

Кафедра комп'ютерної інженерії та електроніки.

Хрестоматія.

Назва дисципліни: Техніка і електроніка НВЧ.

Викладач: д.т.н., професор Новосядлий Степан Петрович

Список використаних джерел:

1. Новосядлий С.П., Мандзюк В.І. Техніка і електроніка НВЧ. Підручник з грифом міністерства освіти і науки України. – Івано-Франківськ: Плай - 2013 - 526 с. Розділ 3-4.
2. А.А. Щука Электроника. - М: Мир - 2004 - 580 с.
3. Зи С. - Физика полупроводниковых приборов. - М: Мир - 1999 - 906 с.

Розділ 3. Електромагнітні хвилі в середовищі із частотною дисперсією: хвилі у провідному середовищі, плазмі та надпровіднику

Як уже вказувалось у розділі 2, частотна дисперсія має місце в тих випадках, коли фазова швидкість, а взагалі, і коефіцієнт затухання хвилі залежать від частоти. У даному розділі ми розглянемо важливі для практичної реалізації диспергуючі середовища. Буде показано, як частотна дисперсія фазової швидкості веде до ряду цікавих фізичних ефектів, які спостерігаються при поширенні електромагнітних хвиль із складним спектральним складом.

3.1. Хвилі в добре провідному середовищі

Як було визначено в матеріалі розділу 2, частотна дисперсія при поширенні електромагнітних хвиль спостерігається всякий раз, коли хоча б один із електромагнітних параметрів $\tilde{\epsilon}_a$, μ_a залежить від частоти. Дійсно, в цьому випадку коефіцієнт поширення хвилі γ пов'язаний з частотою нелінійним чином, і тому фазова швидкість $v_\phi = \omega/\beta$ вже є частотно-залежною. З цієї причини частотна дисперсія фазової швидкості характерна будь-якому провідному середовищу, в якому навіть при сталій абсолютній магнітній проникності μ_a діелектрична проникність $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j\sigma/\omega$ є функцією частоти.

У такому випадку говорять, що на заданій частоті ω матеріальне середовище є дуже добре провідне (або металоподібне), якщо виконується умова:

$$\frac{\sigma}{\omega} \gg \epsilon_a.$$

Фізично це означає, що в такому середовищі густина струмів провідності значно перевищує густину струмів зміщення чи поляризованих струмів.

Очевидно, що чим нижча частота, тим ближче провідне середовище за своїми електродинамічними властивостями до ідеального провідника. На достатньо низьких частотах більшість неідеальних діелектриків, а також напівпровідники стають металоподібними. Наприклад, для сухого ґрунту з параметрами $\epsilon = 4$, $\sigma = 2 \cdot 10^{-3} \text{ Сл/м}$ на частоті 1 МГц $\tilde{\epsilon}_a = 3,54 \cdot 10^{-4} - j 3,18 \cdot 10^{-10} \text{ Ф/м}$. Таким чином, в радіомовному діапазоні частот ефір веде себе як добре провідне середовище. Ця властивість дозволяє в ряді випадків значно спростити розрахунок полів електромагнітних хвиль, які поширюються над поверхнею Землі.

Таким чином, комплексну діелектричну проникність добре провідного середовища можна вважати чисто уявною: $\tilde{\epsilon}_{a.m} = -j\sigma/\omega$. Знайдемо для цього випадку коефіцієнт поширення однорідної плоскої електромагнітної хвилі:

$$\gamma_m = \alpha_m + j\beta_m = j\omega\sqrt{\tilde{\epsilon}_{a.m}\mu_{a.m}} = \sqrt{j\omega\mu_{a.m}\sigma}. \quad (3.1)$$

Якщо прийняти до уваги, що $\sqrt{j} = \exp\left(\frac{j\pi}{4}\right) = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$, то формула (3.1) приймає вигляд

$$\gamma_m = \sqrt{\frac{\omega \mu_{am} \sigma}{2}} (1+j). \quad (3.2)$$

Тобто, в металоподібному середовищі коефіцієнт фази і затухання чисельно рівні:

$$\beta_m = \alpha_m = \left(\frac{\omega \mu_{am} \sigma}{2}\right)^{1/2}.$$

Залежність цих величин від частоти говорить про те, що в добре провідному середовищі частотна дисперсія яскраво виражена. Визначимо для такого середовища фазову швидкість і довжину хвилі:

$$v_{\phi m} = \frac{\omega}{\beta_m} = \sqrt{\frac{2\omega}{\mu_{am} \sigma}} \quad \text{і} \quad \lambda = \frac{2\pi}{\beta_m} = 2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_{am} \sigma}}.$$

Як бачимо, із зростанням частоти фазова швидкість однорідних плоских електромагнітних хвиль в добре провідному середовищі зростає. При цьому характеристичний опір середовища буде визначатися як:

$$Z_{cm} = \sqrt{\frac{\mu_{am}}{\tilde{\epsilon}_a}} = \sqrt{\frac{j\omega \mu_{am}}{\sigma}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_{am}}{\sigma}} \exp(j45^\circ).$$

Комплексність характеристичного опору вказує на те, що в добре провідному середовищі вектор напруженості електричного поля зсунутий за фазою відносно вектора напруженості магнітного поля на кут $\pi/4$, а сам модуль цього опору також залежить від частоти.

Як відомо, в середовищі із втратами амплітуда плоских електромагнітних хвиль змінюється вздовж координати поширення z за законом $\exp(-\alpha z)$. Відстань d , на якій амплітуда плоских хвиль зменшується в $e=2,718$ раз у порівнянні з початковою, називається глибиною проникнення або товщиною поверхневого шару. У нашому випадку ця величина задовольняє умові $\alpha_m d = 1$. Звідки $d = 1/\alpha_m = \lambda_m/2\pi$.

Таким чином, ми можемо зробити наступний висновок: матеріальне середовище стає металоподібним, якщо поле однорідної плоскої електромагнітної хвилі затухає в ньому на відстані, меншій за довжину хвилі. Тоді формула для обчислення товщини поверхневого шару матиме вигляд

$$d = \left[\frac{2}{\omega \mu_{am} \sigma} \right]^{1/2},$$

тобто глибина проникнення електромагнітних хвиль в добре провідному середовищі зменшується із ростом частоти і питомої провідності. Це формулювання ми знаємо як скін-ефект. Для НВЧ-діапазону d є дуже малою величиною. Зокрема, для міді ($\sigma = 5,7 \cdot 10^7$ СМ/М) на частоті $f = 10$ ГГц

($\lambda = 3\text{ см}$) $d = 0,6\text{ мкм}$. Тут ми можемо зробити дуже важливий висновок, що на струмопровідні поверхні доцільно наносити тонкий шар (10 мкм) добре провідного металу (Au, Ag). Таке покриття дозволяє значно зменшити теплові втрати в НВЧ елементах. Це слід використовувати при проектуванні інтегральних мікроелектронних НВЧ пристроїв.

3.2. Плазма та її електродинамічні параметри

До числа матеріальних середовищ, в яких поширюються електромагнітні хвилі з частотною дисперсією, відноситься плазма. У вузькому сенсі так називають іонізований за допомогою електричного чи електромагнітного поля газ, який складається із додатньо та від'ємно заряджених частинок, а також із нейтральних атомів і молекул. Плазма дуже широко використовується в низькотемпературних процесах епітаксії моношарів напівпровідників, осадження і травлення як діелектричних, так і металевих шарів структур ВІС. Це є важливо для радіофізиків радіоелектронного напрямку.

Плазма часто зустрічається не тільки в техніці, але й в природі. Зокрема, наша Земля оточена плазмовою оболонкою, яку називають іоносферою, яка знаходиться на висоті $100\text{--}150\text{ км}$ і суттєво впливає на поширення радіохвиль в земних умовах. Плазмові властивості характерні для міжпланетного і міжзіркового простору. Тому ми більш детально зупинимось на властивостях плазми.

Одна із основних властивостей плазми є її квазінейтральність – якщо в плазмі уявно виділити деяку замкнену область, то електричний заряд всередині такої області рівний нулю, незважаючи на те, що із-за теплової рівноваги заряджених частинок спостерігаються швидкі флуктуації сумарного заряду навколо його середнього значення. Таким чином, локальну область плазми можна описати одним параметром – електронною концентрацією N_e (м^{-3}), яка рівна середньому числу електронів в одиниці об'єму. Типове значення N_e для земної атмосфери складає 10^{12} см^{-3} , тоді як концентрація в плазмі провідних твердих тіл досягає величини 10^{26} м^{-3} в залежності від того, яким методом збуджується дана плазма.

Заряджені частинки плазми (електрони, іони, радикали) під дією сил електромагнітного поля приводяться в рух. Це приводить також до поляризації середовища, так що діелектрична проникність плазми вже відрізняється від проникності вакууму. Розглядаючи електронно-іонну плазму, необхідно враховувати, що маса іона на декілька порядків перевищує масу електрона. Тому іони практично нерухомі і в першому наближенні не впливають на електродинамічні властивості такого середовища.

Простий спосіб аналізу властивостей плазми базується на тому, що складають і розв'язують диференціальне рівняння, яке описує рух в просторі

окремо взятого електрона. Це рівняння, яке записують на основі другого закону Ньютона, має вигляд:

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} + m \nu \frac{d\vec{r}}{dt} = e \vec{E}, \quad (3.3)$$

де \vec{r} – радіус-вектор відхилення електрона від того положення в просторі, яке він займав при відсутності поля; e, m – заряд і маса електрона; ν – частота співударів.

Тепер припустимо, що зовнішнє поле \vec{E} змінюється в часі за гармонічним законом з частотою ω . Тоді в рівнянні (3.3) величини \vec{r} та \vec{E} слід представити через комплекси (тобто в символній формі).

$$\vec{r} = \text{Re}[\dot{r} \exp(j\omega t)], \quad \vec{E} = \text{Re}[\dot{E} \exp(j\omega t)].$$

Це дає можливість перевести наше диференціальне рівняння в алгебраїчне:

$$m(-\omega^2 + j\omega\nu)\dot{r} = e\dot{E}, \quad (3.4)$$

звідки $\dot{r} = \frac{e\dot{E}}{m(-\omega^2 + j\omega\nu)}$ і визначається як швидкість.

Тоді можна знайти комплексну амплітуду вектора поляризованості:

$$\dot{P} = N_e e \dot{r} \quad \text{і} \quad \dot{D} = \varepsilon_0 \dot{E} + \dot{P}.$$

Таким чином,

$$\dot{D} = \varepsilon_0 \left[1 - \frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0 (\omega^2 - j\omega\nu)} \right] \dot{E},$$

звідки знаходимо діелектричну проникність плазмового середовища:

$$1 - \frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0 (\omega^2 - j\omega\nu)}. \quad (3.5)$$

Як бачимо з даного виразу, діелектрична проникність плазми дуже суттєво залежить від частоти прикладеного електромагнітного поля, яке збуджує дану плазму в реакторі. Як наслідок, процес поширення електромагнітних хвиль в плазмі супроводжується частотною дисперсією, причому ε має дійсну і уявну частини. Фізична причина дисперсії – інерційність процесу переміщення електронів під дією змінного поля. Ця інерційність виражається кутом фазового запізнення.

