

# 7 МЕХАНІКА РІДИН І ГАЗІВ

*„Механічний рух у тілі тварин підпорядковується тим самим законам, що і рух тіл неживих, і тому очевидно, що питання про те, яким саме чином і у якій мірі рух крові по судинах залежить від м'язових та пружних сил серця і судин, зводиться до проблем, які належать до вузько спеціальних розділів гідравліки”.*

*Томас Юнг – англійський фізик*

## § 7.1. Загальна характеристика рідин і газів

Відомо, що речовина може перебувати в трьох агрегатних станах: твердому, рідкому і газоподібному. Тверді тіла зберігають свою форму і об'єм. Змінити форму і об'єм твердого тіла важко, навіть прикладаючи до нього великі зусилля. Це пов'язано з тим, що між атомами і молекулами, з яких складаються тверді тіла, існують інтенсивні сили взаємодії, завдяки яким вони не можуть переміщатися одні відносно одних, а лише здійснюють коливальні рухи відносно положення рівноваги. Середня відстань між атомами в твердих тілах при сталій температурі залишається незмінною. Міжмолекулярні сили в рідинах слабші, ніж в твердих тілах, що дозволяє молекулам переміщатися в рідині. Молекули в рідинах просто проковзують одна повз одної, але міжмолекулярні сили достатні для того, щоб втримувати рідину разом. Таким чином, однією із особливостей рідин є те, що вони **можуть текти**.

Іншою особливістю рідин є їхня **здатність зберігати свій об'єм**, який під дією сили тяжіння набуває форми посудини, та існування в рідині **вільної енергії**. Рідини, як і тверді тіла, мало стисливі, тобто вони мають певний власний об'єм. Стисливість рідин в десятки і сотні тисяч разів менша, ніж для газів. Причиною цього є існування в рідинах великих міжмолекулярних сил відштовхування. Для рідин характерне теплове розширення, яке залежить від роду рідини, температури і зовнішнього тиску. Більшість рідин при нагріванні розширюються, що пов'язане із збільшенням інтенсивності теплового руху.

Гази не володіють ні певною формою, ні певним об'ємом: вони повністю заповнюють посудини, в які вони поміщаються. Не володіючи певною формою, гази, як і рідини, здатні текти. Ця загальна властивість об'єднує їх.

## § 7.2. Тиск в рідинах і газах

**Тиск – це сила, яка діє на одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку дії сили:**

$$P = \frac{F}{S}, \quad (7.1)$$

де  $S$  – площа поверхні. Згідно визначення в СІ тиск вимірюється в  $\text{Н/м}^2$ . Використовують ще і іншу одиницю тиску, яка називається паскаль (Па):  $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$ .

**Приклад 7.1.** На голку діє сила  $F = 9,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н}$ . Який тиск чинить голка на горизонтальну поверхню, якщо діаметр її вістря  $d = 1,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}$ ?

**Розв'язок.** Згідно (7.1)

$$P = \frac{F}{S} = \frac{4F}{\pi d^2} = \frac{4(9,8 \cdot 10^{-3} \text{ Н})}{3,14(1,3 \cdot 10^{-5} \text{ м})^2} = 7,4 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Тут  $S = \pi d^2 / 4$  – площа поверхні, на яку діє сила.

Для порівняння знайдемо тиск людини масою  $m = 70 \text{ кг}$ , яка стоїть вертикально, на землю, якщо площа її підшвів ніг  $S = 300 \text{ см}^2$ :

$$P = \frac{F}{S} = \frac{mg}{S} = \frac{(70 \text{ кг})(9,8 \text{ м/с}^2)}{0,03 \text{ м}^2} = 2,3 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

Тиск людини на землю складає  $\sim 3 \cdot 10^{-4}$  тиску, що чинить на поверхню голка.

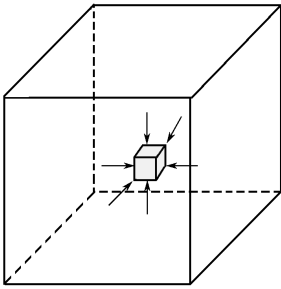


Рис. 7.1

Дослідним шляхом встановлено, що рідини і гази створюють тиск у всіх напрямках.

Причому всередині рідини (або газу), яка знаходиться в стані спокою, тиск однаковий у всіх напрямках (рис. 7.1).

Ще однією важливою властивістю нерухомої рідини (або газу) є те, що сила, що викликана тиском, діє завжди перпендикулярно до поверхні, до якої вона дотикається.

Далі знайдемо тиск, який чинить рідина на дно посудини, яку вона заповнює до висоти  $h$  (рис. 7.2). Тиск рідини на дні посудини обумовлений вагою рідини. Таким чином, сила, що діє на площу  $S$ , дорівнює  $F = mg = \rho ghS$ , де  $Sh = V$  – об'єм, який займає рідина,  $\rho$  – густина рідини,  $g$  – прискорення вільного падіння. Таким чином, маємо

$$P = \frac{F}{S} = \frac{\rho ghS}{S} = \rho gh. \quad (7.2)$$

Зауважимо, що  $h$  необов'язково повинна співпадати з повною глибиною рідини. Формула (7.2) справедлива для будь-якої глибини.

Якщо на поверхню рідини діє додатковий тиск, наприклад, атмосферний, то тиск рідини на глибині  $h$  виразиться так:

$$P = P_0 + \rho gh, \quad (7.3)$$

де  $P_0$  – атмосферний тиск над рідиною.

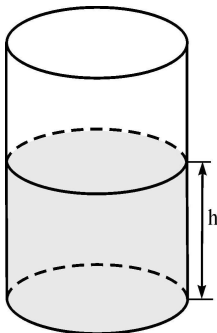


Рис. 7.2

Тиску, обумовленого вагою земної атмосфери, піддаються всі предмети, занурені в цей велетенський повітряний океан, включаючи і наші тіла. Людський організм витримує значний зовнішній тиск завдяки тому, що він компенсується внутрішнім тиском, який підтримується в живих клітинах. Так само тиск всередині повітряної кулі зрівноважується атмосферним тиском. Тиск в газовому балоні завдяки його жорсткості може бути набагато більше атмосферного.

