8 МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ

Коливальні рухи є дуже важливі рухи, оскільки вони широко поширені і спостерігаються в багатьох фізичних явищах. Коливається вантаж на кінці пружини, камертон, струна гітари чи скрипки, коливаються мости і будинки, корпуси машин (автомобіля, тепловоза, електровоза) на ресорах, коливальні рухи здійснюють атоми і іони біля вузлів кристалічної гратки твердих тіл, електричні і магнітні (електромагнітні) коливання здійснюються в радіо – і телеприймачах тощо. Коливальні рухи або просто коливання – це обмежені рухи, що повторюються відносно деякого середнього стану, який в багатьох випадках може бути станом рівноваги. Характерною особливістю всіх коливальних рухів є їхня періодичність, тобто регулярна повторюваність через певні однакові проміжки часу, які називають **періодом коливання.**

Залежно від фізичної природи величини, яка зазнає періодичної зміни, розрізняють коливання механічні, електромагнітні, електромеханічні та інші.

Коливання (всілякі) широко застосовуються в техніці, хоча не слід забувати, що в тих чи інших випадках вони можуть проявляти і шкідливу дію.

Предметом теорії коливань є вивчення закономірностей коливальних процесів у різних динамічних системах.

§ 8.1. Коливання пружини

Найпростішим прикладом періодичного руху є коливання вантажу на кінці пружини. Інші види коливальних рухів виявляють велику схожість з цими коливаннями, тому ми їх розглянемо більш детально. Масою пружини і тертям ми знехтуємо і будемо вважати, що пружина розміщена горизонтально (рис. 8.1). Вантаж масою *m* прикріплений до кінця пружини і може рухатися по горизонтальній поверхні. У положенні рівноваги вантажу пружина недеформована. Це положення виберемо за початок координат, а вісь координат *0X* спрямуємо вправо.

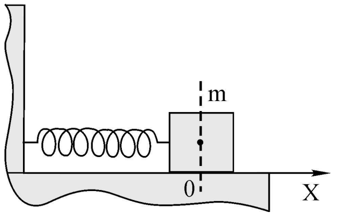


Рис. 8.1

Якщо змістити вантаж від положення рівноваги вправо, розтягуючи пружину, або вліво, стискаючи її, то пружина діє на вантаж з силою, яка, за законом Гука, дорівнює

$$F = -kx, \tag{8.1}$$

де k – коефіцієнт пропорційності (жорсткість пружини), x – зміщення вантажу від положення рівноваги. Знак мінус означає, що повертаюча сила протилежна за напрямком зміщенню x: $F < 0$ при $x > 0$, $F > 0$ при $x < 0$.

Підставляючи значення сили із (8.1) в формулу другого закону Ньютона, отримуємо:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{8.2}$$

Останнє рівняння перепишемо у такому вигляді:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0, \tag{8.3}$$

або

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0,} \tag{8.3, а}$$

де $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$.

Рівняння (8.3) називають **диференціальним рівнянням вільних коливань**. Розв'язком диференціального рівняння (8.3) є гармонічна функція

$$\boxed{x = A\cos(\omega t + \varphi_0),} \tag{8.4}$$

де x – зміщення вантажу від положення рівноваги, A – максимальне зміщення вантажу від положення рівноваги, яке називають **амплітудою** коливань, $\omega t + \varphi_0$ – фаза коливань, φ_0 – початкова фаза, ω – циклічна (колова) частота гармонічних коливань.

Початкова фаза показує відставання або випередження, з яким досягається максимальне зміщення A по відношенню до моменту часу $t = 0$. При $\varphi_0 = 0$ ми маємо $x = A\cos\omega t$ (рис. 8.2), а при $\varphi_0 = -\pi/2$, $x = A\cos(\omega t - \pi/2) = A\sin\omega t$ (рис. 8.3).

Формула (8.4) є аналітичний запис гармонічних коливань. Із неї видно, що зміщення вантажу (далі вантаж замінимо матеріальною точкою з масою m) змінюється за косинусоїдальним законом. Форма кривої залежності (8.4) повністю визначається амплітудою A і циклічною частотою ω, а її розташування, як ми уже бачили вище – початковою фазою.

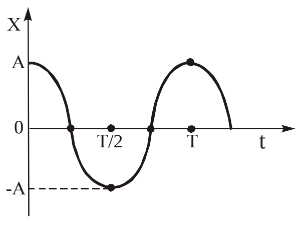


Рис. 8.2

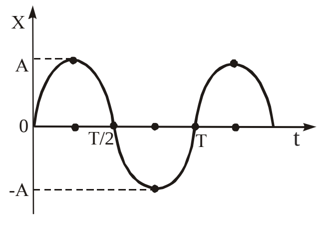


Рис. 8.3

Амплітуда і початкова фаза коливань визначаються початковими умовами руху, тобто положенням і швидкістю матеріальної точки в момент часу $t = 0$.

Період коливань матеріальної точки можна знайти за формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \tag{8.5}$$

Враховуючи, що $\omega^2 = k/m$, отримуємо період коливань пружинного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}. \tag{8.6}$$

Кількість коливань за секунду називають **лінійною частотою**. Згідно з означенням

$$\nu = \frac{1}{T}. \tag{8.7}$$

Частоту вимірюють в герцах (Гц).

Об'єднуючи формули (8.5) і (8.7), знаходимо, що

$$\boxed{\omega = 2\pi\nu.} \tag{8.8}$$

Враховуючи (8.7) і (8.8), вираз (8.4) перепишемо у такому вигляді:

$$x = A\cos(\frac{2\pi\, t}{T} + \varphi_0) \quad \text{або} \quad x = A\cos(2\pi\nu\, t + \varphi_0)\,. \tag{8.9}$$

У відповідності з (8.5), (8.6) і (8.8)

$$\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{або} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\,. \tag{8.10}$$

Із формули (8.10) видно, що чим більша маса тіла, що коливається, тим нижча частота, і чим жорсткіша пружина, тим вища частота.