Розрахунок частоти співударів ν в плазмовому середовищі – це важка задача, яку розв'язати дуже складно. Проте в реальних умовах $\omega \gg 0$, тому у формулі (3.5) можна прийняти $\nu = 0$. Тоді таку плазму можемо назвати безспівударною плазмою, в якій діелектрична проникність буде виражатися дійсним числом, меншим одиниці і рівним:

$$\varepsilon = 1 - \frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0 \omega^2}. \quad (3.6)$$

З цієї рівності видно, що $\varepsilon = 0$ на певній плазмовій частоті

$$\omega = \sqrt{\frac{N_e e^2}{m \varepsilon_0}},$$

яку називають ленгмюрівською частотою. Якщо $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, $\varepsilon_0 = 8,84 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$, то $\omega_{nl} = 54,41 \sqrt{N_e} \text{ с}^{-1}$ або $f_{nl} = 8,98 \sqrt{N_e} \text{ Гц}$. Для земної іоносфери $N_e = 10^{12} \text{ м}^{-3}$, тому $f_{nl} = 9 \text{ МГц}$.

Вивчаючи поширення електромагнітних хвиль в безспівударній плазмі, необхідно розглянути два крайні випадки:

1) Концентрація електронів N_e є невеликою, так що виконується нерівність $\omega > \omega_{nl}$. Тоді говорять, що має місце поширення електромагнітних хвиль в докритичній плазмі.

2) Якщо концентрація N_e є досить великою, коли має місце $\omega < \omega_{nl}$. У такому випадку прийнято говорити про поширення хвиль в закритичній плазмі.

Розглянемо перший варіант, коли $\varepsilon = 1 - (\omega_{nl}/\omega)^2$, для якого визначимо коефіцієнт поширення електромагнітної хвилі:

$$\gamma(\omega) = \alpha(\omega) + j\beta(\omega) = j\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{nl}}{\omega}\right)^2},$$

де $\beta_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – коефіцієнт фази плоскої хвилі у вакуумі. Коефіцієнт затухання в цьому випадку $\alpha = 0$, а коефіцієнт фази визначається як

$$\beta(\omega) = \frac{\omega}{e} \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{nl}}{\omega}\right)^2},$$

звідки можна визначити фазову швидкість як

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta(\omega)} = \frac{e}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{nl}}{\omega}\right)^2}}.$$

Крива, що характеризує частотну дисперсію фазової швидкості в докритичній плазмі, зображена на рис. 3.1. Тут слід зазначити, що фазова швидкість плоских електромагнітних хвиль завжди більша від швидкості хвиль у вакуумі, причому $v_\phi \rightarrow \infty$, якщо $\omega \rightarrow \omega_{nl}$.

Характеристичний опір докритичної безспівударної плазми також залежить від частоти:

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\varepsilon}_a}} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{nl}}{\omega}\right)^2}},$$

де $Z_0 = 377 \text{ Ом}$, і видно, що характеристичний опір Z_c (вектори \vec{E} і \vec{H} синфазні, колінеарні) є дійсною величиною і перевищує опір Z_0 у вакуумі. Дійсно, фазова швидкість відноситься до хвильового фронту і може бути

більшою швидкості світла. А принцип відносності не поширюється на фазову швидкість.

Тепер повернемося до другого варіанту, коли $\omega < \omega_{nl}$ і коефіцієнт поширення плоскої електромагнітної хвилі в плазмі стає дійсною величиною, $\alpha(\omega) = \beta_0 \sqrt{(\omega_{nl}/\omega)^2 - 1}$, а $\beta(\omega) = 0$.

Тоді амплітуда електромагнітного поля вздовж вибраної осі z зменшується по мірі поширення за законом $\exp(-\alpha z)$. Так як коефіцієнт фази $\beta = 0$, то хвильовий процес в такому середовищі фактично відсутній, а фазова швидкість необмежено велика.

Цей цікавий ефект пов'язаний з тим, що затухання амплітуди поля в плазмі обумовлено не переходом частини енергії в теплову, а чисто фазовим переходом, коли коливальні електрони плазми збуджують вторинні хвилі, які інтерферують з першими і намагаються їх компенсувати. Тут графік залежності нормованого коефіцієнта затухання α/β_0 від нормованої частоти вже має вигляд, поданий на рис. 3.2. Це особливо важливо для земного і космічного (супутникового) зв'язку.

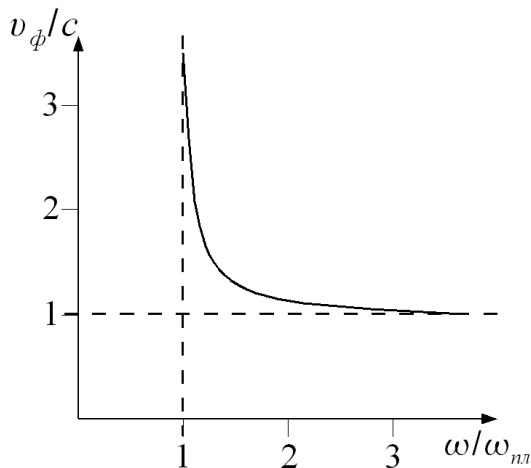


Рис. 3.1. Частотна залежність фазової швидкості плоскої хвилі в докритичній плазмі

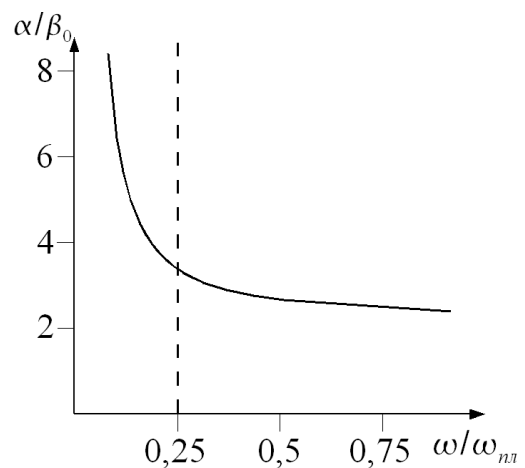


Рис. 3.2. Частотна залежність нормованого коефіцієнта затухання плоскої хвилі в докритичній плазмі

Так як діелектрична проникність закритичної плазми є від'ємною, то характеристичний опір такого середовища буде чисто уявним (реактивним), тобто

$$Z_c(\omega) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\tilde{\epsilon}_a}} = \frac{-j Z_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega_{nl}}{\omega}\right)^2 - 1}}$$

є чисто ємнісним, що слід враховувати в розрахунку зв'язку.

Тепер можна зробити певні висновки: шар безспівударної плазми веде себе як фільтр верхніх частот, пропускаючи на вихід електромагнітні

коливання з частотами $\omega > \omega_{nl}$ і ефективно послаблюючи складові з частотами $\omega < \omega_{nl}$, тобто іоносфера веде себе як фільтруючий елемент.

На закінчення розглянемо вплив співударів електронів в плазмі. Реально безспівударної плазми немає. Розрахуємо частоту співударів

$$\nu = 5 \cdot 10^7 \frac{p}{V \bar{T}},$$

де p – тиск газу, \bar{T} – середня температура. Якщо $\omega \approx 0$, тоді плазма описується діелектричною проникністю

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_0 - \frac{N_e e^2}{m(\omega^2 - j\omega\nu)} = \varepsilon_0 - \frac{N_e e^2 (\omega^2 + j\omega\nu)}{m(\omega^4 + \omega^2 \nu^2)} = \varepsilon_a - \frac{j\sigma}{\omega}, \quad (3.7)$$

звідки бачимо, що дійсна частина комплексної діелектричної проникності ε_a та питомої провідності плазми σ залежить від параметрів ω_{nl} та частоти співударів ν , а також зв'язані з частотою електромагнітного поля ω :

$$\varepsilon_a = \varepsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{nl}^2}{\omega^2 + \nu^2} \right), \quad \sigma = \frac{\varepsilon_0 \omega_{nl}^2 \nu}{\omega^2 + \nu^2}.$$

Для аналізу залежностей $\varepsilon_a(\omega)$ і $\sigma(\omega)$ зручно ввести нормовану частоту ω/ω_{nl} , а також безрозмірний параметр $b = \nu/\omega_{nl}$, який характеризує темп співударів електронів з нейтральними молекулами.

На рис. 3.3 представлені серії дисперсних кривих, які розраховані за формулами

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_0} = 1 - \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_{nl}} \right)^2 + b^2}, \quad \frac{\sigma}{\omega_{nl} \varepsilon_0} = \frac{b}{\left(\frac{\omega}{\omega_{nl}} \right)^2 + b^2}.$$

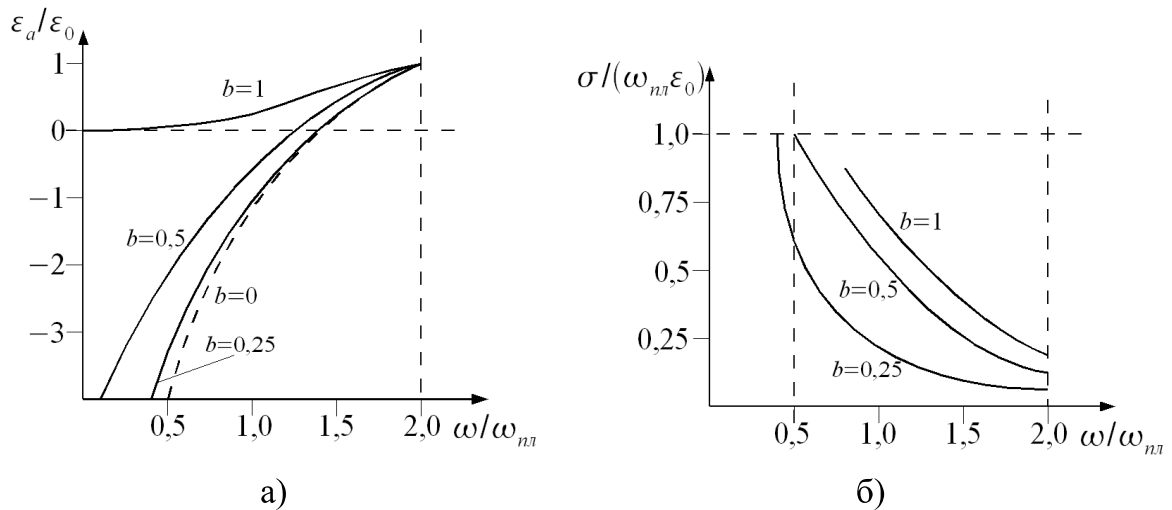


Рис. 3.3. Дисперсійні залежності дійсної (а) та уявної (б) частин комплексної нормованої діелектричної проникності від нормованої частоти для різного темпу співударів електронів b

Аналізуючи ці графіки, необхідно звернути увагу на те, що при $b \ll 1$ дійсна частина комплексної проникності плазми міняє знак поблизу плазмової частоти ω_{nz} . Комплексний коефіцієнт поширення плоских електромагнітних хвиль визначають за формулою:

$$\gamma = \alpha + j\beta = j\omega \sqrt{\left(\varepsilon_a - \frac{j\sigma}{\omega}\right) \mu_0}. \quad (3.8)$$

До цієї формули слід зауважити, що хвиля, яка поширюється в сторону збільшення координати вздовж вибраної осі z , повинна мати параметр γ в I квадранті комплексної площини, тобто $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

Потрібно також зазначити, що комплексне число $\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_a - j\sigma/\omega$ при будь-якій частоті ω має додатну чи від'ємну дійсну частину та від'ємну уявну частину. Тому число $\tilde{\varepsilon}_a$ розміщується або в III чи IV квадрантах комплексної площини. Аргумент цього числа виражається як:

$$\arg \tilde{\varepsilon}_a = \frac{3\pi}{2} + \arctg \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma}. \quad (3.9)$$

Відповідно квадратний корінь у виразі (3.8) має два можливих значення з аргументами

$$\left(\arg \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \mu_a}\right)_1 = \frac{3\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma} - \text{розміщується в II квадранті},$$

$$\left(\arg \sqrt{\tilde{\varepsilon}_a \mu_a}\right)_2 = \frac{7\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma} - \text{розміщується в IV квадранті}.$$

Але реальним аргументом для коефіцієнта поширення хвилі є другий вираз, тому $\arg \gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma}$. Тоді коефіцієнт поширення плоскої хвилі в плазмі із врахуванням співударів буде рівний:

$$\gamma = \omega \sqrt{(\varepsilon_a \mu_0)^2 + \left(\frac{\sigma \mu_0}{\omega}\right)^2} \exp \left[j \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{\omega \varepsilon_a}{\sigma} \right) \right]. \quad (3.10)$$

Якщо $\beta_0 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ і $\varepsilon = \varepsilon_a / \varepsilon_0$, то коефіцієнт затухання і коефіцієнт фази для цього випадку будуть рівні:

$$\begin{aligned} \alpha(\omega) &= \beta_0 \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}\right)^2} \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{\varepsilon}{\sigma/(\omega \varepsilon_0)} \right), \\ \beta(\omega) &= \beta_0 \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega \varepsilon_0}\right)^2} \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \arctg \frac{\varepsilon}{\sigma/(\omega \varepsilon_0)} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Це дає досить великі значення коефіцієнтів затухання α і фази β . Тому співударами електронів в плазмі нехтувати не можна.