Тиск вимірюється за допомогою манометрів. Більшість механічних манометрів показують різницю між тиском газу, наприклад, в балоні і тиском оточуючої атмосфери:

$$P_m = P - P_0. \quad (7.4)$$

Тиск  $P_m$  називають **манометричним** або **надлишковим** тиском;  $P$  – це тиск всередині балона і називається **абсолютним тиском**;  $P_0$  – атмосферний тиск ( $P_0 = 101,325$  кПа).

Якщо, наприклад, манометр показує 220 кПа – це манометричний (надлишковий) тиск. Абсолютне значення тиску = 220 кПа + 101,325 кПа = 321,325 кПа.

**Приклад 7.2.** Лівий шлуночок серця, скорочуючись, проганяє кров по системі кровообігу. Вважаючи площу внутрішньої поверхні шлуночка рівною  $S = 85$  см<sup>2</sup>, а максимальний тиск крові  $P_{\max} = 120$  мм. рт. ст., розрахувати повну силу, яка розвивається м'язами шлуночка в момент, коли тиск максимальний.

**Розв'язок.** Згідно (7.1)

$$P = \frac{F}{S},$$

звідки

$$F = P_{\max} S = (120)(133 \text{ Н / м}^2)(8,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2) = 1,4 \cdot 10^2 \text{ Н}.$$

Тут враховано, що 1 мм. рт. ст. = 133 Н/м<sup>2</sup>.

**Приклад 7.3.** При кожному скороченні серце прокачує приблизно  $V = 70$  см<sup>3</sup> крові під середнім тиском  $P = 105$  мм. рт. ст. Розрахувати потужність серця у ватах при 60 скороченнях за хвилину.

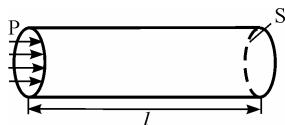


Рис. 7.3

**Розв'язок.** Спочатку розрахуємо роботу, яка виконується серцем при однократному скороченні. Зобразимо  $V$  – ударний об'єм крові у вигляді циліндра (рис. 7.3). Можна вважати, що серце продавляє цей об'єм крові по аорті перерізом  $S$  на відстань  $l$  при середньому тиску  $P$ . Тоді виконувана при цьому робота

$$A = Fl = PS l = PV = (105)(133 \text{ Н / м}^2)(7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3) = 0,98 \text{ Дж}.$$

де  $F = PS$ ,  $V = Sl$ .

Це робота, яка виконується при однократному скороченні серця. Оскільки, згідно умови задачі, скорочення серця відбувається на протязі 1 с, то потужність серця дорівнюватиме:

$$N = \frac{A}{t} = \frac{0,98 \text{ Дж}}{1 \text{ с}} = 0,98 \text{ Вт}.$$

### § 7.3. Течія рідини

Подібність властивостей рідин і газів (велика рухливість частинок, відсутність опору при деформаціях зсуву, більша або менша стисливість) є причиною того, що чимало механічних явищ в рідинах і газах протікають однаково. Ця обставина дала змогу об'єднати вивчення законів їх руху і взаємодії їх з оточуючими тілами в спільний розділ фізики, який називають **гідродинамікою**. В гідродинаміці рідини і гази розглядають як суцільне, неперервне середовище, яке називають **рідиною**.

Рух рідини називають **течією**, а сукупність частинок рухомої рідини – **поток**ом. Одним із методів вивчення руху рідини є розгляд руху окремих її частинок. Рух кожної частинки підкоряється законам Ньютона і його можна в принципі розрахувати, однак розрахунки достатньо громіздкі і складні. Простішим є метод, в якому спостерігають не за рухом кожної частинки рідини, а вивчають параметри руху потоку рідини в кожній точці простору з часом. При цьому вимірюють не швидкість і прискорення частинок рідини, а швидкість і прискорення потоку рідини. Швидкість потоку рідини в даній точці простору є функцією коор-

динат і часу.

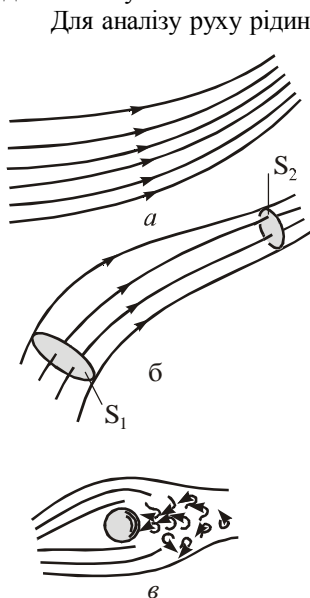


Рис. 7.4

Для аналізу руху рідини користуються лініями течії, які є траєкторіями, по яких рухаються частинки рідини (рис. 7.4, а). Швидкість рідини в будь-якій точці направлена по дотичній лінії течії. Лінії течії ніколи не перетинаються одна з одною. І ніколи не можуть раптом обірватися.

Частину рідини, обмежену лініями течії, називають **трубкою течії** (рис. 7.4, б). Трубку течії можна уявити як трубку з жорсткою бічною поверхнею, по якій тече рідина. Рідину, обмежену трубою течії, називають **струменем**.

Течія рідини називається **стаціонарною**, якщо швидкість такої течії в будь-якій точці не змінюється з плином часу. У випадку, коли швидкість течії в даній точці змінюється з плином часу, то така течія називається **нестационарною**.

