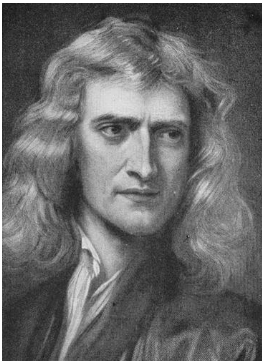
3 ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ



Ісаак Ньютон *(1643 – 1727) – видатний англійський математик і фізик, який заклав основи сучасного природознавства, творець класичної фізики. Народився в Лінкольнширі. Закінчив Кембріджський університет. Сформулював основні закони класичної механіки, відкрив закон всесвітнього тяжіння, дисперсію світла, розробив корпускулярну теорію світла, створив диференціальне і інтегральне числення.*

Наукова творчість Ньютона зіграла виключно важливу роль в історії розвитку фізики.

В попередньому розділі ми розглянули рух, де основними поняттями були швидкість і прискорення. Причини руху до уваги не бралися. В цьому розділі ми спробуємо дати відповіді на питання: чому тіла рухаються таким чином, а не інакше? Що спонукає тіло, яке знаходиться в стані спокою, почати рухатися? Що є причиною прискорення чи гальмування тіла? Чим викликаний рух по колу? Ми переконаємось, що в кожному із цих випадків на тіло діє сила. Тому в цьому розділі ми з'ясуємо зв'язок між силою і рухом.

§ 3.1. Сила

Поняття "**сила**" походить із уявлень наших мускульних відчуттів. В механіці під силою розуміють фізичну причину зміни стану руху тіла (надання тілу прискорення) або його форми і розмірів (деформація), які виникають в результаті взаємодії даного тіла з іншими тілами. Або інакше: **сила – це будь-яка взаємодія, здатна викликати зміну стану руху тіла.** Таким чином, **сила – це кількісна характеристика механічної взаємодії тіл.**

Усі сили, з якими має справу механіка, можна поділити на два основні класи: сили, що виникають тільки при безпосередньому стиканні тіл (**контактні сили**), і сили, які можуть діяти при відсутності безпосереднього контакту між тілами. До першого класу належать пружні сили і сили тертя; до другого – гравітаційні сили та сили електричного і магнітного походження.

Сила характеризується точкою прикладання, абсолютною величиною і напрямком. Сила є **вектор** і тому підкоряється правилам додавання векторів.

Сили виникають завжди тільки по дві: обидві сили рівні за величиною, протилежно направлені і прикладені до двох різних тіл. За Ньютоном це називається: дія рівна протидії.

§ 3.2. Перший закон Ньютона

У 1687 р. Ньютон у своїй знаменитій праці “Принципи” виклав нову теорію руху. Ньютонівський аналіз руху узагальнений в його “трьох законах руху”.

Перший закон Ньютона читається так: **будь-яке тіло зберігає стан спокою або рівномірного прямолінійного руху (без прискорення) до тих пір, поки діючі на нього сили не виведуть його із цього стану**. Інакше, якщо до тіла, яке знаходиться в стані спокою, не прикладена сила, то воно залишається в стані спокою, або, якщо тіло рухається, воно зберігає швидкість сталою. Це означає:

$$\vec{a} = 0 \quad \textit{або} \quad \vec{\upsilon} = const, \quad \textit{коли} \quad \vec{F} = 0.$$

Перший закон Ньютона містить три дуже важливі твердження: а) існують системи відліку, в яких тіло знаходиться в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху. Такі системи відліку називаються **інерціальними системами відліку**; б) стан спокою і стан рівномірного прямолінійного руху є один стан; в) зміна стану відбувається внаслідок дії на тіло інших тіл.

Здатність тіл зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху називається **інертністю тіл**, а саме явище – **інерцією**. В силу цього перший закон Ньютона часто називають **законом інерції**. Системи відліку, в яких виконуються закони Ньютона, називаються **інерціальними**. Будь-яка система відліку, яка рухається рівномірно і прямолінійно відносно інерціальної системи, є також інерціальною системою відліку.

Перший закон Ньютона окремо взятий не дає нам повного уявлення про розглядувану силу. Ми тут маємо тільки визначення **нульової** сили ($\vec{F} = 0$), а нульова сила означає **нульове** прискорення. Конкретний зв’язок між силою і прискоренням, яке виникає під дією сили, встановлює другий закон Ньютона.

§ 3.3. Другий закон Ньютона

Прискорений рух можна отримати тільки під дією прикладеної сили. Прискорення тіла прямо пропорційне прикладеній до нього силі і обернено пропорційне його масі. **Тіло прискорюється в напрямку, який співпадає з напрямком прикладеної сили**. Аналітично цей закон записується так

$$\vec{a} \sim \frac{\vec{F}}{m}, \tag{3.1}$$

де $\vec{a}$ – прискорення, $\vec{F}$ – сила, m – маса. В СІ коефіцієнт пропорційності в (3.1) дорівнює одиниці. Тоді $\vec{a} = \vec{F} / m$. Перетворюючи цей вираз, отримаємо відомий вираз другого закону Ньютона в формі рівності:

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{a}\,.} \tag{3.2}$$

Зауважимо, що рівняння (3.2) векторне; його ліва і права частини повинні співпадати як за величиною, так і за напрямком. Другий закон Ньютона зв’язує рух з причиною, що його викликала – силою. Цей закон є одним із найбільш фундаментальних законів фізики.

Якщо на матеріальну точку діє кілька сил, то кожна з них надає точці прискорення, яке визначається другим законом Ньютона (3.2) так, ніби інших сил немає. Це явище називається **принципом незалежності** дії сил. **Прискорення, якого набуває тіло внаслідок одночасної дії кількох сил, є таке саме, як коли б на тіло діяла лише одна сила, яка дорівнює векторній сумі всіх діючих сил**. Ця векторна сума називається **рівнодійною** або **результуючою** силою. Виходячи із сказаного, другий закон Ньютона сформулюємо так: **добуток маси на його прискорення дорівнює рівнодійній усіх сил, які діють на тіло** (рис. 3.1).

В СІ сила вимірюється в ньютонах (Н). Один ньютон – це сила, необхідна, щоб тілу масою 1 кг надати прискорення 1 м/с^2. Таким чином, 1 Н = 1 кг · (м/с^2).

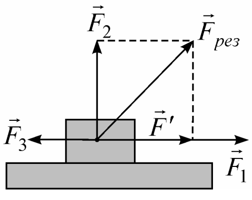


Рис. 3.1

В аналітичному виразі другого закону Ньютона (3.2) є величина, названа **масою**. Сам Ньютон використовував термін "маса" як синонім **кількості речовини**, що не зовсім коректно. Згідно сучасним уявленням **маса є мірою інертності тіла** і її називають **інертною масою**. Тілу з більшою масою трудніше змінити характер його руху, тобто трудніше вивести тіло із стану спокою або зупинити його, якщо воно рухається. Заставити рухатися завантажений автомобіль значно важче, ніж порожній.

В СІ маса вимірюється в кілограмах (кг). Кратні одиниці: 1 т = 1000 кг; 1кг = 1000 г.

Не слід плутати поняття **маси** і **ваги,** між якими є істотна відмінність. Маса – це властивість самого тіла. Вага ж – це сила, з якою тіло діє на опору або розтягує підвіс (§ 3.9).

Другому закону Ньютона можна дати більш загальне визначення, ввівши поняття імпульсу тіла:

$$\vec{P} = m\vec{\upsilon}\,. \tag{3.3}$$

Імпульс тіла – це фізична величина, яка дорівнює добуткові маси тіла на його швидкість.

Виконаємо деякі перетворення з рівнянням (3.2):

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt},$$

$$\vec{F}dt = md\vec{\upsilon} = d(m\vec{\upsilon})\,. \tag{3.4}$$

Маса тіла ввійшла під знак диференціала, що відповідає більш загальному випадку, коли може змінюватися і маса. Добуток $m\upsilon$, як ми вже відмітили, називають **імпульсом** або **кількістю руху тіла**; величину Fdt називають **імпульсом сили**. Тому другий закон стверджує: **швидкість зміни кількості руху тіла дорівнює рівнодійній усіх сил, що діють на тіло**:

$$\vec{F} = \Sigma\vec{F}_i = \frac{d\vec{P}}{dt}\,. \tag{3.5}$$

Коли маса тіла залишається сталою з часом, її можна винести за знак диференціала. Тоді

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\,. \tag{3.6}$$

Таким чином, для того, щоб змінити імпульс тіла, на нього необхідно подіяти силою незалежно від того, повинен імпульс збільшитися чи зменшитися (як у випадку зупинки тіла) або повинен змінитися його напрямок. Саме в початковому варіанті Ньютон вивів другий закон Ньютона за допомогою поняття імпульсу (сам Ньютон називав добуток $m\upsilon$ кількістю руху).