Дисперсія фазової швидкості електромагнітних хвиль спостерігається не тільки в плазмі, але й в хвилеводах, які ми розглянемо дещо нижче.

3.3. Електромагнітні хвилі в надпровідниках

Явище надпровідності пояснюється як електромагнітною теорією, так і квантовою. Розглянемо це фізичне явище на основі теорії Максвелла і порівняємо ці результати з квантовою теорією БКШ (Бардіна-Купера-Шріффера).

Явище надпровідності було відкрито в 1911 р. голландським фізиком Х. Камерлінг-Оннесом, який вивчав властивості гелію в широкому температурному інтервалі. У результаті проведених ним досліджень виявилось, що при температурах нижче 4,15 K електричний опір зразка ртуті став майже нульовим. Тобто, постійний струм, збуджений в надпровідному кільці, циркулював по ньому без сторонніх електрорушійних сил протягом тривалого часу. Виміряти опір надпровідника традиційними методами і методиками надзвичайно важко. Вважають і сьогодні, що він в 10^{18} раз менший опору міді, срібла, золота та інших звичайних металів.

Якщо температура надпровідника стає вищою так званої критичної температури T_c , то явище надпровідності стрибкоподібно зникає, і речовина із надпровідного стану переходить в нормальний стан.

Надпровідні властивості характерні для багатьох неферромагнітних металів, в яких значення T_c є різними. Так для Al критична температура рівна 1,2 K, для Pb – 7,2 K, для Nb – 9,2 K. У 1986 р. був відкритий цілий ряд рідкісноземельних керамічних матеріалів з добавкою іонів міді, в яких критичні температури є досить високими. Наприклад, у кераміці $YBa_2Cu_3O_7$ значення $T_c = 92 K$, що є вище температури рідкого азоту ($T_c = 77 K$). Це явище також сприяло розвитку надпровідної електроніки.

Перейдемо тепер до електромагнітної теорії, яку розробили німецькі фізики Ф. і Г. Лондони в 1935 р. Згідно їх теорії відповідний вектор густини повного струму \vec{j} в кожній точці надпровідника представляє собою суму двох складових:

$$\vec{j} = \vec{j}_n + \vec{j}_s,$$

де \vec{j}_n, \vec{j}_s – густини нормальної та надпровідної компонент відповідно.

Зрозуміло, що

$$\vec{j}_n = \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_n \vec{E}, \quad (3.12)$$

де σ_n – нормальна питома провідність речовини. Тоді система двох перших рівнянь Максвелла для надпровідного середовища запишеться як:

$$\begin{aligned} 1. \operatorname{rot} \vec{H} &= \varepsilon_a \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \sigma_n \vec{E} + \vec{j}_s, \\ 2. \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Нехай N_s – концентрація, q_s – заряд, \vec{v}_s – вектор швидкості надпровідних носіїв заряду. Тоді за загальним правилом:

$$\vec{j}_s = N_s q_s \vec{v}_s,$$

а швидкість носіїв заряду визначається із закону Ньютона:

$$m_s \frac{d\vec{v}_s}{dt} = q_s \vec{E}.$$

Об'єднання цих двох виразів дозволяє сформулювати наступне рівняння:

$$\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} = \frac{N_s q_s^2}{m_s} \vec{E}. \quad (3.13')$$

Застосувавши операцію *rot* до обох частин даного рівняння і використавши друге рівняння Максвелла, отримаємо:

$$\text{rot} \left(\frac{\partial \vec{j}_s}{\partial t} \right) = \frac{N_s q_s^2}{m_s} \text{rot} \vec{E} = -\frac{N_s q_s^2}{m_s} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Ф. і Г. Лондони припустили, що таке рівняння можна проінтегрувати за часом, прирівнявши постійну інтегрування до нуля. Тому після інтегрування отримаємо:

$$\text{rot} \vec{j}_s = -\frac{N_s q_s^2}{m_s} \vec{B}, \quad (3.14)$$

тобто густина струму надпровідності формується магнітною індукцією \vec{B} .

Введемо параметр із розмірністю довжини $\lambda_L = \sqrt{\frac{m_s}{\mu_0 N_s q_s^2}}$, який називають лондонівською довжиною, і відповідно рівняння (3.14) прийме вигляд:

$$\text{rot} \vec{j}_s = -\frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}. \quad (3.15)$$

Це рівняння називають рівнянням Лондонів, з якого ми бачимо, що надпровідний струм визначається не електричним, а магнітним полем.

Повернемось знову до першого рівняння Максвелла із врахуванням рівняння Лондона і візьмемо від цього рівняння *rot*:

$$\text{rot} \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \varepsilon_a \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot} \vec{E}) + \sigma_n \text{rot} \vec{E} - \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B},$$

або із врахуванням другого рівняння Максвелла

$$\text{rot} \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = -\varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} - \sigma_n \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}.$$

Приймаючи до уваги, що $\text{rot} \text{rot} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \text{grad} \text{div} \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) - \nabla^2 \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right)$, і враховуючи властивість соленоїдальності магнітного поля, отримаємо:

$$\nabla^2 \left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} \right) = \varepsilon_a \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \sigma_n \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0 \lambda_L^2} \vec{B}.$$

На нульовій частоті, коли $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, отримаємо

$$\nabla^2 \vec{B} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}. \quad (3.16)$$

Слід зазначити, що в рівняння (3.16) не входить питома провідність середовища σ_n , обумовлена нормальними носіями заряду. Тому постійний струм створюється лише за рахунок руху надпровідних носіїв і цей струм тече в надпровіднику без опору. Магнітне поле витісняється із товщини надпровідника на його поверхню та існує в шарі лондонівської довжини λ_L . Щоб довести це, запишемо рівняння (3.16) для одномірного випадку:

$$\frac{d^2 \vec{B}}{dx^2} = \frac{1}{\lambda_L^2} \vec{B}.$$

Розв'язком цього рівняння буде функція

$$B(x) = B(0) \exp\left(-\frac{x}{\lambda_L}\right),$$

де $B(0)$ – магнітна індукція на межі розділу повітря-надпровідник.

Отже, лондонівська довжина λ_L є мірою чи оцінкою проникнення постійного магнітного поля (постійного струму) в надпровідник. Це ніби явище скін-ефекту надпровідника.

У теорії Лондонів вважається, що носіями струму, які відповідають за явище надпровідності, є електрони. При цьому повністю ігнорується питання про те, чому один електрон нормальний, а другий – надпровідний. Якщо прийняти $q_s = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$, $m_s = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$ і $N_s = 10^{29} \text{ м}^{-3}$ (концентрація електронів в металі), то $\lambda_L = 16 \text{ нм}$. Саме на такій глибині магнітна індукція зменшується в e раз у порівнянні з початковим значенням. Тому можна вважати, що всередині надпровідника магнітне поле відсутнє.

Явище виштовхування магнітного поля із товщини надпровідника було вперше відкрито в 1933 р. В. Мейсснером як ефект Мейсснера.

Якщо частота електромагнітного поля $\omega \neq 0$, то немає підстав стверджувати, що $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$, і тому починає суттєво впливати провідність, обумовлена нормальними електронами, що веде до теплових втрат в надпровіднику.

Розглянемо електромагнітний процес, який змінюється в часі за гармонічним законом з частотою ω . Тоді можна записати комплексні амплітуди надпровідної компоненти струму і напруженості електричного поля, пов'язані співвідношенням $\vec{j}_s = -\frac{\vec{j}}{\omega \mu_0 \lambda_L^2} \dot{E}$. Так як для нормальної

складової компоненти струму аналогічний зв'язок має вигляд $\dot{j}_n = \sigma_n \dot{E}$, а струмом зміщення в добре провідному середовищі можна знехтувати, то отримаємо закон Ома для надпровідника в змінному електромагнітному полі:

$$\dot{j}_n = (\sigma_n - j\sigma_s) \dot{E}, \quad (3.17)$$

де $\sigma_s = \frac{1}{\omega \mu_0 \lambda_L^2}$, причому $\sigma_s \ll \sigma_n$.

Таким чином, надпровідне середовище характеризується комплексною питомою провідністю $\tilde{\sigma} = \sigma_n - j\sigma_s$, де дійсна частина обумовлена нормальними, а уявна – надпровідними носіями. Тут можна визначити і принципову різницю між надпровідним та ідеальним провідниками: питома провідність надпровідника, наближаючись за модулем до нескінченності, є практично уявною величиною, тоді як в ідеального провідника вона описується нескінченно великим дійсним числом. Уявний характер провідності пов'язаний з тим, що між струмом і електричним полем згідно (3.13') відбувається фазовий зсув на $\pi/2$.

У ролі величини, яка характеризує густину потоку потужності теплових втрат, зручно використовувати дійсну частину характеристичного опору надпровідного середовища:

$$\operatorname{Re} Z_c = \operatorname{Re} \sqrt{\frac{j \omega \mu_0}{\sigma_n - j \sigma_s}} = \operatorname{Re} \left[j \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\sigma_s + j \sigma_n}} \right].$$

Якщо врахувати, що нормальна частина питомої провідності набагато менша надпровідної ($\sigma_s \ll \sigma_n$), то цей вираз спроститься до виду

$$\operatorname{Re} Z_c \cong \operatorname{Re} \left[j \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{\varepsilon_s}} \left(1 - j \frac{\sigma_n}{2 \sigma_s} \right) \right] = \frac{\sigma_n \sqrt{\omega \mu_0}}{2 \sigma_s^{3/2}}.$$

Строгу квантово-механічну теорію надпровідності створили в 1957 р. американські вчені Д. Бардін, Л. Купер і Д. Шріффер (теорія БКШ). Згідно цієї теорії виявилось, що електрони в металі крім сил кулонівського відштовхування зазнають особливих сил притягання. Якщо температура речовини стає меншою критичної, то сили притягання починають переважати, і частина електронів попарно об'єднуються в так звані куперівські пари, які здатні рухатися між вузлами ґратки подібно надтекучій рідині (без опору). Великий інтерес представляє ефект Джозефсона – протікання тунельного струму через дуже тонкий ($\ll 1 \text{ нм}$) шар діелектрика, який розділяє дві надпровідні області. Саме при таких температурах можна формувати елементи надпровідної електроніки.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення частотної дисперсії електромагнітних хвиль.
2. Визначте параметри електромагнітної хвилі в добре провідному середовищі.

