6 ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА

§ 6.1. Центр мас (центр ваги)

В повсякденному житті тіла, які за формою і об’ємом деформуються дуже мало, навіть під дією відносно великих сил, називаються **твердими тілами**. Тверді тіла характеризуються певною протяжністю (тобто, тіла мають лінійні розміри). Можна вважати, що тверде тіло – це система матеріальних точок, взаємне розміщення яких під час руху тіла не змінюється. Слід пам’ятати, що під матеріальною точкою тут розуміють не атом або молекулу, а дуже малі мікроскопічні частинки, на які подумки можна поділити тіло (§ 2.10).

В твердому тілі завжди можна знайти єдину точку, яка будь-коли рухається згідно законів динаміки. Цю точку називають **центром мас (ЦМ)** системи матеріальних точок. Ця точка поводить себе так, ніби в ній зосереджена вся маса системи матеріальних точок під дією сил притягання, що нескінченно зростають. Таким чином, можна вважати, що ЦМ є точкою, в якій прикладена результуюча сила ваги, які діють на окремі частини (матеріальні точки) тіла.

Центр мас (ваги) володіє такими важливими властивостями: 1) внутрішні сили, які діють на окремі точки системи, не впливають на рух центра мас; 2) під впливом зовнішніх сил центр мас рухається так, ніби вся маса сконцентрована в цій точці, і результуюча всіх зовнішніх сил, діючих на систему (тіло), діє тільки в цій точці.

Якщо центр мас рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}$, то імпульс тіла запишеться у вигляді

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}, \tag{6.1}$$

тобто, як добуток маси тіла на швидкість його центра мас, що є повною аналогією імпульсу матеріальної точки.

Формулу (6.1) можна призвести і до такого вигляду

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F}. \tag{6.2}$$

Остання формула еквівалентна рівнянню руху матеріальної точки (3.6), вся маса якої зосереджена в центрі мас, а всі зовнішні сили, які діють на точки системи, прикладені до центра мас. Точка ЦМ займає цілком визначене положення відносно матеріальних точок системи.

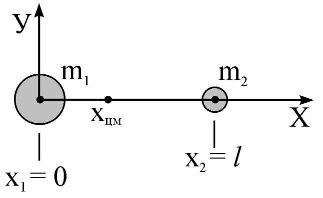


Рис. 6.1

Приклад 6.1. *Знайти ЦМ системи із 2-х тіл з масами $m_1 = 3$ кг і $m_2 = 2$ кг, які знаходяться на відстані $l = 2$ м (рис. 6.1.)*

Розв’язок. *Виберемо систему координат так, щоб обидва тіла знаходилися на осі X, їх координати тоді будуть x_1 і*

x_2. Тоді ЦМ буде лежати на прямій, що з'єднує тіла. Якщо координата ЦМ дорівнює $x_{цм}$, то

$$x_{цм}m = x_1m_1 + x_2m_2,$$

де $m = m_1 + m_2$ – повна маса системи. Тоді

$$x_{цм} = \frac{x_1m_1 + x_2m_2}{m} = \frac{(3\,кг)(0\,м) + (2\,кг)(2\,м)}{5} = 0{,}8\,м.$$

Якщо маса одного із тіл більша іншого (наприклад, $m_1 > m_2$), то ЦМ розміщений ближче до тіла з більшою масою. Якщо система складається із n частинок, розміщених вздовж однієї прямої (вздовж осі X-ів), то положення ЦМ задається виразом

$$x_{цм} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + ... + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + ... + m_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_ix_i}{m},$$

де $m_1, m_2, m_3, \ldots, m_n$ – маси частинок, $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ – їх координати, $m = \sum m_i$ – повна маса системи. У випадку двох або трьох вимірів (як це має місце для протяжного тіла) координати ЦМ запишуться у вигляді

$$x_{цм} = \frac{\sum m_ix_i}{m}, \quad y_{цм} = \frac{\sum m_iy_i}{m}, \quad z_{цм} = \frac{\sum m_iz_i}{m}, \qquad (6.3)$$

де x_i, y_i, z_i – координати частинки з масою m_i, $m = \sum m_i$ – повна маса системи.

