 0.45 = 16.2$ кг	$36 \times 0.55 = 19.8$ кг	36 кг
Зливок 2	x кг	0 кг	x кг

Тоді на другому етапі, сумуючи дані у рядках таблиці, отримаємо:

Після з’єднання	Мідь (Cu)	Цинк (Zn)	Разом
Нова суміш	$(16.2 + x)$ кг	19.8 кг	$(36 + x)$ кг

Але ж, за умовою, очікується:

Після переплавки	Мідь (Cu), 60%	Цинк (Zn), 40%	Разом
Новий зливок	$(36 + x) \times 0.60$ кг	$(36 + x) \times 0.40$ кг	$(36 + x)$ кг

Потрібне рівняння, як правило, можна отримати декількома способами. Для даної задачі один з них – прирівняти дані у другому (мідь) або третьому (цинк) стовпчику другої та третьої таблиць, тобто масу кожної з компонент до і після з’єднання. Інший – скласти пропорцію між масою (дані другої таблиці) та долею (заголовок третьої таблиці) компонент після з’єднання. Отримаємо такі рівняння для визначення x:

з порівняння других стовпчиків – $16.2 + x = (36 + x) \times 0.60$;

з порівняння третіх стовпчиків – $19.8 = (36 + x) \times 0.40$;

з пропорції – $(16.2 + x) : 0.60 = 19.8 : 0.40$.

Всі рівняння еквівалентні, бо в різний спосіб виражають умови тої самої задачі. Розв’язуватимемо те, що виглядає простішим – друге.

$19.8 = (36 + x) \times 0.40 \Leftrightarrow 49.5 = 36 + x \Leftrightarrow x = 13.5$.

Глава 17. Комбінаторика і біном Ньютона.

<u>Головні формули.</u>

Формула для <u>числа перестановок з n елементів:</u>

$P_n = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n!$;

Формула для <u>числа сполучень з n елементів по m:</u>

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!};$$

Справедливі наступні <u>співвідношення</u>:

$$C_n^0 = C_n^n = 1. \quad C_n^m = C_n^{n-m}; \quad C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}; \quad C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n;$$

Формула для <u>числа розміщень із n елементів по m :</u>

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!};$$

Формула для <u>числа перестановок із n елементів із повтореннями</u> першого елементу – n_1 раз, другого – n_2 раз, і т.д., k–го елементу – n_k раз (очевидно, що $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$):

$$P_{\text{n}}(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Цій формулі відповідають постановки задач такого типу. Скільки різноманітних комбінацій можна одержати з букв у слові «математика». Відповідь : $\frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!}$.

Формула для <u>числа сполучень із повтореннями</u> (число різноманітних способів вибірки обсягу n із k груп однакових елементів):

$$\overline{C}_k^n = C_{k+n-1}^n = \frac{(k+n-1)!}{n! \cdot (k-1)!}.$$

Ця формула викликає найбільші утруднення, але проблема вибірки обсягу n із k груп однакових елементів може бути інтерпретована як спроба вибрати n елементів із [n елементів плюс (k – 1) роздільник між групами, що складе ($n + k - 1$) об'єкт].

<u>Приклад</u>: Скільки різноманітних наборів по 8 тістечок у кожному можна скласти, використовуючи 4 сорти тістечок. Відповідь: $C_{8+4-1}^8 = 165$.

<u>Формула бінома Ньютону:</u>

$(a + b)^{\text{n}} = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$, где n – натуральне число.

<u>Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^{n}.</u>

Головні методи розв'язку задач з комбінаторики такі: метод математичної індукції, безпосереднє застосування формул, належність елементів до множини, застосування інтерпретацій.

• ***<u>Метод математичної індукції.</u>***

Даний метод, як універсальний, стоїть дещо осторонь від інших методів, і застосовується найчастіше для доведення різноманітних сум і інших формул. Але саме на його застосування розрахована більшість задач з комбінаторики для абітурієнтів. Для <u>прикладу</u> доведемо, що

$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$

Розглянемо випадок $n = 1$. Запропонована рівність виглядатиме так:

$C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2^1$. Вона виконується, тобто є вірною для $n = 1$.

Тепер припустимо, що вона вірна при $n = k$:

$C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k = 2^k.$

Доведемо, що вона є вірною і для наступного $n = k + 1$.

$C_{k+1}^0 + C_{k+1}^1 + C_{k+1}^2 + ... + C_{k+1}^m + ... + C_{k+1}^{k-1} + C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k+1} =$
$= C_k^0 + (C_k^0 + C_k^1) + (C_k^1 + C_k^2) + ... + (C_k^{m-1} + C_k^m) + ... + (C_k^{k-1} + C_k^k) + C_k^k =$
$= 2(C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k) = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}.$

Таким чином, ми довели справедливість рівності для $n = k + 1$ і, у силу справедливості методу математичної індукції, рівність вірна для будь-якого натурального n.

Розберемо роботу інших методів на прикладі доведення двох формул:
$C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$; $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

- ***Безпосереднє застосування формул.***

$$C_n^m + C_n^{m+1} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)! \cdot (n-m-1)!} = \frac{n!}{(m+1)! \cdot (n-m)!}[(m+1)+(n-m)] =$$
$$= \frac{(n+1)!}{(m+1)! \cdot [(n+1)-(m+1)]!} = C_{n+1}^{m+1}.$$

Підставимо у формулу бінома Ньютона
$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^n b^n$
значення $a = 1$, $b = 1$. Отримаємо: $2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$.

- ***Належність елементів до множини.***

Розглянемо множину з $(n + 1)$ елементів. Зафіксуємо елемент a_1. Кількість способів вибору $(k + 1)$ елемента з $(n + 1)$ дорівнює C_{n+1}^{k+1} і розбивається на дві кількості:

- Кількість способів вибору, коли елемент a_1 входить до вибірки, у цьому випадку нам треба вибирати k елементів із n C_n^k способами.
- Кількість способів вибору, коли елемент a_1 не входить до вибірки, у цьому випадку нам треба вибирати $(k + 1)$ елементів із n C_n^{k+1} способами.

Оскільки ці кількості рівні, ми отримаємо $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$.

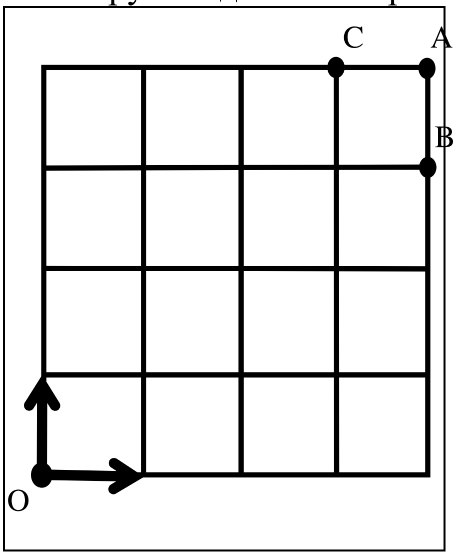
Розглянемо множину з n елементів. Розглянемо, скільки з неї можна зробити усіляких вибірок без повторення.

0 елементів можна вибрати C_n^0 способами, 1 елемент можна вибрати C_n^1 способами, ... , k елементів можні вибрати C_n^k способами, ... , n елементів можна вибрати C_n^n способами, що у сумі дає $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$. Але ж для кожного елемента є дві можливості: він входить у вибірку або не входить. Тому матимемо 2^n можливостей. Тому отримаємо:
$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.

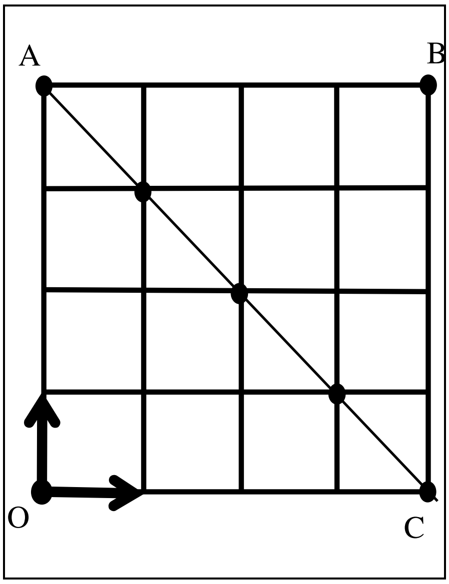
• ***Застосування геометричних та інших інтепретацій.***

Однією з найпоширеніших інтерпретацій для доведення формул комбінаторики є одиничні крок вправо або нагору по одиничній гратці.

Розглянемо можливі маршрути з лівого нижнього кута в правий верхній, коли по горизонталі розмір прямокутника дорівнює $(m+1)$, а по вертикалі – $(n-m)$. Кожний такий маршрут має $(n+1)$ ланку, серед них $(m+1)$ по горизонталі та $(n-m)$ – по вертикалі. Число таких маршрутів дорівнює C_{n+1}^{m+1}. Але серед них тих, що проходять через точку *C*, буде C_n^m, а тих, що, проходять через точку *B*, буде C_n^{m+1}, звідки і отримуємо очікувану формулу: $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.



Розглянемо для аналогічної інтерпретації можливі маршрути з лівого нижнього кута до діагоналі *AC*, коли розмір сторони квадрата дорівнює *n*. Кожний такий маршрут має *n* ланок, із них *m* по горизонталі і $(n - m)$ – по вертикали. Кількість таких маршрутів буде $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n$. Але оскільки для кожного маршруту є два можливих напрямку руху, отримаємо 2^n можливостей, що й доводить формулу: $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$.



Глава 18. Планіметрія.

Основні формули і позначення

1°. Довільний трикутник.

a, b, c – сторони;

α, β, γ – протилежні їм кути;

p – половина периметру;
R – радіус описаної окружності;
r – радіус вписаної окружності;
S – площа;
h_a – висота, проведена до сторони a:

$S = \frac{1}{2} a h_a$; $S = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$; $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$;

$r = \frac{S}{p}$; $R = \frac{abc}{4S}$;

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$ (теорема косинусів);

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$ (теорема синусів).

2°. Прямокутний трикутник.

a, b – катети; c — гіпотенуза;
a_c, b_c – проекції катетів на гіпотенузу):

$S = \frac{1}{2} ab$, $S = \frac{1}{2} c h_c$;

$r = \frac{a+b-c}{2}$; $R = \frac{c}{2}$; $a^2 + b^2 = c^2$ (теорема Піфагора);

$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}$; $\frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}$; $\frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}$;

$a = c\cdot\sin\alpha = c\cdot\cos\beta = b\cdot\mathrm{tg}\alpha = b\cdot\mathrm{ctg}\beta$;

3°. Рівносторонній трикутник.

$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

4°. Довільний опуклий чотирикутник.

d_1 та d_2 – діагоналі; φ – кут між ними; S – площа:

$S = d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi$.

5°. Паралелограм.

a та b – суміжні сторони; α – кут між ними;
h_a – висота, проведена до сторони a:

$S = a\cdot h_a = a\cdot b\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi$.

6°. Ромб.

$S = a\cdot h_a = a^2\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2} d_1\cdot d_2$.

7°. Прямокутник.

$S = a\cdot b = \frac{1}{2} d_1\cdot d_2\cdot\sin\varphi$.

8°. Квадрат.
d — діагональ:
$S = a^2 = d^2/2$.

9°. Трапеція.
a и b – основи;
h – відстань між ними;
l – середня лінія:
$l = \frac{a+b}{2}$; $S = \frac{a+b}{2} \cdot h = l \cdot h$.

10°. Описаний багатокутник.
p – напівпериметр,
r – радіус вписаної окружності):
$S = p \cdot r$.

11°. Правильний багатокутник.
a_n – сторона правильного n – кутника;
R – радіус описаної окружності, r – радіус вписаної окружності:
$a_3 = R\sqrt{3}$, $a_4 = R\sqrt{2}$, $a_6 = R$.
$S = \frac{n a_n r}{2}$.

12°. Окружність, коло.
r – радіус;
C – довжина окружності;
S – площа кола:
$C = 2\pi r$, $S = \pi r^2$.

13°. Сектор.
l – довжина дуги, що обмежує сектор,
n^0 – градусна міра центрального кута;
α – радіанна міра центрального кута):
$l = \frac{\pi \cdot r \cdot n^\circ}{180^\circ} = r\alpha$, $S = \frac{\pi \cdot r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{1}{2} r^2\alpha$.

• ***<u>Додаткові співвідношення між елементами фігур.</u>***

1°. Три медіани трикутника перетинаються в одній точці, що поділяє кожну медіану у відношенні 2:1, рахуючи від вершини трикутника.

2°. Довжина медіани трикутника виражається формулою:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}.$$

де a, b, c – довжини сторін трикутника.

3°. Довжина сторони трикутника виражається формулою:

$$a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2},$$

де m_a, m_b, m_c – довжини медіан трикутника.

4°. Бісектриса ділить сторону трикутника на відрізки, пропорціональні двом іншим його сторонам.

5°. Довжина бісектриси трикутника виражається формулою:

$$l_c=\sqrt{ab-a_1b_1},$$

де a и b – довжини двох сторін трикутника ABC, a_1 и b_1 – відрізки третьої сторони.

6°. Довжина бісектриси трикутника виражається через довжини його сторін a, b и c формулою:

$$l_c=\frac{\sqrt{ab(a+b+c)(a+b-c)}}{a+b}.$$

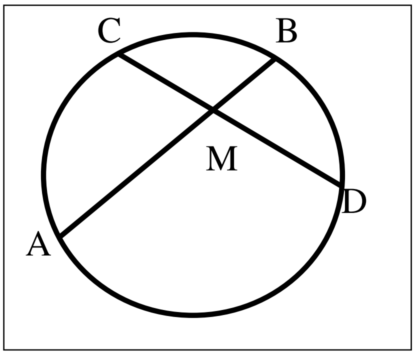
7°. Для всякого трикутника залежність між його висотами h_a, h_b, h_c і радіусом r вписаної окружності подається формулою:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}.$$

8°. Площа S рівнобедреної трапеції, діагоналі котрої взаємно перпендикулярні, дорівнює квадрату її висоти, тобто $S=h^2$.

9°. Висота рівнобедреної трапеції, в яку можна вписати окружність, є середнім геометричним її основ.

10°. Властивості хорд окружності.



- Діаметр, що поділяє хорду навпіл, перпендикулярний цій хорді.
- У окружності рівні хорди рівновіддалені від центру окружності, і, навпаки, рівновіддалені від центру окружності хорди рівні.

З двох не рівних хорд окружності велика хорда розташована ближче до центру окружності, і, навпаки, із двох не рівних хорд більшою буде та, що ближче до центру.

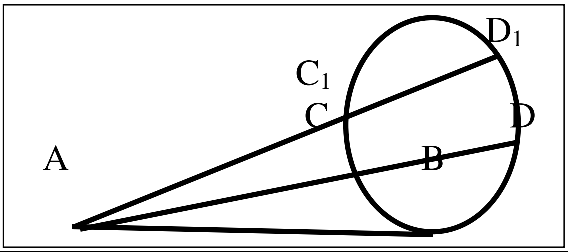
- Відрізки хорд що перетинаються AM, MB, CM і MD пов'язані рівністю $AM \bullet MB = CM \bullet MD$.

11°. Дотична і січна.

Якщо через точку A, що лежить поза

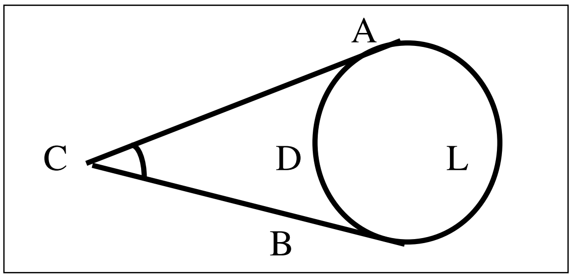
колом, провести дотичну і січну, то відрізки дотичної і січної пов'язані рівністю:

$AB^2 = AD \bullet AC = AD_1 \bullet AC_1$.



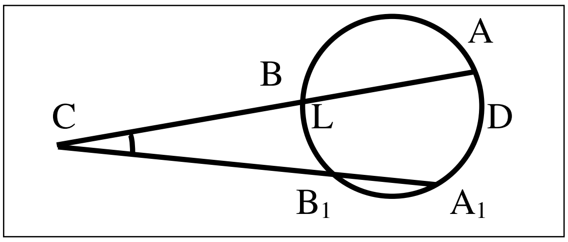
12°. Кути в окружності.

Кут, утворений двома дотичними до окружності, що проходять через одну точку, називається описаним кутом (*CA* і *CB* – дотичні). Розмір описаного кута дорівнює напіврізниці кутових розмірів дуг, укладених між його сторонами: $\angle ACB = \frac{1}{2}(\smile ALB - \smile ADB)$.



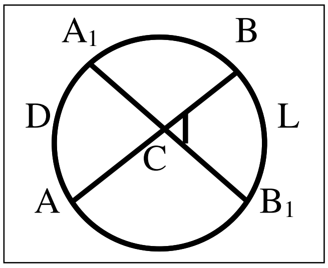
Розмір кута, утвореного двома січними, що мають загальну точку, що лежить поза окружністю, дорівнює напіврізниці кутових розмірів дуг, укладених між його сторонами:

$\angle ACA_1 = \frac{1}{2}(\smile ADA_1 - \smile BLB_1)$.



Розмір кута, утвореного двома січними, що мають загальну точку, що лежить усередині окружності, дорівнює напівсумі кутових розмірів дуг, укладених між його сторонами:

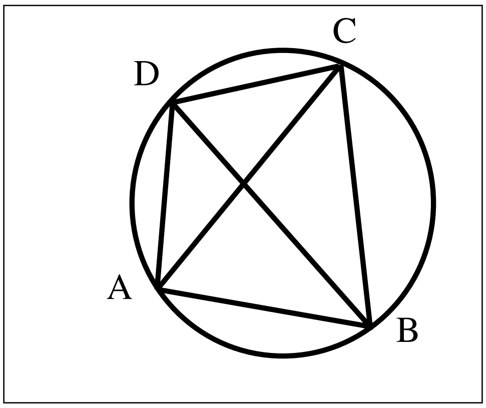
$\angle BCB_1 = \frac{1}{2}(\smile BLB_1 + \smile ADA_1)$.



13°. Вписані чотирикутники.

Для того, щоб біля опуклого чотирикутника можна було описати окружність, необхідно і достатньо, щоб сума протилежних кутів цього чотирикутника дорівнювала 180°. Якщо чотирикутник $ABCD$ можна вписати в окружність, то добуток діагоналей цього чотирикутника дорівнює сумі добутків протилежних сторін:

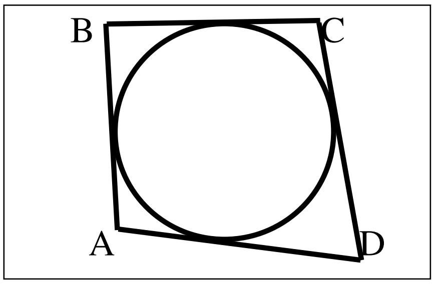
$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$



14°. Описані чотирикутники.

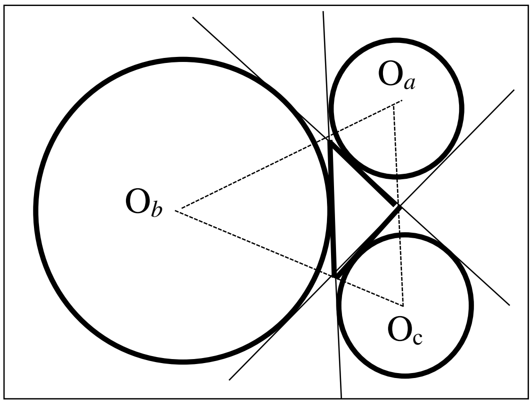
Для того, щоб в опуклий чотирикутник можна було вписати окружність, необхідно і достатньо, щоб суми протилежних сторін цього чотирикутника були рівні:

$AB + CD = BC + AD.$



15°. Позавписана окружність.

Позавписаною окружністю називається окружність, що торкається однієї сторони трикутника і продовження двох інших сторін. Бісектриси пари зовнішніх кутів трикутника, суміжних із кутами β і γ, перетинаються в точці O_a. Через цю же точку проходить бісектриса внутрішнього кута α. Точка O_a – центр позавписаної окружності, що торкається сторони a і продовження сторін b і c. Аналогічно знаходяться точки O_b и O_c –4 центри позавписаних окружностей, що торкаються сторін b і c відповідно.



Радіуси позавписаних окружностей r_a, r_b, r_c, що торкаються сторін a, b і c відповідно, обчислюються за формулами:

$$r_a = \frac{S_V}{p-a} = \frac{2S_V}{b+c-a}, \qquad r_b = \frac{S_\nabla}{p-b} = \frac{2S_\nabla}{a+c-b}, \qquad r_c = \frac{S_\nabla}{p-c} = \frac{2S_\nabla}{b+a-c}.$$

Глава 19. Стереометрія.

Головні формули стереометрії

1°. Довільна призма.

l – бокове ребро;

P – периметр основи;

S – площа основи;

H – висота;

$P_{\text{пер}}$ – периметр перпендикулярного перерізу;

$S_{\text{бок}}$ – площа бокової поверхні;

V – об’єм:

$S_{\text{бок}} = P_{\text{пер}} \cdot l$, $\qquad V = SH$.

2°. Пряма призма.

$S_{\text{бок}} = P \cdot l$.

3°. Прямокутний паралелепіпед.

a, b, c – його виміри; d – діагональ:

$S_{\text{бок}} = P\,H$, $\quad V = a \cdot b \cdot c$; $\quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

4°. Куб.

a – ребро:

$V = a^3$, $\qquad d = a\sqrt{3}$.

5°. Довільна піраміда.

S – площа основи; H – висота; V – об’єм;

$V = \frac{1}{3} S\,H$.

6°. Правильна піраміда.

P – периметр основи; l – апофема; $S_{\text{бок}}$ – площа бокової поверхні:

$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} P \cdot l$; $\qquad V = \frac{1}{3} S \cdot H$.

7°. Довільна зрізана піраміда.

S_1 та S_2 – площі основ; h – висота, V – об’єм:

$V = \frac{1}{3} h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$.

8°. Правильна зрізана піраміда.

P_1 та P_2 – периметр основ; l – апофема;

$S_{бок}$ – площа бокової поверхні:

$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)\cdot l.$

9°. Циліндр.

R – радіус основи; H – висота;

$S_{бок}$ – площа бокової поверхні; V – об’єм:

$S_{бок} = 2\pi RH,$ $V = \pi R^2H.$

10°. Конус.

R – радіус основи; H – висота; l – твірна;

$S_{бок}$ – площа бокової поверхні; V – об’єм:

$S_{бок} = \pi Rl,$ $V = \frac{1}{3}\pi R^2H.$

11°. Куля, сфера.

R – радіус кулі; S – площа поверхні сфери; V – об’єм:

$S = 4\pi R^2,$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3.$

12°. Кульовий сегмент (частина кулі, відтинена площиною)**.**

R – радіус кулі; $h \le R$ – висота сегменту;

S – площа сферичної поверхні сегменту; V – об’єм:

$S = 2\pi Rh,$ $V = \pi h^2(R - \frac{1}{3}h).$

13°. Кульовий сектор (з'єднані основами кульовий сегмент та конус з вершиною в центрі кулі)**.**

R – радіус кулі; $h \le R$ – висота сегменту; V – об’єм:

$V = \frac{2}{3}\pi R^2h + \frac{1}{3}\pi(R-h)^3.$

• ***Додаткові співвідношення між елементами призми і піраміди.***

Як правило, при розв'язку складних задач по стереометрії, необхідно вирішувати одну з двох порівняно складних і важливих проблем: «*куди падає висота?*» і *«як побудувати перетин?»*.

• ***Куди падає висота?***

Стаття з таким заголовком з'явилася в часопису «Математика в школі» біля двох десятків років тому. Сформулюємо коротко головні її положення.

• Нехай у піраміді виконується одна з таких двох умов:

а) усі бічні ребра утворюють із площиною основи рівні кути;

б) довжини всіх бічних ребер рівні.

Тоді вершина піраміди проектується в центр окружності, описаної біля основи піраміди (ця ж точка служить точкою перетинання серединних перпендикулярів до сторін основи піраміди).

• Нехай у піраміді виконується одна з таких двох умов:

а) усі бічні грані утворюють із основою рівні кути;

б) довжини усіх апофем бічних граней рівні.