Розрізняють два типи течії рідини: **ламінарну** і **турбулентну**. Течію, в якій суміжні шари ніби ковзають один відносно одного, називають ламинарною. Швидкості частинок у будь-якому перерізі паралельні між собою. Це означає, що ламинарна течія є стаціонарною. Із збільшенням швидкості руху рідини характер течії істотно змінюється. Коли швидкість течії перевищує певну межу, яка залежить від ряду факторів, течія стає турбулентною. **Турбулентною** є така течія, для якої характерні нерегулярні рухи зі складними траєкторіями, а швидкості змінюються хаотично як за напрямком, так і за величиною. В турбулентних потоках часто виникають **вихори** – ділянки із замкнутими траєкторіями (рис. 7.4, в). Причиною утворення вихорів у рідині є в'язкість. Прикладами турбулентного руху є рух води в бурхливих гірських річках, рух диму, що виходить із заводських димарів, рух повітря під час снігової бурі тощо.

Швидкість, при якій ламинарна течія переходить в турбулентну, називається **критичною** ( $v_k$ ). Її можна вирахувати, знаючи в'язкість  $\eta$ , густину рідини  $\rho$  та радіус трубки за формулою:

$$v_k = R_e \frac{\eta}{\rho r}. \quad (7.5)$$

Тут  $R_e$  – безрозмірна величина, яка називається **числом Рейнольдса**. Якщо число Рейнольдса більше деякого критичного значення ( $R_e > R_{ek}$ ), то течія турбулентна. Наприклад, для гладких циліндричних труб  $R_{ek} \approx 2300$ .

Отже, залежно від властивостей рідини та умов її протікання, течія може бути ламинарною або турбулентною.

Течія крові в артеріях за нормальних умов є ламинарною. Невелика турбулентність проявляється тільки в місцях поблизу клапанів аорти. При патології, коли в'язкість крові буває меншою за норму, число Рейнольдса може перевершити критичне значення і течія крові стає турбулентною. За нормальних умов ламинарною є і течія повітря в носових порожнинах. Однак, при якихось відхиленнях від норми (наприклад, при запаленнях) течія повітря може стати турбулентною, що викличе додаткове навантаження на дихальні м'язи.

#### § 7.4. Рівняння нерозривності

Вивчаючи рух рідини, користуються ідеалізованою рідиною, яку називають **ідеальною рідиною**. Ідеальна рідина – це рідина, яка абсолютно нестислива і повністю позбавлена внутрішнього тертя (в'язкість такої рідини дорівнює нулю).

Розглянемо далі стаціонарний потік рідини в межах трубки і з'ясуємо, як змінюється швидкість рідини в залежності від поперечних розмірів трубки. Трубку течії виберемо таку малу, щоб швидкість рідини в будь-якому поперечному перерізі була сталою. На рис. 7.5  $v_1$  і  $v_2$  – швидкості, з якими рідина рухається відповідно через поперечні перерізи площею  $S_1$  і  $S_2$ . Маса рідини  $\Delta m$ , що протікає за час  $\Delta t$  через поперечний переріз  $S$ , визначається такою формулою:

$$\Delta m = \rho v S \Delta t,$$

де  $\rho$  – густина рідини.

При стаціонарному потоці маса рідини, що протікає за одиницю часу через будь-який переріз трубки течії, однакова для всіх перерізів. Для перерізів з площами  $S_1$  і  $S_2$  для стаціонарного потоку можна записати, що

$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2. \quad (*)$$

Якщо рідина нестислива, то  $\rho_1 = \rho_2$ , і тоді рівняння (\*) переписується так:

$$v_1 S_1 = v_2 S_2, \quad (7.6)$$

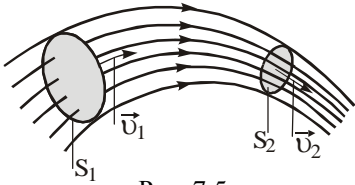


Рис. 7.5

або

$$v S = \text{const.} \quad (7.7)$$

Тут  $v S$  – кількість рідини, що протікає через переріз  $S$  за одну секунду. Із (7.7) видно, що в тому місці, де переріз трубки течії (або реальної труби) більший, швидкість течії менша, а там, де переріз менший, швидкість більша. Із рис. 7.5 можна помітити, що, чим тісніше розміщені лінії течії, тим більша її швидкість.

Рівняння (7.7) називають **рівнянням нерозривності: кількість рідини, що протікає за одиницю часу (1 с) через будь-який переріз трубки течії, однакова.**

**Приклад 7.4.** На протязі якого часу заповнюється водою басейн глибиною  $h = 3,1$  м, шириною  $a = 9,5$  м і довжиною  $b = 21$  м, якщо вода поступає із шланга діаметром  $d = 1,9$  см зі швидкістю  $v = 1,5$  м/с ?

**Розв'язок.** Добуток  $v S$  (див. ф-лу (7.7)) ще називають об'ємним розходом рідини, який дорівнює

$$v S = \frac{V}{t} = \frac{Sl}{t}, \quad (1)$$

де  $V = Sl$  – об'єм рідини, що проходить через переріз  $S$  за час  $t$ ,  $l$  – довжина шляху, який проходить виділена частина рідини в перерізі  $S$ ,  $l/t = v$  – швидкість рідини в перерізі. Із (1) маємо:

$$t = \frac{V}{v S} = \frac{4hab}{\pi d^2 v} = \frac{4(3,1 \text{ м})(9,5 \text{ м})(21 \text{ м})}{(3,14)(1,5 \text{ м})(1,9 \cdot 10^{-2} \text{ м})^2} = 1454911 \text{ с} = 404 \text{ год}.$$

Тут  $S = \pi d^2 / 4$ .

**Приклад 7.5.** Радіус аорти дорівнює  $r_1 \approx 1,0$  см; кров рухається в аорті зі швидкістю  $v_1 \approx 30$  см/с. Розрахувати швидкість течії крові в капілярах, якщо відомо, що сумарна площа перерізу капілярів складає  $S_2 = 2000 \text{ см}^2$  (хоча кожний капіляр має діаметр  $\approx 8 \cdot 10^{-4}$  см, кількість їх становить мільярди).