Приклад 6.2. *Три тіла масою m = 2,5 кг кожне, розміщені у вершинах прямокутного трикутника з катетами 1,50 і 2,00 м (рис. 6.2). Знайти положення центра мас системи.*

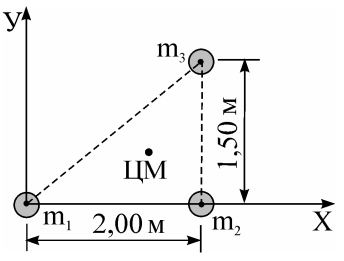


Рис. 6.2

Розв'язок. *Нехай тіло з масою m_1 розміщене в початку координат, а тіло з масою m_2 – на осі X-ів. Тоді тіло m_1 має координати $x_1 = y_1 = 0$, а тіло m_2 – $x_2 = 2{,}00$ м, $y_2 = 0$; координати тіла m_3 рівні $x_3 = 2{,}00$ м, $y_3 = 1{,}50$ м. Тоді, згідно формули (6.3), знаходимо, що*

$$x_{цм} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} =$$

$$= \frac{(2{,}5\,кг)(0) + (2{,}5\,кг)(2{,}00\,м) + (2{,}5\,кг)(2{,}00\,м)}{3(2{,}50\,кг)} = 1{,}33\,м.$$

$$y_{цм} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = \frac{(2{,}5кг)(0) + (2{,}5кг)(0) + (2{,}5кг)(1{,}50м)}{3(2{,}5\,кг)} = 0{,}50\,м$$

Положення центра мас показано на рис. 6.2.

§ 6.2. Момент сили

Раніше в § 2.10 нами розглянуто кінематику обертального руху твердого тіла з використанням понять кутового переміщення, кутової швидкості і кутового прискорення. В даному параграфі розглянемо динаміку обертального руху твердого тіла, тобто з'ясуємо причини, які призводять до обертального руху.

Момент сили. Нехай до деякої точки *A* твердого тіла прикладена сила $\vec{F}$, яка лежить в площині, перпендикулярній до осі обертання. Вісь обертання в даному випадку перпендикулярна до площини рисунка 6.3 і проходить через точку 0. Під дією цієї сили тіло буде обертатися навколо осі. Однак, щоб тіло оберталося, сила повинна бути прикладена на певній відс-

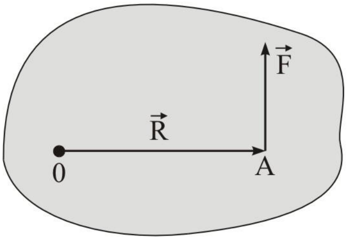


Рис. 6.3

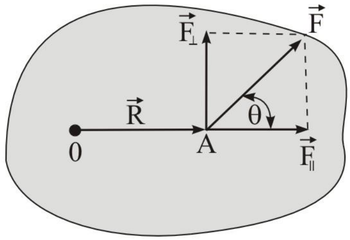


Рис. 6.4

тані від осі обертання. Сила, прикладена до тіла поза віссю обертання і здатна викликати його обертання, створює **момент сили**. Величина моменту сили визначається добутком величини сили F на відстань від осі обертання до точки прикладання сили:

$$M = FR. \tag{6.4}$$

Якщо сила, прикладена під кутом θ до лінії, яка сполучає вісь обертання і точку прикладання сили (рис. 6.4), то тільки перпендикулярна складова сили $F_{\perp}$ може викликати обертальний момент:

$$M = F_{\perp}R = RF\sin\theta. \tag{6.5}$$

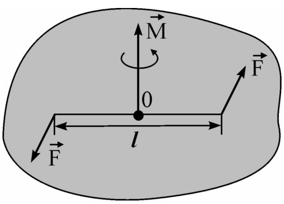


Рис. 6.5

Паралельна складова сили F_{II} не може викликати обертання, оскільки вона паралельна лінії *0A*. Момент сили характеризується не тільки величиною, але і напрямком.

За напрямок моменту сили прийнято вважати той напрямок, в якому рухатиметься вздовж осі правий гвинт, якщо його повертати в напрямку дії сили. Таким чином, вектор моменту сили $\vec{M}$ перпендикулярний до площини, в якій лежить сила $\vec{F}$ і радіус вектор $\vec{R}$. Для випадку, зображеного на рис. 6.3 і 6.4, вектор моменту сили $\vec{M}$ направлений від рисунка до читача.

