

Міністерство освіти і науки України
Львівський національний університет імені Івана Франка

К. С. Іванків, М. В. Щербатий

**МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ
БІОЛОГІЧНИХ
ТА ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ
ПРОЦЕСІВ**

Навчальний посібник

Львів
Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка
2005

ББК – Е.в641+ЕО*80в641+Ув611

И-19

УДК [57.08+504]:519.86

Рецензенти – д-р фіз.-мат. наук, проф. *М. М. Притула*
д-р економічних наук, проф. *Я. О. Побурко*

Відповідальний за випуск професор *Я. Г. Савула*

Іванків К. С., Щербатий М. В.

И-19

Математичне моделювання біологічних та еколого-економічних процесів. – Львів: Видавничий центр ЛНУ імені Івана Франка, 2005. – 154 с.

У посібнику зібрано математичні моделі біологічних та еколого-економічних процесів від простих до складніших, описаних задачами Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь.

Розглянуто питання використання чисельних методів і сучасних ЕОМ до розв'язування прикладних задач, математичні моделі яких описуються звичайними диференціальними рівняннями. До кожного розділу подано завдання для самостійної роботи.

Для студентів, які навчаються за напрямом: прикладна математика, математика, а також екологія, біологія, економіка, які цікавляться питаннями математичного моделювання складних систем.

ББК – Е.в641+ЕО*80в641+Ув611

© Іванків К. С., Щербатий М. В., 2005

ВСТУП

Не можна уявити собі сучасну науку без широкого застосування математичного моделювання. Суть цієї методології полягає у заміні вихідного об'єкта його “образом” – математичною моделлю, а в подальшому – у вивченні моделі з допомогою обчислювальних алгоритмів реалізованих у вигляді програм [24]. Обчислювальні експерименти з моделями об'єктів дають змогу, опираючись на сучасні чисельні методи і технічні засоби інформатики, детально і глибоко вивчати об'єкти з достатньою повнотою, яка недосяжна чисто теоретичним шляхом. І не дивно, що методологія математичного моделювання бурхливо розвивається, охоплює все нові сфери – від розробки технічних систем і керування ними до аналізу складних медико-біологічних, еколого-економічних і соціальних процесів.

Математичні моделі біологічних та еколого-економічних процесів досить складні. Ці рівняння охоплюють чимало параметрів, які в багатьох випадках можуть змінюватися у певних межах. Тому дослідження таких моделей вимагає застосування нових методів і нових підходів до них.

Найпершим об'єктом математичної біології та екології була популяція. Ще у 1202 р. Леонардо Пізанський (Фібоначчі) мав чітке уявлення щодо росту популяції. Відомий також закон росту народонаселення Мальтуса (1795). Початком сучасної математичної біології, як стверджують деякі вчені, вважають книгу Д'Арсі Томсона “Про ріст і форму” (1917). Інші дослідники вважають, що витoki математичної науки про екологію і біологію беруть початок від робіт А. Лоткі (1925) і В. Вольтерра (1931), хоча логістичне рівняння або рівняння Верхюльста – одна з найпоширеніших моделей популяцій – було відоме ще за 100 років.

Математичні моделі економіки та еколого-економічні моделі з'явилися значно пізніше.

За рівнем агрегованості еколого-економічні моделі поділяють на регіональні та глобальні. Відмінною рисою еколого-економічних моделей вважають їхню керованість – наявність вільних екзогенних змінних, значення яких дослідник може задавати на свій розсуд.

Під побудовою математичної моделі досліджуваної системи розуміють визначення залежностей (рівнянь, статистичних характеристик вхідних і вихідних величин, величин і параметрів системи), які описують процеси її функціонування. Як для детермінованої, так і для ймовірнісної систем модель визначають відповідно до певних, наперед обраних критеріїв.

Розглянуті в посібнику моделі подано у вигляді системи звичайних диференціальних рівнянь (СЗДР) першого порядку:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y, u, p, t),$$

де $y = (y_1, \dots, y_n)^T$ – вектор динамічних характеристик досліджуваного процесу; $u = (u_1, \dots, u_k)^T$ – вектор взаємодії процесу із зовнішнім середовищем; $p = (p_1, \dots, p_m)$ – внутрішні параметри моделі; $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ – нелінійні функції аргументів y, u, p, t ; t – час.

Функції $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ будують відповідно до принципів системної динаміки і мають декілька доданків. Додатні члени характеризують приріст компоненти y , від'ємні – зменшення.

Для побудови рівнянь необхідно знати швидкість притоку і відтоку кожної із компонент і їхню залежність від інших змінних, зв'язків із зовнішнім середовищем, внутрішніх параметрів і часу. Наявність у моделях вектора взаємодії із зовнішнім середовищем робить ці моделі керованими.

У найпростішому випадку систему можна розглядати без

урахування її внутрішніх станів, тобто:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y, t),$$

що відповідає опису модельованої системи в термінах тільки її входів і виходів (типу “чорної скриньки”).

Особливістю біологічних і еколого-економічних моделей є наявність у них значної кількості внутрішніх параметрів p , задання яких конкретизує модель. Тому при побудові математичних моделей актуальними є питання інформаційного забезпечення та ідентифікації параметрів.

Наведені у посібнику моделі отримані в припущенні, що характеристики модельованих процесів є динамічними, детермінованими (стохастичні чинники не враховуються) і просторово однорідними у межах розглянутої області. Такі моделі називають точковими (локальними) моделями і записують у вигляді СЗДР першого порядку або у вигляді СЗДР із запізненням.

Просторова однорідність притаманна при дослідженні біохімічних процесів у випадку, коли концентрації реагуючих речовин швидко вирівнюються за рахунок дифузії чи перемішування. При моделюванні розвитку популяцій живих організмів часто припускають, що ці організми рівномірно розташовані на території, яку розглядають. У випадку еколого-економічних процесів припускають рівномірний розподіл виробничих потужностей, природних ресурсів чи викидів шкідливих речовин на території, яку розглядають.

Саме процес математичного моделювання породжує чіткий план дій. Його можна умовно розбити на три етапи: модель – алгоритм – програма.

Посібник складається із двох розділів.

У першому розділі зібрано математичні моделі біохімічних, економічних та еколого-економічних процесів від простих до складних. Питанням побудови моделей приділено більше уваги, питанням якісного аналізу дещо менше.

У першому параграфі розглянуто кінетику ферментативних процесів, в основі якої покладено механізм реакції.

У другому параграфі описано моделі взаємодії популяцій мікроорганізмів. Розглянуто різні види внутривидової і міжвидової взаємодії.

В третьому параграфі наведено математичні моделі процесів, які відбуваються в імунній системі живих організмів.

У четвертому параграфі розглянуто моделі економічних процесів. Детально описано способ побудови однопроводових і багатопроводових динамічних моделей. Наведено моделі динаміки капіталу та моделі Леонтьєва для одноступеневої та багатоступеневої економіки.

П'ятий параграф присвячений побудові еколого-економічних моделей, які складаються з двох базових блоків, що описують економічні і екологічні процеси. Розглянуто головні принципи побудови одноступеневих і багатоступеневих еколого-економічних моделей з урахуванням зворотних зв'язків між економікою і станом навколишнього середовища. Наведено досить відому модель Леонтьєва-Форда, кінетичну модель Моно-Ієрусалимського, глобальну модель Форрестера.

Автори посібника розуміють, що не всі моделі, які застосовують у тій чи іншій галузі, знайшли відображення у цьому виданні. Зовсім не згадано моделі, де застосовується теорія графів, стохастичні моделі та просторові моделі, що описуються рівняннями у частинних похідних. Вони вимагають застосування інших математичних методів дослідження.

Матеріал першого, другого і третього параграфів першого розділу упорядковано К. С. Іванків, а матеріал четвертого та п'ятого параграфів першого розділу – М. В. Щербатим.

Розглянуті у першому розділі моделі є досить складними, дослідження яких вимагає застосування ефективних числових методів. Тому у другому розділі значну увагу приділено числовим методам розв'язування задачі Коші для СЗДР. Розглянуто однокрокові та багатокрокові методи різних порядків. Наведено таблиці коефіцієнтів різних методів, коротко описано схему їхнього отримання. Подано рекомендації щодо вибору кроку інтегрування, початкового кроку та суцільної видачі результатів.

У посібник поміщено завдання для самостійного виконання.

РОЗДІЛ 1 МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ДЕЯКИХ ЕКОЛОГО-ЕКОНОМІЧНИХ І МЕДИКО- БІОЛОГІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

1.1. Ферментативна кінетика

Практично всі хімічні реакції в організмах протікають з участю білків як каталізаторів-речовин, які або прискорюють реакцію, або необхідні для її протікання, проте не входять у кінцевий продукт реакції. Білки-каталізатори називають *ферментами*. Ферменти реагують досить вибірково з певними сполуками, які називають субстратами. Ферменти можуть брати участь у реакції як активатори або як інгібітори (речовини, що сповільнюють реакцію). *Ферментативною кінетикою* називають дослідження швидкостей ферментативних реакцій і умов, які впливають на них (концентрації ферментів, їхніх субстратів, фермент-субстратних комплексів і продуктів реакції як функцій часу).

1.1.1. Основні принципи кінетичного опису ферментативних процесів

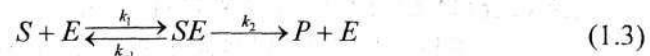
Одна з найпростіших і водночас основних ферментативних реакцій – реакція, в якій субстрат незворотно перетворюється у продукт одним ферментом.

Міхаеліс і Ментен (1913) базували свій аналіз на припущенні, що вільні ферменти і субстрат спочатку утворюють у процесі зворотної реакції фермент-субстратний комплекс, який у свою чергу незворотно розпадається, утворюючи знову вільний фермент і продукт [11].

Цю реакцію можна схематично представити у вигляді двох стадій:



або просто



де S – субстрат; E – фермент; SE – фермент-субстратний комплекс; P – продукт. Про k_1, k_{-1}, k_2 буде зазначено далі.

Систему реакцій (1.1), (1.2) іноді називають *стехіометричними рівняннями* або механізмом реакції.

Закон дієвих мас стверджує, що швидкість реакції пропорційна до активних концентрацій реагентів.

Розглянемо незворотну реакцію:



Якщо позначити концентрацію реагента квадратними дужками, то закон дієвих мас стверджує:

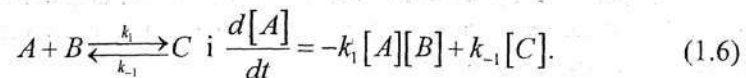
$$\frac{d[A]}{dt} \sim [A][B] = -k[A][B],$$

де t – час, а $k > 0$ називають *константою швидкості реакції* (1.4) і зазвичай ставлять над стрілкою (\xrightarrow{k}) у рівнянні реакції.

Із закону дієвих мас випливає:

$$\frac{d[B]}{dt} = -k[A][B], \quad \frac{d[C]}{dt} = k[A][B], \quad (1.5)$$

оскільки швидкість реакції може вимірюватися швидкістю зміни концентрації будь-якого з компонентів реакції. Для зворотної реакції:



Повернемося до системи (1.1), (1.2). Позначимо змінні концентрації субстрату S , ферменту E , фермент-субстратного комплексу SE і продукту P , відповідно, буквами s, e, c, p , тоді:

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 se + k_{-1} c, \quad (1.7)$$

$$\frac{de}{dt} = -k_1 se + (k_{-1} + k_2) c, \quad (1.8)$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1 se - (k_{-1} + k_2) c, \quad (1.9)$$

$$\frac{dp}{dt} = k_2 c. \quad (1.10)$$

Запишемо природні початкові умови для (1.7) – (1.10):

$$s(0) = s_0 > 0, \quad e(0) = e_0 > 0, \quad c(0) = 0, \quad p(0) = 0. \quad (1.11)$$

Додамо (1.8) до (1.9) і проінтегруємо з урахуванням умов (1.11), отримаємо закон збереження, а саме:

$$e + c = \text{const} = e_0. \quad (1.12)$$

Якщо c відоме, тоді із (1.12) можна знайти e , а інтегруючи (1.10), визначаємо:

$$p(t) = k_2 \int_0^t c(\tau) d\tau. \quad (1.13)$$

Отже, маючи (1.12) і (1.13), нам ще потрібно два рівняння із системи (1.7) – (1.10). Виберемо рівняння (1.7) і (1.9), вилучимо e , отримаємо два рівняння:

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 e_0 s + (k_1 s + k_{-1}) c, \quad (1.14)$$

$$\frac{dc}{dt} = k_1 e_0 s - (k_1 s + k_{-1} + k_2) c \quad (1.15)$$

з початковими умовами (1.11).

Для виведення кінетичного закону Міхаеліса–Ментен з рівнянь (1.14), (1.15) використовують такі міркування [11].

Оскільки фермент присутній у малих кількостях, то $\frac{de}{dt} = 0$

і, згідно з (1.12), $\frac{dc}{dt} \approx 0$. Отже, із (1.15) можна виразити c через s , підстановкою у (1.14) отримаємо:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{-k_2 e_0 s}{s + K}, \quad (1.16)$$

$$c = \frac{e_0 s}{s + K}, \quad K = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}, \quad K - \text{ стала Міхаеліса-Ментен.} \quad (1.17)$$

Це і є кінетичний закон Міхаеліса-Ментен, відомий як **гіпотеза псевдостационарного стану**. Його широко застосовують, він добре збігається з експериментальними даними. Однак трапляються випадки, коли гіпотеза не виконується і отримуємо парадоксальні результати [1,11].

Після інтегрування (1.16) і використання початкової умови $s(0) = s_0$ для $s(t)$ отримаємо вираз у неявній формі:

$$s(t) - s_0 + K \ln \frac{s(t)}{s_0} = -k_2 e_0 t. \quad (1.18)$$

Однак, за такого $s(t)$, $c(t)$ не задовольняється початкова умова $c(0) = 0$ (знижуємо порядок системи).

Перейдемо до аналізу повної системи. Уведемо безрозмірні величини у (1.14), (1.15):

$$\tau = k_1 e_0 t, \quad \lambda = \frac{k_2}{k_1 s_0}, \quad \chi = \frac{(k_{-1} + k_2)}{k_1 s_0},$$

$$x(\tau) = \frac{s(t)}{s_0}, \quad y(\tau) = \frac{c(t)}{e_0}, \quad \varepsilon = \frac{e_0}{s_0}. \quad (1.19)$$

Тоді рівняння (1.15), (1.16) матимуть вигляд:

$$\frac{dx}{d\tau} = -x + (x + \chi - \lambda)y, \quad (1.20)$$

$$\varepsilon \frac{dy}{d\tau} = x - (x + \chi)y, \quad (1.21)$$

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0. \quad (1.22)$$

У більшості біологічних ситуацій відношення початкової концентрації ферменту і субстрату дуже мале, отож $\varepsilon = \frac{e_0}{s_0} \ll 1$.

Поклавши $\varepsilon = 0$, отримаємо:

$$y = \frac{x}{x + \chi}, \quad \frac{dx}{d\tau} = -\frac{\lambda x}{x + \chi} \Rightarrow x + \chi \ln x = 1 - \lambda \tau. \quad (1.23)$$

При цьому виконується перша з початкових умов (1.22). Отже, на цій стадії вважатимемо, що для справедливості гіпотези псевдостационарного стану значення $\frac{e_0}{s_0}$ повинно бути малим.

Система (1.20), (1.21) належить до загального класу сингулярно збурених систем, яким присвячено роботи А. Н. Тихонова [26], А. Б. Васильєвої [3]. У них чітко зазначено, що розв'язок системи (1.20), (1.21) прямує за великих значень τ до розв'язку (1.23).

Оскільки $\varepsilon \ll 1$, а x та y мають порядок $O(1)$, $x(\tau, \varepsilon)$ і $y(\tau, \varepsilon)$ в (1.20) і (1.21) можна розвинути у ряди Тейлора за степенями малого параметра ε .

Розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned} x(\tau, \varepsilon) &= x_0(\tau) + \varepsilon x_1(\tau) + \varepsilon^2 x_2(\tau) + O(\varepsilon^3), \\ y(\tau, \varepsilon) &= y_0(\tau) + \varepsilon y_1(\tau) + \varepsilon^2 y_2(\tau) + O(\varepsilon^3), \\ x_0(0) + \varepsilon x_1(0) + O(\varepsilon^2) &= 1, \\ y_0(0) + \varepsilon y_1(0) + O(\varepsilon^2) &= 0. \end{aligned} \quad (1.24)$$

Підстановка (1.24) в (1.20), (1.22) і прирівнювання членів при однакових степенях ε дає таку рекурентну послідовність рівнянь:

$$\frac{dx_0}{d\tau} = -x_0 + (x_0 + \chi - \lambda)y_0, \quad x_0 - (x_0 + \chi)y_0 = 0,$$

$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_1(y_0 - 1) + (x_0 + \chi - \lambda)y_1,$$

$$\frac{dy_1}{d\tau} = x_1(1 - y_0) - (x_0 + \chi)y_1 \quad \text{і т. д.}$$

Провівши аналіз рівнянь (1.20), (1.21) з початковими умовами (1.22), можна зробити висновок, що розв'язки задачі розпадаються на внутрішній і зовнішній [26,3] і мають вигляд

для x :

$$x(\tau, \varepsilon) = x_0(\tau) + O(\varepsilon), \quad x_0(\tau) + \chi \ln x_0(\tau) = 1 - \lambda\tau, \quad (1.25)$$

для y :

$$y(\tau, \varepsilon) = \begin{cases} y_0(\tau) + O(\varepsilon) = \frac{1}{1+\chi} \left\{ 1 - e^{-\frac{(1+\chi)\tau}{\varepsilon}} \right\} + O(\varepsilon), & 0 \leq \tau \ll 1 \\ y_0(\tau) + O(\varepsilon) = \frac{x_0(\tau)}{x_0(\tau) + \chi} + O(\varepsilon), & \varepsilon \ll \tau \end{cases}, \quad (1.26)$$

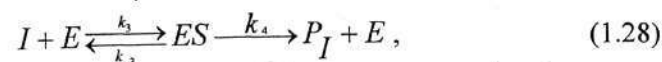
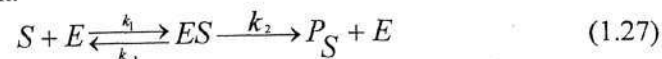
де $x_0(\tau)$ та $y_0(\tau)$ – лінійні наближення функцій $x(\tau, \varepsilon)$ та $y(\tau, \varepsilon)$.

На площині τ, y це дуже вузька по τ смуга, де концентрація фермент-субстратного комплексу змінюється дуже швидко.

Здебільшого у практичних ситуаціях унаслідок мализни ε ($O(10^{-3})$ і менше) наближення $O(1)$ достатні для біологічних цілей.

1.1.2. Реакція фермент-субстрат-інгібітор

Система Міхаеліса-Ментен (1.1), (1.2) є найпростішою реальною фермент-субстратною реакцією. Розглянемо реакцію, яка є першим ускладненням системи (1.1), (1.2) і часто трапляється на практиці. В реакції бере участь фермент E з одним зв'язуючим центром (чимало ферментів має декілька таких центрів), за який конкурують два субстрати; фермент утворює один з двох комплексів, кожен з яких розпадається, даючи один з продуктів і вихідний фермент. Коли один субстрат зв'язується з ферментом, це означає, що він *інгібує* (тобто пригнічує) реакцію другого субстрату з цим ферментом. Схематично ці реакції можна представити так:



де S та I – два субстрати, які конкурують за один і той же фермент, а P_S та P_I – продукти двох фермент-субстратних реакцій.

Коли два субстрати конкурують за один і той же центр ферменту, то систему реакцій типу (1.27), (1.28) називають **повністю конкурентною**. У таких реакціях один із субстратів обирають для вимірювання швидкості його реакції в експерименті. При цьому тільки його називають субстратом, а другий – **інгібітором**. Однак цей вибір може мати вирішальне значення при інтерпретації експериментальних результатів [11,15].

Введемо такі позначення:

$$s(t) = [S], i(t) = [I], e(t) = [E], c_s(t) = [ES], c_i(t) = [EI]. \quad (1.29)$$

Кінетичні рівняння для цих концентрацій у реакціях (1.27) та (1.28) мають такий вигляд:

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 se + k_{-1} c_s, \quad (1.30)$$

$$\frac{dc_s}{dt} = k_1 se - (k_{-1} + k_2) c_s, \quad (1.31)$$

$$\frac{di}{dt} = -k_3 ie + k_{-3} c_i, \quad (1.32)$$

$$\frac{dc_i}{dt} = k_3 ie - (k_{-3} + k_4) c_i, \quad (1.33)$$

$$\frac{de}{dt} = -k_1 se - k_3 ie + (k_{-1} + k_2) c_s + (k_{-3} + k_4) c_i. \quad (1.34)$$

Відповідні початкові умови для рівнянь (1.30)–(1.34) полягають у тому, що початкові концентрації ферментних комплексів дорівнюють нулеві, а концентрації s , i та e задано:

$$s(0) = s_0, i(0) = i_0, e(0) = e_0, c_s(0) = c_i(0) = 0 \quad (1.35)$$

Рівняння збереження для ферменту e отримуємо шляхом додавання (1.31), (1.33) та (1.34), враховуючи (1.35):

$$\frac{d}{dt}(c_s + c_i + e) = 0 \Rightarrow c_s + c_i + e = e_0. \quad (1.36)$$

Як уже зазначено, після того, як $c_s(t)$ та $c_i(t)$ знайдено, концентрації продуктів визначають з їхніх кінетичних рівнянь:

$$p_s(t) = k_2 \int_0^t c_s(t') dt', \quad p_i(t) = k_4 \int_0^t c_i(t') dt'.$$

Введемо безрозмірні змінні за допомогою позначень:

$$x(\tau) = s(t)/s_0, \quad z(\tau) = i(t)/i_0, \quad y_s(\tau) = c_s(t)/e_0,$$

$$y_i(\tau) = c_i(t)/e_0, \quad \tau = k_1 e_0 t, \quad \varepsilon = e_0/s_0,$$

$$\beta = i_0/s_0, \quad \gamma = k_3/k_1, \quad K_s = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1 s_0}, \quad (1.37)$$

$$K_i = \frac{k_{-3} + k_4}{k_3 i_0}, \quad L_s = \frac{k_2}{k_1 s_0}, \quad L_i = \frac{k_4}{k_3 i_0}$$

і чотири рівняння для s, i, c_s та c_i набудуть безрозмірного вигляду:

$$\frac{dx}{d\tau} = -x + (x + K_s - L_s) y_s + x y_i, \quad (1.38)$$

$$\varepsilon \frac{dy_s}{d\tau} = -x + (x + K_s) y_s - x y_i, \quad (1.39)$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \gamma (-z + z y_s + (z + K_i - L_i) y_i), \quad (1.40)$$

$$\varepsilon \frac{dy_i}{d\tau} = \beta \gamma (z - z y_s - (z + K_i) y_i). \quad (1.41)$$

Початкові умови для x, y_i, y_s та z отримуємо із (1.35) за допомогою (1.37)

$$x(0) = z(0) = 1, \quad y_s(0) = y_i(0) = 0. \quad (1.42)$$

Оскільки $0 < \varepsilon \ll 1$, задача (1.38)–(1.42) у математичному плані аналогічна до попередньої.

1.2. Математичне моделювання біологічних систем

Популяція – це довільна група організмів одного виду, що займає певний простір і функціонує як частина біологічної спільноти. Простір, у якому перебувають популяції, називають ареалом.

Біологічні спільноти формуються із декількох популяцій біологічних видів, які живуть у спільному середовищі. Зазвичай індивідууми цих спільнот змагаються за одні і ті ж ресурси, або одні види живуть за рахунок інших, якими вони харчуються. Вони можуть взаємно надавати один одному допомогу. Таке явище називають боротьбою за існування. Кількісний характер цього явища проявляється у заданому середовищі у вигляді зміни чисельності особин, які формують різні популяції. За одних умов ці зміни складаються із флуктуацій навколо середніх значень, за інших умов – зводяться до зникнення або прогресивного збільшення деяких видів.

Розміщення особин у популяції може бути випадковим, рівномірним або груповим. Найпростіше вивчати популяції з рівномірним розміщенням особин у просторі. Групове розміщення з певною територією прагне здебільшого поширитися на всю територію (поширення екологічних хвиль). Для математичного опису такої популяції, крім змінної t (часу), треба враховувати ще залежність від координати простору.

Класифікацію типів взаємодії популяцій можна представити за допомогою таблиці 1.

Характер впливу одного виду на інший зображено одним із знаків:

“+” (стимулюючий); “–” (пригнічуючий); “0” (нейтральний).

Таблиця 1

Назва взаємодії	Види і дія		Характер взаємодії
	I	II	
1. Нейтралізм	0	0	Жодна популяція не впливає на іншу
2. Конкуренція	-	-	Пряме пригнічення обох видів; непряме пригнічення при дефіциті ресурсу
3. Аменсалізм	-	0	Вид II пригнічує вид I, водночас залишаючись без зміни
4. Паразитизм	-	+	Паразит менший за хазяїна
5. Хижацтво	-	+	Хижак крупніший за жертву
6. Коменсалізм	+	0	Популяція I має вигоду від популяції II
7. Протоко-операція	+	+	Вигода обом, але можуть існувати окремо
8. Мутуалізм (симбіоз)	+	+	Обов'язкова вигода для обох

1.2.1. Модель росту популяції

Розглянемо спочатку найпростішу модель росту деякої популяції живих організмів, яка живе ізольовано в незмінному середовищі, або співіснує з іншими видами, не взаємодіючи з ними. Ріст популяції характеризується двома параметрами: коефіцієнтом народжуваності $b(t)$ і коефіцієнтом смертності $d(t)$. Для населення ці коефіцієнти характеризують кількість народжувань і кількість смертей на 1000 мешканців. Тоді рівняння зростання чисельності популяції можна подати у вигляді:

$$\frac{dy(t)}{dt} = \lambda(t)y(t), \quad t \in [t_0, T], \quad (2.1)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad (2.2)$$

де $\lambda(t) = b(t) - d(t)$ – коефіцієнт приросту популяції, $y(t)$ – чисельність популяції у момент часу t .

В основу моделі (2.1), (2.2) покладено просте твердження: швидкість зміни чисельності популяції з часом пропорційна її біжучій чисельності $y(t)$, помноженій на суму коефіцієнтів народжуваності $b(t)$ і смертності $d(t)$.