Тоді вершина піраміди проектується в центр окружності, вписаної в основу піраміди (ця ж точка служить точкою перетинання бісектрис кутів у основі піраміди).

• Якщо в похилій призмі бічне ребро AB складає рівні кути зі сторонами основи, що утворюють вершину A, то основа OB висоти BO лежить на бісектрисі кута A.

Це ж твердження можна сформулювати інакше: якщо в тригранному куті два гострі плоских кути рівні, те проекція їхнього загального ребра на площину третього плоского кута є його бісектрисою.

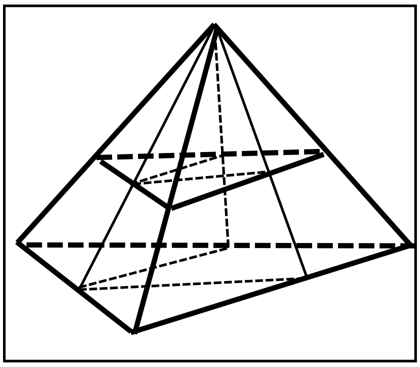
•Якщо висота трикутної піраміди проходить через точку перетинання висот трикутника, що лежить у основі, то протилежні ребра піраміди перпендикулярні. Справедливо й обернене твердження.

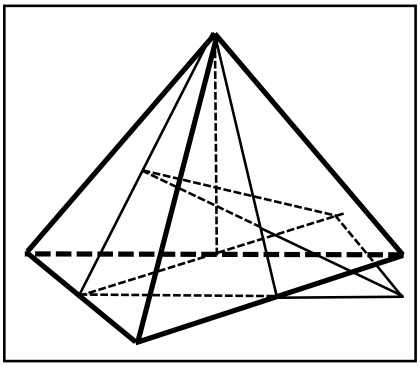
• *Як побудувати перетин.*

При побудові перетину, що проходить через три точки, розташовані на гранях піраміди або призми (якщо якась точка належить бічному ребру, то це тільки полегшує ситуацію) у нас можливі три варіанти: перетин паралельний основі, перетин проходить через основу, перетин не паралельний основі і не проходить через неї.

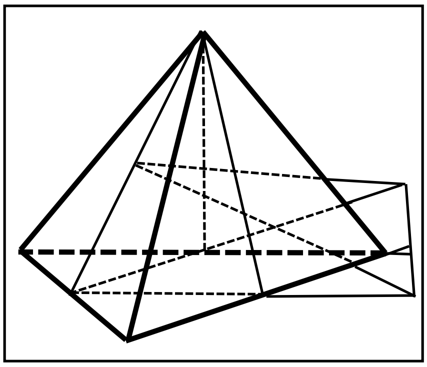
Розглянемо побудову перетину, що проходить через три точки, розташовані на гранях піраміди.

• Проведемо прямі через вершину піраміди і дані точки до перетинання з основою. Далі, проведемо прямі через отримані пари точок основи. Проведемо в отриманих площинах вертикальних перетинів піраміди прямі через пари точок на гранях, що належать перетину до їхнього перетинання з основою. Якщо дві з цих прямих паралельні основі, то і третя, і сам перетин також паралельні основі. І в кожної бічній грані треба через точку перетину провести пряму паралельно основі.



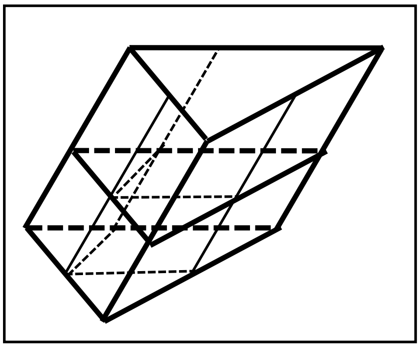


- Проведемо прямі через вершину піраміди і дані точки до перетинання з основою. Далі, проведемо прямі через отримані пари точок основи. Проведемо в отриманих площинах вертикальних перетинів піраміди прямі через пари точок на гранях, що належать перетину, до їхнього перетинання з основою. Якщо знайдуться дві з цих прямих, не паралельні основі, то ми одержимо дві точки на основі, що належать перетину. З'єднаємо їх прямою. Якщо ця пряма перетинає основу в двох точках, то ми маємо ще дві точки на гранях, і подальша побудова не викликає утруднень.

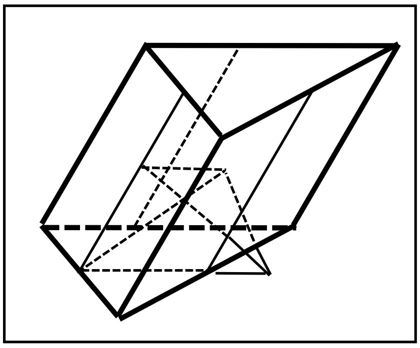


- Проведемо прямі через вершину піраміди і дані точки до перетинання з основою. Далі, проведемо прямі через отримані пари точок основи. Проведемо в отриманих площинах вертикальних перетинів піраміди прямі через пари точок на гранях, що належать перетину до їхнього перетинання з основою. Якщо знайдуться дві з цих прямих, не паралельні основі, то ми одержимо дві точки на основі, що належать перетину. З'єднаємо їх прямою. Якщо ця пряма не перетинає основу, то шукані дві точки ми одержимо на перетинанні цієї прямої з продовженнями сторін основи піраміди.

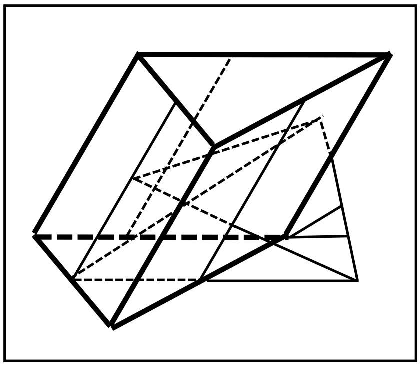
Розглянемо побудову перетину, що проходить через три точки, розташовані на гранях призми.



- Проведемо прямі через точки перетину паралельно ребрам до перетинання з основою. Далі, проведемо прямі через отримані пари точок основи. Далі, проведемо в отриманих площинах вертикальних перетинів призми прямі через пари точок на гранях, що належать перетину, до перетинанню з основою. Якщо дві з цих прямих паралельні основі, те і третя, і перетин також паралельні основі. І в кожній бічній грані через точку перетину проведемо пряму паралельно основі.



- Проведемо прямі через точки перетину паралельно ребрам до перетинання з основою. Далі, проведемо прямі через отримані пари точок основи. Далі, проведемо в отриманих площинах вертикальних перетинів призми прямі через пари точок на гранях, що належать перетину до перетинання з основою. Якщо знайдуться дві з цих прямих, не паралельні основі, то ми одержимо дві точки на основі, що належать перетину. З'єднаємо їх прямою. <u>Якщо ця пряма перетинає основу в двох точках,</u> то ми маємо ще дві точки на гранях, і подальша побудова не викликає утруднень.



- Проведемо прямі через точки перетину паралельно ребрам до перетинання з основою. Далі, проведемо прямі через отримані пари точок основи. Далі, проведемо в отриманих площинах вертикальних перетинів призми прямі через пари точок на гранях, що належать перетину до перетинання з основою. Якщо знайдуться дві з цих прямих, не паралельні основі, то ми одержимо дві точки на основі, що належать перетину. З'єднаємо їх прямою. <u>Якщо ця пряма не перетинає основу</u>, то шукані дві точки ми одержимо на перетинанні цієї прямої з продовженнями сторін основи піраміди.

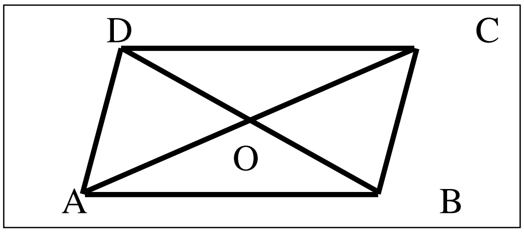
Глава 20. Задачі з геометрії з застосуванням тригонометрії.

Деякі співвідношення між елементами фігур.

1°. Площу паралелограма *ABCD* можна обчислити за такими формулами:

$$S = \frac{AC^2 - BD^2}{4} tgA$$

$$S = \frac{AB^2 - AD^2}{2} tg\angle AOD$$



де O – точка перетину діагоналей AC та BD.

Використовуючи теорему косинусів, виразимо AC^2 з трикутнику ACB та BD^2 з трикутнику ABD, після чого знайдемо різницю першого та другого рівнянь. Тоді отримаємо $AC^2 - BD^2 = 4 \cdot AB \cdot AD \cdot \cos A$, звідки $AB\text{-}AD = \dfrac{AC^2 - BD^2}{4\cos A}$.

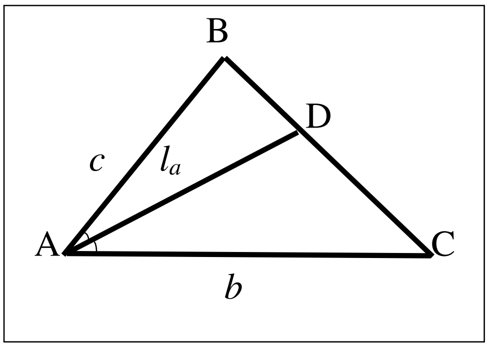
Остаточно, знайдемо:

$$S_{\text{ABCD}} = \frac{1}{2} AB \cdot AD \cdot \sin A = \frac{AC^2 - BD^2}{4} tgA .$$

Аналогічні міркування стосовно трикутників *AOD* і *AOB*, дають можливість встановити справедливість другої формули.

2°. Довжина бісектриси ***AD*** **трикутника.** Нехай відомі довжини *b* і *c* двох сторін трикутника *ABC* і кут *A,* утворений ними. Тоді довжина бісектриси *AD* трикутника, проведеної з вершини цього кута, виражається формулою:

$$l_a = \frac{2bc\cos\frac{A}{2}}{b+c}.$$



Подавши площину ΔABC як суму двох площин: $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ADC} + S_{\Delta ADB}$, отримаємо:

$$\frac{1}{2} be \sin A = \frac{1}{2} l_a b \sin\left(\frac{A}{2}\right) + \frac{1}{2} l_a c \sin\left(\frac{A}{2}\right)$$

або $be \sin\left(\frac{A}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{A}{2}\right) = \frac{1}{2} l_a (b+c) \sin\left(\frac{A}{2}\right)$,

звідки $l_a = \dfrac{2bc\cos(\frac{A}{2})}{b+c}$.

3°. Справедливі такі співвідношення між елементами кулі й уписаного в неї конуса*:*

$l = 2R \sin\alpha$; $l^2 = 2RH$,

де R – радіус кулі, l – довжина утворюючої конуса, H – його висота, α – кут між утворюючою і площиною основи.

Такі ж співвідношення справедливі і для уписаної в кулю піраміди, бічні ребра якої мають довжину l і складають із площиною основи кут α.

4°. Нехай A_1B_1 – бокове ребро піраміди або призми, A_1O – його проекція на площину основи,

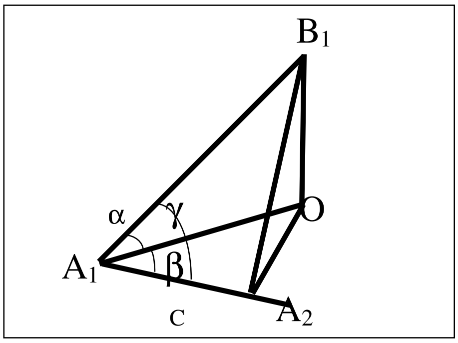
$\angle B_1A_1O = \alpha$,

$\angle OA_1A_2 = \beta$,

$\angle B_1A_1A_2 = \gamma$.

Тоді справедлива рівність:

$\cos\gamma = \cos\alpha \cdot \cos\beta$.



5°. Нехай α – кут нахилу бічного ребра правильної n – кутної піраміди до площини основи,

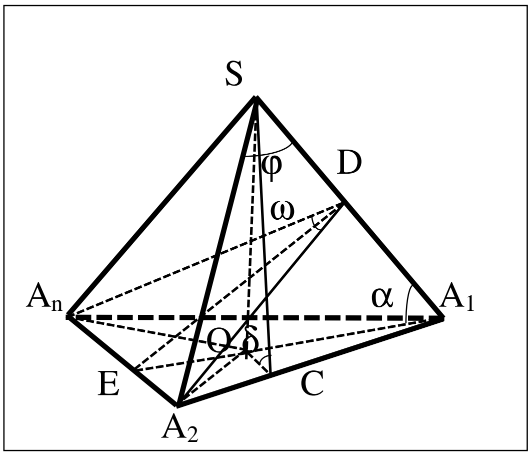
δ – кут нахилу її бічної грані до площини основи;

φ – плоский кут при вершині піраміди,

ω – двогранний кут між суміжними бічними гранями.

Тоді справедливі такі співвідношення:

$$\cos\alpha = \frac{\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}},\ \sin\frac{\omega}{2} = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\frac{\varphi}{2}},\ \cos\delta = \frac{tg\frac{\varphi}{2}}{tg\frac{\pi}{n}}.$$



- ***Формули переходу.***

Серед кутів, що можна розглядати в *правильній піраміді*, найчастіше зустрічаються в задачах:

а) кут нахилу бічного ребра до площини основи піраміди, його розмір позначатимемо буквою α,

б) кут нахилу бічної грані до площини основи β,

в) плоский кут при вершині піраміди γ,

г) двогранний кут при бічному ребрі піраміди δ.

Зауважимо, що перераховані вище кути, які іноді називають **головними,** лежать у різних площинах. Знаючи розмір любого з них, можна визначити розмір всіх інших кутів (іншими словами, тригонометричні функції інших кутів можна висловити через тригонометричні функції одного з них). Ці залежності ми назвемо **формулами переходу.**

Розглянемо правильну *n*-кутну піраміду з позначеними вище кутами α, β, γ і δ. Запишемо формули переходу, що зв'язують ці кути між собою.

Примітка 1. Оскільки для розв'язку многих задач необхідно знати розмір кута нахилу бічного ребра до площини основи, то ми будемо записувати формули переходу в основному до цього кута.

Примітка 2. Умовимося запис «від β до α» читати так: "У правильної (3–х, 4–х або *n*–кутної) піраміді тригонометричну функцію кута α висловити через β". Аналогічно читаються записи: від γ до α, від δ до β і ін.

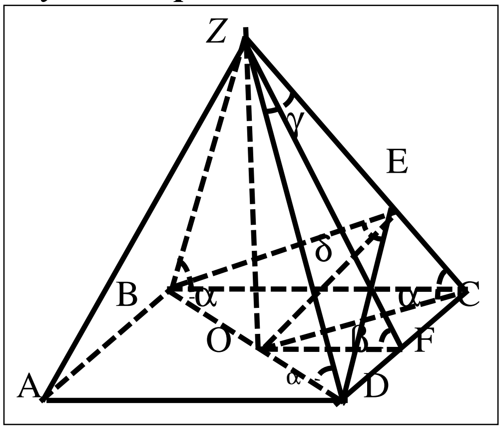
- ***Формули переходу для правильної чотирикутної піраміди***

У правильній чотирикутній піраміді *ZABCD*, як було обумовлено вище, позначимо:

$\angle ZAO = \angle ZBO = \angle ZCO = \angle ZDO = a$,

$\angle CZD = \gamma$, $\angle ZFO = \beta$ и $\angle BED = \delta$.

Відповідні співвідношення опишуть тригонометричні функції кутів α і β через тригонометричні функції всіх інших кутів.



Запишемо формули переходу:

Від β до α ⇒ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{tg}\beta$.

Від γ до α ⇒ $\cos\alpha = \sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Від δ до α ⇒ $\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$.

Від α до β ⇒ $\operatorname{tg}\beta = \sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Від γ до β ⇒ $\cos\beta = tg\frac{\gamma}{2}$.

Від δ до β ⇒ $\sin\beta = \sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}$.

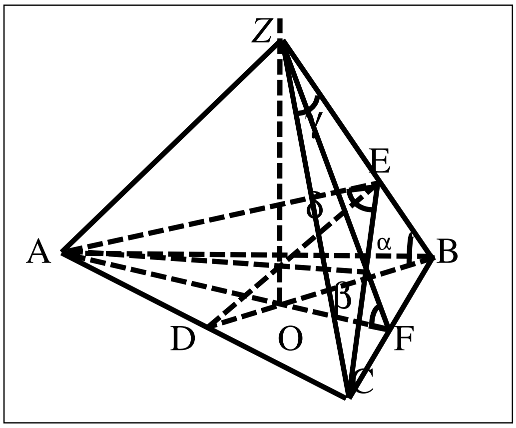
- ***Формули переходу для правильної трикутної піраміди.***

У правильній трикутній піраміді

$\angle ZFO$ – лінійний кут двогранного кута при основі піраміди,

$\angle AEC$ – лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі *ZB*.

Для позначення розмірів головних кутів у правильній трикутній піраміді вживатимемо ті ж букви, якими позначалися розміри цих кутів у правильній чотирикутній піраміді: α, β, γ і δ.



Запишемо формули переходу:

Від β до α ⇒ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta$.

Від γ до α ⇒ $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\gamma}{2}$.

Від δ до α ⇒ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$.

Від α до β ⇒ $\operatorname{tg}\beta = 2\operatorname{tg}\alpha$.

Від γ до β ⇒ $\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}\,tg\frac{\gamma}{2}$.

Від δ до β ⇒ $\sin\beta = \frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}$.

- ***Формули переходу для правильної n –кутної піраміди.***

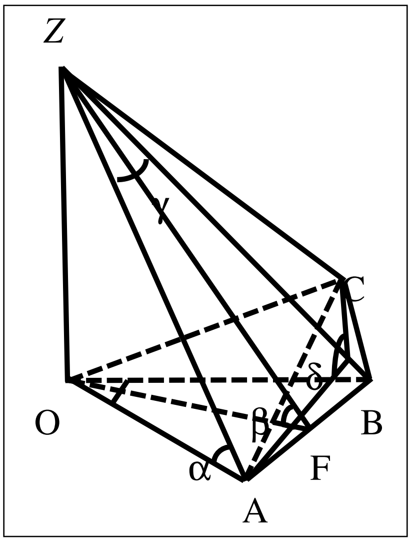
На малюнку зображені дві суміжні секції правильної $n-$ кутної піраміди $ZABC...$. Розміри головних кутів позначені, як і раніше, буквами α, β, γ і δ.

$\angle ZFO$ – лінійний кут двогранного кута при ребрі основи BC. $\angle ZFO = \beta$.

$\angle AEC$ – лінійний кут двогранного кута при бічному ребрі ZB.

Тоді, аналогічно попереднім співвідношенням, ми можемо записати дві групи формул.

Запишемо формули переходу:



Від β до α ⇒ $\operatorname{tg}\alpha = \cos\frac{\pi}{n}\operatorname{tg}\beta$.	Від α до β ⇒ $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{tg\alpha}{\cos\frac{\pi}{n}}$.
Від γ до α ⇒ $\cos\alpha = \dfrac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$.	Від γ до β ⇒ $\cos\beta = tg\frac{\gamma}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.
Від δ до α ⇒ $\sin\alpha = \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}$.	Від δ до β ⇒ $\sin\beta = \dfrac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}$.

Доведення формул переходу викладено у [5].

Глава 21. Варіанти завдань.

Ця глава містить текст завдань вступної співбесіди з математики, що пропонувалися в Київському інституті "Слов'янський університет" (КІСУ) у 1997-1999 роках. Завдання затверджені на засіданні кафедри вищої математики й інформатики КІСУ. Ми щиро дякуємо В.М.Кириленкові, що люб'язно надав текст цих завдань.

Завдання пронумеровані двома цифрами через точку, так, завдання №12.3 є третім завданням 12-го квитка. Перше питання – теоретичне, наступні – задачі.

Ми рекомендуємо для розв’язувати ці завдання самостійно, у міру необхідності звертаючись до опису методів розв'язку з попередніх глав. При виникненні трудностей і для перевірки слушності знайденої відповіді звертайтеся до тої глави, де приводяться розв'язки задач. Не варто сподіватися, що приведені там розв'язки можуть послужити шпаргалкою для абітурієнта, що не вміє вирішувати задачі: адже там наведено стислий опис *методу розв'язку* задачі, а не докладний звіт про *хід розв'язку* задачі, типовий для письмового іспиту.

1.1. Звичайні і десяткові дроби. Дії над ними.

1.2. Розв'язати показове рівняння:
$5^{x+0.5} - 9^{x} = 3^{2.x-2} - 5^{x-05}$.

1.3. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_4 (x^2 + 3x - 4) = \log_2 \sqrt{(x-1)}$.

1.4. Розв'язати нерівність, що містить модуль:
$| 13 - 2x | > | 4x - 9 |$.

1.5. При яких значеннях параметра p рівняння
$(p - 3)\ x^2 - 2px + 5p = 0$
має дійсні корені.

2.1. Алгебраїчні багаточлени і їхні перетворення. Формули скороченого множення.

2.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{(a+x)} + \sqrt{(x-a)} = 1$.

2.3. Розв'язати показове рівняння:
$2^{x} \cdot 5^{x} = 10\,(10^{x-1})^5$.

2.4. Розв'язати нерівність, що містить модуль:
$| x+3 | < | x | + 3$,

2.5. При яких значеннях параметра p рівняння
$x^2 + x + p = 0$
має дійсні корені, що перевищують p.

3.1. Ірраціональні вирази та їх перетворення. Позбавлення від ірраціональності.

3.2. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$\sin^2 2x - \sin(2x - \pi) = 0.25.$

3.3. Розв'язати нерівність:
$x^2(x-1)^4/(x+7)^3(10-x) < 0.$

3.4. Розв'язати логарифмічне рівняння
$\log_7 x - \log_{1/x} 1/7 = 2.$

3.5. Розв'язати нерівність, що містить модуль:
$2x + |x - 3| < |x|.$

4.1. Алгебраїчні рівняння та методи їх розв'язання. Раціональні рівняння.

4.2. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$12\sin x - 4\sqrt{3}\cos(\pi - x) = \sqrt{3}.$

4.3. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$1/(x + \sqrt{1+x^2}) + 1/(x - \sqrt{1+x^2}) = -2.$

4.4. Розв'язати показникове рівняння:
$(3/4)^{x-1}\sqrt{(4/3)^{8/x}} = 9/16.$

4.5. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_{x^2+6x+8}\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) = 0.$

5.1. Ірраціональні рівняння та методи їх розв'язання.

5.2. Розв'язати показникове рівняння:
$2^{x-1} \cdot 5^{x-1} = 0.001 \cdot 10^{2x+5}.$

5.3. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_x 2 \log_{2x} 2 = \log_{4x} 2.$

5.4. На скільки відсотків потрібно збільшити радіус окружності, щоб площа кола збільшилася на 96%.

5.5. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 6, \\ y^{x^2-7x+12} = 1. \end{cases}$$

6.1. Системи алгебраїчних рівнянь та методи їх розв'язання.

6.2. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$\sin^4 x + \cos^4 x = 1.$

6.3. Розв’язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{8x+4} - \sqrt{8x-4} = 2.$

6.4. Розв’язати нерівність, що містить модуль:
$4x - 1 > | x + 1|.$

6.5. Розв’язати показникове рівняння:
$4{\cdot}2^{2x} - 6^x = 18{\cdot}3^{2x}.$

7.1. Ступеневі функції та їхні головні властивості.

7.2. Розв’язати тригонометричне рівняння:
$3\cos^2 x = 5\sin^2 x + \sin 2x.$

7.3. Розв’язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt[3]{76+\sqrt{x}} - \sqrt[3]{76-\sqrt{x}} = 8.$

7.4. Розв’язати показникове рівняння:
$18^{2x} \cdot 2^{-2x} \cdot 3^{x+1} = 3^{x-1}.$

7.5. Розв’язати логарифмічне рівняння:
$\log_{3x+7} (5x+3) + \log_{5x+3} (3x +7) = 2.$

8.1. Показникова функція та її головні властивості.

8.2. Розв’язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt[3]{15+x^2} = 2\sqrt[3]{1+x}\,.$

8.3. Розв’язати логарифмічне рівняння:
$\log_2 \log_4 x = 2.$

8.4. Розв’язати нерівність, що містить модуль:
$| 4 - x | < 3| x | + 1.$

8.5. Розв’язати нерівність:
$(1 - x)^3/(x + 5)/(x - 2)^2 > 0.$

9.1. Логарифмічні функції та їхні головні властивості.