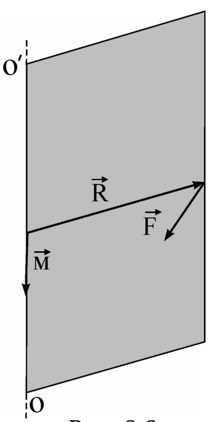


Рис. 6.6

Бувають випадки, коли на якесь тіло діють дві сили, однакові за величиною, але протилежно направлені, лінії дії яких не співпадають (рис. 6.5). Таку систему сил називають **парою сил**. Пара сил, наприклад, діє в магнітному полі на магнітну стрілку, на рамку в магнітному полі, по якій тече електричний струм, на електричний диполь в електричному полі тощо. Пара сил виникає і в тому випадку, коли немає фіксованої осі (або фіксованої точки обертання). Величина моменту пари сил визначається формулою

$$M = F\,l, \tag{6.6}$$

де F – величина однієї із сил, l – відстань між лініями дії сил.

Насамкінець, зауважимо, що момент сили часто називають **обертальним моментом**.

Приклад 6.3. *Людина діє з силою F = 18 Н на край дверей шириною R = 0,84 см (рис. 6.6). Визначити величину моменту цієї сили, якщо вона діє а) перпендикулярно до площини дверей; б) під кутом θ = 60˚ до площи-*

ни дверей.

Розв'язок. *а) Величину моменту сили, коли вона діє перпендикулярно до площини дверей, визначимо за формулою (6.4):*

$$M = RF = (0{,}84\ м)(18\ Н) = 15{,}12\ Н{\cdot}М.$$

б) Для випадку, коли сила діє під кутом θ до площини дверей, скористаємось формулою (6.5):

$$M = RF\sin\theta = (0{,}84\ м)(18\ Н)\sin 60^\circ = 13{,}09\ Н{\cdot}М.$$

§ 6.3. Момент інерції

До обертального руху, як і до прямолінійного, можна застосувати закони Ньютона. Перший закон Ньютона для обертального руху гласить, що тіло, яке вільно обертається, зберігає стан обертання зі сталою кутовою швидкістю до тих пір, поки на нього не подіють зовнішні сили, які постараються змінити цей рух. Далі, до точки, що обертається (рис. 6.7), застосуємо другий закон Ньютона. При обертальному русі момент сили відіграє ту ж роль, що і сила при поступальному русі. Момент сили призводить до виникнення кутового прискорення α, яке прямо пропорційне моменту сили:

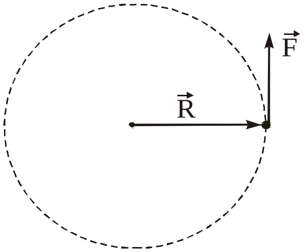


Рис. 6.7

$$\alpha \sim M.$$

Це відповідає другому закону Ньютона ($a \sim F$) для поступального руху, причому момент сили відповідає силі, а кутове прискорення α – лінійному прискоренню a. Однак, в другий закон Ньютона для поступального руху входить ще і маса ($F = m\,a$). Що відіграє роль маси у випадку обертального руху?

Щоб відповісти на це запитання поступимо наступним чином. У другому законі Ньютона ($F = m\,a$) прискорення a замінимо тангенціальним лінійним прискоренням $a \approx R\alpha$ (див. ф-лу (2.54)). Тоді другий закон Ньютона набуде вигляду

$$F = mR\alpha.$$

Помноживши ліву і праву частини останнього виразу на R, отримаємо:

$$FR = mR^2\alpha. \qquad (6.7)$$

Ліва частина формули (6.7) є не що інше, як момент сили ($M = RF$). Тоді

$$\boxed{M = mR^2\alpha.} \qquad (6.8)$$

Формула (6.8) виражає другий закон Ньютона для обертального руху. В ньому замість сили фігурує момент сили, замість лінійного прискорення – кутове прискорення, а місце маси займає комбінація маси і її положення (mR^2). Цю величину називають **моментом інерції *I*.**

$$\boxed{I = mR^2,} \qquad (6.9)$$

Враховуючи (6.9), формула (6.8) запишеться так:

$$\boxed{M = I\alpha.} \qquad (6.10)$$

Момент інерції відіграє ту ж роль в обертальному русі, що і маса в русі по прямій. Величина mR^2 є мірою інертності тіла при обертальному русі. Чим більший момент інерції, тим більший потрібний момент сили, щоб змінити кутову швидкість. Однак, зауважимо, що момент інерції визначається не тільки масою; радіальне положення більш істотне, оскільки I залежить від квадрата радіуса.

