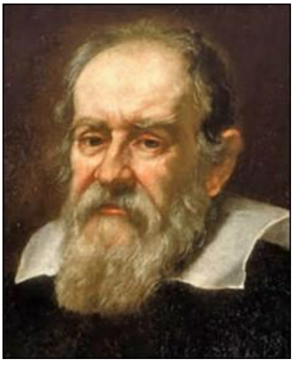
2 КІНЕМАТИКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ І ТВЕРДОГО ТІЛА



Галілео Галілей *(1564 – 1642) – видатний італійський фізик і астроном. Народився в м. Піза. Вивчав медицину, а потім самостійно – математику. Від Галілея бере початок фізика як наука. Галілею людство зобов'язане двома принципами механіки, які зіграли надзвичайно велику роль в розвитку фізики – це* ***принцип відносності Галілея для прямолінійного і рівномірного руху і принцип сталості прискорення сили тяжіння.*** *Галілей встановив закон інерції, закони вільного падіння, руху тіла по похилій площині і тіла, кинутого під кутом до горизонту, відкрив закон додавання швидкостей і закон сталості періоду коливань маятника. Він створив перший термометр та маятниковий годинник. Галілей перший показав, як потрібно використовувати математичний апарат в наукових дослідженнях.*

Механіка – розділ фізики, який вивчає найпростішу форму руху тіл – механічний рух, тобто зміну взаємного положення тіл в просторі з часом. Якщо тіло переміщається без обертання, то говорять, що тіло знаходиться в стані **поступального руху**. Будь-яка точка тіла, що рухається тільки поступально, проходить одну і ту ж траєкторію.

При вивченні руху ми будемо користуватися поняттям **ідеалізованої частинки**. Така частинка розглядається як математична точка, тобто у неї немає просторової протяжності (розмірів), і вона може здійснювати тільки поступальний рух. Тіло, розмірами якого нехтувати не можна, розглядається як система матеріальних точок

Механіку поділяють на три частини: **кінематику**, яка вивчає рух тіл без врахування причин, що викликають цей рух; **статику**, яка описує рівновагу тіл; і **динаміку**, яка відповідає на питання про те, чому тіла рухаються саме таким чином. Ці частини механіки умовно самостійні, і вони розв'язують різні задачі.

§ 2.1. Системи відліку

Рухом тіла називають зміну його положення в просторі з часом. Однак поняття руху має строго визначений зміст тільки тоді, якщо вказано тіло (або система тіл), відносно якого відбувається рух розглядуваного тіла. В цьому суть фундаментальної властивості природи, зміст якої полягає в тому, що **будь-який рух відносний**. Тому опис руху можливий тільки за наявності системи **відліку**.

Системою відліку називають тіло (або систему тіл), відносно яких розглядають рух, тобто визначають положення рухомих тіл у просторі.

Для опису рухів на Землі за систему відліку зазвичай беруть Землю або (що те саме) які-небудь тіла, нерухомі відносно Землі, наприклад, стіни лабораторії, в якій проводяться досліди.

Системи відліку необхідні для фіксації точки зору на рух. Тому в системах відліку, як і в фізичних тілах, абстрагуються від всього, що пов'язано з їх будовою і властивостями. Важливим є тільки те, як виглядає по відношенню до них простір і як тече час. Дослідним фактом є тривимірність світового простору. Тому систему відліку зображають тривимірною системою координат, осі якої жорстко зв'язані з вибраним тілом, яке разом з нерухомим годинником, який служить для вимірювання часу, утворюють систему відліку. Точка перетину координатних осей *X, У, Z* називають початком системи відліку (рис. 2.1).Таким чином, положення рухомої точки у вибраній системі координат можна визначити трьома координатами *X, У, Z*.

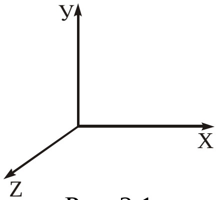


Рис. 2.1

Крім системи відліку, зв'язаної з Землею, існують і інші системи відліку, наприклад, зв'язаних з рухомим автобусом чи залізничним потягом, з рухомою ракетою, рухомим космічним кораблем чи Місяцем тощо. Всі вони мають однакове право на існування, тільки потрібно вміти правильно ними користуватися.

§ 2.2. Траєкторія, шлях, переміщення

Кінематика геометрично описує рух, не з'ясовуючи його причин. Виберемо деяку систему відліку і зв'яжемо з нею систему координат. В кінематиці всі системи відліку однаково придатні для опису руху. Під тілом будемо розуміти матеріальну точку. Лінію, яку описує при своєму русі матеріальна точка, називають **траєкторією** (лінія АСВ на рис. 2.2). Відстань, відраховану вздовж траєкторії, називають **повним пройденим шляхом**. Напрямлений відрізок прямої, що сполучає початкове положення тіла з його наступним положенням, називають **переміщенням тіла** (рис. 2.2). Таким чином, переміщення є не що інше, як зміна положення тіла. Щоб знайти положення тіла в будь-який момент часу, треба знайти його початкове положення і переміщення, здійснене до цього моменту часу.

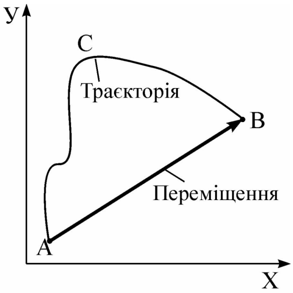


Рис. 2.2

Приклад 1.1. *Людина пройшла 60 м на схід, потім повернула на північ і пройшла ще 10 м. Знайти повний пройдений шлях і переміщення.*

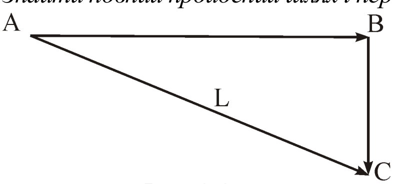


Рис. 2.3

Розв'язок. *Позначимо повний пройдений шлях через S. Тоді*

$$S = AB + BC = 60\,м + 10\,м = 70\,м\,.$$

Переміщення L визначимо із рис. 2.3:

$$L = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(60\,м)^2 + (10\,м)^2} = 60{,}8\,м$$

§ 2.3. Швидкість і прискорення

1. Розглянемо спочатку найпростіший вид руху – **прямолінійний рівномірний рух**. Прямолінійний рух – це рух, при якому траєкторія руху точки є пряма лінія. **Прямолінійним рівномірним рухом називають рух, при якому точка за будь-які рівні проміжки**

часу проходить однакові шляхи. **Швидкістю рівномірного прямолінійного руху називають сталу величину, яка дорівнює відношенню переміщення тіла за будь-який інтервал часу до значення цього інтервалу**. Тобто

$$\boxed{\upsilon = \frac{S}{t},} \tag{2.1}$$

де S – переміщення тіла за час t.

Швидкість і переміщення є величини векторні, тому формула (2.1) у векторній формі виразиться так:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{\vec{S}}{t}.} \tag{2.2}$$

Знаючи швидкість v, можна знайти переміщення за будь-який інтервал часу t.

Швидкість, за визначенням (див. ф-лу (2.1)), в СІ вимірюють в м/с. Однак, в деяких випадках швидкість вимірюють в км/год. Вимірювати швидкість в м/с зручно, наприклад, при вимірюваннях гальмівного шляху, коли час вимірюється в секундах, а відстань в метрах, а не в годинах і кілометрах.

Щоб визначити, чому дорівнюватиме швидкість υ = 60 км/год в м/с, проробимо наступний розрахунок. В 1 км міститься 1000 м, а в 1 год 3600 с. Таким чином,

$$\upsilon = 60\,\frac{км}{год} = (60)(\frac{1000\,м}{3600\,с}) = (60)(0{,}278\,\frac{м}{с}) = 16{,}68\,\frac{м}{с}.$$

Таким чином, із наведених розрахунків видно, що для того, щоб перейти від одиниць км/год до одиниць м/с, потрібно числове значення швидкості помножити на перевідний множник, що дорівнює 0,278 м/с. Якщо необхідно перейти від одиниць м/с до одиниць км/год, то потрібно числове значення швидкості поділити на перевідний множник 0,278 км/год.

Приклад 2.2. *Дорогою назустріч один одному рухаються два автомобілі: один – зі швидкістю* υ_1 *= 60 км/год, другий – 90 км/год. Біля заправної станції автомобілі зустрілися й опісля продовжили свій рух. Визначити положення кожного автомобіля через t = 30 хв після зустрічі та відстань між ними в цей момент.*

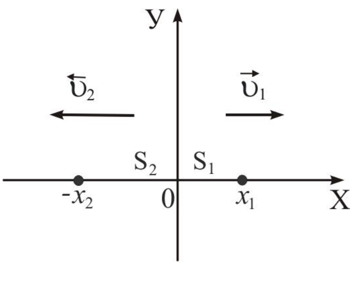


Рис. 2.4

Розв'язок. *За початок координат візьмемо заправну станцію. Координатну вісь X спрямуємо за напрямком руху першого автомобіля, а час відраховуватимемо від моменту зустрічі автомобілів. Тоді положення кожного із автомобілів буде*

$$S_1 = x_1 = \upsilon_1 t = (60\ км/год)(0{,}5\ год) = 30\ км,$$

$$S_2 = x_2 = (-90\ км/год)(0{,}5\ год) = -45\ км.$$

Відстань l між автомобілями дорівнює різниці їх координат

$$l = x_1 - x_2 = 30\ км - (-45\ км) = 75\ км.$$

2. Прямолінійний рівномірний рух, тобто рух зі сталою швидкістю, не дуже часто зустрічається на практиці. Значно частіше доводиться мати справу з такими рухами, під час яких швидкість руху з часом змінюється. Такі рухи називають **нерівномірними**.