9.2. Довести тотожність:
$\cos^2 (a + b) + \cos^2 (a - b) - \cos 2a \cdot \cos 2b = 1.$

9.3. Розв’язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{7+\sqrt[3]{7+x^2}} = 3.$

9.4. Розв’язати нерівність, що містить модуль:
$| x + 1| - 2 > | x - 1|.$

9.5. Розв’язати нерівність:
$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) > 5.$

10.1. Алгебраїчні нерівності та методи їх розв’язання.

10.2. Розв’язати тригонометричне рівняння:
$\cos 2x = 1 - \sin 2x.$

10.3. Ціну на товар знизили спочатку на 15%, а вдруге – на 10%. Знайти загальне зниження ціни в %.

10.4. Розв’язати показникове рівняння:
$5^x + 5^{x+1} = 2 \cdot 3^{x+1}.$

10.5. Розв’язати логарифмічне рівняння:
$\log_x 4 + 2 \log_2 x = 2.5.$

11.1. Логарифмічні рівняння та нерівності й методи їх розв’язання.

11.2. Розв’язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{(a+x)} + \sqrt{(x-a)} = \sqrt{2}.$

11.3. Розв’язати показникове рівняння:
$2^{x+1} - 2^{x+2} = 12 + 2^{x-1}.$

11.4. Розв’язати нерівність, що містить модуль:
$| x^2 - 1 | > 1 + x^2 + | x |.$

11.5. Розв’язати нерівність:
$(x^2 + 5x + 4)(x - 3) < 0.$

12.1. Кут і тригонометричні функції. Формули приведення.

12.2. Розв’язати показникове рівняння:
$2^x + 2^{x-1} + 2^{x+2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2}.$

12.3. Розв’язати логарифмічне рівняння:
$\log_4 (x + 12) \log_x 2 = 1.$

12.4. Розв’язати нерівність, що містить модуль:
$x^2 - | 5x + 8 | > 0.$

12.5. Розв’язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} 27^x = 9^y, \\ 81^x / 3^y = 243. \end{cases}$$

13.1. Кут і тригонометричні функції. Головні і похідні тригонометричні тотожності.

13.2. Розв’язати показникове рівняння:
$3^x \cdot (1/3)^{x-3} = (1/27)^x.$

13.3. Розв’язати рівняння:
$x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0.$

13.4. Розв’язати логарифмічне рівняння:
$\log_{3x} (3/x) + \log^2_3 x = 1.$

13.5. Розв'язати нерівність, що містить модуль:
$2 + x + | x - 3 | > | x - 2 |$.

14.1. Кут і тригонометричні функції. Формули перетворення для тригонометричних функцій суми і різниці кутів.

14.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{x-3} + 6 = 5 \cdot \sqrt[4]{(x-3)}$.

14.3. Розв'язати показникове рівняння:
$2^{x+1} = 16 \cdot \sqrt{(0.25)^5}$.

14.4. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_{2x} 64 = 3$.

14.5. Розв'язати нерівність, що містить модуль:
$4x - 1 + | x - 1 | > | x + 1 |$.

15.1. Кут і тригонометричні функції. Тригонометричні функції подвійного і половинного кутів.

15.2. Ціну на товар знизили спочатку на 15%, а вдруге – на 50% від першого зниження. Знайти загальне зниження ціни в %.

15.3. Розв'язати рівняння:
$x^3 + x + 1 = 3x^2$.

15.4. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\lg (\sqrt{x+1} + 1)/\lg (\sqrt[3]{x-40}) = 3$.

15.5. Розв'язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ x + y = 13. \end{cases}$$

16.1. Кут і тригонометричні функції. Формули перетворення суми тригонометричних функцій у добуток.

16.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{x + \sqrt{x+11}} + \sqrt{x - \sqrt{x+11}} = 4$.

16.3. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_{0.5} (x - 1) - \log_2 (x + 1) = 1$.

16.4. Розв'язати показникове рівняння:
$13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$.

16.5. Розв'язати нерівність, що містить модуль:
$| x - 1 | > 1 - x + | x |$.

17.1. Кут і тригонометричні функції. Формули перетворення добутку тригонометричних функцій у суму.

17.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{(x+7)}\ /\ \sqrt{x+2}\ =\ 3\ \sqrt{(x-1)}\ /\ \sqrt{(3x-2)}$.

17.3. Розв'язати нерівність:
$(x + 3)^3(x - 2)/(x + 1)^2 > 0$.

17.4. Розв'язати показникове рівняння:
$10^x - 5^{x-1}\cdot 2^{x-2} = 950$.

17.5. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$x^{\lg x-4} = 0.0001$.

18.1. Кут і тригонометричні функції. Перетворення тригонометричних виразів з використанням допоміжного кута.

18.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$2\ \sqrt{(3x+2)}\ -\ \sqrt{(6x)}\ = 2$.

18.3. Розв'язати нерівність:
$(x + 3)(x - 2)^2\ /\ (x + 1) > 0$.

18.4. Розв'язати показникове рівняння:
$4^x - 3^{x-0.5} = 3^{x+0.5} - 2^{2x-1}$.

18.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:
$|\ 2x - 1\ | = 1 - 3x + |\ x\ |$.

19.1. Синус и косінус: головні властивості і графіки.

19.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{(12-3x)}\ -\ \sqrt{(3x+1)}\ = 1$.

19.3. Розв'язати нерівність:
$(x + 3)(x - 2)^2(x - 1) > 0$.

19.4. Розв'язати показникове рівняння:
$7^x + 7^{x-1} = 2^x + 2^{x-1}$.

19.5. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_{1/3} \log_{1/2} x = -1$.

20.1. Тангенс и котангенс: основні властивості і графіки.

20.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{(2x-4)}\ -\ \sqrt{(x+5)}\ = 1$.

20.3. Розв'язати нерівність:
$(x + 3)(x - 2)^2/(x + 1) < 0$.

20.4. Розв'язати показникове рівняння:
$2^{3x} = 512^{1/3x}$.

20.5. Чи зміниться число x, якщо його спочатку збільшити на 10%, а потім отримане число зменшити на 10% ?

21.1. Обернені тригонометричні функції і їхні головні властивості.

21.2. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$\sin 2x + \sin x = \sin (3x/2)$.

21.3. Розв'язати алгебраїчне рівняння:
$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0$.

21.4. Розв'язати показникове рівняння:
$18^{2x} \cdot 2^{-2x} \cdot 3^{x+1} = 3^{x-1}$.

21.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:
$|\, x \,| - |\, x - 2 \,| = 2$.

22.1. Тригонометричні рівняння з функціями одного аргументу.

22.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{(25 + \sqrt{x^2 + 3})} = 3$.

22.3. Розв'язати нерівність:
$(x^2 - 5x + 4)/(x^2 - 4) < 1$.

22.4. Розв'язати показникове рівняння:
$13^{2x} - 6 \cdot 13^x + 5 = 0$.

22.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:
$|\, x + 2 \,| = 3x - |\, x \,|$.

23.1. Тригонометричні рівняння з функціями різних аргументів.

23.2. Розв'язати алгебраїчне рівняння:
$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0$.

23.3. Розв'язати нерівність:
$(x - 4)/(x - 1) < 1$.

23.4. Розв'язати показникове рівняння:
$\sqrt{9^{x-1} - 0.5} = 4\sqrt{3}$.

23.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:
$|\, x + 2 \,| = 2x$.

24.1. Тригонометричні нерівності.

24.2. Розв'язати алгебраїчне рівняння:
$6x^3 + 13x^2 + x - 2 = 0$.

24.3. Розв'язати нерівність:
$(x - 4)/(x + 1) < 1$.

24.4. Розв'язати показникове рівняння:

$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250.$

24.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:
$| x + 2 | = 2| x |.$

25.1. Паралельні прямі і прямі що перетинаються. Ознаки рівнобіжності прямих.

25.2. Розв'язати алгебраїчне рівняння:
$x^3 + 13x^2 + x - 62 = 0.$

25.3. Розв'язати нерівність:
$(x - 4)(x + 1) < 1.$

25.4. Розв'язати показникове рівняння:
$4^x + 6^x = 9^x.$

25.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:
$| x + 2 | = 2| x - 5 |.$

26.1. Трикутники. Головні співвідношення між елементами трикутника.

26.2. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$2(\cos x - \sin x)/\sin 2x = (\text{ctg } x - \text{tg } x)/(\cos x - \sin x).$

26.3. Розв'язати нерівність:
$(x - 4)(x + 1) < 0.$

26.4. Розв'язати показникове рівняння:
$6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x}.$

26.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:
$| x - 2 | = 2| x + 5 |.$

27.1. Трикутники. Подібні трикутники й ознаки подоби.

27.2. Перевірити рівність:
$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0.25.$

27.3. Розв'язати нерівність:
$(x - 4)/(x - 1) > 1.$

27.4. Розв'язати показникове рівняння:
$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250.$

27.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:
$| x + 2 | = 2| x - 4 |.$

28.1. Площа трикутника.

28.2. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$\cos x \cdot \cos 2x = 0.5 \cdot \cos 3x.$

28.3. Розв'язати нерівність:

$(x-4)(x-1) > 1.$

28.4. Розв'язати показникове рівняння:

$9^{x(x\text{-}1)\text{-}0.5} = \sqrt{3}.$

28.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:

$| x + 2 | = 2x + 1.$

29.1. Чотирикутники та їхні головні властивості.

29.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt{25+\sqrt{x^2+3}} = 3.$

29.3. Розв'язати нерівність:

$(x^2 - 5^x + 4)/(x^2 - 4) \le 1.$

29.4. Розв'язати показникове рівняння:

$13^{2x} - 6{\cdot}13^x + 5 = 0.$

29.5. Розв'язати нерівність:

$(x^2 - 2x - 8)(x - 2) > 0.$

30.1. Окружність і коло та їхні властивості. Уписана й описана окружності.

30.2. Розв'язати тригонометричне рівняння:

$\sin 2x + \sin x = \cos (x/2).$

30.3. Розв'язати алгебраїчне рівняння:

$x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0.$

30.4. Розв'язати показникове рівняння:

$18^{2x} \cdot 2^{-2x} \cdot 3^{x+1} = 3^{x-1}.$

30.5. Після того, як число x зменшили на 10%, а потім залишок – ще на 20% , одержали 230. Знайти вихідне число.

31.1. Уписані й описані багатокутники. Співвідношення між їхніми елементами.

31.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt{(2x-4)} + \sqrt{(x+5)} = 5.$

31.3. Розв'язати нерівність:

$(x + 3)(x^2 + \mathrm{x} + 2)(x + 1) < 0.$

31.4. Розв'язати показникове рівняння:

$2^{3x} = 64^{1/2x}.$

31.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:

$| x + 2 | = 2x.$

32.1. Пряма і площина в просторі. Взаємне розташування прямих і площин.

32.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt{(3x+1)} + \sqrt{(12-3x)} = 5.$

32.3. Розв'язати нерівність:
$(x + 3)(x - 2)(x - 1)^2 > 0.$

32.4. Розв'язати показникове рівняння:
$3{\cdot}2^x = 2 + 2^{2x}.$

32.5. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_{1/2} \log_{1/3} x = -1.$

33.1. Об'ємний кут. Двогранний і багатогранний кути. Вимір кутів.

33.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$2{\cdot}\sqrt{(3x+2)} + \sqrt{(6x)} = 6.$

33.3. Розв'язати нерівність:
$(x + 3)/(x + 1) < 0.$

33.4. Розв'язати показникове рівняння:
$4^x - 3^x = 3^{x-1} + 2^x.$

33.5. Розв'язати рівняння, що містить модуль:
$| 2x - 1 | = 1 + | x |.$

34.1. Чотиригранники: призма, паралелепіпед.

34.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{(x+7)} + \sqrt{(x-2)} = 5.$

34.3. Розв'язати нерівність:
$(x + 3)^{x-2} < 0.$

34.4. Розв'язати показникове рівняння:
$0.2 \cdot 10^x - 5^x \cdot 2^{x-2} = 190.$

34.5. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$x^{\lg x-4} = 0.001.$

35.1. Піраміда, зрізана піраміда.

35.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:
$\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 2.$

35.3. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_{0.5} (x - 1) - \log_2 (x + 1) = 2.$

35.4. Розв'язати показникове рівняння:
$13^{2x} - 2{\cdot}13^x + 1 = 0.$

35.5. Розв'язати нерівність, що містить модуль:
$| x - 1 | > 1 + | x |.$

36.1. Циліндр.

36.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt{2-\sqrt{x}\,/\,(2-x)} = 2/\sqrt{2-x}$.

36.3. Розв'язати рівняння:

$x^3 + x + 1 = 3x^2$.

36.4. Розв'язати логарифмічне рівняння:

lg ($\sqrt{(x+1)}$ + 1)/lg ($\sqrt[3]{40-x}$) = 3.

36.5. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 5, \\ x + y = 13. \end{cases}$$

37.1. Конус і зрізаний конус. Конічні перетини.

37.2. Розв'язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt{(x-3)} - 6 + \sqrt[4]{x-3} = 0$.

37.3. Розв'язати показникове рівняння:

$2^{x\text{-}1} = 4\cdot\sqrt{(0.25)^5}$.

37.4. Розв'язати логарифмічне рівняння:

$\log_{2x} 16 = 2$.

37.5. Розв'язати нерівність, що містить модуль:

$4x - |\,x - 1\,| > |\,x + 1|$.

38.1. Сфера та куля.

38.2. Розв'язати показникове рівняння:

$3^{3\text{-}x} = (1/27)^x$.

38.3. Розв'язати рівняння:

$x^3 + 9x^2 + 11x + 3 = 0$.

38.4. Розв'язати логарифмічне рівняння:

$\log_{3x} (3/x) + \log^2_3 x = 1$.

38.5. Розв'язати нерівність, що містить модуль:

$x + |\,x - 3\,| > |\,x - 2\,|$.

39.1. Ірраціональні нерівності і методи їхнього розв'язку.

39.2. Розв'язати показникове рівняння:

$2^x + 2^{x\text{-}1} = 7^x + 7^{x\text{-}1}$.

39.3. Розв'язати логарифмічне рівняння:

$\log_2 (x + 12) \log_x 2 = 2$.

39.4. Розв'язати нерівність, що містить модуль:

$x - |\,5x + 8\,| > 0$.

39.5. Розв’язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 27^x = 9^y, \\ 81^x / 3^y = 243. \end{cases}$$

40.1. Системи нерівностей і методи їхнього розв'язку.

40.2. Розв’язати тригонометричне рівняння:

$\cos 2x = 1 + \sin 2x.$

40.3. Розв’язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt{(3x+5)} - \sqrt{3x} = \sqrt{(4x+5)}.$

40.4. Розв’язати показникове рівняння:

$5^x + 5^{x-1} = 2 \cdot 3^x.$

40.5. Розв’язати логарифмічне рівняння:

$\log_x 4 + \log_2 x^2 = 2.5.$

41.1. Арифметична прогресія.

41.2. Розв’язати рівняння:

$\sin 3x \cdot \sin 7x = \sin x \cdot \sin 9x.$

41.3. Розв’язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt{7 + \sqrt{7 + x^2}} = 3.$

41.4. Розв’язати нерівність, що містить модуль:

$| x + 1| - \mathrm{x} > | x - 1|.$

41.5. Розв’язати нерівність:

$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) < 5.$

42.1. Геометрична прогресія.

42.2. Розв’язати тригонометричне рівняння:

$\cos^2 x = 5\sin^2 x + \sin 2x.$

42.3. Розв’язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt[3]{76 + \sqrt{x}} - \sqrt[3]{76 - \sqrt{x}} = 8.$

42.4. Розв’язати показникове рівняння:

$18^{2x} \cdot 2^{-2x} \cdot 3^{x+1} = 3^{x-1}.$

42.5. Розв’язати логарифмічне рівняння:

$\log_{3x+7} (5x + 3) + \log_{5x+3} (3x + 7) = 2.$

43.1. Алгебраїчні рівняння і нерівності, що містять модуль.

43.2. Розв’язати тригонометричне рівняння:

$\sin^4 x - \cos^4 x = 1.$

43.3. Розв’язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt{(12x+4)} - \sqrt{(8x-4)} = 2.$

43.4. Розв’язати нерівність, що містить модуль:
$|4x - 1| > |x + 1|.$

43.5. Розв’язати показникове рівняння:
$2^{2x} - 6^{x} = 3^{2x}.$

44.1. Відрізок. Дії з відрізками. Розтин відрізка в заданому, крайньому і середньому відношенні.

44.2. Розв’язати показникове рівняння:
$2^{x} \cdot 5^{x} = 0.01 \cdot 10^{2x+5}.$

44.3. Розв’язати логарифмічне рівняння:
$\log_{x} 2 \log_{2x} 4 = \log_{4x} 4.$

44.4. Розв’язати нерівність, що містить модуль:
$2|x| < x + |x + 1|.$

44.5. Розв’язати систему рівнянь:
$$\begin{cases} x + y = 6, \\ y^{x^2-7x+12} = 1. \end{cases}$$

45.1. Розв'язок прямокутних трикутників.

45.2. Розв’язати тригонометричне рівняння:
$\sin^2 2x + \sin(2x - \pi) = 1.$

45.3. Розв’язати нерівність:
$(x + 7)^3(10 - x) < 0.$

45.4. Розв’язати логарифмічне рівняння:
$\log_7 x - \log_{1/x}(1/7) = 2.$

45.5. Початкова собівартість продукції знизилася за перший місяць на 8%, за другий – на 5%, за третій – на 10%. Знайти досягнуте зниження початкової собівартості продукції.

46.1. Розв'язок прямокутних трикутників.

46.2. Розв’язати ірраціональне рівняння:

$\sqrt{(a-x)} - \sqrt{(x+a)} = 0.$

46.3. Розв’язати показникове рівняння:
$2^{x} \cdot 5^{x} = 0.001 \cdot (10^{x-1})^5.$

46.4. Розв’язати нерівність, що містить модуль:
$|x + 3| < |x| + 3x.$

46.5. При яких значеннях параметра *p* рівняння

$x^2 + x + p = 0$
має дійсні корені.

47.1. Поняття про функціональну залежність. Функція й аргумент. Область визначення функції й область припустимих значень аргументу.

47.2. Розв'язати нерівність:
$\sqrt{x^2 - 2x} > 4 - x.$

47.3. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$\mathrm{tg}\, x - \mathrm{tg}\, 2x = \sin x.$

47.4. Розв'язати рівняння:

$81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$

47.5. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_{x^2+6x+8} \log_{2x^2+2x-5}(x^2 - 2x) = 0.$

48.1. Відсотки. Складні відсотки та їхнє обчислення.

48.2. Розв'язати нерівність:
$\sqrt{x^2 - 2x} < 4 - x.$

48.3. Розв'язати тригонометричне рівняння:
$\cos 4x - 2\cos^2 x = 1.$

48.4. Розв'язати рівняння:
$(1/4)^{(4-x)/2} = 8^x.$

48.5. Розв'язати логарифмічне рівняння:
$\log_{x^2+6x+5}\log_{2x^2+2x-5}(x^2 - 2x) = 0.$

Глава 22. Розв'язки задач, що включені у білети для співбесіди з математики.

Ця глава містить розв'язки задач, що у різні роки були подані в білетах для співбесіди в Слов'янському університеті. Умови задач подано у попередній главі. Тут *не* наведено відповіді на перше *теоретичне* питання. Ці відповіді варто шукати в звичайних підручниках або довідниках для абітурієнтів. Безумовно, ця глава корисна не тільки абітурієнтам Слов'янського університету, оскільки *схожі* задачі Вам запропонують і в інших вузах.

Достатня кількість наявних прикладів дозволила в деяких випадках навести нестандартні методи розв'язку задач, що дозволяють найпростішим і витонченим шляхом прийти до розв'язку саме *цієї* задачі. Вони будуть особливо цікаві найдопитливішим абітурієнтам. Звісно ж, використання стандартних методів розв'язку ніхто не вважатиме помилковим.

Оскільки багато задач є однотипними, пояснення розв'язку тут дається не дуже докладне, але, усе ж, досить повне. Присутні посилання на класифікацію і типові прийоми розв'язку задач, що наведені в першому розділі. Приблизно такого ступеня детальності викладення очікує від Вас викладач на співбесіді, тобто в ході *контролю* Ваших знань. За докладнішим поясненням ходу розв'язку *типових* задач, що необхідний Вам при *вивченні* відповідної теми, звертайтеся до першого розділу.

Зробимо деякі пояснення щодо *оформлення* тексту даної глави.

- Розв'язки нумеруються винятково усередині глави.
- Перша цифра нумерації відповідає номеру квитка, а друга – номеру завдання в ньому. Тому номер розв'язку задач кожного білета починається з «2» (у цій главі не приведена відповідь на теоретичне питання!).
- Оскільки кожний розв'язок ілюструється не більш ніж одним малюнком, що розташований безпосередньо в тексті, малюнки *не* нумеруються.

Звертаємо увагу абітурієнта, що на співбесіді, на відміну від письмового іспиту, від Вас потрібно не стільки *розв'язати* запропоновані задачі, скільки продемонструвати, що Ваші знання математики *достатні* для подальшого навчання. Тому не варто розпачувати, якщо якась задача, на Ваш погляд, розв'язку не має, або Ви не можете його знайти. Спробуйте *показати*, чому розв'язку бути не може, або пояснити викладачу, як Ви *намагалися* одержати розв'язок.

1.2. Розв'язання показникового рівняння ведеться за інструкціями для конструкцій першого типу, в яких показники степеня відрізняються на число.

$5^{x+0.5} - 9^x = 3^{2x-2} - 5^{x-0.5} \Leftrightarrow 5^{0.5}\cdot 5^x + 5^{-0.5}\cdot 5^x = 9^x + 9^{-1}\cdot 9^x \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (5^{0.5} + 5^{-0.5})\cdot 5^x = (1 + 9^{-1})\cdot 9^x \Leftrightarrow \frac{5^{0.5}+5^{-0.5}}{1+9^{-1}} = \frac{9^x}{5^x} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^x = \frac{\frac{5+1}{\sqrt{5}}}{\frac{1+9}{9}} \Leftrightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^x = \frac{27}{5\sqrt{5}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{9}{5}\right)^x = \left(\frac{9}{5}\right)^{1.5} \Leftrightarrow x = 1.5.$$

1.3. Розв'язання логарифмічного рівняння ведеться за інструкціями для конструкцій першого типу, в яких усі логарифми у першому степені.

$\log_4 (x^2 + 3x - 4) = \log_2 \sqrt{(x-1)} \Leftrightarrow \log_4 (x^2 + 3x - 4) = \log_4 (x - 1) \Rightarrow$

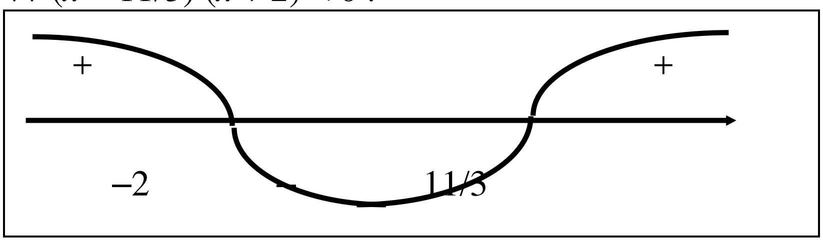
$$\Rightarrow x^2 + 3x - 4 = x - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -3, \end{array}\right.$$

оскільки обидва розв'язки не належать області визначення вихідних логарифмічних функцій, то отримаємо відсутність розв'язку: $x \in \varnothing$.

1.4. Розв'язання нерівності, що містить модуль, у цьому випадку легко замінити розв'язанням звичайної нерівності та піднесенням до квадрату, що ми у цьому випадку можемо зробити, оскільки обидві частини нерівності невід'ємні.

$| 13 - 2x | > | 4x - 9 | \Leftrightarrow (13 - 2x)^2 > (4x - 9)^2 \Leftrightarrow (13 - 2x)^2 - (4x - 9)^2 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow [(13 - 2x) - (4x - 9)]\cdot[(13 - 2x)^2 + (4x - 9)] > 0 \Leftrightarrow (-6x + 22)\cdot(2x + 4) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 11/3)\cdot(x + 2) < 0$.



Відповідь: $-2 < x < 11/3$.

1.5. Вирішення питання, при яких значеннях параметру p рівняння $(p - 3)\, x^2 - 2px + 5p = 0$ має дійсні корені, вирішується по-різному у двох наступних випадках, в залежності, чи є рівняння квадратним.