3. Дайте визначення плазми та її параметрів. Охарактеризуйте електромагнітні хвилі в безспівударній плазмі та в плазмі із врахуванням співударів.
4. Дайте визначення групової швидкості електромагнітних хвиль.
5. Запишіть рівняння Лондонів для електромагнітних хвиль в надпровідниках.

Рекомендована література

1. Гинзбург В.Л. Распространение электромагнитных волн в плазме. – М.: Наука, 1967. – 683 с.
2. Жмудський О.О. Основи електродинаміки. Ч. 1. Поширення хвиль у провідному середовищі, плазмі та надпровіднику. – К.: Вид-во КАУ ім. Пивченка, 2000. – 214 с.
3. Ільїнов М.Д. Технічна електродинаміка і поширення радіохвиль. – К.: Вид-во НТУУ КПІ. – 120 с.
4. Черенков В.С. Технічна електродинаміка. Конспект лекцій. – Одеса, ОНАЗ ім. О.С. Попова, 2004. – 156 с.
5. Чернишов П.М., Соколов В.П. Технічна електродинаміка. – Харків: Прапор, 2006. – 296 с.
6. Бредов М.М., Румянцев В.В. Классическая электродинамика / М.М. Бредов, В.В. Румянцев, И.Н. Топтыгин. – М.: Наука, 1985. – 401 с.
7. Диденко А.Н. Сверхпроводящие волноводы и резонаторы. – М.: Советское радио, 1973. – 256 с.

Розділ 4. Падіння плоских електромагнітних хвиль на межу двох середовищ

4.1. Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну поверхню

Нехай на нескінченну ідеальну провідну поверхню за напрямом нормалі падає плоска електромагнітна хвиля, яка поширюється вздовж осі z декартової системи координат (рис. 4.1). Із даного рисунка видно, що присутність на поверхні лише поля падаючої хвилі з вектором напруженості

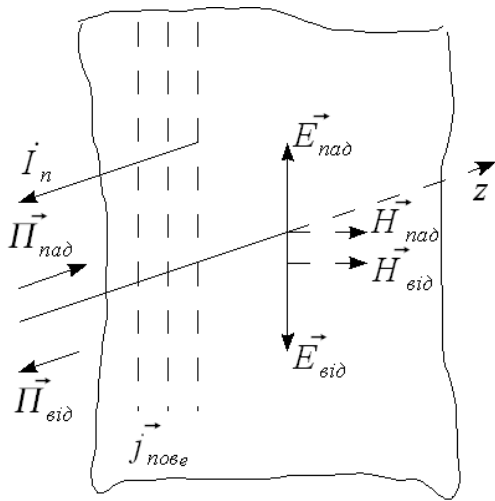


Рис. 4.1. Вектори електромагнітного поля при нормальному падінні плоскої хвилі на ідеально провідну поверхню

електричного поля $\vec{E}_{na\delta}$ не може забезпечити виконання граничної (крайової) умови $E_\tau = 0$. Для виконання цієї умови необхідно, щоб в напівпросторі $z < 0$ існувала відбита хвиля з амплітудою, рівною амплітуді падаючої хвилі. При $z = 0$ повинна виконуватися умова:

$$\vec{E}_{na\delta} + \vec{E}_{від} = 0. \quad (4.1)$$

Щоб визначити сумарне магнітне поле на поверхні ідеального провідника, необхідно врахувати, що вектор Пойтінга відбитої хвилі $\vec{P}_{від}$ орієнтований вздовж від'ємного напрямку z . Так як модулі векторів $\vec{H}_{na\delta}$ і $\vec{H}_{від}$ рівні, то в площині $z = 0$ модуль сумарного вектора напруженості магнітного поля буде рівний:

$$\vec{H}_\Sigma = \vec{H}_{na\delta} + \vec{H}_{від}, \quad (4.2)$$

і буде в два рази більший модуля кожної складової. Таким чином, ми отримали суттєвий результат – на поверхні ідеального провідника напруженість сумарного магнітного поля в два рази перевищує напруженість магнітного поля падаючої електромагнітної хвилі: $\vec{H}_\Sigma = 2\vec{H}_{na\delta}$. Тоді, знаючи модуль і орієнтацію вектора сумарної напруженості магнітного поля, можна визначити вектор густини поверхневого електричного струму за формулою $\vec{j}_{пове} = [\vec{i}_k \times \vec{H}_\Sigma]$. Із рис. 4.1 видно, що поверхневий струм протікає в напрямі вектора \vec{E} падаючої хвилі, а його амплітуда рівна подвоєній амплітуді напруженості магнітного поля цієї хвилі. Тут також стає зрозуміло, що ідеально провідна площа повністю екранує один напівпростір від іншого. Тому при $z > 0$ всі складові векторів електромагнітного поля вже рівні нулю.

4.2. Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричну площину

Припустимо, що напівпростір $z < 0$ прямокутної декартової системи координат (рис. 4.2, область 1) представляє собою вакуум ($\varepsilon_a = \varepsilon_0$, $\mu_a = \mu_0$, $\sigma = 0$), тоді як напівпростір $z > 0$ – це довільний магнітодіелектрик з параметрами ε_a , μ_a , σ (рис. 4.2, область 2).

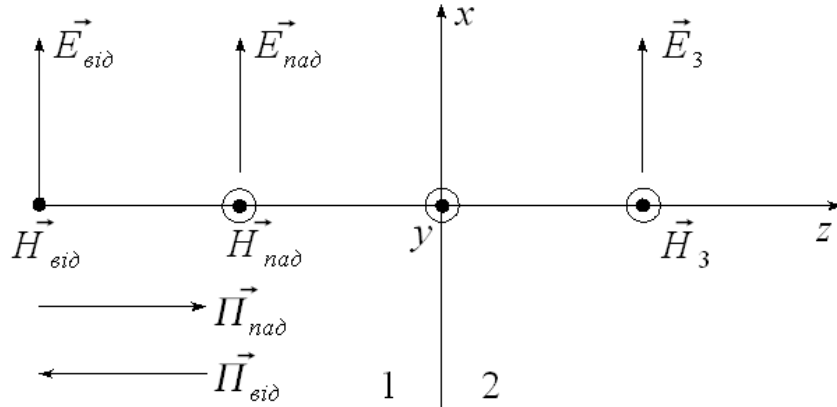


Рис. 4.2. Вектори електромагнітного поля при нормальному падінні плоскої хвилі на діелектричну півплощину

Нехай в області 1 вздовж позитивного напрямку осі z поширюється плоска гармонічна хвиля, яка називається падаючою. Для даної хвилі вважаються відомими комплексні амплітуди векторів \dot{E}_{nao} , \dot{H}_{nao} , орієнтовані в просторі так, як показано на рис. 4.2:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{nao} &= \dot{E}_{xnao} e^{-j\beta_1 z} \vec{i}_x, \\ \dot{H}_{nao} &= \frac{\dot{E}_{xnao}}{Z_0} e^{-j\beta_1 z} \vec{i}_y,\end{aligned}\quad (4.3)$$

де $\beta_1 = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ – коефіцієнт фази плоскої хвилі із заданою частотою у вакуумі, $Z_0 = 377 = 120\pi$ (Ом) – характеристичний опір вакууму.

У нашій електродинамічній системі крім плоскої хвилі існує ще дві хвилі: відбита хвиля, комплексні амплітуди векторів поля якої мають вигляд:

- для відбитої:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{sio} &= \dot{E}_{xsio} e^{-j\beta_1 z} \vec{i}_x, \\ \dot{H}_{sio} &= -\frac{\dot{E}_{xsio}}{Z_0} e^{-j\beta_1 z} \vec{i}_y.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Знак вектора \dot{H}_{sio} обумовлений тим, що вектор Пойтінга відбитої хвилі \vec{P}_{sio} направлений в сторону зменшення координати z ($z < 0$).

- для заломленої (прохідної):

$$\begin{aligned}\dot{E}_z &= \dot{E}_{xz} e^{-j\beta_2 z} \vec{i}_x, \\ \dot{H}_z &= \frac{\dot{E}_{xz}}{Z_{c2}} e^{-j\beta_2 z} \vec{i}_y,\end{aligned}\quad (4.5)$$

де $\beta_2 = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$, $Z_{c2} = \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}}$ – відповідно коефіцієнт фази і характеристичний (хвильовий) опір плоскої електромагнітної хвилі в середовищі 2.

При записі рівняння (4.5) припускається, що область 2 поширюється необмежено вздовж півосі $z > 0$. Крім того, вважається, що електромагнітні хвилі, які поширюються в області 2, мають повне згасання, що дає підстави вважати, що в області 2 відсутня відбита хвиля, яка поширюється в напрямі від'ємної осі z ($z < 0$).

Поставимо тепер задачу про знаходження співвідношення між комплексними амплітудами векторів електромагнітного поля падаючої, відбитої і заломленої хвиль. Для цього використаємо той факт, що на межі розділу, тобто в площині $z=0$, повинні виконуватися крайові умови – дотичні складові сумарних векторів напруженості електричного і магнітного полів повинні бути неперервними:

$$\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}, \quad \dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}.$$

Тоді, використовуючи співвідношення (4.3), (4.4) і (4.5), можна записати:

$$\begin{aligned}\dot{E}_{x\text{ над}} + \dot{E}_{x\text{ від}} &= \dot{E}_{xz} \text{ — для електричної складової,} \\ \frac{\dot{E}_{x\text{ над}}}{Z_0} - \frac{\dot{E}_{x\text{ від}}}{Z_0} &= \frac{\dot{E}_{xz}}{Z_{c2}} \text{ — для магнітної складової.}\end{aligned}$$

Введемо коефіцієнт відбивання по електричному полю R і коефіцієнт проходження (заломлення) по електричному полю T , визначивши дані величини як відношення комплексних амплітуд відповідних електричних полів до комплексної амплітуди напруженості електричного поля падаючої хвилі на межі розділу:

$$R = \frac{\dot{E}_{x\text{ від}}}{\dot{E}_{x\text{ над}}}, \quad T = \frac{\dot{E}_{xz}}{\dot{E}_{x\text{ над}}}.$$

Якщо дані співвідношення поділити на величину $\dot{E}_{x\text{ над}}$, то можна прийти до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих R і T :

$$\begin{aligned}1 + R &= T, \\ \frac{1}{Z_0} - \frac{R}{Z_0} &= \frac{T}{Z_{cL}},\end{aligned}\quad (4.6)$$

звідки можна визначити коефіцієнти R і T :

$$R = \frac{Z_{c2} - Z_0}{Z_{c2} + Z_0},$$

$$T = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_0}. \quad (4.7)$$

Таким чином, коефіцієнти відбивання і заломлення електромагнітної хвилі при нормальному падінні на діелектричний напівпростір повністю визначаються хвильовими опорами середовищ. Якщо діелектрик немагнітний ($\mu=1$, $\sigma=0$), то

$$R = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon}}{1 + \sqrt{\varepsilon}}, \quad T = \frac{2}{1 + \sqrt{\varepsilon}}.$$

4.3. Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричний шар певної товщини

Цікаво відмітити, що формули (4.7) зустрічаються в теорії радіокіл при розв'язанні задачі про відбивання хвиль від стику двох ліній передачі з хвильовими опорами Z_0 і Z_{c2} в умовах, коли друга лінія навантажена на свій хвильовий опір і тому знаходиться в узгодженні.