В багатьох випадках, коли мають справу з нерівномірним рухом, користуються поняттям **середньої швидкості**. Середня швидкість визначається як **переміщення, поділене на час, протягом якого воно здійснене**:

$$\boxed{\upsilon_c = \frac{S}{t}} \quad \text{або} \quad \boxed{\vec{\upsilon}_c = \frac{\vec{S}}{t}.} \qquad (2.3)$$

Знаючи середню швидкість, можна визначити переміщення за формулою

$$S = \upsilon_c t. \qquad (2.4)$$

Приклад 2.3. *Автомобіль одну третину шляху пройшов зі швидкістю* v_1 *= 50 км/год, а частину шляху, що залишилася, зі швидкістю* v_2 *= 70 км/год. Знайти середню швидкість руху автомобіля.*

Розв'язок. *Згідно (2.3)*

$$\upsilon_c = \frac{S}{t},$$

де S – повний шлях, пройдений автомобілем, t – час руху автомобіля. Тому $S = S_1 + S_2$, $t = t_1 + t_2$. *Тоді*

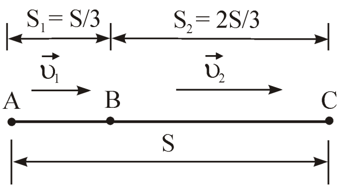


Рис. 2.5

$$\upsilon_c = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{\frac{1}{3}S + \frac{2}{3}S}{\frac{S}{3\upsilon_1} + \frac{2S}{3\upsilon_2}} = \frac{S}{\frac{S}{3}\left(\frac{1}{\upsilon_1} + \frac{2}{\upsilon_2}\right)} = \frac{3\upsilon_1\upsilon_2}{2\upsilon_1 + \upsilon_2} =$$

$$= \frac{3(50\ км/год)(70\ км/год)}{2(50\ км/год) + 70\ км/год} = \frac{10500}{170}\frac{км}{год} = 61{,}8\ \frac{км}{год}.$$

Тут враховано, що $t_1 = S/(3v_1)$, *а* $t_2 = 2S/(3v_2)$.

Зауважимо, що середню швидкість не можна отримати простим усередненням v_1 *і* v_2*:*

$$\upsilon_c \neq \frac{\upsilon_1 + \upsilon_2}{2} = \frac{50\ км/год\ +\ 70\ км/год}{2} = 60\ \frac{км}{год}.$$

Приклад 2.4. *Перша половина шляху між двома пунктами пройдена з середньою швидкістю* υ_{1c} *= 10 км/год, а друга половина шляху – з швидкістю* υ_{2c} *= 40 км/год. Знайти середню швидкість на протязі всього шляху.*

Розв'язок. *Згідно (2.3)*

$$\upsilon_c = \frac{S_1 + S_2}{t_1 + t_2} = \frac{\frac{1}{2}S + \frac{1}{2}S}{\frac{S}{2\upsilon_{1c}} + \frac{S}{2\upsilon_{2c}}} = \frac{2\upsilon_{1c}\upsilon_{2c}}{\upsilon_{1c} + \upsilon_{2c}} = \frac{2(10\ км/год)(40\ км/год)}{10\ км/год + 40\ км/год} = \frac{800}{50}\frac{км}{год} = 16\ \frac{км}{год}.$$

Тут $t_1 = S/(2v_{1c})$, *а* $t_2 = S/(2v_{2c})$.

3. Якщо автомобіль пройшов шлях *S* = 150 км за час *t* = 2 год, то його середня швидкість дорівнює υ_c = 75 км/год. Однак, малоймовірно, щоб в кожний даний момент часу автомобіль рухався саме з швидкістю 75 км/год. Для опису такого руху вводиться поняття **миттєвої швидкості**, яка дорівнює **середній швидкості за нескінченно малий проміжок часу**, і виражається відношенням нескінченно малого переміщення на ділянці траєкторії, до нескінченно малого інтервалу часу, за який це переміщення відбулося. Тобто

$$\boxed{\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt}.} \qquad (2.5)$$

Ця границя dS/dt називається першою похідною величини S по t.

Миттєва швидкість – величина векторна. Напрямок вектора миттєвої швидкості збігається з напрямком руху в даній точці.

Про миттєву швидкість можна говорити і у випадку рівномірного руху. Відмінність лише в тому, що при рівномірному русі миттєва швидкість у будь-якій точці і в будь-який момент часу однакова, а при нерівномірному русі вона в різних точках і різні моменти часу різна.

Приклад 2.5. *Частинка рухається вздовж осі X-ів, як показано на рис. 2.6. Її положення на цій осі, як функція часу, задається виразом* $x = At^2 + B$, *де* $A = 2{,}10$ *м/с²*, *а* $B = 2{,}80$ *м. Визначити: а) переміщення частинки за час від* $t_1 = 3{,}00$ *с до* $t_2 = 5{,}00$ *с; б) середню швидкість на цьому проміжку часу; в) величину миттєвої швидкості при* $t = 5{,}00$ *с.*

Розв'язок. *а) При* $t_1 = 3{,}00$ *с координата частинки дорівнює*

$$x_1 = At_1^2 + B = (2{,}10\ м/с^2)(3{,}00\ с)^2 + 2{,}80\ м = 21{,}7\ м.$$

При $t_2 = 5{,}00$ *с*

$$x_2 = (2{,}10\ м/с^2)(5{,}00\ с)^2 + 2{,}80\ м = 55{,}3\ м.$$

Тоді, переміщення дорівнює

$$x = x_2 - x_1 = 55{,}3\ м - 21{,}7\ м = 33{,}6\ м.$$

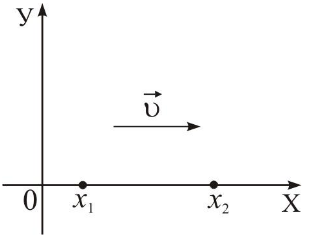


Рис. 2.6

б)Середню швидкість на цьому проміжку шляху визначимо за формулою (2.3):

$$\upsilon_c = \frac{S}{t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{33{,}6\ м}{2\ с} = 16{,}8\ \frac{м}{с}.$$

в) Згідно (2.5) миттєве значення швидкості дорівнює

$$\upsilon = \frac{dx}{dt}.$$

Знайдемо dx/dt *:*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(At^2 + B) = 2At.$$

Тоді

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = 2At,$$

звідки для $t = 5{,}00$ *с знаходимо, що*

$$\upsilon = 2(2{,}10\ м/с^2)(5{,}00\ с) = 21{,}0\ м/с.$$

Описати рух тіла можна також за допомогою графіка. Якщо по осі абсцис відкласти час t, а по осі ординат пройдений шлях (рис. 2.7), то отримаємо графік залежності шляху, пройденого тілом, від часу. Такий графік називають графіком руху. Графіком прямолінійного рівномірного руху є пряма лінія. Інакше кажучи, пройдений шлях лінійно залежить від часу. Причому, чим більша швидкість, тим більший кут між графіком руху і віссю часу (рис. 2.7). Поряд з графіком руху часто користуються **графіком швидкості** (рис. 2.8). Такі графіки показують, як змінюється швидкість з плином часу. В разі прямолінійного рівномірного руху графіком швидкості є пряма, паралельна осі часу (рис. 2.8).

За графіком швидкості можна знайти переміщення (пройдений шлях) тіла за даний інтервал часу. Воно чисельно дорівнює площі затонованого прямокутника (рис. 2.8).

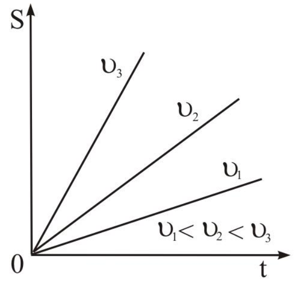


Рис. 2.7

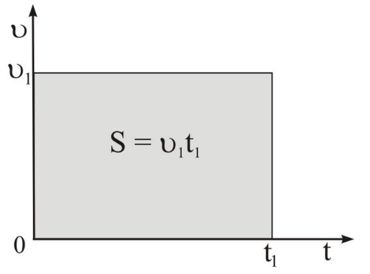


Рис. 2.8

4. Для характеристики прискореного руху вводиться поняття **прискорення**, яке характеризує **зміну швидкості**.