В першому випадку:

$$\begin{cases} p - 3 = 0, \\ (p-3)x^2 - 2px + 5p = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3, \\ -6x + 15 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3, \\ x = 2.5, \end{cases}$$ розв'язок є і він дійсний.

В другому дійсні корені наявні, якщо дискримінант невід'ємний:

$$\begin{cases} p-3\neq 0, \\ 4p^2-20p(p-3)\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\neq 3, \\ p^2-5p^2+15p\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\neq 3, \\ 4p(p-3.75)\leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p\neq 3, \\ 0\leq p\leq 3.75, \end{cases}$$

Об’єднання рішень дає розв’язок: $0 \leq p \leq 3.75$.

2.2. Розв’язання ірраціонального рівняння з параметрами ведеться за стандартною схемою виключно еквівалентними переходами з підстановкою отриманого результату в усі умови:

$$\sqrt{(a+x)} + \sqrt{(x-a)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(a+x)} = 1 - \sqrt{(x-a)} \Leftrightarrow \begin{cases} a+x = 1-2\sqrt{x-a}+(x-a), \\ 1-\sqrt{x-a}\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x-a} = 1-2a, \\ 1-\sqrt{x-a}\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-a=(0.5-a)^2, \\ 1-2a\geq 0, \\ 1-(0.5-a)\geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a^2+0.25, \\ a\leq 0.5, \\ a\geq -0.5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=a^2+0.5, \\ -0.5\leq a\leq 0.5. \end{cases}$$

Відповідь подається з розподілом значень параметру по числовій осі:

$a < -0.5$	– нема рішень;		$a\in\,]-\infty; -0.5[$	– нема рішень;
$-0.5 \leq a \leq 0.5$	– $x = a^2 + 0.5$;	або:	$a\in[-0.5; 0.5]$	– $x = a^2 + 0.5$;
$a > 0.5$	– нема рішень;		$a\in\,]0.5;+\infty[$	– нема рішень.

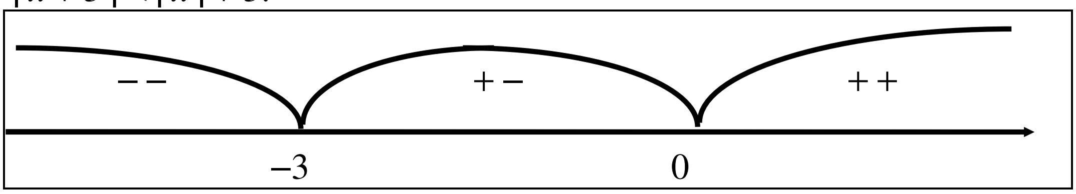
Обидва наведені способи подання рішення еквівалентні.

2.3. Розв’язання показникового рівняння зводиться до простого прирівнювання показників степеня при однаковій основі:

$2^x\cdot 5^x = 10\,(10^{x-1})^5 \Leftrightarrow 10^x = 10^{1+5x-5} \Leftrightarrow x = 5x-4 \Leftrightarrow 4x = 4 \Leftrightarrow x = 1.$

2.4. Розв’язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$|x+3| < |x| + 3.$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-3.\\ -x-3<-x+3.\end{cases}\\ \begin{cases}-3\le x\le 0,\\ x+3<-x+3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ x+3<x+3,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-3,\\ \begin{cases}-3\le x\le 0,\\ x<0,\end{cases}\\ x\in\varnothing,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-3,\\ -3\le x<0,\end{array}\right. \Leftrightarrow x<0.$$

2.5. Питання, при яких значеннях параметру p рівняння $x^2 + x + p = 0$ має дійсні корені, що більші за p , звичайно вирішується методом парабол. Але в цьому випадку простішим є прямий розв'язок: знаходяться корені $x_{1,2} = \frac{1}{2} \pm\sqrt{\frac{1}{4}-p}$ і порівнюються з p. Нас цікавить тільки менший корінь, оскільки, якщо він більший за p , то другий і також. Умова, що менший корінь перевищує p , задається нерівністю, розв'язання якої й дає відповідь:

$$-\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-p} > p \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{4}-p} < -p-\frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-p-\frac{1}{2}\ge 0,\\ \frac{1}{4}-p\ge 0,\\ \frac{1}{4}-p<p^2+p+\frac{1}{4},\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p\le -\frac{1}{2},\\ p\le\frac{1}{4},\\ p^2+2p>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p\le -\frac{1}{2},\\ p(p+2)>0,\end{cases} \Leftrightarrow p<-2.$$

3.2. Розв'язок тригонометричного рівняння ведеться шляхом зведення до елементарного рівняння за допомогою розв'язання квадратного рівняння:

$$\sin^2 2x - \sin(2x-\pi) = 0.25 \Leftrightarrow \sin^2 2x + \sin 2x = 0.25 \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}.$$

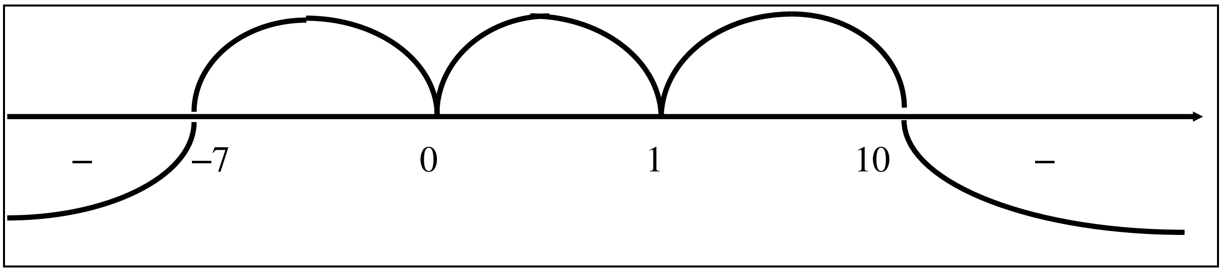
З двох коренів підходить тільки один, бо $\sin 2x \ge -1$. Залишивши тільки другий корінь, отримаємо:

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \Leftrightarrow 2x = (-1)^k\cdot\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)+\pi k,\ k\in \mathrm{Z}. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^k\cdot\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)+\frac{\pi k}{2},\ k\in \mathrm{Z}.$$

3.3. Розв'язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів:

$$x^2(x-1)^4/(x+7)^3(10-x) < 0.$$



Відповідь: $(x < -7) \bigcup (x > 10)$.

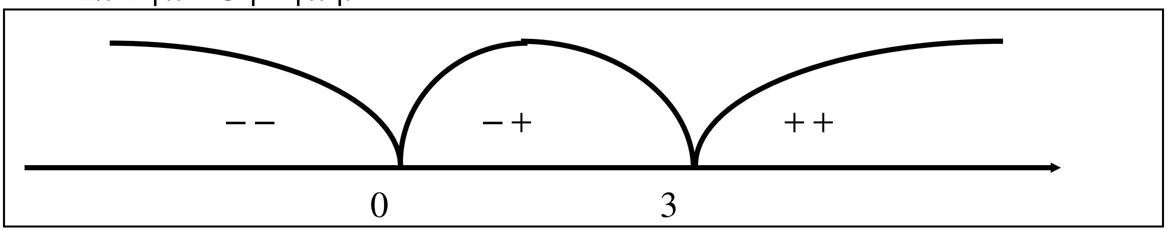
3.4. Розв'язання логарифмічного рівняння починаємо з приведення до одної основи 7. Далі дії стандартні за другою схемою, з заміною $y = \log_7 x$, оскільки присутній логарифм у мінус першому степені:

$\log_7 x - \log_{1/x} 1/7 = 2 \Leftrightarrow \log_7 x - \log^{-1}_7 x = 2 \Leftrightarrow \log^2_7 x - 2\log_7 x - 1 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \log_7 x = 1 \pm \sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7^{1+\sqrt{2}}, \\ x = 7^{1-\sqrt{2}}. \end{array}\right.$

3.5. Розв'язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$2x + |x - 3| < |x|$.



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ 2x + 3 - x < -x, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 2x + 3 - x < x, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ 2x + x - 3 < x, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ x < -1.5, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 3, \\ 3 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 3, \\ x < 1.5, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -1.5, \\ x \in \varnothing, \\ x \in \varnothing, \end{array}\right. \Leftrightarrow x < -1.5.$$

4.2. Розв'язання тригонометричного рівняння виконується шляхом його зведення до елементарного рівняння за допомогою формули додавання гармонійних коливань:

$12 \sin x - 4\sqrt{3} \cos(\pi - x) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x\cdot\cos\dfrac{\pi}{6} + \cos x\cdot\sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow \sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{8} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x + \dfrac{\pi}{6} = (-1)^k\cdot\arcsin\left(\dfrac{1}{8}\right) + \pi k,\ k\in Z. \Leftrightarrow x = (-1)^k\cdot\arcsin\left(\dfrac{1}{8}\right) - \dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k\in Z.$

4.3. Розв’язання ірраціонального рівняння легко знаходиться простим приведенням до спільного знаменника:

$1/(x+\sqrt{1+x^2}) + 1/(x-\sqrt{1+x^2}) = -2 \Leftrightarrow \dfrac{x-\sqrt{1+x^2}+x+\sqrt{1+x^2}}{x^2-(1+x^2)} = -2 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{-1} = -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1.$

4.4. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників при однаковій основі:

$(3/4)^{x-1}\sqrt{(4/3)^{8/x}} = 9/16 \Leftrightarrow (3/4)^{x-1}\cdot(3/4)^{-4/x} = (3/4)^2 \Leftrightarrow x-1-4/x = 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=4. \end{array}\right.$

4.5. Розв’язання логарифмічного рівняння починаємо з послідовного застосування визначення логарифма (тобто заміною рівняння $\log_a b = c$ на $b = a^c$) з наступною перевіркою отриманих коренів на належність області визначення логарифмічних функцій:

$\log_{x^2+6x+8}\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) = 0 \Rightarrow \log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x) = 1 \Rightarrow (x^2-2x) = 2x^2+2x+3$
$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=3. \end{array}\right.$ Перший розв’язок не належить області визначення другого підлогарифмічного виразу. Другий належить областям визначення логарифмів і підлогарифмічних виразів і тому є розв’язком. Відповідь: $x = 3$.

5.2. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників при однаковій основі:

$2^{x-1}\cdot 5^{x-1} = 0.001\cdot 10^{2x+5} \Leftrightarrow 10^{x-1} = 10^{-3+2x+5} \Leftrightarrow x-1 = 2x+2 \Leftrightarrow x = -3.$

5.3. Розв’язання логарифмічного рівняння починаємо з приведення до спільної основи 2 і продовжуємо стандартно за другою схемою за допомогою заміни $y = \log_2 x$, оскільки присутні логарифми в знаменнику:

$\log_x 2\,\log_{2x} 2 = \log_{4x} 2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x}\cdot\dfrac{1}{1+\log_2 x} = \dfrac{1}{2+\log_2 x}$. Виконавши заміну $y = \log_2 x$, отримаємо: $\dfrac{1}{y(y+1)} = \dfrac{1}{2+y} \Rightarrow 2 + y = y^2 + y \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$. Перевіркою впевнимося, що обидва ці корені підходять. Зворотною заміною отримаємо x :

$$\log_2 x = \pm\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2^{\sqrt{2}}, \\ x = 2^{-\sqrt{2}}. \end{array}\right.$$

5.4. Вирішення питання, на скільки відсотків необхідно збільшити радіус окружності, щоб площа кола збільшилась на 96%, ведеться шляхом перерахування величин радіусу і площі кола: якщо площа кола складає 1.96 від початкової, то радіус складе $\sqrt{1.96} = 1.4$ від початкового. Отже, радіус необхідно збільшити на 40%.

5.5. Розв'язання цієї системи рівнянь найпростіше робити починаючи з другого рівняння. Щоб уникнути складностей розгляду ситуацій, коли $y \le 0$, найчастіше рівняння підносять у квадрат і усі складності переносять на етап перевірки.

$$\begin{cases} x + y = 6, \\ y^{x^2-7x+12} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6, \\ (y^2)^{x^2-7x+12} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6, \\ \lg[(y^2)^{x^2-7x+12}] = \lg 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 6, \\ (x^2 - 7x + 12)\lg(y^2) = 0, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 6, \\ y^2 = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 6, \\ x^2 - 7x + 12 = 0, \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 5, \\ y = 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x = 7, \\ y = -1, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3, \\ x = 3, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2, \\ x = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Перевіркою переконуємося, що усі рішення підходять, в тому числі й найпідозріліше з них $\begin{cases} x = 7, \\ y = -1, \end{cases}$ бо $(-1)^{12} = 1$ є вірною тотожністю.

6.2. Розв'язання тригонометричного рівняння ведеться за допомогою зниження степеня:

$\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 1 - 0.5\sin^2 2x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin^2 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \pi k,\ k \in \mathrm{Z}. \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}\pi k,\ k \in \mathrm{Z}.$

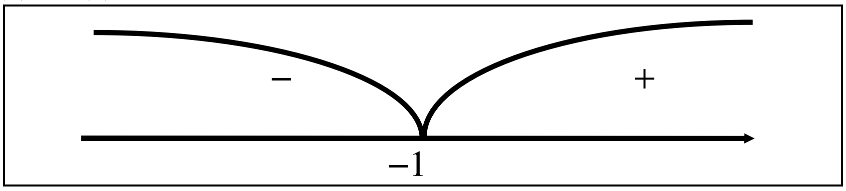
6.3. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:

$\sqrt{8x+4} - \sqrt{8x-4} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{8x+4} = \sqrt{8x-4} + 2 \Leftrightarrow 8x + 4 = 8x - 4 + 4\sqrt{8x-4} + 4$
$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\sqrt{8x-4} = 4 \Leftrightarrow 8x - 4 = 1 \Leftrightarrow x = 5/8.$

6.4. Розв'язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$4x - 1 > |x + 1|.$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -1,\\ 4x-1 > -x-1,\end{cases}\\ \begin{cases}x > -1,\\ 4x-1 > x+1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \le -1,\\ x > 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x > -1,\\ 3x > 2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x \in \varnothing,\\ x > 2/3,\end{array}\right. \Leftrightarrow x > 2/3.$$

6.5. Розв'язання показникового рівняння полягає в діленні на один з квадратів з подальшим розв`язком квадратного рівняння (конструкція другого типу):

$$4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x} \Leftrightarrow \frac{4 \cdot 2^{2x}}{3^{2x}} - \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} - 18 = 0 \Leftrightarrow 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 18 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{1 \pm 17}{8} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow x = -2.$$

7.2. Розв'язання тригонометричного рівняння ведеться діленням на $\cos^2 x$ (це можна робити, оскільки корені $\cos x$ наперед відомо не є коренями даного рівняння, що легко перевірити підстановкою) з подальшим розв'язанням квадратного рівняння відносно $\mathrm{tg}\,x$:

$$3\cos^2 x = 5\sin^2 x + \sin 2x \Leftrightarrow 3 = 5\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 2\frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow 5\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}\, x - 3 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tgx = -1,\\ tgx = \dfrac{3}{5},\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathrm{Z},\\ x = arctg(0.6) + \pi n, n \in \mathrm{Z}.\end{array}\right.$$

7.3. Розв'язання ірраціонального рівняння з коренями третього степеня стандартно ведеться піднесенням в куб за формулою $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ з подальшою заміною $(a + b)$ з умови:

$$\sqrt[3]{76+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{76-\sqrt{x}} = 8 \Leftrightarrow (\sqrt[3]{76+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{76-\sqrt{x}})^3 = 8^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (76 + \sqrt{x}) + (76 - \sqrt{x}) + 3 \cdot \sqrt[3]{76+\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{76-\sqrt{x}}\, (\sqrt[3]{76+\sqrt{x}} + \sqrt[3]{76-\sqrt{x}}) = 8^3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 152 + 3 \cdot \sqrt[3]{76+\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{76-\sqrt{x}} \cdot 8 = 8^3 \Leftrightarrow 152 + 3 \cdot 8 \cdot \sqrt[3]{76^2 - x} = 512 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 24 \cdot \sqrt[3]{76^2 - x} = 360 \Leftrightarrow \sqrt[3]{76^2 - x} = 15 \Leftrightarrow (5776 - x) = 3375 \Leftrightarrow x = 2401 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \sqrt{x} = 49$. Як завжди при використанні піднесення до степеня (у цій задачі – в куб), необхідно виконати перевірку: $\sqrt[3]{125} + \sqrt[3]{27} = 8$.

7.4. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників при однаковій основі:
$1\ 8^{2x} \cdot 2^{-2x} \cdot 3^{x+1} = 3^{x-1} \Leftrightarrow 9^{2x} \cdot 3^{x+1} = 3^{x-1} \Leftrightarrow 3^{4x+x+1} = 3^{x-1} \Leftrightarrow 5x + 1 = x - 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x = -2 \Leftrightarrow x = -0.5$.

7.5. Розв’язання логарифмічного рівняння легко знаходиться після подання його лівої частини у вигляді суми двох взаємно-обернених виразів і запровадження заміни:
$\log_{3x+7} (5x + 3) + \log_{5x+3} (3x + 7) = 2 \Leftrightarrow \log_{3x+7} (5x + 3) + \log^{-1}{}_{3x+7} (5x + 3) = 2$.
Заміною $\log_{3x+7} (5x + 3) = a$ отримаємо: $a + a^{-1} = 2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$, звідки зворотна заміна дає остаточний результат: $\log_{3x+7} (5x + 3) = 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow 5x + 3 = 3x + 7 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2$. Коректність розв’язку перевіркою підтверджується.

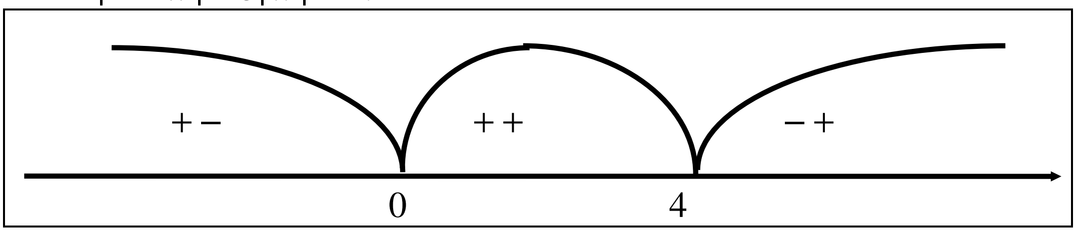
8.2. Розв’язання ірраціонального рівняння досягається простим піднесенням в куб обох його частин:

$$\sqrt[3]{15 + x^2} = 2\sqrt[3]{1 + x} \Leftrightarrow 15 + x^2 = 8(1 + x) \Leftrightarrow x^2 - 8x + 7 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 7. \end{array}\right.$$

8.3. Розв’язання логарифмічного рівняння досягається послідовним застосуванням визначення логарифму:
$\log_2 \log_4 x = 2 \Leftrightarrow \log_4 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$.

8.4. Розв’язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

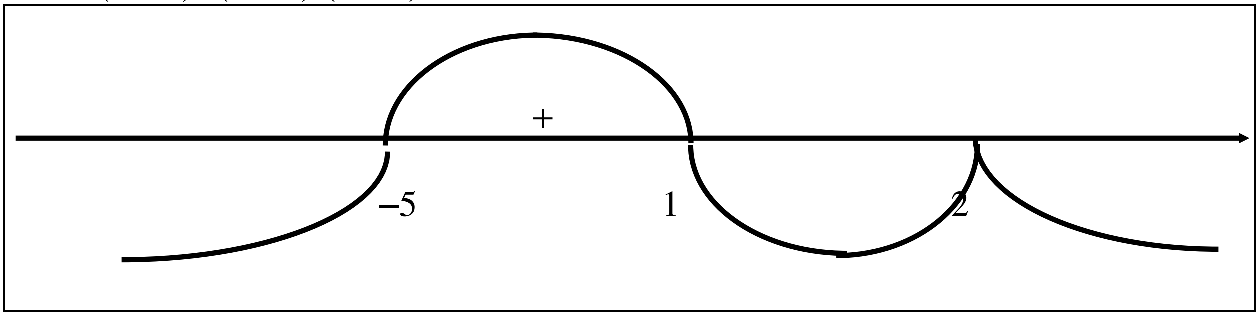
$| 4 - x | < 3| x | + 1$.



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\4-x<-3x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x\le 4,\\4-x<3x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\x-4<3x+1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\2x<-3,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x\le 4,\\4x>3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>4,\\2x>-5,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-\dfrac{3}{2},\\ \dfrac{3}{4}<x\le 4,\\ x>4,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-\dfrac{3}{2},\\ x>\dfrac{3}{4}.\end{array}\right.$$

8.5. Розв’язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів:

$$(1-x)^3/(x+5)/(x-2)^2>0.$$



Відповідь: $-5<x<1$.

9.2. Доказ тотожності ведеться шляхом спрощення лівої частини за допомогою формул пониження степеня:

$\cos^2(a+b)+\cos^2(a-b)-\cos 2a\cdot\cos 2b=$

$=0.5[1+\cos(2a+2b)]+0.5[1+\cos(2a-2b)]-0.5[\cos(2a+2b)+\cos(2a-2b)]=$

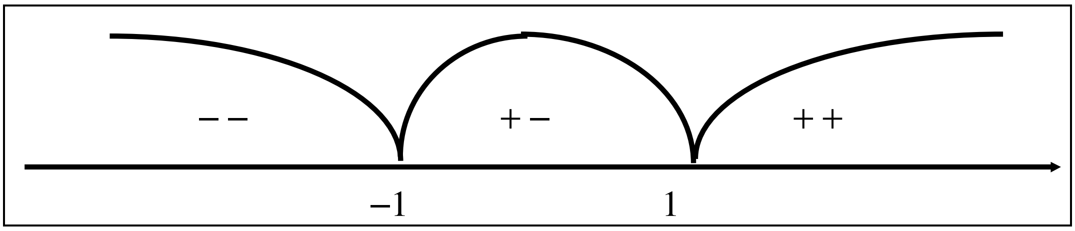
$=0.5+0.5=1.$

9.3. Розв’язання ірраціонального рівняння досягається послідовним піднесенням в відповідний степінь:

$\sqrt{7+\sqrt[3]{7+x^2}}=3 \Leftrightarrow 7+\sqrt[3]{7+x^2}=9 \Leftrightarrow \sqrt[3]{7+x^2}=2 \Leftrightarrow 7+x^2=8 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

9.4. Розв’язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

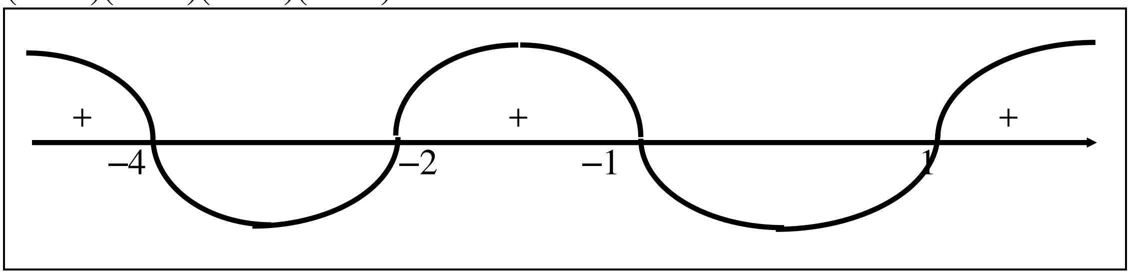
$$|x+1|-2>|x-1|.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ -x-1-2>-x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 1,\\ x+1-2>-x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ x+1-2>x-1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ \begin{cases}-1\le x\le 1,\\ x>1,\end{cases}\\ x\in\varnothing,\end{array}\right. \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

9.5. Розв’язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів, для чого необхідно спочатку все в одну сторону і розкласти на множники. Щоб уникнути технічних ускладнень, доцільно замінити квадратну функцію новою змінною. Виконавши заміну $(x^2+3x)=a$, отримаємо:

$(a+1)(a-3)>5 \Leftrightarrow a^2+a-3a-3>5 \Leftrightarrow a^2-2a-8>0 \Leftrightarrow (a-4)\cdot(a+2)>0.$
Після зворотної заміни отримаємо:
$(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)>5 \Leftrightarrow (x^2+3x+2)(x^2+3x-4)>0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+4)(x-1)>0.$



Відповідь: $(x<-4)\cup(-2<x<-1)\cup(x>1)$.