Приклад 3.1. *Яку силу необхідно прикласти до тіла масою* $m = 4{,}0\,кг$ *, щоб воно набуло прискорення* $a = 10^4 g$ *(наприклад, в центрифузі).*

Розв'язок. *Задача розв'язується за допомогою другого закону Ньютона:*

$$F = ma = (4{,}0\,кг)(10^4)(9{,}8\,м/с^2) = 3{,}92\cdot 10^5\,Н\,.$$

Приклад 3.2. *Згідно спрощеної моделі, серце ссавця при кожному скороченні прискорює близько* $m = 20\ г$ *крові від швидкості* $\upsilon_1 = 0{,}25\ м/с$ *до швидкості* $\upsilon_2 = 0{,}35\ м/с$ *за час* $t = 0{,}10\ с$ *. Яка при цьому величина сили, що розвивається серцевим м'язом?*

Розв'язок. *Згідно другого закону Ньютона*

$$F = ma\,.$$

Прискорення виразимо із формули (2.10):

$$\upsilon = \upsilon_0 + at.$$

Поклавши $\upsilon = \upsilon_2$ *,* $\upsilon_0 = \upsilon_1$ *, маємо:*

$$a = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t}.$$

Тоді

$$F = m\frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{t} = (2 \cdot 10^{-2}\,кг)\frac{(0{,}35\ м/с - 0{,}25\ м/с)}{0{,}10\ с} = 0{,}02\ Н\,.$$

Приклад 3.3. *Яким є імпульс горобця масою* $m = 50\ г$ *, який летить зі швидкістю* $\upsilon = 15\ м/с$ *? Якою буде його імпульс через* $t = 12\ с$ *, якщо на нього діє сила опору повітря* $F = 2{,}0 \cdot 10^{-2}\,Н$ *?*

Розв'язок. *а) Імпульс горобця визначимо, скориставшись виразом (3.3):*

$$P = m\upsilon = (5 \cdot 10^{-2}\,кг)(15\ м/с) = 0{,}75\ \frac{кг \cdot м}{с}.$$

б) Для знаходження імпульсу горобця через $t = 12\ с$ *після того, як на нього почала діяти сила опору F, необхідно знайти його швидкість, яка визначається рівнянням (2.10):*

$$\upsilon_1 = \upsilon - at\,.$$

Прискорення виразимо із другого закону Ньютона (3.2):

$$a = \frac{F}{m}.$$

Тоді:

$$\upsilon_1 = \upsilon - \frac{F}{m}t = 15\ \frac{м}{с} - \frac{(2{,}0 \cdot 10^{-2}\,Н)(12\ с)}{(5 \cdot 10^{-2}\,кг)} = 10{,}2\ \frac{м}{с}.$$

Імпульс горобця дорівнює

$$P_1 = m\upsilon_1 = (5{,}0 \cdot 10^{-2}\,кг)(10{,}2\ \ м/с) = 0{,}51\ \frac{кг \cdot м}{с}.$$

Зауваження: Імпульс вимірюється в $кг \cdot м/с$ або в $Н \cdot с$.

§ 3.4. Третій закон Ньютона

Другий закон Ньютона кількісно описує вплив сили на рух тіла, але не дає відповіді на питання звідки береться сила, що є її джерелом. Сила сама по собі не існує, а завжди пов'язана із взаємодією тіл. Тобто єдиним джерелом сили, що діє на якесь тіло, є інше тіло.

Однак дія одного тіла на інше завжди взаємна. Одиночні сили не можуть існувати, сили завжди існують парами. В будь-якому випадку, як правило, одну із сил позначають як **діючу**, а іншу – як **силу реакції** (протидії): **якщо тіло 1 діє з деякою силою на тіло 2,**

то тіло 2 діє з рівною і протилежно направленою силою на тіло 1. Це означає, що сила завжди спарена з рівною силою реакції. У вигляді рівняння це записується так:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}\,.} \tag{3.7}$$

Тут перший нижній індекс відноситься до тіла, яке сприймає силу, а другий – до тіла, що створює силу.

Важливим є чітко розрізняти, до якого тіла прикладена дана сила і з боку якого тіла вона діє, оскільки тільки та сила впливає на характер руху тіла, яка прикладена саме до цього тіла. Сила, з якою дане тіло діє на інше тіло, не впливає на рух першого тіла. Вона впливає тільки на рух другого тіла, а саме на те, до якого вона прикладена. Наприклад, існує достатньо поширена помилка, що прискорення ракети є результатом відштовхування газів, які вириваються із сопла ракети, від землі або атмосфери. Насправді ракета прискорюється завдяки тому, що вона діє на гази, виштовхуючи їх з великою силою із свого сопла. Гази в свою чергу діють на ракету з такою ж силою тільки протилежного напрямку. Саме ця сила і штовхає ракету вперед. Змінюючи напрямок викидання газів, можна змінювати напрямок руху ракети. При ходьбі людина відштовхується ногою від землі. При цьому земля діє на людину з такою ж, але протилежно направленою силою. Саме ця сила, що діє на людину і рухає її вперед. Тому, ще раз зауважимо, що для того, щоб уникнути непорозумінь, важливо завжди точно вказати обидва об’єкти: **той, який діє з силою, і той, що відчуває цю дію**.

Третій закон Ньютона іноді називають **принципом “рівності дії і протидії”** ($\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$).

Використовуючи другий закон Ньютона, можна записати

$$m_1 a_1 = -m_2 a_2$$

звідки

$$m_2 = (-\frac{a_1}{a_2})m_1\,.$$

Якщо m_1 відоме, то можна визначити m_2, вимірюючи відношення прискорень a_1 / a_2 (знак “–” вказує тільки на те, що ці два прискорення мають протилежні напрямки). Так можна порівнювати маси, проводячи вимірювання з парою взаємодіючих сил.

§ 3.5. Закон збереження імпульсу

Нехай ми маємо систему, яка складається з багатьох тіл (матеріальних точок). Сили, що діють між цими тілами, називають **внутрішніми силами**. Сили, що діють на систему з боку тіл, які не входять до її складу, називають **зовнішніми силами**. Якщо зовнішніми силами можна знехтувати, то таку систему називають **замкнутою**. В замкнутій системі діють лише внутрішні сили, результуюча зовнішня сила, яка діє на систему, дорівнює нулю. В цьому випадку вираз (3.5) набуде вигляду

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \text{ або } \vec{P} = const\,,\ (\vec{F}_{зовн} = 0). \tag{3.8}$$

Отже, **коли результуюча зовнішня сила, яка діє на систему, дорівнює нулю, імпульс системи залишається сталим**. Це є **закон збереження імпульсу**. Його можна також сформулювати і так: **повний імпульс замкнутої системи тіл зберігається сталим**. Якщо система складається з n тіл, то

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3 + \ldots + \vec{P}_n = \vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = const\,. \tag{3.9}$$

Таким чином, повний імпульс системи $\vec{P}$ є **векторна сума** окремих імпульсів.

Розглянемо в якості прикладу лобове пружне зіткнення[*] двох твердих куль. На рис. 3.2, *а* наведено відповідно випадки до і після зіткнення куль; випадок б відповідає моменту

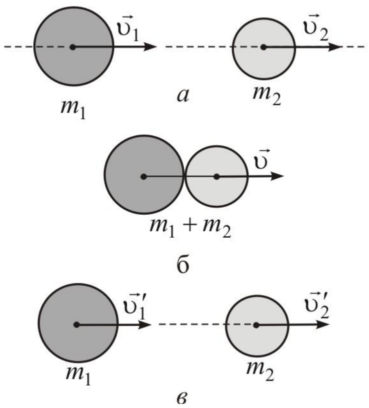


Рис. 3.2

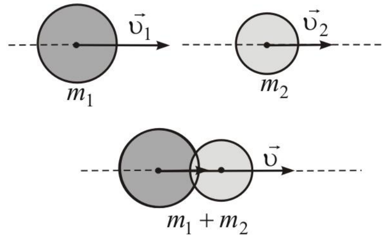


Рис. 3.3

зіткнення куль. Зрозуміло, що імпульс обидвох куль після зіткнення зміниться, однак їх сума до і після зіткнення залишиться однією і тією ж, тобто повний імпульс зберігається. Оскільки обидві кулі рухаються вздовж однієї прямої, то повний імпульс системи буде дорівнювати **алгебраїчній сумі** імпульсів куль. Тоді, згідно формули (3.9)

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1\upsilon_1' + m_2\upsilon_2', \tag{3.10}$$

або

$$m_1(\upsilon_1 - \upsilon_1') = m_2(\upsilon_2' - \upsilon_2). \tag{3.10, а}$$

Зауважимо, що при протилежному напрямку руху куль швидкість υ_2 вважається від'ємною.

Якщо між кулями відбувається непружне зіткнення[**] (рис. 3.3), то вони деформуються в місці дотику, а потім рухаються зі спільною швидкістю. Тоді, згідно (3.9)

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon. \tag{3.11}$$

Якщо m_1, m_2, υ_1 і υ_2 відомі, то із (3.11) маємо:

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}.$$

Як і в попередньому випадку, при протилежному напрямку руху швидкість υ_2 вважається від'ємною.