Якщо вираз (8.4) продиференціювати, то отримаємо швидкість і прискорення коливальної системи:

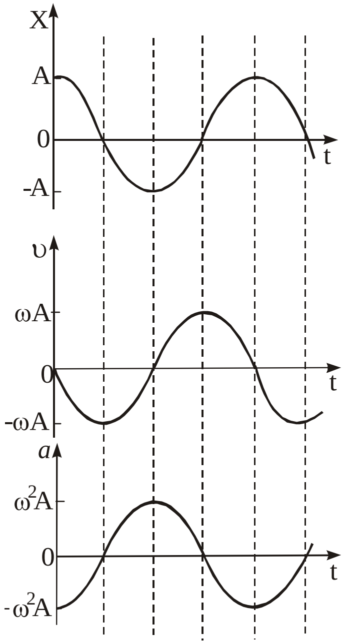


Рис. 8.4

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0), \tag{8.11}$$

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0). \tag{8.12}$$

Таким чином, швидкість і прискорення коливальної системи також змінюються за синусоїдальним законом. На рис. 8.4 наведено залежність від часу зміщення, швидкості і прискорення матеріальної точки, що коливається на пружині, для випадку, коли $\varphi_0 = 0$. Із рис. 8.4 видно, що швидкість матеріальної точки максимальна

$$\upsilon_{\max} = \omega A = A\sqrt{k/m}, \tag{8.12, a}$$

коли матеріальна точка проходить положення рівноваги ($x = 0$), і швидкість дорівнює нулю ($\upsilon = 0$) в точках максимального зміщення ($x = \pm\omega A$). Максимальне значення прискорення

$$a_{\max} = \omega^2 A = A(k/m)$$

відповідає точкам, коли $x = \pm A$, а при $x = 0$ прискорення дорівнює нулю.

В таблиці 8.1. зібрані основні характеристики гармонічного коливання.

Таблиця 8.1

Зміщення	$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$
Швидкість	$\upsilon = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$
Прискорення	$a = -A\,\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$
Кутова частота	$\omega = \sqrt{k/m}$
Період	$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m/k}$
Лінійна частота	$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

Приклад 8.1. *Пружина підвішена вертикально на нерухомій опорі. Коли до нижнього кінця прикріплюють тіло масою* m *= 2,5 кг, пружина розтягується на* x *= 15 см. Опісля те ж тіло і пружину встановлюють на ідеальну без тертя горизонтальну поверхню стола (див. рис. 8.1). Далі пружину розтягують на* x_0 *= 8 см від її положення рівноваги і відпускають. Знайти жорсткість* k_0 *пружини, колову частоту* ω*, лінійну частоту* ν*, період* T *коливань та початкову швидкість тіла* υ_0.

Розв'язок. *1) Жорсткість пружини визначимо за допомогою формули (8.1), скориставшись даними із експерименту з підвішеним на пружині тілом:*

$$k = \frac{F}{x} = \frac{mg}{x} = \frac{(2{,}5\,кг)(9{,}8\,м/с^2)}{0{,}15\,м} = 163{,}3\ \frac{Н}{м}.$$

Далі знаходимо:

2) $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = \sqrt{\dfrac{163\ Н/м}{2{,}5\ кг}} = 8{,}07\ с^{-1}.$

3) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2(3{,}14)}{8{,}07 с^{-1}} = 0{,}78\ с.$

4) $\nu = \dfrac{1}{T} = \dfrac{1}{0{,}78\ с} = 1{,}28\ Гц.$

5) $\upsilon_0 = x_0\omega = (0{,}08\ м)(8{,}07\ с^{-1}) = 0{,}646\ м/с.$

Тут $x_0 = A$ *(див. табл. 8.1) – амплітуда коливань.*

Приклад 8.2. *Тарган масою* m_1 *= 0,30 г попав в павутину, сплетену павуком. Павутина коливається з частотою* $\nu_1 = 15$ *Гц. а) Визначити значення* k *для павутини. б) З якою частотою коливатиметься павутина, якщо в неї попаде комаха масою* m_2 *= 0,10 г?*

Розв'язок. *а) Пружність павутини (величину* k*) виразимо із формули 8.10:*

а) $k = 4\pi^2 m_1 \nu_1^2 = 4(3{,}14)^2(0{,}30\cdot 10^{-3} кг)(15\,с^{-1})^2 = 2{,}66\ Н/м.$

б) $\nu_2 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m_2}} = \dfrac{1}{2(3{,}14)}\sqrt{\dfrac{2{,}66\ Н/м}{0{,}10\cdot 10^{-3} кг}} = 26\ Гц.$

§ 8.2. Енергія гармонічного осцилятора

Систему, яка здійснює гармонічні коливання, прийнято називати **гармонічним осцилятором**. Прикладом гармонічного осцилятора може бути вантаж масою m, підвішений до кінця пружини, масою якої можна знехтувати.

Потенціальна енергія такого гармонічного осцилятора (розтягнутої пружини) дорівнює

$$W_n = \frac{1}{2}kx^2, \tag{8.13}$$

де x – відстань, на яку розтягнуто пружину від положення рівноваги.

Кінетична енергія осцилятора – це енергія руху, тому

$$W_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2, \tag{8.14}$$

де υ – швидкість вантажу масою m на відстані x від положення рівноваги.