10.2. Розв’язання тригонометричного рівняння побудовано на перетворенні його в добуток функцій одного аргументу, що повинен дорівнювати нулю. Такий прийом спрощує відбір коренів.

$\cos 2x = 1-\sin 2x \Leftrightarrow 1-2\sin^2 x = 1-2\sin x\cos x \Leftrightarrow 2\sin^2 x-2\sin x\cos x=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \sin x\,(\sin x-\cos x)=0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x\cdot\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x=0,\\ \sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)=0,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k,\ k\in Z,\\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z\end{array}\right..$$

Оскільки отримані дві множини коренів не перетинаються, ця сукупність і буде розв’язком.

10.3. Знайти загальне зниження ціни в %, якщо ціну на товар знизили спочатку на 15%, а згодом – ще на 10%, легко в прямому перерахунку цін. Якщо первинна ціна товару дорівнювала 1, то після першого зниження маємо 0.85, а після другого – $0.85\cdot 0.9 = 0.765 = 1 - 0.235$. Тому загальне зниження ціни в % складає 23.5%.

10.4. Розв’язання показникового рівняння ведеться за інструкціями для конструкцій першого типу, в яких показники степеня відрізняються на число.

$$5^x + 5^{x+1} = 2\cdot 3^{x+1} \Leftrightarrow 5^x + 5\cdot 5^x - 2\cdot 3\cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow 6\cdot 5^x - 6\cdot 3^x = 0 \Leftrightarrow 5^x - 3^x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

10.5. Розв’язання логарифмічного рівняння починаємо зі зведення до спільної основи 2, а продовжуємо стандартно, за інструкціями другого типу з допомогою заміни $y = \log_2 x$, оскільки присутні логарифми у знаменнику:

$\log_x 4 + 2\log_2 x = 2.5 \Leftrightarrow 2\log^{-1}{}_2 x + 2\log_2 x = 2.5$. Заміною $y = \log_2 x$ отримаємо рівняння: $\dfrac{2}{a} + 2a = \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 4a^2 - 5a + 4 = 0$. Дійсних коренів нема.

11.2. Розв’язання ірраціонального рівняння з параметрами ведеться за стандартною схемою, з використанням виключно еквівалентних переходів, та з подальшою підстановкою отриманого результату в усі умови для перевірки:

$$\sqrt{(a+x)} + \sqrt{(x-a)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(a+x)} = \sqrt{2} - \sqrt{(x-a)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a + x = 2 - 2\sqrt{2}\sqrt{x-a} + (x-a), \\ \sqrt{2} - \sqrt{x-a} \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{2}\sqrt{x-a} = 2 - 2a, \\ \sqrt{2} - \sqrt{x-a} \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - a = \frac{1}{2}(1-a)^2, \\ 1 - a \geq 0, \\ 2 - 1 + a \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a^2+1), \\ a \leq 1, \\ a \geq -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(a^2+1), \\ -1 \leq a \leq 1. \end{cases}$$

Відповідь подається з розподілом значень параметру по числовій осі:

$a < -1$	– нема рішень;		$a \in]-\infty\ ; -1[$	– нема рішень;
$-1 \le a \le 1$	$-\ x = 0.5a^2 + 0.5$;	або:	$a \in [-1\ ;\ 1]$	$-\ x = 0.5a^2 + 0.5$;
$a > 1$	– нема рішень;		$a \in]1\ ;+\infty[$	– нема рішень.

Обидва наведені способи подання рішення еквівалентні.

11.3. Розв'язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників при однаковій основі:

$$2^{x+1} - 2^{x+2} = 12 + 2^{x-1} \Leftrightarrow 2\cdot 2^x - 4\cdot 2^x - \frac{1}{2}\cdot 2^x = 12 \Leftrightarrow 2^x(2 - 4 - \frac{1}{2}) = 12 \Leftrightarrow 2^x = -\frac{12}{2.5}.$$

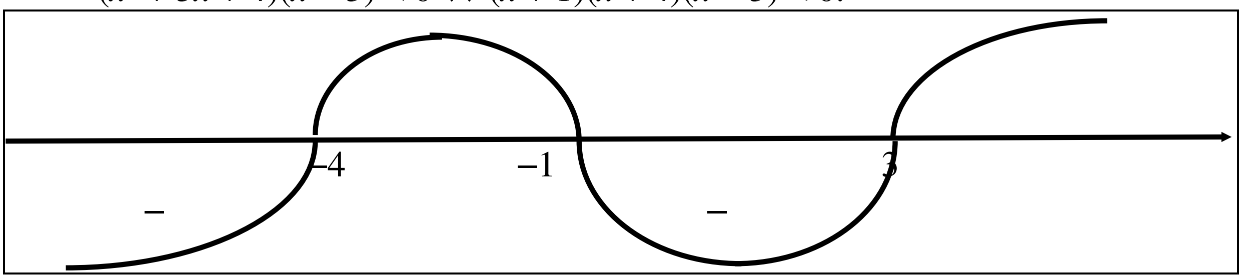
Рішень немає.

11.4. Розв'язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком. Однак ця задача може бути розв'язана простіше:

$| x^2 - 1 | \le | 1 | + | x^2 | \le 1 + x^2 + | x |$ і тому протилежна нерівність не має розв'язку.

11.5. Розв'язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів:

$$(x^2 + 5x + 4)(x - 3) < 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x + 4)(x - 3) < 0.$$



Відповідь: $(x < -4)(-1 < x < 3)$.

12.2. Розв'язання показникового рівняння $2^x + 2^{x-1} + 2^{x+2} = 7^x + 7^{x-1} + 7^{x-2}$ краще почати з приведення подібних, тобто винести за дужки в лівій і правій частинах вираз в однаковому степені x, в цьому випадку – $(x - 2)$:

$2^{x-2}(2^2 + 2^1 + 2^4) = 7^{x-2}(7^2 + 7^1 + 7^0) \Leftrightarrow 2^{x-2}(4 + 2 + 16) = 7^{x-2}(49 + 7 + 1) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2^{x-2}\cdot 22 = 7^{x-2}\cdot 57.$

Тепер варто перенести усе, що містить x у показнику степеня, в одну частину рівняння, а що не містить – в іншу:

$2^{x-2}\cdot 22 = 7^{x-2}\cdot 57 \Leftrightarrow (2/7)^{x-2} = 57/22.$

Після логарифмування по основі 2/7 рівняння перестає бути показниковим, і його розв'язання стає тривіальним:

$(2/7)^{x-2} = 57/22 \Leftrightarrow x - 2 = \log_{2/7}(57/22) \Leftrightarrow x = 2 + \log_{2/7}(57/22)$.

Звертаємо увагу абітурієнта, що отримана відповідь «не кругла», тобто нетипова для штучно складених прикладів. Звичайно, отримавши подібну відповідь, варто уважно перевірити не тільки хід свого *розв'язку*, але і точність *переписування* умови з квитка або з дошки. Усе ж варто не скидати з рахунків той факт, що до вміщення до квитків або на дошку умова багаторазово переписувалася й у неї *могла* украстися помилка. Тому не намагайтеся *обов'язково* підігнати розв'язок під «гарну» цифру, пам'ятаєте, що від Вас потребують уміти правильно *вирішувати* запропоновані задачі, а не одержувати гарні відповіді. Усе ж не зайве перевірити можливість спрощення відповіді, наприклад, заміна $\log_2(16)$ на 4 , безумовно, буде ознакою гарного тону. Усе ж відзначимо, що практика показує: ймовірність помилкового розв'язку абітурієнтом правильно складеної задачі *набагато* більша, ніж ймовірність наявності помилки в умові задачі. Так що в першу чергу шукайте похибку у своєму розв'язку!

12.3. Логарифмічне рівняння переходом до спільної основи зводиться до стандартної конструкції першого типу:

$$\log_4(x+12)\log_x 2 = 1 \Rightarrow \log_4(x+12)\cdot\frac{1}{\log_4 x^2} = 1 \Rightarrow \log_4(x+12) = \log_4 x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x + 12 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = -3. \end{array}\right.$$

Перевірка залишає тільки перший корінь, бо другий не належить області визначення логарифму. Відповідь: $x = 4$.

12.4. Розв'язання нерівності, що містить модулі, в цьому випадку може бути виконано швидким нестандартним шляхом. Дещо перетворивши нерівність:

$x^2 - |5x + 8| > 0 \Leftrightarrow x^2 > |5x + 8|$,

неважко помітити, що обидві її частини завжди невід`ємні. Це надає можливість позбавитися модулів шляхом піднесення до квадрату:

$$x^2 > |5x + 8| \Leftrightarrow (x^2)^2 > (5x + 8)^2 \Leftrightarrow (x^2)^2 - (5x + 8)^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow [x^2 - (5x + 8)]\cdot[x^2 + (5x + 8)] > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x - 8)\cdot(x^2 + 5x + 8) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - 5x - 8)\cdot[(x + 2.5)^2 + 3.75] > 0 \Leftrightarrow (x^2 - 5x - 8) > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{5-\sqrt{57}}{2}\right)\cdot\left(x - \frac{5+\sqrt{57}}{2}\right) > 0.$$

Відповідь: $\left(x < \frac{5-\sqrt{57}}{2}\right) \cup \left(x > \frac{5+\sqrt{57}}{2}\right)$.

12.5. Спочатку доцільно перетворити окремо кожне з показникових рівнянь на лінійне (стандартними методами розв'язку показникових рівнянь) і потім розв'язати просту систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} 27^x = 9^y, \\ 81^x / 3^y = 243, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^{3x} = 3^{2y}, \\ 3^{4x-y} = 3^5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2y, \\ 4x - y = 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 8x - 10, \\ y = 4x - 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$$

13.2. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників при однаковій основі:

$3^x \cdot (1/3)^{x-3} = (1/27)^x \Leftrightarrow 3^{x-x+3} = 3^{-3x} \Leftrightarrow 3 = -3x \Leftrightarrow x = -1.$

13.3. Розв’язання кубічного рівняння найпростіше вести вгадавши один корінь за теоремою про раціональні корені багаточлена з цілими коефіцієнтами (в цьому випадку $x = 1$). Після розкладання на множники пошук ще двох коренів зводиться до розв’язання квадратного рівняння:

$x^3 + 9x^2 + 11x - 21 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 + 10x^2 - 10x + 21x - 21 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x-1) + 10x(x-1) + 21(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + 10x + 21) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x+7) = 0.$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$, $x_3 = -7$.

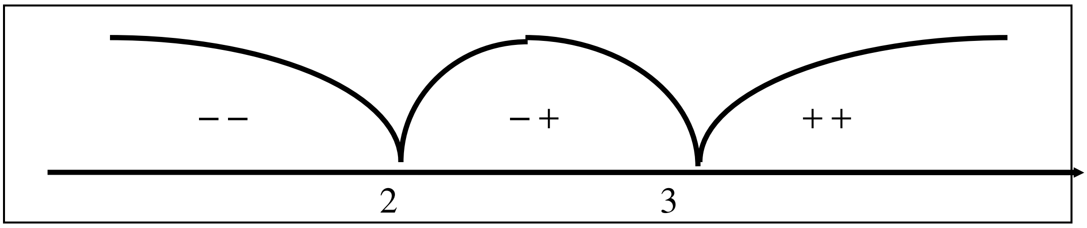
13.4. Розв’язання логарифмічного рівняння починаємо зі зведення до спільної основи 3 і продовжуємо стандартно за другою схемою за допомогою заміни $y = \log_3 x$, оскільки присутні логарифми в квадраті:

$\log_{3x}(3/x) + \log^2_3 x = 1 \Leftrightarrow \dfrac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + \log^2_3 x = 1$. Замінивши $a = \log_3 x$, отримаємо рівняння: $\dfrac{1-a}{1+a} + a^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \dfrac{a-1}{a+1}[-1 + (a+1)^2] = 0 \Leftrightarrow \dfrac{(a-1)a(a+2)}{a+1}$ $= 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, \\ a = 0, \\ a = -2. \end{array}\right.$ Зворотною заміною отримаємо результат: $\left[\begin{array}{l} \log_3 x = 1, \\ \log_3 x = 0, \\ \log_3 x = -2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 1, \\ x = 1/9. \end{array}\right.$

13.5. Розв’язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$$2 + x + |x - 3| > |x - 2|.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ 2+x-x+3>-x+2,\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 3,\\ 2+x-x+3>x-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ 2+x+x-3>x-2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<2,\\ x>-3,\end{cases}\\ \begin{cases}2\le x\le 3,\\ x<7,\end{cases}\\ \begin{cases}x>3,\\ x>-1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-3<x<2,\\ 2\le x\le 3,\\ x>3,\end{array}\right. \Leftrightarrow x>-3.$$

14.2. Розв’язання ірраціонального рівняння ведемо за допомогою заміни. Заміною $a=\sqrt[4]{(x-3)}$ з: $\sqrt{x-3}+6=5\cdot\sqrt[4]{(x-3)}$ отримаємо:

$a^2+6=5a \Leftrightarrow\Leftrightarrow a^2-5a+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=2,\\ a=3.\end{array}\right.$ Тепер отримаємо відповідь зворотною заміною: $\left[\begin{array}{l}\sqrt[4]{x-3}=2,\\ \sqrt[4]{x-3}=3,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-3=16,\\ x-3=81,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=19,\\ x=84.\end{array}\right.$

14.3. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників при однаковій основі:

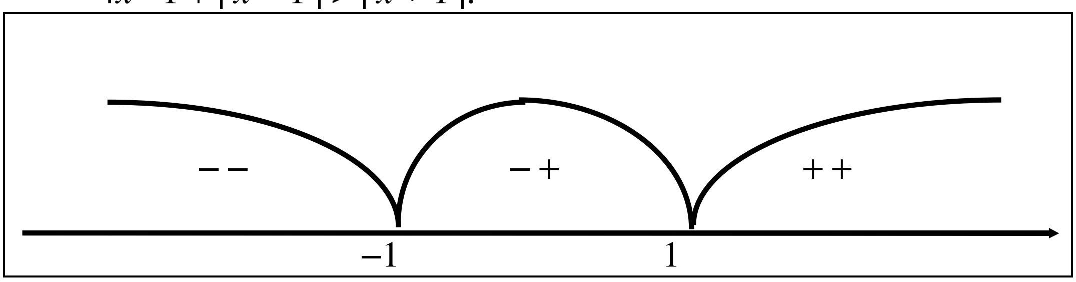
$$2^{x+1}=16\cdot\sqrt{(0.25)^5} \Leftrightarrow 2^{x+1}=2^{4\cdot(-2)\cdot 2.5} \Leftrightarrow x+1=-20 \Leftrightarrow x=-21.$$

14.4. Розв’язання логарифмічного рівняння ведеться шляхом застосування визначення логарифму:

$\log_{2x}64=3 \Leftrightarrow 3\cdot\log_{2x}4=3 \Leftrightarrow \log_{2x}4=1 \Leftrightarrow 4=2x \Leftrightarrow x=2.$

14.5. Розв’язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$$4x-1+|x-1|>|x+1|.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\4x-1-x+1>-x-1,\end{cases}\\\begin{cases}-1\le x\le 1,\\4x-1-x+1>x+1,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\4x-1+x-1>x+1,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\x>-0.25,\end{cases}\\\begin{cases}-1\le x\le 1,\\2x<1,\end{cases}\\\begin{cases}x>1,\\4x>3,\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\0.5<x\le 1,\\x>1,\end{array}\right.\Leftrightarrow x>0.5.$$

15.2. Знайти загальне зниження ціни в %, якщо ціну на товар знизили спочатку на 15%, а згодом – ще наполовину від першої знижки (тобто на 7.5%), легко в прямому перерахунку цін. Якщо первинна ціна товару дорівнювала 1, після першого зниження маємо 0.85, а після другого – $0.85\cdot 0.925 = 0.78625 =$

$= 1 - 0.21375$. Тому загальне зниження ціни в % складає 21.375%.

15.3. Розв’язання кубічного рівняння найпростіше вести вгадавши один корінь за теоремою про раціональні корені багаточлена з цілими коефіцієнтами (в цьому випадку $x = 1$). Після розкладання на множники пошук ще двох коренів зводиться до розв’язання квадратного рівняння:

$x^3 + x + 1 = 3x^2 \Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x^2 + 2x - x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x^2(x-1) - 2x(x-1) - (x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2-2x-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\x=1-\sqrt{2},\\x=1+\sqrt{2}.\end{array}\right.$$

15.4. Розв’язання логарифмічного рівняння після переходу до спільного знаменника ведеться за стандартною схемою першого типу:

$\lg(\sqrt{x+1}+1)/\lg(\sqrt[3]{x-40}) = 3 \Leftrightarrow \lg(\sqrt{x+1}+1) = 3\lg(\sqrt[3]{x-40}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lg(\sqrt{x+1}+1) = \lg(x-40) \Leftrightarrow \sqrt{x+1}+1 = x-40$.

Щоб не підносити до квадрату, що призведе до появи «незручних» великих чисел, зробимо заміну $\sqrt{x+1} = a$. Отримаємо:

$$a + 1 = a^2 - 1 - 40 \Leftrightarrow a^2 - a - 42 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=7,\\a=-6.\end{array}\right.$$

Тепер відповідь отримаємо зворотною заміною:

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt{x+1}=7,\\\sqrt{x+1}=-6,\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=49,\\x\in\varnothing,\end{array}\right.\Leftrightarrow x=48.$$

15.5. Розв’язання системи симетричних рівнянь виконується стандартними методами після подання рівнянь через суму і добуток змінних:

$$\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ x+y=13,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2-2\sqrt{xy}=13,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ 25-2\sqrt{xy}=13,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=5,\\ \sqrt{xy}=6,\end{cases}.$$

За теоремою Вієта, $\sqrt{x}$ та $\sqrt{y}$ є коренями квадратного рівняння

$$z^2-5z+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2,\\ z=3.\end{array}\right.$$

Тому маємо дві пари рішень: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\sqrt{x}=2,\\ \sqrt{y}=3,\end{cases}\\ \begin{cases}\sqrt{x}=3,\\ \sqrt{y}=2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=4,\\ y=9,\end{cases}\\ \begin{cases}x=9,\\ y=4.\end{cases}\end{array}\right.$

16.2. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:

$\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x+11}} = 4 - \sqrt{x-\sqrt{x+11}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \sqrt{x+11} = 16 - 8\sqrt{x-\sqrt{x+11}} + x - \sqrt{x+11} \Leftrightarrow 8\sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 16 - 2\sqrt{x+11}$ $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16(x - \sqrt{x+11}) = 64 - 16\sqrt{x+11} + (x + 11) \Leftrightarrow 16x = 64 + x + 11 \Leftrightarrow 15x = 75 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 5$. Перевірка підтверджує, що розв'язок знайдено вірно.

16.3. Розв'язання логарифмічного рівняння після переходу до спільної основи 0.5 виконується стандартно за першою схемою:

$\log_{0.5}(x-1) - \log_2(x+1) = 1 \Leftrightarrow \log_{0.5}(x-1) + \log_{0.5}(x+1) = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{0.5}[(x-1)(x+1)] = 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0.5 \Leftrightarrow x^2 = 1.5 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1.5}$.

Від'ємний розв'язок не належить області визначення логарифму, тому відповідь єдина: $x = \sqrt{1.5}$.

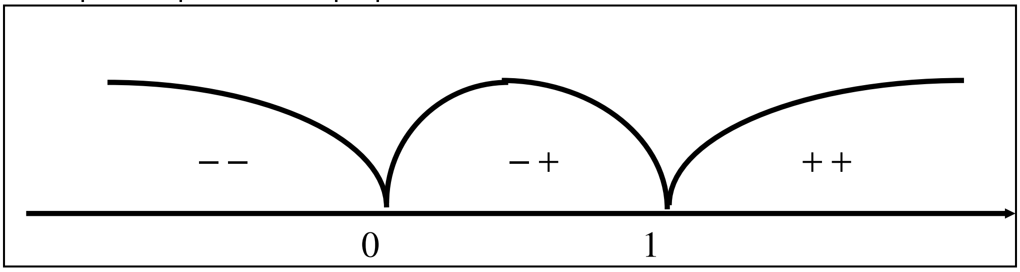
16.4. Розв'язання показникового рівняння ведеться за інструкціями другого типу, коли показники степеня відрізняються в декілька разів. $13^{2x} - 6\cdot 13^x + 5 = 0$.

Заміною $a = 13^x$ отримаємо: $a^2 - 6a + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1,\\ a=5.\end{array}\right.$

Тепер повернемося до x : $\left[\begin{array}{l} 13^x=1,\\ 13^x=5,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0,\\ x=\log_{13}5.\end{array}\right.$.

16.5. Розв'язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$$|x-1|>1-x+|x|.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\1-x>1-x-x,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x\le 1,\\1-x>1-x+x,\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\x-1>1-x+x,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\x\in\varnothing,\\x>2,\end{array}\right. \Leftrightarrow x>2.$$

17.2. Розв’язання ірраціонального рівняння виконаємо піднесенням до квадрату і приведенням виразів до спільного знаменника:

$$\sqrt{(x+7)}\ /\ \sqrt{x+2}=3\ \sqrt{(x-1)}\ /\ \sqrt{(3x-2)} \Rightarrow \frac{x+7}{x+2}=9\frac{x-1}{3x-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+7)(3x-2)=9(x-1)(x+2) \Leftrightarrow 3x^2+19x-14=9x^2+9x-18 \Leftrightarrow$$

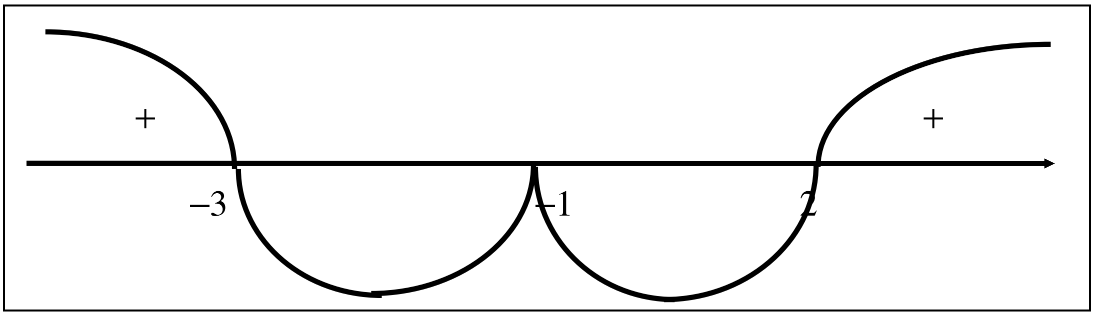
$$\Leftrightarrow 6x^2-10x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2,\\x=-\frac{1}{3}.\end{array}\right.$$

Перевіркою впевнимося, що $x=-\frac{1}{3}$ – сторонній корінь, а $x=2$ – шуканий розв’язок.

Сторонній корінь – *не* результат помилки! У ході розв'язку ми свідомо пішли на використання логічної операції $\Rightarrow$ замість $\Leftrightarrow$ при піднесенні до квадрату *для спрощення розв'язку*. Можна було б користуватися тільки операціями $\Leftrightarrow$, тоді розв'язання було б більш громіздким, але не потребувало б додаткової перевірки отриманих коренів.

17.3. Розв’язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів:

$$(x+3)^3(x-2)/(x+1)^2>0.$$



Відповідь: $(x < -3) \bigcup (x > 2)$.

17.4. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників при однаковій основі:

$10^x - 5^{x-1} \cdot 2^{x-2} = 950 \Leftrightarrow 10^x - 5^{-1} \cdot 2^{-2} \cdot 10^x = 950 \Leftrightarrow 10^x = \dfrac{950}{1-\dfrac{1}{20}} \Leftrightarrow 10^x = 100 \Leftrightarrow x =$

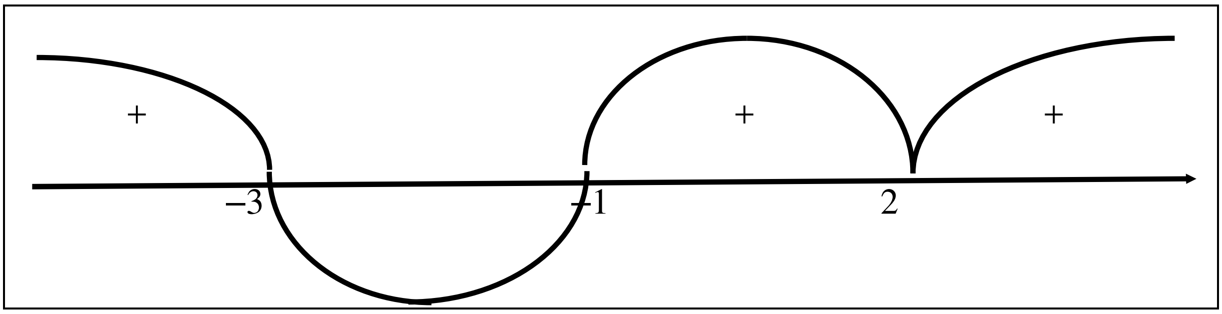
2.