Як наслідок, впливає можливість розрахувати коефіцієнт відбивання плоскої електромагнітної хвилі від діелектричного шару товщиною l при нормальному падінні (рис. 4.3, а).

Моделлю такої електродинамічної системи є з'єднання напівнескінченної лінії передачі з хвильовим опором Z_0 із відрізком лінії довжиною l з хвильовим опором Z_{c2} (рис. 4.3, б). Даний відрізок навантажений на опір Z_0 , який враховує вплив напівнескінченного опору правіше діелектричного шару.

Будемо вважати, що шар виконаний із діелектрика без втрат із заданою діелектричною проникністю ε . Використаємо вираз для визначення вхідного опору довгої лінії із основ радіоелектроніки для перерізу $a - a'$ для хвилі, що поширюється зліва направо:

$$Z_{\text{вх}} = \frac{Z_0 + jZ_{c2} \operatorname{tg} \theta}{1 + j \frac{Z_0}{Z_{c2}} \operatorname{tg} \theta} = Z_0 \frac{1 + j \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sqrt{\varepsilon}}}{1 + j \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg} \theta}, \quad (4.8)$$

де $\theta = \beta_2 l = \frac{2\pi l}{\lambda_L}$ – електрична товщина шару на частоті в радіанах.

Тоді, використовуючи формулу $R = \frac{Z_{\text{вх}} - Z_0}{Z_{\text{вх}} + Z_0}$, після нескладних перетворень отримаємо вираз для коефіцієнта відбивання від пластини:

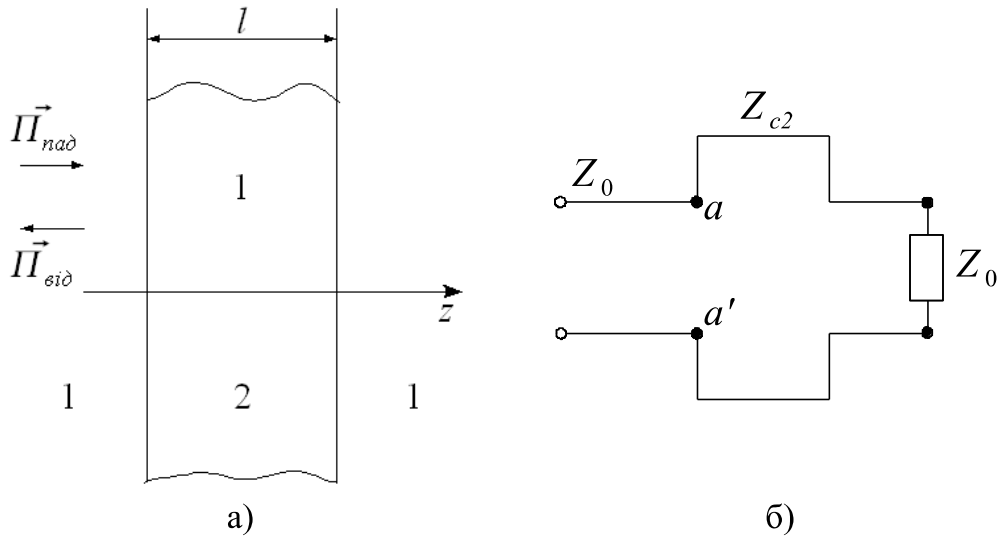


Рис. 4.3. Нормальне падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричний шар (а) і модель такої електродинамічної системи (б)

$$R = \frac{j(1 - \varepsilon) \operatorname{tg} \theta}{2\sqrt{\varepsilon} + j(1 + \varepsilon) \operatorname{tg} \theta}, \quad (4.9)$$

$$|R| = \frac{(\varepsilon - 1) |\operatorname{tg} \theta|}{\sqrt{4\varepsilon + (1 + \varepsilon)^2 \operatorname{tg}^2 \theta}}.$$

Ця залежність подана на рис. 4.4 для різних значень ε (2,56 і 3,8) діелектричного шару. Саме тут слід звернути увагу на те, що коефіцієнт відбивання плоских електромагнітних хвиль є частотно-залежним. Цей факт необхідно враховувати при створенні прозорих діелектричних шарів для захисту антенних систем.

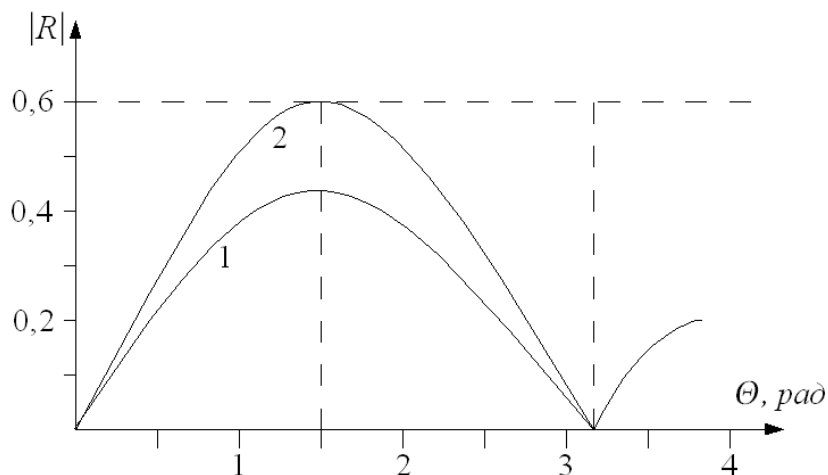


Рис. 4.4. Залежність модуля коефіцієнта відбивання $|R|$ від електричної товщини діелектричного шару (1 – $\varepsilon = 2,56$; 2 – $\varepsilon = 3,8$)

4.4. Падіння плоскої електромагнітної хвилі на діелектричну півплощину під довільним кутом. Закони Снелліуса та формули Френеля

Розглянемо загальний випадок, коли плоска електромагнітна хвиля, поширюючись в середовищі 1, падає на межу розділу із середовищем 2 під деяким кутом φ , який лежить в межах $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Геометрія даної задачі та орієнтація осей подані на рис. 4.5.

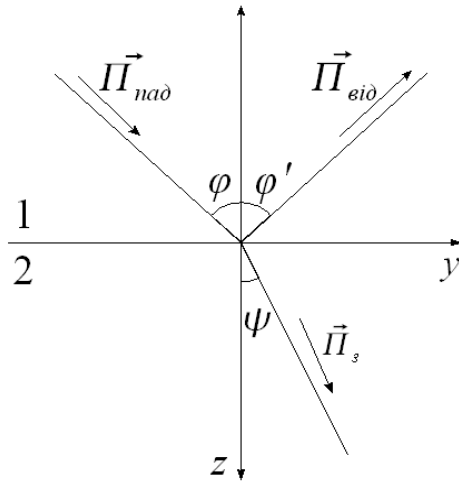


Рис. 4.5. Падіння плоскої електромагнітної хвилі на стик двох середовищ під певним кутом

Аналізуючи електромагнітне поле в даній системі, введемо три хвилі: падаючу, відбиту і заломлену. Вектори Пойтінга всіх цих хвиль лежать в одній площині, яка називається площиною падіння. Із рис. 4.5 випливає, що вектор \vec{P}_{nad} утворює з позитивними напрямками осей x та y кут $\frac{\pi}{2} - \varphi$ та φ відповідно. Так як $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$, то комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля падаючої хвилі може бути подана як:

$$\dot{E}_{nad}(y, z) = \dot{E}_{m nad} e^{-j\beta_1(y \sin \varphi + z \cos \varphi)},$$

де $\dot{E}_{m nad}$ – комплекс амплітуди падаючої хвилі.

Якщо через φ' і ψ позначити кути відбивання і заломлення відповідно (рис. 4.5), то комплекси амплітуд будь-яких складових вектора \vec{E} відбитої і заломленої хвиль можна записати

$$\dot{E}_{vid}(y, z) = \dot{E}_{m vid} e^{-j\beta_1(y \sin \varphi' - z \cos \varphi')},$$

$$\dot{E}_3(y, z) = \dot{E}_{m 3} e^{-j\beta_2(y \sin \psi + z \cos \psi)}.$$

На межі розділу, тобто в площині $z=0$, як відомо, повинні виконуватися умови неперервності дотичних (тангенціальних) складових векторів \vec{E} і \vec{H} : $\dot{E}_{1\tau} = \dot{E}_{2\tau}$, $\dot{H}_{1\tau} = \dot{H}_{2\tau}$.

Взявши тангенціальні складові від комплексів падаючої, відбитої і заломленої хвиль, матимемо:

$$\dot{E}_{\tau nad} e^{-j\beta_1 y \sin \varphi} + \dot{E}_{\tau vid} e^{-j\beta_1 y \sin \varphi'} = \dot{E}_{\tau 3} e^{-j\beta_2 y \sin \psi}. \quad (4.10)$$

Для виконання цього співвідношення необхідно щоб

$$1) \varphi = \varphi',$$

$$2) \frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{\beta_1}{\beta_2}. \quad (4.11)$$

Вирази (4.11) – це відомі нам з фізики закони Снелліуса, які формулюються так:

- 1) кут падіння рівний куту відбивання плоскої електромагнітної хвилі;
- 2) відношення синусів кута падіння і заломлення рівне відношенню їх фазових коефіцієнтів.

Так як $\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_a \mu_a}$, то, враховуючи, що коефіцієнт заломлення середовища $n = \sqrt{\varepsilon \mu}$, другий закон Снелліуса можна записати:

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Повернемося тепер до поляризації електромагнітних хвиль, бо вони змінюють значення коефіцієнтів відбивання і заломлення при падінні електромагнітних хвиль на межу двох середовищ.

Перпендикулярна (горизонтальна) поляризація. Вона характерна тим, що площина поляризації, яка містить напрям вектора \vec{E} , є перпендикулярною площині падіння, а вектор \vec{H} знаходиться в цій площині (рис. 4.6).