Інтегруючи рівняння (2.1), отримаємо:

$$y(t) = y_0 \exp \left(\int_{t_0}^t [b(t) - d(t)] dt \right),$$

де $y_0 = y(t=t_0)$ – початкова чисельність.

У випадку $\lambda = \text{const}$ розв'язок задачі (2.1) – (2.2) має вигляд:

$$y(t) = y_0 e^{\lambda(t-t_0)}. \quad (2.3)$$

Розв'язок (2.3) характеризує відомий експоненціальний закон розвитку виду, вперше сформульований Томасом Мальтусом у 1798 році.

Насправді коефіцієнт приросту λ змінюється з часом. На ріст популяції починають діяти лімітуючі чинники зовнішнього середовища, які спричиняють сповільнення росту, його зменшення, або певну рівновагу між смертністю і народжуваністю.

При $\lambda(t) = 0$ чисельність популяції залишається постійною, тобто в цьому випадку $y(t) = y_0$. Однак ця рівновага між народжуваністю і смертністю є нестійкою, навіть незначне порушення рівності $b(t) = d(t)$ дає зі зростанням проміжку часу все більше відхилення $y(t)$ від значення y_0 . У випадку $\lambda > 0$ (народжуваність перевищує смертність) чисельність популяції швидко зростає в часі і прямує до безмежності при $t \rightarrow \infty$, а у випадку $\lambda < 0$ – чисельність популяції спадає і прямує до нуля при $t \rightarrow \infty$.

Практично легко знайти число $\lambda(t)$, що характеризує розвиток виду. За час T кількість індивідумів збільшиться у $\exp(\lambda T)$ раз. Нехай T – час, протягом якого чисельність подвоїлась, тоді:

$$\exp(\lambda T) = 2, \lambda = \frac{0,694}{T}.$$

У випадку, якщо T – час, протягом якого чисельність популяції зменшилась у два рази, тоді:

$$\exp(-\lambda T) = 2, \lambda = -\frac{0,694}{T}.$$

Вважатимемо, що коефіцієнт смертності d пропорційний чисельності популяції ($d(t) = ay(t)$), тоді рівняння росту чисельності популяції набуде вигляду:

$$\frac{dy(t)}{dt} = (b - ay(t))y(t). \quad (2.4)$$

Рівняння (2.4) називають логістичним рівнянням, яке в багатьох випадках досить добре описує ріст популяції. При $t \rightarrow \infty$ чисельність популяції $y(t)$ прямує до межі b/a , яку називають “ємністю середовища” [4].

1.2.2. Взаємодія популяцій двох видів, які змагаються за спільну їжу

Найпростіша модель біоценозу – існування двох видів в ізольованому ареалі. Ці види можуть взаємодіяти (взаємозалежати) за типом: 1) конкуренція за спільні ресурси, запаси яких обмежені; 2) один вид є хижаким щодо другого та ін.

Вважатимемо, що за наявності ресурсів, достатніх для цілкового задоволення обох видів, існують постійні додатні коефіцієнти природного приросту $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

У природних умовах, коли ці види живуть на обмеженій території, ресурси будуть зменшуватись при зростанні y_1 та y_2 , які позначають чисельності особин кожного виду. Це зумовить зменшення значень коефіцієнтів природного приросту. Якщо кількість їжі, що споживається за одиницю часу, подати функцією $F(y_1, y_2)$, яка перетворюється у нуль при $y_1 = 0, y_2 = 0$ і монотонно

прямує до безмежності разом із кожною змінною y_1, y_2 , то природно взяти за коефіцієнти приросту вирази [4]:

$$\varepsilon_1 - \gamma_1 F(y_1, y_2), \varepsilon_2 - \gamma_2 F(y_1, y_2),$$

де γ_1, γ_2 – додатні постійні величини, які відповідають потребі у їжі для кожного з двох видів.

Звідси отримуємо систему диференціальних рівнянь, що описують розвиток видів:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{dt} &= [\varepsilon_1 - \gamma_1 F(y_1, y_2)] y_1, \\ \frac{dy_2}{dt} &= [\varepsilon_2 - \gamma_2 F(y_1, y_2)] y_2. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Отже, маємо математичну задачу дослідження розв’язків $y_1(t), y_2(t)$ цієї системи при початкових даних:

$$y_1(t=t_0) = y_1^0, y_2(t=t_0) = y_2^0. \quad (2.6)$$

Зауважимо, що система рівнянь (2.5) з початковими умовами (2.6) – це задача Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь, її можна розв’язати одним із відомих чисельних методів (наприклад, методом Рунге-Кутта).

Запишемо (2.5) у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{d \ln y_1}{dt} &= [\varepsilon_1 - \gamma_1 F(y_1, y_2)], \\ \frac{d \ln y_2}{dt} &= [\varepsilon_2 - \gamma_2 F(y_1, y_2)], \end{aligned}$$

отримуємо

$$\gamma_2 \frac{d \ln y_1}{dt} - \gamma_1 \frac{d \ln y_2}{dt} = \varepsilon_1 \gamma_2 - \gamma_1 \varepsilon_2$$

і тоді унаслідок інтегрування з урахуванням умов (2.6) отримаємо співвідношення:

$$\frac{y_1^{\gamma_2}}{y_2^{\gamma_1}} = \frac{(y_1^0)^{\gamma_2}}{(y_2^0)^{\gamma_1}} \exp[(\varepsilon_1 \gamma_2 - \gamma_1 \varepsilon_2)(t - t_0)]. \quad (2.7)$$

Знехтуємо практично малоімовірним випадком, коли $\varepsilon_1\gamma_2 - \gamma_1\varepsilon_2 = 0$ і припустимо (за необхідності міняємо види місцями), що $\varepsilon_1\gamma_2 - \gamma_1\varepsilon_2 > 0$ або $\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} > \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}$; згідно з (2.7) при $t \rightarrow \infty$ одержуємо:

$$\frac{y_1^{\gamma_2}}{y_2^{\gamma_1}} \rightarrow +\infty \quad (2.8)$$

Нас цікавитиме випадок, коли y_1, y_2 обмежені величини [4,2]. Співвідношення (2.8) можливе лише за умови, коли y_2 прямує до нуля. Отже, другий вид, у якого ε/γ має менше значення, зі зростанням проміжку часу зникає, а перший вид продовжує існувати.

Якщо знехтувати другим видом, то через достатньо великий проміжок часу чисельність першого виду задовольняє закону:

$$\frac{dy_1}{dt} = [\varepsilon_1 - \gamma_1 F(y_1, 0)] y_1,$$

починаючи з моменту часу t_1 , коли y_1 приймає значення y_1^1 .

Зазначимо, що для першого виду число індивідуумів прямує до скінченної ненульової межі при $t \rightarrow \infty$.

Висновок. Якщо число індивідуумів одного виду має скінченну межу, відмінну від нуля, другий вид зникає. Зникає той вид, у якого ε/γ менше. Цим підтверджується інтуїтивний висновок про те, що зникає вид, значно чутливіший до нестачі їжі.

1.2.3. Два види, один із яких поїдає інший (тип хижак – жертва)

Якби у середовищі, де перебувають ці види, знаходився тільки один із них, а саме жертва, тоді у нього був би деякий природний коефіцієнт приросту λ_1 , який ми вважатимемо постійним і додатним. Інший вид (хижак), який харчується тільки (або здебільшого) жертвою, у припущенні, що він існує ізольовано,

має природний коефіцієнт приросту λ_2 , який вважатимемо постійним і від'ємним. Якщо такі два види співіснують в обмеженому середовищі, перший розвиватиметься тим повільніше, чим більше існує індивідуумів другого виду, а другий – тим швидше, чим багаточисельніший перший вид. Позначимо через y_1 кількість особин жертви, y_2 – хижака.

Коефіцієнти приросту, відповідно, становитимуть:

$$\lambda_1 - \mu_1 y_2, \quad -\lambda_2 + \mu_2 y_1 \quad (2.8)$$

($\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ – додатні числа).

Існуючи окремо (коефіцієнти росту λ_1, λ_2), зміну їхньої чисельності можна описати рівнянням (2.1). Розглянемо загальніший випадок. У випадку співіснування цих видів зустрічі між індивідуумами різних видів впливають на чисельність цих видів (кількість цих зустрічей за одиницю часу дорівнює $\alpha y_1 y_2$, де $\alpha = \text{const}$).

Чисельності популяцій y_1, y_2 визначаються рівняннями:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} &= \lambda_1 y_1(t) - \mu_1 y_1(t) y_2(t), \quad t \in (t_0, T], \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= -\lambda_2 y_2(t) + \mu_2 y_1(t) y_2(t). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Рівняння (2.9) доповнюються початковими умовами:

$$y_1(t_0) = y_1^0, \quad y_2(t_0) = y_2^0. \quad (2.10)$$

Це класичні рівняння Вольтерра [4].

Проведемо деякі дослідження моделі (2.9) – (2.10).

Умова динамічної рівноваги (нетривіальний стаціонарний розв'язок) такої системи реалізується при

$$y_{1c} = \lambda_2 / \mu_2, \quad y_{2c} = \lambda_1 / \mu_1. \quad (2.11)$$

Уведемо нові змінні:

$$z_1 = \frac{y_1}{y_{1c}}, \quad z_2 = \frac{y_2}{y_{2c}}.$$

У цих змінних рівняння (2.9) мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt} &= \lambda_1(1-z_2)z_1, \\ \frac{dz_2}{dt} &= -\lambda_2(1-z_1)z_2\end{aligned}\quad (2.12)$$

Виключимо параметр часу із системи рівнянь (2.12).

Поділимо друге рівняння (2.12) на перше рівняння (2.12) і отримаємо:

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{-\lambda_2 z_2 + \lambda_2 z_1 z_2}{\lambda_1 z_1 - \lambda_1 z_1 z_2}.$$

Із останнього співвідношення після нескладних перетворень отримаємо рівняння:

$$\frac{\lambda_1}{z_2} \frac{dz_2}{dt} - \lambda_1 \frac{dz_2}{dt} + \frac{\lambda_2}{z_1} \frac{dz_2}{dt} - \lambda_2 \frac{dz_1}{dt} = 0.$$

Інтегруючи його за змінною t , приходимо до рівняння:

$$\lambda_1 \ln z_2 - \lambda_1 z_2 + \lambda_2 \ln z_1 - \lambda_2 z_1 = C = \text{const}$$

або

$$\left(\frac{z_1}{e^{z_1}}\right)^{\lambda_2} \left(\frac{z_2}{e^{z_2}}\right)^{\lambda_1} = e^C, \quad (2.13)$$

де C – постійна інтегрування, яка залежить від початкової чисельності популяції.

Якщо проінтегрувати систему рівнянь (2.12), то побачимо, що часова динаміка популяції кожного виду є періодичною функцією часу і носить коливний характер [2, 4]. У цьому випадку коливання чисельності жертв випереджують за фазою коливання чисельності хижаків. Для різних початкових чисельностей кожного з видів множина фазових траєкторій (взаємних залежностей y_1 та

y_2) поблизу положення рівноваги з координатами $\left(\frac{\lambda_2}{\mu_2}, \frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)$ є

концентричними замкнутими кривими, а точка рівноваги є їхнім центром. Іноді ці замкнуті криві називають *еліпсами Вольтерра*.

При зовнішніх впливах (наприклад, збільшенні на M чисельності хижаків або зменшенні на N чисельності жертв) система переходить у новий режим коливань з іншою амплітудою. **Закон періодичного циклу.** Флуктуації двох видів періодичні.

Інтегруючи на проміжку $[0, T]$ (T – період коливань) рівняння (2.12), одержимо:

$$0 = \ln \frac{z_1(T)}{z_1(0)} = \lambda_1 T - \lambda_1 \int_0^T z_2(t) dt,$$

$$0 = \ln \frac{z_2(T)}{z_2(0)} = \lambda_2 T - \lambda_2 \int_0^T z_1(t) dt.$$

Для початкових змінних матимемо:

$$y_{2s} = \frac{1}{T} \int_0^T y_2(t) dt - \text{середня чисельність популяції хижака};$$

$$y_{1s} = \frac{1}{T} \int_0^T y_1(t) dt - \text{середня чисельність популяції жертви}.$$

Закон збереження середніх. Середнє (протягом періоду T) число індивідів двох видів не залежить від початкових умов і дорівнює числам, що відповідають стаціонарному стану для заданих значень коефіцієнтів $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$.

1.2.4. Два види при різних типах взаємодії

Розглянемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(t)}{dt} &= (\lambda_1 + \mu_1 y_2(t)) y_1(t), \quad t \in (t_0, T], \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= (\lambda_2 + \mu_2 y_1(t)) y_2(t),\end{aligned}\quad (2.14)$$

де λ_i, μ_i ($i=1, 2$) – деякі сталі величини.

Загальний інтеграл системи рівнянь (2.14) з урахуванням початкових умов:

$$y_1^{\lambda_2} e^{\mu_2 y_1} = C y_2^{\lambda_1} e^{\mu_1 y_2}, C = \frac{(y_1^0)^{\lambda_1}}{(y_2^0)^{\lambda_2}} \frac{e^{\mu_2 y_1^0}}{e^{\mu_1 y_2^0}}. \quad (2.15)$$

Можливі, за В. Вольєрра [4], такі 8 випадків для сталих $\lambda_i, \mu_i (i=1,2)$:

$$\lambda_1 > 0, \begin{cases} \mu_1 > 0, \lambda_2 > 0, \mu_2 < 0 & 1 \\ \lambda_2 < 0, \mu_2 < 0 & 2 \\ \mu_1 > 0, \lambda_2 > 0, \mu_2 > 0 & 3 \\ \lambda_2 < 0, \mu_2 > 0 & 4 \\ \mu_1 < 0, \lambda_2 > 0, \mu_2 > 0 & 5 \\ \lambda_2 < 0, \mu_2 < 0 & 6 \\ \mu_1 < 0, \lambda_2 > 0, \mu_2 < 0 & 7 \\ \lambda_2 < 0, \mu_2 > 0 & 8 \end{cases}$$

Зауважимо, що не всі ці випадки прийнятні для екології.

Тип взаємодії між популяціями, що відповідають сталим $\lambda_i, \mu_i (i=1,2)$, подано у табл. 1.

1.2.5. Узагальнені моделі системи хижак-жертва

Перелічені вище моделі системи хижак-жертва відомі як рівняння Лоткі-Вольєрра. Недоліком моделі Лоткі-Вольєрра є те, що ця модель не враховує впливу зовнішнього середовища (обмеженості ресурсів) на ріст популяцій. Тому здійснено чимало спроб модифікувати модель.

У 30-х роках А. М. Колмогоровим запропоновано узагальнену модель. Нехай, як і раніше, y_1 – кількісна характеристика жертви, y_2 – хижака.

Математична модель має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dy_1(t)}{dt} &= \alpha_1(y_1)y_1 - V(y_1)y_2, \quad t \in (t_0, T], \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= \alpha_2(y_1)y_2. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Як бачимо із (2.16), функції $\alpha_1(y_1), V(y_1)$ залежать від y_1 , причому на ці функції накладено деякі обмеження:

1. Коефіцієнт природного приросту жертви $\alpha_1(y_1)$ монотонно спадає при зростанні y_1 , що вказує на наявність внутривидової конкуренції:

$$\frac{d\alpha_1(y_1)}{dy_1} < 0, \quad \alpha_1(0) > 0 > \alpha_1(\infty).$$

2. Коефіцієнт природного приросту чисельності хижака $\alpha_2(y_1)$ є зростаючою функцією і такою, що змінює знак із мінуса на плюс у т. $y_1 = y_1^*$.

3. Трофічна функція $V(y_1)$ (іноді її називають функціональним відгуком) задовольняє умови:

$$V(0) = 0, \quad V(y_1) > 0 \text{ при } y_1 > 0, \quad V(\infty) < 0.$$

Експерименти засвідчують, що трофічна функція належить до одного з трьох типів: а) монотонно зростає з повільно спадною похідною (характерна для безхребетних і хижих риб); б) лінійна з різким порогом насичення (характерна для хижих фільтратив); в) S-подібна крива (такою функцією описують дію хижаків із цілеспрямованим пошуком).

За малих значень y_1 трофічну функцію $V(y_1)$ можна вважати лінійною.

Систему рівнянь типу (2.16) при конкретних значеннях функцій α_1, α_2 і V розглянуто багатьма авторами. Деякі з цих функцій наведено в таблиці 2. Тут $h > 0$ – параметр моделі.

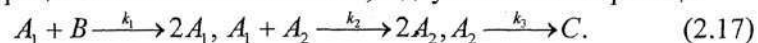
Таблиця 2

$\alpha_1(y_1)$	$V(y_1)$	$\alpha_2(y_1, y_2)$	Автори
1	2	3	4
ε_1	$\alpha_{12}y_1$	$-\varepsilon_2 - \alpha_{12}y_1$	Вольтерра, Лоткі
$\varepsilon_1 - \alpha_1 y_1$	$\alpha_{12}y_1$	$\varepsilon_2(1 - e^{-y_1})$	Гаузе
ε_1	$\alpha_{12}y_1$	$\varepsilon_2 - \alpha_{12} \frac{y_2}{y_1}$	Післоу
ε_1	$\frac{\alpha y_1}{1 + \alpha h y_1}$	$\varepsilon_2 - \alpha_{21} \frac{y_2}{y_1}$	Холінг
ε_1	$b(1 - e^{-y_1})$	$\varepsilon_2 - \alpha_{21} \frac{y_2}{y_1}$	Івлєв
ε_1	$\frac{\alpha(y_1)y_1}{1 + \alpha(y_1)h y_1}$	$\varepsilon_2 - \alpha_{21} \frac{y_2}{y_1}$	Рояма
$1 - \frac{y_1}{K}$	$\frac{\alpha y_1}{1 + \alpha h y_1}$	$1 - \frac{y_1 y_2}{K}$	Шимазу та інші
$\varepsilon_1 - \alpha_1 y_1$	$\alpha_{12}(1 - e^{-y_1})$	$\varepsilon_1(1 - e^{-y_1})$	Мей

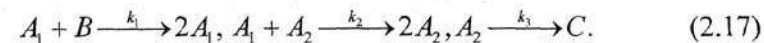
1.2.6. Побудова математичних моделей динаміки популяцій на основі закону дієвих мас

Розглянемо теоретичні методи аналізу і вивчення складних взаємодій популяцій. Викладені згодом методи можна застосувати до вивчення складних систем біологічних реакцій. Цей методичний підхід має хімічну орієнтацію.

Нехай в ізотермічній гомогенній системі постійного об'єму, до якої додають компонент B у такій кількості, щоб його концентрація залишалась постійною, відбуваються такі реакції:



Припустимо, що кожна з цих реакцій є елементарною, тобто кінетика реакцій безпосередньо зв'язана з його стехіометрією.



Припустимо, що кожна з цих реакцій є елементарною, тобто кінетика реакцій безпосередньо зв'язана з його стехіометрією.

На основі закону дієвих мас (див. п. 1.1) для системи реакцій (2.17) рівняння матеріальних балансів для A_1, A_2 можна записати:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= k_1 a_1 b - k_2 a_1 a_2, \\ \frac{da_2}{dt} &= k_2 a_1 a_2 - k_3 a_2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Тут a_1, a_2, b , відповідно, концентрації компонент A_1, A_2, B .

Врахуємо, що за умовою концентрація компонента B є постійною і позначимо $k_1^* = k_1 b$.

Тепер рівняння (2.15) набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{dt} &= k_1^* a_1 - k_2 a_1 a_2, \\ \frac{da_2}{dt} &= k_2 a_1 a_2 - k_3 a_2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Порівнюючи отримані рівняння (2.19) з рівняннями (2.9), бачимо відповідність по формі моделі Лоткі-Вольтерра.

Сформулюємо загальні теореми, які застосовують до вивчення кінетики систем, підпорядкованих закону дієвих мас.

Наведемо у таблиці 3 деякі гіпотетичні механізми, два із яких є цікавими для біологічних досліджень.

Нульові символи мають такий зміст:

$0 \rightarrow A_j$ означає, що компонент A_j додають до системи з постійною швидкістю;

$A_k \rightarrow 0$ означає, що A_k забирають із системи зі швидкістю, пропорційною його концентрації.

Отже, символ 0 використовують для позначення взаємозв'язку системи з навколишнім середовищем, що дає змогу застосувати моделі в формі закону дієвих мас до відкритих систем.

Неважко побачити, що гіпотетичний механізм (3М) еквівалентний моделі Лоткі-Вольтерра.

Демо означення трьом цілим параметрам у механізмі реакцій: n_c – число комплексів у механізмі; n_r – число типів зв'язків у механізмі; n_s – розмірність механізму. Комплексом називають елемент, що стоїть на початку або наприкінці стрілки відповідної реакції. Наприклад, механізм моделі Лоткі-Вольтерра (3М) має $n_c = 6(A_1, 2A_1, A_1 + A_2, 2A_2, A_2, 0)$.

Для визначення типів зв'язків не треба звертати увагу на напрям стрілок; необхідно розглядати тільки комплекси, зв'язані стрілкою відповідної реакції. Тип зв'язку – це ряд комплексів, зв'язаних між собою (безпосередньо чи опосередковано) так, що жоден комплекс у ряду не зв'язаний з іншим комплексом, який не належить до цього ряду.

Для механізму (3М) маємо три типи зв'язку ($n_r = 3$), а саме: $\{A_1, 2A_2\}$, $\{A_1 + A_2, 2A_2\}$, $\{A_2, 0\}$.

Для кожної реакції (кожної стрілки) заданого механізму визначимо вектор реакції. Якщо у механізмі беруть участь N різних хімічних компонентів A_1, A_2, \dots, A_N , тоді кожний вектор реакції матиме N елементів (для механізму (3М) $N=2$). Ці елементи визначаються так: i -ий елемент дорівнює нулеві, якщо A_i не відсутній у реакції. Якщо у реакції присутній A_i , тоді i -ий елемент дорівнює стехіометричному коефіцієнту при A_i . Цей коефіцієнт вважають від'ємним, якщо A_i є на початку стрілки, і додатним, якщо стрілка вказує на A_i .

Наприклад, механізм (3М) має 3 стрілки і 2 компоненти.

Наступний крок полягає у визначенні на базі знайдених векторів реакції кількості лінійно незалежних. Це число називають розмірністю механізму n_s . Для механізму (3М) $n_s = 3$.

Сформулюємо **теорему нульового обмеження** [2].

Припустимо, що для окремого механізму

$$n_c - n_r - n_s = 0. \quad (2.20)$$

2. Якщо виконується умова (2.20), механізм слабо зворотний і кінетика процесу відповідає закону дієвих мас, то при всіх стехіометрично еквівалентних початкових станах (складах) існує один глобальний асимптотично стійкий стаціонарний стан. Цей висновок справедливий незалежно від значень констант швидкостей.

Таблиця 3

$2A_1 \longrightarrow A_2 \rightleftharpoons A_3 + A_4$	(1М)
$A_3 + A_4 \xleftarrow{2A_1} A_2$	(2М)
$A_1 + \begin{matrix} A_1 \longrightarrow 2A_1 \\ A_2 \longrightarrow 2A_2 \\ A_2 \longrightarrow 0 \end{matrix}$	(3М)
$A_1 \longrightarrow A_2$ $A_1 + A_3 \longrightarrow A_4$ $A_2 + A_5 \xleftarrow{\quad} \quad$	(4М)
$A_1 \rightleftharpoons A_2$ $A_1 + A_3 \longrightarrow A_4$ $A_2 + A_5 \xleftarrow{\quad} \quad$	(5М)
$0 \longrightarrow A_1$ $A_1 + A_2 \longrightarrow A_3 + A_4$ $A_3 + A_2 \rightleftharpoons A_4 + A_5$ $A_4 + A_6 \longrightarrow A_7 \longrightarrow A_8$	(6М)

Під стехіометрично еквівалентними даними розуміють такі дані, які можна перетворити один у другий шляхом зміни напрямку однієї чи декількох стрілок у механізмі ($A_1 \rightleftharpoons 2A_2$).

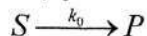
Тепер розглянемо задачу моделювання змішаної популяції з коливаннями чисельності видів шляхом постулювання механізму "реакції" між популяціями, який налічує декілька елементарних стадій з кінетикою, що відповідає закону дієвих мас. Згідно з теоремою нульового обмеження, для цього механізм повинен або порушувати умову (2.20), або не бути слабозворотним.

Така ситуація притаманна механізмам (ЗМ), що зв'язаний зі стійким коливанням (модель Лоткі-Вольтерра).

Перша частина теореми має, окрім того, важливий екологічний наслідок. Згідно з теоремою, якщо умова (2.20) задовольняється, а умова слабкої зворотності не виконується, то у стаціонарному стані концентрації деяких компонентів дорівнюватимуть нулеві. У рамках динаміки популяцій ця теорія дає змогу відкрити механізми, що забезпечують вимирання щонайменше одного виду.

Часткові приклади

Приклад 1. Нехай речовина S перетворюється у речовину P зі швидкістю, яка не залежить від наявної концентрації цих речовин. Такого типу реакція (нульового порядку):



можлива за умови, коли кількість субстрату настільки велика, що не лімітує протікання процесу з максимальною швидкістю, яка визначається константою k_0 . Позначивши концентрації відповідних речовин як s і p , для моделі динаміки процесу отримаємо рівняння:

$$\frac{ds}{dt} = -k_0, \quad \frac{dp}{dt} = k_0.$$

Розв'язки цих рівнянь є лінійні функції часу:

$$s = -k_0 t + C_1, \quad p = k_0 t + C_2,$$

де C_1, C_2 – сталі інтегрування, які знаходимо з початкових умов.

У відкритих системах можуть реалізуватися такі випадки тоді, коли концентрація субстрату підтримується постійною і параметрично задає постійну швидкість процесу.

Приклад 2. Нехай субстрат S перетворюється у продукт P зі швидкістю k_1 , яка залежить від концентрації одного із них.