Повна механічна енергія осцилятора дорівнює сумі потенціальної і кінетичної енергії:

$$W = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{8.15}$$

У випадку гармонічних коливань (осцилятор ідеальний) тертя відсутнє, тому повна енергія W зберігається. Тобто,

$$W = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}kx^2 = const. \tag{8.16}$$

Оскільки вантаж знаходиться в русі (здійснює коливання), величини x і υ весь час змінюються. Інакше кажучи, кінетична енергія переходить в потенціальну і навпаки. В крайніх точках зміщення вантажу $x = \pm A$ швидкість дорівнює нулю $(\upsilon = 0)$ і вся енергія переходить в потенціальну:

$$W = \frac{1}{2}m(0)^2 + \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kA^2. \tag{8.17}$$

Таким чином, **повна механічна енергія гармонічного осцилятора пропорційна квадрату амплітуди коливань**. В положенні рівноваги ($x = 0$) вся енергія переходить в кінетичну:

$$W = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}k(0)^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2, \tag{8.18}$$

де $\upsilon_{\max}^2$ – максимальна швидкість, яка досягається при коливаннях. Таким чином, $W = (1/2)kA^2$ при $x = \pm A$ і $W = (1/2)m\upsilon_{\max}^2$ при $x = 0$. Іншими словами

$$W = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2. \tag{8.19}$$

Отже, **під час коливання кінетична енергія тіла (вантажу) повністю перетворюється в потенціальну енергію деформованої пружини і навпаки**. В проміжних точках як кінетична, так і потенціальна енергія не дорівнюють нулю, а оскільки енергія зберігається, то маємо:

$$W = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2. \tag{8.20}$$

Із останньої рівності отримуємо, що

$$\upsilon = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}, \tag{8.21}$$

або, оскільки $\upsilon_{max} = A\sqrt{k/m}$ (8.12, а), маємо

$$\upsilon = \pm\upsilon_{\max}\sqrt{1 - x^2/A^2}. \tag{8.22}$$

Із (8.22) ми знову бачимо, що швидкість υ максимальна при $x = 0$ і дорівнює нулю при $x = \pm A$.

Насамкінець, врахувавши, що $k = m\omega^2$ (див. табл. 8.1) і $\upsilon_{\max} = A\sqrt{k/m} = \omega A$, отримуємо, що

$$W = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{mA^2\omega^2}{2}, \tag{8.23}$$

або

$$W = \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 = \frac{mA^2\omega^2}{2}. \tag{8.24}$$

Отже, **повна енергія гармонічного осцилятора в будь-який момент часу прямо пропорційна масі тіла, квадрату амплітуди коливання і квадрату циклічної частоти**.

Приклад 8.3. *Тіло масою* $m = 1{,}0$ *кг здійснює коливання за законом* $x = 0{,}42\cos 7{,}40\,t$*, де t вимірюється в секундах, а x – в метрах. Знайти: а) амплітуду A; б) колову та лінійну частоту; в) повну енергію; г) кінетичну та потенціальну енергію при* $x = 0{,}16$ *м.*

Розв'язок. *а) Виходячи із закону, згідно якого здійснюються коливання,*

$$A = 0{,}42\ м.$$

б) Колова частота також задана

$$\omega = 7{,}40\ с^{-1}, \quad а \quad \nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{7{,}40\ с^{-1}}{2(3{,}14)} = 1{,}18\ Гц.$$

в) Повну енергію знайдемо, скориставшись формулою (8.24):

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2} = \frac{(1{,}0\,кг)(0{,}42\,м)^2(7{,}40\,с^{-1})^2}{2} = 4{,}83\ Дж.$$

г) Потенціальну та кінетичну енергію знайдемо за формулами:

$$W_п = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 = \frac{1}{2}(1{,}0\ кг)(7{,}40\ с^{-1})^2(0{,}16\ м)^2 = 0{,}7\,Дж.$$

$$W_k = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{1}{2}m\omega^2(A^2 - x^2) = \frac{1}{2}(1{,}0\,кг)(7{,}40\,с^{-1})^2\left[(0{,}42\,м)^2 - (0{,}16м)^2\right] = 4{,}13\ Дж.$$

Тут враховано формулу (8.21) та формулу $\omega = \sqrt{k/m}.$

§ 8.3. Додавання гармонічних коливань методом векторних діаграм

Можливі випадки (і достатньо часті), коли тіло приймає участь в кількох одночасних коливальних рухах. Наприклад, тіло коливається на вертикальній пружині, підвішеній на довгій металевій перекладині (рис. 8.5). Коливання перекладини також змушують тіло коливатися у вертикальному напрямку. Таким чином, тіло бере участь одночасно у двох коливаннях однакового напрямку. Щоб знайти рівняння результуючого коливання, необхідно ці два коливання додати. Існує кілька способів додавання гармонічних коливань. Один із дуже зручних і простих способів базується на методі векторних діаграм. Цей метод полягає в наступному.

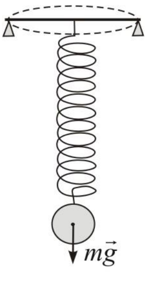


Рис. 8.5

Представимо гармонічне коливання

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) \tag{8.25}$$

у векторній формі. Для цього із початку осі абсцис (точки 0) під кутом φ проведемо вектор $\vec{A}$, проекція якого на вісь $0X$ дорівнює $A\cos\varphi$ (рис. 8.6). Якщо вектор $\vec{A}$ рівномірно обертається проти годинникової стрілки з кутовою швидкістю ω, то проекція його на вісь OX змінюється з часом за законом (8.25). Зауважимо, що при цьому $\varphi = \omega t + \varphi_0$, де φ_0 – початкове значення φ.