17.5. Розв’язання логарифмічного рівняння третього типу (логарифми в показнику степеня), виконується логарифмуванням обох частин рівняння по тій основі, що вже є, з подальшою заміною:
$x^{\lg x - 4} = 0.0001 \Leftrightarrow \lg x^{\lg x - 4} = \lg 0.0001 \Leftrightarrow (\lg x - 4)\lg x = -4$. Заміною: $a = \lg x$ отримаємо: $(a - 4)a = -4 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0 \Leftrightarrow a = 2$.
Відповідь отримаємо зворотною заміною: $\lg x = 2 \Leftrightarrow x = 100$.

18.2. Розв’язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:
$2\sqrt{(3x+2)} - \sqrt{(6x)} = 2 \Leftrightarrow 2\sqrt{(3x+2)} = \sqrt{(6x)} + 2 \Leftrightarrow 4(3x + 2) = 4 + 4\sqrt{(6x)} + 6x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6x - 12 = 4\sqrt{(6x)}$. Щоб не отримати великих «незручних» коефіцієнтів, заміною $a = \sqrt{(6x)}$ отримаємо: $a^2 - 4a - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 6, \\ a = -2. \end{array}\right.$ Повертаючись до x, отримаємо: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{6x} = 6, \\ \sqrt{6x} = -2, \end{array}\right. \Leftrightarrow 6x = 36 \Leftrightarrow x = 6$.

18.3. Розв’язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів:

$(x + 3)(x - 2)^2 / (x + 1) > 0.$



Відповідь: $(x < -3) \bigcup (-1 < x < 2) \bigcup (x > 2)$.

18.4. Розв'язання показникового рівняння ведеться за інструкціями для конструкцій першого типу, в яких показники степеня відрізняються на число.

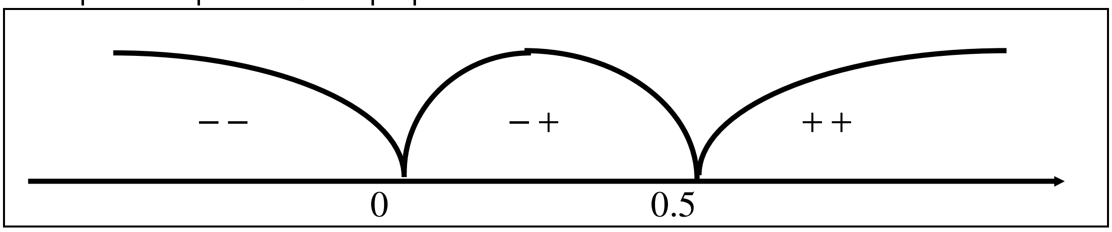
$4^x - 3^{x-0.5} = 3^{x+0.5} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 4^x + 2^{-1}\cdot 4^x = 3^{0.5}\cdot 3^x + 3^{-0.5}\cdot 3^x \Leftrightarrow 4^x(1 + \frac{1}{2}) = 3^x(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}})$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{4\cdot 2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow x = 1.5.$

18.5. Розв'язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$| 2x - 1 | = 1 - 3x + | x |.$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < 0, \\ 1 - 2x = 1 - 3x - x, \end{cases} \\ \begin{cases} 0 \le x \le 0.5, \\ 1 - 2x = 1 - 3x + x, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 0.5, \\ 2x - 1 = 1 - 3x + x, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ 0 \le x \le 0.5, \\ x \in \varnothing, \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 \le x \le 0.5.$$

19.2. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:

$\sqrt{(12-3x)} - \sqrt{(3x+1)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(12-3x)} = \sqrt{(3x+1)} + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12 - 3x = 3x + 1 + 2\sqrt{(3x+1)} + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{(3x+1)} = 10 - 6x \Leftrightarrow \sqrt{(3x+1)} = 5 - 3x.$

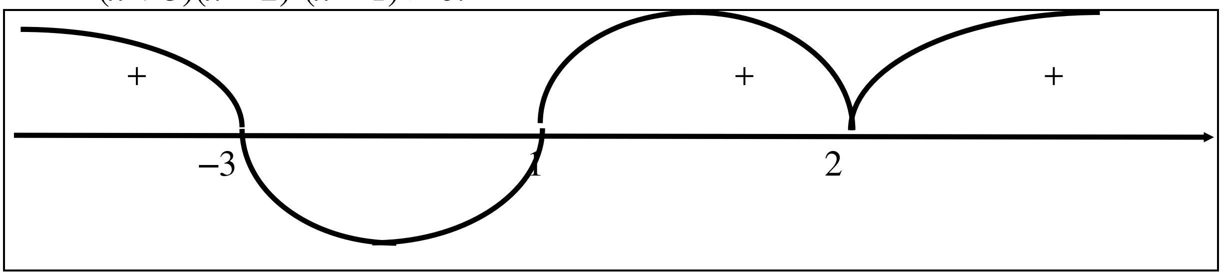
Щоб запобігти появі великих «незручних» коефіцієнтів, зробимо заміну: $a = \sqrt{(3x+1)}$. Розв'язавши рівняння відносно a, отримаємо:

$a^2 + 4a - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ a = -3. \end{array}\right.$ Повертаючись до x , отримаємо остаточну відповідь:

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{3x+1} = 2, \\ \sqrt{3x+1} = -3, \end{array}\right. \Leftrightarrow 3x + 1 = 4 \Leftrightarrow x = 1.$

19.3. Розв'язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів:

$(x + 3)(x - 2)^2(x - 1) > 0.$



Відповідь: $(x < -3) \bigcup (1 < x < 2) \bigcup (x > 2)$.

19.4. Розв'язання показникового рівняння $7^x + 7^{x-1} = 2^x + 2^{x-1}$ краще почати зі зведення подібних, тобто винести за дужки в лівій і правій частинах вираз в однаковому степені x, в цьому випадку – $(x - 1)$:

$7^{x-1}(7^1 + 7^0) = 2^{x-1}(2^1 + 2^0) \Leftrightarrow 7^{x-1}(7 + 1) = 2^{x-1}(2 + 1) \Leftrightarrow 7^{x-1}\, 8 = 2^{x-1}\, 3.$

Тепер необхідно перенести все, що містить x в показнику степеня, в одну частину рівняння, а все, що не містить – в іншу. В результаті отримаємо:

$7^{x-1}\, 8 = 2^{x-1}\, 3 \Leftrightarrow (7/2)^{x-1} = 3/8.$

Після логарифмування за основою 7/2 рівняння перестає бути показниковим, і його розв'язання стає тривіальним:

$(7/2)^{x-1} = 3/8 \Leftrightarrow x - 1 = \log_{7/2} (3/8) \Leftrightarrow x = 1 + \log_{7/2} (3/8) = \log_{7/2} (3/8 \cdot 7/2) =$
$= \log_{7/2} (21/16)$

Коментар щодо «не круглої» відповіді див. розв'язок до задачі 12.2.

19.5. Розв'язання логарифмічного рівняння виконуємо послідовно застосовуючи визначення логарифму:

$\log_{1/3} \log_{1/2} x = -1 \Leftrightarrow \log_{1/2} x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{1}{8}.$

20.2. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:

$\sqrt{(2x-4)}-\sqrt{(x+5)}\ = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-4)}\ = \sqrt{(x+5)}\ + 1 \Leftrightarrow 2x - 4 = x + 5 + 2\sqrt{(x+5)}\ +1$
$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\sqrt{(x+5)}\ = x - 10.$

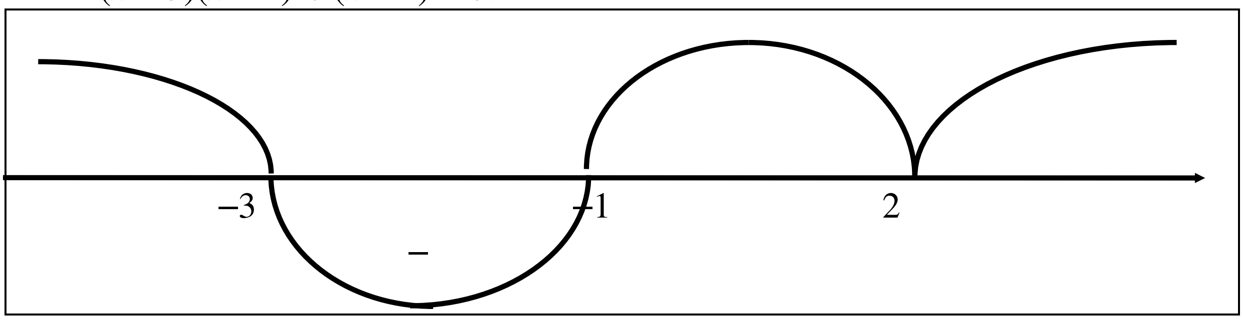
Щоб запобігти появі великих «незручних» коефіцієнтів, зробимо заміну:
$a = \sqrt{(x+5)}$. Розв'язавши рівняння відносно a, отримаємо:

$a^2 - 2a - 15 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 5, \\ a = -3. \end{array}\right.$ Повертаючись до x, отримаємо остаточну відповідь:

$\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5} = 5, \\ \sqrt{x+5} = -3, \end{array}\right. \Leftrightarrow x + 5 = 25 \Leftrightarrow x = 20.$

20.3. Розв'язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів:

$(x + 3)(x - 2)^2 / (x + 1) < 0.$



Відповідь: $-3 < x < -1$.

20.4. Розв'язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників при однаковій основі:

$2^{3x} = 512^{1/3x} \Leftrightarrow 2^{3x} = 2^{9\cdot\frac{1}{3x}} \Leftrightarrow 3x = \frac{3}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1.$

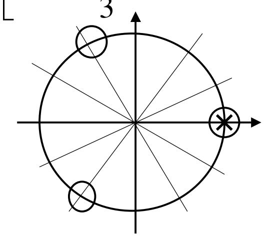
20.5. Якщо спочатку число дорівнювало x, то після збільшення маємо $1.1x$, а після зменшення – $0.9\cdot(1.1x) = 0.99\ x$. Тому число зміниться, а саме, стане на 1% менше початкового.

21.2. Розв'язання тригонометричного рівняння легко знаходиться перетворенням суми тригонометричних функцій у добуток, а головна складність полягає у відборі коренів:

$\sin 2x + \sin x = \sin(3x/2) \Leftrightarrow 2\sin(3x/2)\cdot\cos(x/2) = \sin(3x/2) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 2\sin(3x/2)\,[\cos(x/2) - 0.5] = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(\frac{3x}{2}\right) = 0, \\ \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{3x}{2} = \pi k, k \in Z, \\ \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{2\pi k}{3}, k \in Z, \\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z. \end{array}\right.$$



Далі є два шляхи: строго вирішувати методами Діофантових рівнянь проблему можливого питання перетинання коренів або уважно розглянути все це на тригонометричному колі (що простіше). На малюнку добре видно, що другий розв'язок, що позначений хрестиком, цілком знаходиться у першому, що позначений кружечками. Тому відповідь буде такою:

$x = \frac{2\pi k}{3}$, $k \in Z$.

21.3. Розв’язання кубічного рівняння найпростіше вести вгадавши один корінь за теоремою про раціональні корені багаточлена з цілими коефіцієнтами (в цьому випадку $x = 1$). Після розкладання на множники пошук ще двох коренів зводиться до розв’язання квадратного рівняння, але в цьому випадку квадратне рівняння $x^2 - 1 = 0$ настільки просте, що значення усіх трьох коренів стають очевидними ще перебігом розкладу на множники:

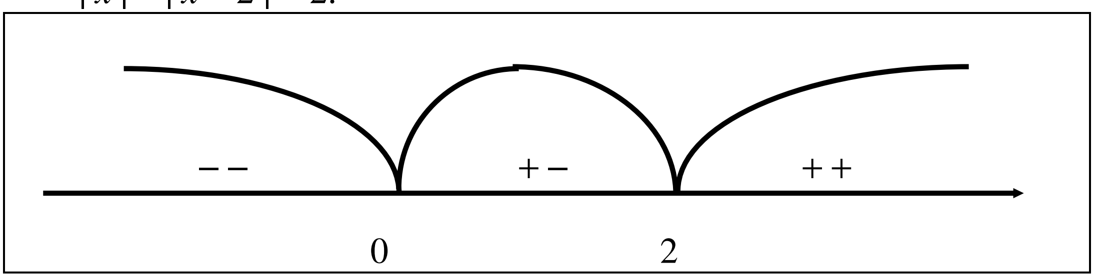
$$x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x + 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 1)(x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -1, \\ x = -2. \end{array}\right.$$

21.4. Розв’язання цього завдання наведено в розв’язку до завдання 7.4.

21.5. Розв’язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$|x| - |x - 2| = 2.$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ -x+x-2=2,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<2,\\ x+x-2=2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x-x+2=2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ x\in\varnothing,\\ x\ge 2,\end{array}\right. \Leftrightarrow x\ge 2.$$

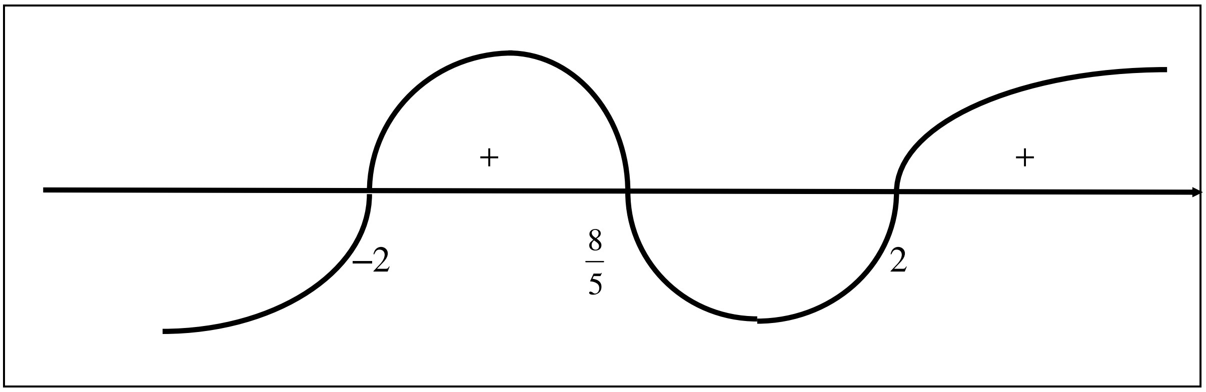
22.2. Результат розв'язку даного ірраціонального рівняння легко бачити з оцінки:

$\sqrt{(25+\sqrt{x^2+3})} \ge \sqrt{25} = 5 > 3$, тому рівняння розв'язків не має.

22.3. Розв’язання такої нерівності виконується перенесенням в одну сторону, розкладенням на множники та застосуванням методу інтервалів:

$$\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}<1 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4}{x^2-4}-1<0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x+4-x^2+4}{x^2-4}<0 \Leftrightarrow \frac{-5x+8}{x^2-4}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-\frac{8}{5}}{(x-2)(x+2)}>0.$$



Відповідь: $(-2<x<1.6)\bigcup(x>2)$.

22.4. Розв’язання цього завдання наведено в розв’язку до завдання 16.4.

22.5. Хоча стандартна схема спрацює, саме це рівняння краще розв’язати враховуючи те, що сума модулів невід’ємна:

$$|x+2|+|x|=3x \Leftrightarrow \begin{cases}|x+2|+|x|=3x,\\ x\ge 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)+x=3x,\\ x\ge 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2,\\ x\ge 0,\end{cases} \Leftrightarrow x=2.$$

Відповідь: $x=2$.

23.2. Розв’язання кубічного рівняння найпростіше вести вгадавши один корінь за теоремою про раціональні корені багаточлена з цілими коефіцієнтами (в цьому випадку $x = 1$). Після розкладання на множники пошук ще двох коренів зведеться до розв'язання квадратного рівняння $x^2 - 8x + 15 = 0$:

$x^3 - 9x^2 + 23x - 15 = 0 \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 8x^2 + 8x + 15x - 15 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2(x - 1) - 8x(x - 1) + 15(x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 8x + 15) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x - 1)(x - 3)(x - 5) = 0.$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 5$.

23.3. Розв'язання такої нерівності виконується перенесенням в одну сторону, розкладанням на множники та тривіальним дослідженням квадратного тричлена:

$(x - 4)/(x - 1) < 1 \Leftrightarrow (x - 4)/(x - 1) - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{5-\sqrt{13}}{2} < x < \dfrac{5+\sqrt{13}}{2}.$

23.4. Розв'язання показникового рівняння виконується піднесенням у квадрат:

$\sqrt{9^{x-1} - 0.5} = 4\sqrt{3} \Leftrightarrow 9^{x-1} - 0.5 = 48 \Leftrightarrow 9^{x-1} = 48.5 \Leftrightarrow x - 1 = \log_9 48.5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 1 + \log_9 48.5.$

23.5. Розв'язання рівняння в цьому випадку простіше виконати нестандартним прийомом, що використовує невід'ємність модуля:

$| x + 2 | = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} |x+2| = 2x \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+2 = 2x \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2.$

24.2. Розв'язання кубічного рівняння найпростіше вести вгадавши один корінь за теоремою про раціональні корені багаточлена з цілими коефіцієнтами (в цьому випадку $x = -2$). Після розкладання на множники пошук ще двох коренів зводиться до розв'язання квадратного рівняння:

$6x^3 + 13x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow 6x^3 + 12x^2 + x^2 + 2x - x - 2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x^2(x + 2) + x(x + 2) - (x + 2) = 0 \Leftrightarrow (x + 2)(6x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x + 2)(x + \frac{1}{2})(x - \frac{1}{3}) = 0.$

Відповідь: $x_1 = -2$, $x_2 = -0.5$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

24.3. Розв'язання такої нерівності виконується перенесенням в одну сторону, розкладання на множники та дослідженням квадратного тричлена:

$(x - 4)/(x + 1) < 1 \Leftrightarrow (x - 4)/(x + 1) - 1 < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x - 5 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{3-\sqrt{29}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{29}}{2}.$

24.4. Розв’язання показникового рівняння ведеться за другою схемою, де показники степеня відрізняються в декілька разів.
$5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250 \Leftrightarrow 5^{-1}\cdot 5^{2x} + 5\cdot 5^{x} = 250$. Заміною $a = 5^x$ отримаємо:
$0.2a^2 + 5a - 250 = 0 \Leftrightarrow a^2 + 25a - 1250 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 25, \\ a = -50. \end{array}\right.$

Відповідь отримаємо повертаючись від a до x: $5^x = 25 \Leftrightarrow x = 2$.

24.5. Розв’язання рівняння, що містить модуль, в цьому випадку найпростіше виконати позбавившись від модулів піднесенням в квадрат, що можливо завдяки наперед відомої невід’ємності правої та лівої частин:

$$|\,x + 2\,| = 2|\,x\,| \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 4x^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -\dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

25.2. Розв’язання кубічного рівняння найпростіше вести вгадавши один корінь за теоремою про раціональні корені багаточлена з цілими коефіцієнтами (в цьому випадку $x = 2$). Після розкладання на множники пошук ще двох коренів зводиться до розв’язання квадратного рівняння:
$x^3 + 13x^2 + x - 62 = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x^2 + 15x^2 - 30x + 31x - 62 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(x - 2) + 15x(x - 2) + 31(x - 2) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 15x + 31) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = \dfrac{-15 \pm \sqrt{101}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $x_1 = 2$, $x_{2.3} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{101}}{2}$.

25.3. Розв’язання цього завдання наведено в розв’язку до завдання 24.2.

25.4. Розв’язання показникового рівняння полягає в діленні на один з квадратів з подальшим розв’язанням рівняння як квадратного (конструкція другого типу):

$$4^x + 6^x = 9^x \Leftrightarrow \frac{2^{2x}}{3^{2x}} + \frac{2^x \cdot 3^x}{3^{2x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\frac{2}{3}\right)^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

25.5. Розв’язання рівняння, що містить модуль, в цьому випадку найпростіше виконати позбавившись від модулів піднесенням в квадрат, що можливо завдяки наперед відомої невід’ємності правої та лівої частин:
$|\,x + 2\,| = 2|\,x - 5\,| \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 4(x - 5)^2 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 4x^2 - 40x + 100 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2 - 44x + 96 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \dfrac{22 \pm 14}{3} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 12, \\ x = \dfrac{8}{3}. \end{array}\right.$

26.2. Дослідження тригонометричного рівняння найпростіше вести шляхом подання обох частин рівняння через sin$x$ и cos$x$:

$2(\cos x - \sin x)/\sin 2x = (\text{ctg } x - \text{tg } x)/(\cos x - \sin x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(\cos x - \sin x)}{2\sin x \cos x} = \dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x(\cos x - \sin x)} \Leftrightarrow \dfrac{-2\sin x}{\sin x \cos x} = 0$. Рішень немає.

26.3. Розв’язання нерівності витікає з дослідження квадратного трьохчлена: $(x - 4)(x + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 4$.

26.4. Розв’язок показникового рівняння отримується перенесенням показникових функцій в одну з частин рівняння:

$6^{2x+4} = 2^{x+8} \cdot 3^{3x} \Leftrightarrow 3^{2x+4} \cdot 2^{2x+4} \cdot 2^{-x-8} \cdot 3^{-3x} = 1 \Leftrightarrow 3^{4-x} \cdot 2^{x-4} = 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{4-x} = 1 \Leftrightarrow 4 - x = 0$

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 4$.

26.5. Розв’язання рівняння, що містить модуль, в цьому випадку найпростіше виконати позбавившись від модулів піднесенням в квадрат, що можливо завдяки наперед відомої невід’ємності правої та лівої частин:

$|\, x - 2 \,| = 2|\, x + 5 \,| \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 4(x + 5)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 44x - 96 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -12, \\ x = \dfrac{8}{3}. \end{array}\right.$

27.2. Для розв’язку тригонометричного рівняння скористаємося формулами зниження степеня:

$\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0.25 \Leftrightarrow (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = \cos^2 2x + 0.25$
$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - 0.5\sin^2 2x = \cos^2 2x + 0.25 \Leftrightarrow 4 - 2\sin^2 2x = 4\cos^2 2x - 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4 - (1 - \cos 4x) = 2(1 + \cos 4x) + 1 \Leftrightarrow \cos 4x = 0 \Leftrightarrow 4x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{8}(1 + 2k),\ k \in Z.$

27.3. Розв’язання такої нерівності виконується перенесенням в одну з частин рівняння, розкладанням на множники з подальшим стандартним дослідженням квадратного тричлена:

$(x - 4)/(x - 1) > 1 \Leftrightarrow (x - 4)/(x - 1) - 1 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x < \frac{5-\sqrt{13}}{2}) \bigcup (\, x > \frac{5+\sqrt{13}}{2}).$

27.4. Розв’язання цього завдання наведено в розв’язку до завдання 24.4.

27.5. Розв’язуючи це рівняння, найпростіше позбавитись модулів шляхом піднесення до квадрату:

$| x + 2 | = 2| x - 4 | \Leftrightarrow (x + 2)^2 = 4(x - 4)^2 \Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 12x + 20 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 10. \end{array}\right.$$

28.2. Для розв’язку тригонометричного рівняння скористаємося формулами зниження степеня:

$\cos x \cdot \cos 2x = 0.5 \cdot \cos 3x \Leftrightarrow 0.5(\cos x + \cos 3x) = 0.5 \cdot \cos 3x \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z.$

28.3. Розв’язання цього завдання наведено в розв’язку до завдання 27.3.