Для випадку реакції першого порядку



кінетичні рівняння записують так:

$$\frac{ds}{dt} = -k_1 s, \quad \frac{dp}{dt} = k_1 s.$$

Початкові умови:

$$s(0) = s_0, \quad p(0) = 0.$$

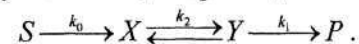
Розв'язок першого рівняння, з урахуванням початкових умов, буде:

$$s(t) = s_0 \exp(-k_1 t).$$

Вираз для p знайдемо з умови збереження загальної маси у закритій системі ($s + p = s_0$), звідси:

$$p(t) = s_0 (1 - \exp(-k_1 t)).$$

Приклад 3. Перша динамічна модель, яка відтворювала періодичні коливання у хімічних процесах, запропонована Лоткі (1925). Вона відповідає багатьом метаболічним процесам і процесам вищих рівнів біологічної організації, які є ланцюгом послідовних перетворень і в яких одна зі стадій прискорюється за рахунок вихідних продуктів іншої, наприклад:



Нехай субстрат S зі сталою швидкістю перетворюється у проміжний продукт X (реакція нульового порядку). Продукт X перетворюється в Y , при цьому швидкість цієї стадії пропорційна не тільки концентрації X , але й утвореного продукту Y (реакція

другого порядку). Продукт Y незворотно перетворюється у кінцевий продукт P (реакція першого порядку).

Цей процес описують системою рівнянь:

$$\frac{dx}{dt} = k_0 - k_2 xy,$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 xy - k_1 y,$$

$$\frac{dp}{dt} = k_1 y.$$

Стационарний рівень проміжних продуктів $x^* = k_0 / k_2$ та $y^* = k_0 / k_1$.

Встановимо як поводитиме себе система за малих відхилень від стаціонарного рівня. Знехтуємо величинами другого порядку мализни ($\Delta x \Delta y$), одержуємо:

$$x = k_0 / k_2 + e^{-2k_0 k_2} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t),$$

де $\omega^2 = (k_0 k_1)^2 - \left(\frac{k_0 k_2}{2k_1} \right)^2$; C_1, C_2 – сталі інтегрування.

Частота коливань ω визначається через константи швидкостей усіх стадій процесу, а амплітуди C_1, C_2 – початковими умовами (концентраціями).

Отже, за наявності у модельованому процесі послідовних перетворень зворотного зв'язку, в усій системі можливі автоколивні стани.

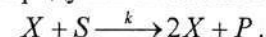
Незважаючи на те, що розглянуті динамічні моделі є простими за структурою, вони відповідають тим експериментальним часовим залежностям, які найчастіше спостерігаються при дослідженні біосистем різних рівнів їхньої ієрархії [2].

1.2.7. Кінетичні закономірності росту глибоких культур

Поряд із розглянутими ферментативними реакціями чимале значення сьогодні мають промислові процеси, що налічують як головну стадію ріст і розмноження мікроорганізмів, і біосинтез ними продуктів метаболізму.

У цьому параграфі наведено порівняльний опис двох варіантів процесів мікробіологічного синтезу, в основу яких покладено ті чи інші уявлення про механізм явища. Дуже поширеною є експоненціальна модель, яка спочатку не враховує ролі субстрату і лише згодом доповнюється залежністю $\mu = \varphi([S], [X], \dots)$, де μ – питома швидкість росту. Є багато моделей, які із самого початку розглядають ріст популяції як своєрідну взаємодію клітин мікроорганізмів із субстратом, що спричинює їхній ріст і розмноження, тобто перетворення субстрату в біомасу. Такі моделі називають кінетичними.

Найпростіша із кінетичних моделей розглядає клітини і субстрат як незворотні взаємодіючі компоненти, що зумовлюють подвоєння біомаси і появу продуктів за схемою:



Швидкість такого процесу пропорційна концентраціям клітин і субстрату:

$$\frac{dx}{dt} = kxs. \quad (2.21)$$

Введемо позначення: $x_{\max} = x_0 - Ys_0$ – умовна величина, що відповідає теоретично цілковитому перетворенню субстрату у біомасу. Тут Y – економічний коефіцієнт росту [15]:

$$Y = \left| \frac{dx}{ds} \right| = \frac{x_\tau - x_0}{s_0 - s_\tau},$$

причому індекс τ належить до будь-якого моменту часу у фазі активного росту.

Зв'язок між концентрацією субстрату s і концентрацією клітин x буде:

$$s = \frac{1}{Y}(x_{\max} - x). \quad (2.22)$$

Кінетичне рівняння (2.21) з урахуванням (2.22) набуде вигляду:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{Y}x(x_{\max} - x) = \frac{kx_{\max}}{Y}x - \frac{k}{Y}x^2$$

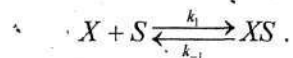
або

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = k \frac{x_{\max}}{Y} - k \frac{x}{Y}. \quad (2.23)$$

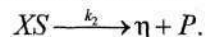
Отже, у цьому випадку (2.23) – найвідоміша модель Ферхюльста [15], яка допускає взаємодію двох клітин однієї популяції, що зумовлює відмирання однієї з них. Тобто відмирання однієї клітини може відбуватися тільки унаслідок її взаємодії з іншою.

Покажемо, що кінетична модель дає результати, що відповідають експоненціальній моделі з додаванням рівняння Моно [15].

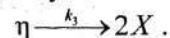
Подано ріст біомаси як тристадійний ферментативний процес (див. п. 1.1):



Наступною за утворенням комплексів XS є перенесення субстрату всередину клітини і його утилізація, що спричинює ріст маси клітин (біомаси) і його утилізацію, що зумовлює зростання маси клітин (біомаси) і утворення метаболітів P :



Унаслідок подальшого розвитку клітин досягається фаза ділення, що приводить до росту X :



Як зазначено у [15], з погляду здатності приєднувати субстрат η не відрізняється від X . За достатньо великого об'єму популяції схема цілковито збігатиметься з тристадійною ферментативною реакцією. Унаслідок цього у стаціонарному стані:

$$[XS] = \frac{k_1}{k_{-1} + k_2} x_a s,$$

де x_a – концентрація клітин або їхніх активних центрів здатних зв'язувати субстрат.

За умови $x \ll s$, яка практично завжди виконується, якщо порівняти кількість клітин і число молекул субстрату в одиниці об'єму середовища:

$$x_a = \frac{(k_{-1} + k_2)x}{(k_{-1} + k_2) + k_1 s}.$$

Із умови стаціонарності по $[\eta]$ отримаємо кінетичне рівняння для швидкості росту біомаси:

$$\frac{dx}{dt} = k_3 [\eta] = k_2 [XS] = \frac{k_2 x s}{\frac{k_{-1} + k_2}{k_1} + s}$$

або

$$\frac{dx}{dt} \frac{1}{x} = \frac{k_2 s}{\frac{k_{-1} + k_2}{k_1} + s}. \quad (2.24)$$

Отже, тристадійна схема приводить до виразів, отриманих на основі експоненціальної моделі і дає фізичний зміст константам рівняння Моно, причому $k_2 = \mu_{\max}$, а $K_s = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1}$. За малих k_2 ,

коли $k_2 \ll k_{-1}$, K_s перетворюється у константу нестійкості комплексу, що дорівнює k_{-1}/k_1 .

Позначимо $\frac{dx}{dt} \frac{1}{x} = \mu$, тоді $\mu = \frac{\mu_{\max} s}{K_s + s}$ – рівняння, що

зв'язує швидкість росту біомаси з концентрацією субстрату.

1.3. Математичні моделі в імунології

Головною функцією імунної системи є захист організму від живих тіл і речовин, які несуть на собі ознаки генетично чужорідної інформації. Серед них: бактерії, віруси, білки, клітини, тканини, змінені власні клітини, у тім числі ракові. Такі речовини називають антигенами. Кожен антиген специфічний, тобто має особливості в своїй структурі, які відрізняють його від інших антигенів. Він спричинює специфічну реакцію імунної системи – реакцію, спрямовану тільки проти нього, а не проти якогось іншого антигена. Отже, суть імунної відповіді на проникнення генетично чужорідного матеріалу (антигена), у тім числі і збудників хвороби, полягає у виробленні специфічних матеріальних субстратів (молекул антитіл), здатних нейтралізувати або руйнувати антиген. Виходячи з цього, інфекційне захворювання розглядають як конфлікт між популяцією збудників хвороби та імунною системою організму. Тому представлені нижче моделі є моделями імунної відповіді на патогенний антиген. Пізнання механізму імунної відповіді дає ключ до розуміння процесу захворювання і до методів його ефективного лікування.

Розвиток імунології відбувається так швидко, що загальні концепції, які становлять основу цієї науки, змінюються і вносять нові факти та гіпотези. Проте загальні закономірності вже добре вивчені [16,17] і становлять основу для побудови моделей, які імітують головні риси імунного процесу.

Найпідступнішим для організму є вірусний антиген. Потрапивши в організм, він знаходить клітини своєї тропності та укорінюється в них. Далі вірус починає розмножуватись на клітинному генетичному ресурсі, унаслідок цього клітина виснажується і гине, а віруси виходять з клітини у міжклітинний простір або кров і знаходять нові клітини-мішені, в яких продовжують розвиток популяції. Отже, в організмі є два вірусних вороги: вірус в клітині і вірус поза клітиною у плазмі.

Математичні моделі припускають таку класифікацію імунної відповіді на антиген:

- 1) субклінічна форма з одужанням;
- 2) гостра форма з одужанням;
- 3) гостра форма з летальним кінцем;
- 4) хронічна форма.

1. *Субклінічна форма хвороби* переважно протікає скрито і не зв'язана з фізіологічним розладом організму. Це звичайний контакт організму з вже відомим антигеном й організм володіє достатніми ресурсами щодо його придушення. У цьому випадку популяція вірусів придушується існуючими ресурсами і антиген знищується.

2. *Гостра форма захворювання.* Якщо антиген, що потрапив в організм, виявився “незнайомим”, то збільшується його концентрація за рахунок розмноження і супроводжується процесом його розпізнавання та формування плазматичних клітин, що виробляють антитіла. Цей процес переважно буває повільний і за цей час концентрація антигена сягає рівня, що перевищує рівень фізіологічних змін. У цьому випадку виникає ефективна імунна відповідь. Це випадок гострої форми з одужанням. Така форма протікання хвороби є класичною. Вона супроводжується підвищенням температури, інтенсифікацією організму, значними середніми паталогічними змінами враженого органа.

3. *Можлива і гостра форма* захворювання з *летальним кінцем*. Якщо імунна відповідь з різних причин спізнилась настільки, що в органі виникли значні патологічні зміни і вражений орган вже не забезпечує нормальну дієздатність органів, що відповідають за формування Т- і В-лімфоцитів. У цьому випадку настає важка форма захворювання з можливим летальним кінцем.

4. *Хронічна форма.* Відомо, що хронічні захворювання є найважчими і продовжуються роками. У цьому випадку виснажлива динаміка вірусів з часом спричиняє встановлення рівноваги між числом народжуваних і тих, що виводяться імунною системою, збудників хвороби.

Сьогодні імунологами накопичено значну кількість матеріалу спостережень за протіканням різних інфекційних

захворювань. На підставі аналізу цього матеріалу отримано фундаментальні результати, які стосуються механізмів взаємодії антигенів і антитіл. Ці результати дають змогу підійти до побудови математичних моделей імунологічних процесів.

1.3.1. Моделювання динаміки протікання інфекційних захворювань

Викладені моделі динаміки популяцій можна застосувати до опису реакції імунної системи на проникнення чужорідних тіл – антигенів (вірусів, бактерій) у живий організм [17]. Взаємодія “хвороботворного джерела” – вірусів чи бактерій та імунних сил організму подібна до взаємодії двох популяцій за типом “хижак-жертва”. У ролі жертви виступає чужорідний антиген; у ролі хижака – антитіла, які виробляються спеціальними клітинами організму і кількість яких залежить від кількості антигена. Під час виведення антигена з організму антитіла також гинуть (на відміну від моделі Лоткі-Вольтерра, в якій після зустрічі хижака із жертвою хижак залишається живим).

Розглянемо модель протікання інфекційного захворювання, в яку входять дві, невідомі функції $y_1(t)$, $y_2(t)$, які описують концентрацію антигенів та антитіл відповідно до [17]:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(t)}{dt} &= A - C_1, \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= B - C_2.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Величини A, B, C_1, C_2 характеризують головні процеси, які протікають в імунній системі організму: A – розмноження антигенів (вірусів); B – виробництво антитіл; C_1, C_2 – взаємодію клітин з антигенами (антитіла знищують антигени і водночас гинуть самі).

Для розуміння основних закономірностей реакції імунної системи організму на вторгнення антигенів зробимо такі припущення:

$$A = \alpha y_1, \quad B = \beta(y_1), \quad C_1 = C = y_2.\tag{3.2}$$

Отож антигени розмножуються з постійним темпом α ; виробництво антитіл залежить від концентрації антигенів; одне антитіло знищує один вірус і час пошуку вірусів антитілом не залежить від концентрації вірусів. Останнє припущення невірне за малих значень y_2 (на початку захворювання). У цьому випадку величина $C_1 = C_2 = \gamma(y_1)y_2$, де множник $\gamma(y_1)$ швидко зростає від 0 до 1 в процесі захворювання. Тому надалі вважатимемо $\gamma(y_1) = 1$. Параметри α, β називають вірулентністю мікроба (темп розмноження) і рівнем імунного захисту, відповідно.

З урахуванням (3.2) систему (3.1) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned}\frac{dy_1(t)}{dt} &= \alpha y_1 - y_2; \\ \frac{dy_2(t)}{dt} &= \beta(y_1) - y_2.\end{aligned}\tag{3.3}$$

Систему рівнянь (3.3) доповнюємо початковими умовами:

$$\begin{aligned}y_1(t_0) &= y_{10}; \\ y_2(t_0) &= y_{20}.\end{aligned}\tag{3.4}$$

Модель інфекційного захворювання (3.3)–(3.4) дає змогу за різних значень параметрів α і β , y_{10}, y_{20} описати різні форми протікання захворювань – від цілковитого одужання до смертельного випадку. Однак у рамках системи рівнянь другого порядку не вдається отримати випадки довготривалих періодичних проявів захворювань (хронічні процеси). Суттєвим недоліком є відсутність запізнення у виробництві антитіл. Для врахування описаних недоліків побудовано кілька складніших моделей, які детальніше описують реакцію імунної системи організму на проникнення чужорідних тіл [17].

1.3.2. Найпростіша математична модель в імунології

Модель, що описує боротьбу вірусів $V(t)$, антитіл $F(t)$ та плазматичних клітин $C(t)$ у людському організмі, зараженому вірусною хворобою, де $m(t)$ – міра зараження органа, запропоновано Г.І.Марчуком (1975). Математична модель має вигляд (збережено позначення з монографії [17]):

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \beta V - \gamma FV, \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha \xi(m) F(t - \tau) V(t - \tau) - \mu_C (C - C^*), \\ \frac{dF}{dt} &= \rho C - (\eta \gamma V + \mu_f) F, \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V - \mu_m m. \end{aligned} \quad (3.5)$$

У системі рівнянь (3.5) коефіцієнти мають такий зміст:

β – коефіцієнт розмноження антигенів;

γ – коефіцієнт, зв'язаний з ймовірністю нейтралізації антигена антитілами при зустрічі з ним;

α – коефіцієнт, що враховує ймовірність зустрічі антиген-антитіло;

μ_C – коефіцієнт, що дорівнює оберненій величині часу життя плазматичної клітини;

η – кількість антитіл, необхідних для нейтралізації одного антигена;

ρ – швидкість виробництва антитіл однією плазматичною клітиною;

μ_f – коефіцієнт, обернено пропорційний часу розпаду антитіл;

σ – стала величина, індивідуальна для кожного захворювання;

μ_m – коефіцієнт пропорційності.

Перше рівняння – це рівняння Лоткі-Вольтерра для системи хижак-жертва; друге рівняння описує народжуваність нових плазматичних клітин із запізненням за часом, спричинену інфекцією, за відсутності якої другий член породжує рівновагу при $C = C^*$; третє рівняння моделює синтез антитіл плазматичними клітинами $F(t)$, їхнє зменшення унаслідок старіння і під час зв'язування антигенів з антитілами. Четверте рівняння характеризує послаблення ураженого органа, причому перший доданок – за рахунок вірусів.

Нехай M – характеристика здорової частини враженого органа (маса або площа), а M' – відповідна характеристика здорової частини пораненого органа. Введемо в розгляд величину:

$$m = 1 - \frac{M'}{M}.$$

Цю величину називають відносною характеристикою враження органа-мішені. На інтервалі $(0, m^*)$ вона дорівнює одиниці; m^* – деякий пороговий рівень. Для невраженого органа $m = 0$, а для цілковито враженого органа $m = 1$.

На рис. 3.1 показано вигляд функції $\xi(m)$.

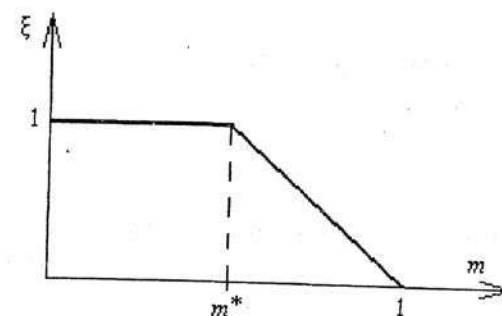


Рис. 3.1

Множник $\alpha = \alpha_0 \xi(m)$, де

$$\xi(m) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } m \leq 0,1; \\ \frac{10}{9}(1-m), & \text{якщо } 0,1 \leq m \leq 1. \end{cases}$$

$\xi(m)$ – неперервна, незростаюча функція, яка описує порушення нормальної роботи імунної системи внаслідок враження органа.

До системи рівнянь (3.5) треба ще додати початкові умови при $t = t_0$. Для рівнянь із запізненням початкові умови задають на інтервалі $[t_0 - \tau, t_0]$. Виходячи зі змісту нашого процесу, до моменту зараження t_0 вірусів в організмі не було, тобто $V(t) = 0$ при $t < t_0$, тому початкові умови ставимо в точці t_0 . Концентрація антитіл в організмі на інтервалі запізнення є сталою і дорівнює F_0 .

Тому ставимо такі початкові умови:

$$V(t_0) = V_0; C(t_0) = C_0; m(t_0) = m_0; F(t_0) = F_0. \quad (3.6)$$

Далі вважатимемо, що всі константи рівнянь (3.5) невід’ємні величини.

Стаціонарні розв’язки. Система рівнянь (3.5) припускає стаціонарні розв’язки. Для їхнього визначення прирівнюємо всі похідні до нуля, отримуємо систему алгебричних рівнянь:

$$\begin{aligned} \beta V - \gamma F V &= 0, \\ \alpha \xi(m) F(t - \tau) V(t - \tau) - \mu_C (C - C^*) &= 0, \\ \rho C - (\eta \gamma V + \mu_f) F &= 0, \\ \sigma V - \mu_m m &= 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Нехай функції V і F не залежать від часу:

$$V(t - \tau) = V = \text{const}, F(t - \tau) = F = \text{const}.$$

Тоді одним із розв’язків системи рівнянь (3.7) буде:

$$V = 0, C = C^*, F = F^* = \rho \frac{C^*}{\mu_f}, m = 0,$$

де C^* і F^* – значення C і F для здорового організму (імунологічний статус здорової людини) при $V = 0$. Концентрація антигенної популяції V^* і вражена маса органа m^* дорівнюють нулю.

У монографії [17] показано, що такий стан є асимптотично стійким при $\beta < \gamma F^*$.

Розглянемо два граничних випадки:

$$1) \frac{dF}{dt} = 0, F(t) = F_0 = 0, \text{ для всіх } t \geq 0 - \text{це означає, що}$$

організм не виробляє антитіл даної специфіки.

Розв’язок першого рівняння із (3.5):

$$V(t) = V_0 e^{\beta t}, \quad (3.8)$$

де V_0 – доза зараження у момент часу $t = t_0$.

$$2) \frac{dF}{dt} = 0, F(t) = F^* - \text{це означає, що рівень існуючих в}$$

організмі антитіл є достатнім для того, щоб знищити всі антигени, $F^* \in [10, 15]$ – нормальний рівень антитіл, $\beta \ll \gamma F^*$.

Розв’язок першого рівняння із (3.5):

$$V(t) = V_0 e^{-(\gamma F^* - \beta)t}. \quad (3.9)$$

У першому випадку популяція вірусів експоненціально зростає – це летальний випадок, у другому випадку – популяція вірусів експоненціально спадає, що відповідає субклінічній формі хвороби.

На рис. 3.2,а подано динаміку розподілу концентрації вірусів в організмі у граничних випадках. Усі інші динаміки розподілу концентрації вірусів в організмі вкладаються в область між цими двома граничними випадками.

На рис. 3.2,б зображено динаміку розподілу вірусів в організмі при значенні параметрів моделі:

$$\beta = 2, \gamma = 0.8, \alpha = 10^4, \mu_c = 0.5, \rho, \mu_f = 0.17, \quad (3.10)$$

$$\eta, \gamma = 8, \sigma = 10, \mu_m = 0.12$$

і за початкових умов:

$V(t) = \max(0, t - 10^{-6})$, якщо $t \leq 0$; $C(0) = 1$; $F(t) = 1$, якщо $t \leq 0$; $m(0) = 0$.

На рис. 3.2,б – при значеннях параметрів (3.10) і $\sigma = 300$. Розв'язки імунологічної моделі (3.5) подано на рис. 3.3 і рис. 3.4 [29].

У першому випадку (коефіцієнт ураження $\sigma = 10$) маємо цілковите одужання $V(t) < 10^{-6}$, у другому (коефіцієнт ураження $\sigma = 300$) – періодичні спалахи хвороби, спричинені послабленням організму; $m(t)$ сягає значень близьких до одиниці.

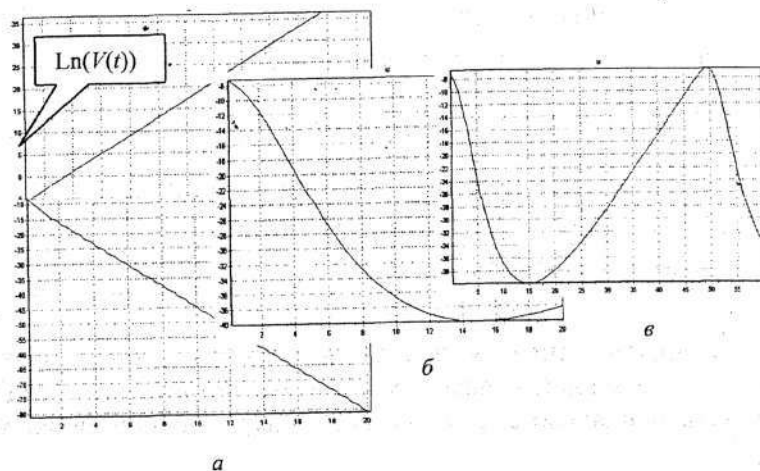


Рис.3.2. Динаміка концентрації вірусів

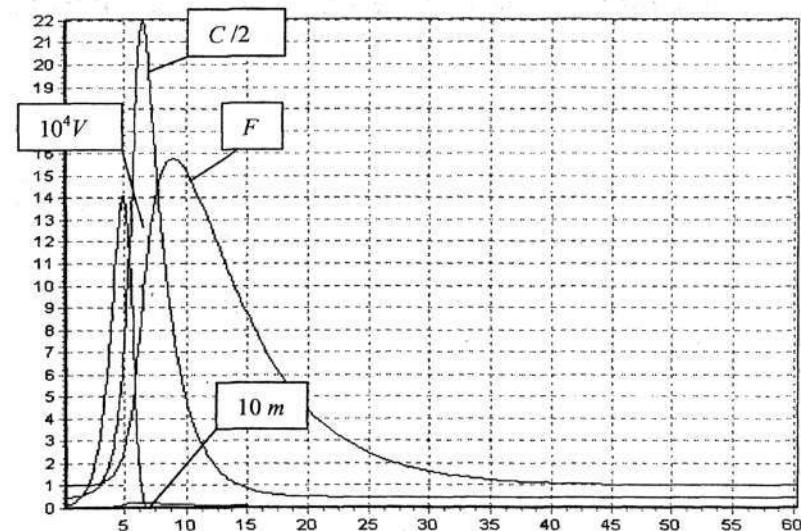


Рис. 3.3. Розв'язки імунологічної моделі Марчука (гостра форма хвороби з одужанням)

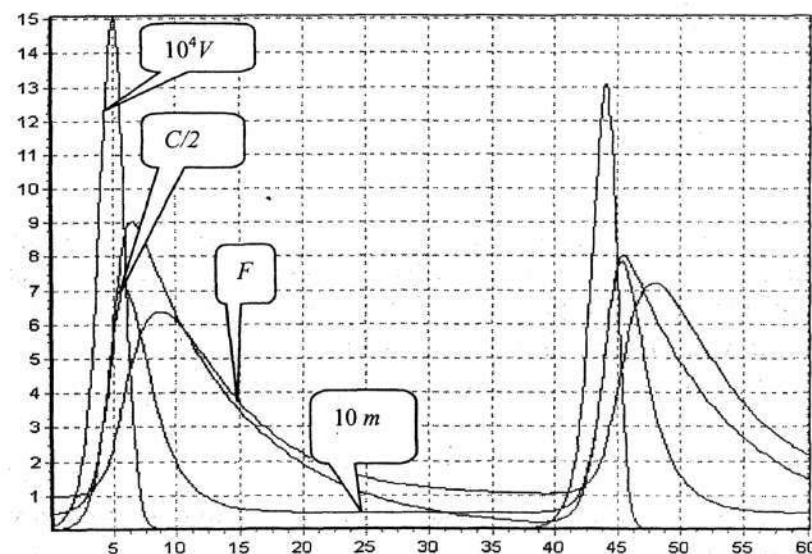


Рис. 3.4. Розв'язки імунологічної моделі Марчука (хронічна форма)

1.3.3. Вплив температурної реакції організму на динаміку захворювання

Робота [17] враховує ще інші чинники на перебіг інфекційної хвороби, наприклад температуру тіла. Як відомо, підвищення температури є міцною захисною реакцією організму в боротьбі з вірусним або бактеріальним захворюванням. Майже всі віруси і бактерії піддаються депресуючому впливу підвищення температури. Одночасно з підвищенням температури тіла зростає активність імунного процесу. Математична модель з урахуванням температурної реакції організму набуває такого вигляду:

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \beta(T)V - \gamma FV, \\ \frac{dC}{dt} &= \alpha(T)\xi(m)F(t-\tau)V(t-\tau) - \mu_C(C - C^*), \\ \frac{dF}{dt} &= \rho C - (\eta\gamma V + \mu_f)F, \\ \frac{dm}{dt} &= \sigma V - \mu_m m, \\ \frac{dT}{dt} &= k_T VF(1 - \alpha_2 VF) - \mu_T(T - T^*).\end{aligned}\quad (3.11)$$

Останнє рівняння описує зміну температури під час інфекційного захворювання. Стимулюючим сигналом для підвищення температури є збільшення концентрації VF -комплексів над деякою величиною $(VF)^*$.