Тверде тіло, яке обертається навколо нерухомої осі, можна представити як сукупність великої кількості точок (частинок), розміщених на різних відстанях від осі обертання. Для кожної частинки тіла справедливий вираз (6.8), тому, просумувавши його, знайдемо повний момент сил, який діє на тіло. Таким чином,

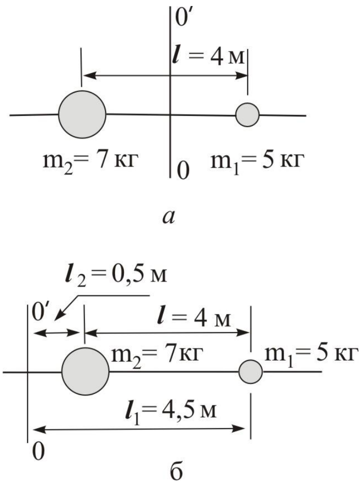


Рис. 6.8

$$M = (\sum_i m_i R_i^2)\alpha, \tag{6.11}$$

де $\sum m_i R_i^2 = m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + ... + m_n R_n^2 = I$ – повний момент інерції тіла.

В СІ одиницею вимірювання моменту інерції є кг · м^2.

Приклад 6.4. *Два тіла масами m_1 = 5,0 кг і m_2 = 7,0 кг закріплені на легкому стержні, масою якого можна знехтувати, на відстані l = 4,0 м одне від одного. Розрахувати момент інерції системи при її обертанні: а) відносно осі, яка проходить посередині між тілами (рис. 6.8, а); б) відносно осі, розміщеної на відстані l_2 = 0,5 м лівіше тіла з масою m_2 = 7 кг (рис. 6.8, б).*

Розв'язок. *а) Обидва тіла знаходяться на однаковій відстані $l/2$ = 2 м від осі обертання. Значить*

$$I = \sum m_i R_i^2 = m_1 (l/2)^2 + m_2 (l/2)^2 =$$
$$= (5{,}0\,кг)(2{,}0\,м)^2 + (7{,}0\,кг)(2,0м)^2 = 48\,кг \cdot м^2.$$

б) Тіло масою m_2 = 7,0 кг знаходиться на відстані l_2 = 0,50 м, а тіло масою m_1 = 5,0 кг – на відстані l_1 = = 4,50 м від осі обертання. Тоді

$$I = \sum m_i R_i^2 = m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2 = (5{,}0\,кг)(4{,}50\,м)^2 + (7{,}0\,кг)(0{,}50\,м)^2 =$$
$$= 101{,}25\,кг \cdot м^2 + 1{,}75\,кг \cdot м^2 = 103\,кг \cdot м^2.$$

Висновки. 1. Одне і те ж тіло має різні моменти інерції відносно різних осей обертання.

2. Тіло, розміщене ближче до осі обертання, дає менший вклад в повний момент інерції (пункт б).

§ 6.4. Момент імпульсу

Як показано в § 3.3 другий закон Ньютона для поступального руху матеріальної точки можна записати через імпульс $\vec{P} = m\vec{\upsilon}$ за допомогою формули (3.5):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}.$$

Обертальним аналогом імпульсу є момент імпульсу. Точно так, як імпульс $\vec{P}$ зв'язаний з силою $\vec{F}$, можна очікувати, що момент імпульсу зв'язаний з моментом сили.

Моментом імпульсу $\vec{L}$ матеріальної точки відносно точки обертання називають фізичну величину, яка вимірюється векторним добутком радіуса-вектора $\vec{R}$ на імпульс $\vec{P}$ матеріальної точки:

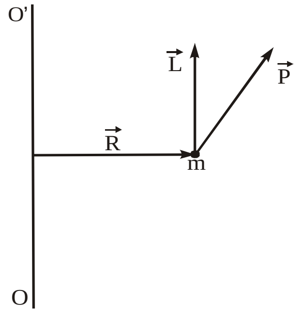


Рис. 6.9

$$\vec{L} = \left[\vec{R}\,\vec{P}\right]. \tag{6.12}$$

Момент імпульсу є вектор. Він перпендикулярний як до вектора $\vec{R}$, так і до вектора $\vec{P}$. Напрямок його визначається правилом правого гвинта (рис. 6.9).