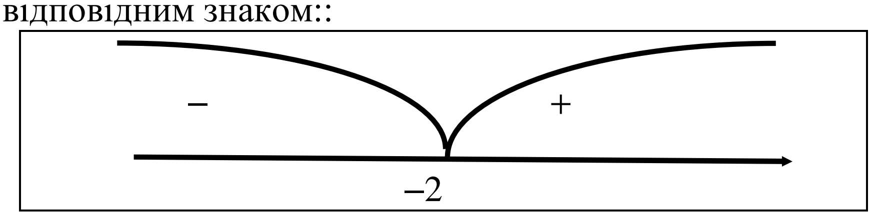
28.4. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників степеня при спільній основі:

$9^{x(x-1)-0.5} = \sqrt{3} \Leftrightarrow 9^{x(x-1)-0.5} = 9^{0.25} \Leftrightarrow x^2 - x - 0.5 = 0.25 \Leftrightarrow 4x^2 - 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{3}{2}, \\ x = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$$

28.5. Розв’язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком::

$| x + 2 | = 2x + 1.$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -2, \\ -x - 2 = 2x - 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ x + 2 = 2x + 1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le -2, \\ 3x = -3, \end{cases} \\ \begin{cases} x > -2, \\ x = 1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x = 1.$$

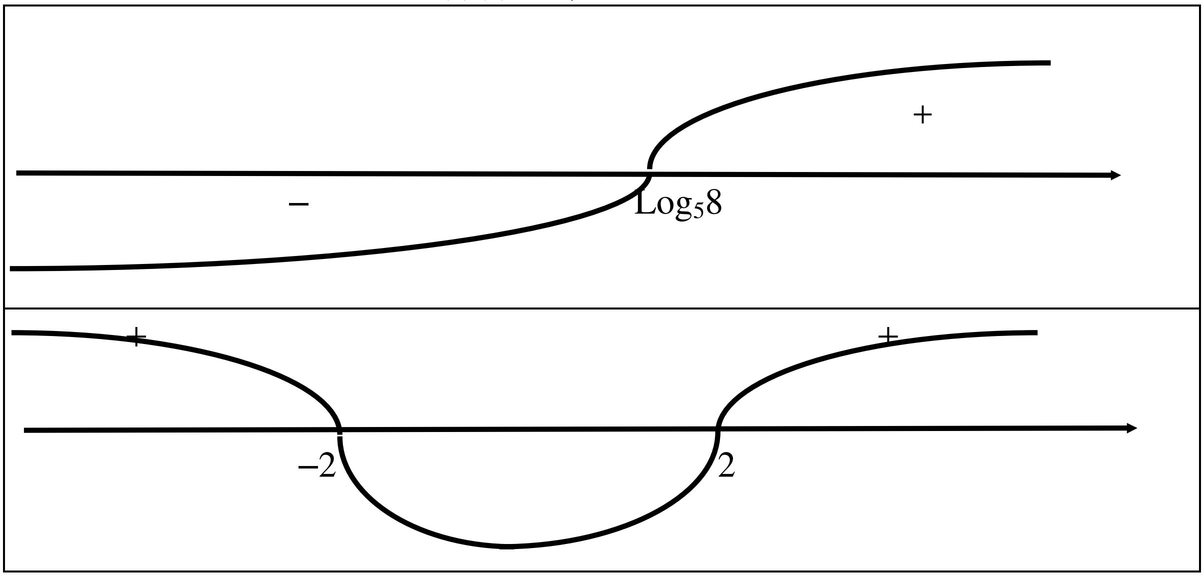
29.2. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 22.2.

29.3. Розв'язання такої нерівності виконується перенесенням в одну сторону, розкладанням на множники і застосуванням методу інтервалів:

$$\frac{x^2-5^x+4}{x^2-4}\le 1 \Leftrightarrow \frac{x^2-5^x+4}{x^2-4}-1\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5^x+4-x^2+4}{x^2-4}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5^x+8}{x^2-4}\le 0 \Leftrightarrow \frac{5^x-5^{\log_5 8}}{(x-2)(x+2)}\ge 0.$$

Далі аналізуємо окремо знаки чисельника і знаменника на двох паралельних числових прямих з однаковим масштабом і спільним нулем. Шуканий результат досягається в двох випадках: чисельник невід`ємний, а знаменник позитивний або чисельник недоданій, а знаменник негативний.

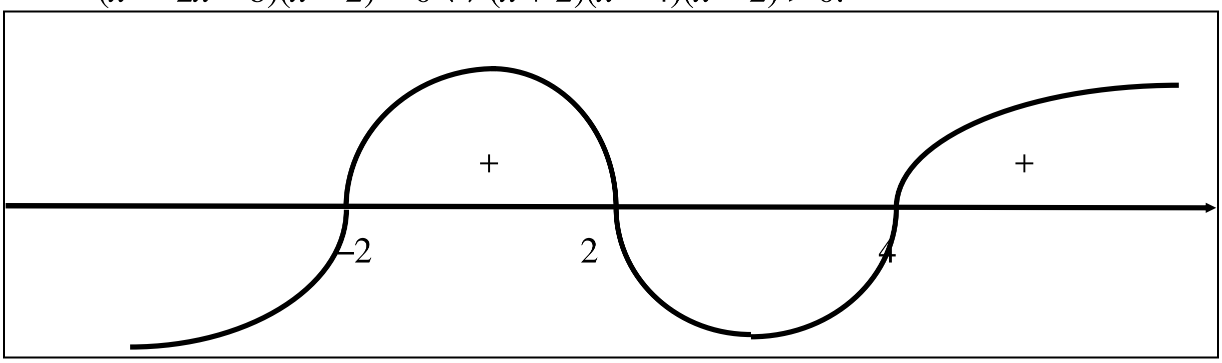


Відповідь: $(-2 < x \le \log_5 8) \cup (x > 2)$.

29.4. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 16.4.

29.5. Розв'язання такої нерівності виконується розкладанням на множники і застосуванням методу інтервалів:

$$(x^2-2x-8)(x-2)>0 \Leftrightarrow (x+2)(x-4)(x-2)>0.$$



Відповідь: $(-2 < x < 2) \bigcup (x > 4)$.

30.2. Розв'язання тригонометричного рівняння базується на перетворенні рівності на добуток простих виразів, що повинен дорівнювати нулю:

$$\sin 2x + \sin x = \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\sin \frac{3x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2\cos \frac{x}{2}\left(\sin \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\frac{x}{2} = 0, \\ \sin\frac{3x}{2} = \frac{1}{2}, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2}(1+2k), k \in Z, \\ \frac{3x}{2} = (-1)^n \frac{\pi}{6}(1+6n), n \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi(1+2k), k \in Z, \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{9}(1+6n), n \in Z, \end{array}\right.$$

Обидва розв'язки підходять і не мають перетинів, оскільки $(1 + 6n)$ ніколи не поділиться на 3 і тим більше на 9.

30.3. Розв'язання кубічного рівняння найпростіше вести вгадавши один корінь за теоремою про раціональні корені багаточлена з цілими коефіцієнтами (в цьому випадку $x = -1$). Після розкладання на множники пошук ще двох коренів зводиться до розв'язання квадратного рівняння:

$x^3 - 2x^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 3x^2 - 3x + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(x + 1) - 3x(x + 1) + 4(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 - 3x + 4) = 0.$
Оскільки рівняння $x^2 - 3x + 4 = 0$ дійсних коренів не має, то вгаданий корінь є єдиним розв'язком $x = -1$.

30.4. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 7.4.

30.5. Розв'язання цієї задачі зводиться до складання й розв'язання простого рівняння. Після зменшення x на 10%, ми отримаємо величину $(0.9 \cdot x)$, а після зменшення ще на 20% $-[(0.9 \cdot x) \cdot 0.8]$. В результаті отримано рівняння:
$0.8 \cdot 0.9 \cdot x = 230 \Leftrightarrow x = 230 / 0.72 = 575/18$.

31.2. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:
$\sqrt{(2x-4)} + \sqrt{(x+5)} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(2x-4)} = 5 - \sqrt{(x+5)} \Rightarrow$
$\Rightarrow 2x - 4 = x + 5 - 10\sqrt{(x+5)} + 25 \Leftrightarrow 10\sqrt{(x+5)} = 34 - x.$
Щоб не отримати великих коефіцієнтів, зробимо заміну: $a = \sqrt{(x+5)}$. В результаті отримаємо: $a^2 + 10a - 39 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 3, \\ a = -13. \end{array}\right.$ Для отримання остаточного результату повернемося до x: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{x+5} = 3, \\ \sqrt{x+5} = -13, \end{array}\right. \Leftrightarrow x + 5 = 9 \Leftrightarrow x = 4.$

Перевірка підтверджує, що розв'язок знайдено вірно.

31.3. Розв'язання такої нерівності виконується розкладанням на множники і застосуванням метода інтервалів або, якщо багаточленів два, то дослідженням квадратного тричлена: $(x+3)(x^2+x+2)(x+1)<0$. Оскільки значення багаточлена в других дужках позитивно для усіх x (дискримінант від`ємний), то це дослідження не потрібно.

Відповідь: $-3<x<-1$.

31.4. Розв'язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників степеня при спільній основі:

$2^{3x}=64^{1/2x} \Leftrightarrow 8^x=8^{1/x} \Leftrightarrow x=1/x \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1$.

31.5. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 24.5.

32.2. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:

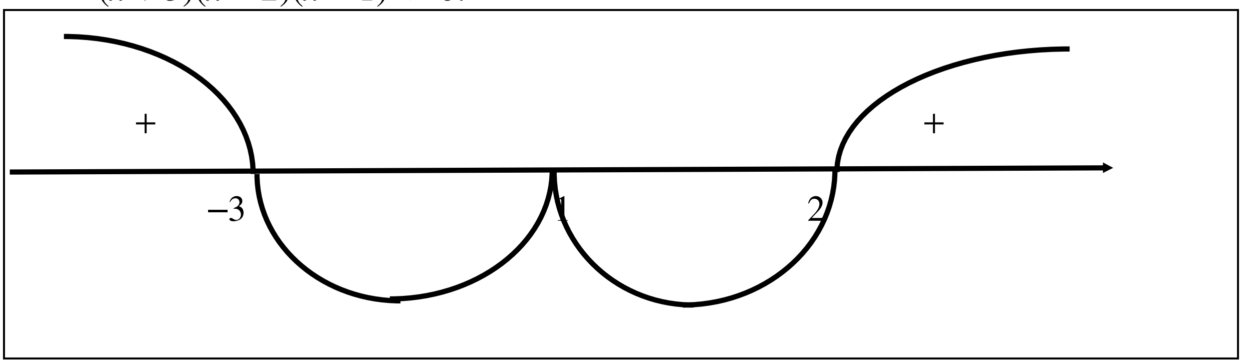
$\sqrt{(3x+1)}+\sqrt{(12-3x)}=5 \Leftrightarrow (3x+1)+(12-3x)+2\sqrt{(3x+1)}\cdot\sqrt{(12-3x)}=25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{(3x+1)}\cdot\sqrt{(12-3x)}=12 \Rightarrow (3x+1)\cdot(12-3x)=36 \Leftrightarrow (3x+1)\cdot(4-x)=12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x^2-11x+8=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=\dfrac{8}{3}. \end{array}\right.$ Перевіркою переконуємося, що обидва розв'язки підходять.

32.3. Розв'язання такої нерівності виконується стандартно застосуванням методу інтервалів:

$(x+3)(x-2)(x-1)^2>0.$



Відповідь: $(x<-3)\cup(x>2)$.

32.4. Розв'язання показникового рівняння ведеться за другою схемою, коли показники степеня відрізняються в декілька разів.

$3\cdot 2^x=2+2^{2x} \Leftrightarrow 2^{2x}-3\cdot 2^x+2=0$. Заміною $a=2^x$ отримаємо:

$a^2 - 3a + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ a = 1. \end{array}\right.$

Зворотною заміною отримаємо відповідь: $\left[\begin{array}{l} 2^x = 1, \\ 2^x = 2, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 1. \end{array}\right.$

32.5. Розв'язуємо логарифмічне рівняння послідовним застосуванням визначення логарифма:

$\log_{1/2} \log_{1/3} x = -1 \Leftrightarrow \log_{1/3} x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}.$

33.2. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:

$2\sqrt{(3x+2)} + \sqrt{(6x)} = 6 \Leftrightarrow 2\sqrt{(3x+2)} = 6 - \sqrt{(6x)} \Rightarrow 4(3x + 2) = 36 + 6x - 12\sqrt{(6x)} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x + 12\sqrt{(6x)} - 28 = 0$. Для зручності записів зробимо заміну: $a = \sqrt{(6x)}$. В результаті отримаємо: $a^2 + 12a - 28 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ a = -14. \end{array}\right.$ Зворотною заміною отримаємо відповідь: $\left[\begin{array}{l} \sqrt{6x} = 2, \\ \sqrt{6x} = -14, \end{array}\right. \Leftrightarrow 6x = 4 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$. Перевірка підтверджує, що розв'язок знайдено вірно.

33.3. Розв'язання нерівності отримаємо дослідженням квадратного тричлена: $(x + 3)/(x + 1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < -3.$

33.4. Для розв'язання показникового рівняння скористаємося монотонністю показникової функції:

$4^x - 3^x = 3^{x-1} + 2^x \Leftrightarrow 4^x = 3^x + 3^{x-1} + 2^x$. Очевидний розв'язок $x = 2$ легко вгадати. Розділимо обидві частини рівняння на 4^x. Отримаємо в лівій частині 1, а в правій – суму неперервних монотонно спадаючих функцій. Тому справедливі твердження:

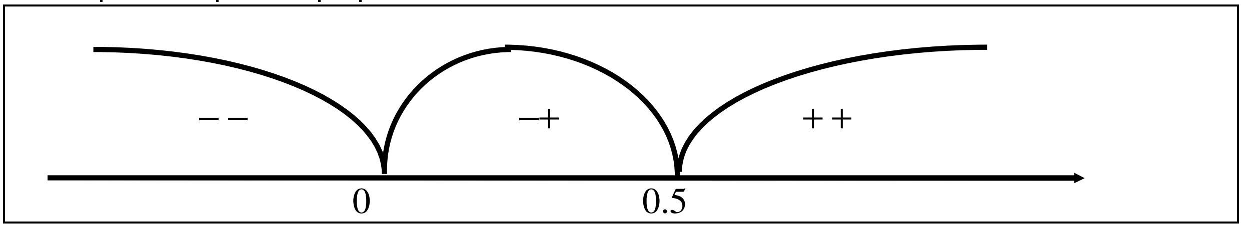
$x > 2 \Rightarrow \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x < \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1;$

$x < 2 \Rightarrow \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^x > \frac{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1;$

Отже, інших розв`язків, крім $x = 2$ немає.

33.5. Розв'язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$$|\,2x-1\,| = 1 + |\,x\,|.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0,\\ -2x+1=1-x,\end{cases}\\ \begin{cases}0\le x<0.5,\\ -2x+1=1+x,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 0.5,\\ 2x-1=1+x,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ x=0,\\ x=2,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2.\end{array}\right.$$

34.2. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:

$\sqrt{(x+7)}\ + \sqrt{(x-2)}\ = 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x+7)}\ = 5 - \sqrt{(x-2)} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 7 = 25 - 10\sqrt{(x-2)}\ + x - 2 \Leftrightarrow 10\sqrt{(x-2)}\ = 16 \Leftrightarrow x - 2 = 2.56 \Leftrightarrow x = 4.56.$

Перевірка підтверджує, що розв'язок знайдено вірно.

34.3. Розв'язання нерівності можливо тільки за умови, що показник степеня – ціле непарне число:

$$(x+3)^{x-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases}x-2=2k+1, k\in Z,\\ x+3<0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2k+3, k\in Z,\\ x<-3,\end{cases} \Leftrightarrow x = 2k+3,\ k\in\ Z,\ k<-3.$$

34.4. Розв'язання показникового рівняння ведемо шляхом перенесення показникових функцій в одну з частин рівняння:

$0.2\cdot 10^{x} - 5^{x}\cdot 2^{x-2} = 190 \Leftrightarrow 0.2\cdot 10^{x} - 0.25\cdot 10^{x} = 190 \Leftrightarrow -\,0.05\cdot 10^{x} = 190 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10^{x} = -3800$. Рішень немає.

34.5. Розв'язання логарифмічного рівняння третього типу (логарифми в показнику степеня), знаходиться логарифмуванням обох частин рівняння по вже присутній основі і запровадженням заміни:

$x^{\lg x - 4} = 0.001 \Leftrightarrow \lg x^{\lg x - 4} = \lg 0.001 \Leftrightarrow (\lg x - 4)\lg x = -3.$

Заміною: $a = \lg x$ отримаємо: $(a-4)a = -3 \Leftrightarrow a^2 - 4a + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=1,\\ a=3.\end{array}\right.$

Відповідь отримаємо зворотною заміною: $\left[\begin{array}{l}\lg x = 1,\\ \lg x = 3,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 1,\\ x = 1000.\end{array}\right.$

35.2. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:

$\sqrt{x+\sqrt{x+11}} + \sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x+\sqrt{x+11}} = 2 - \sqrt{x-\sqrt{x+11}} \Rightarrow$

$\Rightarrow x + \sqrt{x+11} = 4 - 4\cdot\sqrt{x-\sqrt{x+11}} + x - \sqrt{x+11} \Leftrightarrow 4\cdot\sqrt{x-\sqrt{x+11}} = 4 - 2\sqrt{x+11} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4\cdot(x - \sqrt{x+11}) = 4 - 4\sqrt{x+11} + x + 11 \Leftrightarrow 3x = 15 \Leftrightarrow x = 5.$

Перевірка: $\sqrt{5+4} + \sqrt{5-4} \neq 2$ показує, що корінь сторонній, рішень немає.

35.3. Розв'язання логарифмічного рівняння після переходу до спільної основи 0.5 проводиться за стандартною схемою першого типу:

$\log_{0.5}(x-1) - \log_2(x+1) = 2 \Leftrightarrow \log_{0.5}(x-1) + \log_{0.5}(x+1) = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{0.5}[(x-1)(x+1)] = 2 \Leftrightarrow x^2 - 1 = 0.25 \Leftrightarrow x^2 = 1.25 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{1.25}.$

Від`ємний розв'язок не належить області визначення логарифмічної функції.

Відповідь: $x = 0.5\sqrt{5}$.

35.4 Розв'язання показникового рівняння ведеться за інструкціями для конструкцій другого типу, в яких показники степеня відрізняються в декілька разів.

$13^{2x} - 2\cdot 13^x + 1 = 0$. Заміною $a = 13^x$ отримаємо: $a^2 - 2a + 1 = 0 \Leftrightarrow a = 1$.

Підставивши 1 у рівняння заміни, отримаємо: $13^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

35.5 Розв'язання нерівності найпростіше отримати наступним чином: оскільки завжди $|x-1| \leq |1| + |x|$, протилежна нерівність розв`язків не має.

$$|x-1| > 1 + |x| \Rightarrow x \in \varnothing.$$

36.2. Розв'язання ірраціонального рівняння досягається простим піднесенням в квадрат:

$$\sqrt{2-\frac{\sqrt{x}}{2-x}} = \frac{2}{\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow \begin{cases}2-\dfrac{\sqrt{x}}{2-x} = \dfrac{4}{2-x},\\ 2-x > 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4-2x-\sqrt{x} = 4,\\ x < 2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+\sqrt{x} = 0,\\ x < 2,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x}(2\sqrt{x}+1) = 0,\\ x < 2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sqrt{x} = 0,\\ x < 2,\end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

36.3. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 15.3.

36.4. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 15.4.

36.5. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 15.5.

37.2. Розв’язання цього завдання наведено в розв’язку до завдання 14.2.

37.3. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників степеня при спільній основі:

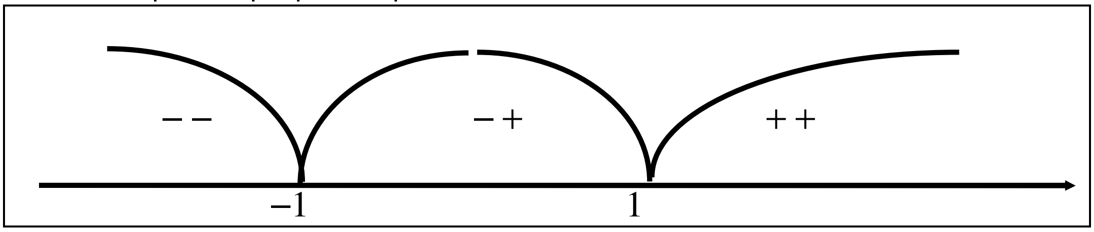
$2^{x-1} = 4\cdot\sqrt{(0.25)^5} \Leftrightarrow 2^{x-1} = 2^{2-5} \Leftrightarrow x - 1 = -3 \Leftrightarrow x = -2.$

37.4. Розв’язання логарифмічного рівняння отримаємо з визначення логарифму:

$$\log_{2x} 16 = 2 \Leftrightarrow 2\log_{2x} 4 = 2 \Leftrightarrow \log_{2x} 4 = 1 \Leftrightarrow 4 = 2x \Leftrightarrow x = 2.$$

37.5. Розв’язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$$4x - |\,x - 1\,| > |\,x + 1\,|.$$



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ 4x + x - 1 > -x - 1, \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 4x + x - 1 > 1 + x, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ 4x - x + 1 > 1 + x, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -1, \\ 6x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} -1 \le x \le 1, \\ 4x > 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ 2x > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \varnothing, \\ 0.5 < x \le 1, \\ x > 1, \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 0.5.$$

38.2. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників степеня при спільній основі:

$3^{3-x} = (1/27)^x \Leftrightarrow 3^{3-x} = 3^{-3x} \Leftrightarrow 3 - x = -3x \Leftrightarrow 2x = -3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{2}{3}.$

38.3. Розв’язання кубічного рівняння найпростіше вести вгадавши один корінь за теоремою про раціональні корені багаточлена з цілими коефіцієнтами (в цьому випадку $x = -1$). Після розкладання на множники пошук ще двох коренів зводиться до розв’язання квадратного рівняння:

$x^3 + 9x^2 + 11x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x^2 + 8x^2 + 8x + 3x - 3 = 0 \Leftrightarrow$

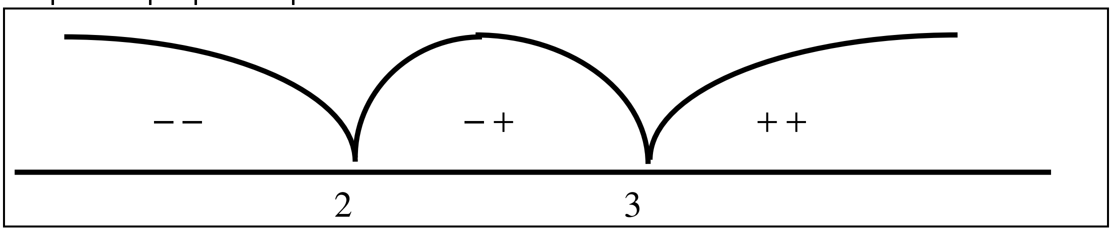
$\Leftrightarrow x^2(x + 1) + 8x(x + 1) + 3(x + 1) = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^2 + 8x + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -4 \pm \sqrt{13}. \end{array}\right.$

Відповідь: $x_1 = -1$, $x_{2.3} = -4 \pm \sqrt{13}$.

38.4. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 13.3.

38.5. Розв'язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$x + |x-3| > |x-2|$.



$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2, \\ x-x+3>-x+2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2\le x\le 3, \\ x-x+3>x-2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ x+x-3>x-2, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2, \\ x>-1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2\le x\le 3, \\ x<5, \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ x>1, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<x<2, \\ 2\le x\le 3, \\ x>3, \end{array}\right. \Leftrightarrow x>-1.$$

39.2. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 19.4.

39.3. Розв'язання логарифмічного рівняння після переходу до спільної основи 2 виконується за стандартною схемою першого типу:

$\log_2(x+12)\log_x 2 = 2 \Rightarrow \log_2(x+12) = 2\log_2 x \Rightarrow x+12 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 12 = 0$
$\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Перевірка належності коренів області визначення другий корінь відбраковує.
Відповідь: $x = 4$.

39.4. Розв'язання нерівності, що містить модуль, в цьому випадку простіше виконати нестандартним шляхом:

$$x - |5x+8| > 0 \Leftrightarrow x > |5x+8| \Leftrightarrow \begin{cases} x>|5x+8|, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>5x+8, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x<-8, \\ x>0, \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.$$

39.5. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 12.5.