Початковим значенням для цього рівняння при $t = t_0$ є рівність:

$$T(t_0) = T^* = 36,6 \quad (3.12)$$

Початкові умови для перших чотирьох функцій ставлять у вигляді (3.7).

Функції $\alpha(T)$, $\beta(T)$ обираються у вигляді:

$$\alpha(T) = \alpha_0[1 + b(T - T^*)];$$

$$\beta(T) = \beta_0/[1 + a(T - T^*)],$$

де α_0, β_0 - коефіцієнт стимуляції імунної системи та темп розмноження вірусів за нормальної температури; a, b - додатні константи;

$$\alpha_T = \begin{cases} 0, & \text{якщо } VF < (VF)^*; \\ \text{const} > 0, & \text{якщо } VF \geq (VF)^*, \end{cases}$$

$(VF)^*$ - порогове значення.

1.4. Моделі економічної динаміки

У цьому підрозділі подано приклади застосування звичайних диференціальних рівнянь для моделювання динаміки економічних процесів. Моделі побудовано з припущенням щодо необмеженості трудових і природних ресурсів. У пп. 1.4.1–1.4.3 досить детально описано функціонування однопродуктової (одногоалузевої) виробничої економічної системи. Розглянуто взаємозв'язок і взаємодію базових макроекономічних показників з урахуванням різних припущень. У пп. 1.4.4–1.4.6 розглянуто функціонування багатопродуктової (багатогалузевої) економічної системи. Матеріал базується на поняттях і припущеннях, описаних у п. 1.4.1.

1.4.1. Однопродуктова динамічна макроекономічна модель

Однопродуктові моделі пов'язують між собою найважливіші макроекономічні показники, такі як валовий продукт, кінцевий продукт, капітальні вкладення, споживання, трудові ресурси та ін. Однопродуктові моделі виробництва і розподілу продукції зазвичай застосовують для моделювання розвитку економіки на макро- і мезорівнях (рівень країни і регіону, відповідно) [7, 14, 20, 21].

На рис. 4.1 подано схему взаємозв'язків головних блоків, які відображають виробництво і перерозподіл ресурсів, у замкненій економічній системі. Експортно-імпортні операції та створення запасів не враховано.

Результатом виробничої діяльності в t -му періоді є валовий продукт $X(t)$, який у блоці P_X представлено сумою виробничого споживання $W(t)$ (кількість виробленого продукту, який повторно бере участь у виробництві самого продукту) і кінцевого продукту $Y(t)$:

$$X(t) = W(t) + Y(t). \quad (4.1)$$

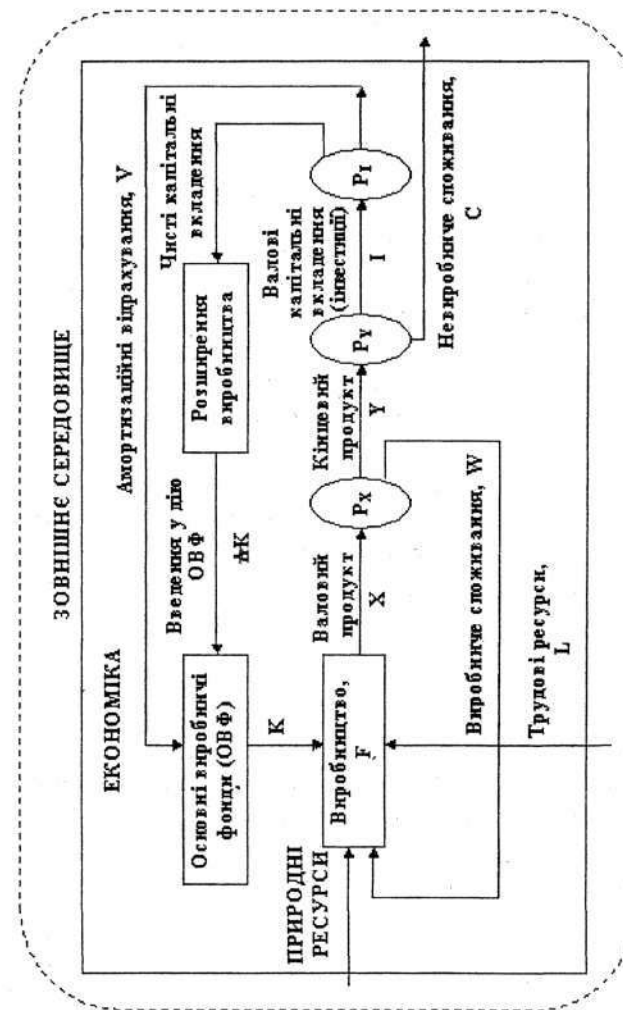


Рис. 4.1. Схема взаємозв'язків найважливіших макроекономічних показників для однопродуктової макроекономічної моделі.

Кінцевий продукт $Y(t)$ в блоці P_Y розподіляється на інвестиції (капітальні вкладення) $I(t)$ у виробничу сферу та невиробниче споживання $C(t)$:

$$Y(t) = I(t) + C(t). \quad (4.2)$$

Інвестиції у блоці P_I поділяють на амортизаційні відрахування $V(t)$ і на чисті капітальні вкладення в розширення виробництва. Нехай $K(t)$ – вартість основних виробничих фондів в t -му періоді. За рахунок капітальних вкладень здійснюється введення в дію нових основних виробничих фондів (нарощування капіталу). Формалізація взаємозв'язку між інвестиціями і введенням у дію основних виробничих фондів ускладнюється тим, що освоєння інвестицій відбувається поетапно з певним лагом (запізненням).

У найпростішому випадку припускають, що частина інвестицій, вкладених у розширення виробництва в t -му періоді, цілком витрачається на приріст основних виробничих фондів у цьому ж періоді. Розподіл інвестицій у цьому випадку записують у вигляді:

$$I(t) = \frac{dK}{dt} + V(t). \quad (4.3)$$

На макроекономічному рівні найважливішими чинниками виробництва є основні виробничі фонди K (капітал) і задіяні у виробництві трудові ресурси L (затрати праці). У цьому випадку величину валового продукту X визначають двофакторною виробничою функцією $F(K, L, t)$:

$$0 \leq X(t) \leq F(K, L, t). \quad (4.4)$$

Виробнича функція характеризує граничні можливості виробництва залежно від наявного капіталу K і задіяних трудових ресурсів L . Залежність виробничої функції від часу дає змогу детальніше враховувати вдосконалення з часом виробництва під впливом різних чинників (науково-технічного прогресу, вдосконалення організаційних заходів тощо).

Подання у вигляді нерівності взаємозв'язку між кількістю виробленої продукції та капіталом і трудовими ресурсами засвідчує, що виробничі потужності у цьому періоді можуть бути частково задіяними у виробництві (частково завантаженими).

У багатьох дослідженнях виробничу функцію обирають неокласичною [7, 14, 21]. Вона є гладкою, ввігнутою, монотонно-зростаючою відносно своїх аргументів, додатною при додатних значеннях аргументів K та L і рівною нулю при нульовому значенні одного з ресурсів K або L . Виробничі функції зазвичай обирають однорідними.

Однорідність степеня n означає, що для будь-якого $\lambda > 0$, $K \geq 0$, $L \geq 0$ справедлива рівність (у випадку $n=1$ маємо лінійну однорідність):

$$F(\lambda K, \lambda L, t) = \lambda^n F(K, L, t). \quad (4.5)$$

У макроекономічному аналізі найчастіше застосовують мультиплікативну функцію (функцію Кобба-Дугласа) і функцію з постійною еластичністю заміни ресурсів (CES-функцію, функцію Солоу).

Динамічна функція Кобба-Дугласа в узагальненому випадку має вигляд:

$$F(K, L, t) = v(t) K(t)^{\alpha(t)} L(t)^{\beta(t)}, \quad (4.6)$$

де $v(t)$, $\alpha(t)$, $\beta(t)$ – параметри моделі. Параметри α , β називають коефіцієнтами еластичності випуску валового продукту щодо капіталу і трудових ресурсів, відповідно. Під еластичністю виробничої функції за певним чинником розуміють відношення відносного приросту виробничої функції до відносного приросту чинника виробництва:

$$\alpha = \frac{\partial F}{F} : \frac{\partial K}{K}, \quad \beta = \frac{\partial F}{F} : \frac{\partial L}{L}.$$

Залежність параметрів v , α , β виробничої функції від часу дає змогу враховувати вдосконалення з часом різних чинників виробництва під впливом науково-технічного прогресу (НТП). Припустимо, що завдяки НТП виробництво зростає з постійним

темпом ρ , але не змінюється відносна ефективність окремих чинників виробництва (вплив НТП є нейтральним). У цьому випадку виробничу функцію Кобба-Дугласа запишемо у вигляді:

$$F(K, L, t) = v_0 e^{\rho t} K(t)^\alpha L(t)^\beta, \quad (4.7)$$

де v_0 , α , β – параметри моделі, які не залежать від часу, $v = v_0 e^{\rho t}$.

Якщо не враховувати впливу НТП, то параметри v , α , β є постійними. У цьому випадку дістаємо статичну функцію Кобба-Дугласа:

$$F(K, L, t) = v K(t)^\alpha L(t)^\beta. \quad (4.8)$$

Степінь однорідності функції Кобба-Дугласа визначається сумою параметрів $\alpha + \beta$. Для статичної функції (4.8), зазвичай, приймають лінійну однорідність: $\alpha + \beta = 1$ (постійна віддача ресурсів). Для динамічної функції типовою є умова $\alpha + \beta > 1$, яка відображає динаміку зростання ефективності чинників виробництва.

Динамічна виробнича функція Солоу в узагальненому випадку має вигляд:

$$F(K, L, t) = v(t) \left[\alpha(t) K(t)^{-\rho(t)} + \beta(t) L(t)^{-\rho(t)} \right]^{-\omega(t)/\rho(t)},$$

де v , α , β , ρ , ω – параметри моделі, які залежать від часу. Як і для функції Кобба-Дугласа, деякі (або всі) параметри функції Солоу можна вибирати постійними. У цьому випадку можна отримати виробничу функцію Солоу з нейтральним впливом НТП і статичну функцію Солоу.

Якщо враховувати тільки один із чинників виробництва, то отримують однофакторні виробничі функції. Однофакторні виробничі функції можна отримати із двофакторних у припущенні незмінності за часом одного із чинників виробництва. Припустимо, що чисельність трудових ресурсів L і їхній відносний вплив β на виробництво є постійними протягом розглядуваного періоду. Тоді функція Кобба-Дугласа (4.6) матиме вигляд:

$$F(K, L, t) = k_X(t) K(t)^{\alpha(t)}, \quad k_X(t) = v(t) L^\beta. \quad (4.9)$$

При $\alpha(t) = 1$ і відсутності НТП отримуємо найпростішу лінійну залежність між максимальним випуском валового продукту і виробничими фондами:

$$F(K, L, t) = \tilde{k}_X K(t), \quad (4.10)$$

де $\tilde{k}_X = \text{const} > 0$ – капітальний коефіцієнт основного виробництва.

Параметри виробничих функцій підбираються із умов найкращої (в тому чи іншому розумінні) відповідності функції досліджуваному процесу виробництва на підставі даних спостережень.

Співвідношення (4.1)–(4.4) пов'язують між собою з допомогою 3-х рівнянь і однієї нерівності зміну в часі 8-ми макроекономічних показників: X, W, Y, I, C, K, V, L . Для дослідження динаміки цих показників та однозначного їхнього визначення, необхідно задати ще кілька додаткових співвідношень, які пов'язують ці показники.

В економічних дослідженнях часто вважають, що кількість трудових ресурсів L (які становлять певну частину населення) змінюється в часі (як і кількість населення) з постійним темпом $\xi > 0$:

$$L(t) = L_0 e^{\xi(t-t_0)}, \quad (4.11)$$

де $L(t_0) = L_0$ – кількість трудових ресурсів у початковий момент часу t_0 . Якщо $\xi = 0$, то кількість трудових ресурсів не змінюється з часом.

Виробничі затрати W залежать від кількості виробленої продукції X , задіяного капіталу K і часу t :

$$W(t) = A(X(t), K(t), t). \quad (4.12)$$

У багатьох випадках справедливим є припущення щодо пропорційної залежності між затратами W та об'ємом виробництва X :

$$W(t) = A(t) X(t), \quad (4.13)$$

де $A(t)$ – коефіцієнт прямих затрат продукції X на виробництво одиниці цієї ж продукції.

Амортизаційні відрахування V зазвичай пропорційні величині основних виробничих фондів K :

$$V(t) = \mu(t)K(t), \quad (4.14)$$

де $\mu(t)$ – коефіцієнт амортизації (норма амортизації).

Нехай задано рівень завантаженості виробничих потужностей $0 \leq p(t) \leq 1$. Тоді кількість виробленої продукції пов'язана із виробничою функцією таким співвідношенням:

$$X(t) = p(t)F(K, L, t). \quad (4.15)$$

Припустимо, що інвестиції $I(t)$ є певною частиною кінцевого продукту $Y(t)$ [7, 13, 14, 21]:

$$I(t) = s(t)Y(t), \quad (4.16)$$

де $s(t) > 0$ – норма накопичення капіталу. Знаючи норму накопичення капіталу s , зі співвідношень (4.2), (4.16) знаходимо величину споживання як певну частину кінцевого продукту:

$$C(t) = s_c(t)Y(t), \quad (4.17)$$

де $s_c(t) = 1 - s(t)$ – функція, яка є нормою споживання (характеризує величину споживання $C(t)$ як певну складову частину кінцевого продукту $Y(t)$).

Рівень споживання $C(t)$, або точніше рівень споживання на душу населення $\tilde{C}(t) = C(t)/L(t)$, є одним з головних макроекономічних показників рівня економічного розвитку країни. Мета розвитку економіки країни полягає в досягненні заданого рівня споживання, який змінюється (зазвичай зростає) у часі. Функцію, яка характеризує рівень споживання, можна задати у вигляді:

$$\tilde{C}(t) = c_0 e^{\eta(t-t_0)} + c_1(t-t_0), \quad (4.18)$$

де c_0, c, η – задані параметри моделі. Перший доданок у (4.18) характеризує базовий рівень споживання, який змінюється з

постійним темпом η (c_0 – базовий рівень споживання у початковий момент часу t_0). Другий доданок характеризує відхилення величини споживання від базового рівня у бік зменшення ($c_1 < 0$) або збільшення ($c_1 > 0$).

У цьому випадку величину інвестицій визначають із співвідношення (4.2) як різницю між величиною кінцевого продукту і невиробничим споживанням. Іншим способом задання величини споживання є задання норми споживання s_c і визначення величини споживання згідно з (4.17). Тоді норма накопичення капіталу становить $s = 1 - s_c$.

Унаслідок об'єднання співвідношень (4.1)–(4.3), (4.11), (4.13)–(4.16) дістанемо таку динамічну однопродуктову макроекономічну модель:

$$\begin{aligned} X(t) &= A(t)X(t) + Y(t), \\ Y(t) &= I(t) + C(t), \\ I(t) &= \frac{dK}{dt} + \mu(K, t) \cdot K(t), \\ X(t) &= p(t)F(K, L, t), \\ I(t) &= s(t)Y(t), \\ L(t) &= L_0 e^{\xi(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Зауважимо, що при побудові моделі (4.19) задається норма накопичення капіталу s згідно з (4.16).

Для чисельного аналізу моделі (4.19) необхідно задати параметри моделі A, μ, p, s, ξ , які в узагальненому випадку (крім ξ) є функціями від часу, та доповнити її початковою умовою:

$$K(t_0) = K_0. \quad (4.20)$$

За різних часткових припущень щодо залежності функцій A, μ, p, s, F, L, C від своїх аргументів із моделі (4.19) можна одержати кілька простіших моделей, які використано при дослідженнях макроекономічних процесів [7, 14, 20, 21].

1.4.2. Неокласична модель росту

Виразимо динаміку приросту капіталу через виробничу функцію. На основі першого і четвертого рівнянь моделі (4.19) знаходимо величину кінцевого продукту, виражену через виробничу функцію:

$$Y(t) = (1 - A(t)) p(t) F(K, L, t). \quad (4.21)$$

З урахуванням (4.21) з другого рівняння моделі (4.19) знаходимо величину інвестицій:

$$I(t) = (1 - A(t)) p(t) F(K, L, t) - C(t). \quad (4.22)$$

Після підстановки (4.22) в третє рівняння (4.19) дістанемо рівняння динаміки приросту капіталу:

$$\frac{dK(t)}{dt} = (1 - A(t)) p(t) F(K, L, t) - \mu(t) K(t) - C(t). \quad (4.23)$$

Якщо вважати, що величина інвестицій є певною частиною кінцевого продукту, то рівняння (4.23) з урахуванням (4.16), (4.17) матиме вигляд:

$$\frac{dK(t)}{dt} = s(t) (1 - A(t)) p(t) F(K, L, t) - \mu(t) K(t). \quad (4.24)$$

Дане рівняння доповнюють початковою умовою (4.20).

Нехай виробничу функцію є лінійною однорідною функцією:

$$F(\lambda K, \lambda L, t) = \lambda F(K, L, t). \quad (4.25)$$

Приведемо модель (4.19) до нормованого вигляду, де всі величини нормовані в розрахунку на одного працівника. Введемо такі позначення:

$x(t) = X(t)/L(t)$ – величина випущеної валової продукції, яка припадає на одного працівника (продуктивність праці);

$y(t) = Y(t)/L(t)$ – величина кінцевої продукції, яка припадає на одного працівника;

$c(t) = C(t)/L(t)$ – об'єм споживання на одного працівника;

$i(t) = I(t)/L(t)$ – об'єм інвестицій на одного працівника;

$k(t) = K(t)/L(t)$ – величина капіталу на одного працівника (капітало- або фондомісткість).

Поклавши в (4.25) $\lambda = L^{-1}$, виразимо величину $x(t)$ через виробничу функцію:

$$x(t) = \frac{X(t)}{L} = p(t) \frac{1}{L} F(K, L, t) = p(t) F\left(\frac{K}{L}, 1, t\right) = p(t) f(k, t), \quad (4.26)$$

де $f(k, t) = F\left(\frac{K}{L}, 1, t\right)$ – нормована виробнича функція, яка характеризує продуктивність праці як функцію капіталоозброєності. З властивостей виробничої функції F випливає, що:

$$f'_k(k, t) > 0, f''_k(k, t) < 0 \quad \forall k > 0; \lim_{k \rightarrow 0} f'_k(k, t) = \infty, \lim_{k \rightarrow \infty} f'_k(k, t) = 0.$$

Поділивши почленно перші три рівняння моделі (4.19) на кількість трудових ресурсів L , отримуємо такі нормовані рівняння:

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + y(t), \quad (4.27)$$

$$\dot{y}(t) = i(t) + c(t), \quad (4.28)$$

$$\dot{i}(t) = \frac{1}{L} \frac{dK}{dt} + \mu(t)k(t). \quad (4.29)$$

Виразимо швидкість зміни капіталу через швидкість зміни капіталомісткості:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d(kL)}{dt} = \frac{dk}{dt} L + k \frac{dL}{dt}.$$

Враховуючи співвідношення (4.11), яке характеризує зміну в часі трудових ресурсів, отримуємо:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dk}{dt} L + k\xi L.$$

З урахуванням останнього співвідношення рівняння (4.29) запишемо у вигляді:

$$\dot{i}(t) = \frac{dk(t)}{dt} + (\mu(t) + \xi)k(t). \quad (4.30)$$

Унаслідок підстановки (4.26), (4.28), (4.30) в (4.27) отримуємо :

$$p(t)f(k(t),t) = A(t)p(t)f(k(t),t) + \frac{dk(t)}{dt} + (\mu(t) + \xi)k(t) + c(t).$$

Звідси:

$$\frac{dk(t)}{dt} = (1 - A(t))p(t)f(k(t),t) - (\mu(t) + \xi)k(t) - c(t). \quad (4.31)$$

Рівняння (4.31) називають основним диференціальним рівнянням неокласичної теорії економічного росту [7, 14, 21]. В узагальненому випадку рівняння (4.31) є нелінійним. Універсального методу інтегрування такого рівняння не існує. Тому для його розв'язування необхідно використовувати числові методи. Рівняння (4.31) доповнюється відповідною початковою умовою, яка впливає з (4.20):

$$k(t_0) = k_0, \quad k_0 = \frac{K_0}{L_0}, \quad (4.32)$$

де k_0 – величина капіталомісткості в початковий момент часу t_0 .

Якщо задати величину інвестицій як певну частку кінцевого продукту, то рівняння (4.31) набуде вигляду:

$$\frac{dk(t)}{dt} = s(t)(1 - A(t))p(t)f(k(t),t) - (\mu(t) + \xi)k(t).$$

1.4.3. Однопродуктова динамічна модель Леонтьєва

Таку модель отримують з моделі (4.19) за таких припущень:

- функції A , μ , s є постійними;
- виробничу функцію обирають у вигляді (4.10) і виробничі потужності цілковито завантажені, $p(t) = 1$.

За таких припущень із (4.10), (4.15) знаходимо величину капіталу як лінійну функцію валового продукту:

$$K(t) = \frac{X(t)}{\bar{k}_x}. \quad (4.33)$$

Тоді приріст капіталу є пропорційним до приросту валового продукту:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{\bar{k}_x} \frac{dX}{dt}. \quad (4.34)$$

Після підстановки другого і третього рівняння моделі (4.19) у перше рівняння та врахування вищезгаданих припущень і співвідношень (4.33), (4.34) отримуємо рівняння динаміки валового продукту:

$$X(t) = AX(t) + GX(t) + B \frac{dX}{dt} + C(t), \quad (4.35)$$

де $A = \frac{\mu}{\bar{k}_x}$, $G = \frac{1}{\bar{k}_x}$ – параметри моделі, які називають коефіцієнтами прямих затрат, амортизаційних відрахувань, капіталомісткості приростів виробництва (прирощеної фондомісткості), відповідно. Модель (4.35) називають однопродуктовою динамічною моделлю Леонтьєва [13, 20].

Для однозначного знаходження розв'язку рівняння (4.35) доповнюють початковою умовою:

$$X(t_0) = X_0. \quad (4.36)$$

Іноді перший і другий доданки у правій частині рівняння (4.35) об'єднують. У цьому випадку модель Леонтьєва записують у вигляді:

$$X(t) = AX(t) + B \frac{dX}{dt} + C(t), \quad (4.37)$$

де параметр A є сумою параметрів A і G рівняння (4.35). Як і в (4.35) параметр A називають коефіцієнтом прямих затрат. Проте в останньому випадку до нього зачисляють як затрати на виробництво, так і затрати на відновлення вибуття та ремонт основних виробничих фондів.

1.4.4. Динамічна модель розвитку багатогалузевої економіки

Економічна система країни (регіону) є досить складною. Її сформовано з багатьох, пов'язаних між собою, галузей, які виробляють різні товари і надають різні послуги. З метою моделювання функціонування багатогалузевої економіки розроблено кілька багатогалузевих (багатопродуктових) економічних моделей [5-7, 12-14, 18-21]. У цьому пункті розглянемо моделі, які описують динаміку головних економічних показників багатогалузевої економічної системи. Дані моделі є дезагрегуванням однопродуктової макроекономічної моделі (4.19) і базуються на матеріалі п. 1.4.1.

Розглянемо економічну систему, яка складається з n галузей. Вважатимемо, що галузі є взаємно незалежними: кожна галузь виробляє єдиний продукт і кожен продукт виробляється єдиною галуззю. Також не враховуватимемо експортно-імпортних операцій і створення виробничих запасів.

Як і у випадку однопродуктової економіки, подамо математичну модель багатопродуктової економіки у вигляді, аналогічному (4.19):

$$X(t) = W(t) + Y(t), \quad (4.38)$$

$$W(t) = A(X, K, t)X, \quad (4.39)$$

$$Y(t) = I^*(t) + C(t), \quad (4.40)$$

$$\frac{dK}{dt} = I(t) - \mu(t) \cdot K(t), \quad (4.41)$$

$$X(t) = p(t)F(K, L, t), \quad (4.42)$$

$$I^*(t) = s(t)Y(t), \quad (4.43)$$

$$L(t) = L_0 e^{\xi(t-t_0)}, \quad L_i(t) = s_i^{(L)} L(t), \quad 0 \leq s_i^{(L)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n, \quad (4.44)$$

$$s^{(L)} = (s_1^{(L)}, \dots, s_n^{(L)})^T, \quad \sum_{i=1}^n s_i^{(L)} \leq 1.$$

Проте, на відміну від моделі (4.19), у моделі (4.38)–(4.44) усі змінні і константи є векторними і матричними величинами. Опишемо детальніше ці змінні і константи:

$X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))^T$ – вектор валового продукту;

$W(t) = (W_1(t), \dots, W_n(t))^T$ – вектор виробничого споживання проміжного продукту;

$Y(t) = (Y_1(t), \dots, Y_n(t))^T$ – вектор кінцевого продукту;

$I^*(t) = (I_1^*(t), \dots, I_n^*(t))^T$ – вектор інвестицій, які віддають одні галузі виробництва в інші галузі;

$I(t) = (I_1(t), \dots, I_n(t))^T$ – вектор інвестицій, які перерозподіляються між галузями виробництва;

$C(t) = (C_1(t), \dots, C_n(t))^T$ – вектор невиробничого споживання;

$K(t) = (K_1(t), \dots, K_n(t))^T$ – вектор основних виробничих фондів (капіталу);

$F(K, L, t) = (F_1(K_1, L_1, t), \dots, F_n(K_n, L_n, t))^T$ – вектор виробничих функцій;

$F_i(K_i, L_i, t)$, $i = 1, \dots, n$ – виробнича функція i -ої галузі; при виборі виробничих функцій кожної із галузей у формі мультиплікативної функції Кобба-Дугласа (4.8) необхідно задати вектори параметрів $v = (v_1, \dots, v_n)^T$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^T$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$;

$L(t) \leq \sum_{i=1}^n L_i(t)$ – кількість трудових ресурсів, задіяних у виробництві; L_i – трудові ресурси, задіяні в i -ій галузі;

$s^{(L)} = (s_1^{(L)}, \dots, s_n^{(L)})^T$ – вектор, компоненти якого характеризують частки трудових ресурсів, задіяних у відповідних галузях виробництва;

L_0 – кількість трудових ресурсів у початковий момент часу t_0 ;

$A(X, K, t) = [A_{ij}(X, K, t)]$, $i, j = 1, \dots, n$ – матриця коефіцієнтів прямих затрат; $A_{ij}(X, K, t)$, $i, j = 1, \dots, n$ – коефіцієнт прямих

затрат продукту i -ої галузі на виробництво одиниці валового продукту j -ої галузі;

$\mu(t) = \text{diag}(\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))$ – матриця коефіцієнтів амортизації;

$p(t) = \text{diag}(p_1(t), \dots, p_n(t))^T$ – матриця рівня завантаженості виробничих потужностей;

$s(t) = \text{diag}(s_1(t), \dots, s_n(t))^T$ – матриця норми накопичення основного капіталу.