Приклад 3.4. *Футболіст протягом $\Delta t = (1/50)$ с ударяє по налітаючому м'ячу масою $m = 0{,}5$ кг з силою $F = 200$ Н. Наскільки швидше буде рухатися м'яч після удару?*

Розв'язок. *Для цієї мети скористаємось другим законом Ньютона (3.6):*

---

[*]Пружне зіткнення – це таке зіткнення двох частинок, коли їх кінетична енергія зберігається.
[**]Зіткнення, в яких кінетична енергія частинок не зберігається, називаються непружними.

$$F = m\frac{\Delta\upsilon}{\Delta t}, \qquad (1)$$

де $\Delta\upsilon$ *– зміна швидкості м'яча після удару.*

Із (1) маємо

$$\Delta\upsilon = \frac{F\cdot\Delta t}{m} = \frac{(200\,H)}{0{,}5\,кг}(\frac{1}{50}\,c) = 8\ \frac{м}{с}.$$

Приклад 3.5. *Залізничний вагон масою m_1 = 10000 кг рухається зі швидкістю $\upsilon_1 = 24{,}0\ м/с$, стикається з вагоном масою m_2 = 60000 кг, який знаходиться в стані спокою $(\upsilon_2 = 0)$. Якщо після зіткнення вагони зчепилися, то якою буде їхня спільна швидкість?*

Розв'язок. *Закон збереження імпульсу для даного випадку запишеться так:*

$$m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = (m_1 + m_2)\upsilon,$$

звідки

$$\upsilon = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} = \frac{(10^4\ кг)(24{,}0\ м/с) + (6\cdot 10^4\ кг)(0\ м/с)}{10^4\ кг + 6\cdot 10^4\ кг} = 3{,}43\ \frac{м}{с}.$$

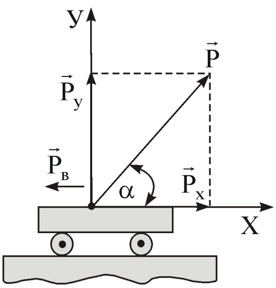


Рис. 3.4

Приклад 3.6. *Пушка, встановлена на платформі залізничного вагона масою $m_2 = 10^4\ кг$, вистрілює під кутом $\alpha = 45^0$. Маса снаряда $m_1 = 500\,кг$, а його швидкість $\upsilon_1 = 200\ м/с$. Визначити швидкість віддачі пушки.*

Розв'язок. *Кількість руху – величина векторна, тому закон збереження кількості руху можна застосувати покомпонентно. Тобто, якщо P зберігається, то його проекції P_x і P_y також зберігаються (рис. 3.4).*

Розглянемо спочатку горизонтальну складову кількості руху снаряда:

$$P_x = P\cos\alpha = m_1\upsilon_1\cos\alpha = (500\,кг)(200\,м/с)(\cos\ 45^0) = 7{,}07\cdot 10^4\ кг\cdot м/с.$$

Ця складова повинна бути рівною за величиною кількості руху віддачі пушки, яка рухається тільки горизонтально:

$$P_в = -m_2\upsilon_2 = 7{,}07\cdot 10^4\ кг\cdot м/с,$$

звідки

$$\upsilon_2 = \frac{-7{,}07\cdot 10^4\ кг\cdot м/с}{10^4\ кг} = -7{,}07\ м/с = -25{,}5\,\frac{км}{год}.$$

Оскільки платформа взаємодіє з землею, то вертикальна складова $(P_y = P\sin\alpha = m_1\upsilon_1\sin 45^0 = (500\,кг)(200\ м/с)(\sin 45^0) = 7{,}07\times 10^4\ кг\cdot м/с)$ *поглинеться землею. Тому платформа отримає віддачу тільки за рахунок горизонтальної складової, але через свою велику масу, в порівнянні з масою снаряда, швидкість віддачі дуже мала.*

Насамкінець, зауважимо, що якщо на систему діє відмінна від нуля зовнішня сила, то закон збереження імпульсу не буде виконуватися.

§ 3.6. Фундаментальні сили природи

У природі існує велика кількість сил (м'язова і пружна сили, сила тертя і сила вітру, електрорушійна сила тощо), які в кінцевому рахунку можна звести до чотирьох видів фундаментальних сил: **гравітаційних, електромагнітних, ядерних** та **сил слабкої взаємодії**. Всі інші сили насправді є лише різноманітними проявами цих чотирьох сил.

Гравітаційні сили – це сили притягання, які діють між усіма тілами. Величина гравітаційної взаємодії для двох точкових тіл визначається законом всесвітнього тяжіння:

$$\boxed{F_{гр} = G\frac{m_1 m_2}{r^2},} \qquad (3.12)$$

де r – відстань між тілами, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $Н \cdot м^2/кг^2$ – так звана гравітаційна стала, m_1 і m_2 – відповідно маси першого і другого тіл. Особливістю цих сил є те, що для тіл з малими масами вони проявляються дуже слабо, а для масивних тіл є дуже великими і що їх дія поширюється на значні відстані. Вони є причиною обертання Місяця навколо Землі, планет Сонячної системи навколо Сонця тощо.

Сили слабкої взаємодії відповідальні за процес ядерного β - розпаду та за процеси, що призводять до перетворень одних субатомних частинок в інші, де вони є єдиними силами. В інших взаємодіях елементарних частинок (окрім фотона) вони діють разом з іншими інтенсивнішими силами. Вважається, що слабка взаємодія проявляється на дуже малих відстанях, однак радіус їх дії до цих пір не встановлений.

Електромагнітні сили зумовлені електричною і магнітною взаємодією між електричними зарядами. Окремий випадок такої взаємодії виражається законом Кулона:

$$\boxed{F_{ел} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2},} \qquad (3.13)$$

де Q_1 і Q_2 – величини взаємодіючих зарядів, r – відстань між зарядами, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ $Кл^2/(Н \cdot м^2)$ – електрична стала.

Як видно із (3.13), ці сили зменшуються із збільшенням відстані між зарядами. Отже, електромагнітні сили, як і гравітаційні, є далекодіючими, тобто діють на будь-якій відстані.

Приклад 3.7. *Знайти відношення кулонівської сили взаємодії до гравітаційної між протоном і електроном* ($Q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл*, $m_e = 9{,}11 \cdot 10^{-31}$ *кг*, $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ *кг*, $Q_p = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ *Кл*, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ $Н \cdot м^2/кг^2$).

Розв'язок. *І в закон електростатичної сили, і в закон гравітаційної сили входить залежність від* $1/r^2$:

$$F_{ел} = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}; \quad F_{гр} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Тому відношення $F_{ел}/F_{гр}$ *від відстані між тілами не залежить*

$$\frac{F_{ел}}{F_{гр}} = \frac{kQ_1 Q_2}{Gm_1 m_2}.$$

Тут $k = 1/4\pi\varepsilon_0 = 9{,}0 \cdot 10^9\, Н \cdot м^2 / Кл^2$.

Для випадку протона і електрона маємо:

$$\frac{F_{ел}}{F_{гр}} = \frac{k\,Q_e Q_p}{Gm_e m_p} = \frac{(9{,}0 \cdot 10^9\ Н \cdot м^2/Кл^2)(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл)^2}{(6{,}67 \cdot 10^{-11}\ Н \cdot м^2/кг^2)(9{,}11 \cdot 10^{-31}\ кг)(1{,}67 \cdot 10^{-27}\ кг)} = 2{,}3 \cdot 10^{39}.$$

Отже, сила електростатичної взаємодії в багато разів більша (~ 10^{39}) гравітаційної сили. Тому в атомних системах гравітаційним притяганням нехтують.

Сили взаємодії між атомами, молекулами, а також сили поверхневого натягу, як і сили пружності та тертя, зводяться до сил електромагнітної взаємодії.

Ядерні сили діють між нуклонами в ядрі, а також між іншими елементарними частинками. Це дуже інтенсивні сили, які проявляються лише на малих відстанях (10^{-15} м). Отже, ядерні сили – це короткодіючі сили.

Приклад 3.8. *Оцінити величину електростатичної сили відштовхування двох протонів у ядрі.*

Розв'язок. *Вважається, що відстань між двома протонами в ядрі, де є ~50 протонів, дорівнює $2 \cdot 10^{-15}$ м. Тоді*

$$F_{ел} = \frac{kQ^2}{r^2} = \frac{(9{,}0 \cdot 10^9\ Н \cdot м^2 / Кл^2)(1{,}6 \cdot 10^{-19}\ Кл)^2}{(2 \cdot 10^{-15}\ м)^2} \approx 57{,}6\,Н\ .$$

Це величезна відштовхуюча сила, яка приблизно дорівнює гравітаційній силі, що діє на тіло масою 6 кг поблизу Землі. Отриманий результат засвідчує велику інтенсивність ядерної взаємодії, яка перевищує кулонівське відштовхування і втримує протони всередині ядра.

Інтенсивність фундаментальних сил оцінюють безрозмірним параметром γ, який характеризує імовірність процесу, зумовленого цим видом взаємодії (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Основні типи взаємодій,
які лежать в основі всіх відомих сил і взаємодій в природі

Взаємодія	Джерело	Відносна інтенсивність, γ	Радіус дії
Гравітаційна	Маса	~ 10^{-38}	Далекодіюча
Слабка	Всі елементарні частинки	~ 10^{-15}	Короткодіюча (~ 10^{-15}м)
Електромагнітна	Електричні заряди	~ 10^{-2}	Далекодіюча
Ядерна (сильна)	Протони, нейтрони, мезони	1	Короткодіюча (~ 10^{-15}м)

§ 3.7. Гравітаційні сили

Генрі Кавендиш *(1731 – 1810) – англійський фізик і хімік. Народився в Ніцці (Франція). Закінчив Кембріджський університет. Відкрив вплив середовища на ємність конденсаторів, визначив значення гравітаційної сталої, масу і середню густину Землі. У 1766 р. отримав в чистому вигляді водень, вивчив його властивості, визначив склад води, вміст кисню в повітрі.*

Ньютон, аналізуючи рух Місяця навколо Землі, у 1666 р. відкрив закон всесвітнього тяжіння, який можна сформулювати так: **кожна частинка у Всесвіті притягає будь-яку іншу частинку з силою, прямо пропорційною добутку їх мас і обернено пропорційною квадрату відстані між ними**. Ця сила діє вздовж лінії, яка з'єднує ці частинки, тобто вона є центральною. Величина цієї сили може бути записана у вигляді

$$\boxed{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2},} \tag{3.14}$$

де m_1 і m_2 – відповідно маси частинок, r – відстань між ними, G – гравітаційна стала, яка може бути виміряна експериментально і для всіх тіл має одне і те ж числове значення.