40.2. Розв'язання тригонометричного рівняння побудовано на перетворенні його в добуток функцій одного аргументу, що повинен дорівнювати нулю:
$\cos 2x = 1 + \sin 2x \Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 1 + 2\sin x{\cdot}\cos x \Leftrightarrow 2\sin^2 x + 2\sin x{\cdot}\cos x = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin x{\cdot}(\sin x + \cos x) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}\sin x{\cdot}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = 0, \\ \sin(x + \dfrac{\pi}{4}) = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi k, k \in \mathrm{Z}, \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathrm{Z}. \end{array}\right.$

Розв'язки не перетинаються і тому ця сукупність і буде остаточним розв'язком.

40.3. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:
$\sqrt{(3x+5)} - \sqrt{3x} = \sqrt{(4x+5)} \Rightarrow 3x + 5 + 3x - 2\sqrt{(3x+5)}\cdot\sqrt{3x} = 4x + 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = 2\sqrt{(3x+5)}\cdot\sqrt{3x} \Rightarrow x^2 = 3x(3x + 5) \Leftrightarrow 8x^2 + 15x = 0 \Leftrightarrow 8x(x + \dfrac{15}{8}) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = -\dfrac{15}{8}. \end{array}\right.$ Від`ємний розв'язок не належить області визначення функції $\sqrt{3x}$, отже відповідь: $x = 0$.

40.4. Розв'язання показникового рівняння ведеться за інструкціями для конструкцій першого типу, в яких показники степеня відрізняються на число.
$5^x + 5^{x-1} = 2{\cdot}3^x \Leftrightarrow 5^x(1 + 5^{-1}) = 2{\cdot}3^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^x = \dfrac{2}{1.2} \Leftrightarrow \left(\dfrac{5}{3}\right)^x = \dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x = 1.$

40.5. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 10.5.

41.2. Розв'язання тригонометричного рівняння отримується перетворенням добутку тригонометричних функцій в суму:
$\sin 3x{\cdot}\sin 7x = \sin x{\cdot}\sin 9x \Leftrightarrow 0.5(\cos 4x - \cos 10x) = 0.5(\cos 8x - \cos 10x) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 8x - \cos 4x = 0 \Leftrightarrow -2\sin 6x{\cdot}\sin 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 6x = 0, \\ \sin 2x = 0, \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 6x = \pi k, k \in Z, \\ 2x = \pi n, n \in Z, \end{array}\right. \Leftrightarrow$

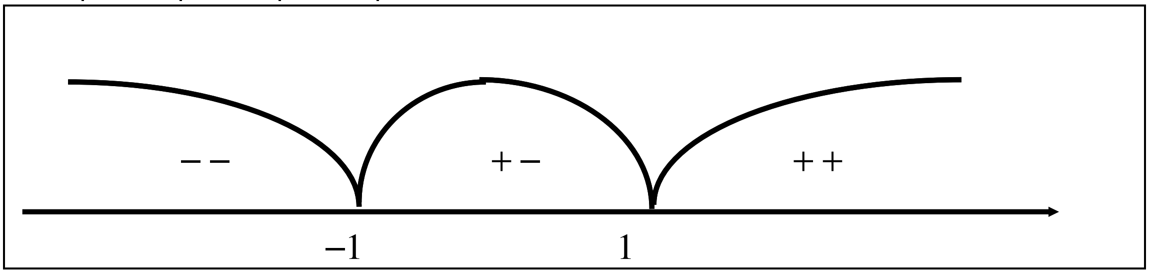
$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi k}{6}, k \in Z, \\ x = \dfrac{\pi n}{2}, n \in Z, \end{array}\right.$

Очевидно, що при $k = 3m$ корени першого рівняння включають в себе усі корені другого. Тому відповідь: $x = \frac{\pi k}{6}, k \in Z$.

41.3. Розв'язання даного ірраціонального рівняння легко бачити з оцінки: $\sqrt{7+\sqrt{7+x^2}} > \sqrt{7+\sqrt{4}} = 3$. Тому ця нерівність рішень не має.

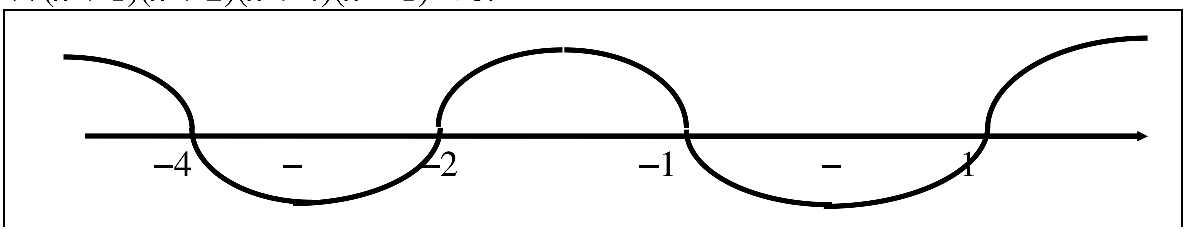
41.4. Розв'язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$$|x+1| - x > |x-1|.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ -x-x-1\ge -x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 1,\\ x+1-x\ge 1-x,\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ x+1-x\ge x-1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ x\le -1,\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 1,\\ x\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x>1,\\ x\le 2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ 0.\le x\le 1,\\ 1<x\le 2,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\le -2,\\ 0\le x\le 2.\end{array}\right.$$

41.5. Розв'язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів, для чого необхідно спочатку перенести все в одну сторону і розкласти на множники. Для спрощення записів запровадимо заміну $(x^2 + 3x) = a$, в результаті якої отримаємо: $(a + 1)(a - 3) < 5 \Leftrightarrow a^2 + a - 3a - 3 < 5 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 - 2a - 8 < 0 \Leftrightarrow (a - 4)\cdot(a + 2) < 0$. Після зворотної заміни:
$(x^2 + 3x + 1)(x^2 + 3x - 3) < 5 \Leftrightarrow (x^2 + 3x + 2)(x^2 + 3x - 4) < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)(x+4)(x-1) < 0$.



Відповідь: $(-4 < x < -2) \cup (-1 < x < 1)$.

42.2. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 7.2.

42.3. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 7.3.

42.4. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 7.4.

42.5. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 7.5.

43.2. Для розв'язання тригонометричного рівняння застосовуються формули зниження степеня:
$\sin^4 x - \cos^4 x = 1 \Leftrightarrow (\sin^2 x - \cos^2 x)\cdot(\cos^2 x + \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow -(\cos^2 x - \sin^2 x) = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow -\cos 2x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + 2\pi k,\ k\in Z, \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}(1+2k), k \in Z$.

43.3. Розв'язання ірраціонального рівняння йде стандартним шляхом піднесення до квадрату так, щоб коефіцієнти при старшому степені x скорочувалися або робилися якомога меншими за модулем:
$\sqrt{(12x+4)} - \sqrt{(8x-4)} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3x+1} = \sqrt{2x-1} + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3x + 1 = 2x - 1 + 2\sqrt{2x-1} + 1 \Leftrightarrow 2\sqrt{2x-1} = x + 1 \Rightarrow 4(2x-1) = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 5. \end{array}\right.$ Перевірка підтверджує, що обидва розв'язки підходять.

43.4. В цьому випадку доцільно позбавитися модулів піднесенням у квадрат наперед відомо невід`ємних правої та лівої частин:
$| 4x - 1 | > | x + 1 | \Leftrightarrow (4x-1)^2 > (x+1)^2 \Leftrightarrow (4x-1)^2 - (x+1)^2 > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 5x(3x-2) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0, \\ x > \dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$

43.5. Розв'язання показникового рівняння полягає в діленні на один з квадратів з подальшим розв'язанням рівняння як квадратного (конструкція другого типу):
$2^{2x} - 6^x = 3^{2x} \Leftrightarrow \dfrac{2^{2x}}{3^{2x}} - \dfrac{2^x\cdot 3^x}{3^{2x}} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \log_{\frac{2}{3}} \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

44.2. Розв'язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників степеня при спільній основі:
$2^x \cdot 5^x = 0.01\cdot 10^{2x+5} \Leftrightarrow 10^x = 10^{-2+2x+5} \Leftrightarrow x = 2x + 3 \Leftrightarrow x = -3$.

44.3. Розв’язання логарифмічного рівняння починаємо з приведення до спільної основи 2 і продовжуємо стандартно, за другою схемою, за допомогою заміни $y = \log_2 x$, оскільки присутній логарифм в знаменнику:

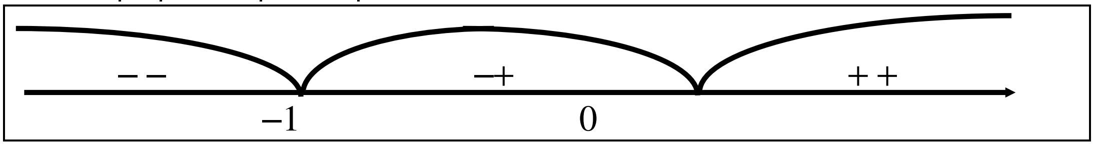
$\log_x 2\ \log_{2x} 4 = \log_{4x} 4 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_2 x}\cdot\dfrac{2}{\log_2 x+1} = \dfrac{2}{\log_2 x+2}$. Заміною $y = \log_2 x$ отримаємо: $\dfrac{1}{y}\cdot\dfrac{2}{y+1} = \dfrac{2}{y+2} \Rightarrow y + 2 = y(y + 1) \Leftrightarrow y^2 = 2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2}$.

Перевіркою впевнимося, що обидва значення y підходять.

Зворотною заміною отримаємо відповідь: $\left[\begin{array}{l}\log_2 x = \sqrt{2},\\ \log_2 x = -\sqrt{2},\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = 2^{\sqrt{2}},\\ x = 2^{-\sqrt{2}}.\end{array}\right.$

44.4. Розв’язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$$2|x| < x + |x + 1|.$$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ -2x<x-x-1,\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 0,\\ -2x<x+x+1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ 2x<2x+1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-1,\\ x>0.5,\end{cases}\\ \begin{cases}-1\le x\le 0,\\ 4x>-1,\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\ 0<1,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ -\dfrac{1}{4}<x\le 0,\\ x>0,\end{array}\right. \Leftrightarrow x>-\dfrac{1}{4}.$$

44.5. Розв’язання цього завдання наведено в розв’язку до завдання 5.5.

45.2. Розв’язання тригонометричного рівняння виконується шляхом зведення до елементарного рівняння через розв’язок квадратного рівняння:

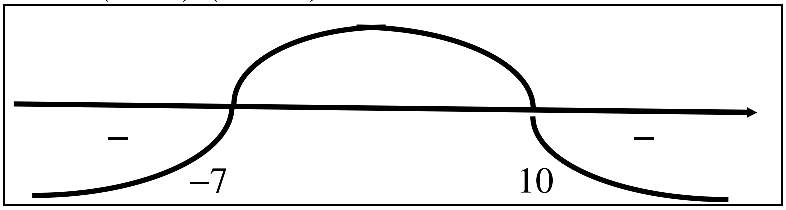
$\sin^2 2x + \sin(2x - \pi) = 1 \Leftrightarrow \sin^2 2x - \sin 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow 2x = (-1)^k \arcsin\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} + \pi k,\ k\in Z, \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = (-1)^{k+1}\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} + \dfrac{\pi k}{2},\ k\in Z.$

45.3. Розв’язання такої нерівності виконується стандартно методом інтервалів:

$(x+7)^3(10-x)<0.$



Відповідь: $(x<-7) \cup (x>10)$.

45.4. Розв'язання цього завдання наведено в розв'язку до завдання 3.4.

45.5. Знайти загальне зниження ціни в %, якщо ціну на товар знизили спечатку на 8%, згодом – ще на 5%, а потім – ще на 10%, легко в прямому перерахунку ціни: Якщо первинну ціну товару прийняти за 1, то після першого зниження маємо 0.92, після другого – $0.92 \cdot 0.95$, а після третього – $0.92 \cdot 0.95 \cdot 0.9 = 0.7866 =$

$= 1 - 0.2134$. Тому загальне зниження ціни в % складає 21.34%.

46.2 Розв'язання ірраціонального рівняння з параметрами ведеться за стандартною схемою, виключно еквівалентними переходами з підстановкою отриманого результату в усі умови:

$$\sqrt{(a-x)} - \sqrt{(x+a)} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{(a-x)} = \sqrt{(x+a)} \Leftrightarrow \begin{cases} a-x = x+a, \\ a-x \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ a-0 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0, \\ a \ge 0. \end{cases}$$

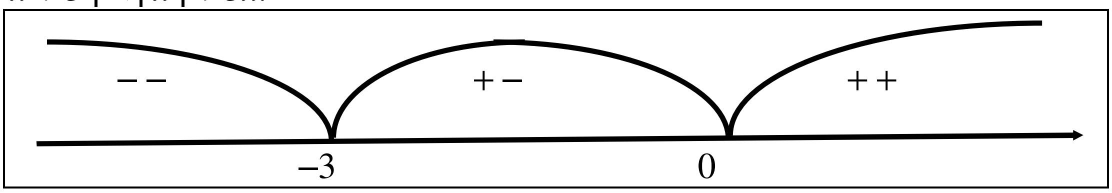
Відповідь: для $a<0$ рішень немає, для $a \ge 0$ рішення $x=0$.

46.3. Розв'язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників степеня при спільній основі:

$2^x \cdot 5^x = 0.001 \cdot (10^{x-1})^5 \Leftrightarrow 10^x = 10^{-3+5x-5} \Leftrightarrow x = 5x - 8 \Leftrightarrow 4x = 8 \Leftrightarrow x = 2.$

46.4. Розв'язання стандартної нерівності, що містить модулі, йде шляхом відкладання на числової осі коренів виразів під знаком модуля, визначення знаків цих виразів на інтервалах неперервності та розкриття модулів окремо на кожному інтервалі з відповідним знаком:

$|x+3| < |x| + 3x.$



$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-3,\\-x-3<-x+3x,\end{cases}\\ \begin{cases}-3\le x\le 0,\\x+3<-x+3x,\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\x+3<x+3x,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<-3,\\3x>-3,\end{cases}\\ \begin{cases}-3\le x\le 0,\\x>3,\end{cases}\\ \begin{cases}x>0,\\3x>3,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\x\in\varnothing,\\x>1,\end{array}\right. \Leftrightarrow x>1.$$

46.5. Вирішення питання, при яких значеннях параметра p рівняння $x^2 + x + p = 0$ має дійсні корені, зводиться до вивчення умови невід`ємності дискримінанту.

$1 - 4p \geq 0 \Leftrightarrow 4p \leq 1 \Leftrightarrow p \leq 0.25.$

47.2. Розв'язання нерівності стандартно можна подати у вигляді двох систем, в залежності від знаку правої частини:

$$\sqrt{x^2-2x} > 4-x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4-x<0,\\x^2-2x\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}4-x\ge 0,\\x^2-2x>(4-x)^2,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>4,\\x(x-2)\ge 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 4,\\6x>16,\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>4,\\x\ge 2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\le 4,\\x>\dfrac{8}{3},\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4,\\\dfrac{8}{3}<x\le 4,\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x > \frac{8}{3}.$$

47.3. Розв'язання тригонометричного рівняння отримаємо подавши обидві частини рівняння через $\sin x$ и $\cos x$:

$$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 2x = \sin x \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin 2x}{\cos 2x} - \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

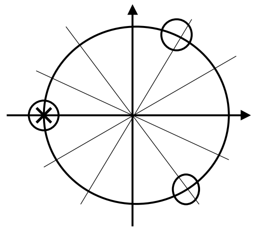
$$\Leftrightarrow \frac{\sin x\cos 2x - \cos x\sin 2x}{\cos x\cos 2x} - \sin x = 0 \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{\cos x\cos 2x} - \sin x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\sin x}{\cos x\cos 2x}(1 + \cos x\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \frac{-\sin x}{\cos x\cos 2x}\left[1 + \frac{1}{2}(\cos x + \cos 3x)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{-\sin x}{\cos x\cos 2x}(2 + \cos x + \cos 2x) = 0\ .$$

Вираз у дужках дорівнює нулю тільки тоді,
коли одночасно виконуються дві умови:

$$\begin{cases}\cos x = -1,\\ \cos 3x = -1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \pi(1+2k),\ k\in Z,\\ x = \dfrac{\pi}{3}(1+2n),\ n\in Z.\end{cases}$$



На тригонометричному колі легко видно, що усі рішення першого рівняння, позначені хрестиком, задовольняють і другому, рішення якого позначені кружечком. Тому, в результаті маємо групу рішень: $x = \pi(1 + 2k)$, $k\in Z$.

Отже, прирівнявши чисельник нулю, отримаємо сукупність рішень: $\left[\begin{array}{l}\sin x = 0,\\ x=\pi(1+2k), k\in Z,\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi m, m\in Z,\\ x=\pi(1+2k), k\in Z,\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \pi m,\ m\in Z$, оскільки усі рішення другого рівняння є рішеннями і першого. Тепер залишилося відбракувати ті рішення (якщо такі знайдуться), що не задовольняють умові ненульового значення знаменника: $\begin{cases}x=\pi m, m\in Z,\\ \cos x\neq 0,\\ \cos 2x\neq 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pi m, m\in Z,\\ x\neq \dfrac{\pi}{2}(1+2k), k\in Z,\\ x\neq \dfrac{\pi}{4}(1+2n), n\in Z,\end{cases} \Leftrightarrow x = \pi m,\ m\in Z.$

47.4. Для розв'язку рівняння зручно ввести проміжну змінну $y = 81^{\cos^2 x}$. Використавши тотожність $\sin^2 x = 1-\cos^2 x$, вихідне рівняння можна переписати як $81y^{-1} + y = 30$. Оскільки y ніколи не перетворюється в нуль, можна обидві частини рівняння домножити на y, після чого y легко знайти розв`язавши тривіальне квадратне рівняння: $y = 3$ или $y = 27$.

Повертаючись до змінної x, отримаємо два варіанти, що за допомогою формул зниження степеня можна звести до одного:

$$\left[\begin{array}{l}4\cos^2 x = 1\\ \\ 4\cos^2 x = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2(1+\cos 2x) = 1\\ \\ 2(1+\cos 2x) = 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x = -1/2\\ \\ \cos 2x = 1/2\end{array}\right. \Leftrightarrow \cos^2 2x = 1/4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1+\cos 4x)/2 = 1/4 \Leftrightarrow \cos 4x = -1/2 \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\,k,\ k\in Z.$$

47.5. Розв’язання логарифмічного рівняння ведеться послідовним застосуванням визначення логарифму:

$$\log_{x^2+6x+8}\log_{2x^2+2x-5}(x^2-2x) = 0 \Rightarrow \log_{2x^2+2x-5}(x^2-2x) = 1 \Rightarrow (x^2-2x) = 2x^2+2x-5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+4x-5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-5.\end{array}\right.$$

Перевіркою впевнимося, що підходить тільки другий розв’язок.

Відповідь: $x = -5$.

48.2. Розв’язання нерівності стандартно можна подати у вигляді системи трьох більш простих нерівностей:

$$\sqrt{x^2-2x} < 4-x \Leftrightarrow \begin{cases} 4-x\ge 0, \\ x^2-2x\ge 0, \\ x^2-2x<(4-x)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4, \\ x(x-2)\ge 0, \\ x^2-2x<x^2-8x+16, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 4, \\ x(x-2)\ge 0, \\ x<\dfrac{8}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2)\ge 0, \\ x<\dfrac{8}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{8}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x\ge 2, \\ x\le 0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\dfrac{8}{3}, \\ x\ge 2, \end{cases} \\ \begin{cases} x<\dfrac{8}{3}, \\ x\le 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\le x<\dfrac{8}{3}, \\ x\le 0. \end{array}\right.$$

48.3. Розв’язання тригонометричного рівняння отримується застосуванням формул зниження степеня:

$\cos 4x - 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos 4x - (1+\cos 2x) = 1 \Leftrightarrow 2\cos^2 x - 1 - 1 - \cos 2x = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2x = -1, \\ \cos 2x = 1.5, \end{array}\right. \Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x = \pi\,(1+2k),\ k\in Z, \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2}(1+2k),\ k\in Z.$

48.4. Розв’язання показникового рівняння полягає в простому прирівнюванні показників степеня при спільній основі:

$(1/4)^{\frac{4-x}{2}} = 8^x \Leftrightarrow 2^{x-4} = 2^{3x} \Leftrightarrow x-4 = 3x \Leftrightarrow x = -2.$

48.5. Розв’язання логарифмічного рівняння ведеться послідовним застосуванням визначення логарифму:

$\log_{x^2+6x+5}\log_{2x^2+2x-5}(x^2-2x) = 0 \Rightarrow \log_{2x^2+2x-5}(x^2-2x) = 1 \Rightarrow (x^2-2x) = 2x^2+2x-5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+4x-5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -5. \end{array}\right.$

Перевіркою впевнимося, що підходить тільки другий розв’язок.

Відповідь: $x = -5$.

Рекомендована і використовувана література.

1. С.И.Демченко. Киевские городские математические олимпиады (рекомендации в помощь учителям математики для работы математических кружков) Киев: Киевская книжная типография научной книги, 1978.– 43 с.: ил.
2. С.И.Демченко, В.С.Донченко. Материалы вступительных экзаменов по математике на факультет кибернетики Киевского госуниверситета (рекомендации в помощь учителям математики) Киев: Киевская книжная типография научной книги, 1981.– 56 с.: ил.
3. А.Г.Цыпкин, А.И.Пинский. Справочное пособие по методам решения задач по математике Москва: Наука, 1983.– 416 с.: ил.
4. Сборник задач по математике для поступающих во втузы. В. К. Егоров, В. В. Зайцев, Б. А. Кордемский и др. под ред. М. И. Сканави. – 7-е изд., перераб. и доп. – Москва: Высшая школа, 1994.–528 с.:ил.
5. К.И.Мазур. Решебник основных конкурсных задач по математике из сборника под редакцией М.И.Сканави. Киев: Феникс, 1998.–672 с.: ил.
6. Г.П.Бевз. Алгебра для 7-9 кл. Пособие для школ с углублённым изучением математики. Киев: Освіта, 1998.–319 с.
7. О.В.Микулин, О.Г.Кукуш. Геометрия для 7-9 кл., Пособие для школ с углублённым изучением математики. Киев: ВТФ «Перун», 1998.–352 с.
8. И.Г.Коваленко, В.Я.Кривошеев, Л.Я.Лемберский. Алгебра для 8 кл., Пособие для школ с углублённым изучением математики. Киев: Освіта, 1995.–303 с.
9. И.Г.Коваленко, В.Я.Кривошеев, О.В.Старосельцев. Алгебра для 9 кл., Пособие для школ с углублённым изучением математики. – 3-е изд., перераб. – Киев: Освіта, 1998.–288 с.
10. Н.Я.Виленкин, О.С.Ивашев-Мусатов, С.И.Шварцбурд Алгебра и математический анализ для 9 кл. Пособие для школ с углублённым изучением математики. – 2-е изд., перераб. – Москва: Просвещение,1988. –352 с.: ил.
11. А.Д.Александров, А.Л.Вернер, В.И.Рыжик. Геометрия для 9–10 кл. Пособие для школ с углублённым изучением математики. – 2-е изд., перераб. – Москва: Просвещение,1988.–480 с.: ил.
12. С.И.Демченко, С.С.Демченко, А.Г.Чумаков. Методы решения задач по математике.. – 2-е изд., перераб. – Киев: КиСУ, 2000.–127 с.: ил.

Сергій Іванович Демченко,
Олександр Георгійович Чумаков.

Методи розв`язання задач з математики. Посібник для поступаючих у Київський інститут «Слов'янський університет»

Наукові редактори:
А.В.Кузьмін, кандидат фізико-математичних наук,
В.М.Кириленко, кандидат технічних наук,
Г.М.Корчинський, кандидат фізико-математичних наук,
Т.М.Литвиненко, кандидат економічних наук.

Редактор українського випуску Ганна Володимирівна Золотих.

Київський інститут «Слов'янський університет».
Факультет економіки і менеджменту.
Кафедра фінансів і банківської справи.
01150, м.Київ, вул.А.Барбюса 9.

E-mail: galina@narbank.kiev.ua

Підписано до друку 31.07.2000. Формат 60×84/16. Папір газетний.
Гарнітура Таймс. Ум.др.л.7,9. Тираж 1000 экз. Зак.9-90.
Надруковано на Полиграфічній дільниці КіСУ з оригиналів авторів.
02047 м.Київ, вул.Дружковська 6а.