Величина моменту імпульсу матеріальної точки масою m задається виразом

$$L = RP\sin\theta = m\upsilon R\sin\theta, \tag{6.13}$$

або

$$L = RP_{\perp}, \tag{6.13, a}$$

де R – відстань від тіла до осі обертання, $P_{\perp}$ – перпендикулярна складова кількості руху, θ – кут між векторами $\vec{P}$ (або вектором $\vec{\upsilon}$) і вектором $\vec{R}$ (лінією, яка з'єднує тіло масою m з віссю координат).

Далі встановимо співвідношення між моментом імпульсу $\vec{L}$ матеріальної точки і моментом сили $\vec{M}$, що діє на неї. Диференціюючи (6.12), дістаємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{R}\,\vec{P}\right] = \left[\frac{d\vec{R}}{dt}\vec{P}\right] + \left[\vec{R}\frac{d\vec{P}}{dt}\right].$$

Але $\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\upsilon}$, то $\left[\frac{d\vec{R}}{dt}\;\vec{P}\right] = \left[\vec{\upsilon}\;\; m\vec{\upsilon}\right] = 0$ оскільки в цьому випадку sin θ = 0. Тому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left[\vec{R}\;\frac{d\vec{P}}{dt}\right].$$

Оскільки $d\vec{P}/dt$ є не що інше як результуюча сила, що діє на частинку ($\vec{F} = d\vec{P}/dt$), то $\left[\vec{R}\;d\vec{P}/dt\right]$ є результуючим моментом сили, що діє на матеріальну частинку ($\left[\vec{R}\;\; d\vec{P}/dt\right] = \vec{M}$). Тоді

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}.} \tag{6.14}$$

Швидкість зміни моменту імпульсу матеріальної точки дорівнює моменту діючої сили, прикладеної до цієї точки. Рівняння (6.14) є обертальним аналогом другого закону Ньютона, записаного в найбільш загальному вигляді, називається **основним рівнянням** динаміки обертального руху твердого тіла або **рівнянням моментів**.

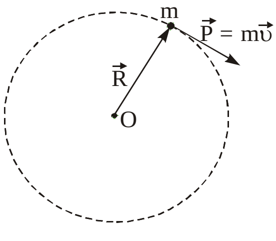


Рис. 6.10

Приклад 6.5. *Знайти момент імпульсу частинки масою m, яка рухається по колу радіуса R зі швидкістю υ за годинниковою стрілкою.*

Розв'язок. *Оскільки частинка рухається по колу і вектор $\vec{R}$ перпендикулярний до вектора $\vec{P}$ (рис. 6.10), то*

$$L = \left|\left[\vec{R}\,\vec{P}\right]\right| = m\upsilon \mathrm{R}.$$

Враховуючи, що $\upsilon = \omega R$, *отримаємо:*

$$L = mR^2\omega = I\omega,$$

де $I = mR^2$ – момент інерції частинки.

Вектор $\vec{L}$ у відповідності з правилом правого гвинта перпендикулярний до площини кола і направлений від читача.

Рівняння моментів (6.14) можна узагальнити для випадку довільної системи матеріальних точок. При цьому під моментом імпульсу системи розуміють векторну суму моментів імпульсів всіх матеріальних точок системи відносно того самого центра:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_i .$$

Тут $\vec{l}_i$ – момент імпульсу i-ої частинки.

Результуючий момент сил, які діють на систему, дорівнює сумі моментів сил, діючих на кожну матеріальну точку:

$$\vec{M} = \sum \vec{m}_i .$$

В цю суму входять: 1) зовнішні моменти сил, які створюються зовнішніми силами, що діють на систему, і 2) внутрішні моменти сил, які створюються силами взаємодії між матеріальними точками системи. На основі третього закону Ньютона неважко довести, що векторна сума моментів всіх внутрішніх сил відносно довільного центра дорівнює нулю. Отже, під моментом всіх сил треба розуміти векторну суму моментів всіх зовнішніх сил, що діють на систему матеріальних точок. Тоді рівняння моментів (6.14) для системи матеріальних точок відносно довільного центра матиме вигляд:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{зовн} . \tag{6.15}$$

Цей фундаментальний результат встановлює, що швидкість зміни моменту імпульсу системи матеріальних точок дорівнює результуючому (повному) моменту зовнішніх сил, що діє на систему.