Хоча закон сформульовано для точкових тіл, його можна застосувати і до протяжних тіл, якщо попередньо уявно розбити їх на матеріальні точки, а потім всі сили взаємодії між ними просумувати. Сумування найкраще проводити за допомогою інтегрування, яке було винайдено самим Ньютоном. Ньютон показав, що для двох однорідних куль вираз (3.14) правильно описує силу взаємодії, якщо r – відстань між центрами куль. Крім того, якщо, протяжні тіла малі, в порівнянні з відстанню між ними (наприклад, Земля – Сонце), то, розглядаючи тіла як точкові об'єкти (частинки), ми вносимо лише невелику похибку.

Фізичний зміст гравітаційної сталої можна визначити із самого закону (3.14): **це величина, яка чисельно дорівнює силі притягання між двома тілами масами по одному кілограму, розташованих на відстані одного метра одне від одного**. Якщо переписати формулу (3.14) у вигляді $G = F r^2 / (m_1 m_2)$, то з цього виразу видно, що G вимірюється в $Н \cdot м^2/кг^2$.

Щодо числового значення G, то його можна визначити тільки на досліді. Першим, кому вдалося експериментально виміряти силу, що діє між двома тілами звичайних розмірів, був ***Генрі Кавендиш*** (1798 р.). Схему пристрою, за допомогою якого Г. Кавендиш експериментально виміряв силу гравітаційної взаємодії, наведено на рис. 3.5. За отриманими результата-

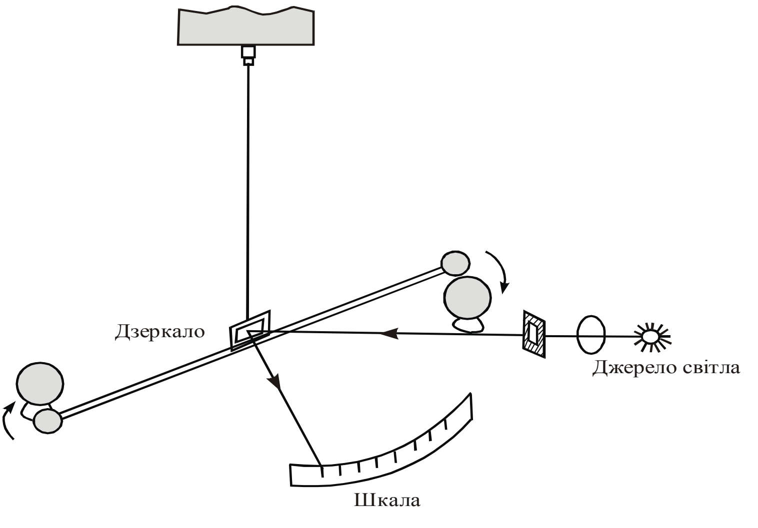


Рис. 3.5

ми з достатньою точністю йому вдалося розрахувати величину сталої G. Результат, отриманий Кавендишем, лише на 1 % відрізняється від значення G, прийнятого сьогодні:

$$G = (6{,}6720 \pm 0{,}0041) \cdot 10^{-11}\ Н \cdot м^2 / кг^2 .$$

Труднощі в розумінні природи гравітаційних взаємодій можна подолати, якщо допустити (по аналогії з ядерними, електромагнітними і слабкими взаємодіями), що будь-яке тіло, яке володіє масою, оточене **гравітаційним полем**, що заповнює весь простір. Інше тіло, яке знаходиться в деякій точці поблизу першого, зазнає дії сили, оскільки в цій точці існує гравітаційне поле. Гравітаційне поле (поле тяжіння) являє собою особливий вид матерії. Воно існує одночасно з матеріальними тілами. Для кожного матеріального об'єкта існує своє гравітаційне поле.

Гравітаційне поле (як і електричне чи магнітне) можна описати кількісно за допомогою поняття напруженості гравітаційного поля, яке визначається як сила гравітаційної взаємодії, діючої на одиницю маси в будь-якій точці простору:

$$\vec{\gamma} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

Згідно сучасних уявлень, будь-яка взаємодія частинок здійснюється шляхом обміну між ними віртуальними (або реальними) частинками – переносниками взаємодії. Так, переносником електромагнітної взаємодії є квант електромагнітного поля – фотон, переносником ядерних сил є π-мезони тощо. Для гравітаційних взаємодій питання про їх переносників далеко не з простих. Сьогодні допускається, що частинкою (квантом) гравітаційного поля є **гравітон**, який і є переносником гравітаційної взаємодії, однак його експериментально все ще не відкрито. Робились спроби спостерігати гравітаційні хвилі, однак вони також ще не виявлені.

Приклад 3.7. *Дві сферичні свинцеві кулі масою $m_1 = m_2 = 8{,}00$ кг кожна, розміщені так, що відстань між їх центрами складає $r = 0{,}50$ м. З якою гравітаційною силою діють кулі одна на одну?*

Розв'язок. *Якщо припустити, що кулі однорідні, то можна скористатися формулою (3.14). Тоді*

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{(6{,}67\cdot 10^{-11}\,Н\cdot м^2/кг^2)(8{,}00\,кг)(8{,}00\,кг)}{(0{,}50\,м)^2} = 1{,}71\cdot 10^{-8}\,Н.$$

Це дуже мала величина, яку можна виміряти лише дуже чутливими приладами.

Приклад 3.8. *Визначити силу, яка діє на Місяць ($m_М = 7{,}36\cdot 10^{22}$ кг), завдяки гравітаційному притяганні як Землі ($m_З = 5{,}98\cdot 10^{24}$ кг), так і Сонця ($m_С = 1{,}99\cdot 10^{30}$ кг), вважаючи, що ці сили направлені перпендикулярно одна до одної (рис. 3.6).*

Розв'язок. *Визначимо силу, яка діє на Місяць з боку Землі (відстань від Землі до Місяця $L = 3{,}85\cdot 10^5$ км):*

$$F_{МЗ} = \frac{Gm_М m_З}{L^2} = \frac{(6{,}67\cdot 10^{-11}\,Н\cdot м^2/кг^2)(7{,}36\cdot 10^{22}\,кг)(5{,}98\cdot 10^{24}\,кг)}{(3{,}85\cdot 10^8\,м)^2} = 1{,}98\cdot 10^{20}\,Н.$$

Далі, визначимо силу, з якою діє на Місяць Сонце (відстань від Сонця до Місяця будемо вважати рівною відстані від Сонця до Землі $L = 1{,}50\cdot 10^{11}$ м)

$$F_{МС} = \frac{Gm_М m_С}{L^2} = \frac{(6{,}67\cdot 10^{-11}\,Н\cdot м^2/кг^2)(7{,}36\cdot 10^{22}\,кг)(1{,}99\cdot 10^{30}\,кг)}{(1{,}5\cdot 10^{11}\,м)^2} = 4{,}35\cdot 10^{20}\,Н.$$

Оскільки ці дві сили направлені під кутом 90^0 одна до одної (рис. 3.6), то результуюча сила

$$F = \sqrt{(1{,}98)^2 + (4{,}35)^2}\cdot 10^{20}\,Н = 4{,}78\cdot 10^{20}\,Н.$$

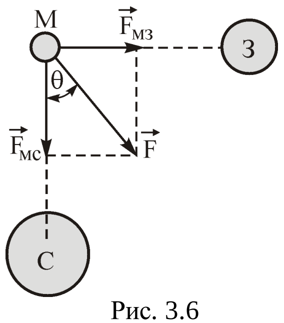


Рис. 3.6

Закон всесвітнього тяжіння можна записати у векторній формі:

$$\boxed{\vec{F}_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{r}_{21}\,,} \qquad (3.15)$$

де $\vec{F}_{12}$ – вектор сили, яка діє на тіло 1 (масою m_1) з боку тіла 2 (масою m_2), $\vec{r}_{21}$ – одиничний вектор, направлений від тіла 2 до тіла 1.

Згідно третього закону Ньютона, сила $\vec{F}_{21}$, яка діє на тіло масою m_2, що створюється тілом масою m_1, має ту ж величину, що і сила $\vec{F}_{12}$, але направлена протилежно до неї (рис. 3.7). Таким чином

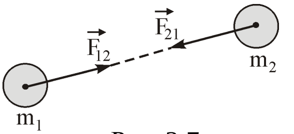


Рис. 3.7

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\vec{r}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^2}\vec{r}_{12}\,. \qquad (3.16)$$

§ 3.8. Сила тяжіння

Одним із проявів сили всесвітнього тяжіння є **сила земного тяжіння** – сила притягання тіл до Землі. Якщо масу Землі позначити через $M_З$, її радіус через $R_З$, масу даного тіла через $m_т$, то силу, що діє на тіло з боку Землі, знайдемо за формулою:

$$\boxed{F = G\frac{M_З m_Т}{R_З^2}\,.} \qquad (3.17)$$

Це і є сила земного тяжіння, яка направлена до центра Землі. Очевидно, що ця сила біля поверхні Землі надає тілу прискорення, яке є прискоренням вільного падіння g.

Застосуємо до сили тяжіння другий закон Ньютона. Тоді

$$F = m_Т g\,. \qquad (3.18)$$

Прирівнюючи праві частини формул (3.17) і (3.18), отримаємо:

$$\boxed{g = G\frac{M_З}{R_З^2}\,.} \qquad (3.19)$$

Із (3.19) видно, що прискорення вільного падіння не залежить від маси тіла, отже, воно однакове для всіх тіл. В СІ g = 9,80 м/с^2, тому сила тяжіння, що діє на тіло масою 1 кг, складає (1,00 кг) (9,80 м/с^2) = 9,80 Н.