**Розв'язок.** Для визначення швидкості крові  $v_2$  в капілярах скористаємось рівнянням (7.6):

$$v_1 S_1 = v_2 S_2,$$

звідки

$$v_2 = \frac{v_1 S_1}{S_2} = \frac{\pi r_1^2 v_1}{S_2} = \frac{(3,14)(0,010 \text{ м})^2 (0,30 \text{ м/с})}{0,2 \text{ м}^2} = 4,7 \cdot 10^{-4} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 0,5 \frac{\text{мм}}{\text{с}}.$$

### § 7.5. Рівняння Бернуллі

Одне із найбільш важливих рівнянь, яке використовується для опису рухомих рідин, було отримано швейцарським математиком і механіком Даниїлом Бернуллі (1700 – 1782).

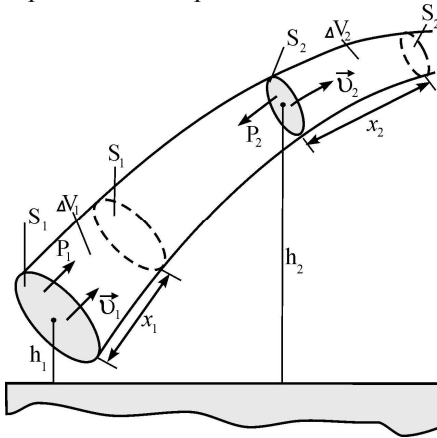


Рис. 7.6

Рівняння Бернуллі можна вивести, використовуючи закон збереження механічної енергії при протіканні рідини через трубку. При цьому будемо вважати розглядувану рідину ідеальною, а її течію стаціонарною і ламінарною.

Виділимо подумки в трубці течії рідини елемент, обмежений перерізами  $S_1$  і  $S_2$ , через  $v_1$  і  $v_2$  позначимо швидкості частинок рідини в цих перерізах, а через  $P_1$  і  $P_2$  – тиски, які діють на перерізи  $S_1$  і  $S_2$  над деяким вихідним рівнем (рис. 7.6). За невеликий проміжок часу виділений елемент рідини переміститься вгору і вправо (нове положення перерізів позначено штриховими лініями). Лівий кінець елемента рідини

(переріз  $S_1$ ) переміститься на відстань  $x_1$ . В той же час правий кінець (переріз  $S_2$ ) проходить більшу відстань  $x_2$ . Оскільки рідина ідеальна, зміна об'єму рідини зліва повинна дорівнювати зміні об'єму рідини справа. Тому

$$\Delta V_1 = \Delta V_2 = \Delta V, \quad S_1 x_1 = S_2 x_2.$$

Маса об'єму  $\Delta V$  рідини

$$m = \rho \cdot \Delta V,$$

звідки

$$\Delta V = \frac{m}{\rho}.$$

Зауважимо, що оскільки рідина ідеальна, то  $m_1 = m_2 = m$ .

Робота, яка виконується над виділеним елементом  $A_1 = P_1 S_1 x_1$  (ця робота виконується силою  $F_1 = P_1 S_1$ ). Робота, яка виконується самим цим елементом  $A_2 = -P_2 S_2 x_2$  (тут сила  $F_2 = P_2 S_2$ , яка виконує роботу, має напрямок протилежний переміщенню  $x_2$ ). Крім того, виконується робота в полі сил тяжіння, яка дорівнює  $A_3 = -mg(h_2 - h_1)$ . Тут знак мінус стоїть тому, що рух здійснюється проти сил тяжіння. Повна робота, яка виконується рідиною, дорівнює:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = P_1 S_1 x_1 - P_2 S_2 x_2 - mgh_2 + mgh_1.$$

Згідно теореми про зв'язок роботи і енергії, виконувана над системою робота дорівнює зміні її кінетичної енергії. Тоді

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = P_1 \frac{m}{\rho} - P_2 \frac{m}{\rho} - mgh_2 + mgh_1.$$

Тут враховано, що  $S_1x_1 = S_2x_2 = \Delta V = m / \rho$ .

Після відповідних простих перетворень отримаємо:

$$P_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho gh_1 = P_2 + \rho \frac{v_2^2}{2} + \rho gh_2. \quad (7.8)$$

Це і є **рівняння Бернуллі**. Оскільки перерізи можуть бути вибрані довільно вздовж трубки течії, то рівняння Бернуллі (7.8) можна записати у вигляді

$$P + \rho \frac{v^2}{2} + \rho gh = \text{const} \quad (7.9)$$

і воно справедливе в будь-якій точці рідини (вздовж лінії течії). Величину  $\rho v^2 / 2$  називають **динамічним тиском** (напором), це кінетична енергія одиниці об'єму рідини,  $\rho gh$  – **гідравлічним тиском**, який дорівнює питомій потенціальній енергії тяжіння, а  $P$  – **статичним тиском**, який має значення питомої потенціальної енергії рідини, зумовленої силами тиску. Отже, **в стаціонарному потоці ідеальної рідини повний тиск в будь-якому поперечному перерізі потоку сталий**.

Рівняння Бернуллі є вираженням закону збереження механічної енергії у застосуванні до стаціонарного потоку ідеальної рідини.

Застосування рівняння Бернуллі найрізноманітніші. Ось деякі із них.

1. Припустимо, що рідина нерухома. Тоді із рівняння (7.8) отримаємо співвідношення між глибиною і тиском:

$$P_1 + \rho gh_1 = P_2 + \rho gh_2.$$

Якщо  $P_2$  – тиск на поверхні рідини, а  $h_2 - h_1$  – глибина, відрахована від поверхні

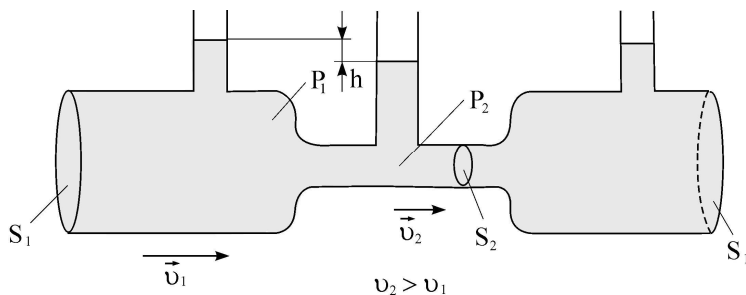


Рис. 7.7

рідини, то отримаємо формулу (7.3), отриману раніше:

$$P_1 = P_2 + \rho g(h_2 - h_1) = P_0 + \rho gh.$$

2. З іншим окремим випадком застосування рівняння Бернуллі зустрічаємось, коли рух рідини відбувається практично на незмінному рівні (горизонтально), тобто  $h_1 = h_2$ . Тоді рівняння набуде вигляду

$$P_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} = P_2 + \rho \frac{v_2^2}{2}.$$

Ця формула кількісно відображає той факт, що в точках, в яких швидкість більша, тиск менший і навпаки. На рис. 7.7 наведений приклад цього ефекту. Швидкість у вузькому місці труби більша швидкості в широкому місці.