Кожна із величин $X_i, W_i, Y_i, I_i, I_i^*, K_i, p_i, s_i, F_i$, які належать до i -ої галузі ($i=1, \dots, n$), має той самий економічний зміст, що і відповідні величини в однопродуктовій моделі (див. п. 1.4.1).

Для однозначного обчислення розв'язку модель (4.38)–(4.44) доповнюють початковими умовами:

$$K(t_0) = K_0,$$

де $K_0 = (K_{01}, \dots, K_{0n})^T$ – вектор основних виробничих фондів (капіталу) в початковий момент часу t_0 .

Зупинимось на деяких характерних рисах економічної моделі багатогалузевої економіки (4.38)–(4.44), які відрізняють її від однопродуктової моделі (4.19).

1. Передусім частина продукту кожної із галузей витрачається на виробниче споживання як самої галузі, так і інших галузей. Частка цього продукту визначається рівнянням (4.39). Після підстановки (4.39) в (4.38) отримаємо рівняння:

$$X(t) = A(X, K, t)X + Y(t), \quad (4.45)$$

яке відображає розподіл кінцевого продукту на виробниче і невиробниче споживання.

Припустимо, що елементи A_{ij} матриці A є постійними (не залежать від часу t і величини валового продукту X та величини капіталу K). В результаті дістанемо традиційну економіко-математичну модель міжгалузевого балансу для періоду t :

$$X = AX + Y. \quad (4.46)$$

З метою спрощення запису в моделі міжгалузевого балансу залежність X, Y від t опущено. У скалярному вигляді модель міжгалузевого балансу набуде вигляду такої системи алгебричних рівнянь:

$$X_i = \sum_{j=1}^n A_{ij} X_j + Y_i, \quad i=1, \dots, n. \quad (4.47)$$

Міжгалузеві матеріальні баланси (і їхні математичні моделі) розробляють для відображення системи матеріально-речових зв'язків процесу відтворення суспільного продукту. Вони є необхідним інструментом при плануванні збалансованого розвитку всіх галузей економіки. Зауважимо, що міжгалузеві матеріальні баланси можуть розроблятися в різних одиницях вимірювання – натуральних (фізичних), цінових, трудових [7, 12, 14, 18, 20]. Такі баланси доцільно розглядати як складову частину узагальнених балансових побудов, що охоплюють одночасно і матеріально-речові взаємозв'язки, і взаємозв'язки з урахуванням суспільних затрат.

При заданому значенні валового продукту X неважко знайти величину кінцевого продукту Y :

$$Y = (E - A)X, \quad (4.48)$$

де E – одинична діагональна матриця.

Розв'язавши систему (4.48) відносно X , отримаємо значення вектора кінцевого продукту:

$$X = (E - A)^{-1} Y. \quad (4.49)$$

Розв'язок рівняння (4.49) даватиме змогу визначити кількість валового продукту X , яку необхідно випустити, щоб отримати бажану величину кінцевого продукту Y .

Матриця коефіцієнтів прямих затрат належить до класу невід'ємних матриць. Проте коефіцієнти матриці A не можуть приймати довільні додатні значення, оскільки величини X і Y за своїм економічним змістом є невід'ємними. Тому в моделях міжгалузевого балансу використовують так звані продуктивні матриці [12, 14, 21]. Матрицю A називають продуктивною, якщо існує такий вектор $x \geq 0$, що $(E - A)x = y \geq 0$. Для

продуктивності матриці A необхідно і достатньо, щоб виконувалась одна з таких умов:

1. Усі головні мінори матриці $(E - A)$ додатні та менші одиниці. Зокрема, головний міnor $0 < \det(E - A) < 1$. Звідси випливає існування оберненої матриці.
2. Усі власні значення матриці A за модулем менші одиниці.
3. Матриця $(E - A)^{-1} \geq 0$.

Достатньою умовою продуктивності матриці A є така умова:

$$\sum_{j=1}^n A_{ij} < 1, j = 1, \dots, n. \quad (4.50)$$

Виконання умови (4.50) гарантує також існування оберненої матриці $(E - A)^{-1}$.

2. Кінцевий продукт, згідно з (4.40), розподіляється на інвестиції $I^*(t)$ у розвиток і відновлення виробничих потужностей і невиробниче споживання $C(t)$. При цьому інвестиції i -ої галузі $I_i^*(t)$ розподіляються як на інвестиції в i -у галузь, так і на інвестиції в інші галузі:

$$I_i^*(t) = I_{i1}^*(t) + \dots + I_{in}^*(t), i = 1, \dots, n. \quad (4.51)$$

Відповідно, величину інвестицій I_i в i -у галузь сформовано як з інвестицій i -ої галузі I_{ii}^* , так і з інвестицій I_{ji}^* , які надходять з інших галузей $j, j = 1, \dots, n, j \neq i$:

$$I_i(t) = I_{ii}^*(t) + \dots + I_{ni}^*(t). \quad (4.52)$$

Очевидно, що якщо немає зовнішніх інвестицій, то:

$$\sum_{i=1}^n I_i^*(t) = \sum_{i=1}^n I_i(t). \quad (4.53)$$

Нехай $D^*(t) = [d_{ij}^*(t)]$, $d_{ij}^*(t) = \frac{I_{ji}^*(t)}{I_i^*(t)}$, $0 \leq d_{ij}^*(t) \leq 1$, $i, j = 1, \dots, n$ — матриця структурних коефіцієнтів основних виробничих

фондів (структурна матриця інвестицій), $\sum_{j=1}^n d_{ij}^*(t) = 1$, $i = 1, \dots, n$. Елемент $d_{ij}^*(t)$ характеризує частину інвестицій, яку i -а галузь спрямовує на розвиток j -ої галузі. Тоді співвідношення (4.51) можна подати у вигляді:

$$I_i^*(t) = \sum_{j=1}^n d_{ij}^*(t) I_j^*(t), i = 1, \dots, n. \quad (4.54)$$

Знаючи матрицю $D^*(t)$, можна записати у матричній формі співвідношення (4.52) між величинами $I(t)$ та $I^*(t)$:

$$I(t) = (D^*(t))^T I^*(t). \quad (4.55)$$

Вважатимемо, що існує обернена матриця $D(t) = \left[(D^*(t))^T \right]^{-1} = [d_{ij}(t)]$, $i, j = 1, \dots, n$. $D(t)$ — структурна матриця фондостворюючих затрат. Елемент $d_{ij}(t)$ показує величину інвестицій i -ої галузі на одиницю приросту основних виробничих фондів j -ої галузі (питомі затрати i -ої галузі на розширення фондів j -ої галузі). Розв'язавши рівняння (4.55) щодо $I^*(t)$, матимемо лінійну залежність $I^*(t)$ від $I(t)$:

$$I^*(t) = D(t) \cdot I(t). \quad (4.56)$$

Зауважимо: якщо i -а галузь спрямовує інвестиції тільки у розвиток і відновлення своїх власних основних виробничих фондів, то $I_i^* = I_i$, $i = 1, \dots, n$. У цьому випадку матриці D^* , D є діагональними одиничними матрицями, $D^* = D = E$.

3. Рівняння (4.44) описує зміну всіх трудових ресурсів, задіяних у різних галузях виробництва. Очевидно, що сумарна кількість трудових ресурсів є обмеженою загальною кількістю наявних трудових ресурсів у країні (регіоні):

$$\sum_{i=1}^n L_i(t) \leq L(t). \quad (4.57)$$

Зробивши різні припущення стосовно залежності між величинами A, μ, p, s, F, L, C від своїх аргументів із моделі (4.38)–(4.44), можна отримати різні версії динамічних моделей розвитку багатогалузевої економіки [7, 13, 14, 20, 21].

1.4.5. Рівняння динаміки приросту капіталу в моделі багатогалузевої економіки

Виразимо, як у випадку однопродуктової моделі, динаміку приросту капіталу через виробничі функції. З рівняння (4.38) з урахуванням (4.39), (4.42) знаходимо кінцевий продукт Y , виражений через виробничу функцію:

$$Y(t) = (E - A(t)) p(t) F(K, L, t). \quad (4.58)$$

Після підстановки (4.58) в балансове рівняння (4.40) отримуємо вектор інвестицій I^* :

$$I^*(t) = (E - A(t)) p(t) F(K, L, t) - C(t). \quad (4.59)$$

З (4.55), (4.59) знаходимо величину інвестицій I , які отримують одні галузі з інших галузей:

$$I(t) = (D^*(t))^T ((E - A(t)) p(t) F(K, L, t) - C(t)). \quad (4.60)$$

Підставивши співвідношення (4.60) в (4.41), отримуємо таку систему звичайних диференціальних рівнянь, які описують динаміку приросту капіталу:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= (D^*(t))^T (E - A(t)) p(t) F(K, L, t) - \\ &- \mu(t) \cdot K(t) - (D^*(t))^T C(t). \end{aligned} \quad (4.61)$$

Якщо врахувати, що інвестиції I^* є певною часткою кінцевого продукту (задовольняють співвідношення (4.43)), то рівняння (4.61) в цьому випадку матиме вигляд:

$$\frac{dK}{dt} = (D^*(t))^T s(t) (E - A(t)) p(t) F(K, L, t) - \mu(t) \cdot K(t). \quad (4.62)$$

Система рівнянь (4.61) (або (4.62)) доповнюється початковою умовою:

$$K(t_0) = K_0 \quad (4.63)$$

і співвідношеннями (4.44), (4.57) для знаходження трудових ресурсів $L_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, задіяних у різних галузях.

1.4.6. Динамічна модель міжгалузевого балансу

Розглянемо динамічну модель міжгалузевого балансу, яку отримують з моделі (4.38)–(4.44) за таких припущень (аналогічних зробленим при побудові однопродуктової динамічної моделі Леонтьєва (4.35)):

- а) коефіцієнти матриць A і μ протягом розглянутого періоду є постійними;
- б) виробничі потужності кожної із галузей є цілковито завантаженими: $p(t) = E$, E – діагональна матриця розмірності n ;
- в) виробнича функція кожної із галузей вибирається у вигляді (4.10):

$$F_i(K_i, L, t) = \tilde{k}_{ix} K_i(t), \quad i = \overline{1, n}, \quad (4.64)$$

де $\tilde{k}_{ix} = \text{const}$ – капітальний коефіцієнт i -ої галузі. Співвідношення (4.64) можна подати у матричному вигляді:

$$F(K, L, t) = \tilde{k}_x K(t), \quad (4.65)$$

де $\tilde{k}_x = \text{diag}(\tilde{k}_{1x}, \dots, \tilde{k}_{nx})$ – діагональна матриця капітальних вкладень основного виробництва.

- г) існує обернена матриця $D(t) = \left[(D^*(t))^T \right]^{-1}$, яка дає змогу виразити інвестиції $I^*(t)$ через $I(t)$ згідно з (4.56).

Враховуючи зроблені припущення, зі співвідношень (4.42), (4.65) випливає:

$$K(t) = \tilde{k}_x^{-1} X(t), \quad \frac{dK}{dt} = \tilde{k}_x^{-1} \frac{dX}{dt}. \quad (4.66)$$

З рівняння (4.41) з урахуванням (4.66) знаходимо вектор інвестицій $I(t)$:

$$I(t) = \mu \tilde{k}_x^{-1} X(t) + \tilde{k}_x^{-1} \frac{dX}{dt}.$$

Після підстановки останнього співвідношення в (4.56), отримуємо вектор інвестицій $I^*(t)$, виражений через величину валового продукту:

$$I^*(t) = D\mu \tilde{k}_x^{-1} X(t) + D\tilde{k}_x^{-1} \frac{dX}{dt}. \quad (4.67)$$

Підставивши співвідношення (4.39), (4.40), (4.67) у балансове рівняння (4.38), отримаємо рівняння динаміки валового продукту:

$$\dot{X}(t) = AX(t) + G \cdot X(t) + B \frac{dX(t)}{dt} + C(t), \quad (4.68)$$

де $G = D\mu \tilde{k}_x^{-1} = [G_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$ – матриця коефіцієнтів амортизаційних відрахувань; $B = D\tilde{k}_x^{-1} = [B_{ij}]$, $i, j = 1, \dots, n$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів виробництва.

Рівняння (4.68) називають динамічною міжгалузеву моделлю В.Леонтьєва [12]. Цю модель запропоновано на початку 50-х років американським економістом В.Леонтьєвим. Зауважимо, що рівняння (4.68) отримані В.Леонтьєвим дещо іншим підходом як результат розвитку статичної моделі міжгалузевого балансу (4.46). Модель міжгалузевого балансу та її дискретні аналоги використовували протягом багатьох років для планування розвитку економік багатьох країн і світової економіки загалом [7, 12, 13, 18-21]. Використанню динамічної моделі (4.68) передують визначення коефіцієнтів матриць A , G , B на основі узагальнення статистичних даних.

Векторне диференціальне рівняння (4.68) доповнюється початковою умовою:

$$X(t_0) = X_0, \quad (4.69)$$

де $X_0 = (X_{01}, \dots, X_{0n})^T$ – вектор валового продукту в початковий момент часу t_0 .

Динамічну міжгалузеву модель Леонтьєва (4.68) часто записують у дещо скороченому вигляді:

$$X(t) = AX(t) + B \frac{dX(t)}{dt} + C(t). \quad (4.70)$$

У рівнянні (4.70) матриця A є сумою матриць $A + G$ рівняння (4.68). Матрицю A в (4.70) також називають матрицею коефіцієнтів прямих затрат. Однак, на відміну від моделі (4.68), коефіцієнти матриці A в (4.70) містять також затрати на відновлення вибуття та ремонт основних виробничих фондів.

1.5. Еколого-економічні моделі

Розглянуті у підрозділі 1.4 моделі економічної динаміки побудовано на припущенні про необмеженість природних ресурсів, задіяних у виробництві. Це припущення є прийнятне за умови порівняно слабого взаємовпливу економіки і довкілля один на одного. Сьогодні це припущення не узгоджується з реальною дійсністю. Економічна діяльність зумовлює виснаження природних ресурсів, забруднення довкілля шкідливими викидами виробництва і продуктами життєдіяльності людини. Водночас відбувається зворотний вплив стану довкілля і природних ресурсів на економічну діяльність і здоров'я населення. Унаслідок загострення питання взаємодії суспільства і довкілля проблемам моделювання еколого-економічних процесів останніми десятиріччями присвячено чимало досліджень [6, 8-10, 12, 13, 16, 22, 25, 27, 28, 30]. Програму дій про перехід суспільства на сталий (самовідтворювальний) розвиток економіки, який забезпечить збалансованість природокористування та можливостей довкілля прийнято в 1992 р. в Ріо-де-Жанейро на зустрічі керівників більшості країн світу з проблем планети Земля.

У цьому пункті приведено декілька моделей, які відображають головні підходи до моделювання еколого-економічної взаємодії. В припущенні просторової однорідності розглядуваних характеристик економіки і довкілля моделі сформульовано як СЗДР в поєднанні з алгебричними рівняннями і нерівностями. У пп. 1.5.1-1.5.3 досить детально описано побудову агрегованих динамічних еколого-економічних моделей. У п. 1.5.4 агреговану еколого-економічну модель узагальнено на випадок багатогалузевої економіки. У п. 1.5.5 на основі моделі міжгалузевої еколого-економічної взаємодії отримано еколого-економічну модель випуску продукції з допомогою різних технологічних процесів. У пп. 1.5.6-1.5.8 коротко описано відомі моделі Леонтьєва-Форда, Моно-Ієрусалимського та глобальну модель Форрестера. Зауважимо, що еколого-економічні моделі містять велику кількість параметрів, які визначаються шляхом обробки значної кількості даних спостережень спеціалістами різних галузей

(економістами, біологами, екологами і ін.). Отже, еколого-економічні моделі носять міждисциплінарний характер.

1.5.1. Агрегована динамічна еколого-економічна модель

Розглянемо однопродуктову макроекономічну модель розвитку економіки з урахуванням впливу природних ресурсів. Нехай R – деякий скалярний показник, який характеризує стан природних ресурсів (називатимемо його узагальненим природним ресурсом). Вважатимемо, що ресурс однорідно розподілений на розглянутій території. Відновлення природного ресурсу відбувається шляхом створення спеціальних відновлювальних потужностей (очисних споруд, заповідних зон тощо). Погіршення якості і зменшення кількості ресурсу зумовлює збільшення затрат у виробничій сфері. Врахування впливу природних ресурсів в однопродуктовій еколого-економічній моделі здійснюється за такою схемою:

- вводять додаткові рівняння, які описують діяльність узагальненої відновлювальної галузі;
- вводять рівняння, яке описує динаміку природних ресурсів R ;
- коефіцієнти рівнянь вважають залежними від стану природних ресурсів R .

У цьому випадку економіку країни розглядають як двогалузеву. Результатом діяльності першої (основної) галузі є виробництво валового продукту X (див. п. 1.4.1). Результатом діяльності другої галузі є проведення відновлювальних заходів, які визначаються величиною (вартістю) відновлювальних затрат X_R . В силу специфіки діяльності відновлювальної галузі розглянемо детальніше побудову агрегованої еколого-економічної моделі.

Валовий продукт X в t -му періоді розподіляється на виробниче споживання в основній галузі W_X та кінцевий продукт Y :

$$X(t) = W_X(t) + Y(t). \quad (5.1)$$

Виробниче споживання у відновлювальній галузі розглядають як інвестиції основної галузі у відновлювальну галузь (тому доданок, який характеризує виробниче споживання, не включено в (5.1)).

Кінцевий продукт розподіляється на інвестиції $I(t)$ в основну та відновлювальні галузі ($I_X(t)$ та $I_R(t)$, відповідно) і кінцеве споживання $C(t)$:

$$Y(t) = I(t) + C(t), \quad (5.2)$$

$$I(t) = I_X(t) + I_R(t). \quad (5.3)$$

Припускаємо, що інвестиції I_X , I_R цілковито освоюються у t -му періоді. Їх поділяють на чисті капіталовкладення на розширення виробничих потужностей (основного капіталу) K_X , K_R відповідних галузей та амортизаційні відрахування V_X , V_R :

$$I_X(t) = \frac{dK_X(t)}{dt} + V_X(t), \quad (5.4)$$

$$I_R(t) = \frac{dK_R(t)}{dt} + V_R(t). \quad (5.5)$$

Величину валового продукту X і величину відновлювальних робіт X_R , як і в п. 1.4.1, характеризують виробничі функції F_X та F_R :

$$0 \leq X(t) \leq F_X(K_X, L_X, R, t), \quad (5.6)$$

$$0 \leq X_R(t) \leq F_R(K_R, L_R, R, t), \quad (5.7)$$

$$L_X(t) + L_R(t) \leq L(t), \quad (5.8)$$

де L_X , L_R — кількість трудових ресурсів, задіяних у основній і відновлювальній галузях, відповідно; L — загальна кількість трудових ресурсів. На відміну від підрозділу 1.4 виробничі функції залежать від природного ресурсу R .

Динаміку ресурсу R з урахуванням ефектів самовідновлення, споживання (виробничого і невиробничого) і ймовірного відтворення подамо у вигляді:

$$\frac{dR}{dt} = \bar{Q}_R(R, R^*) - \bar{Q}_X(X, R, t) - \bar{Q}_{I_X}(I_X, R, t) - \bar{Q}_{X_R}(X_R, R, t) - \bar{Q}_{I_R}(I_R, R, t) - \bar{Q}_L(L, R, t) + \bar{Q}_{X_R}^*(X_R, R, t), \quad (5.9)$$

де R^* — показник незбуреного стану природних ресурсів (під незбуреним станом ресурсу розуміють стан ресурсу за відсутності його експлуатації); \bar{Q}_X , \bar{Q}_{I_X} , \bar{Q}_{X_R} , \bar{Q}_{I_R} — функції, які характеризують вплив на природні ресурси виробничої діяльності і розширення виробничих потужностей у виробничій і відновлювальних галузях, відповідно; \bar{Q}_L — вплив побутової діяльності населення на стан природного ресурсу; \bar{Q}_R — функція, яка характеризує здатність ресурсів до самовідновлення (наближення R до R^*); $\bar{Q}_{X_R}^*$ — функція, яка характеризує вплив відновлювальних галузей на природні ресурси.

На відміну від виробничої галузі діяльність відновлювальної галузі спрямована виключно на відновлення ресурсу R (це відображає останній доданок у (5.9)). Тому на X_R , яка визначається виробничою функцією (5.7), не записуються рівняння, аналогічні тим, які записано для валового продукту (рівняння (5.1) – (5.4)).

Еколого-економічна модель (5.1)–(5.9), яка описує динаміку 14-ти функцій X , X_R , W_X , Y , C , I , I_X , I_R , V_X , V_R , L , L_X , L_R , R , є досить узагальненою. Для однозначного їхнього визначення доповнимо цю модель додатковими (дещо спрощеними) співвідношеннями, аналогічними (4.12) – (4.16):

$$\begin{aligned} W_X(t) &= A_X(R, t)X, \\ V_X(t) &= \mu_X(R, t)K_X(t), \\ V_R(t) &= \mu_R(R, t)K_R(t), \\ X(t) &= p_X(t)F_X(K_X, L_X, R, t), \\ X_R(t) &= p_R(t)F_R(K_R, L_R, R, t), \\ I(t) &= s(K_X, K_R, R, t)Y(t), \quad s = s_X + s_R, \\ I_X(t) &= s_X Y(t), \quad I_R(t) = s_R Y(t), \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$L(R, t) = L_0 e^{\xi(R)(t-t_0)}, \quad s_X^{(L)}(t) + s_R^{(L)}(t) \leq 1,$$

$$L_X(t) = s_X^{(L)} L(t), \quad L_R(t) = s_R^{(L)} L(t).$$

Параметри $\mu_X, \mu_R, p_X, p_R, s_X, s_R$ мають той самий зміст, що і в п. 1.4.1; $s_X^{(L)}, s_R^{(L)}$ характеризують частку трудових ресурсів, задіяних у виробничій і відновлювальних галузях.

Функції $\bar{Q}_X, \bar{Q}_{I_X}, \bar{Q}_{X_R}, \bar{Q}_{I_R}, \bar{Q}_L, \bar{Q}_{X_R}^*$ досить часто лінійно залежать від відповідного чинника виробництва:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_X(X, R, t) &= Q_X(R, t)X(t), \\ \bar{Q}_{I_X}(I_X, R, t) &= Q_{I_X}(R, t)I_X(t), \\ \bar{Q}_{X_R}(X_R, R, t) &= Q_{X_R}(R, t)X_R(t), \\ \bar{Q}_{I_R}(I_R, R, t) &= Q_{I_R}(R, t)I_R(t), \\ \bar{Q}_L(L, R, t) &= Q_L(R, t)L(t), \\ \bar{Q}_{X_R}^*(X_R, R, t) &= Q_{X_R}^*(R, t)X_R(t), \end{aligned} \quad (5.11)$$

де $Q_X, Q_{I_X}, Q_{I_R}, Q_{X_R}$ – коефіцієнти, які характеризують погіршення стану природних ресурсів унаслідок виробництва і нарощування виробничих потужностей у відповідних галузях; Q_L – коефіцієнт, який характеризує вплив споживання і побутової діяльності на природні ресурси; $Q_{X_R}^*$ – коефіцієнт, який характеризує покращення стану природних ресурсів завдяки діяльності відновлювальної галузі.

Самовідновлення ресурсів у деяких випадках можна записати такою лінійною залежністю:

$$\bar{Q}_R(R, R^*) = Q_R(t)(R^* - R(t)), \quad (5.12)$$

де $Q_R(t)$ – коефіцієнт самовідновлення ресурсу.

Наявність показника стану природних ресурсів R у відповідних параметрах моделі підкреслює їхню залежність від R . Залежність параметрів моделі від часу t відображає зміну з часом відповідних параметрів (наприклад, під впливом науково-технічного прогресу).

Після підстановки (5.2), (5.3) у рівняння (5.1) і врахування залежностей (5.10)–(5.12) еколого-економічна модель (5.1) – (5.9) матиме вигляд:

$$X = A_X X + Y, \quad (5.13)$$

$$Y = I + C, \quad I = I_X + I_R, \quad (5.14)$$

$$I_X = \frac{dK_X}{dt} + \mu_X K_X, \quad (5.15)$$

$$I_R = \frac{dK_R}{dt} + \mu_R K_R, \quad (5.16)$$

$$\frac{dR}{dt} = Q_R(R^* - R) - Q_X X - Q_{I_X} I_X - \quad (5.17)$$

$$- Q_{X_R} X_R - Q_{I_R} I_R - Q_L L + Q_{X_R}^* X_R$$

$$X = p_X F_X, \quad X_R = p_R F_R, \quad (5.18)$$

$$I = s_Y Y, \quad I_X = s_X Y, \quad I_R = s_R Y, \quad s = s_X + s_R, \quad (5.19)$$

$$L_X = s_X^{(L)} L, \quad L_R = s_R^{(L)} L, \quad s_X^{(L)} + s_R^{(L)} \leq 1, \quad (5.20)$$

$$L(t) = L_0 e^{\xi(t-t_0)}. \quad (5.21)$$

У рівняннях (5.13)–(5.21) опущено для спрощення запису залежність відповідних параметрів і функцій від R та t .