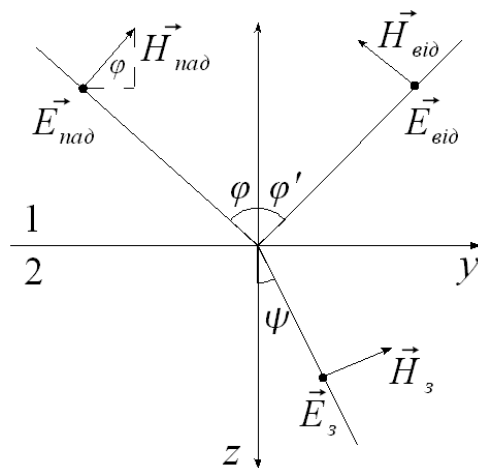


Рис. 4.6. Падіння плоскої електромагнітної перпендикулярно поляризованої хвилі на стик двох середовищ

використовуючи поняття хвильового опору середовища. Таким чином, умова неперервності дотичних складових векторів напруженості магнітного поля в площині $z=0$ набуде вид:

$$\frac{\cos \varphi}{Z_{c1}} (\dot{E}_{nad} - \dot{E}_{vid}) = \frac{\dot{E}_3}{Z_{c2}} \cos \psi. \quad (4.13)$$

Для випадку перпендикулярної поляризації введемо коефіцієнт відбивання R_{\perp} і коефіцієнт заломлення T_{\perp} по електричному полю:

$$R_{\perp} = \frac{\dot{E}_{vid}}{\dot{E}_{nad}}, \quad T_{\perp} = \frac{\dot{E}_3}{\dot{E}_{nad}}.$$

Тоді рівняння (4.13) можна виразити через коефіцієнти R_{\perp} і T_{\perp} :

Нехай \dot{E}_{nad} , \dot{E}_{vid} , \dot{E}_3 – комплексні амплітуди векторів електричного поля падаючої, відбитої і заломленої хвиль відповідно у площині $z=0$ при довільній координаті y . Крайові умови відносно електричних векторів запишуться

$$\dot{E}_{nad} + \dot{E}_{vid} = \dot{E}_3. \quad (4.12)$$

При запису крайових умов відносно векторів напруженості магнітного поля необхідно врахувати, що їх тангенціальні складові отримують шляхом множення модулів вектора \vec{H} на косинуси відповідних кутів (рис. 4.6). Крім цього, зручніше виразити вектори \vec{H} через вектори \vec{E} ,

$$\begin{cases} 1 + R_{\perp} = T_{\perp}, \\ \frac{\cos \varphi}{Z_{c1}}(1 - R_{\perp}) = \frac{T_{\perp}}{Z_{c2}} \cos \psi. \end{cases} \quad (4.14)$$

Розв'язок даної системи дає значення коефіцієнтів R_{\perp} і T_{\perp} , які називають формулами Френеля:

$$\begin{aligned} R_{\perp} &= \frac{Z_{c2} \cos \varphi - Z_{c1} \cos \psi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \psi}, \\ T_{\perp} &= \frac{2 Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \psi}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

На практиці часто доводиться обчислювати коефіцієнти відбивання і заломлення плоских електромагнітних хвиль для випадку, коли середовище 1 є вакуум або повітря ($\varepsilon=1$, $n=1$), а середовище 2 – немагнітний діелектрик ($\mu=1$) без втрат з відносною діелектричною проникністю ε . Для такого середовища при використанні законів Снелліуса отримаємо:

$$R_{\perp} = \frac{\cos \varphi - \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}, \quad T_{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\cos \varphi + \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi}}.$$

Графіки залежностей $R_{\perp}(\varphi)$ і $T_{\perp}(\varphi)$ для конкретного значення $\varepsilon = 2,56$ подані на рис. 4.7. Необхідно звернути увагу, що при $\varphi \rightarrow \pi/2$ величина T_{\perp} монотонно наближається до нуля, тоді як коефіцієнт відбивання (від'ємний при будь-якому значенні кута падіння) наближається до значення -1.

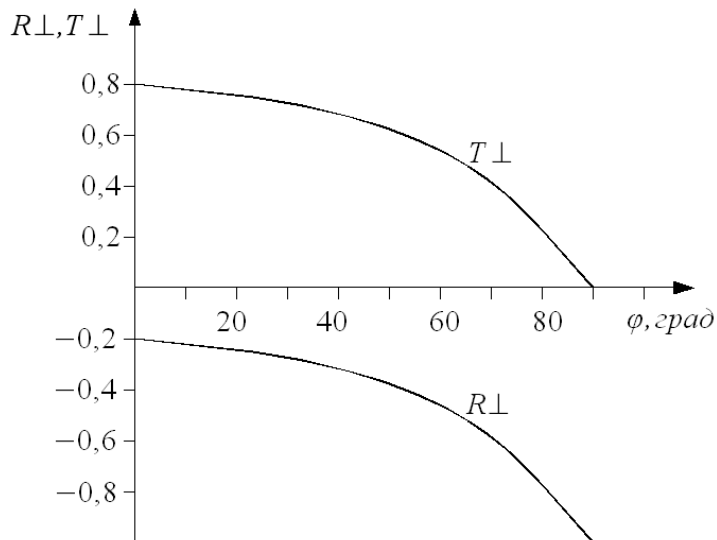


Рис. 4.7. Залежність коефіцієнтів R_{\perp} і T_{\perp} від кута падіння для $\varepsilon = 2,56$

Паралельна (вертикальна) поляризація. Вона характеризується тим, що вектори \vec{E} всіх трьох хвиль – падаючої, відбитої і заломленої, паралельні площині падіння (рис. 4.8).

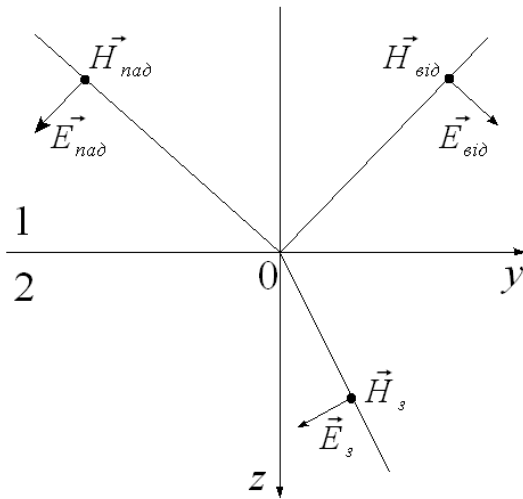


Рис. 4.6. Падіння плоскої електромагнітної перпендикулярно поляризованої хвилі на стик двох середовищ

За аналогією із випадком перпендикулярної поляризації можна записати крайові умови неперервності дотичних складових векторів електромагнітного поля. Дані умови приймають вигляд:

$$\begin{aligned} (\dot{E}_{na\delta} + \dot{E}_{vi\delta}) \cos \varphi &= \dot{E}_s \cos \psi, \\ \frac{(\dot{E}_{na\delta} - \dot{E}_{vi\delta})}{Z_{c1}} &= \frac{\dot{E}_s}{Z_{c2}}. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Введемо коефіцієнт відбивання R_{\square} і коефіцієнт заломлення T_{\square} по електричному полю:

$$R_{\square} = \frac{\dot{E}_{vi\delta}}{\dot{E}_{na\delta}}, \quad T_{\square} = \frac{\dot{E}_s}{\dot{E}_{na\delta}}.$$

Розділивши рівняння (4.16) на комплексну амплітуду $\dot{E}_{na\delta}$, отримаємо наступну систему рівнянь відносно R_{\square} і T_{\square} , які називаються формулами Френеля для паралельної (вертикальної) поляризації

$$\begin{aligned} R_{\square} &= \frac{Z_{c2} \cos \psi - Z_{c1} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \psi + Z_{c1} \cos \varphi}, \\ T_{\square} &= \frac{2 Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \psi + Z_{c1} \cos \varphi}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Якщо середовище 2 є немагнітним діелектриком з відносною діелектричною проникністю ε , то формули Френеля приймають вигляд (при врахуванні законів Снелліуса):

$$R_{\square} = \frac{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} - \varepsilon \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cos \varphi}, \quad T_{\square} = \frac{2 \sqrt{\varepsilon} \cos \varphi}{\sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi} + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Конкретні значення залежностей $R_{\square}(\varphi)$ і $T_{\square}(\varphi)$ для $\varepsilon = 2,56$ подані на рис. 4.9. Порівнюючи їх з аналогічними залежностями для $R_{\perp}(\varphi)$ і $T_{\perp}(\varphi)$, бачимо, що характер цих залежностей однаковий. Проте, криві $R_{\square}(\varphi)$ і $R_{\perp}(\varphi)$ принципово різні – монотонно зростаюча функція $R_{\square}(\varphi)$ при деякому значенні кута φ приймає нульове значення, що вказує на відсутність відбитих хвиль.

4.5. Кут Брюстера. Повне внутрішнє відбивання

Так прийнято називати кут падіння, при якому падаюча хвиля повністю, без відбивання, переходить через межу розділу двох матеріальних

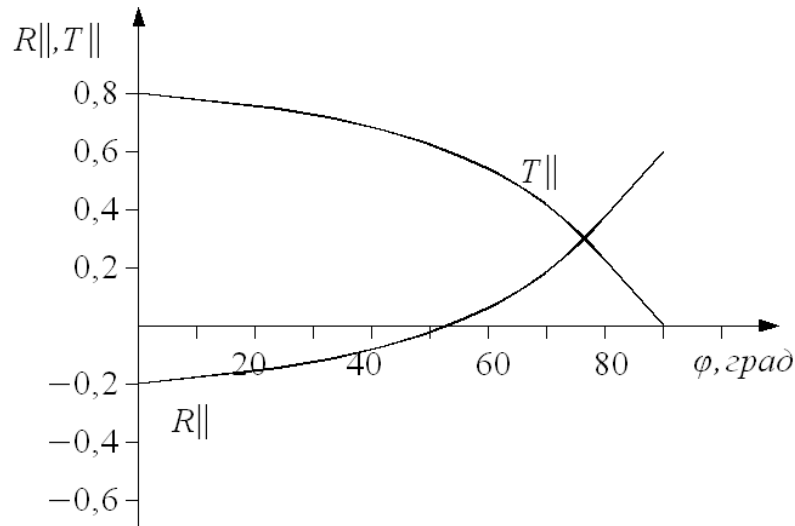


Рис. 4.9. Залежність коефіцієнтів R_{\parallel} і T_{\parallel} від кута падіння плоскої електромагнітної хвилі паралельної поляризації при $\varepsilon = 2,56$

середовищ. Із виразів (4.15) і (4.17) випливає, що кут Брюстера задовольняє одному із двох рівнянь:

$$\begin{aligned} Z_{c2} \cos \varphi_B - Z_{c1} \cos \psi_B &= 0 \text{ — для перпендикулярної поляризації,} \\ Z_{c2} \cos \psi_B - Z_{c1} \cos \varphi_B &= 0 \text{ — для паралельної поляризації.} \end{aligned} \quad (4.18)$$

Тут під кутом ψ_B розуміється кут заломлення, що відповідає куту падіння φ_B .

Розглянемо типовий випадок, коли обидва граничні середовища є немагнітними діелектриками ($\mu_1 = \mu_2 = 1$), причому $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$. Тоді $Z_{c1} > Z_{c2}$, і в силу законів Снелліуса $\varphi > \psi$, тобто $\cos \varphi < \cos \psi$. Тоді, повертаючись до рівнянь (4.18), бачимо, що перше рівняння немає змісту. Тобто, явище Брюстера при падінні плоскої електромагнітної хвилі на немагнітний діелектрик може спостерігатися тільки для паралельної поляризації падаючої плоскої електромагнітної хвилі. Тоді кут Брюстера для таких середовищ з паралельною поляризацією буде рівний

$$\varepsilon \cos \varphi_B = \sqrt{\varepsilon - \sin^2 \varphi_B},$$

звідки знаходимо

$$\varphi_B = \arctg \sqrt{\varepsilon},$$

тобто визначається діелектричною проникністю діелектрика.

Повернемося до закону Снелліуса $\left(\frac{\sin \varphi}{\sin \psi} = \frac{n_2}{n_1} \right)$, і вияснємо, що можуть

бути два цікавих випадки:

1) Оптична густина середовища 2 переважає оптичну густина середовища 1, тобто $n_2 > n_1$. При цьому завжди $\psi < \varphi$, а оскільки кут падіння φ лежить в інтервалі $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$, то заломлена хвиля існує при будь-якому куті падіння.