З формули (6.15) також випливає, що коли результуючий момент зовнішніх сил, діючих на систему матеріальних точок, дорівнює нулю ($\vec{M}_{зовн} = 0$), то

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad i \quad \vec{L} = const . \tag{6.16}$$

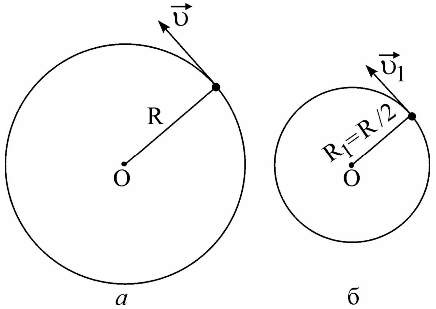


Рис. 6.11

Це означає, що **повний момент імпульсу системи зберігається сталим, якщо результуючий момент сил, що діє на систему, дорівнює нулю.** Цей закон називають **законом збереження моменту імпульсу** і є одним із важливих законів збереження в фізиці.

Приклад 6.6. *Куля масою m = 10 кг прив'язана до кінця мотузки і рухається по колу радіуса R = 4 м зі сталою лінійною швидкістю $\upsilon = 2\,м/с$ (рис. 6.11). Як зміниться лінійна швидкість і період руху кулі, якщо довжину мотузки зменшити в два рази?*

Розв'язок. *Початковий момент імпульсу (кількості руху) дорівнює*

$$L = m\upsilon R = (10\,кг)(2\,м/с)(4\,м) = 80\ кг \cdot м^2/с.$$

Початковий період руху

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\upsilon / R} = \frac{2\pi R}{\upsilon} = \frac{2\left(3{,}14\right)(4\ м)}{2\ м/с} = 12{,}56\,с.$$

Змінивши довжину мотузки, момент імпульсу буде дорівнювати

$$L = m\upsilon_1 R_1,$$

звідки

$$\upsilon_1 = \frac{L}{mR_1} = \frac{80\ кг \cdot м^2/с}{(10\,кг)(2\ м)} = 4\ м/с.$$

Новий період руху

$$T_1 = \frac{2\pi\, R_1}{\upsilon_1} = \frac{2(3{,}14)(2\,м)}{4\,м/с} = 3{,}14\ с.$$

Висновок. 1. Зменшення радіуса в два рази збільшує лінійну швидкість по колу в стільки ж разів і зменшує період руху в чотири рази.

2. Зміна радіуса кола, по якому рухається тіло, не змінює його моменту імпульсу.

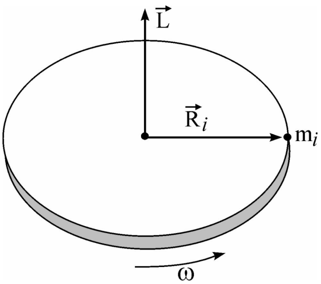


Рис. 6.12

§ 6.5. Момент інерції твердого тіла

До цих пір ми мали справу переважно з матеріальними точками. Однак більшість тіл в природі є протяжними тілами, які можуть не тільки переміщатися, але і обертатися.

Розглянемо тверде тіло, яке обертається з кутовою швидкістю ω навколо фіксованої осі (рис. 6.12), і знайдемо його момент імпульсу та момент інерції. Для цього, на основі загальних уявлень, розіб'ємо уявно тверде тіло на систему матеріальних точок. Якщо матеріальна точка масою m_i розміщена на відстані R_i від осі обертання, то її момент імпульсу

$$\vec{l}_i = \left[\vec{R}_i\,\vec{P}_i\right],$$

або в скалярній формі

$$l_i = R_i P_i = m_i \upsilon_i R_i,$$

де υ_i – швидкість *i*-ої частинки. Оскільки $\upsilon_i = R_i\omega,$ то

$$l_i = m_i R_i^2 \omega.$$

Просумувавши по всіх матеріальних точках твердого тіла, отримаємо:

$$L = \sum_i l_i = \omega \sum_i m_i R_i^2. \qquad (6.17)$$

Величина $\sum\limits_i m_i R_i^2$ є моментом інерції тіла

$$\boxed{I = \sum_i m_i R_i^2.} \qquad (6.18)$$

Тоді для моменту імпульсу тіла маємо:

$$\boxed{L = I\omega.} \qquad (6.19)$$

або у векторній формі

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \qquad (6.20)$$

Якщо момент зовнішніх сил дорівнює нулю ($M_{зовн} = 0$), то

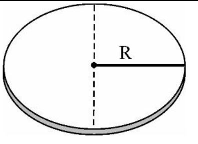
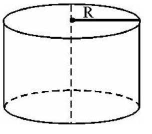
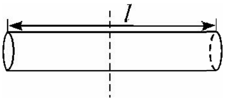
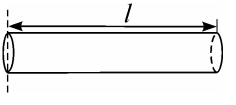
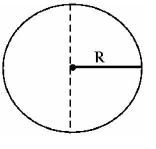
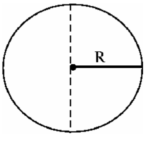
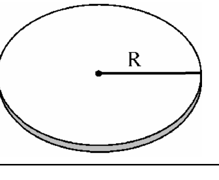
$$\vec{L} = I\vec{\omega} = const,$$

що означає збереження моменту імпульсу твердого тіла.

Момент інерції характеризує інерційні властивості твердого тіла при його обертальному русі. Кожне тіло, незалежно від того, перебуває воно в обертальному русі, чи в спокої, має конкретне значення моменту інерції відносно осі обертання. Момент інерції тіла залежить від розташування осі, відносно якої його визначають.

Моменти інерції деяких поширених тіл простої форми, відносно вказаних на рисунку осей, наведені в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Тіло	I	
Обруч або кільце	mR^2	
Диск або циліндр	$\frac{1}{2}mR^2$	
Стержень (відносно середини)	$\frac{ml^2}{12}$	
Стержень (відносно кінця)	$\frac{ml^2}{3}$	
Тверда куля	$\frac{2}{5}mR^2$	
Сферична оболонка	$\frac{2}{3}mR^2$	
Диск (відносно краю)	$\frac{3}{2}mR^2$	

Моменти інерції відносно осей, що проходять через центри мас, називають **головними моментами інерції.** Моменти інерції тіла відносно будь-якої іншої осі, паралельної осі, що проходить через центр мас, визначаються за теоремою Гюйгенса-Штайнера:

$$I = \boxed{I_0 + md^2,} \qquad 1)$$

де I_0 – головний момент інерції, m – маса тіла, d – відстань між осями (рис. 6.13).

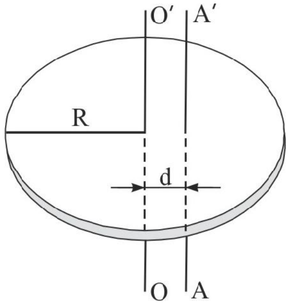


Рис. 6.14

Приклад 6.7. *Знайти момент інерції однорідного диска циліндричної форми діаметром D = 0,6 м і масою m = 18 кг, який обертається навколо осі AA′, зміщеної на d = 0,01 м від його центра (рис. 6.14).*

Розв'язок. *Момент інерції однорідного диска знайдемо, скориставшись теоремою Гюйгенса-Штайнера (6.21):*

$$I = I_0 + md^2 = \frac{1}{2}mR^2 + md^2,$$

де $I_0 = \dfrac{mR^2}{2}$ *– момент інерції диска, при обертанні його відносно осі* OO'*, що проходить через центр мас (головний момент інерції), d – відстань між осями. Тоді*

$$I = \frac{1}{2}(18\ кг)(0{,}3\ м)^2 + (18\ кг)(0{,}1\ м)^2 = 0{,}99\ кг \cdot м^2.$$

§ 6.6. Кінетична енергія обертання

Тіло, що рухається поступально, володіє кінетичною енергією

$$W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}.$$

Якщо тіло обертається навколо вертикальної осі, то говорять, що воно володіє кінетичною енергією обертання. Розіб'ємо тіло на елементарні точки (елементи), кожна із яких має масу m_i. Якщо R_i відстань від осі обертання до i-ої матеріальної точки, то її лінійна швидкість $\upsilon_i = R_i\omega$. Кінетична енергія матеріальної точки

$$W_к = \frac{m_i\upsilon_i^2}{2} = \frac{m_iR_i^2\omega^2}{2}.$$

Кінетичну енергію обертального руху всього тіла отримаємо, додавши аналогічні вирази для всіх його елементів:

$$W_к = \sum_i \frac{m_iR_i^2\omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\sum_i m_iR_i^2. \qquad (6.22)$$