Прискоренням називають величину, яка дорівнює відношенню зміни швидкості тіла до інтервалу часу, протягом якого ця зміна відбулася. Прискорення позначають буквою $\vec{a}$:

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{\upsilon}_1 - \vec{\upsilon}_0}{t},} \qquad (2.6)$$

де $\vec{\upsilon}_0$ і $\vec{\upsilon}_1$ – відповідно швидкості тіла в початковий момент часу (або початкова швидкість) і через інтервал часу *t*.

Прискорення – величина векторна. За визначенням (див. ф-лу (2.6)) одиницею прискорення в СІ є м/с^2 і читається як "метр на секунду в квадраті".

У випадку, коли прискорення тіла не є сталим, то користуються поняттям **середнього прискорення**. Воно визначається як

$$\vec{a}_c = \frac{\vec{\upsilon}_2 - \vec{\upsilon}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t}, \qquad (2.7)$$

де $\Delta\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ – зміна швидкості тіла за час $\Delta t = t_2 - t_1$. Зміну швидкості за нескінченно малий проміжок часу називають **миттєвим прискоренням**. Миттєве прискорення дорівнює граничному значенню середнього прискорення при $\Delta t \to 0$:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}. \qquad (2.8)$$

Величина $d\vec{v}/dt$ називається похідною величини v по *t*.

В певному сенсі можна сказати, що прискорення – це **"швидкість зміни швидкості"**. Оскільки $\vec{a} = d\vec{\upsilon}/dt$ а $\vec{\upsilon} = d\vec{S}/dt$, то прискорення можна записати таким чином:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{S}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{S}}{dt^2}. \qquad (2.9)$$

Тут величину d^2S/dt^2 називають другою похідною шляху по часу.

У випадку прискореного руху прискорення завжди додатне ($a > 0$); у випадку сповільненого руху прискорення від'ємне ($a < 0$).

Знаючи початкову швидкість тіла υ_0 і його прискорення a, можна знайти швидкість тіла υ в будь-який момент часу. Справді, з формули (2.6) знаходимо, що

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 \pm at.} \tag{2.10}$$

Тут знак “+” відноситься до рівноприскореного руху, знак “–” – до рівносповільненого руху.

§ 2.4. Шлях при прямолінійному рівноприскореному русі

Знайдемо вираз для пройденого шляху у випадку сталого прискорення. Приймемо, що вихідне положення тіла знаходиться в початку координат ($t = 0$). Пройдений шлях в цьому випадку виразиться формулою (2.4):

$$S = \upsilon_c t\,. \tag{2.11}$$

Оскільки швидкість збільшується рівномірно (рис. 2.9), середня швидкість v_c буде розміщена посередині між початковим і кінцевим значеннями швидкості

$$\upsilon_c = \frac{1}{2}(\upsilon_0 + \upsilon). \tag{2.12}$$

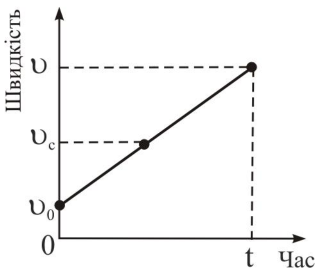


Рис. 2.9

Тут початкова швидкість не дорівнює нулю ($v_0 \neq 0$). Підставляючи значення υ_c в формулу (2.11), отримаємо:

$$S = \frac{\upsilon_0 + \upsilon}{2} t\,. \tag{2.13}$$

Використовуючи формулу (2.10), останню формулу перепишемо так:

$$S = \frac{1}{2}\upsilon_0 t + \frac{1}{2}(\upsilon_0 + at)t\,,$$

або остаточно

$$\boxed{S = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}.} \tag{2.14}$$

Таким чином, пройдений шлях дорівнює $\upsilon_0 t$ (відстані, яка була б пройдена у відсутності прискорення) плюс вираз, який залежить від прискорення і пропорційний квадрату витраченого часу (рис. 2.10).

Для випадку руху зі сталим прискоренням і за початкових умов $S = 0$, $\upsilon = v_0$ і $t = 0$, отримані результати можна записати таким чином:

$$\left.\begin{aligned} &\textit{прискорення} \quad a = const; \\ &\textit{швидкість} \quad \upsilon = \upsilon_0 \pm at; \\ &\textit{відстань} \quad S = \upsilon_0 t \pm \frac{at^2}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

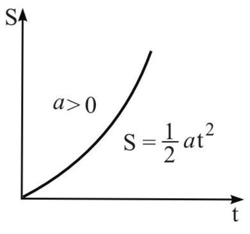


Рис. 2.10

В формулах (2.15) знак “+” відноситься до рівноприскореного руху, знак “–” – до рівносповільненого руху.

Виразивши із (2.10) t і підставивши його в (2.13), знайдемо, що $S = \dfrac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a}$. Після елементарних перетворень отримаємо вираз для v, що не містить часу:

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 \pm 2aS}\,. \tag{2.16}$$

Для випадку рівноприскореного руху $(a = const)$ без початкової швидкості $(\upsilon_0 = 0)$ формули (2.10), (2.14) і (2.16) перепишуться так:

$$\upsilon = \pm at, \tag{2.17}$$

$$S = \pm\frac{at^2}{2}, \tag{2.18}$$

$$\upsilon = \pm\sqrt{2aS}. \tag{2.19}$$

Приклад 2.6. *Спортивний автомобіль, стартуючи з місця при сталому прискоренні, розвиває швидкість υ = 385 км/год на шляху S = 0,4 км. Знайти його прискорення.*

Розв'язок. *При початковій швидкості υ_0 = 0 кінцева швидкість v, прискорення a та пройдений шлях S зв'язані між собою формулою (2.19). Звідки*

$$a = \frac{\upsilon^2}{2S}\,. \tag{1}$$

Щоб провести обрахунки, попередньо швидкість, виражену в км/год, виразимо в м/с:

$$\upsilon = (385)(0{,}278\ м/с) = 107\,м/с.$$

Тоді

$$a = \frac{(107\,м/с)^2}{2(400\ м)} = 14{,}3\ \frac{м}{с^2}\,.$$

Приклад 2.7. *Літак певного типу відривається від землі, набувши швидкості υ = 200 км/год. Якої мінімальної довжини повинна бути злітна смуга летища, якщо літак набуває швидкості з прискоренням a = 12,0 м/с^2.*

Розв'язок. *Оскільки початкова швидкість літака υ_0 = 0, то довжину розгону (вона дорівнює мінімальній довжині злітної смуги) виразимо з формули (2.19):*

$$S_{\min} = \frac{\upsilon^2}{2a} = \frac{(55{,}6\ м/с)^2}{2(12{,}0\ м/с^2)} = 128{,}8\ м\,.$$

Зауваження. *З метою безпеки зльоту літака довжина злітної смуги повинна бути більша S_{min}.*

Приклад 2.8. *Знайти гальмівний шлях автомобіля, який рухається зі сталою швидкістю $\upsilon_0 = 80\ км/год$. Час реакції водія дорівнює t = 0,80 с, прискорення автомобіля при гальмуванні a = – 7,0 м/с^2.*

Розв'язок. *Цю задачу простіше розв'язувати в два етапи:*

1) Спочатку знайдемо шлях, який пройшов автомобіль за час від прийняття рішення "включити" гальма і їх дійсним включенням (це час "реакції"). За умовою він дорівнює t = 0,80 с. На протязі цього часу автомобіль рухається ще зі сталою швидкістю $v = 80\,км/год$. Тоді

$$S_1 = \upsilon_0 t = (80)(0{,}278\ м/с)(0{,}80\ с) = 17{,}8\ м. \tag{1}$$

2) Далі визначимо дійсний час гальмування, коли автомобіль сповільнював рух ($a \neq 0$). Тут початкові умови наступні: $\upsilon_0 = 80\,км/год$, $a = -7{,}0\ м/с^2$ і $v = 0$. Гальмівний *шлях виразимо із формули (2.16), не враховуючи знак “–” під коренем:*

$$S = \frac{\upsilon^2 - \upsilon_0^2}{2a} = \frac{0 - (22{,}22\ м/с)^2}{2(-7{,}0\ \ м/с^2)} = 35{,}3\ м. \quad (2)$$

За час реакції водія автомобіль пройде шлях 17,8 м і до повної зупинки він пройде ще 35,3 м. Значить, повний шлях дорівнює $S_{пов} = S_1 + S = (35{,}3 + 17{,}8)\,м = 53{,}1\ м.$

Зауваження: 1) *Як видно із робочої формули (2), гальмівний шлях залежить від швидкості нелінійно, а росте пропорційно* ***квадрату швидкості****.*

2) Гальмівний шлях залежить від стану дороги. На мокрій дорозі і при ожеледиці гальмівний шлях значно збільшується.

Задача 2.9. *Спринтер (бігун на короткі дистанції) за час t_1 = 1,8 с рівноприскорено розганяється із стану спокою (υ_0 = 0) до максимальної швидкості, яка дорівнює υ_1 = 10,2 м/с. За який час спринтер пробіжить всю дистанцію довжиною в S = 200 м, якщо він збереже цю швидкість до кінця забігу ?*

Розв’язок. *Час, на протязі якого спринтер пробіжить всю дистанцію, дорівнює*

$$t = t_1 + t_2.$$

Частину дистанції S_1 спринтер пробіжить рівноприскорено за час t_1 і вона дорівнює

$$S_1 = \upsilon_c t_1 = \frac{(\upsilon_0 + \upsilon_1)t_1}{2}, \quad (1)$$

де $\upsilon_c = \dfrac{\upsilon_0 + \upsilon_1}{2}$.