Для чисельного дослідження моделі (5.13)–(5.21) необхідно задати:

- функції і параметри, які входять у відповідні рівняння:

$$A_X, \mu_X, \mu_R, Q_R, Q_X, Q_{I_X}, Q_{X_R}, Q_{I_R}, Q_L,$$

$$Q_{X_R}^*, p_X, p_R, s_X, s_R, s_X^{(L)}, \xi, L_0;$$

- значення функцій K_X, K_R, R у початковий момент часу:

$$K_X(t_0) = K_{X0}, \quad K_R(t_0) = K_{R0}, \quad R(t_0) = R_0. \quad (5.22)$$

Агрегована еколого-економічна модель (5.13)–(5.21) містить три балансові рівняння (5.13)–(5.14), три диференціальні рівняння (5.15)–(5.17) і десять співвідношень (5.18)–(5.21), які пов'язують між собою різні параметри моделі. Загалом така модель є задачею Коші для системи нелінійних диференціальних і

алгебричних рівнянь. Її розв'язування можливе (крім часткових випадків) тільки з допомогою числових методів.

1.5.2. Рівняння динаміки капіталу і ресурсів

Після відповідних перетворень рівнянь моделі (5.13)–(5.21) отримуємо (аналогічно до пп. 1.4.2, 1.4.5) рівняння динаміки капіталу в основній і відновлювальній галузях та рівняння динаміки ресурсу, виражені через відповідні виробничі функції:

$$\frac{dK_X}{dt} = s_X(1 - A_X) p_X F_X - \mu_X K_X, \quad (5.23)$$

$$\frac{dK_R}{dt} = s_R(1 - A_X) p_X F_X - \mu_R K_R, \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{dR}{dt} = & Q_R(R^* - R) - Q_{X_R} p_R F_R - Q_L L + Q_{X_R}^* p_R F_R - \\ & - [Q_X + Q_{I_X} s_X(1 - A_X) + Q_{I_R} s_R(1 - A_X)] p_X F_X. \end{aligned} \quad (5.25)$$

Рівняння (5.23)–(5.25) доповнюються заданням виробничих функцій F_X , F_R , рівняннями (5.20), (5.21), які характеризують динаміку та розподіл трудових ресурсів, і початковими умовами (5.22). Запишемо рівняння (5.23)–(5.25) через нормовані показники (як у п. 1.4.1).

Нехай:

$$x = \frac{X}{L_X}, y = \frac{Y}{L_X}, i_X = \frac{I_X}{L_X}, k_X = \frac{K_X}{L_X} \quad \text{— відповідно продуктив-$$

ність праці, кількість кінцевого продукту на одного працівника, інвестиції на одного працівника та фондоозброєність в основній галузі;

$$x_R = \frac{X_R}{L_R}, i_R = \frac{I_R}{L_R}, k_R = \frac{K_R}{L_R} \quad \text{— відповідно продуктивність праці,$$

інвестиції на одного працівника та фондоозброєність у відновлювальній галузі;

$c = \frac{C}{L}, r = \frac{R}{L}, r^* = \frac{R^*}{L}$ — величина споживання на одного працівника, кількість природного ресурсу (збуреного і незбуреного), що припадає на одного працівника.

Вважатимемо, що виробничі функції є лінійними однорідними функціями з показниками однорідності, які дорівнюють одиниці:

$$F_X(\lambda_X K_X, \lambda_X L_X, t) = \lambda_X F_X(K_X, L_X, t), \quad (5.26)$$

$$F_R(\lambda_R K_R, \lambda_R L_R, t) = \lambda_R F_R(K_R, L_R, t), \quad (5.27)$$

Поклавши в (5.26), (5.27) $\lambda_X = L_X^{-1}$, $\lambda_R = L_R^{-1}$, отримуємо:

$$x = \frac{X}{L_X} = p_X F_X\left(\frac{K_X}{L_X}, \frac{L_X}{L_X}, t\right) = p_X F_X(k_X, 1, t) = p_X f_X(k_X, t),$$

$$x_R = \frac{X_R}{L_R} = p_R F_R\left(\frac{K_R}{L_R}, \frac{L_R}{L_R}, t\right) = p_R F_R(k_R, 1, t) = p_R f_R(k_R, t),$$

де f_X, f_R — нормовані виробничі функції, які характеризують продуктивність праці в основній і відновлювальній галузях як функції відповідних фондоозброєностей.

Вважатимемо, що параметри $s_X^{(L)}, s_R^{(L)}$, які характеризують частку трудових ресурсів, задіяних у виробничій і відновлювальній галузях, не залежать від часу t . З урахуванням введених величин рівняння (5.23)–(5.25) унаслідок відповідних перетворень набудуть вигляду:

$$\frac{dk_X}{dt} = s_X(1 - A_X) p_X f_X - (\mu_X + \xi) k_X, \quad (5.28)$$

$$\frac{dk_R}{dt} = s_R(1 - A_X) p_X f_X \frac{s_X^{(L)}}{s_R^{(L)}} - (\mu_R + \xi) k_R, \quad (5.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} = & Q_R(r^* - r) - \xi r - s_R^{(L)} Q_{X_R} p_R f_R - Q_L + s_R^{(L)} Q_{X_R}^* p_R f_R - \\ & - s_X^{(L)} [Q_X + Q_{I_X} s_X(1 - A_X) + Q_{I_R} s_R(1 - A_X)] p_X f_X. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Система рівнянь (5.28)–(5.30) доповнюється початковими умовами, які випливають з (5.22):

$$\begin{aligned} k_X(t_0) &= k_{X0}, \quad k_R(t_0) = k_{R0}, \quad r(t_0) = r_0, \\ k_{X0} &= \frac{K_{X0}}{s_X^{(L)} L_0}, \quad k_{R0} = \frac{K_{R0}}{s_R^{(L)} L_0}, \quad r_0 = \frac{R_0}{L_0}. \end{aligned} \quad (5.31)$$

1.5.3. Еколого-економічна модель з урахуванням забруднення

Головною характеристикою стану довкілля в розглядуваних макромоделях є узагальнений природний ресурс R . Залежно від мети дослідження в макромоделях вибирають різні показники, які характеризують узагальнений природний ресурс. Якщо ресурсом вибрано запас корисного ресурсу (наприклад, запаси корисних копалин, запаси деревини), то його зменшення негативно впливає на розвиток економіки. В цьому випадку, зазвичай, $R < R^*$ і функції $Q_R, Q_X, Q_{I_X}, Q_{X_R}, Q_{I_R}, Q_L, Q_{X_R}^*$ є додатними. Якщо ж під ресурсом розуміти об'єм узагальненого забруднення, то його зменшення є доцільним. Унаслідок важливості впливу забруднення на стан довкілля і здоров'я населення проблемам побудови моделей еколого-економічної взаємодії з урахуванням забруднення приділяють значну увагу [8, 9, 12, 13, 16, 22, 25, 27, 28, 30]. У випадку, коли R є узагальненим забрудненням, його часто позначають через Z . Тоді $Z > Z^*$ (Z^* – величина узагальненого забруднення за відсутності виробництва; у багатьох дослідженнях покладають $Z^* = 0$) і функції $Q_R, Q_X, Q_{I_X}, Q_{X_R}, Q_{I_R}, Q_L, Q_{X_R}^*$ є від'ємними. Ввівши функції $D_Z = -Q_R, \dots, D_{X_Z}^* = -Q_{X_R}^*$, рівняння динаміки забруднення записують у вигляді:

$$\frac{dZ}{dt} = D_X X + D_{I_X} I_X + D_{X_Z} X_Z + D_{I_Z} I_Z + D_L L - D_{X_Z}^* X_Z - D_Z Z. \quad (5.32)$$

Якщо додатково припустити, що знешкодження забруднення, розширення виробництва і побутова діяльність населення не приводять до забруднення довкілля чи воно є набагато меншим порівняно із забрудненням довкілля основним виробництвом

($D_{I_X} = D_{X_Z} = D_{I_Z} = D_L = 0$), то рівняння динаміки забруднення (5.32) набуде вигляду:

$$\frac{dZ}{dt} = D_X X - D_{X_Z}^* X_Z - D_Z Z, \quad (5.33)$$

де D_X – частка виробничого забруднення від загального об'єму валового продукту; $D_{X_Z}^*$ – кількість одиниць забруднення, які знищуються одиницею капіталу, вкладеного в очисні заходи; D_Z – коефіцієнт асиміляції (природного зменшення забруднення).

Якщо підставити відповідні виробничі функції в (5.33), то рівняння динаміки забруднень набуде вигляду:

$$\frac{dZ}{dt} = D_X p_X F_X - D_{X_Z}^* p_Z F_Z - D_Z Z, \quad (5.34)$$

де F_X, F_Z – виробничі функції основної та очисної галузей, p_X, p_Z – рівень їхньої завантаженості.

У нормованих показниках рівняння (5.33) матиме вигляд:

$$\frac{dz}{dt} = D_X p_X f_X - D_{X_Z}^* p_Z f_Z - D_Z z - \xi z, \quad (5.35)$$

де $z = \frac{Z}{L}$ – питома величина забруднень (кількість умовного забруднювача, який припадає на одного працівника; k_Z – фондомісткість очисної галузі (є аналогом k_R); $f_Z = f_Z(k_Z, t)$ – виробнича функція очисної галузі; ξ – темп приросту трудових ресурсів, який вважають однаковим для основної та очисної галузей.

Вибираючи різні співвідношення інвестицій s_X, s_R у виробничу і відновлювальну галузі, різні рівні завантаженості виробництва p_X, p_R , можна отримати різні варіанти (сценарії) розвитку еколого-економічної системи. Ці сценарії відрізняються один від одного рівнем споживання та обсягами виробництва кінцевого продукту, а також станом природних ресурсів. Найгіршим сценарієм розвитку еколого-економічної системи є

такий, згідно з яким немає жодних інвестицій у відновлювальну галузь, $s_R = 0$ (у цьому випадку $I_R = K_R = X_R = 0$).

Модель (5.13)–(5.21) можна розширити для окремого врахування як стану природних ресурсів, так і забруднення довкілля. У цьому випадку еколого-економічна модель матиме вигляд:

$$\begin{aligned} X &= A_X X + Y, \\ Y &= I + C, \quad I = I_X + I_R + I_Z, \quad I = sY, \\ I_X &= \frac{dK_X}{dt} + \mu_X K_X, \\ I_R &= \frac{dK_R}{dt} + \mu_R K_R, \\ I_Z &= \frac{dK_Z}{dt} + \mu_Z K_Z, \\ \frac{dR}{dt} &= Q_R(R^* - R) - Q_X X - Q_{I_X} I_X - Q_{X_R} X_R - Q_{I_R} I_R - \\ &\quad - Q_Z X_Z - Q_{I_Z} I_Z - Q_L L + Q_{X_R}^* X_R, \\ \frac{dZ}{dt} &= D_X X + D_{I_X} I_X + D_{X_Z} X_Z + D_{I_Z} I_Z + \\ &\quad + D_{X_R} X_R + D_{I_R} I_R + D_L L - D_{X_Z}^* X_Z - D_Z Z, \\ X &= p_X F_X, \quad X_R = p_R F_R, \quad X_Z = p_Z F_Z, \\ I_X &= s_X Y, \quad I_R = s_R Y, \quad I_Z = s_Z Y, \quad s_X + s_R + s_Z = s, \\ L_X &= s_X^{(L)} L, \quad L_R = s_R^{(L)} L, \quad L_Z = s_Z^{(L)} L, \\ s_X^{(L)} + s_R^{(L)} + s_Z^{(L)} &\leq 1, \quad L(t) = L_0 e^{\xi(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

Коефіцієнти Q_Z, Q_{I_Z} характеризують погіршення стану природних ресурсів (зменшення природних ресурсів) унаслідок знешкодження забруднювачів і нарощування капіталу в очисній галузі. Коефіцієнти D_{X_R}, D_{I_R} характеризують величину забруднення, пов'язану з роботами по відновленню природного ресурсу і нарощуванням капіталу у відновлювальній галузі.

Модель (5.36) доповнюють початковими умовами:

$$\begin{aligned} K_X(t_0) &= K_{X0}, \quad K_R(t_0) = K_{R0}, \\ K_Z(t_0) &= K_{Z0}, \quad R(t_0) = R_0, \quad Z(t_0) = R_0. \end{aligned} \quad (5.37)$$

1.5.4. Міжгалузеві динамічні еколого-економічні моделі

Розрахунки, які базуються на агрегованих еколого-економічних моделях, дають змогу оцінити лише узагальнені показники динаміки економіки і природних ресурсів, такі, наприклад, як темп росту сукупного валового продукту, основних виробничих фондів, споживання, узагальненого природного ресурсу та сукупного забруднення. Стосовно характеристик природного середовища зауважимо, що введений у п. 1.5.1 узагальнений природний ресурс є інтегральним показником. Детальніші механізми функціонування економіки та її взаємозв'язки з природним середовищем, взаємний вплив різних видів природних ресурсів один на одного потребують виділення характеристик для окремих галузей економіки і видів природних ресурсів.

Доцільно враховувати також територіальну локалізацію об'єктів економіки і ресурсів. В економічній складовій унаслідок цього необхідно відобразити транспортні затрати, пов'язані з поставками продукції одних галузей в інші, які в макромоделях закладені в коефіцієнти прямих затрат. У ресурсній частині необхідно враховувати природні переміщення ресурсів – води, повітряних мас, тварин і т. д. Деталізацією агрегованих моделей є побудова міжгалузевих і регіональних еколого-економічних моделей [6, 8, 9, 12, 14, 22].

Розглянемо модель розвитку багатогалузевої економіки з урахуванням взаємовпливу різних видів природних ресурсів. Нехай $R(t) = (R_1(t), \dots, R_m(t))^T$ – деякий векторний показник, який характеризує стан природних ресурсів m видів. Вважаємо, що ресурси однорідно розподілені на розглядуваній території. Нехай економічна система складається з n галузей основного виробництва і m відновлювальних галузей. Як і в п. 1.4.2,

важатимемо, що всі галузі є взаємозалежними. Кожна основна галузь виробляє єдиний продукт і кожен продукт виробляється єдиною галуззю. Кожна відновлювальна галузь відновлює єдиний природний ресурс (або знищує єдиний забрудник) і кожен окремих природний ресурс (окремих забрудник) відновлюється (знищується) єдиною галуззю. Також не враховуватимемо експортно-імпортних операцій і створення виробничих запасів.

Подано динамічну еколого-економічну модель у вигляді, аналогічному (5.13)–(5.21):

$$X = A_X X + Y, \quad (5.38)$$

$$Y = I^* + C, \quad I^* = I_X^* + I_R^*, \quad (5.39)$$

$$I_X = \frac{dK_X}{dt} + \mu_X K_X, \quad (5.40)$$

$$I_R = \frac{dK_R}{dt} + \mu_R K_R, \quad (5.41)$$

$$\frac{dR}{dt} = Q_R(R^* - R) - Q_X X - Q_{I_X} I_X - Q_{X_R} X_R - Q_{I_R} I_R - Q_L L + Q_{X_R}^* X_R, \quad (5.42)$$

$$X = p_X F_X, \quad X_R = p_R F_R, \quad (5.43)$$

$$I^* = sY, \quad I_X^* = s_X Y, \quad I_R^* = s_R Y, \quad s = s_X + s_R, \quad (5.44)$$

$$L_X = \sum_{i=1}^n L_{iX}, \quad L_{iX} = s_{iX}^{(L)} L, \quad 0 \leq s_{iX}^{(L)} \leq 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$L_R = \sum_{j=1}^m L_{jR}, \quad L_{jR} = s_{jR}^{(L)} L, \quad 0 \leq s_{jR}^{(L)} \leq 1, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$s_X^{(L)} = (s_{1X}^{(L)}, \dots, s_{nX}^{(L)})^T, \quad s_R^{(L)} = (s_{1R}^{(L)}, \dots, s_{mR}^{(L)})^T, \quad \sum_{i=1}^n s_{iX}^{(L)} + \sum_{j=1}^m s_{jR}^{(L)} \leq 1, \quad (5.45)$$

$$L(t) = L_0 e^{\xi(t-t_0)}. \quad (5.46)$$

$$I_X = (D_X^*)^T I_X^*, \quad (5.47)$$

$$I_R = (D_R^*)^T I_R^*. \quad (5.48)$$

У рівняннях (5.38)–(5.48) опущено з метою спрощення запису залежність відповідних параметрів і функцій від R та t . Однак, на відміну від моделі (5.13)–(5.21), у моделі (5.38)–(5.48) усі змінні і константи є векторними і матричними величинами. Співвідношення (5.47), (5.48) аналогічні співвідношенню (4.55). Вони вказують на розподіл інвестицій, відповідно, для основних галузей (ці галузі інвестують в основні галузі та отримують інвестиції з основних галузей) і відновлювальних галузей (ці галузі отримують інвестиції з основних галузей і не інвестують жодних галузей). Вектори $X, Y, I_X^*, I_X, C, K_X, F_X$ розмірності n і матриці

$A_X, D_X^*, \mu_X, p_X, s_X$ розмірності $n \times n$ характеризують основні галузі виробництва. Їхній зміст пояснено у п. 1.4.4. Матриця $s_R = \text{diag}(s_{1R}, \dots, s_{mR})^T$ сформована з компонент, кожна з яких характеризує накопичення капіталу у відповідній відновлювальній галузі. Матриця s є сумою матриць s_X та s_R і зазначає сумарну частку інвестицій основних галузей в основні і відновлювальні галузі. Вектори $s_X^{(L)}, s_R^{(L)}$ складаються з компонент, які характеризують частки трудових ресурсів, задіяних в основних і відновлювальних галузях. Величини L_{iX} , $i = 1, \dots, n$, L_{jR} , $j = 1, \dots, m$ задають кількість трудових ресурсів, задіяних в i -ій основній галузі і j -ій відновлювальній галузі, відповідно. Вектор $I_R^* = (I_{1R}^*, \dots, I_{mR}^*)^T$ складається з компонент, кожна з яких характеризує інвестиції, які відповідна галузь основного виробництва спрямовує у відновлювальні галузі.

$$\text{Вектори} \quad X_R = (X_{1R}, \dots, X_{mR})^T, \quad I_R = (I_{1R}, \dots, I_{mR})^T,$$

$K_R = (K_{1R}, \dots, K_{mR})^T$, $F_R = (F_{1R}, \dots, F_{mR})^T$ розмірності m і матриці $\mu_R = \text{diag}(\mu_{1R}, \dots, \mu_{mR})^T$, $p_R = \text{diag}(p_{1R}, \dots, p_{mR})^T$ розмірності $m \times m$ характеризують відновлювальні галузі. Зміст компонент кожного із перелічених векторів і матриць, які належать до i -ої відновлювальної галузі, пояснено у п. 1.5.1. Матриця

$D_R^*(t) = [d_{ijR}^*(t)]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ є структурною матрицею інвестицій. Елемент $d_{ijR}^*(t) = \frac{I_{ijR}^*(t)}{I_i^*(t)}$ вказує, яку частку інвестицій i -а основна галузь спрямовує на розвиток j -ої відновлювальної галузі ($I_{ijR}^*(t)$ – величина цих інвестицій), $0 \leq d_{ijR}^* \leq 1$. Елементи кожного рядка матриць D_X^* , D_R^* володіють наступною властивістю:

$$\sum_{j=1}^n d_{ijX}^* + \sum_{j=1}^m d_{ijR}^* = 1, \quad i = 1, \dots, n.$$

Опишемо детальніше величини, які характеризують природні ресурси:

$R^* = (R_1^*, \dots, R_m^*)^T$ – вектор показників стану незбурених ресурсів;

$Q_R = [Q_{ijR}(R, R^*)]$, $i, j = 1, \dots, m$ – матриця коефіцієнтів відновлення і взаємовпливу природних ресурсів; елемент Q_{iiR} характеризує природне відновлення i -го ресурсу; елемент Q_{ijR} ($i \neq j$) характеризує вплив i -го ресурсу на природну зміну j -го ресурсу;

$Q_X = [Q_{ijX}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ – матриця питомих ресурсних затрат; елемент Q_{ijX} характеризує затрати i -го ресурсу на одиницю випущеної продукції j -ої галузі;

$Q_{I_X} = [Q_{ijI_X}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ – матриця питомих фондоутворюючих ресурсних затрат основних галузей; елемент Q_{ijI_X} характеризує затрати i -го ресурсу на одиницю капіталовкладень у j -ту основну галузь;

$Q_{X_R} = [Q_{ijX_R}]$, $i, j = 1, \dots, m$ – матриця питомих ресурсних затрат; елемент Q_{ijX_R} характеризує затрати i -го ресурсу на

одиницю відновлювальних робіт j -ої відновлювальної галузі;

$Q_{I_R} = [Q_{ijI_R}]$, $i, j = 1, \dots, m$ – матриця питомих фондоутворюючих ресурсних затрат відновлювальних галузей; елемент Q_{ijI_R} характеризує затрати i -го ресурсу на одиницю капіталовкладень у j -ту відновлювальну галузь;

$Q_L = (Q_{1L}, \dots, Q_{mL})^T$ – вектор питомих впливів на ресурси з боку населення;

$Q_{X_R}^* = [Q_{ijX_R}^*]$, $i, j = 1, \dots, m$ – матриця ефективності питомих затрат відновлювальних галузей на відновлення природних ресурсів; елемент $Q_{ijX_R}^*$ характеризує затрати i -ої відновлювальної галузі на одиницю покращення стану j -го природного ресурсу.

Рівняння моделі (5.38)–(5.48) доповнюються початковими умовами:

$$K_X(t_0) = K_{X0}, \quad K_R(t_0) = K_{R0}, \quad R(t_0) = R_0, \quad (5.49)$$

де $K_{X0} = (K_{1X0}, \dots, K_{nX0})^T$, $K_{R0} = (K_{1R0}, \dots, K_{mR0})^T$, $R_0 = (R_{10}, \dots, R_{m0})^T$ – значення відповідних вектор-функцій у початковий момент часу t_0 .

Компоненти ресурсу R можуть характеризувати як запаси і якість природних ресурсів, так і величину різноманітних забруднень. Залежно від змісту показника R_i , $i = 1, \dots, m$ відповідні елементи матриць Q_R , Q_X , Q_{I_X} , Q_{X_R} , Q_{I_R} , Q_L , $Q_{X_R}^*$ можуть бути як додатними, так і від'ємними та нульовими. Наприклад, якщо R характеризує забруднення довкілля різними видами забруднювачів, то відповідні елементи вищезгаданих матриць будуть від'ємними. Зауважимо, що якщо частину компонент вектора природних ресурсів R , які характеризують забруднення, позначити Z , то модель (5.38)–(5.48) можна модифікувати до вигляду (5.36), де виокремлено природні ресурси і забруднення.

1.5.5. Еколого-економічна модель виробництва продукції з допомогою різних технологічних процесів з урахуванням забруднення

Розглянемо еколого-економічну модель випуску певного виду продукції з допомогою n різних технологій, які відрізняються одна від одної як економічною ефективністю, так і величиною забруднення [28, 30]. У цьому випадку різні види технологічних процесів можна розглядати як випуск продукції різними галузями. Таку модель можна отримати з моделі (5.38)–(5.48) за таких припущень:

- якщо галузі випускають однакову продукцію, то матриця A_X коефіцієнтів прямих матеріальних затрат є діагональною, $A_X = \text{diag}(A_{1X}, \dots, A_{nX})^T$; коефіцієнт A_{iX} характеризує прямі матеріальні затрати галузі, яка здійснює випуск продукції по i -ій технології на одиницю випущеної продукції зазначеною галуззю;
- кожна галузь інвестує саму себе та вкладає кошти в боротьбу із забрудненням і не проводить жодних інвестицій в інші галузі;
- випуск продукції по кожній технології та об'єм очисних заходів пропорційні капіталу відповідної галузі;
- виробничі галузі забруднюють довкілля одним видом забруднювача ($m = 1$); тоді інвестиції в очисну галузь рівні сумі інвестицій, які кожна із галузей спрямовує на заходи з боротьби із забрудненням;
- знешкодження забруднення, розширення виробництва і побутова діяльність населення спричиняють значно менше забруднення довкілля порівняно з основним виробництвом (аналогічні припущення зроблено в п. 1.5.3).

З урахуванням таких припущень рівняння моделі (5.38)–(5.48) матимуть вигляд:

$$\begin{aligned} X &= A_X X + Y, \quad A_X = \text{diag}(A_{1X}, \dots, A_{nX})^T, \\ Y &= I_X^* + I_Z^* + C, \\ I_X^* &= s_X Y, \quad I_Z^* = s_Z Y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_X &= I_X^*, \quad I_Z = I_{1Z}^* + \dots + I_{nZ}^*, \\ \frac{dK_X}{dt} &= I_X - \mu_X K_X, \\ \frac{dK_Z}{dt} &= I_Z - \mu_Z K_Z, \\ \frac{dZ}{dt} &= D_X X - D_{XZ} X - D_Z Z, \end{aligned} \quad (5.50)$$

$$X = p_X F_X, \quad X_Z = p_Z F_Z, \quad F_X = \tilde{k}_X K_X, \quad F_Z = \tilde{k}_Z K_Z, \quad \tilde{k}_X = \text{diag}(\tilde{k}_{1X}, \dots, \tilde{k}_{nX}).$$

Параметри \tilde{k}_{iX} , $i = 1, \dots, n$, аналогічно (4.10), називаються капітальними коефіцієнтами основного виробництва по i -ій технології. Параметр \tilde{k}_Z є капітальним коефіцієнтом очисної галузі.

У рівняннях (5.50) величина R позначена через Z , оскільки ми розглядаємо величину забруднення. Оскільки галузі випускають однакову продукцію, то кількість цього виду продукції, яка іде на невиробниче споживання, дорівнює сумі продукції, призначеної для невиробничого споживання, виробленої різними галузями з допомогою різних технологічних процесів:

$$\tilde{C} = C_1 + \dots + C_n.$$

Така модель дає змогу проаналізувати динаміку випуску певного продукту і динаміку забруднення залежно від завантаженості відповідних галузей з різними технологічними процесами – економічно ефективніших (менш затратних), проте більш забруднюючих, і менш економічно ефективних (більш затратних), однак менш забруднюючих.