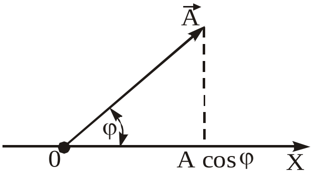


Рис. 8.6

Застосуємо цей метод для додавання двох коливань, які відбуваються вздовж однієї прямої. Рівняннями таких коливань є

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1), \\ x_2 &= A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{8.26}$$

Для спрощення припустимо, що частоти цих коливань однакові ($\omega_1 = \omega_2 = \omega$), тоді результуюче зміщення тіла

$$x = x_1 + x_2 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Таке додавання виконаємо за допомогою векторної діаграми. Зобразимо вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ в початковий момент часу під кутами φ_1 і φ_2 до осі $0X$ (рис. 8.7). Вектор $\vec{A}$ – амплі-

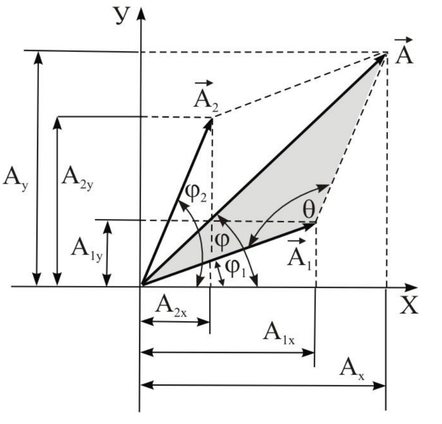


Рис. 8.7

туда результуючого коливання. Оскільки вектори $\vec{A}_1$ і $\vec{A}_2$ обертаються з однаковою кутовою швидкістю ω, то і результуючий вектор $\vec{A}$ буде обертатися з тією ж кутовою швидкістю. Отже, результуюче коливання є гармонічне, з циклічною частотою ω:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi). \tag{8.27}$$

Амплітуду результуючого коливання A знайдемо за теоремою косинусів, застосовуючи її до затемненого трикутника (рис. 8.7). Тоді

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2 \cos\theta.$$

Оскільки $\cos\theta = \cos[\pi - (\varphi_2 - \varphi_1)] = -\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$, то

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \tag{8.28}$$

Початкову фазу результуючого коливання знайдемо також з рис. 8.7:

$$tg\varphi = \frac{A_y}{A_x} = \frac{A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2}{A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2}, \tag{8.29}$$

де $A_y = A_{1y} + A_{2y} = A_1 \sin\varphi_1 + A_2 \sin\varphi_2$, $A_x = A_{1x} + A_{2x} = A_1 \cos\varphi_1 + A_2 \cos\varphi_2$.

Із формули (8.28) видно, що амплітуда A результуючого коливання залежить тільки від різниці фаз складових коливань. Якщо $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$, де $k = 0, 1, 2, ...$, $\cos 2k\pi = 1$, то $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$, тобто **амплітуда результуючого коливання дорівнює сумі амплітуд складових коливань**. Коли $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1)\pi$, де $k = 0, 1, 2, ...$, $\cos(2k+1)\pi = -1$ (в цьому випадку складові коливання коливаються в протилежних фазах), то $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$, тобто **амплітуда A результуючого коливання дорів-**

нює різниці амплітуд складових коливань.

Якщо частоти коливань, які додаються, не однакові, то складне коливання уже не буде гармонічним.

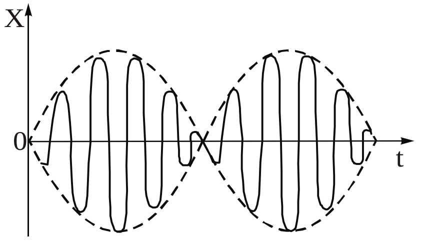


Рис 8.8

Цікавим є випадок, коли частоти коливань, що додаються, мало відрізняються одна від одної: $\omega_1 \approx \omega_2$. В цьому разі результуюче коливання можна розглядати як періодичне (подібне до гармонічного) із змінною амплітудою. Такі коливання називають **биттям** (рис. 8.8). Частота биття $\omega_б$ дорівнює різниці частот коливань, що накладаються одне на одного: $\omega_б = \omega_1 - \omega_2$.

§ 8.4. Додавання взаємно перпендикулярних гармонічних коливань

Розглянемо тіло, яке здійснює гармонічні коливання у двох взаємно перпендикулярних напрямках, наприклад, вздовж осей *X* і *У*. Рівняння таких коливань можна записати у вигляді

$$\left.\begin{aligned} x &= A_1 \cos \omega_1 t, \\ y &= A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi). \end{aligned}\right\} \qquad (8.30)$$

Нехай частоти обох коливань однакові: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$. Щоб отримати траєкторію результуючого коливання, із рівнянь (8.30) потрібно виключити час *t*. Для цього рівняння (8.30) перепишемо так:

$$\cos \omega t = \frac{x}{A_1}, \quad y = A_2(\cos \omega t \cos \varphi - \sin \omega t \sin \varphi), \qquad (8.31)$$

або

$$\sin \omega t \sin \varphi = \frac{x}{A_1} \cos \varphi - \frac{y}{A_2}. \qquad (8.32)^*$$

Піднесемо до квадрату останній вираз і додамо його з виразом (8.33)

$$(\cos \omega t \sin \varphi)^2 = \frac{x^2}{A_1^2} \sin^2 \varphi. \qquad (8.33)^{**}$$

Тоді отримаємо:

$$\boxed{\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1 A_2} \cos \varphi = \sin^2 \varphi.} \qquad (8.34)$$

Рівняння (8.34) є не що інше, як рівняння еліпса. Отже, при одночасній участі в двох взаємно перпендикулярних гармонічних коливаннях однакової частоти тіло рухається по еліптичній траєкторії (рис. 8.9). Форму еліпса і його орієнтацію відносно осей *X* і *У* визначають амплітуди A_1 і A_2 та різниця фаз φ його складових коливань.

Розглянемо кілька часткових випадків.

---

[*] У рівнянні (8.32) cos ωt замінено на x/A_1 згідно (8.31).

[**] Вираз (8.33) отримано із першого рівняння (8.31), помноживши праву і ліву його частини на sin φ і піднісши його до квадрату.