Тиск в рідині вимірюється за висотою нерухомої рідини у вертикальних трубках. Пристрій із звуженим перерізом труби посередині і з водопідіймальними трубками називають трубкою Вентурі (рис. 7.8). Нескладно показати, що швидкість потоку визначається за формулою

$$v_1 = S_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}}, \quad (7.10)$$

де  $\rho$  – густина рідини,  $P_1$  і  $P_2$  – покази манометрів в перерізах  $S_1$  і  $S_2$ . Трубки Вентурі створені навіть для вимірювання швидкості течії крові в судинах. За допомогою подібних приладів (датчиків) можна вимірювати і об'ємний розхід, тобто потік рідини, який дорівнює  $v_1 S_1$ .

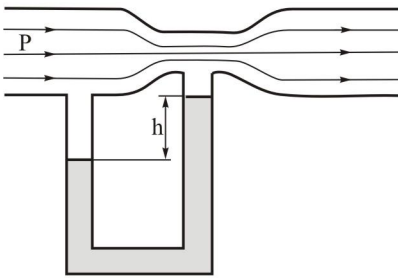


Рис. 7.8

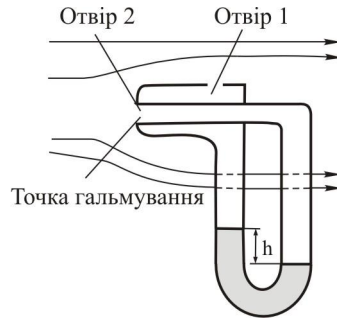


Рис. 7.9

На рис. 7.9 наведено схему іншого приладу для вимірювання швидкості рідини, трубки Піто. Прилад занурюють у рідину, швидкість якої треба виміряти. Він складається з двох зігнутих манометричних трубок з отворами, один з яких (2) спрямований проти течії, другий (1) – паралельно лінії течії. Отвір 1 вимірює статичний тиск, а отвір 2 – повний.

Запишемо рівняння Бернуллі для горизонтального потоку:

$$\rho \frac{v_1^2}{2} + P_1 = \rho \frac{v_2^2}{2} + P_2. \quad (7.11)$$

де  $v_1$  і  $v_2$  – відповідно швидкості руху рідини перед отворами 1 і 2.

В точці гальмування (отвір 2) швидкість рідини  $v_2 = 0$ . Якщо швидкість рідини біля отвору 1 позначити через  $v$  ( $v_1 = v$ ), то із (7.11) отримаємо:

$$v = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}}, \quad (7.12)$$

де  $P_2$  – тиск перед отвором 2, він більший, ніж статичний тиск  $P_1$  (тиск перед отвором 1). Тиск  $P_2$  вимірюється за шкалою правого коліна, а тиск  $P_1$  – за шкалою лівого коліна манометра.

Прилад можна проградувати так, що за різницею тисків (різницею висот  $h$ ) безпосередньо отримувати значення швидкості рідини.

Трубку Піто використовують для вимірювання швидкості кораблів і літаків. Мініатюрна трубка Піто з ртутним манометром використовується для вимірювання швидкості кровотоку.



**Приклад 7.6.** Якщо швидкість вітру над дахом будинку  $v = 25$  м/с, то яка сила діє на дах площею  $S = 250$  м<sup>2</sup>?

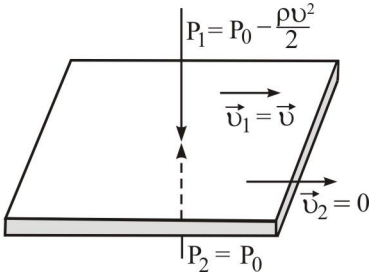


Рис. 7.10

**Розв'язок.** Тиск, що чинить атмосферне повітря на дах, дорівнює різниці тисків повітря на дах знизу  $P_2$  і зверху  $P_1$  (рис. 7.10), які знайдемо, скориставшись рівнянням Бернуллі:

$$P_1 = P_0 - \frac{\rho v^2}{2}.$$

Тут  $P_0 = P_2$  – статичний тиск,  $\frac{\rho v^2}{2}$  – динамічний тиск. Різниця тисків

$$\Delta P = P_2 - P_1 = P_0 - (P_0 - \frac{\rho v^2}{2}) = \frac{\rho v^2}{2}.$$

Оскільки тиск це сила, що діє на одиницю поверхні ( $P = F / S$ ), то

$$F = \Delta P S = \frac{\rho v^2}{2} S = \frac{(1,225 \text{ кг/м}^3)(25 \text{ м})^2(250 \text{ м}^2)}{2} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ Н}.$$

Сила  $F = 1,0 \cdot 10^5$  Н діє на дах знизу вгору.

**Приклад 7.7.** Визначити швидкість витікання ідеальної нестисливої рідини через невеликий отвір в боковій стінці широкої посудини (рис. 7.11).