2) Середовище 2 оптично менш густе у порівнянні із середовищем 1, тобто $n_2 < n_1$. У цьому випадку завжди $\psi > \varphi$ і тому може знайтись такий кут падіння, при якому заломлена хвиля буде поширюватися паралельно межі розділу під кутом $\psi = 90^\circ$. Таке критичне значення кута падіння називають кутом повного внутрішнього відбивання:

$$\varphi_{\text{пов}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right).$$

При кутах падіння $\varphi > \varphi_{\text{пов}}$ заломленої хвилі у звичайному сенсі не існує, енергія падаючої хвилі повністю відбивається всередині середовища з великою оптичною густиною. Це явище широко використовують в техніці НВЧ на частотах, більших 50 ГГц.

Розглянемо тепер крайові умови Леонтовича, які визначають падіння плоскої електромагнітної хвилі з повітря (середовище 1) під кутом φ на межу розділу з немагнітним ($\mu=1$) добре провідним середовищем, яке характеризується питомою провідністю σ . Таке матеріальне середовище 2 має комплексний характер показника заломлення:

$$n_2 = \sqrt{\frac{-j\sigma}{\omega\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1-j).$$

Тут використано співвідношення $\sqrt{-j} = e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1-j}{\sqrt{2}}$.

Використовуючи закон Снелліуса $\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1-j)$ бачимо, що в добре провідному середовищі заломлена хвиля поширюється під комплексним кутом і тому вже є неоднорідною плоскою хвилею, для якої $\psi = 90^\circ + j\alpha$.

У цьому випадку запишемо другий закон Снелліуса як

$$\sin\psi = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}} \sin\varphi (1+j)$$

і прийmemo до уваги, що $\frac{\omega\varepsilon_0}{\sigma} \ll 1$. Тоді синус в лівій частині цього виразу можна замінити аргументом і вважати при цьому, що кут заломлення визначається як

$$\psi = \sqrt{\frac{\omega\varepsilon_0}{2\sigma}} \sin\varphi (1+j).$$

У граничному наближенні при $\sigma \rightarrow \infty$, $\psi \rightarrow 0$, а значить і $\sin\psi \rightarrow 0$, $\cos\psi \rightarrow 1$ вже незалежно від кута падіння.

Тоді комплексну амплітуду вектора напруженості електричного поля в середовищі 2 можна подати як

$$\dot{E}_{np} = \dot{E}_3 = \dot{E}_{m3} e^{-\gamma_2(y\sin\psi + z\cos\psi)},$$

де γ_2 – комплексний коефіцієнт поширення плоскої електромагнітної хвилі в середовищі із втратами. Враховуючи граничні значення кута заломлення ψ , можемо записати:

$$\dot{E}_3 = \dot{E}_{m3} e^{-\gamma_2 z}.$$

У відповідності з цією формулою заломлена хвиля проникає всередину середовища 2 практично за напрямом нормалі до межі розділу (по осі z) при будь-якому куті падіння. В цьому і є визначення граничних умов Леонтовича.

4.6. Сигнальні графи. Перехід від системи до сигнального графу. Еквівалентні перетворення в сигнальних графах. Формула Мезона

Направленим (лінійним або сигнальним) графом називають сукупність вузлів і віток, що їх зв'язують, стрілки на яких вказують напрям передачі сигналу від одного вузла до іншого.

Вузлами в направлених графах зазвичай є струми або потенціали вузлів досліджуваних електричних (електромагнітних) кіл, а не вузлові точки цих кіл. Кожна вітка графа характеризується величиною передачі. Під передачею вітки розуміють відношення вихідної величини до вхідної. Наприклад, вихідна величина x_2 вітки (рис. 4.10, а) рівна добутку вхідної величини (вхідного сигналу) x_1 на передачу a : $x_2 = ax_1$. Передача вітки може мати розмірність провідності, опору або нульову розмірність. До того чи іншого вузла графа, крім вхідного і вихідного, в загальному випадку може підходити або відходити декілька віток.

На рис. 4.10, б як приклад зображений сигнальний граф з вузлами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Передача віток цього графа позначена буквами $a, b, c, d, e, q, q', 1$. Напрямок передачі показаний стрілками. Під x_1 будемо розуміти вузловий сигнал першого вузла, під x_2 – вузловий сигнал другого вузла і т.д. вузловий сигнал k -го вузла рівний сумі сигналів, що підходять до k -го вузла. При складанні вузлового сигналу k -го вузла вихідні із k -го вузла сигнали не враховуються; вони враховуються при складанні вузлових сигналів тих вузлів, до яких ці сигнали підходять. Зокрема, вузловий сигнал першого

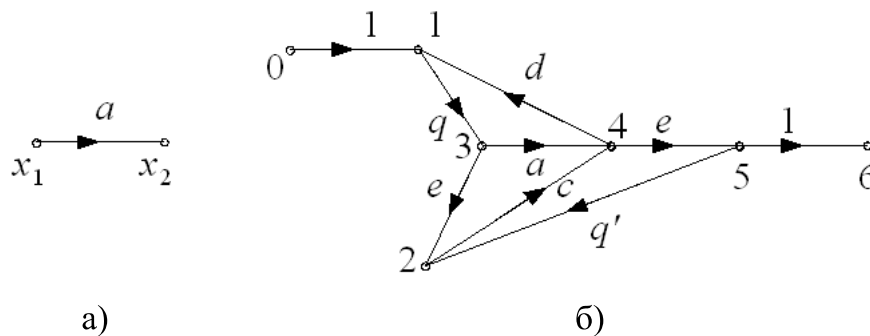


Рис. 4.10. Направлені (сигнальні) графи:
а) передача вітки; б) вузловий граф.

вузла графа на рис. 4.10, б буде рівний $x_1 = 1 \cdot x_0 + d \cdot x_4$, другого – $x_2 = b \cdot x_3 + q' \cdot x_5$, третього – $x_3 = q \cdot x_1$, четвертого – $x_4 = a \cdot x_3 + c \cdot x_2$.

Вузол графа, який виражає собою величину, прийняту в даній системі за вхідну, зображують зліва, а вузол графа, що відповідає вихідній величині – справа. Прийнято так зображувати граф, щоб від вхідного вузла відходила тільки одна вітка, а віток, які б підходили, щоб не було. Аналогічно, до вихідного вузла повинна підходити тільки одна вітка (тобто віток, які б підходили до вихідного вузла більше однієї не було). Це завжди можна зробити, вводячи у граф додаткові вузли і вітки, передача яких рівна одиниці. Так, в графі на рис. 4.10, б додатковими вузлами є вузли 1 і 5. Між вхідним вузлом 0 і додатковим 1 є вітка з передачею 1. Аналогічно додатковий вузол 5 з'єднаний з вихідним вузлом 6 віткою з передачею 1.

Для того, щоб від даної системи, наприклад якої-небудь електричної схеми, перейти до відповідного їй сигнального графа, застосовують різні методи в залежності від того, яким чином записують рівняння для цих кіл: на основі законів Кірхгофа, використовуючи метод вузлових потенціалів чи контурних струмів.

Направлений граф містить ту ж інформацію, що і система рівнянь, тільки дана інформація подається графічно у вигляді графа. Якщо за основу взяти рівняння, складені на основі законів Кірхгофа, то вузлами графа є струми віток і напруги на елементах схеми. Коли за основу взяті рівняння вузлових потенціалів, то вузли графа будуть виражати вузлові точки схеми і шукані струми.

Розглянемо спочатку упорядкований перехід від заданої електричної схеми до сигнального графа, минаючи етап складання рівнянь, поклавши в основу метод контурних струмів (рис. 4.11, а).

Напрямок контурних струмів у всіх контурах вибираємо однаковими, наприклад, за годинниковою стрілкою. Число вузлів в графі рівне числу контурів плюс число нерівних нулю контурних е.р.с., плюс вихідна величина. Кожному контурному струму, кожній контурній е.р.с. і вихідній величині відповідає свій вузол. Так, в нашому випадку на рис. 4.11, а є три контурних струми, одна контурна е.р.с. і одна вихідна величина – струм I_5 . Цій схемі відповідає граф на рис. 4.11, б, в якому є п'ять вузлів.

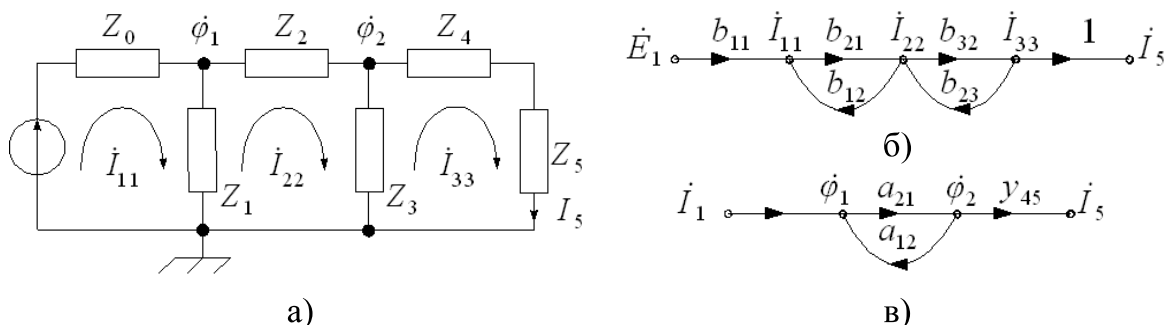


Рис. 4.11. Електрична схема кола (а) та її графи на основі контурних струмів (б) та вузлових потенціалів (в)

Вузли I_{kk} розміщуємо всередині відповідних контурів, а вузли E_{kk} і вузол вихідної величини виносимо на периферію зліва і справа відповідно. З'єднуємо дані вузли вітками, вказуємо на них стрілками і записуємо значення передач віток. Кожний вузол I_{kk} з'єднаний з вузлом E_{kk} віткою з передачею $b_{kk} = \frac{1}{Z_{kk}}$, де Z_{kk} – власний опір k -го контуру. Стрілка на цій вітці направлена до вузла I_{kk} . Числове значення E_{kk} може бути і додатним, і від'ємним. Воно додатне, якщо сумарна е.р.с. k -го контуру направлена за напрямом контурного струму I_{kk} . Крім того, кожний вузол I_{kk} з'єднаний з яким-небудь іншим вузлом I_{pp} (якщо між контуром k і p на схемі є загальна (сумісна) вітка) двома вітками. Одна вітка має стрілку, направлену до вузла I_{kk} і передачу $b_{kp} = \frac{Z_{kp}}{Z_{kk}}$, де Z_{kp} – опір суміжної вітки між k - і p -контурами.

На другій вітці стрілка направлена до вузла I_{pp} . Її передача рівна $b_{pk} = \frac{Z_{kp}}{Z_{pp}}$, де Z_{pp} – власний опір p -контуру. При синфазному (узгодженому) напрямі всіх контурних струмів передачі всіх віток між вузлами k і p додатні.

За методом вузлових потенціалів граф будують так само, як за методом контурних струмів, тільки вузлами графа вже є потенціали вузлів схеми, вузлові струми та вихідна величина (рис. 4.11, в).

Якщо в електричній схемі вузли k і p з'єднані віткою з провідністю Y_{kp} , а сумарна провідність віток, які сходяться у вузлах k і p , позначені відповідно як Y_{kk} і Y_{pp} , то на графі між вузлами ϕ_k і ϕ_p буде дві вітки. На одній з них стрілка направлена до вузла ϕ_k , а її передача $a_{kk} = \frac{Y_{kp}}{Y_{kk}}$. На другій стрілка направлена вже до вузла ϕ_p , а її передача $a_{pk} = \frac{Y_{kp}}{Y_{pp}}$.