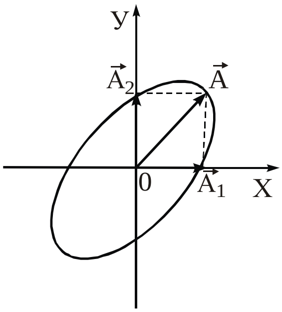


Рис. 8.9

а) Різниця фаз $\varphi = k\pi$, де k = 0,1,2,... Рівняння (8.34) в цьому разі набуває такого вигляду:

$$\left(\frac{x}{A_1} \pm \frac{y}{A_2}\right)^2 = 0,$$

звідки

$$\boxed{y = \pm\frac{A_2}{A_1}x.} \qquad (8.35)$$

Це рівняння прямої лінії, в яку вироджується еліпс. Якщо в рівнянні (8.35) стоїть знак “+”, то пряма лежить в 1 і 3 квадрантах (рис. 8.10), якщо знак “–” – в 2 і 4 квадрантах (рис. 8.11). Амплітуда результуючого коливання

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}. \qquad (8.36)$$

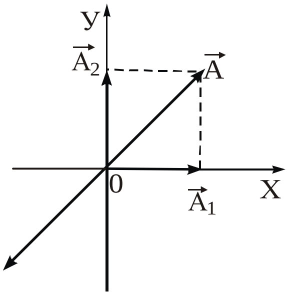


Рис. 8.10

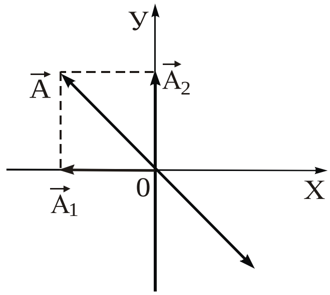
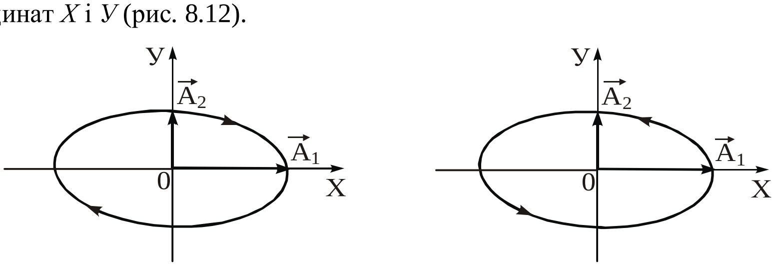


Рис. 8.11

б) Різниця фаз $\varphi = (2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, де k = 0,1,2,... Тоді рівняння (8.34) набуде вигляду:

$$\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1. \qquad (8.37)$$

Це канонічна форма рівняння еліпса, півосі якого орієнтовані симетрично відносно осей координат X і $У$ (рис. 8.12).



а б

Рис. 8.12

Неважко показати, що коли $\varphi = +(2k+1)\pi/2$, то тіло рухається по еліптичній траєкторії в напрямку руху стрілки годинника (рис. 8.12, *а*). Якщо $\varphi = -(2k+1)\pi/2$, то тіло рухається також по еліптичній траєкторії, але в протилежному напрямку, тобто проти руху стрілки годинника (рис. 8.12, б). При $A_1 = A_2 = A$ рівняння (8.37) перетворюється в рівняння кола:

$$\boxed{x^2 + y^2 = A^2.} \tag{8.38}$$

Коливне тіло в цьому випадку рухатиметься по колу. Отже рівномірний рух по колу можна розглядати як суму двох взаємно перпендикулярних коливань (рис. 8.13).

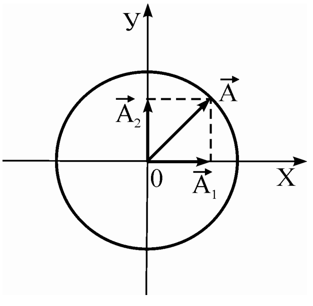


Рис. 8.13

Представляє великий інтерес додавання взаємно перпендикулярних коливань, частоти яких помітно відрізняються одна від одної ($\omega_1 \neq \omega_2$). Результуючі рухи при цьому можуть бути дуже складними. В загальному випадку траєкторія виявляється навіть незамкнутою і рух, таким чином, не є періодичним. Однак, якщо відношення частот ω_1 / ω_2 кратне цілому числу і різниця фаз $\varphi = (2k+1)\pi / 2,$ то траєкторія буде замкнута і рух буде періодичним. На рис. 8.14 наведено результуючі траєкторії коливного тіла, коли частоти складових коливань відносяться як $1:2$, $1:3$, $2:3$ відповідно для різниці фаз коливань: $\varphi = 0$; $\varphi = \pi/4$; $\varphi = \pi / 2$; $\varphi = (3/4)\,\pi$; $\varphi = \pi$. Ці траєкторії називаються **фігурами Ліссажу.**

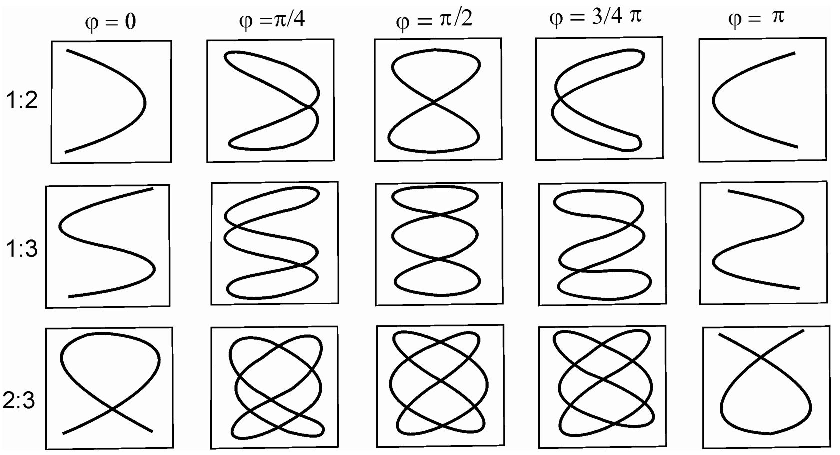


Рис. 8.14

Отже, **фігура Ліссажу – це лінія, яку описує тіло (коливна точка), що виконує складне коливання, яке є суперпозицією двох взаємно перпендикулярних коливань.** Аналіз фігур Ліссажу використовують у дослідженнях частот і фаз складних коливань.