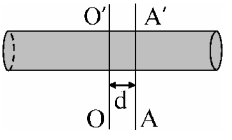


Рис. 6.13

Оскільки $\sum_i m_iR_i^2 = I$ – момент інерції тіла, то (6.22) перепишеться так:

$$\boxed{W_к = \frac{I\omega^2}{2}.} \qquad (6.23)$$

Вираз (6.23) нагадує формулу для кінетичної енергії поступального руху тіла. Тут момент інерції I відіграє роль маси тіла, а кутова швидкість ω – лінійної швидкості.

Якщо тіло обертається і при цьому його центр мас здійснює поступальний рух (наприклад, велосипедне колесо), то воно володіє кінетичною енергією як поступального, так і обертального рухів. Повна кінетична енергія такого тіла дорівнює сумі кінетичної енергії поступального руху його центра мас і кінетичної енергії його обертання відносно центра мас. Тобто

$$W_к = \frac{m\upsilon_0^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (6.24)$$

де υ_0 – лінійна швидкість центра мас тіла.

Приклад 6.8. *Момент інерції ротора центрифуги* $I = 4{,}0\cdot10^{-2}$ *кг·м²* *Яку кількість енергії потрібно затратити, щоб із стану спокою призвести її в стан обертання з частотою* $n = 10^4$ *об/хв ?*

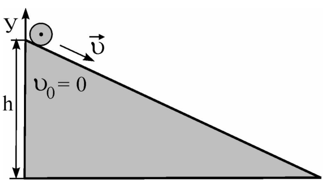


Рис. 6.15

Розв'язок. *Оскільки ротор центрифуги знаходиться в стані спокою, то енергія, яку необхідно затратити, щоб призвести його в стан обертання з частотою* $n = 10^4$ *об/хв = = (10⁴ /60) об/с, дорівнюватиме його кінетичній енергії в цьому стані:*

$$W_к = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{I(2\pi n)^2}{2}.$$

Тут $\omega = 2\pi n$ *– кутова швидкість. Тоді*

$$W_к = \frac{(4{,}0\cdot10^2\ кг\cdot м^2)(4)(3{,}14)^2(10^4)^2}{2(60\ с)^2} = 2{,}2\cdot10^8\ Дж.$$

Приклад 6.9. *Вирахувати швидкість поступального руху циліндра у основи похилої площини висотою* $h = 18$ *м. Вважати, що в початковий момент часу циліндр знаходився в стані спокою у верхній точці похилої площини і скочується без проковзування (рис. 6.15).*

Розв'язок. *Використаємо закон збереження енергії, в якому зараз необхідно врахувати кінетичну енергію обертального руху. Повна енергія на будь-якій відстані від вертикалі У над основою похилої площини дорівнює*

$$W = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + mgy,$$

де $m\upsilon^2/2$ *– кінетична енергія поступального руху центра мас циліндра,* $I\omega^2/2$ *– кінетична енергія обертального руху циліндра,* mgy *– потенціальна енергія циліндра.*

Прирівняємо повну енергію на вершині похилої площини ($y = h,\ \upsilon = 0,\ \omega = 0$ *) повній енергії у основи (y = 0):*

$$0 + 0 + mgh = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0.$$

Значення моменту інерції візьмемо із таблиці 6.1 ($I = mR^2/2$*).*

Оскільки циліндр скочується без проковзування, то швидкість υ *поступального руху його центра мас відносно точки контакту дорівнює швидкості будь-якої точки на поверхні циліндра відносно його центра, звідки* $\omega = \upsilon / R$. *Тоді*

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}(\frac{mR^2}{2})(\frac{\upsilon^2}{R^2}) = mgh,$$

звідки

$$\upsilon = 2\sqrt{\frac{\text{gh}}{3}} = 2\sqrt{\frac{(9{,}8\ м/с^2)(18\ м)}{3}} = 15{,}34\ \frac{м}{с}.$$