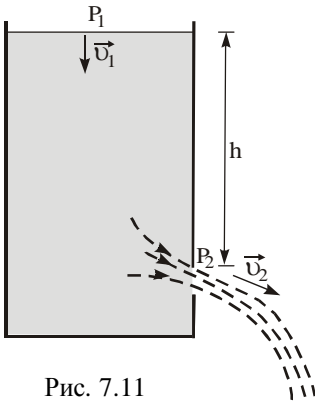


Рис. 7.11

**Розв'язок.** Якщо рідина витікає з отвору поблизу дна посудини, лінії течії сходяться, як показано на рис. 7.11. Для визначення швидкості струменя рідини при виході із отвору скористаємось рівнянням Бернуллі:

$$P_1 + \rho \frac{v_1^2}{2} + \rho gh = P_2 + \rho \frac{v_2^2}{2},$$

де  $P_1 = P_0$  – атмосферний тиск, який діє на вільну поверхню рідини. Такий самий тиск  $P_2 = P_1$  діє на поверхню струменя, що витікає. Оскільки площа перерізу посудини  $S_1$  перевищує площу перерізу отвору, то швидкість руху частинок рідини вільної поверхні  $v_1$  значно менша від швидкості частинок, що проходять отвір, тобто  $v_1 \ll v_2$ , і величиною  $v_1$  у

рівнянні Бернуллі можна знехтувати. Тоді

$$v_2 = \sqrt{2gh}.$$

Тут  $h$  відстань від центра отвору до вільної поверхні рідини. Останню формулу називають **формулою Торрічеллі**.

## § 7.6. Підймальна сила, яка діє в потоці рідини

Однією з важливих задач гідро – і аеродинаміки є вивчення сил, з якими діє середовище (рідина або газ) на рухомі тіла. Сила, з якою діє рідина на тіло при їхньому відносному русі, залежить від швидкості тіла, його форми і в загальному випадку буде направлена під деяким кутом до напрямку руху. Цю силу завжди можна розкласти на дві взаємно перпендикулярні складові – паралельну і перпендикулярну до напрямку потоку. Пер-

шу складову називають **силою лобового опору**, а другу – **підйимальною силою**.

На симетричні тіла, вісь симетрії яких збігається з напрямком потоку, діє тільки сила лобового опору, яка залежить від форми та розмірів тіл, швидкості потоку рідини та від її властивостей. В цьому випадку лінії струменя рідини огинають тіло симетрично (рис. 7.12).

У випадку несиметричних тіл лінії струменя огинають їх несиметрично і швидкість потоку з одного боку може виявитися відмінною від швидкості потоку з іншого боку. Якщо в потоці виконується закон Бернуллі, то тиск з того боку, де швидкість потоку більша, виявиться меншим.

На рис. 7.13, показано переріз крила літака і розміщення ліній струменя повітря. Із рисунка видно, що внаслідок несиметричності крила більш висока концентрація ліній

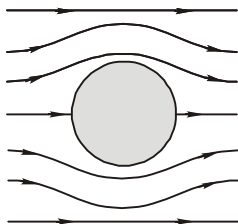


Рис. 7.12

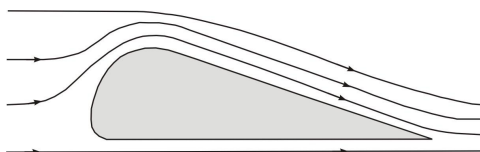


Рис. 7.13

струменя над крилом. Це означає, що над крилом швидкість течії повітря більша, ніж під крилом. Згідно закону Бернуллі більша швидкість супроводжується меншим тиском. Значить, можна чекати, що на крило буде діяти результуюча **підйимальна сила**. В дійсності закон Бернуллі визначає лише частину підйимальної сили, діючої на крило. Крилу зазвичай надається деякий нахил вверх (кут атаки) (рис. 7.14), так, що потік повітря, що набігає на

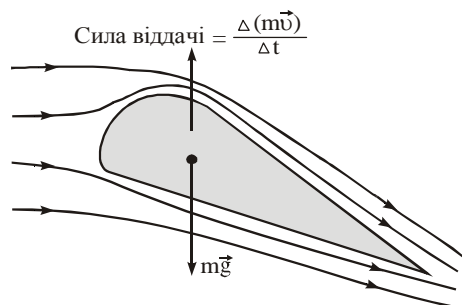


Рис. 7.14

нижню поверхню крила, відхиляється вниз. Таке положення крила призводить до появи направленого вниз імпульсу у молекул повітря, в результаті чого на крило діє додаткова сила (сила віддачі), направлена вгору. Важливу роль у виникненні підйимальної сили відіграє і турбулентність. Неважко довести, що підйимальна сила крила прямо пропорційна густині середовища (потоку рідини), квадрату швидкості, куту атаки та площі крила:

$$F_{\text{під}} = C S \rho v^2, \quad (7.13)$$

де  $v$  – швидкість рідини (газу) відносно крила,  $\rho$  – густина рідини,  $S$  – площа крила,  $C$  – коефіцієнт, який залежить від кута атаки.

### § 7.7. Рух в'язкої рідини. Формула Пуазейля

На відміну від ідеальних рідин у реальних рідинах існує так зване внутрішнє тертя, яке називають **в'язкістю**. В'язкість можна уявити як тертя між шарами рідини при їх русі один відносно одного. В рідині в'язкість обумовлена силами міжмолекулярної взаємодії, а в газах – зіткненнями атомів і молекул.

В'язкість різних середовищ різна: гліцерин більш в'язкий ніж вода, а мідь більш в'язка ніж гліцерин. Кількісною характеристикою в'язкості є коефіцієнт в'язкості  $\eta$ , який можна визначити таким чином. Припустимо, що рідина знаходиться між двома плоскими паралельними горизонтальними пластинами, одна з яких нерухома (нижня), а друга

(верхня) рухається зі сталою швидкістю  $v$  відносно нижньої, як показано на рис. 7.15. Між шарами рідини, що безпосередньо стикаються з пластинами і речовиною пластин,