§ 8.5. Математичний маятник

Одним із найпростіших прикладів гармонічного коливання є коливальний рух математичного маятника.

Математичний маятник є фізичною абстракцією, під якою розуміють точкове тіло (матеріальну точку), підвішене на невагомій і нерозтяжній нитці, що коливається у вертикальній площині під дією сили тяжіння (рис. 8.15).

Найбільш подібною до математичного маятника є коливальна система, що складається з легкої нерозтяжної нитки, до одного з кінців якої підвішено металеву кульку з розмірами, значно меншими за довжину нитки, до якої вона підвішена.

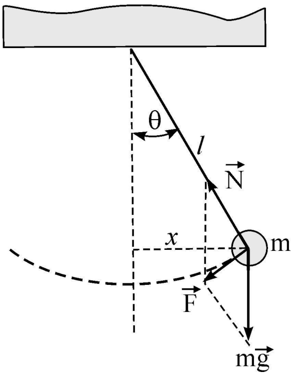


Рис. 8.15

Коли система перебуває у спокої, то сила тяжіння $m\vec{g}$ зрівноважується силою натягу нитки $\vec{N}$. Якщо кульку відхилити від положення рівноваги на деякий кут θ, то виникне сила $\vec{F}$, яка намагається повернути кульку в положення рівноваги. Ця сила є рівнодійною сил натягу нитки $\vec{N}$ і земного тяжіння $m\vec{g}$. Повертаюча сила

$$F = -mg\sin\theta, \tag{8.39}$$

де θ – кут відхилення нитки від вертикалі. Із формули (8.39) видно, що сила F пропорційна синусу кута θ, а не самому куту θ, тому такі коливання не є гармонічними. Однак, для малих кутів значення синуса кута мало відрізняється від самого кута в радіанах. Тоді можна записати, що $\sin\theta = x/l \approx \theta$ і формула (8.39) набуде такого вигляду:

$$F = -\frac{mg}{l}x, \tag{8.40}$$

де l – довжина маятника.

Отже, при малих відхиленнях від вертикалі рух математичного маятника є гармонічним коливанням, яке описується формулою (8.1), в якій зараз треба покласти $k = mg/l$. Використовуючи цей вираз для k, ми отримаємо вирази для періоду T і частоти ω математичного маятника:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{mg/l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \tag{8.41}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/l}{m}} = \sqrt{\frac{g}{l}}. \tag{8.42}$$

Звідси випливає, що а ні період, а ні частота коливань математичного маятника не залежать від амплітуди коливань (за малих значень кута відхилення θ) і маси маятника, а визначаються його довжиною і прискоренням вільного падіння в даному місці Землі.

Приклад 8.4. *Якої довжини повинен бути математичний маятник, щоб його період коливань дорівнював T = 2 с?*

Розв'язок. *Довжину математичного маятника виразимо із формули 8.41:*

$$l = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(2\ с)^2(9{,}8\ м/с^2)}{4(3{,}14)^2} = 0{,}99\ м \approx 1\ м.$$

Приклад 8.5. *Період коливань математичного маятника на Землі дорівнює $T_З$ = 0,60 с. Яким буде його період коливань на Марсі, якщо прискорення вільного падіння на Марсі складає 0,37 земного?*

Розв'язок. *Період математичного маятника:*

– на Землі

$$T_З = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_З}}; \tag{1}$$

– на Марсі

$$T_M = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_M}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{0{,}37 g_З}}. \tag{2}$$

Із (1) і (2) знаходимо, що

$$\frac{T_M}{T_З} = \sqrt{\frac{1}{0{,}37}},$$

звідки

$$T_M = T_З\sqrt{\frac{1}{0{,}37}} = 0{,}60\,c\sqrt{\frac{1}{0{,}37}} = 0{,}99\ c.$$

§ 8.6. Фізичний маятник

Фізичний маятник – це реальне тверде тіло, яке здійснює коливання під дією власної ваги навколо нерухомої точки, яка не збігається з центром маси (рис. 8.16).

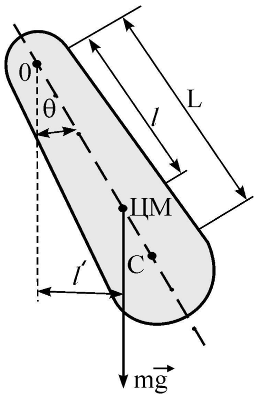


Рис. 8.16

Сила тяжіння $m\vec{g}$ прикладена в центрі маси (ЦМ), розміщеної на відстані l від осі обертання. При відхиленні маятника від положення рівноваги на деякий кут θ виникає обертальний момент M сили тяжіння, який дорівнює

$$M = -mgl\sin\theta, \tag{8.43}$$

(див. ф-лу (6.5)). Знак "–" в формулі (8.43) вказує, що повертаючий момент намагається повернути маятник до положення рівноваги. Застосовуючи другий закон Ньютона для обертального руху (формула (6.10)), маємо

$$M = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}. \tag{8.44}$$

Тут I – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через точку *0*, а $\alpha = d^2\theta/dt^2$ – кутове прискорення. Прирівнюючи праві частини формул (8.43) і (8.44), отримаємо рівняння руху фізичного маятника:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl\sin\theta}{I} = 0. \tag{8.45}$$

Для малих кутів $\sin\theta \approx \theta$ тому рівняння (8.45) набуде такого вигляду

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\theta = 0. \tag{8.46}$$

Останнє рівняння дуже подібне на рівняння гармонічних коливань (8.3) з тією лише різницею, що тут гармонічно змінюється величина θ замість x, а замість k/m маємо mgl/I. Таким чином, при малих кутових зміщеннях фізичний маятник здійснює гармонічні коливання за законом

$$\theta = \theta_{\max}\cos(\omega t + \varphi), \tag{8.47}$$

де $\theta_{\max}$ – максимальне кутове зміщення від положення рівноваги.