Другу частину дистанції S_2 спринтер пробіжить зі сталою швидкістю v_1. Тому

$$S_2 = \upsilon_1 t_2. \quad (2)$$

Якщо формули (1) і (2) почленно додамо, то отримаємо:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{(\upsilon_0 + \upsilon_1)t_1}{2} + \upsilon_1 t_2,$$

звідки

$$t_2 = \frac{2S - \upsilon_1 t_1}{2\upsilon_1} = \frac{2(200\,м) - (10{,}2\ м/с)(1{,}8\,с)}{2(10{,}2\ м/с)} = 18{,}7\,с.$$

Тут враховано, що υ_0 = 0.

Тоді

$$t = t_1 + t_2 = 1{,}8\ с + 18{,}7\,с = 20{,}5\ с.$$

§ 2.5. Рух падаючих тіл і тіл, кинутих вертикально

Одним із найпоширеніших прикладів рівноприскореного руху є рух тіла, що вільно падає по вертикалі. Даний вид прямолінійного руху був вивчений Галілео Галілеєм. Для випадку вільного падіння Галілей постулював, що при відсутності повітря, або іншого середовища з опором, всі тіла падають з **однаковим сталим прискоренням**. Він показав, що відповідно цього постулату, відстань, яку проходить тіло, що падає із стану спокою, пропорційна квадрату часу ($h \sim t^2$).

Вклад Галілея в сучасне розуміння вільно падаючих тіл можна узагальнити таким чином. **В даному місці Землі і у відсутності опору повітря всі тіла падають з одним і тим же сталим прискоренням**. Це прискорення, обумовлене силою ваги, називається

прискоренням вільного падіння і позначається символом g. Його значення приблизно дорівнює

$$g = 9{,}80\ м/с^2.$$

В дійсності значення g дещо змінюється в залежності від географічної широти місцевості (що пов'язано з обертанням Землі), а також в залежності від висоти над рівнем моря (таблиця 2.1). Однак, ці зміни такі малі, що ними дуже часто нехтують.

Таблиця 2.1

Місце	g, м/с^2
На північному	9,83216
На широті 45°	9,80616
На екваторі	9,78030

Вільне падіння є частковим випадком рівноприскореного руху без початкової швидкості (див. § 2.4), тому для цього руху справедливі формули (2.10), (2.16) – (2.19). Якщо υ – швидкість падіння тіла через час t, g – прискорення вільного падіння, h – висота, з якої падає тіло (відстань, пройдена за час t), t – час падіння тіла, то із формул (2.10), (2.16) – (2.19) маємо:

$$\boxed{h = \frac{\upsilon t}{2},} \qquad (2.20)$$

$$\boxed{h = \frac{gt^2}{2},} \qquad (2.21)$$

$$\boxed{\upsilon = gt,} \qquad (2.22)$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{2gh}.} \qquad (2.23)$$

Тіло, кинуте вертикально вверх, рухається рівномірно сповільнено з початковою швидкістю V_0 і прискоренням $a = -g$. Шлях, пройдений тілом за час t, представляє собою висоту підйому h. Для опису цього руху користуються формулами (2.10), (2.13), (2.15) і (2.16). Якщо покласти, що υ_0 – початкова швидкість руху тіла, υ – швидкість тіла через час t, g = 9,80 м/с^2 – прискорення вільного падіння, h – висота, на яку піднімається тіло за час t, то із формул (2.10) і (2.16) маємо:

$$\boxed{\upsilon = \upsilon_0 - gt,} \qquad (2.24)$$

$$\boxed{\upsilon = \sqrt{\upsilon_0^2 - 2gh}.} \qquad (2.25)$$

Оскільки тіло, кинуте вертикально вверх, рухається з від'ємним прискоренням ($a = -g$), то через певний проміжок часу t його швидкість стане рівною нулю. Висоту, на якій швидкість тіла дорівнюватиме нулю, називають **максимальною** і позначають її через h_{max}. Максимальну висоту можна визначити із формули (2.25), якщо покласти $\upsilon = 0$. Тоді

$$\boxed{h_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{2g}.} \qquad (2.26)$$

Час, на протязі якого тіло досягає максимальної висоти, знайдемо із формули (2.24), також поклавши $V = 0$:

$$\boxed{t_{h_{max}} = \frac{\upsilon_0}{g}.} \qquad (2.27)$$

Насамкінець зауважимо, що рух тіла, кинутого вертикально вниз з початковою швидкістю υ_0, також представляє собою рівноприскорений рух з прискоренням $a = g$. Для його опису можна скористатися формулами (2.24) – (2.27), замінивши в них знак “–” на “+”. Опором повітря при цьому нехтуємо.

Приклад 2.10. *М’яч скинуто із стану спокою ($\upsilon_0 = 0$) з деякої висоти. Знайти його швидкість після проходження шляху $h = 78$ м.*

Розв’язок. *Оскільки початкова швидкість м’яча дорівнює нулю ($\upsilon_0 = 0$), то швидкість υ після проходження шляху $h = 78$ м визначимо, скориставшись формулою (2.23):*

$$\upsilon = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(9{,}8\, м/с^2)(78\, м)} = 39{,}1\ м/с\ .$$

Приклад 2.11. *З вершини скелі висотою $h_2 = 65$ м кинуто вертикально вгору камінь зі швидкістю $\upsilon_0 = 10$ м/с. а) Якою є його швидкість в момент удару о землю? б) Через який час камінь досягне основи скелі?*

Розв’язок. *Тіло, кинуте зі скелі вертикально вверх з початковою швидкістю υ_0, підніметься на висоту h_1, де його швидкість дорівнюватиме нулю (точка B на рис. 2.11). Висоту h_1 знайдемо за формулою (2.26):*

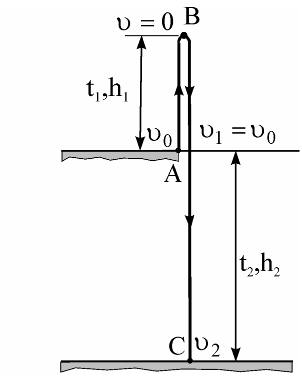


Рис. 2.11

$$h_1 = \frac{\upsilon_0^2}{2g} = \frac{(10\, м/с^2)^2}{2(9{,}8\, м/с^2)} = 5{,}1\ м\ .$$

З висоти $H = h_1 + h_2 = 5{,}1$ м $+ 65$ м $= 70{,}1$ м (з точки B) тіло вільно падатиме вертикально вниз без початкової швидкості і в точці C (в момент удару об землю) воно набуде максимальної швидкості υ_2, яку знайдемо, скориставшись формулою (2.23):

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gH} = \sqrt{2(9{,}8\ м/с^2)(70{,}1\ м)} = 37{,}1\ м/с\ .$$

Час, на протязі якого камінь досягне основи скелі, дорівнює

$$t = 2t_1 + t_2\ ,$$

де t_1 – час, на протязі якого тіло підніметься на висоту h_1, (з точки A в точку B), t_2 – час падіння каменя на землю (з точки A в точку C). Час t_1 визначимо за формулою (2.27):

$$t_1 = \frac{\upsilon_0}{g} = \frac{10\, м/с}{9{,}8\, м/с^2} = 1{,}02\ с\ ,$$

а t_2 виразимо із формули (2.24), замінивши в ній знак “–” на “+”:

$$t_2 = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{g} = \frac{37{,}1\ м/с\ - 10\, м/с}{9{,}8\, м/с^2} = 2{,}77\ с, \cdot$$

де $\upsilon_1 = \upsilon_0$.

Тоді

$$t = 2t_1 + t_2 = 2{,}04\,с + 2{,}77\,с = 4{,}81\,с\,.$$

§ 2.6. Відносність руху

Припустимо, що два автомобілі рухаються назустріч один одному кожний зі швидкістю 50 км/год відносно землі. Швидкість одного автомобіля відносно другого дорівнює 100 км/год. Отже, для спостерігача, що знаходиться в одному із автомобілів, другий автомобіль буде наближатися до нього зі швидкістю 100 км/год. Інший приклад. Автомобіль, який рухається зі швидкістю 90 км/год, обганяє автомобіль, що рухається зі швидкістю 50 км/год. Швидкість руху першого автомобіля відносно другого дорівнює $90\,км/год - 50\,км/год = 40\,км/год$. Швидкість першого автомобіля відносно другого називають **відносною швидкістю**.

Таким чином, у випадку, коли швидкості направлені вздовж однієї прямої, для отримання відносної швидкості достатньо простого додавання або віднімання: **якщо швидкості протилежні за напрямком, то вони додаються; якщо вони співпадають за напрямком – віднімаються**. Якщо швидкості не направлені вздовж однієї прямої, то їх потрібно додавати векторно. При цьому важливо вказати, яка система відліку використовується.