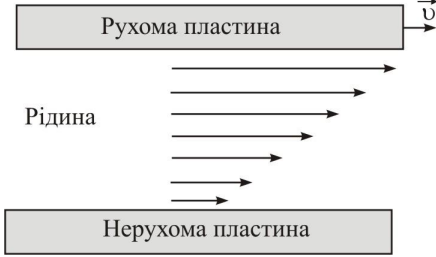


Рис. 7.15

існують міжмолекулярні сили взаємодії. Тому верхній шар рідини рухається з тією ж швидкістю  $v$ , що і верхня пластина, нижній шар разом з нижньою пластиною залишається нерухомим. Кожний шар рідини буде діяти на прилягаючі до нього шари так, що в рідині встановиться неперервна зміна швидкості від нижньої пластины до верхньої, як показано на рис. 7.15. Щоб змістити верхню пластину, до неї потрібно прикласти певну силу, яка дорівнює силі внутрішнього тертя, і вона пропорційна площі пластини  $S$  і швидкості  $v$  та

обернено пропорційна відстані між пластинами  $l$ , тобто:

$$F = \eta \frac{Sv}{l} \quad \text{або} \quad F = \eta \frac{dv}{dl} S, \quad (7.14)$$

де  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості,  $dv/dl$  – градієнт швидкості. Формулу (7.14) називають **формулою Ньютона**. Із (7.14) маємо, що

$$\eta = \frac{Fl}{Sv}. \quad (7.15)$$

В СІ коефіцієнт в'язкості вимірюється в  $\text{Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$  або в  $\text{Па} \cdot \text{с}$ .

Іноді користуються іншою одиницею, яка називається пуазом (П) на честь французького фізика і механіка XIX ст. Жана Пуазейля:  $1 \text{ П} = (1/10) \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2$ , або  $1 \text{ Н} \cdot \text{с}/\text{м}^2 = 10 \text{ П}$ . В табл. 7.1 наведені значення коефіцієнта в'язкості різних рідин і газів, тут же вказана температура, при якій вимірювалась в'язкість. Зауважимо, що в'язкість в значній мірі залежить від температури. Для багатьох рідин в'язкість з підвищенням температури різко зменшується (в'язкість газів збільшується).

Таблиця 7.1

Рідина або газ	Температура, °C	Коефіцієнт в'язкості $\eta$ , $10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}$
Вода	0	1,79
	20	1,01
	100	0,28
Кров	37	$\approx 4$
Плазма крові	37	$\approx 1,5$
Повітря	20	0,018
Водень	0	0,009
Гліцерин	20	1480
Смола	20	$3 \cdot 10^{10}$

В'язкість деяких рідин (емульсій, суспензій, розчинів полімерів) залежить від режиму їх течії – тиску, градієнта швидкості. Це пояснюється тим, що структурні елементи рідини (наприклад, білкові молекули, дисперсні частинки) розміщуються у потоці по-різному за різних швидкостей. Такі рідини називаються **не ньютонівськими**. До не ньютонівських рідин відноситься і кров (суспензія клітин крові у білковому розчині – плазмі).

Для невеликих тіл сферичної форми, які рухаються у в'язкому середовищі, сила внутрішнього тертя при невеликих сталих швидкостях руху визначається **формулою Стокса**:

$$F = 6\pi r\eta v, \quad (7.16)$$

де  $r$  – радіус кульки,  $v$  – швидкість її руху.

Ця формула справджується за умови, що відстань від кульки до межі рідини (до стінки посудини) в багато разів більша від діаметра кульки.

Закон Стокса лежить в основі методу визначення швидкості осідання еритроцитів (ШОЕ), що дає змогу медикам встановлювати запальні процеси в організмі людини. Крім того, знання **відносної в'язкості\*** крові, яка залежить від градієнта швидкості  $dv/dl$ , використовується для діагностики захворювань (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

Відносна в'язкість крові $\eta_{відн}$	Результат
4,2 – 6,0	Норма
< 2,0	Анемія
> 10,0	Поліцитимія

Якби рідина (газ) не володіла в'язкістю, то для її протікання по горизонтальній трубі не потрібно б прикладати ніякої сили. Тому завдяки в'язкості стаціонарний рух будь-якої реальної рідини в трубі можливий лише за умови, що між кінцями труби створена різниця тисків.

Об'ємний розхід, або потік рідини (тобто об'єм рідини), що протікає через поперечний переріз круглої труби за  $t$  с, залежить від її радіуса і довжини, перепаду тисків на кінцях труби і коефіцієнта в'язкості рідини. Пуазейль, на честь якого названа одиниця в'язкості (будучи лікарем, він в основному цікавився фізичними аспектами кровообігу), дослідив залежність від вище наведених параметрів величини потоку реальної рідини при ламінарній течії в циліндричній трубі. Отриманий ним вираз називають **формулою Пуазейля**:

$$Q = \frac{P_1 - P_2}{8\eta L} \pi r^4, \quad (7.17)$$

де  $r$  – внутрішній радіус труби,  $L$  – довжина труби,  $P_1 - P_2$  – різниця тисків на кінцях труби,  $\eta$  – коефіцієнт в'язкості рідини,  $Q = V/\Delta t$  – об'ємний розхід, або потік рідини.

Із формули (7.17) видно, що потік рідини  $Q$  прямо пропорційний градієнту тиску  $(P_1 - P_2)/L$  і обернено пропорційний в'язкості рідини. Крім того видно, що потік рідини  $Q$  сильно залежить від радіуса труби. Зменшивши радіус труби удвічі, потік рідини зменшиться в 16 разів.

Формулу Пуазейля покладено в основу експериментальних установок для визначення коефіцієнта в'язкості рідин і газів. Насамкінець, зауважимо ще раз, що формула Пуазейля справедлива тільки для ламінарних потоків рідини. До турбулентних потоків вона непридатна.

**Приклад 7.8.** Оцінити об'ємний розхід води  $Q$  в трубі діаметром  $d = 1,0$  см і довжиною  $L = 1,5$  м, якщо різниця тисків на її кінцях дорівнює  $\Delta P = 0,35$  атм, а температура  $t = 20^\circ\text{C}$  ( $1 \text{ атм} = 101325 \text{ Па}$ ).