Замінивши в формулі (8.6) m/k на I/mgl, отримаємо вираз для періоду коливань фізичного маятника:

$$\boxed{T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}.} \tag{8.48}$$

Порівнюючи формулу (8.48) з (8.41), приходимо до висновку, що величина *I/ml* має розмірність довжини, тобто

$$\frac{I}{ml} = L. \tag{8.49}$$

Величину ***L* називають зведеною довжиною фізичного маятника**, а точку фізичного маятника, яка розміщується на відстані *L* від осі обертання *0* на лінії, що проходить через *ЦМ*, називають центром коливань (точка С) (рис. 8.17). Центр коливань володіє цікавими властивостями. Одна із них: якщо по підвішеному на осі тілу нанести в площині коливань в горизонтальному напрямку удар в центр коливань (рис. 8.17), то в точці підвісу не відчувається ніякої сили реакції.

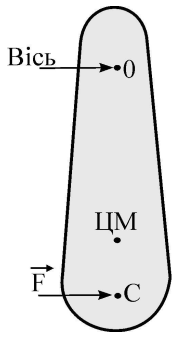


Рис. 8.17

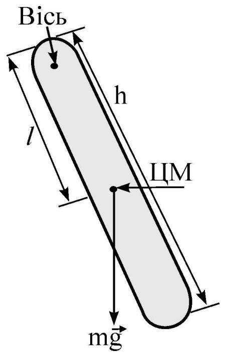


Рис. 8.18

Приклад 8.6. *Тонкий прямий однорідний стержень довжиною h = 1,00 м і масою m = 160 г підвішений за кінець на осі (рис. 8.18). а) Знайти період його малих коливань. б) Яка довжина математичного маятника, який має такий же період?*

Розв'язок. *а) Для знаходження періоду коливань цього стержня (це фізичний маятник) скористаємось формулою (8.48):*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}}.$$

Момент інерції тонкого стержня відносно осі, яка проходить через один із його кінців, дорівнює

$$I = \frac{1}{3}mh^2$$

(див табл. 6.1). Враховуючи, що центр мас знаходиться посередині стержня, тобто $l = h/2$, *знаходимо, що*

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2h}{3g}} = 2(3{,}14)\sqrt{\frac{2(1{,}00\,м)}{3(9{,}8\ м/с^2)}} = 1{,}64\ с.$$

б) Математичний маятник з таким же періодом має довжину (ф-ла (8.41)):

$$l' = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{gI}{mgl} = \frac{I}{ml} = \frac{2}{3}h = 0{,}67\ м.$$

Отже, математичний маятник матиме такий самий період коливань, як і фізичний, за умови, що його довжина дорівнює зведеній довжині фізичного маятника.

§ 8.7. Згасаючі коливання

При вивченні гармонічних коливань не враховувалися сили опору і тертя, які існують практично в будь-якій реальній коливальній системі. Дія цих сил призводить до того, що частина механічної енергії системи перетворюється в теплову, в силу чого амплітуда коливань з часом зменшується і коливання стають **згасаючими**. Якщо згасання не дуже велике, то згасаючі коливання можна розглядати як гармонічні. На рис. 8.19 показано зміну амплітуди коливання з часом. Розглянемо більш детально затухаючі коливання.

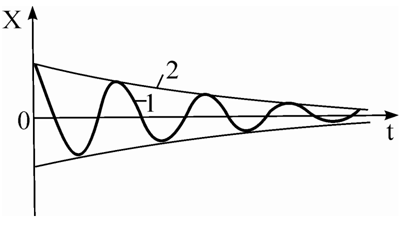


Рис. 8.19

Нехай на тіло масою m діють пружна сила

$$F_1 = -kx,$$

і сила опору, яка при невеликій швидкості коливального руху пропорційна швидкості

$$F_2 = -b\upsilon = -b\frac{dx}{dt}, \qquad (8.50)$$

де b – коефіцієнт опору. Рівняння руху тіла в цьому випадку матиме вигляд:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt},$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{kx}{m} = 0. \qquad (8.51)$$

Позначимо

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2, \quad \frac{b}{m} = 2\beta,$$

де β – коефіцієнт згасання, ω_0 – колова частота власних коливань. Тоді рівняння (8.51) набуде вигляду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (8.52)$$

Рівняння (8.52) називають **диференціальним рівнянням згасаючих коливань,** розв'язком якого є функція

$$x = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \varphi_0), \qquad (8.53)$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ – колова частота затухаючих коливань. Графік цієї функції наведено на рис. 8.19 (крива 1). Величина $A = A_0 e^{-\beta t}$ виражає зміну амплітуди згасаючого коливання з часом за експоненціальним законом; чим більше β, тим швидше зменшується амплітуда (рис. 8.19, крива 2). Період затухаючих коливань залежить від коефіцієнта згасання β і визначається формулою

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{8.54}$$

З формули (8.54) видно, що період згасаючих коливань завжди більший за період відповідних вільних незатухаючих коливань, тіло коливається повільніше, бо йому протидіє сила опору.

Швидкість зменшення амплітуди коливань визначається коефіцієнтом згасання: чим більше β, тим сильніша гальмівна дія середовища і тим швидше зменшується амплітуда. На практиці ступінь згасання коливань часто характеризують логарифмічним декрементом згасання Δ, який дорівнює логарифму відношення двох послідовних амплітуд, розділених інтервалом часу, рівного періоду коливань. Отже, коефіцієнт згасання і логарифмічний декремент згасання зв'язані простою залежністю:

$$\Delta = \ln\frac{A_t}{A_{t+T}} = \ln\frac{A_0 e^{-\beta t}}{A_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T = \frac{b}{2m}T. \tag{8.55}$$

Окрім зазначених вище характеристик, коливальну систему характеризують **добротністю *Q***, яку виражають так

$$Q = 2\pi\frac{W}{\delta W} = \frac{\pi}{\Delta} = \frac{\pi}{\beta T}, \tag{8.56}$$

де W – енергія коливання, δW – втрата енергії за один період.