Уявімо собі річку з паралельними берегами. Нехай швидкість течії води в річці відносно берега по всій ширині однакова і дорівнює $\vec{\upsilon}_1$. Річку перетинає човен перпендикулярно до течії, рухаючись зі швидкістю $\vec{\upsilon}_2$ відносно води.

Далі уявимо собі, що за рухом човна стежать два спостерігачі: один, зв'язаний з землею, і він являє собою нерухому систему координат (точка *O* на рис. 2.12), другий на пло-

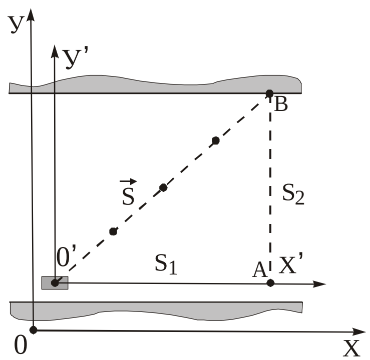


Рис. 2.12

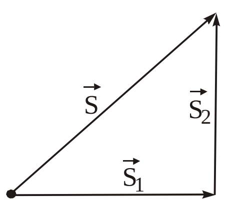


Рис. 2.13

ту, що пливе за течією зі швидкістю $\vec{\upsilon}_1$ і являє собою рухому систему координат (точка *O´* на рис. 2.12). Зауважимо, що відносно води пліт нерухомий, а відносно берега він рухається зі швидкістю $\vec{\upsilon}_1$.

Спостерігач, зв'язаний з рухомою системою координат (на плоту), бачить, як човен віддаляється від нього і через певний проміжок часу t_1 човен пристане до протилежного берега (точка *B*). Таким чином, відносно рухомого спостерігача човен здійснив переміщення S_2.

Зовсім іншим побачить рух човна нерухомий спостерігач, який знаходиться на березі. Він побачить, що за той самий час t човен здійснить переміщення $\vec{S} = \overrightarrow{OB}$. За цей самий час рухома система координат, тобто пліт, здійснила переміщення $\vec{S}_1$. Схематично перемищення човна зображені на рис. 2.13, із якого видно, що

$$\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 .$$

Якщо врахувати, що

$$\vec{\upsilon} = \frac{\vec{S}}{t},$$

то отримаємо:

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}_1 + \vec{\upsilon}_2,} \tag{2.28}$$

де $\vec{\upsilon}$ – результуюча (відносна) швидкість, $\vec{\upsilon}_1$ – швидкість течії води відносно землі, $\vec{\upsilon}_2$ – швидкість човна відносно води.

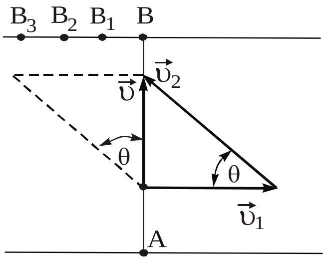


Рис. 2.14

Отже, **швидкість тіла відносно нерухомої системи координат дорівнює векторній сумі швидкості тіла відносно рухомої системи координат і швидкості рухомої системи відносно нерухомої**.

Далі спробуємо дати відповідь на питання: якою повинна бути швидкість човна $\vec{\upsilon}_2$ відносно води і як вона повинна бути направлена, щоб човен перетнув річку в строго перпендикулярному напрямку (на рис. 2.14 по прямій АВ).

Виходячи із умови задачі (вимога попасти в точку В), результуюча швидкість $\vec{\upsilon}$ направлена по прямій АВ. Тому, згідно формули (2.28), третьою стороною (гіпотенузою) трикутника (рис. 2.14) є швидкість човна $\vec{\upsilon}_2$ відносно води. Із рис. 2.14 видно, що напрямок швидкості човна $\vec{\upsilon}_2$ відносно води визначається кутом θ :

$$\cos\theta = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}. \tag{2.29}$$

Якщо $\upsilon_2 < \upsilon_1$, то знос неминучий. Якщо ж швидкість човна υ_2 більша швидкості течії води υ_1, то при належному вибору напрямку $\vec{\upsilon}_2$ (напрямку човна) можна досягти того, що зносу взагалі не буде (рис. 2.14). Більше того, при $\upsilon_2 > \upsilon_1$ можна, переправляючись через річку, причалити до протилежного берега в будь-якому місці вище за течією (вище точки B): в точках B_1, B_2, B_3.

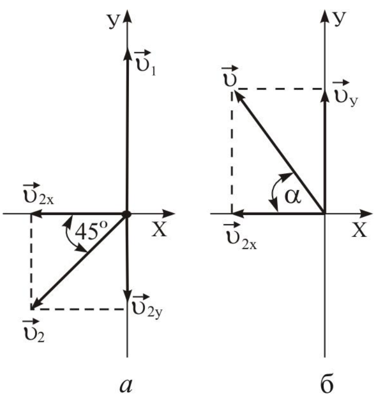


Рис. 2.15

Приклад 2.12. *Літак, швидкість якого відносно повітря дорівнює $\upsilon_1 = 350$ км/год, летить на північ. Раптом знявся північно-східний (45^0 до півночі від напрямку на схід) вітер зі швидкістю $\upsilon_2 = 100$ км/год. Якою буде результуюча швидкість літака відносно землі?*

Розв'язок. *На рис. 2.15, а показані два вектори швидкості (для зручності обидва вектори виходять із однієї точки). Вектор $\vec{\upsilon}_1$ співпадає з напрямком осі* У*-ів, а вектор $\vec{\upsilon}_2$ складає з віссю* У*-ків кут 45^0. Крім того вектор $\vec{\upsilon}_2$ ми розклали на дві складові $\vec{\upsilon}_{2x}$ і $\vec{\upsilon}_{2y}$, значення яких знайдемо із рис. 2.15, а:*

$$\upsilon_{2x} = -\upsilon_2 \cos 45^0 = -(100\ км/год)(0{,}707) = -70{,}7\ км/год.$$

$$\upsilon_{2y} = -\upsilon_2 \sin 45^0 = -(100\ км/год)(0{,}707) = -70{,}7\ км/год.$$

Обидві проекції від'ємні, оскільки їх напрямки відповідають від'ємним напрямкам осей X і У.

Величину результуючої швидкості υ *знайдемо за теоремою Піфагора із рис. 2.15, б.*

$$\upsilon = \sqrt{\upsilon_y^2 + \upsilon_{2x}^2} = \sqrt{(279{,}3\ км/год)^2 + (70{,}7\ км/год)^2} = 288{,}1\ км/год.$$

Тут швидкість υ_y *є результуючою швидкістю* υ_1 *і* υ_{2y}:

$$(\upsilon_y = \upsilon_1 - \upsilon_{2y} = 350\ км/год - 70{,}7\ км/год = 279{,}3\ км/год).$$

Напрямок результуючої швидкості знайдемо із рис. 2.15, б:

$$tg\alpha = \frac{\upsilon_y}{\upsilon_{2x}} = \frac{279{,}3\ км/год}{-70{,}7\ км/год} = -3{,}95; \quad \alpha = -75{,}79^0.$$

Знак "–" вказує, що кут α *відраховується від від'ємного значення осі X-ів, як показано на рис. 2.15, б.*

§ 2.7. Рух тіла, кинутого горизонтально

Цікавим випадком руху є рух тіла, кинутого горизонтально зі сталою швидкістю $\vec{\upsilon}_0$. Цей рух є складним і представляє собою комбінацію двох рухів, взаємно перпендикулярних один до одного: горизонтального (рівномірного) і вертикального (вільного падіння) рухів. Таким чином, швидкість руху тіла, яке приймає участь в такому русі, можна розкласти на вертикальну $\vec{\upsilon}_y$ і горизонтальну $\vec{\upsilon}_x$ складові (рис. 2.16, *а*). Горизонтальна

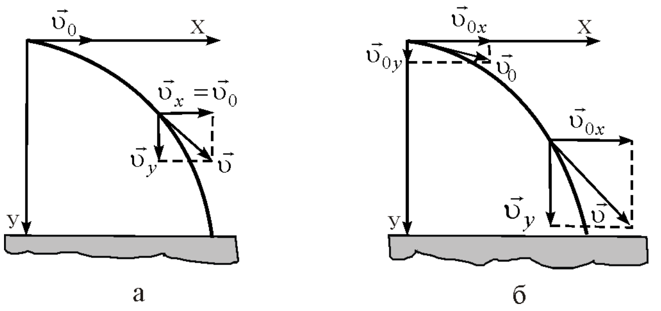


Рис. 2.16

складова швидкості $\vec{\upsilon}_x$ з часом не змінюється, поки тіло знаходиться в повітрі. Ця стала швидкість дорівнює початковій швидкості, тобто $\vec{\upsilon}_x = \vec{\upsilon}_0$. Шлях, пройдений в горизонтальному напрямку, визначається виразом:

$$x = \upsilon_x t = \upsilon_0 t. \tag{2.30}$$

Вертикальна складова $\vec{\upsilon}_y$ виникає внаслідок земного тяжіння і тіло в вертикальному напрямку рухається з прискоренням $\vec{g}$, тому

$$\upsilon_y = gt. \tag{2.31}$$

Шлях, пройдений у вертикальному напрямку, дорівнює

$$y = \frac{gt^2}{2}. \qquad (2.32)$$

Якщо в формулу (2.32) підставити час, виражений із формули (2.30), то отримаємо **рівняння траєкторії руху тіла, кинутого горизонтально**:

$$\boxed{y = \frac{g}{2\upsilon_0^2}x^2.} \qquad (2.33)$$

Оскільки g і υ_0 величини сталі, то $y \sim x^2$, тобто траєкторія руху представляє собою параболу.