**Розв'язок.** Для цього використаємо формулу Пуазейля (7.17):

\* Відносна в'язкість  $\eta$  дорівнює відношенню коефіцієнта в'язкості даної речовини  $\eta$  до коефіцієнта в'язкості дистильованої води  $\eta_в$  при одній і тій самій температурі  $\eta_{відн.} = \eta / \eta_в$ .

$$Q = \frac{\Delta P \pi r^4}{8\eta L} = \frac{(35463,8 \text{ Н} / \text{м}^2)(3,14)(5 \cdot 10^{-4} \text{ м})^4}{8(1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2)(15 \text{ м})} = 5,8 \cdot 10^{-8} \frac{\text{м}^3}{\text{с}}.$$

Тут  $\Delta P = P_1 - P_2$ . Значення  $\eta = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$  взято із табл. 7.1.

**Приклад 7.9.** Знайти різницю тисків на кінцях двокілометрового нафтогону діаметром  $d = 40 \text{ см}$ , якщо нафта поступає в кількості  $Q = 400 \text{ см}^3/\text{с}$ . Коефіцієнт в'язкості нафти  $\eta = 0,2 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$ .

**Розв'язок.** Різницю тисків  $\Delta P = P_1 - P_2$  на кінцях нафтогону виразимо із формули Пуазейля (7.17):

$$\Delta P = \frac{8\eta LQ}{\pi r^4} = \frac{8(0,2 \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2)(2000 \text{ м})(4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^3 / \text{с})}{3,14(0,2 \text{ м})^4} = 254,8 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}.$$

## § 7.8. Течія крові в кровоносній системі

Кров – це в'язка рідина (суспензія клітин крові у білковому розчині – плазмі), яка під впливом серцевих скорочень проходить по складній системі артерій, вен і інших кровоносних судин.

Не дивлячись на те, що швидкість крові в судинах невелика (в аорті  $0,3 - 0,4 \text{ м} / \text{с}$ , у вені  $0,2 - 0,4 \text{ м} / \text{с}$ , в капілярі  $0,2 - 1,0 \text{ см} / \text{с}$ ), її потік не зовсім ламінарний, кров містить завислі частинки (діаметр яких майже дорівнює діаметру капілярів) а її в'язкість залежить від швидкості течії:

$$\eta = \frac{v_{кр} \rho r}{R_e}, \quad (7.18)$$

де  $v_{кр}$  – швидкість, при якій ламінарна течія переходить в турбулентну (для крові  $v_{кр} < 50 \text{ см} / \text{с}$ ),  $\rho$  – густина рідини,  $r$  – радіус трубки (капіляра),  $R_e$  – число Рейнольдса.

Разом з тим, формула Пуазейля (7.17) є хорошим наближенням в першому порядку.

Таким чином, до течії крові можна застосувати ті ж закони, що і до течії рідини в тонкій трубці.

Потік крові в організмі регулюється крихітними м'язами, які оточують судини. При їх скороченні діаметр судини зменшується і потік, який у відповідності з формулою (7.17) пропорційний  $r^4$ , різко зменшується уже при незначному зменшенні радіуса. Таким чином, ледь помітними скороченнями цих м'язів дуже точно контролюється надходження крові до різних органів організму. Оскільки швидкість течії крові в центрі артерії більша, ніж біля стінок, то згідно закону Бернуллі тиск крові біля стінок більший, ніж по центру. Радіальна різниця тисків створює силу, яка штовхає клітини крові до центра судин, що перешкоджає прилипанню їх до стінок судин, а це сприяє нормальному кровообігу. Однак, якщо, скажімо, внаслідок атеросклерозу (затвердівання стінок судин) і відкладення холестерину, радіус судин зменшується, то для підтримання нормальної кровотечії необхідний більш високий градієнт тиску. При зменшенні радіуса судин в два рази, серцю прийдеться збільшити тиск в 16 разів. Серце в таких умовах працює з перевантаженням, і, як правило, не може забезпечити необхідну величину течії, тобто нормальний кровообіг. Таким чином, підвищений артеріальний тиск вказує, що серце працює з перевантаженням і що потік крові через артерії нижче необхідного (норми).

Існують два різні тиски крові – **систолічний** (максимальний) і **діастолічний** (нижній). Систолічний тиск встановлюється тоді, коли кров, внаслідок скорочення шлуночка серця, виштовхується серцевим м'язом в аорту, а звідти в артерію. В здоровому організ-

мі систолічний тиск дорівнює  $\approx 120$  мм. рт. ст. ( $\approx 15,996$  кПа)\*. Між скороченнями серця тиск падає до нижнього (діастолічного) рівня, який дорівнює  $\approx 80$  мм. рт. ст. ( $\approx 10,664$  кПа).

Ламінарна течія крові в артеріях – “тихий” процес, турбулентна – “шумливий”. Характерний звук при турбулентній течії крові можна виявити за допомогою стетоскопа, приклавши його до артерії. Цей спосіб виявлення турбулентної течії використовують для вимірювання тиску крові.

Зазвичай для вимірювання тиску використовують плечову артерію. Рука людини між плечем і ліктем обгортається надувною стрічкою. Далі у стрічку нагнітають повітря до тиску, достатнього для стиснення артерії і призупинення потоку крові в ній. Потім відкривають клапан на стрічці і повітря зі стрічки повільно випускають. Коли тиск в стрічці стане рівним систолічному, кров буде здатною пробитися через стиснену артерію – виникне турбулентна течія. Цей процес супроводжується характерними тонами і шумами, які прослуховуються лікарем за допомогою стетоскопа, який розміщується на артерії нижче стрічки. Продовжуючи зменшувати тиск у стрічці, можна відновити ламінарну течію крові, що помітно по відсутності характерних тонів і звуків у стетоскопі. Тиск у стрічці, що відповідає відновленню ламінарної течії в артерії, реєструють як діастолічний. Насамкінець зауважимо, що тиск в аорті і великих артеріях коливається в межах від 120 до 80 мм. рт. ст. В малих артеріях коливання згладжуються, а коли кров досягає капілярів, коливання майже пропадають і тиск практично сталий.

---

\* 1 мм. рт. ст. = 133,3 Па.