Формула (3.19) дає можливість визначити масу Землі, що і було зроблено Г. Кавендишем:

$$M_З = \frac{gR_З^2}{G}.$$

Кавендиш “зважив” не тільки Землю, але і Сонце, Юпітер та всі інші планети і їхні супутники.

На силу тяжіння може впливати неоднорідний розподіл мас усередині Землі. У зв’язку з цим g може мати різні значення навіть у тих точках Землі, які знаходяться на однаковій географічній широті. Такі невеликі зміни g можна виміряти спеціальними приладами – **гравіметрами**. На основі подібних вимірів можна робити висновки про існування в земній корі корисних копалин.

Якщо тіло перебуває не на поверхні Землі, а на висоті h над нею, то величина прискорення вільного падіння визначається за формулою

$$g = G\frac{M_З}{(R_З + h)^2}. \tag{3.20}$$

Із формули (3.20) видно, що із збільшенням висоти h прискорення вільного падіння зменшується. Врахування висоти h має велике значення при розрахунку руху супутників Землі.

§ 3.9. Вага і невагомість

Вага тіла відносно Землі – це результат гравітаційного притягання тіла до Землі. Як і будь-яка сила, вона може проявлятися статично і динамічно. При статичному прояві вага тіла дорівнює силі, з якою тіло, притягаючись Землею, діє на нерухому, відносно Землі, опору або вертикальний підвіс (рис. 3.8). Отже, вага тіла за модулем дорівнює силі тяжіння

$$P = mg\ . \tag{3.21}$$

Однак, це не означає, що вага тіла і сила тяжіння, прикладена до нього, одне й те саме. Це дві різні сили. Сила тяжіння, – **гравітаційна сила**, прикладена до тіла. **Вага тіла – це сила, прикладена до опори або підвісу (це сила пружності, про яку піде мова нижче).**

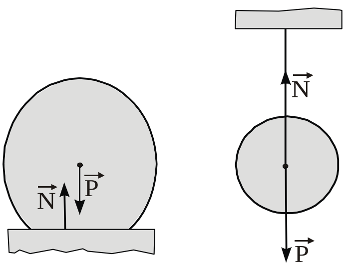


Рис. 3.8

При статичному прояві ваги $\vec{P}$ (рис. 3.8) її дія на тіло зрівноважується силою пружної деформації $\vec{N}$ – реакцією з боку інших тіл, наприклад, опори або підвісу ($\vec{P} = -\vec{N}$).

При динамічному прояві ваги вага тіла також визначається формулою (3.21), однак, оскільки тіло рухається прискорено, то прискорення, якого воно набуває, відрізняється від g, а значить і вага тіла буде відрізнятися від його ваги в стані спокою. Доведемо це.

Нехай тіло знаходиться в ліфті, який рухається з прискоренням вниз (рис. 3.9). За другим законом Ньютона векторна сума всіх сил, що діють на тіло, дорівнює:

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}\ , \tag{3.22}$$

де m – маса тіла, $\vec{P}$ – сила тяжіння, яка діє на тіло, $\vec{N}$ – реакція опори.

Вага тіла в ліфті виразиться так

$$\vec{P}' = -\vec{N} = P - ma = m(g - a)\ . \tag{3.23}$$

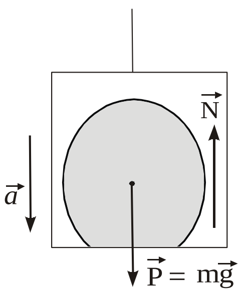


Рис. 3.9

В (3.23) враховано (3.21) і (3.22).

Вектори $\vec{a}$ і $\vec{g}$ можуть бути спрямовані в одному напрямку або в протилежні напрямки, і тоді, відповідно, вага тіла буде менша або більша ваги тіла, коли воно знаходиться в стані спокою, тобто коли його вага

$$P = m\vec{g}\ .$$

В загальному випадку вага тіла в ліфті, що рухається з прискоренням $\vec{a}$, дорівнює

$$\boxed{P' = m(g \pm a)\ .} \tag{3.24}$$

Знак “+” в формулі (3.24) відповідає випадку, коли ліфт прискорено рухається вверх (вектори $\vec{a}$ і $\vec{g}$ протилежно направлені); знак “–” – коли ліфт рухається вниз (вектори $\vec{a}$ і $\vec{g}$ спрямовані в одному напрямку).

Цікавим є випадок, коли ліфт вільно падає (наприклад, обірветься трос). В цьому випадку $\vec{a} = \vec{g}$ і $\vec{P}' = mg - mg = 0$, тобто вага тіла дорівнюватиме нулю. Якщо б в цей момент людина в ліфті випустила з рук, наприклад, олівець, то він не впав би на підлогу, а вільно падав би разом з людиною і ліфтом. Олівець буде знаходиться перед людиною в тому місці, де його випустили. Таке явище називають **невагомістю**. Зауважимо, що сила тяжіння продовжує діяти на тіло, а сила ваги зникла. Тіла стають невагомими тому, що ліфт рухається з прискоренням, яке дорівнює $\vec{g}$.

Невагомість, що проявляється на космічному апараті, має ту ж природу, що і невагомість у ліфті, що вільно падає. Коли космічний апарат рухається по орбіті навколо Землі, то і він сам, і всі інші предмети, які знаходяться всередині нього (в тому числі і космонавти), “падають” на Землю з однаковою швидкістю. Тому космонавт всередині космічного корабля не діє ні на одну із його частин. Це означає, що космонавт “невагомий”. В цьому стані втрачається відчуття “верху” і “низу”, вільна рідина в такому стані приймає форму кулі тощо.

Приклад 3.9. *Вантаж масою m = 15 кг підвішений на мотузці до стелі ліфта. Мотузка витримує силу натягу N = 185 Н. Яким повинно бути найменше прискорення ліфта (за величиною і напрямком), щоб мотузка обірвалася.*

Розв’язок. *При русі ліфта прискорено вниз вага вантажу зменшується; при русі ліфта прискорено вверх вага вантажу збільшується згідно з формулою (3.24). У випадку, коли a = 0, сила ваги вантажу, яка діє на мотузку, дорівнює*

$$P = mg = (15\,кг)(9{,}8\,м/с^2) = 147\,Н\ ,$$

і вона менша за максимальну силу натягу мотузки і розірвати її не може. Для того, щоб мотузка обірвалася, сила ваги повинна бути більшою за максимальну силу натягу мотузки (P > N). Це може статися лише тоді, коли ліфт буде рухатися вверх з прискоренням $\vec{a}$ *, яке виразимо з формули:*

$$P = N = mg + ma.$$

Тоді

$$a = \frac{N - mg}{m} = \frac{(185\,кг\cdot м/с^2) - (15\,кг)(9{,}8\,м/с^2)}{15\,кг} = 2{,}53\,м/с^2 .$$

Висновок: *При a > 2,53 м/с^2 мотузка обірветься.*

§ 3.10. Інертна і гравітаційна маса

Масу тіла можна визначити шляхом вимірювання прискорення тіла під дією відомої сили, скориставшись другим законом Ньютона

$$m_{ін} = \frac{F}{a}. \tag{3.25}$$

Маса, яка визначається таким чином, характеризує інерційні властивості тіла, тобто його здатність набувати прискорення під дією сил. Цю масу називають **інертною масою** і позначають $m_{ін}$.

Масу тіла можна також визначити, вимірюючи його силу тяжіння до іншого тіла, наприклад, до Землі (§ 3.7):

$$F = G\frac{mM_З}{R_З^2} \qquad \rightarrow \qquad m_{гр} = \frac{FR_З^2}{GM_З}. \qquad (3.26)$$

Визначена в такий спосіб маса називається **гравітаційною масою** і позначається $m_{гр}$. В формулах (3.26) $M_З$ – маса Землі, $R_З$ – радіус Землі.

Аж ніяк не очевидно, що інертна маса тіла повинна дорівнювати його гравітаційній масі. Однак, класичні досліди Ньютона, а потім досліди угорського фізика Р. Етвеша (1848 – 1919), які продовжувалися майже 25 років, показали, що для даного тіла обидва ці види мас співпадають; сучасні експерименти підтверджують це з точністю до 10^{-12}.

Якщо б гравітаційна і інертна маси не дорівнювали одна одній, то висновок Галілея про те, що всі тіла у відсутності опору повітря падають на Землю з однаковими прискореннями, був би несправедливим.

Оскільки $m_{гр} = m_{ін}$, то в фізиці говорять просто про масу тіла, і під цим розуміють фізичну величину, яка являє собою міру інертних і гравітаційних властивостей.

Твердження про рівність гравітаційної і інертної мас є принципом еквівалентності, який покладено як постулат в основу загальної теорії відносності або теорії тяжіння, створеної німецьким фізиком А. Ейнштейном (1879 – 1955).

§ 3.11. Сили тертя

Будь-який механічний рух тіла супроводжується втратами механічної енергії. Це зумовлено наявністю **сил тертя**. Сили тертя перешкоджають руху. Вони є гальмівними силами (силами опору). Тертя виникає між двома поверхнями твердих тіл або між їх частинками. В першому випадку тертя називають з**овнішнім**, в другому – **внутрішнім або в'язким**. Зовнішнє тертя поділяють на **тертя спокою (статичне)** і **тертя ковзання**, яке іноді називають кінетичним тертям (кінетичний по-грецьки означає "рухомий"). Перший вид тертя виникає між взаємно нерухомими тілами, другий виникає при відносному русі тіл, що дотикаються.