Якщо вертикальний рух володіє початковою швидкістю ($\vec{\upsilon}_{0y} \neq 0$) (рис. 2.16, б), то рівняння руху будуть такими:

прискорення:	$a_x = 0,$	$a_y = g;$
швидкість:	$\upsilon_x = \upsilon_{0x},$	$\upsilon_y = \upsilon_{0y} + gt;$
переміщення:	$x = \upsilon_{0x}t,$	$y = \upsilon_{0y}t + \frac{gt^2}{2}.$

Приклад 2.13. *Тіло скинуто з висоти h = 19,5 м з початковою горизонтальною швидкістю v_0 = 6 м/с. Як далеко тіло пролетить в горизонтальному напрямку, перш ніж досягне поверхні землі (рис. 2.17)?*

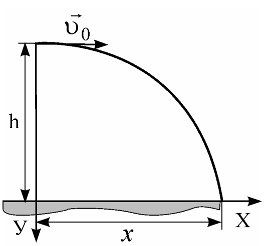


Рис. 2.17

Розв'язок. *Оскільки v_{0y} = 0, то*

$$y = \frac{gt^2}{2},$$

звідки

$$t = \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{2(19{,}5\ м)}{9{,}8\ м/с^2}} \approx 2\ с.$$

Тоді

$$x = \upsilon_{ox}t = (6\ м/с)(2\ с) = 12\ м.$$

Приклад 2.14. *Камінь, кинутий в горизонтальному напрямку зі скелі висотою h = 115 м, падає на землю на відстані S = 92,5 м від її підніжжя. З якою швидкістю був кинутий камінь?*

Розв'язок. *Так як і в попередньому прикладі вертикальна проекція початкової швидкості дорівнює нулю (υ_{0y} = 0). Тому шлях, пройдений каменем у вертикальному напрямку, дорівнюватиме:*

$$y = h = \frac{gt^2}{2},$$

звідки

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2(115\ м)}{9{,}8\ м/с^2}} = 4{,}84\ с.$$

Щоб розрахувати початкову швидкість, скористаємось формулою (2.30)

$$x = S = \upsilon_0 t\ ,$$

звідки

$$\upsilon_0 = \frac{S}{t} = \frac{92{,}5\ м}{4{,}84\ с} = 19{,}1\ м/с\ .$$

§ 2.8. Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту

Рух тіла, кинутого під кутом до горизонту, ще називають **балістичним рухом**. Прикладами цього руху є рух футбольного м'яча, політ кулі, випущеної з пушки, стрибок спортсмена у висоту чи в довжину. При аналізі цього виду руху опором повітря ми будемо нехтувати.

Припустимо, що тіло, кинуте під кутом θ до горизонту, має початкову швидкість $\vec{\upsilon}_0$ (рис. 2.18). Система координат вибрана таким чином, щоб рух здійснювався в площині

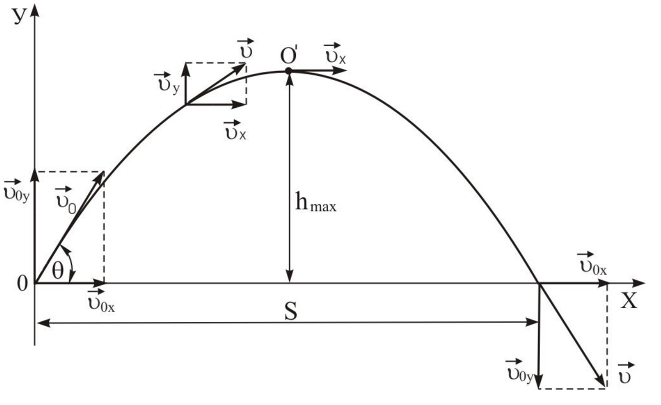


Рис. 2.18

ХОУ. Із рис. 2.18 видно, що тіло буде прискорюватися тільки вздовж осі *У*–ів. Тоді

$$a_x = 0, \quad a_y = -g\ .$$

Якщо покласти, що $x_0 = y_0 = 0$, $t_0 = 0$, то початкова швидкість буде мати такі проекції:

$$\boxed{\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta\ ,} \tag{2.34}$$

$$\boxed{\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin\theta\ .} \tag{2.35}$$

Оскільки $a_x = 0$, горизонтальний рух відбувається зі сталою швидкістю, тому рівняння руху в напрямку осі *Х*–ів матимуть такий вигляд:

$$\boxed{\upsilon_x = \upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos\theta\ ,} \tag{2.36}$$

$$\boxed{x = \upsilon_{0x} t = \upsilon_0 t \cos\theta\ .} \tag{2.37}$$

Рух по вертикалі відбуватиметься з прискоренням $a_y = -g$, тому рівняннями руху в напрямку осі *У*–ів є:

$$\boxed{\upsilon_y = \upsilon_{0y} - gt = \upsilon_0 \sin\theta - gt\ ,} \tag{2.38}$$

$$\boxed{y = \upsilon_{0y}t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon_0 t\sin\theta - \frac{gt^2}{2},} \tag{2.39}$$

або із (2.38) і (2.39) маємо:

$$\boxed{y = \frac{\upsilon_{0y}^2 - \upsilon_y^2}{2g}.} \tag{2.40}$$

Оскільки тіло кинуте під кутом до горизонту, то зрозуміло, що швидкість υ_y з часом зменшується і коли тіло досягне максимальної висоти $h_{\max}$ вона буде дорівнювати нулю ($\upsilon_y = 0$).

Скористаємось наведеними вище рівняннями для знаходження максимальної висоти $h_{\max}$, якої досягне тіло, та дальності його польоту в горизонтальному напрямку. Оскільки в максимальній точці траєкторії O' $\upsilon_y = 0$, то із (2.38) знаходимо, що

$$t_{\max} = \frac{\upsilon_{0y}}{g}, \tag{2.41}$$

де $t_{\max}$ – проміжок часу, необхідний, щоб тіло досягло максимальної висоти. Зробивши в формулі (2.39) заміну $y \to h_{\max}$, $t \to t_{\max}$, отримаємо:

$$h_{\max} = \upsilon_{0y}t_{\max} - \frac{gt_{\max}^2}{2} = \upsilon_{0y}\left(\frac{\upsilon_{0y}}{g}\right) - \frac{1}{2}g\left(\frac{\upsilon_{0y}}{g}\right)^2 = \frac{\upsilon_{0y}^2}{g} - \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g},$$

або

$$\boxed{h_{\max} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g} = \frac{1}{2g}\upsilon_0^2\sin^2\theta.} \tag{2.42}$$

Для знаходження горизонтальної дальності польоту S скористаємось тим фактом, що для повного польоту необхідний час в два рази більший того, який потрібний для досягнення максимальної висоти. Будемо вважати, що x = S при $t = 2t_{\max}$. Тоді, використовуючи формулу (2.37), знаходимо, що

$$S = 2t_{\max}\cdot\upsilon_{0x},$$

або, використовуючи (2.34), (2.35) і (2.41), отримаємо:

$$\boxed{S = \frac{2\upsilon_0^2}{g}\sin\theta\cos\theta = \frac{\upsilon_0^2}{g}\sin 2\theta.} \tag{2.43}$$

Із формули (2.43) видно, що максимальна дальність польоту має місце при $\theta = 45^0$, оскільки $2\theta = 90^0$, а $\sin 90^0 = 1$. Тоді

$$\boxed{S_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g}.} \tag{2.44}$$

Можна легко показати, що траєкторія тіла, кинутого під кутом до горизонту, є парабола.