Рівняння (5.50) доповнюються відповідними початковими умовами:

$$K_X(t_0) = K_{X0}, \quad K_Z(t_0) = K_{Z0}, \quad Z(t_0) = Z_0. \quad (5.51)$$

1.5.6. Динамічна модель Леонтьєва-Форда

Динамічна еколого-економічна модель Леонтьєва-Форда узагальнює динамічну модель міжгалузевого балансу Леонтьєва (4.70), описану в п. 1.4.6 [12, 13]. При цьому галузі економіки розбиваються на дві групи: галузі матеріального виробництва (основне виробництво) і галузі, що утилізують шкідливі відходи (допоміжне виробництво). Рівняння динамічної еколого-економічної взаємодії записують у вигляді:

$$X(t) = A_{11}X(t) + A_{12}X_z(t) + B_1 \frac{dX(t)}{dt} + B_2 \frac{dX_z(t)}{dt} + C(t), \quad (5.52)$$

$$X_z(t) = A_{21}X(t) + A_{22}X_z(t) - Z(t),$$

де $X(t) = (X_1(t), \dots, X_n(t))^T$ – вектор валового продукту основного виробництва (n – кількість галузей основного виробництва); $X_z = (X_{1z}, \dots, X_{mz})^T$ – вектор об'ємів виробництва галузей із знешкодження забруднювачів (вектор об'ємів знищених забруднювачів; m – кількість галузей допоміжного виробництва); $C(t) = (C_1(t), \dots, C_n(t))^T$ – вектор споживання продукції галузей основного виробництва; $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_m(t))^T$ – вектор об'ємів не знищених забруднювачів; $A_{11} = [A_{ij}^{11}]$, $i, j = 1, \dots, n$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних затрат на виробництво продукції основних галузей (сюди зачисляють також затрати на відновлення вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів основного виробництва); $A_{12} = [A_{ij}^{12}]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних затрат на знищення забруднювачів (сюди зачисляють також затрати на відновлення вибуття і капітальний ремонт основних виробничих фондів допоміжного виробництва – очисних споруд); $A_{21} = [A_{ij}^{21}]$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ – матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів основним виробництвом; $A_{22} = [A_{ij}^{22}]$, $i, j = 1, \dots, m$ – матриця коефіцієнтів випуску забруднювачів допоміжним

виробництвом; $B_1 = [B_{ij}^1]$, $i, j = 1, \dots, n$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів основного виробництва; $B_2 = [B_{ij}^2]$, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$ – матриця коефіцієнтів капіталомісткості приростів допоміжного виробництва. Всі елементи введених до розгляду матриць вважаємо невід'ємними і всі її змінні є невід'ємними.

Рівняння (5.52) доповнюються відповідними початковими умовами:

$$X(t_0) = X_0, X_z(t_0) = X_{z0}. \quad (5.53)$$

1.5.7. Кінетична модель Моно-Ієрусалимського

Для найбільш агрегованого опису динамічної взаємодії суспільства і природи можна застосовувати таку модель [13, 25]:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \mu(y, z)x - ux + \omega, \\ \frac{dy}{dt} &= -\alpha\mu(y, z)x - u(y^0 - y) + h, \quad y < y^0, \\ \frac{dz}{dt} &= (\alpha - 1)\mu(y, z)x - ux - v, \end{aligned} \quad (5.54)$$

де x – концентрація корисної продукції; y^0 – концентрація природних ресурсів (сировини); y – концентрація залишкових ресурсів (невикористаної сировини); z – концентрація відходів (забруднень); α – технологічний коефіцієнт, $\alpha = \text{const} > 1$; u – інтенсивність технологічного процесу; v – швидкість надходження нейтралізуючого контрагента (для внутрішнього технологічного очищення); ω – швидкість надходження збагаченої продукції; h – швидкість надходження ресурсу-замінника; $\mu(y, z)$ – монотонно-зростаюча по y та монотонно-спадна по z функція.

Залежно від виду функції μ дістаємо різні варіанти моделі (5.54). У випадку, коли μ вибирають у вигляді

$$\mu(x, z) = \frac{\mu_m y k_z}{(k_y + y)(k_z + z)},$$

де μ_m, k_y, k_z – додатні константи, рівняння (5.54) називають кінетичною моделлю Моно-Ієрусалимського.

Приведена система диференціальних рівнянь не має жодної біологічної специфіки і тому успішно може використовуватись для моделювання будь-якого неперервного технологічного процесу, що супроводжується надходженням сировини і відтоком продуктів переробки. Функціональна залежність $\mu(y, z)$ дає змогу детально виразити нелінійні особливості процесів виробництва, використання ресурсів і утворення забруднень. Саме тому цю кінетичну модель доцільно застосовувати з метою високоагрегованого моделювання розвитку еколого-економічних систем. Зауважимо, що цю модель розроблено і використано для опису процесу росту мікроорганізмів x (біомаси) залежно від надходження живильного субстрату y та утворення продуктів життєдіяльності мікроорганізмів.

Рівняння моделі (5.54) доповнюються відповідними початковими умовами:

$$x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = z_0. \quad (5.55)$$

1.5.8. Модель світової динаміки Форрестера

Модель Форрестера описує взаємодію людини і природи на глобальному (світовому) рівні [10, 27]. У моделі Форрестера цю взаємодію описано п'ятьма диференціальними рівняннями щодо п'яти функцій, які залежать від часу: P – населення Землі; V – капітал (основні фонди); S – частка капіталу в аграрному секторі економіки від їхньої загальної величини V ; R – природні ресурси; Z – величина забруднення. Подаємо рівняння світової динаміки в модифікації авторів роботи [10]:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= P(C_B B_M B_P B_F B_Z - C_D D_M D_P D_F D_Z), \\ \frac{dV}{dt} &= P C_V V_M - \frac{V}{T_V}, \\ \frac{dS}{dt} &= \frac{(1 + U_S) S_F S_Q - S}{T_S}, \\ \frac{dR}{dt} &= -P R_M + \frac{V U_R}{C_R}, \\ \frac{dZ}{dt} &= P Z_V - \frac{Z}{T_Z} - \frac{V U_Z}{C_Z}, \\ M_S &= C_M (1 - S - U_R - U_Z) \frac{V}{P}, \end{aligned} \quad (5.56)$$

де U_R, U_Z – частки капіталу V , які спрямовано, відповідно, на відновлення ресурсу і боротьбу із забрудненням; U_S – параметр, який характеризує капіталовкладення, що надходять у сільське господарство; $C_B, C_D, C_M, C_R, C_V, C_Z, T_S, T_V$ – параметри моделі; $B_M, B_P, B_F, B_Z, D_M, D_P, D_F, D_Z, R_M, S_F, S_Q, T_Z, V_M, Z_V$ – функції, які визначаються на основі емпіричних даних і задаються з допомогою таблиць. Рівень матеріального життя населення визначається величиною M_S . У роботі Форрестера [27] величини U_R, U_Z, U_S покладались рівними нулю.

Рівняння моделі (5.56) доповнено відповідними початковими умовами:

$$P(t_0) = P_0, V(t_0) = V_0, S(t_0) = S_0, R(t_0) = R_0, Z(t_0) = Z_0. \quad (5.57)$$

Робота Форрестера стала першою роботою, яка дала початок усвідомленню суспільством проблеми виснаження ресурсів та екологічної рівноваги. Проведений в рамках моделі (5.56)–(5.57) аналіз засвідчив [27], що при збереженні сучасних тенденцій розвитку період росту населення, капіталу і рівня життя супроводжуватиметься катастрофою, яка виражатиметься у спаді промислового виробництва і швидкому зменшенні кількості

населення. Цей результат спричинений протиріччям між обмеженістю земних ресурсів, обмеженістю сільськогосподарських угідь і невинно зростаючими темпами споживання населення, кількість якого збільшується. Щоб запобігти катастрофі, автор роботи [27] пропонує впровадження цілої низки обмежувальних комплексних заходів, які полягають у стабілізації чисельності населення і об'єму промислового капіталу, зменшенні споживання ресурсів (кількість яких постійно зменшується) і величини забруднення. Перехід до такого стану "глобальної рівноваги" вважається єдиним способом запобігання катастрофи. Введення у модель Форрестера керуючих величин U_R , U_Z , U_S дало змогу в рамках цієї моделі стверджувати [10], що шляхом скерування частки капіталу у відновлювальні галузі катастрофу можна відвернути.

1.6. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. Математичне моделювання складних реакцій

Розкладання етану відбувається за дев'ять елементарних стадій:

- 1) $C_2H_6 \xrightarrow{k_1} CH_3 + CH_3$;
- 2) $C_2H_6 + CH_3 \xrightarrow{k_2} C_2H_5 + CH_4$;
- 3) $C_2H_5 \xrightarrow{k_3} C_2H_4 + H$;
- 4) $C_2H_6 + H \xrightarrow{k_4} C_2H_5 + H_2$;
- 5) $CH_3 + C_2H_5 \xrightarrow{k_5} C_3H_8$;
- 6) $CH_3 + H \xrightarrow{k_6} CH_4$;
- 7) $C_2H_5 + H \xrightarrow{k_7} H_2 + C_2H_4$;
- 8) $C_2H_5 + C_2H_5 \xrightarrow{k_8} C_2H_4 + C_2H_6$;
- 9) $H + H \xrightarrow{k_9} H_2$;

а) записати математичну модель, що описує швидкість накопичення чи витрат речовин, що входять у цю схему розкладу етану;

б) проінтегрувати отриману систему ЗДР одним із чисельних методів при таких початкових даних $[C_2H_6]_{t=0} = 1$; решта речовин має нульову концентрацію.

Сталі реакції мають такі значення: $k_1 = 0,1$; $k_2 = 10$; $k_3 = 10^4$; $k_4 = 10^{-3}$; $k_5 = 1$; $k_6 = 25,3$; $k_7 = 10$; $k_8 = 1$; $k_9 = 15$.

Завдання 2. Рівняння Леслі

Для опису системи *хижак-жертва* Леслі запропонував таку математичну модель:

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - cxy, \quad \frac{dy}{dt} = ey - \frac{fy^2}{x}.$$

Останній доданок другого рівняння враховує відношення чисельності популяції хижака і жертви.

а) побудуйте графіки залежності y від x при $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = 0$;

б) задайте деякі додатні значення параметрів a, b, c, t, f і побудуйте графіки поведінки системи з часом, коли початкові умови відмінні від рівноважних.

Завдання 3. Задача про ячмінь та овес, що ростуть в умовах конкуренції

Нехай поле засіяно одночасно ячменем і вівсом. Конкуренція між рослинами характеризується "відносним простором", необхідним для нормального розвитку кореневої системи та листя. Тому в моделі необхідно враховувати внутрішньовидову і міжвидову конкуренції.

Нехай x_y і x_0 – відносні простори для ячменю і вівса, відповідно. Рівняння розвитку посіву задамо рівняннями Лоткі-Вольтерра:

$$\begin{aligned}\frac{dx_y}{dt} &= G_y (1 - x_y - x_o) x_y, \\ \frac{dx_o}{dt} &= G_o (1 - x_y - x_o) x_o,\end{aligned}\quad (6.1)$$

де G_o, G_y – відносні коефіцієнти росту для вівса і ячменю у конкуренції.

Ці коефіцієнти є функціями часу. Значення цих коефіцієнтів, визначених експериментально, наведемо у таблиці:

Кількість діб	Відносна швидкість росту вівса, G_o	Відносна швидкість росту ячменю, G_y
0	0.4286	0.7143
7	0.1071	0.1190
14	0.0441	0.0634
21	0.0225	0.0431
28	0.0064	0.0242
35	-0.0036	0.0511
42	-0.0065	0.0491

Результати чисельного інтегрування системи рівнянь (6.1) на проміжку (0,40] із заданими початковими даними при лінійній та квадратичній інтерполяції експериментальних даних зобразити графічно.

Завдання 4. Математичне моделювання епідемії

1. Нехай $y_1(t)$ – частка сприйняття частиною населення зараження, $y_2(t)$ – міра зараження, $y_3(t)$ – міра несприйняття частини населення (наприклад, вироблений імунітет). Число людей, які знову заражаються, пропорційне величині $y_1(t)y_2(t)$. Якщо швидкість числа несприйнятливих пропорційна числу заражених, то математична модель епідемії має вигляд:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= -\alpha y_1(t) y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) &= \beta y_1(t) y_2(t) - \gamma y_2(t), \\ y_3(t) &= \delta y_2(t).\end{aligned}\quad (6.2)$$

Це класична модель Кермака-Манкендріка (1927).

Отримати числовий розв'язок системи рівнянь (6.2) на проміжку (0,20] при початкових умовах:

$$y_1(0) = 5, y_2(0) = 0.1, y_3(0) = 0.$$

Усі компоненти швидкостей вважати рівними одиниці:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1.$$

Результати подати у вигляді графіків.

2. Ускладнена модель. Якщо припустити, що набутий імунітет через деякий час τ_1 втрачено, населення знову стає сприйнятливим до захворювання, а також ввести ще інкубаційний період τ_2 , тоді замість (2) отримується модель:

$$\begin{aligned}\dot{y}_1(t) &= -\alpha y_1(t) y_2(t - \tau_2) + \lambda y_2(t - \tau_1), \\ \dot{y}_2(t) &= \beta y_1(t) y_2(t - \tau_2) - \gamma y_2(t), \\ y_3(t) &= \delta y_2(t) - \mu y_2(t - \tau_1).\end{aligned}\quad (6.3)$$

Модель (6.3) є системою звичайних диференціальних рівнянь із запізненням.

Отримати і проаналізувати числовий розв'язок системи рівнянь (6.3) на проміжку (0,40] при початкових умовах

$$y_1(0) = 5, y_2(0) = 0.1, y_3(0) = 0 \quad \text{при } t \leq 0.$$

Усі компоненти швидкостей вважати рівними одиниці:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = \lambda = \mu = 1.$$

Значення параметрів $\tau_1 = 10, \tau_2 = 1$.

Результати досліджень подати у вигляді графіків. Методи розв'язування рівнянь із запізненням подано в [7].

Завдання 5. Однопродуктова макроекономічна модель із заданим споживанням

Розглянемо однопродуктову макроекономічну модель (4.19). Виробництво валового продукту виражається виробничою функцією, яку вибирають у формі функції Кобба-Дугласа (4.8). Величину споживання вибирають у вигляді (4.18). Виробничі потужності цілковито завантажені.

1. Записати рівняння однопродуктової моделі (4.19).

- Вхідні дані моделі вибрати такими (дані наведені в умовних одиницях):

$$A = 0,4; \mu = 0,1; v = 2,0; c_0 = 1,15; c_1 = 0;$$

$$L_0 = 100; \xi = 0,01; K_0 = 200; t_0 = 0; t_e = 5.$$

Виконати числові дослідження моделі, змінюючи значення параметрів моделі у таких межах:

- η у межах $[0,01; 0,05]$ з кроком 0,01;
 - α у межах $[0,2; 0,4]$ з кроком 0,05.
- За яких значень параметрів η, α величина основних виробничих фондів наприкінці досліджуваного періоду є найбільшою. Побудувати графіки залежності в часі функцій $K(t), X(t), C(t)$ для цього набору параметрів.

Завдання 6. Однопродуктова макроекономічна модель із заданою нормою накопичення капіталу

Розглянемо однопродуктову макроекономічну модель (4.19). Виробництво валового продукту виражається виробничою функцією, яку вибираємо у формі функції Кобба-Дугласа (4.8). Величину інвестицій вибираємо у вигляді (4.16). Виробничі потужності цілковито завантажені.

- Записати рівняння однопродуктової моделі (4.19).
- Вхідні дані моделі вибрати такими:

$$A = 0,4; \mu = 0,1; v = 2,0;$$

$$L_0 = 100; \xi = 0,01; K_0 = 200; t_0 = 0; t_e = 5.$$

Виконати числові дослідження моделі, змінюючи значення параметрів моделі у таких межах:

- s у межах $[0,1; 0,5]$ з кроком 0,1;
 - α у межах $[0,2; 0,4]$ з кроком 0,05.
- За яких значень параметрів s, α величина споживання наприкінці досліджуваного періоду є найбільшою. Побудувати графіки залежності в часі функцій $K(t), X(t), C(t)$ для цього набору параметрів.

Завдання 7. Двопродуктова макроекономічна модель із заданими інвестиціями і виробничими функціями у формі Кобба-Дугласа

Розглянемо економічну систему, яка складається з двох груп галузей. Перша група галузей виробляє засоби виробництва, друга – предмети споживання. Валовий продукт першої галузі використовується на виробниче споживання та інвестиції в галузі першої і другої груп. Валовий продукт другої галузі витрачається на виробниче споживання галузей першої і другої груп, на інвестиції в галузі другої групи та на кінцеве споживання. Валовий продукт кожної групи галузей виражається виробничою функцією, яку вибирають у формі функцій Кобба-Дугласа (4.8).

- Записати математичну модель такої економічної системи у вигляді (4.38)-(4.44) при $n = 2$.
- Нехай значення коефіцієнтів відповідних матриць моделі є такими:

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,2 \\ 0,3 & 0,1 \end{bmatrix}; D^* = \begin{bmatrix} d_{11}^* & d_{12}^* \\ d_{21}^* & d_{22}^* \end{bmatrix}; P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};$$

$$s = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix}; \mu = \begin{bmatrix} 0,06 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix};$$

$$v = \begin{bmatrix} 1,6 \\ 2,0 \end{bmatrix}; \alpha = \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{bmatrix}; \beta = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,5 \end{bmatrix}; K_0 = \begin{bmatrix} 1800 \\ 900 \end{bmatrix};$$

$$L_0 = 60; \xi = 0,01, t_0 = 0; t_e = 5.$$

Визначити значення коефіцієнтів $d_{12}^*, d_{21}^*, d_{22}^*, s_1$ для цієї моделі.

- Виконати числові дослідження моделі, змінюючи значення параметрів моделі у таких межах:
 - d_{11}^* у межах $[0,3; 0,7]$ з кроком 0,1;
 - s_2 у межах $[0,1; 0,5]$ з кроком 0,1;
 - $s_1^{(L)}$ у межах $[0,3; 0,7]$ з кроком 0,1.
 При зміні одного із параметрів в а)-в) значення інших параметрів вибирати посередині перелічених проміжків.
- За якого значення параметрів $d_{11}^*, s_2, s_2^{(L)}$ величина споживання є найбільшою? Для цього значення параметрів

побудувати графіки зміни в часі величин X_1 , X_2 , K_1 , K_2 , C .

Завдання 8. Двопродуктова макроекономічна модель із заданим споживанням

Розглядається як і в завданні 7 економічна система, яка складається з двох груп галузей. Однак, на відміну від попереднього завдання, замість матриці норми накопичення капіталу s задається рівень споживання кінцевого продукту на одного працівника у вигляді співвідношення (4.18). Виконати дослідження побудованої моделі, за пунктами 1; 2; 3,а; 3,в; завдання 7, задавши такі значення параметрів у функції споживання другої галузі: $c_{20} = 4,0$; $\eta_2 = 0,01$; $c_{21} = 0$. Значення необхідних інших параметрів вибрати такими, як у завданні 7. Як у цьому випадку визначають норму накопичення капіталу у другій галузі і параметри у функції споживання першої галузі?

За якого значення параметрів d_{11}^* , $s_2^{(L)}$ величина споживання є найбільшою? Для цього значення параметрів побудувати графіки зміни в часі величин X_1 , X_2 , K_1 , K_2 , C .

Завдання 9. Еколого-економічна модель виробництва продукції з допомогою двох різних технологічних процесів з урахуванням інвестицій в очисну галузь

Нехай в регіоні випускають певний вид продукції з допомогою двох різних технологій, які відрізняються одна від одної як економічною ефективністю, так і величиною забруднення довкілля.

1. Записати еколого-економічну модель (5.50) розглядуваної системи.

Значення коефіцієнтів відповідних матриць моделі вибрати такими:

$$A_X = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}; \quad \tilde{k}_X = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix};$$

$$\mu_X = \begin{bmatrix} 0,08 & 0 \\ 0 & 0,08 \end{bmatrix}; \quad s_X = \begin{bmatrix} s_{1X} & 0 \\ 0 & s_{2X} \end{bmatrix}; \quad s_Z = \begin{bmatrix} \lambda_1 s_{1X} & 0 \\ 0 & \lambda_2 s_{2X} \end{bmatrix};$$

$$\tilde{k}_Z = 0,5; \quad \mu_Z = 0,8;$$

$$D_X = [0,75; 0,25]^T; \quad D_{X_2}^* = 0,5; \quad D_Z = 0,5;$$

$$K_{X0} = [2; 2]^T; \quad K_{Z0} = 1; \quad Z_0 = 1; \quad t_0 = 0; \quad t_e = 5.$$

Виробничі потужності цілком завантажені.

2. Виконати числові дослідження моделі, змінюючи значення параметрів моделі у таких межах:

а) s_1 у межах $[0,3; 0,7]$ з кроком 0,1;

б) s_2 у межах $[0,3; 0,7]$ з кроком 0,1;

в) λ_1 у межах $[0,2; 0,6]$ з кроком 0,1;

г) λ_2 у межах $[0,3; 0,7]$ з кроком 0,1.

При зміні одного із параметрів в а)–г) значення інших параметрів вибирати посередині перелічених проміжків.

3. За якого значення параметрів s_1 , s_2 , λ_1 , λ_2 величина споживання є найбільшою? Для цього значення параметрів побудувати графіки зміни за часом величин X_1 , X_2 , K_{1X} , K_{2X} , K_Z , Z , \tilde{C} .

4. За якого значення параметрів s_1 , s_2 , λ_1 , λ_2 величина забруднення є найменшою? Для цього значення параметрів побудувати графіки зміни в часі величин X_1 , X_2 , K_{1X} , K_{2X} , K_{1Z} , K_{1Z} , Z , \tilde{C} .

Завдання 10. Еколого-економічна модель виробництва продукції з допомогою двох різних технологічних процесів без урахування інвестицій в очисну галузь

Нехай в регіоні здійснюється випуск певного виду продукції з допомогою двох різних технологій, які відрізняються одна від одної як економічною ефективністю, так і величиною забруднення довкілля. Інвестиції в очищення довкілля від забруднення не проводяться.

1. Записати еколого-економічну модель (5.50) розглядуваної системи.

Значення коефіцієнтів відповідних матриць моделі вибрати такими:

$$A_X = \begin{bmatrix} 0,4 & 0 \\ 0 & 0,7 \end{bmatrix}; \quad \tilde{k}_X = \begin{bmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{bmatrix}; \quad p_X = \begin{bmatrix} p_{1X} & 0 \\ 0 & p_{2X} \end{bmatrix};$$

$$\mu_X = \begin{bmatrix} 0,08 & 0 \\ 0 & 0,08 \end{bmatrix}; \quad s_X = \begin{bmatrix} s_{1X} & 0 \\ 0 & s_{2X} \end{bmatrix};$$

$$D_X = [0,75; 0,25]^T; \quad D_Z = 0,5; \quad K_{X0} = [2; 2]^T; \quad Z_0 = 1; \quad t_0 = 0; \quad t_e = 5.$$

2. Виконати числові дослідження моделі, змінюючи значення параметрів моделі у таких межах:

- а) p_{1X} у межах $[0,6; 1]$ з кроком 0,1;
- б) p_{2X} у межах $[0,6; 1]$ з кроком 0,1;
- в) s_{1X} у межах $[0,3; 0,7]$ з кроком 0,1;
- г) s_{2X} у межах $[0,3; 0,7]$ з кроком 0,1.

При зміні одного із параметрів в а)–г) значення інших параметрів вибирати посередині перелічених проміжків.

3. За якого значення параметрів p_{1X} , p_{2X} , s_{1X} , s_{2X} величина споживання є найбільшою? Для даного значення параметрів побудувати графіки зміни за часом величин X_1 , X_2 , K_{1X} , K_{2X} , Z , \tilde{C} .

4. При якому значенні параметрів p_{1X} , p_{2X} , s_{1X} , s_{2X} величина забруднення є найменшою? Для цього значення параметрів побудувати графіки зміни в часі величин X_1 , X_2 , K_{1X} , K_{2X} , Z , \tilde{C} .

Список літератури

1. Бейли Дж., Оллис Д. Основы биохимической инженерии. В двух томах. – М.: Мир, 1989. Т.1. – 592 с.
2. Бейли Дж., Оллис Д. Основы биохимической инженерии. В двух томах. – М.: Мир, 1989. Т.2. – 590 с.
3. Васильева А. Б., Бутузов Б. Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973.
4. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. – М.: Наука, 1976. – 286 с.
5. Глушков В. М., Иванов Е. В., Яненко В. М. Моделирование развивающихся систем. – М.: Наука, 1983. – 350 с.
6. Горстко А. В., Угольников Г. А. Введение в моделирование эколого-экономических систем. – Ростов-на-Дону: Изд-во Ростовского ун-та, 1990. – 110 с.
7. Гранберг А. Г. Динамические модели народного хозяйства. – М., 1985. – 204 с.
8. Григорьев В. С. Моделирование многосекторной эколого-экономической системы // Кибернетика. Системный анализ, 1999. – № 3. – С. 147 – 157.
9. Гурман В. И., Батурман В. А. Математические модели управления природными ресурсами. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1987. – 112 с.
10. Исследование влияния управления на глобальную модель Форрестера / В. А. Геловани, В. А. Егоров, В. Б. Митрофанов и др. // Пробл. кибернетики, 1976. – Вып. 31. – С. 187 – 224.
11. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях. – М.: Мир, 1983. – 398 с.
12. Леонтьев В. В. Межотраслевая экономика – М.: ОАО "Экономика", 1997. – 479 с.
13. Ляшенко И. М. Економіко-математичні методи та моделі сталого розвитку. – К.: Вища школа, 1999. – 236 с.
14. Ляшенко И. Н. Макромодели экономического роста. – К.: Вища школа, 1979. – 152 с.
15. Манакон М. Н., Победимский Д. Г. Теоретические основы технологии микробиологических производств. – М.: Агропромиздат, 1990. – 272 с.
16. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. – М.: Наука, 1982. – 319 с.
17. Марчук Г. И. Математические модели в иммунологии. – М.: Наука, 1991. – 284 с.