Тертя спокою проявляється у всіх випадках, коли намагаються викликати відносний рух тіл, які дотикаються. Тертя спокою характеризує силу опору при будь-яких спробах зрушити тіло з місця. Припустимо, що на горизонтальній поверхні знаходиться тіло в стані спокою. В цьому випадку на тіло діють тільки сила ваги $m\vec{g}$ і сила реакції $\vec{N}$. Сила тертя в цьому випадку відсутня. Далі до тіла прикладемо силу $\vec{F}$ і спробуємо зрушити його з місця. Зараз виникне сила опору (протилежна до $\vec{F}$), яка і є **силою тертя** спокою $\vec{F}_{от}$

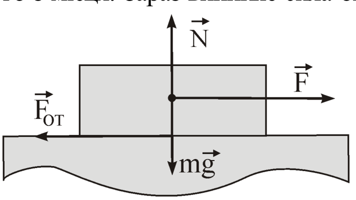


Рис. 3.10

(рис. 3.10). Збільшення сили $\vec{F}$ призведе до збільшення сили опору $\vec{F}_{от}$, і коли до тіла прикладена сила $F > F_{от}$, то воно зрушиться з місця. Для всіх інших випадків, коли $F < F_{от}$, тіло залишається в спокої. Таким чином, сила тертя спокою змінюється від нуля до максимального значення. Дослідним шляхом встановлено, що максимальне значення сили тертя спокою пропорційне нормальній силі (силі реакції) $\vec{N}$ і не залежить від площі дотикання тіл, тобто

$$\boxed{F_{от} = \mu_0 N,} \qquad (3.27)$$

де μ_0 – коефіцієнт тертя спокою, який залежить тільки від властивостей ковзаючих поверхонь.

Якщо $F > F_{от}$, то тіла рухаються прискорено, і сила тертя спокою переходить в силу **тер-**

тя ковзання, яке виражається такою формулою:

$$\boxed{F_T = \mu N\ ,} \tag{3.28}$$

де μ – коефіцієнт тертя ковзання, який також залежить лише від властивостей ковзаючих поверхонь. Співвідношення (3.27) і (3.28) не є векторними, оскільки сила тертя і сила N перпендикулярні одна одній. В таблиці 3.1 наведені значення виміряних на досліді коефіцієнтів тертя спокою і ковзання для різних поверхонь.

Таблиця 3.1

Поверхні	Коефіцієнт тертя спокою, μ_o	Коефіцієнт тертя ковзання, μ
Дерево по дереву	0,4	0,2
Дерево по снігу	0,14	0,1
Лід по льоду	0,1	0,03
Сталь по сталі	0,74	0,57
Скло по склу	0,94	0,40
Гума по твердому тілу	1 – 4	1
З’єднання в суглобах людини	0,01	0,01

Сила тертя ковзання в якійсь мірі залежить від відносної швидкості руху тіл. Із збільшенням швидкості сила тертя спочатку зменшується, порівняно з тертям спокою F_{OT}, а потім зростає і наближається до значення сили тертя спокою (рис. 3.11).

Розглянемо далі межу дотику двох тіл (рис. 3.12). На атомному рівні тут є “впадини”,

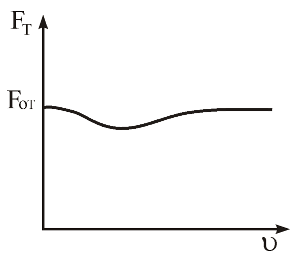


Рис. 3.11

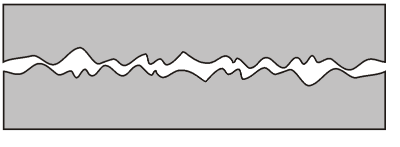


Рис. 3.12

“рівнини” і “горби”. Можна б допустити, що причиною виникнення тертя і є нерівності поверхонь. Однак, справжньою причиною виникнення тертя є не механічне зчеплення випуклостей одна з одною (хоча воно також має місце), а взаємодія поверхонь на міжмолекулярному рівні. Однак, ці взаємодії проявляються лише в місцях щільного дотикання поверхонь.

Одним із підтверджень цього є той факт, що між дуже гладкими (відполірованими) поверхнями, як правило, тертя ковзання більше.

Молекулярна модель тертя також пояснює, що сила тертя не залежить від площі дотикання. При стиканні тіл тільки незначна частина площі дотикання дійсно знаходиться в контакті на молекулярному рівні. Тіла дотикаються тільки випуклостями (рис. 3.12).

Тертя може справляти шкідливий вплив. Воно гальмує рухомі тіла, викликає нагрівання і знос частин механізмів. Щоб зменшити сухе тертя ковзання, його замінюють **тертям**

кочення за допомогою підшипників або внутрішнім тертям за допомогою мастил. Більш ефективно зменшити тертя можна, створивши між ковзаючими поверхнями повітряний прошарок (судна і платформи на повітряній подушці). В цьому випадку повітряний прошарок створюється шляхом продування повітря через велику кількість отворів. Інший спосіб створення повітряного прошарку ґрунтується на використанні магнітного поля для підтримання тіла в повітрі (залізничні потяги).

Тертя приносить і велику користь. Наша здатність ходити ґрунтується на терті між підошвами взуття і землі. Рух автомобіля та його стійкість також залежать від тертя.

Приклад 3.10. *Для того, щоб зрушити з місця ящик масою m = 40 кг на бетонній підлозі, необхідно до нього прикласти силу F = 270 Н. Знайти коефіцієнт тертя спокою між ящиком і підлогою.*

Розв'язок. *Сили, що діють на ящик в момент прикладання до нього сили* $\vec{F}$, *показані на рис. 3.13. Ящик можна зрушити з місця за умови, що*

$$\left|\vec{F}\right| = \left|-\vec{F}_{OT}\right|,$$

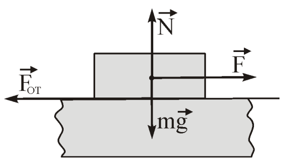


Рис. 3.13

які направлені в протилежні сторони. Сила тертя спокою визначається формулою (3.27)

$$F_{OT} = \mu_0 N = \mu_0 mg,$$

де μ_0 *– коефіцієнт тертя спокою,* $N = mg$ *– сила реакції. Тоді*

$$F = \mu_0 mg,$$

звідки

$$\mu_0 = \frac{F}{mg} = \frac{270\ Н}{(40\ кг)(9{,}8\ м/с^2)} = 0{,}69.$$

Приклад 3.11. *Лижник почав спуск зі схилу, який має кут* $\alpha = 30^0$. *Вважаючи, що коефіцієнт тертя ковзання дорівнює* $\mu = 0{,}10$, *розрахувати: а) прискорення лижника і б) швидкість, якої він набуде через* $t = 6{,}0\ с$.

Розв'язок. *а) На рис 3.14 наведена діаграма всіх сил, які діють на лижника. Сила*

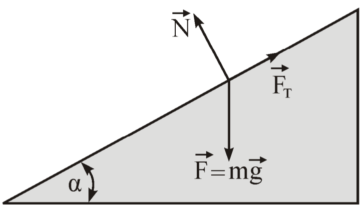


Рис. 3.14

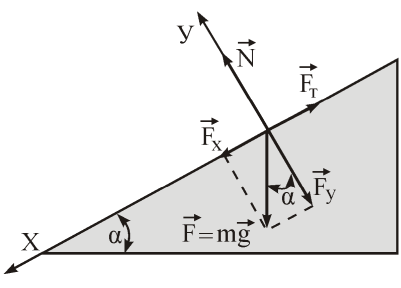


Рис. 3.15

ваги $(\vec{F} = mg)$ *і дві сили, обумовлені дією снігу на лижі, – нормальна сила (*$\vec{N}$ *– сила реакції) і сила тертя* $(\vec{F}_T)$. *Для зручності ми вибрали вісь X паралельно схилу, а вісь У перпендикулярно поверхні схилу. Далі вектор сили тяжіння розкладемо на дві складові (рис. 3.15): їх величини дорівнюють відповідно*

$$F_x = mg\sin\alpha, \quad F_y = mg\cos\alpha.$$

Оскільки по осі Y рух відсутній, то

$$N = mg\cos\alpha \ .$$

Виходячи з другого закону Ньютона, маємо

$$mg\sin\alpha - F_T = ma_x \, .$$

Якщо врахувати, що

$$F_T = \mu N = \mu\, mg\cos\alpha \ ,$$

то отримаємо:

$$mg\sin\alpha - \mu\, mg\cos\alpha = ma_x \, ,$$

звідки

$$a_x = g\sin\alpha - \mu\, g\cos\alpha = g(\sin 30^\circ - (0{,}10)\cos 30^\circ) = 0{,}41 g \ ,$$

або

$$a_x = 0{,}41(9{,}8\, м/с^2) = 4{,}0\ м/с^2 \, .$$

б) Швидкість лижника через t = 6,0 с отримаємо, використавши формулу (2.10):

$$\upsilon = \upsilon_0 + at = 0 + (4{,}0\ м/с^2)(6{,}0\ с) = 24\ м/с.$$

Ми тут допустили, що лижник почав рух із стану спокою.

Приклад 3.12. *Знайти коефіцієнт тертя ковзання між снігом і лижами лижника в прикладі 3.11, якщо він спускається з гірки зі сталою швидкістю.*

Розв'язок. *Як і у прикладі 3.11*

$$N = mg\cos\alpha \ .$$

Оскільки, згідно умови $a_x = 0$ *, то*

$$F_x = F_T \, ,$$

або

$$mg\sin\alpha = \mu N = \mu\, mg\cos\alpha \ ,$$

звідки

$$\mu = \frac{mg\sin\alpha}{mg\cos\alpha} = tg\alpha = tg 30^0 = 0{,}58 \, .$$

§ 3.12. Сили пружності

Будь-яке тіло під дією прикладених сил змінює свої розміри і форму, тобто **деформується**. Розрізняють два види деформацій: **пружну** і **пластичну**. **Пружною називають таку деформацію, коли тіло після припинення дії зовнішніх сил повністю відновлює свої розміри і форму. Пластичною називають деформацію, яка повністю або частково зберігається в тілі після припинення дії зовнішніх сил**. Пружною буде деформація чи пластичною залежить як від природи самих тіл, так і від прикладених до них сил. Якщо сили не перевищують певної межі, яку називають межею пружності, деформація буде пружною. Коли зовнішні сили перевищують цю межу, деформація буде пластичною.