Приклад 2.15. *По футбольному м'ячу вдаряють таким чином, що він злітає над землею під кутом* $\theta = 37^0$ *зі швидкістю* $\upsilon_0 = 20{,}0\,м/с$ *(рис. 2.18). Розрахувати: а) максимальну висоту, на яку підніметься м'яч; б) час польоту м'яча до падіння його на землю; в) відстань від вихідної точки до точки падіння на землю. Для спрощення припускається, що м'яч відділяється від ноги футболіста на рівні землі.*

Розв'язок. *Проекції початкової швидкості (ф-ли (2.34) і (2,35)):*

$$\upsilon_{0x} = \upsilon_0 \cos 37^0 = (20{,}0\ м/с)(0{,}799) = 16{,}0\ м/с,$$

$$\upsilon_{0y} = \upsilon_0 \sin 37^0 = (20{,}0\ м/с)(0{,}602) = 12{,}0\ м/с.$$

а) Максимальну висоту, якої досягне м'яч, знайдемо за формулою (2.42):

$$h_{\max} = \frac{\upsilon_{0y}^2}{2g} = \frac{(12\ м/с)^2}{2(9{,}8\ м/с^2)} = 7{,}35\ м.$$

б) Час польоту м'яча до падіння його на землю виразимо із рівняння, (2.39), поклавши, що $y = 0$ *(рівень землі).*

Тоді

$$t = \frac{2\upsilon_{0y}}{g} = \frac{2(12\ м/с)}{9{,}8\ м/с^2} = 2{,}45\ с\,.$$

в) Відстань, пройдену м'ячем в напрямку осі X *- ів, знайдемо за формулою (2.37):*

$$x = S = \upsilon_{0x}t = (16{,}0\ м/с)(2{,}45\ с) = 39{,}2\ м\,.$$

§ 2.9. Рух по колу

При русі тіла по колу зі сталою за величиною швидкістю υ говорять, що воно здійснює **рівномірний обертальний рух**. Такий рух здійснює, наприклад, кулька, яку розкручують на мотузці навколо певного центра. Хоча при такому русі швидкість за величиною не змінюється ($\upsilon = const$), напрямок її з часом безперервно змінюється (рис. 2.19). Зміна напрямку швидкості свідчить, що тут має місце прискорення, точно так, як і при зміні величини швидкості.

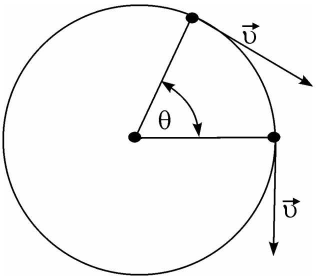


Рис. 2.19

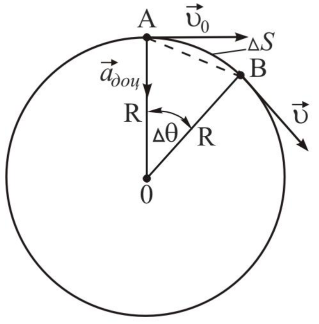
Згідно з формулою (2.8)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\upsilon}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}, \qquad (2.45)$$

де $\Delta\vec{\upsilon}$ – зміна швидкості за малий проміжок часу Δt.

В даному випадку мова йде про зміну вектора швидкості. Із рис. 2.20, *а* видно, що за час Δt тіло переміститься із точки А в точку В, пройшовши відстань ΔS. Зміна вектора швидкості при цьому дорівнює $\Delta\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon} - \vec{\upsilon}_0$ (рис. 2.20, б). Із рис 2.20 видно, що, якщо Δt нескінченно мале і ΔS також буде дуже мале, то вектори $\vec{\upsilon}_0$ і $\vec{\upsilon}$ будуть майже паралельні, а вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ майже перпендикулярний їм, тобто вектор $\Delta\vec{\upsilon}$ направлений по радіусу до центра кола. Оскільки за визначенням прискорення $\vec{a}$ співпадає за напрямком зі зміною швидкості, в даному випадку з $\Delta\vec{\upsilon}$, то воно також направлено до центра і тому його називають **доцентровим** (або **нормальним**) **прискоренням** $\vec{a}_{доц}$ (або $\vec{a}_n$).

Величину доцентрового прискорення знайдемо із таких міркувань. Трикутник ОАВ (рис. 2.20, *а*) і трикутник, який утворюють вектори $\vec{\upsilon}_0$, $\vec{\upsilon}$ і $\Delta\vec{\upsilon}$ (рис. 2.20, б) подібні, а



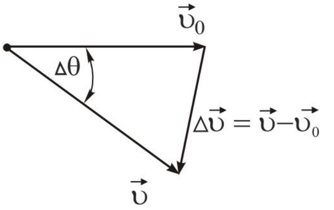


Рис. 2.20

тому можна записати таке співвідношення

$$\frac{\Delta\upsilon}{\upsilon} \approx \frac{\Delta S}{R},$$

звідки

$$\Delta\upsilon \approx \frac{\upsilon}{R}\Delta S. \qquad (*)$$

Якщо $\Delta t \to 0$, то співвідношення (*) виконується точно, оскільки довжина дуги ΔS дорівнює довжині хорди AB. Тоді

$$a_{доц} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\upsilon}{R}\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\upsilon}{R}\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Оскільки $\lim\limits_{\Delta t \to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \upsilon$, то:

$$\boxed{a_{доц} = \frac{\upsilon^2}{R}.} \qquad (2.46)$$

Зауважимо ще раз, що у випадку рівномірно обертального руху вектори $\vec{a}$ і $\vec{\upsilon}$ перпендикулярні один до одного (рис. 2.20), оскільки швидкість $\vec{\upsilon}$ направлена по дотичній до кола, а прискорення $\vec{a}$ направлене по радіусу до його центра; при цьому напрямки як $\vec{\upsilon}$, так і $\vec{a}$ неперервно змінюються.

Рух тіла по колу можна характеризувати кутовими змінними величинами: **кутовою швидкістю** і **кутовим прискоренням**.

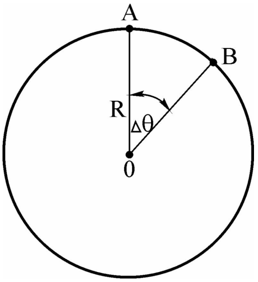


Рис. 2.21

Кутову швидкість визначають по аналогії з лінійною швидкістю, але замість лінійного переміщення використовують кутове $\Delta\theta$. Тоді величина середньої кутової швидкості визначиться так:

$$<\omega> = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \qquad (2.47)$$

де $\Delta\theta$ – кутове переміщення тіла (рис. 2.21).

Миттєва кутова швидкість визначається як границя відношення (2.47) при $\Delta t \to 0$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{2.48}$$

Кутова швидкість вимірюється, як правило, в радіанах за секунду (рад/с).

Кутове прискорення показує, як швидко змінюється кутова швидкість з часом і за аналогією з лінійним прискоренням визначається відношенням зміни кутової швидкості до проміжку часу, за який ця зміна відбулася. Тоді **величина середнього кутового прискорення** визначиться так:

$$<\alpha> = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \tag{2.49}$$

Величиною **миттєвого кутового прискорення** є границя відношення (2.49) при $\Delta t \to 0$:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{2.50}$$

Встановимо співвідношення між лінійною і кутовою швидкостями та лінійним і кутовим прискоренням. Довжина дуги, яку описує точка при обертанні на кут $\Delta\theta$ (рис. 2.20, *а*)

$$\Delta S = R \cdot \Delta\theta .$$

Поділимо цю рівність на Δt. При $\Delta t \to 0$ матимемо

$$\frac{dS}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \qquad \textit{або} \qquad \upsilon = \omega R , \tag{2.51}$$

де R – радіус кола.

Враховуючи (2.51), формула (2.46) перепишеться так:

$$\boxed{a_{доц.} = \omega^2 R .} \tag{2.52}$$

Якщо швидкість тіла, що рухається по колу, змінюється не тільки за напрямком а і за величиною, то поряд з доцентровим прискоренням $\vec{a}_{доц.}$ має місце і так зване **тангенціальне прискорення** $\vec{a}_\tau$, яке визначається, як і звичайне прискорення (ф-ла (2.8)):

$$a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}. \tag{2.53}$$

Зауважимо, що доцентрове прискорення змінює швидкість тільки за напрямком і визначається формулою (2.46) або формулою (2.52).

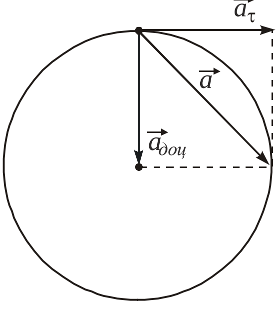


Рис. 2.22

Враховуючи формули (2.50) і (2.51), формула (2.53) набуде вигляду:

$$\boxed{a_\tau = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha ,} \tag{2.54}$$

де α – кутове прискорення.