Насамкінець, зауважимо, що і незгасаючі і згасаючі коливання називаються **власними** або **вільними**. Вони виникають внаслідок початкового зміщення і здійснюються за відсутності зовнішнього впливу за рахунок початкового накопичення енергії.

§ 8.8. Вимушені коливання. Резонанс

Практично вільні коливання будь-якої коливальної системи є згасаючими, оскільки система втрачає енергію на роботу проти сил опору. Очевидно, що для того, щоб коливання не згасали, енергію системи треба поповнювати. В механіці найпростіше це можна робити шляхом дії на коливальну систему зовнішньої періодичної сили, яка змінюється за гармонічним законом:

$$F = F_0 \cos\omega t, \tag{8.57}$$

де F_0 – амплітуда, ω – колова частота коливань вимушуючої сили. Коливання, які виникають в системі при участі зовнішньої вимушуючої сили, називають **вимушеними коливаннями**. Оскільки на коливальну систему крім зовнішньої сили діють квазіпружна сила ($F_1 = -kx$) і сила опору ($F_2 = -bv$), то диференціальне рівняння вимушених коливань запишеться так:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - b\frac{dx}{dt} + F_0\cos\omega t, \tag{8.58}$$

або

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0\cos\omega t, \tag{8.59}$$

де $k/m = \omega_0^2$, $b/m = 2\beta$, $f_0 = F_0/m$, ω_0 – циклічна частота вільних коливань, β – коефіцієнт згасання.

Розв'язок неоднорідного диференціального рівняння другого порядку (8.59) складається з двох складових: одна із них (загальний розв'язок) відповідає рівнянню згасаючих коливань і відіграє роль лише при становленні коливань (рис. 8.20). З часом нею можна знехтувати, оскільки такі коливання через якийсь проміжок часу практично зникають; інша складова (частинний розв'язок) описує рух матеріальної точки, коли вже коливання встановилися. Цей розв'язок має вигляд:

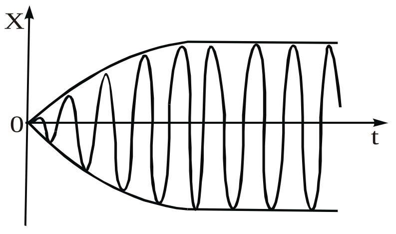


Рис. 8.20

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0), \tag{8.60}$$

де

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}}, \tag{8.61}$$

амплітуда установлених коливань, φ_0 – зсув фаз між зміщенням і змушуючою силою, який знаходиться за формулою

$$tg\varphi_0 = -\frac{2\beta\omega}{\omega^2 - \omega_0^2}. \tag{8.62}$$

Отже, із (8.60) видно, що вимушене коливання, яке встановилося під дією гармонічної вимушуючої сили, є також гармонічним. Частота такого коливання дорівнює частоті вимушуючої сили, а амплітуда – прямо пропорційна амплітуді вимушуючої сили (8.61). Крім того, із (8.61) видно, що амплітуда має складну залежність від колових частот власних і вимушених коливань та коефіцієнта згасання. Із (8.61) також видно, що при заданих ω_0 і β амплітуда гармонічних вимушених коливань A сильно залежить від різниці між частотою вимушених коливань ω і власною частотою ω_0 системи. Коли частота вимушуючої сили наближається до власної частоти коливань системи, амплітуда різко зростає. Це явище особливо яскраво проявляється при невеликих коефіцієнтах згасання коливання. На рис. 8.21 наведено залежності амплітуди A від частоти вимушуючої сили для чотирьох значень коефіцієнта згасання β, β_1, β_2, і β_3. При малому згасанні ріст амплітуди при наближенні ω до ω_0 виявляється надзвичайно сильним. Це явище називається **резонансом**. Частота ω вимушуючої сили, при якій амплітуда максимальна, називається **резонансною**.

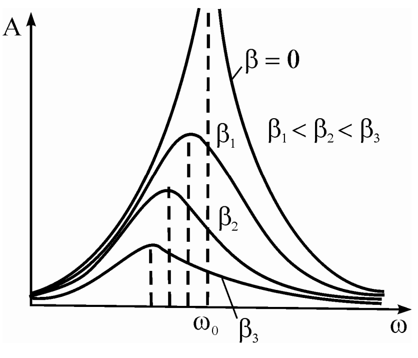


Рис. 8.21

Резонансну частоту можна знайти, якщо прирівняти до нуля похідну за частотою підкореневого виразу в формулі (8.61). Вона дорівнює

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \tag{8.63}$$

Підставляючи (8.63) в (8.61), знаходимо амплітуду при резонансі:

$$A_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \tag{8.64}$$

Із (8.63) видно, що коли $\beta = 0$, резонанс спостерігається на частоті $\omega = \omega_0$ і амплітуда вимушених коливань нескінченно велика. В реальних системах β ніколи не перетворюється в нуль, тому амплітуда вимушених коливань (резонансний пік) має конечну величину і вершина резонансної кривої не припадає на частоту $\omega = \omega_0$. Якщо ж згасання велике, то резонансна крива виражена слабо або і зовсім відсутня (рис. 8.21).

Механічний резонанс може бути як корисним, так і шкідливим явищем. Шкідлива дія резонансу головним чином пов'язана з руйнуваннями, яке він може викликати. Так, наприклад, в техніці (в машинах, літаках, океанських лайнерах тощо) та будівельних спорудах (висотні будинки, маяки, телевізійні вежі, заводські димарі тощо), враховуючи їх власні вібрації (коливання), необхідно передбачати виникнення резонансних умов, в противному випадку можуть бути руйнування і катастрофи. В радіотехніці явище резонансу використовують для підсилення електричних сигналів, в акустиці – для аналізу звуку.

Насамкінець, зауважимо, що тіла мають не одну, а кілька власних частот і відповідно кілька резонансних частот.