Пружні властивості твердих тіл знаходять своє пояснення в їх атомістично-молекулярній будові. Між атомами (молекулами), з яких складаються тверді тіла, діють електричні сили взаємодії (внутрішні пружні сили), які протидіють їх переміщенню. І коли деформація не руйнує міжатомних (або міжмолекулярних) зв'язків, всі атоми (молекули) зміщуючись, зберігають своїх сусідів, і їх оточення не змінюється. Зміна міжатомних (або міжмолекулярних) відстаней при таких деформаціях невелика. Тому при припиненні дії зовнішніх сил тіла повертаються в попередній рівноважний стан.

При пластичній деформації зовнішні сили перевершують результуючу внутрішніх пружних сил і атоми зміщуються на такі відстані, що змінюють свої положення, тобто змінюють своїх сусідів і повернутися в попереднє положення, після припинення дії зовнішніх сил, уже не можуть. Основним механізмом пластичної деформації у монокристалах є ковзання атомних площин одна відносно одної на один період і більше. В полікристалічних тілах механізм деформації складніший.

Деформації є кількох видів: деформації розтягу і стиску та деформації зсуву, кручення і згину.

Деформація розтягу. Якщо на тіло, наприклад, на вертикально підвішений стержень (рис. 3.16), діє сила, то його довжина зміниться (стержень видовжиться на величину $\Delta l = l - l_0$). У стержні виникає пружна сила $\vec{F}_{np}$, яка протидіє деформуючій силі $\vec{F}$.

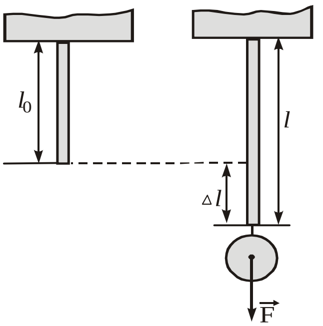


Рис. 3.16

Згідно третього закону Ньютона пружна сила F_{np} за модулем дорівнює деформуючій силі, але спрямована в протилежний бік:

$$F_{np} = -F\,.$$

Експериментально встановлено, що сила, яка виникає під час пружної деформації, прямо пропорційна величині цієї деформації і спрямована у бік її зменшення:

$$\boxed{F = -k\Delta l\,,} \tag{3.29}$$

де F – сила, яка розтягує тіло, Δl – приріст довжини (абсолютна деформація розтягу), k – коефіцієнт пропорційності (коефіцієнт жорсткості). Співвідношення (3.29) справедливе для будь-якого твердого тіла, чи це залізний стержень, чи кістка тварини або людини, але лише при невеликих видовженнях, тобто до певної межі. Якщо сила буде дуже велика, то тіло настільки видовжиться, що воно в кінцевому рахунку розірветься. Оскільки перші дослідження в цьому плані були проведені англійським фізиком Р. Гуком (1635 – 1703), співвідношення (3.29) називають **законом Гука.**

Деформацію характеризують не абсолютним видовженням Δl, а відносним:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}\,, \tag{3.30}$$

і не силою F, а механічною напругою

$$\sigma = \frac{F}{S}\,, \tag{3.31}$$

де S – площа поперечного перерізу стержня (тіла), що розтягується.

Якщо деформація того чи іншого тіла описується законом Гука, то відношення механічної напруги до відносного видовження є величина стала, тобто

$$\frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{F/S}{\Delta l / l_0} = const = E\,, \tag{3.32}$$

або

$$\boxed{\sigma = E\varepsilon = E\frac{\Delta l}{l_0},} \qquad (3.33)$$

де E – коефіцієнт пропорційності, який залежить від властивостей матеріалу і не залежить від його розмірів. Цей коефіцієнт називається **модулем пружності** або **модулем Юнга**. Значення модуля Юнга деяких матеріалів наведені в таблиці 3.2.

Таблиця 3.2

Матеріал	Модуль Юнга, $E \cdot 10^9$ Н/м^2	Модуль зсуву, $G \cdot 10^9$ Н/м^2	Модуль об'ємної пружності, $B \cdot 10^9$ Н/м^2
Тверді тіла			
Чавун	100	40	20
Сталь	200	80	140
Бронза	100	35	80
Алюміній	70	25	70
Бетон	20	–	–
Цегла	14	–	–
Мармур	50	–	70
Граніт	45	–	45
Кістка (кінцівки)	15	80	–
Рідини			
Вода	–		2,0
Спирт (етиловий)	–		1,0
Ртуть	–		2,5

Із (3.33) видно, що **відносне видовження тіла прямо пропорційне прикладеній до нього механічній напрузі**.

Пружні властивості будь-якого тіла залежать від його кристалічної будови. Наприклад, в табл. 3.3 наведені дані про пружні властивості чистого алюмінію, отриманого двома різними способами, а також двох його сплавів. Хоч значення модуля Юнга для цих чотирьох матеріалів мало відрізняються між собою, в значеннях інших параметрів, які характеризують пружні властивості, спостерігається велика відмінність.

Якщо прикласти до тіла силу, як показано на рис. 3.17, то виникають напруги стис-

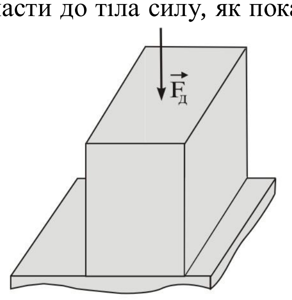


Рис. 3.17

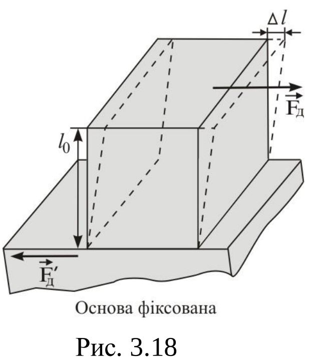


Рис. 3.18

ку: тіло при цьому не розтягується, а стискається. Напругам стиску піддаються колони, які підтримують важкі будівельні конструкції, стіни будинку, кістки нижніх кінцівок людини тощо. Формули (3.29) і (3.33) однаково застосовані як до розтягу, так і до стиску, причому в обидвох випадках значення E, як правило, одне і те ж.

Таблиця 3.3

Речовина	Модуль Юнга, 10^9 Н/м^2	Межа пружності, 10^6 Н/м^2	Відносний розтяг при розриві, %
Алюміній чистий, відпалений	70	12	49
Алюміній чистий, холодна прокатка	70	106	5
Типовий сплав (Al, Cu, Mg)	79	150	3
Сплав (90 % Al + + 5,5 % Zn + 2,5 % Mg + 1,5 % Cu + 0,3 % Cr + + 0,2 % Mn)	72	50	11

Деформація зсуву. Якщо нижню грань тіла прямокутної форми закріпити, а до верхньої прикласти силу $\vec{F}_Д$, то тіло зазнає деформації зсуву (рис. 3.18). Цей тип деформації полягає в тому, що всі шари тіла зміщуються один відносно одного. Оскільки нижня грань тіла закріплена, наприклад, до стола, то на неї з боку стола буде діяти сила $\vec{F}'_Д$, за модулем рівна $\vec{F}_Д$, але протилежного напрямку. В результаті в тілі виникає напруга зсуву, яка старається зруйнувати тіло таким чином, як показано на рис. 3.18 (штрихові лінії).

Для розрахунку деформації зсуву користуються формулою, аналогічною (3.33):

$$\boxed{\sigma = \frac{F}{S} = G\frac{\Delta l}{l_0},} \tag{3.34}$$

де S – площа грані тіла, паралельної прикладеній силі, l_0 – висота тіла, Δl – зсув верхньої грані тіла відносно нижньої, G – коефіцієнт пропорційності, що називається **модулем зсуву**.

На рис. 3.19 показано дію сили $\vec{F}_Д$, яка створює в стержні (тілі) **напругу кручення**. Дос-

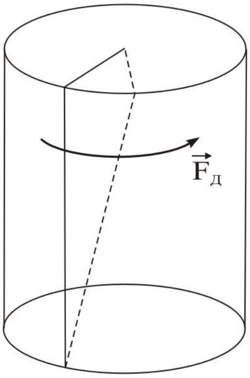


Рис. 3.19

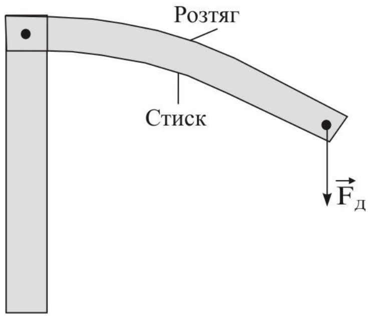


Рис. 3.20

ліди показують, що напруга кручення в значній мірі подібна до напруги зсуву, тільки у випадку кручення зміщення шарів стержня буде мати дещо інший характер.

У випадку деформації згину (рис. 3.20) виникає як напруга стиску (внутрішня поверхня балки), так і напруга розтягу (зовнішня поверхня балки). Всередині балки існує напруга зсуву.