Тангенціальне прискорення завжди направлене по дотичній до кола (рис. 2.22). Якщо швидкість тіла збільшується, то напрямок $\vec{a}_\tau$ співпадає з напрямком руху; якщо ж швидкість зменшується, то напрямок $\vec{a}_\tau$ протилежний вектору швидкості $\vec{\upsilon}$. Оскільки $\vec{a}_{доц.}$ і $\vec{a}_\tau$ в будь-якому випадку перпендикулярні один одному, вектор повного прискорення $\vec{a}$ є векторною сумою цих двох прискорень:

$$\vec{a} = \vec{a}_{доц} + \vec{a}_\tau . \tag{2.55}$$

Величина повного прискорення дорівнює:

$$\boxed{a = \sqrt{a_{доц}^2 + a_\tau^2},} \tag{2.56}$$

або, враховуючи (2,52) і (2,54),

$$\boxed{a = R\sqrt{\omega^4 + \alpha^2}\ .} \tag{2.57}$$

Приклад 2.16. *Реактивний літак, який рухається зі швидкістю $\upsilon = 1800\ км/год$, виконує маневр і летить по дузі з радіусом R = 3,0 км. Яке прискорення літака, виражене через g.*

Розв'язок. *Прискорення літака, коли він летить по дузі, є доцентровим і виражається формулою (2.46):*

$$a_{доц} = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{[(1800)(0{,}278)\ м/c]^2}{3\cdot 10^3\,м} = 83{,}5\ \frac{м}{c^2}.$$

Для того, щоб виразити $a_{доц}$ через g, потрібно його значення поділити на g. Тобто

$$a_{доц} = \frac{83{,}5}{9{,}8} = 8{,}5g\ .$$

Приклад 2.17. *Ротор центрифуги почав обертатися з прискоренням із стану спокою і через $t = 5{,}0\ хв$ досягнув частоти $n = 2\cdot 10^4\,об/хв$. Знайти середнє кутове прискорення ротора.*

Розв'язок. *Кінцева кутова швидкість ротора центрифуги дорівнює:*

$$\omega = 2\pi\, n = (2\cdot 10^4\,об/хв)\left(\frac{2(3{,}14)\ рад/об}{60\ c/хв}\right) = 2{,}1\cdot 10^3\,рад/c\ .$$

Початкова кутова швидкість ротора дорівнює нулю ($\omega_0 = 0$). Тому середнє кутове прискорення дорівнюватиме

$$<\alpha> = \frac{\omega - \omega_0}{t} = \frac{2{,}1\cdot 10^3\,рад/c - 0}{300\,c} = 7{,}0\ \frac{рад}{c^2}.$$

§ 2.10. Кінематика твердого тіла

До цих пір ми розглядали механічний рух матеріальних точок або, як їх ще називають, точкових мас. Однак, більшість тіл в природі є протяжні тверді тіла, які, як і матеріальні точки, можуть переміщатися і обертатися. В механіці під твердим тілом розуміють незмінну систему матеріальних точок, тобто, таку ідеалізовану систему, в якій при будь-яких рухах взаємні відстані між матеріальними точками системи залишаються незмінними. Тверді тіла володіють певною формою, яка залишається сталою, якщо на тіло не діють помітні зовнішні сили.

Будь-який рух твердого тіла можна розглядати як сукупність поступального і обертального рухів.

Поступальним рухом твердого тіла називають такий рух, при якому будь-яка пряма, яка сполучає дві довільні точки твердого тіла, переміщується паралельно сама до себе. Це означає, що при поступальному русі твердого тіла траєкторії всіх точок тіла однакові. Швидкість і прискорення всіх точок тіла в даний момент часу рівні. Отже, поступальний рух твердого тіла можна характеризувати заданням руху однієї точки тіла, тобто цей рух повністю еквівалентний до руху матеріальної точки.

Поступальний рух твердого тіла є плоским рухом, оскільки траєкторії його точок лежать в паралельних площинах. Рух тіла в цьому випадку повністю визначається рухом одного із перетинів прямої в будь-якій з паралельних площин.

При обертальному русі твердого тіла навколо нерухомої осі траєкторіями всіх його точок є кола, які лежать в площинах, перпендикулярних до осі обертання $00'$ (рис. 2.23).

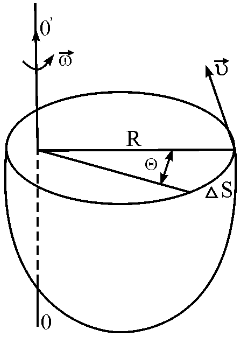


Рис. 2.23

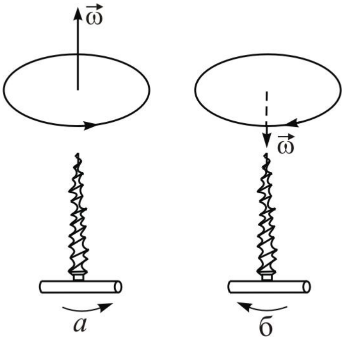


Рис. 2.24

Центри всіх цих кіл лежать на осі обертання. Обертальний рух твердого тіла є також плоским рухом, оскільки траєкторії точок твердого тіла лежать в паралельних площинах.

При обертанні твердого тіла всі його точки обертаються з різними лінійними швидкостями. Для характеристики обертання твердого тіла, як і у випадку обертання матеріальної точки, зручно користуватися кутом повороту θ прямої, проведеної через будь-яку точку тіла перпендикулярно до осі обертання (рис. 2.23). Кут повороту є аналогом шляху при поступальному русі. Похідна кута повороту по часу визначає кутову швидкість обертання

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \tag{2.58}$$

де $d\theta/dt$ – перша похідна кута повороту по часу.

Кутова швидкість є величина векторна. У векторному вигляді формула (2.58) перепишеться так:

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\theta}}{dt}. \tag{2.59}$$

Вектор кутової швидкості збігається з віссю обертання, а його довжина в деякому умовному масштабі виражає величину кутової швидкості. Напрямок вектора кутової швидкості збігається з поступальним рухом свердлика, якщо його обертати в напрямку обертання тіла (рис. 2.24).

Зауважимо, що у вигляді векторів можна представляти тільки нескінченно малі кути. Лише за цієї умови кутові переміщення у всьому подібні до елементарних лінійних переміщень.

Якщо обертання рівномірне, тобто ω = const, то

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\, n,$$

де $T = 1/n$ – період обертання, n – лінійна частота. Кутову швидкість ще іноді називають **циклічною частотою**. Якщо початок координат вибрати на осі обертання, то лінійну швидкість будь-якої точки тіла, що обертається, можна виразити формулою (2.51):

$$\upsilon = R\omega. \qquad (2.60)$$

У векторній формі

$$\vec{\upsilon}_\tau = \left[\vec{R}\cdot\vec{\omega}\right]. \qquad (2.61)$$

Для характеристики прискореного обертального руху твердого тіла користуються величиною кутового прискорення

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \qquad (2.62)$$

де $d\omega / dt$ – перша похідна кутової швидкості по часу, або у векторній формі

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \qquad (2.63)$$

Вектор кутового прискорення збігається з вектором кутової швидкості при прискореному русі, і вони є протилежні при сповільненому русі. Зв’язок кутового прискорення α з лінійним тангенціальним прискоренням a_τ виражається відомою формулою (2.54):

$$a_\tau = R\frac{d\omega}{dt} = R\alpha,$$

або

$$\vec{a}_\tau = \left[\vec{R}\cdot\vec{\alpha}\right]. \qquad (2.64)$$

Нормальне (доцентрове) прискорення виражається через кутову швидкість формулою (2.52):

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2,$$

або

$$\vec{a}_n = \omega^2\vec{R}. \qquad (2.65)$$

На рис 2.25 зображено розташування векторів $\vec{\upsilon}$, $\vec{\omega}$, $\vec{R}$, $\vec{\alpha}$, $\vec{a}_n$, $\vec{a}_\tau$ (а – кутова швидкість

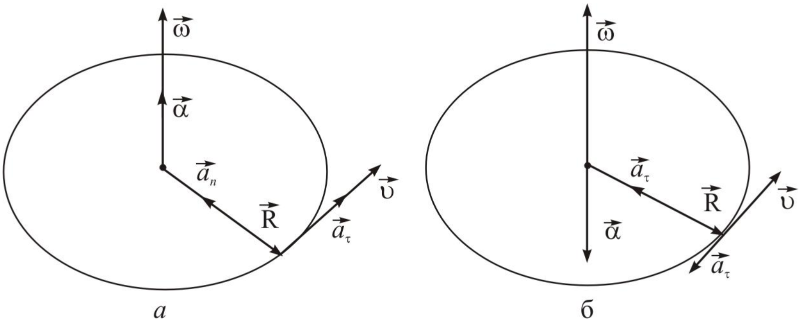


Рис. 2.25

збільшується, б – кутова швидкість зменшується).

Із рисунка видно, що при збільшенні кутової швидкості напрямки векторів кутового прискорення і кутової швидкості співпадають (рис. 2.25, *а*) і, навпаки, при зменшенні кутової швидкості, вони протилежні (рис. 2.25, б). Теж саме можна сказати і про напрямки векторів тангенціального прискорення і лінійної швидкості.

Насамкінець наведемо отримані шляхом інтегрування відповідних виразів рівняння кінематики обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі:

рівняння рівномірного обертального руху (див. формулу 2.58)

$$\boxed{\theta = \theta_0 + \omega t\,;} \tag{2.66}$$

залежність кутової швидкості від часу при рівнозмінному обертальному русі (див. формулу 2.62)

$$\boxed{\omega = \omega_0 + \alpha t\,;} \tag{2.67}$$

рівняння рівнозмінного обертального руху (див. ф-ли 2.58 і 2.67)

$$\boxed{\theta = \frac{\alpha t^2}{2} + \omega_0 t + \theta_0.} \tag{2.68}$$

Рівняння (2.66) – (2.68) є аналогами рівнянь (2.4), (2.10) і (2.14) характерних для поступального руху.