Задача Коші для диференціального рівняння n – порядку:

$$y^{(n)}(t) = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \quad t \in (t_0, t_e] \quad (1.5)$$

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)} \quad (1.6)$$

шляхом введення додаткових функцій зводиться до задачі Коші (1.3)–(1.4).

$$\begin{cases} y_1'(t) = y_2(t) \\ y_2'(t) = y_3(t) \\ \dots \dots \dots, \quad t \in (t_0, t] \\ y_{n-1}'(t) = y_n(t) \\ y_n'(t) = f_n(t, y_1, \dots, y_n) \end{cases} \quad (1.7)$$

$$y_1(t_0) = y_0, y_2(t_0) = y_0', \dots, y_{n-1}(t_0) = y_0^{(n-2)}, y_n(t_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (1.8)$$

Тут у ролі вектора невідомих функцій виступають функція та її похідні до $n-1$ порядку:

$$y(t) = [y_1, y_2, \dots, y_n]^T = [y, y', \dots, y^{(n-1)}]^T.$$

Тому надалі ми розглядатимемо задачу Коші (1.1)–(1.2), вважаючи, що y, y_0, f можуть бути як скалярними, так і векторними величинами. Описані нижче методи без змін переносяться на задачі (1.3)–(1.4), (1.7)–(1.8).

2.2. Загальна схема чисельних методів розв'язування задачі Коші

Отримати точний (аналітичний) розв'язок задачі (1.1)–(1.2) вдається досить рідко. Тому для розв'язування поставленої задачі використовують числові методи. При цьому замість функції $y(t), t \in (t_0, t]$ отримуємо послідовність точок $t_0, t_1, \dots, t_i, \dots$ зі значеннями наближеного розв'язку $y_0, y_1, \dots, y_i, \dots$ у них.

Для знаходження розв'язку в точках $t > t_i$ отримуємо таку задачу Коші:

$$y'(t) = f(t, y), \quad (2.1)$$

$$y(t_i) = y_i. \quad (2.2)$$

Проінтегрувавши рівняння (2.1) і використавши (2.2), можна отримати значення шуканого розв'язку в точці $t_{i+1} = t_i + h_i$:

$$y(t_{i+1}) = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y) dt. \quad (2.3)$$

Після заміни $t = t_i + \alpha h_i$ співвідношення (2.3) набуде вигляду:

$$y(t_{i+1}) = y_i + h_i \int_0^1 f(t_i + \alpha h_i, y(t_i + \alpha h_i)) d\alpha. \quad (2.4)$$

Використати для обчислення інтеграла (2.4) квадратичні формули з числом вузлів понад одиницю безпосередньо не вдається, тому що значення функції y на проміжку інтегрування невідоме. Один із способів обчислення інтеграла (2.4) запропонували Рунге і Кутта. Підінтегральна функція $f(x, y)$ замінюється деякою наближеною функцією, що залежить від значення розв'язку y_i в точці t_i і деяких додаткових параметрів. Ці параметри підбираються з умови рівності коефіцієнтів розкладів наближеного і точного розв'язків у ряди Тейлора за степенями h_i в околі точки t_i до певного порядку [1, 2, 4].

У результаті отримуємо серію однокрокових методів, які називають методами Рунге-Кутта (РК).

За іншого підходу підінтегральна функція в (2.3) або в (2.4) може бути наближеною, наприклад, інтерполяційним або екстраполяційним поліномом Ньютона, що будується за точками $t_{i+1}, t_i, t_{i-1}, \dots, t_{i-q}$. Отримуємо серію багатокрокових явних або неявних (якщо для побудови інтерполяційного полінома використовується значення функції у точці t_{i+1}) методів.

Значну частину методів розв'язування задачі Коші можна схематично подати у вигляді:

$$y_{i+1} = \varphi(y_{i-q}, y_{i-q+1}, \dots, y_i, y_{i+1}, \dots, y_{i+l}), \quad (2.5)$$

де функція φ визначає обчислювальну схему алгоритму. У випадку $q=0; l=0, 1$ числовий метод називають *однокроковим*. При $q \geq 1$ і (або) $l > 0$ маємо *багатокроковий* метод. Однокрокові і

багатокрокові методи називають *явними* при $l=0$, і *неявними* при $l=1$. У випадку, коли $l>1$, багатокрокові методи називають методами із *забіганням вперед*.

2.3. Класифікація методів Рунге-Кутта. Порядок методу

Подамо схему (2.5) отримання розв'язку задачі (2.1)–(2.2) в точці t_{i+1} у вигляді [4,7]:

$$y_{i+1} = y_i + h_i \sum_{j=1}^s p_j k_j, \quad (3.1)$$

$$k_j = f(t_i + \alpha_j h_i, y_i + h_i \sum_{r=1}^s \beta_{jr} k_r), \quad j=1, \dots, s, \quad (3.2)$$

де $\alpha_j, \beta_{jr}, p_j$ ($j, r=1, \dots, s$) – дійсні числа.

Означення 1. Метод (3.1)–(3.2) називають *s-стадійним (етапним) методом Рунге-Кутта* [7]. Цей метод є однокроковим. Якщо $\beta_{jr}=0$ при $j \leq r$, отримуємо явний метод Рунге-Кутта (ЯРК). Якщо $\beta_{jr}=0$ при $j < r$ і хоча б один з коефіцієнтів $\beta_{jj} \neq 0$, отримуємо *діагонально-неявний* метод Рунге-Кутта (ДНРК). Якщо, крім цього, всі діагональні коефіцієнти однакові, $\beta_{jj} = \gamma$ ($j=1, \dots, s$), то метод називають *однократно-діагонально-неявним* методом Рунге-Кутта (ОДНРК). В усіх інших випадках отримуємо *неявні* методи Рунге-Кутта (НРК).

Коефіцієнти методів РК досить зручно подавати у вигляді таблиць 1–3 [7].

Таблиця 1

НРК	
α_1	$\beta_{11} \quad \beta_{12} \quad \dots \quad \beta_{1s}$
α_2	$\beta_{21} \quad \beta_{22} \quad \dots \quad \beta_{2s}$
\vdots	$\vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots$
α_s	$\beta_{s1} \quad \beta_{s2} \quad \dots \quad \beta_{ss}$
	$p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_s$

Таблиця 2

ДНРК	
α_1	β_{11}
α_2	$\beta_{21} \quad \beta_{22}$
\vdots	$\vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots$
α_s	$\beta_{s1} \quad \beta_{s2} \quad \dots \quad \beta_{ss}$
	$p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_s$

Таблиця 3

ЯРК	
0	
α_2	β_{21}
\vdots	$\vdots \quad \vdots \quad \dots \quad \vdots$
α_s	$\beta_{s1} \quad \beta_{s2} \quad \dots \quad \beta_{ss-1}$
	$p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_s$

Зазначимо, що коефіцієнти методів РК задовольняють умовам:

$$\alpha_j = \sum_{r=1}^s \beta_{jr}, \quad j=1, \dots, s; \quad \sum_{j=1}^s p_j = 1. \quad (2.16)$$

Означення 2. Метод Рунге-Кутта (3.1)–(3.2) має порядок p , якщо для достатньо гладких задач (2.1)–(2.2):

$$\|y(t_i + h_i) - y_{i+1}\| \leq C h_i^{p+1}, \quad C - \text{const}. \quad (2.17)$$

Величина $C h_i^{p+1}$ характеризує локальну похибку методу РК у точці t_{i+1} на i -му кроці.

Коефіцієнти $\alpha_j, \beta_{jr}, p_j$ s -стадійного методу РК p -го порядку можна отримати так:

а) розкладаємо шуканий розв'язок $y(t)$ задачі (2.1)–(2.2) в ряд Тейлора за степенями h_i в околі точки t_i (похідні $y_i^{(l)}$, $l=0, 1, 2, \dots, p$ визначають шляхом диференціювання вихідного рівняння);

- б) розкладаємо коефіцієнти k_j , $j = 1, 2, \dots, s$ в ряди Тейлора в околі точки (t_i, y_i) ;
- в) підставляємо розклад а) в рівняння (2.1), а розклади б) в (3.1) і прирівнюємо коефіцієнти з однаковими степенями h_i , $l = 0, 1, \dots, p$ і однаковими виразами при часткових похідних. Унаслідок отримуємо алгебричні рівняння для знаходження коефіцієнтів α_j, β_j, p_j [1, 2, 7].

Теоретично процес а) – в) обчислення коефіцієнтів методів РК є досить простим. На практиці вже при $s=4$ приходимо до складних і громіздких формул. Простіше можна отримати відповідні співвідношення для обчислення невідомих коефіцієнтів з використанням графів [7].

2.4. Явні методи Рунге-Кутта

У цьому пункті наведемо системи рівнянь для отримання коефіцієнтів методів РК різних порядків, а також таблиці коефіцієнтів найуживаніших ЯРК.

2.4.1. Одно- і двостадійні методи Рунге-Кутта

При $s = 1$ отримуємо одностадійний метод РК:

$$y_{i+1} = y_i + h_i f(t_i, y_i). \quad (4.1)$$

Цей метод відомий як метод Ейлера і має перший порядок точності. У таблиці 4 наведено коефіцієнти методу Ейлера.

Метод Ейлера є аналогом застосування квадратурної формули лівих прямокутників до обчислення інтеграла (2.4).

При $s = 2$ обчислювальна схема методу РК така:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + h_i (p_1 k_1 + p_2 k_2), \\ k_1 &= f(t_i, y_i) \equiv f_i, \\ k_2 &= f(t_i + \alpha_2 h_i, y_i + h_i \beta_{21} k_1). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Прирівнюючи коефіцієнти розкладів точного і наближеного розв'язків в околі точки t_i з однаковими степенями h_i^l , $l = 0, 1, 2$ і

відповідними похідними, отримуємо систему трьох рівнянь для визначення чотирьох невідомих коефіцієнтів:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 = 1 \\ p_2 \alpha_2 = 1/2 \\ p_2 \beta_{21} = 1/2. \end{cases} \quad (4.3)$$

Припустивши, наприклад, що $\beta_{21} = u$, $0 < u \leq 1$, отримуємо однопараметричну множину розв'язків:

$$\alpha_2 = \beta_{21} = u, \quad p_2 = \frac{1}{2u}, \quad p_1 = 1 - \frac{1}{2u}.$$

Зазначимо, що при жодному виборі параметра u не вдається досягти рівності коефіцієнтів при h_i^3 в розкладах наближеного і точного розв'язків задачі (2.1)-(2.2). Це означає, що метод (4.2) має другий порядок точності.

У таблицях 5–6 наведено коефіцієнти двох найуживаніших методів РК другого порядку.

Таблиця 4
Метод Ейлера ($s=1, p=1$).

0	
	1

Таблиця 5
Метод РК другого порядку
($u=1/2, s=2, p=2$).

0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0 1

Таблиця 6
Метод РК другого порядку
Удосконалений метод Ейлера-Коші
($u=1, s=2, p=2$).

0	
1	1
	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

При $u=1/2$ метод РК є аналогом формули середніх прямокутників до обчислення інтеграла (2.4). При $u=1$, відповідно, лінійна комбінація в (4. 2) є аналогом формули трапецій при обчисленні інтеграла (2. 4).

2.4.2. Тристадійні методи Рунге-Кутта

Для обчислення коефіцієнтів тристадійного методу РК отримуємо таку систему рівнянь [4,7]:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 = 1/2 \\ p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 = 1/3 \\ p_3 \beta_{32} \alpha_2 = 1/6 \end{cases} \quad (4.4)$$

Ця система доповнюється двома додатковими умовами (3.3):

$$\alpha_2 = \beta_{21}, \quad \alpha_3 = \beta_{31} + \beta_{32}. \quad (4.5)$$

Прийнявши, що $\alpha_2 = u$, $\alpha_3 = v$ із (4.4)–(4.5), отримуємо двопараметричну множину розв'язків:

$$\alpha_2 = u, \alpha_3 = v, \quad \beta_{32} = \frac{v(v-u)}{u(2-3u)}, \quad p_2 = \frac{2-3v}{6u(u-v)}, \quad (4.6)$$

$$p_2 = \frac{2-3u}{6v(v-u)}, \quad p_1 = 1 - p_2 - p_3, \quad \beta_{31} = \alpha_3 - \beta_{32}, \quad \beta_{21} = \alpha_2.$$

Значення коефіцієнтів (4. 6) утворюють набір тристадійних методів РК порядку

У таблицях 7, 8 наведено значення коефіцієнтів найуживаніших методів РК третього порядку [4,7]. Коефіцієнти таблиці 7 утворюють метод РК, який є аналогом триточкової квадратурної формули Сімпсона при обчисленні інтеграла (2. 4).

Таблиця 7

Метод РК другого порядку
($u=1/2, v=1, s=3, p=3$).

0	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
1	-1 2
	$\frac{1}{6} \quad \frac{4}{6} \quad \frac{1}{6}$

Таблиця 8

Метод РК другого порядку
($u=1/3, v=2/3, s=3, p=3$).

0	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{2}{3}$	0 $\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4} \quad 0 \quad \frac{3}{4}$

2.4.3. Чотиристадійні методи Рунге-Кутта

Система рівнянь для обчислення коефіцієнтів чотиристадійних ЯРК четвертого порядку має вигляд [7]:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1 \\ p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 + p_4 \alpha_4 = 1/2 \\ p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 + p_4 \alpha_4^2 = 1/3 \\ p_2 \alpha_2^3 + p_3 \alpha_3^3 + p_4 \alpha_4^3 = 1/4 \\ p_3 \alpha_3 \beta_{32} \alpha_2 + p_4 \alpha_4 (\beta_{42} \alpha_2 + \beta_{43} \alpha_3) = 1/8 \\ p_3 \beta_{32} + p_4 \beta_{42} = p_2 (1 - \alpha_2) \\ p_4 \beta_{43} = p_3 (1 - \alpha_3) \\ p_4 (1 - \alpha_4) = 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Розв'язання системи (4.7) є складнішим порівняно з попередніми випадками. Зазначимо лише, що розв'язки цієї системи є двопараметричною множиною. Найуживанішими є методи РК з наборами коефіцієнтів, наведеними в таблицях 9, 10.

Таблиця 9
Класичний метод РК
($s=4, p=4$)

0				
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		
1	0	0	1	
<hr/>				
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Таблиця 10
Правило 3/8 РК
($s=4, p=4$)

0				
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
$\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1		
1	1	-1	1	
<hr/>				
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Класичний метод РК використовують частіше, а правило 3/8 має більшу точність розв'язування задачі Коші щодо звичайних диференціальних рівнянь і систем.

Класичний метод РК можна вважати аналогом квадратурної формули Сімпсона. Метод РК, коефіцієнти якого наведено в таблиці 10, є аналогом чотириточкової квадратурної формули "трьох восьмих".

2.4.4. Методи Рунге-Кутта вищих порядків

В ЯРК, які розглянуто вище, порядок p методу і число стадій s були однаковими ($s = p$ при $p=1,2,3,4$). Побудувати s -стадійні методи, для яких порядок методу вищий від числа стадій ($p > s$), не вдається. Постає питання: чи можна побудувати s -стадійні методи порядку $p \geq 5$, для яких $p = s$? Воно залишалось невирішеним до 1963 р. Найбільший вклад у дослідження цієї проблеми вніс Бутчер [7,8]. Сформулюємо результати його досліджень у вигляді нижченаведених теорем.

Теорема 1. При $p \geq 5$ не існує явних методів РК порядку p з числом стадій $s = p$.

При $p=5,6$ вдалося побудувати ЯРК з числом стадій $s=p+1$. У таблицях 11, 12, 13 наведено коефіцієнти двох методів п'ятого порядку та одного з методів шостого порядку.

Таблиця 11
Шестистадійний метод РК порядку 5
(Кутта, 1901; Нюрстрем, 1925; $s=6, p=5$).

0					
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$				
$\frac{2}{5}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$			
1	$\frac{1}{4}$	-3	$\frac{15}{4}$		
$\frac{2}{3}$	$\frac{6}{81}$	$\frac{90}{81}$	$-\frac{50}{81}$	$\frac{8}{81}$	
$\frac{4}{5}$	$\frac{6}{75}$	$\frac{36}{75}$	$\frac{10}{75}$	$\frac{8}{75}$	0
<hr/>					
	$\frac{23}{192}$	0	$\frac{125}{192}$	0	$-\frac{81}{192}$
					$\frac{125}{192}$

Таблиця 12
Шестистадійний метод Фельберга порядку 5
($s=6, p=5$).

0					
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$				
$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{9}{32}$			
$\frac{12}{13}$	$\frac{1932}{2197}$	$-\frac{7200}{2197}$	$\frac{7296}{2197}$		
1	$\frac{439}{216}$	-8	$\frac{3680}{513}$	$-\frac{845}{4104}$	
$\frac{1}{2}$	$-\frac{8}{27}$	2	$-\frac{3544}{2565}$	$\frac{1859}{4104}$	$-\frac{11}{40}$
<hr/>					
	$\frac{16}{35}$	0	$\frac{6656}{12825}$	$-\frac{28561}{56430}$	$\frac{9}{50}$
					$\frac{2}{55}$

Таблиця 13

Семистадійний метод Бутчера порядку 6
($s=7, p=6$).

0							
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$					
$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{2}{9}$	$-\frac{1}{12}$				
$\frac{5}{6}$	$-\frac{35}{144}$	$-\frac{55}{36}$	$\frac{35}{48}$	$\frac{15}{8}$			
$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{360}$	$-\frac{11}{36}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$		
1	$-\frac{41}{260}$	$\frac{22}{13}$	$\frac{43}{156}$	$-\frac{118}{39}$	$\frac{32}{195}$	$\frac{80}{39}$	
	$\frac{13}{200}$	0	$\frac{11}{40}$	$\frac{11}{40}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{13}{200}$

Теорема 2. При $p \geq 7$ не існує явних методів РК порядку p , які мають $s = p + 1$ стадію.

Теорема 3. При $p \geq 8$ не існує явних методів РК порядку p , які мають $s = p + 2$ стадії.

Найвищий порядок, досягнутий для явно побудованих ЯРК, дорівнює 10 ($p=10$). Вперше такий 18-стадійний метод ($s=18$) побудовано в 1975 р. Він увійшов до книги рекордів Гіннеса. У 1978 р. побудовано 17-стадійний метод РК десятого порядку.

Подальше підвищення порядку методів не має сенсу. Їхня складність зростає швидше, ніж по експоненті, а самі методи стають величезними монстрами [7].

2.5. Неявні методи Рунге-Кутта

Для неявних методів Рунге-Кутта коефіцієнти k_j не можна обчислювати послідовно, як у випадку явних методів. У цьому випадку для обчислення $k_j, j=1, \dots, s$ отримуємо систему рівнянь (3.2). Нехай (2.1)–(2.2) є задачею Коші для системи рівнянь порядку n . Тоді у випадку ДНРК маємо послідовність систем (3.2) розмірності n : для визначення k_1 , далі для k_2 і т. д. Для повністю неявних методів отримуємо систему $(s \times n)$ нелінійних рівнянь з $(s \times n)$ невідомими, які повинні розв'язуватись одночасно. Виникає питання: за яких умов система (3.2) має розв'язок? Відповідь на нього дає нижченаведена теорема.

Теорема. Нехай f – неперервна функція, яка задовольняє умові Ліпшиця з постійною L у деякому околі початкових умов. Якщо

$$\text{виконується нерівність } h < \frac{1}{L \max_j \sum_{r=1}^s |\beta_{jr}|}, \text{ то існує єдиний розв'язок}$$

системи (3.2). Якщо $f(t, y)$ p разів неперервно-диференційована функція, всі k_j як функції h будуть p разів неперервно-диференційовані [7].

Для отримання розв'язку системи (3.2) можна використати один з відомих ітераційних методів (метод простої ітерації, метод Ньютона).

Вибір коефіцієнтів $\alpha_j, \beta_{jr}, p_j, j, r = \overline{1, s}$ для НРК здійснюється так само, як для ЯРК (п.3, п.4). Проте значна кількість цих коефіцієнтів дає змогу досягти рівності в розкладах точного і наближеного розв'язків задачі Коші при вищих степенях h , порівняно з ЯРК. У випадку s -стадійного ЯРК для кожного з рівнянь (2.1) маємо $[(s^2 + 3s)/2 - 1]$ параметрів (див. табл. 3). Обравши їх відповідним способом, отримуємо методи РК порядку p ($p \leq s$, див. п. 2.4). У випадку s -стадійного НРК маємо для

кожного з рівнянь (2.1) $(s^2 + 2s)$ вільних параметрів. Це дає змогу побудувати НРК порядку $p=2s$. Ще однією компенсацією за розв'язання системи (3.2) для НРК є те, що вони, як і неявні багатокрокові методи, мають переваги при розв'язуванні жорстких диференціальних рівнянь [5,6,7].

У таблицях 14–19 подано значення коефіцієнтів для декількох НРК різних порядків.

Таблиця 14

Метод Хаммера Холлінгсуорта

$$(s=2, p=4)$$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6}$	$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Таблиця 15

Формула Лобатто порядку 4

$$(s=3, p=4)$$

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	0	1	0
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Таблиця 16

Метод Кунцмана-Бутчера порядку 6 $(s=3, p=6)$

$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{2}{9} - \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{30}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{24}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{36} - \frac{\sqrt{15}}{24}$
$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{10}$	$\frac{5}{36} + \frac{\sqrt{15}}{30}$	$\frac{2}{9} + \frac{\sqrt{15}}{15}$	$\frac{5}{36}$
	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{18}$

Таблиця 17

Формула Лобатто порядку 6

$$(s=4, p=6)$$

0	0	0	0
$\frac{5-\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{60}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{15-7\sqrt{5}}{60}$
$\frac{5+\sqrt{5}}{10}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{60}$	$\frac{15+7\sqrt{5}}{60}$	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5-\sqrt{5}}{12}$	$\frac{5+\sqrt{5}}{12}$
	$\frac{1}{12}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{12}$
		$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

Таблиця 18

Метод Еле порядку 4

$$(s=3, p=4)$$

0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{24}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{24}$
1	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$

Таблиця 19

Метод Еле порядку 5

$$(s=3, p=5)$$

$4 - \sqrt{6}$	$\frac{88-7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{296-169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{-2+3\sqrt{6}}{225}$
$4 + \sqrt{6}$	$\frac{296+169\sqrt{6}}{1800}$	$\frac{88+7\sqrt{6}}{360}$	$\frac{-2-3\sqrt{6}}{225}$
1	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$
	$\frac{16-\sqrt{6}}{36}$	$\frac{16+\sqrt{6}}{36}$	$\frac{1}{9}$

2.6. Оцінка похибки методів Рунге-Кутта

При використанні числових методів РК отримуємо замість точних значень шуканого розв'язку його наближені значення $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$ у точках $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$. Похибка у визначенні точного розв'язку залежить від похибки дискретизації і похибки обчислень (похибки заокруглень). Похибка дискретизації характеризується властивостями самого методу. Для методів РК можна виділити локальну похибку і глобальну (накопичену) похибку. Похибка обчислень залежить від розрядної сітки машини. Надалі ми її не розглядатимемо.

Розглянемо задачу Коші (2.1)–(2.2) у точці (t_i, y_i) . Нехай $y(t_i + h_i)$ – точний розв'язок рівняння (2.1) при початковій умові (2.2), а y_i – наближений розв'язок у цій же точці, отриманий методом РК. Тоді локальна похибка на i -му кроці характеризується різницею між точним і наближеним значеннями:

$$\|e_i(h_i)\| = \|y(t_i + h_i) - y_i\|. \quad (6.1)$$

Для оцінки величини $e_i(h_i)$ скористаємось її розкладом у ряд Тейлора в околі точки t_i і тим, що похідні точного і наближеного розв'язків до порядку p включно збігається (див. схему побудови методів РК, п. 2.3). Тобто $e(0) = e'(0) = \dots = e^{(p)}(0) = 0$. Якщо всі часткові похідні функції f до порядку p включно обмежені, то оцінку (6.1) можна подати у вигляді:

$$\|e_i(h_i)\| \leq Ch_i^{p+1}. \quad (6.2)$$

Точніша оцінка похибки (6.1) має вигляд:

$$\|e_i(h_i)\| \leq h_i^{p+1} \left\{ \frac{1}{(p+1)!} \max_{\theta \in [0,1]} \|y^{(p+1)}(t_i + \theta h_i)\| + \frac{1}{p!} \sum_{j=1}^s |p_j| \max_{\theta \in [0,1]} \|k_j^{(p)}(\theta h_i)\| \right\}. \quad (6.3)$$

Бачимо, що оцінка локальної похибки (6.2) збігається з означенням порядку методу РК (див. (3.5)).

Глобальна похибка (похибка розв'язку) є нормою різниці між точним і наближеним значеннями розв'язку задачі Коші (1.1)–

(1.2) у точці t_{i+1} . Вона складається з локальної похибки (6.2) допущеної на i -му кроці при розв'язуванні задачі (2.1)–(2.2), перенесеної похибки в обчисленні початкової умови (2.2) у точці t_i . Очевидно, що значення y_i в точці t_i , яка слугує початковою умовою задачі (2.1)–(2.2), не є точним.

Глобальну оцінку похибки подамо у вигляді:

$$\|e\| \leq C_1 h^p, \quad (6.4)$$

де h – максимальна довжина кроку, $h = \max_i h_i$; $C_1 = \text{const}$, яка залежить від функції f і її часткових похідних на проміжку $[t_0, t_e]$.

Глобальна оцінка похибки (6.4) є величиною порядку p і збігається з порядком методу.

2.7. Практична оцінка похибки і вибір довжини кроку

Нехай у точці t_i отримано задачу Коші (2.1)–(2.2). Як вибрати крок h_i , щоб локальна похибка дискретизації на i -му кроці не перевищувала заданої величини ϵ_{ps} ? Очевидно, що крок повинен бути настільки малим, щоб співвідношення (6.2)–(6.3) було меншим від ϵ_{ps} . Водночас крок h_i повинен бути достатньо великим, щоб запобігти виконанню зайвих обчислень.

Оцінки похибки, наведені у п. 2.5, не придатні для практичного використання у зв'язку з тим, що вони вимагають обчислення та оцінки часткових похідних високого порядку. Головна перевага методів РК полягає саме в тому, що вони не вимагають обчислення цих похідних. Тому для практичної оцінки похибки і вибору довжини кроку скористаємось ідеєю екстраполяції по Річардсону.

Користуючись методом РК p -го порядку для задачі (2.1)–(2.2), робимо два кроки довжиною h_i кожен і один крок довжиною $2h_i$. В результаті у першому випадку отримаємо значення