Із сказаного вище можна зробити висновок, що при дії на тверді тіла виникають три види напруг: розтягу, стиску і зсуву.

Приклад 3.13. *Якою повинна бути сила, щоб розтягнути стальний стержень діаметром d = 3 мм настільки, щоб відносне видовження складало* $\varepsilon = \Delta l / l_0 = 15\,\%$ *?*

Розв'язок. *Силу виразимо із формули (3.31), використавши при цьому формулу (3.33):*

$$F = E\varepsilon S = \frac{\pi d^2}{4}\varepsilon E = \frac{3{,}14}{4}(3\cdot 10^{-3}\,м)^2(15)(200\cdot 10^9\ Н/м^2) = 212\cdot 10^5\,Н\,.$$

де $S = \pi d^2/4$ *– площа поперечного перерізу стержня. Значення модуля Юнга взято із таблиці 3.2.*

Приклад 3.14. *Один літр етилового спирту в м'якій посудині занурюють на дно водойми, де тиск* $P = 2{,}8\cdot 10^6$ *Н/м*^{2}*. Яким буде об'єм спирту?*

Розв'язок. *Якщо тіло піддається стиску зі всіх сторін, то його об'єм зменшується. Саме у воді на тіло діє сила зі всіх сторін. Тиск визначається як сила, що діє на одиницю площі поверхні, і, таким чином, тиск еквівалентний напрузі. Дослідно встановлено, що зміна об'єму* ΔV *пропорційна зміні тиску* ΔP *і початковому об'єму* V_0*. Математично це описується співвідношенням, аналогічним (3.31), але тепер коефіцієнт пропорційності називається* ***модулем об'ємної пружності B****:*

$$B = -\frac{\Delta P}{\Delta V / V_0}\,. \tag{1}$$

Знак мінус тут означає, що об'єм зменшується із збільшенням тиску.

Із (1) знайдемо зміну об'єму ΔV*:*

$$\Delta V = \frac{\Delta P V_0}{B} = \frac{(P - P_0)V_0}{B} = \frac{(2{,}8\cdot 10^6 - 101325)\,Н/м^2\,(10^{-3}\,м^3)}{1{,}0\cdot 10^9\ Н/м^2} = 2{,}69\cdot 10^{-6}\ м^3.$$

Тут $P_0 = 101325$ *Н/м*^{3} *– атмосферний тиск,* $B = 1{,}0\cdot 10^9$ *Н/м*^{2} *– взято із таблиці 3.2. Тоді*

$$V = V_0 - \Delta V = 10^{-3}\,м^3 - 2{,}69\cdot 10^{-6}\,м^3 = 9{,}97\cdot 10^{-4}\,м^3\,.$$

§ 3.13. Пружні властивості біологічної матерії

Усі тіла, в тому числі і біологічні матеріали, володіють пружними властивостями. Кістка – основний матеріал опорно-рухомого апарату тварин і людей. В спрощеному вигляді можна вважати, що кістка є матеріалом, який складається із органічних речовин, здебільшого коллагену (високомолекулярна сполука, **волокнистий білок**, який володіє високою еластичністю), неорганічних кристаликів гідроксилапатиту ($3Ca_3(PO_4)O_2 \cdot Ca(OH)_2$), зв'язуючих речовин і води. Кристалики гідроксилапатиту розміщені між коллагенними волокнами. Густина кісткової тканини 2400 кг/м^3. Пружні властивості кістки пов'язані здебільшого з білком і мінеральними компонентами (гідроксилапатитом). Реакція кожної із цих компонент на пружні властивості кістки різна. Досліди показали, що обидві компоненти кістки, кожна зокрема, слабкі, однак в комбінації дають міцність, подібну до міцності металу.

Зауважимо, що механічні властивості кістки залежать і від таких факторів, як вік людини чи тварини, індивідуальні особливості росту організму і, зрозуміло, ділянки організму.

В кістках розрізняють не тільки міцності білкової і мінеральної компонент, але і модулі пружності (Юнга). В таблиці 3.4 наведені значення модуля Юнга і міцності суцільної

ної кістки та її компонент при стиску і розтягу (дані для гомілки бика).

Пружні властивості м'яких біологічних матеріалів (наприклад, шкіри і м'язів) сильно відрізняються від пружних властивостей кісток. М'які біологічні матеріали подібні до гуми (шкіра) або до полімерів (м'язи). Тканини м'язів побудовані із довгих молекул, які можна розтягувати до тих пір, поки вони не стануть майже паралельними. Максимальний розтяг кісткового матеріалу становить ~ 1 %. М'язи (як і шкіра) можуть витримувати дво- і трикратне видовження без розриву.

Таблиця 3.4

Вид тканини	Стиск		Розтяг	
	Модуль Юнга, 10^9 Н/м^2	Міцність, 10^6 Н/м^2	Модуль Юнга, 10^9 Н/м^2	Міцність, 10^6 Н/м^2
Суцільна кістка	10,2	147	22,4	98
Мінеральна компонента	6,4	44	16,6	5
Білкова компонента	0,01	0,1	0,2	7

Приклад 3.15. *Сухожилля тварини довжиною l_0 = 16 см під дією сили F = 12,4 Н видовжується на Δl = 3,3 мм. Сухожилля можна вважати круглим в перерізі з діаметром d = 8,6 мм. Розрахувати модуль пружності цього сухожилля.*

Розв'язок. *Для цієї мети скористаємось формулою (3.32):*

$$E = \frac{F/S}{\Delta l/l_0} = \frac{F l_0}{\Delta l\, S}.$$

Тут, $S = \pi d^2/4$ *– площа поперечного перерізу сухожилля. Тоді*

$$E = \frac{4Fl_0}{\pi d^2 \Delta l} = \frac{4(12{,}4\ H)(16\cdot 10^{-2}\ м)}{(3{,}14)(8{,}6\cdot 10^{-3}\ м)^2(3{,}3\cdot 10^{-3}\ м)} = 10{,}4\cdot 10^6\,\frac{H}{м^2}.$$

Приклад 3.16. *Середня площа перерізу гомілкової кістки людини дорівнює S = 3,0 см^2. Яку силу стиску може витримати кістка не руйнуючись?*

Розв'язок. *Якщо механічна напруга, прикладена до тіла, надто велика, то тіло може зруйнуватися. В таблиці 3.5. наведені значення межі міцності (граничні напруги $\sigma_{гр}$) на стиск, розтяг і зсув для різних матеріалів.*

Таблиця 3.5

Матеріал	Розтяг, 10^6 Н/м^2	Стиск, 10^6 Н/м^2	Зсув, 10^6 Н/м^2
Чавун	170	550	170
Сталь	500	500	250
Бронза	250	250	200
Алюміній	200	200	200
Бетон	2	20	2
Цегла	–	35	–
Мармур	–	80	–
Граніт	–	170	–
Кістка (кінцівка)	130	170	–

Граничну силу, при якій кістка може зруйнуватися, виразимо із формули (3.31):

$$F_{гр} = \sigma_{гр} S \ ,$$

де $\sigma_{гр}$ *– межа міцності (гранична напруга), значення якої візьмемо з табл. 3.5. Тоді*

$$F_{гр} = (170 \cdot 10^6\ Н/м^2)(3{,}0 \cdot 10^{-4}\ м^2) = 5{,}1 \cdot 10^4\ Н \ .$$

При $F < F_{гр}$ *кістка не зруйнується.*

Приклад 3.17. *Було встановлено, що череп голови людини може бути пробитий рухомим предметом з площею перерізу декілька сантиметрів, якщо тиск* $P = 5 \cdot 10^7$ *Па. Нехай деякий залізний предмет масою* $m = 2$ *кг і діаметром плоскої грані* $d = 2{,}5$ *см падає з висоти* h *і вдаряє людину по голові, при цьому плоска поверхня предмета паралельна поверхні черепа голови. Якою є мінімальна висота* h*, падіння предмета з якої призведе до пробою черепа, якщо удар продовжується* $\Delta t = 1$ *мс?*

Розв'язок. *Сила, з якою предмет вдаряє по черепу голови людини, залежить від швидкості, якою володіє предмет в момент удару по черепу. Ця сила визначається формулою (3.6):*

$$F = m\frac{\Delta \upsilon}{\Delta t} = m\frac{\upsilon - \upsilon_0}{\Delta t}, \tag{1}$$

де $\Delta\upsilon = \upsilon - \upsilon_0$ *– зміна швидкості предмета від початку падіння до моменту удару,* Δt *– тривалість удару. Поклавши* $\upsilon_0 = 0$ *(тіло падає із стану спокою), формула (1) запишеться так:*

$$F = m\frac{\upsilon}{\Delta t}, \tag{2}$$

де υ *– швидкість предмета в момент удару.*

З другого боку

$$F = PS = P\ \frac{\pi d^2}{4}. \tag{3}$$

тут $S = p d^2 / 4$ *– площа грані предмета.*

Прирівнюючи праві частини рівнянь (2) і (3), отримуємо, що

$$\upsilon = \frac{\pi P d^2 \cdot \Delta t}{4m}. \tag{4}$$

Швидкість тіла в момент удару і висота падіння тіла зв'язані формулою (2.23):

$$\upsilon = \sqrt{2gh}\ . \tag{5}$$

Тоді із формул (4) і (5) знаходимо, що

$$h = \frac{\pi^2 P^2 d^4 \Delta t^2}{32 m^2 g} = \frac{(3{,}14)^2 (5 \cdot 10^7)^2\ Н^2/м^2 (2{,}5 \cdot 10^{-2}\ м)^4 \cdot (10^{-6}\ с)}{(32)(4)(9{,}8 м/с)} = 7{,}7\ м.$$