Тут слід звернути увагу на те, що перший індекс в a вказує вузол, до якого направлена стрілка, другий – від якого направлена стрілка. Якщо вузли k і p на схемі не з'єднані віткою з провідністю Y_{kp} , то на графі вузли ϕ_k і ϕ_p не з'єднані вітками. Вузол ϕ_k з'єднаний з вузлом вузлового струму \dot{I}_{kk} віткою з передачею $a_{kk} = \frac{1}{Y_{kk}}$, і направлений до вузла ϕ_k . Шуканому струму \dot{I}_{kp} у вітці з провідністю Y_{kp} на графі буде відповідати вузол вихідної величини \dot{I}_{kp} .

У відповідності із законом Ома для ділянки кола до вузла графа \dot{I}_{kp} повинні підходити дві вітки, стрілки на яких направлені до вузла \dot{I}_{kp} . Передача від вузла ϕ_k рівна Y_{kp} , а передача від вузла ϕ_p рівна Y_{kp} . Якщо один із цих вузлів заземлений, то цей вузол і передача від нього будуть відсутні.

Якщо граф складають для кола постійного струму, то комплексні опори Z необхідно замінити на активні опори R , комплексну провідність Y – на активне провідність G , а точки над ϕ , E , I , які характеризують гармонічність зміни цих величин, не ставлять.

А тепер, як і в електричних колах, повернемося до еквівалентних перетворень в сигнальних графах з метою їх спрощення. Вони полягають в наступному:

1. Передача послідовно з'єднаних віток (рис. 4.12, а).
2. Передача двох паралельно з'єднаних віток (рис. 4.12, б).

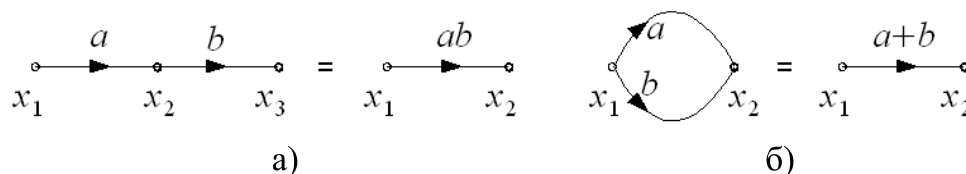


Рис. 4.12. Передача послідовно (а) і паралельно з'єднаних (б) віток

3. Розв'язання простої вузлової точки (рис. 4.13).

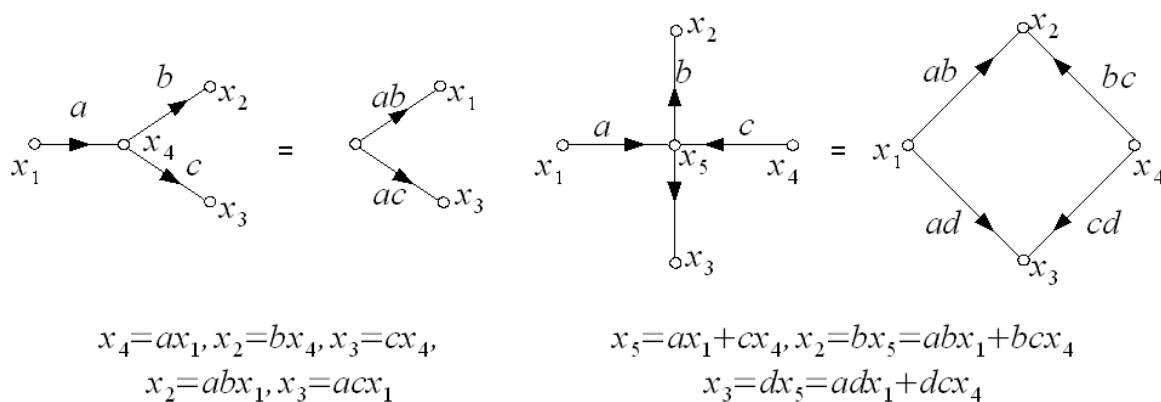


Рис. 4.13. Розв'язання вузових точок сигнального графа

4. Включення контуру на шляху (рис. 4.14, а) та виключення петлі (рис. 4.14, б).

5. Заміна двох і більшого числа петель однією (рис. 4.15).

6. Розтяг (подовження) вузла (рис. 4.16).

А тепер повернемося до визначення передачі графа за допомогою формули Мезона, яка дозволяє визначати не тільки передачу в електронних схемах, але й визначати коефіцієнти відбивання і заломлення електромагнітних хвиль при їх падінні на стик різних середовищ.

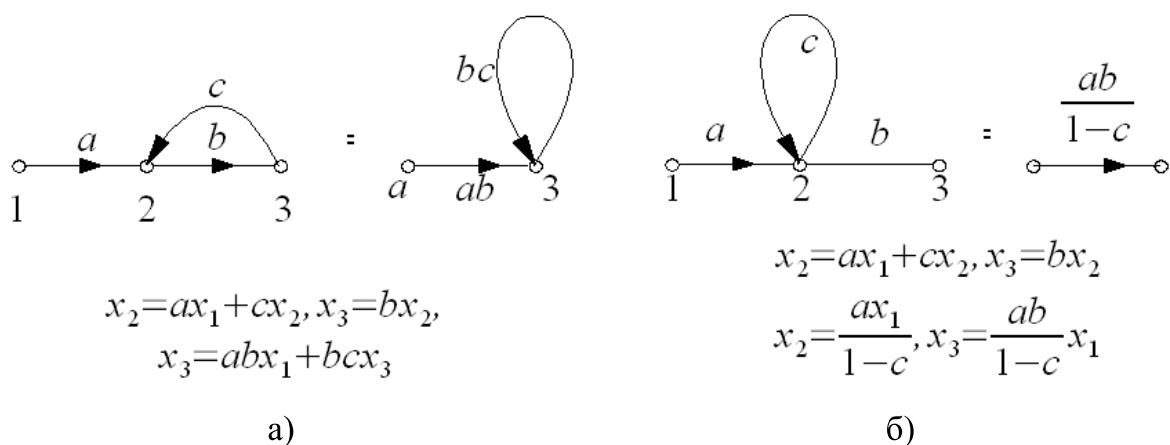


Рис. 4.14. Виключення контуру (а) та петлі (б)

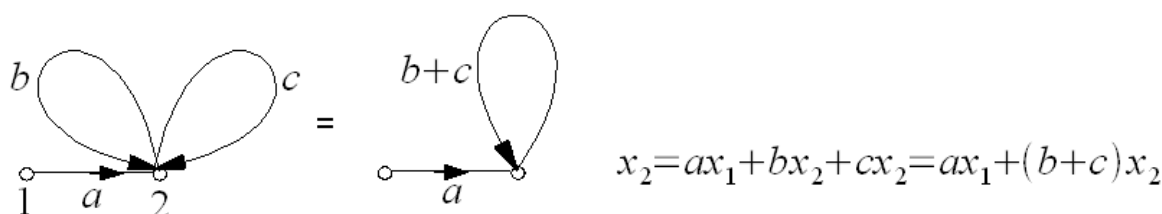


Рис. 4.15. Сумування петель на шляху

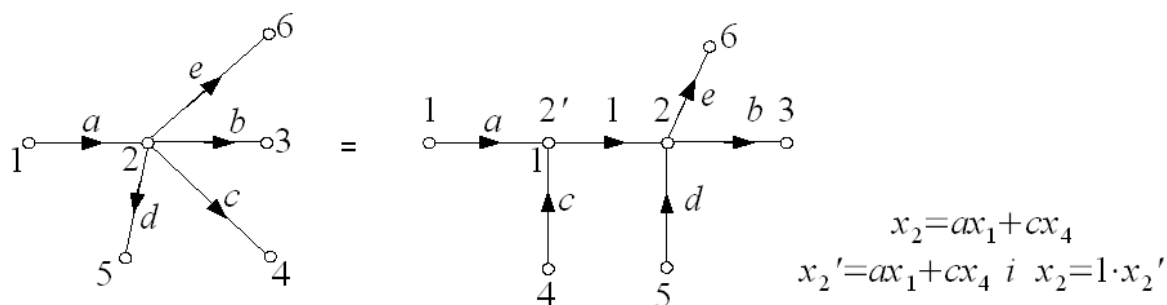


Рис. 4.16. Подовження вузла сигнального графа

У 1956 р. Мезон запропонував загальну формулу для визначення передачі графа. Ця формула є основою при розрахунку сигнальних графів. Дамо визначення певним термінам сигнальних графів.

Прямий шлях P – це шлях вздовж стрілок від виток до стоку, при проходженні якого ні один із вузлів не зустрічається більше одного разу. Передача прямого шляху визначається добутком передач віток цього шляху. Між витком і стоком сигнального графу може бути декілька прямих віток.

Петля оберненого зв'язку представляє собою замкнений шлях, вздовж якого (по кругу) кожний вузол може зустрічатися по одному разу. Передачу петлі оберненого зв'язку часто позначають T з індексом передача петлі оберненого зв'язку рівна добутку передач віток, які утворюють цю петлю.

Тоді загальна формула для визначення передачі графа записується у вигляді:

$$G = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k}{\Delta} = \frac{P_1 \Delta_1 + P_2 \Delta_2 + \dots + P_n \Delta_n}{\Delta}, \quad (4.19)$$

де P_k – передача k -го прямого шляху від витоку до стоку, n – число прямих шляхів.

Визначник Δ_k рівний одиниці мінус сума взятих поодинокі передачі петель оберненого зв'язку, що не торкаються k -го прямого шляху (але петлі можуть торкатися одна одної), плюс сума попарних добутків передач петель оберненого зв'язку, що не торкаються одна одну і k -го прямого шляху, мінус сума потрійних добутків передач петель оберненого зв'язку, які не торкаються одна одну і k -го прямого шляху, плюс і т.д.

Визначник Δ рівний одиниці мінус сума взятих поодинокі передачі петель оберненого зв'язку (які торкаються і які не торкаються одна одну), плюс сума попарних добутків передач петель оберненого зв'язку, що не торкаються одна одну, мінус сума потрійних добутків передач петель оберненого зв'язку, які не торкаються одна одну, плюс і т.д.

Для закріплення матеріалу при визначенні передачі графа використаємо сигнальний граф, поданий на рис. 4.17. Для першого прямого шляху з передачею $P_1 = ab$ визначник Δ_1 рівний одиниці мінус сума передач петель оберненого зв'язку, взятих поодинокі і які не торкаються цього прямого шляху ($T_1 + T_2$), плюс попарний добуток передач петель оберненого зв'язку, які не торкаються одна одну і вибраного прямого шляху.

У нашому графі (рис. 4.17) відсутні петлі, які б не торкались одна одну і не торкались першого прямого шляху. Тому доданки з попарним добутком петель оберненого зв'язку, як і взяті по три (і більше) у виразі для Δ_1 відсутні.

Тому маємо $\Delta_1 = 1 - (T_1 + T_2)$, де $T_1 = h$, $T_2 = fg$.

Для другого прямого шляху $P_2 = ceb$, а $\Delta_2 = 1 - T_1$.

Знаменник $\Delta = 1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3$, де $T_3 = ed$ (T_1 і T_3 – петлі, які не торкаються одна одну).

Тоді

$$G = \frac{ab(1 - T_1 - T_2) + ceb(1 - T_1)}{1 - (T_1 + T_2 + T_3) + T_1 T_3} = \frac{ab(1 - h - fg) + ceb(1 - h)}{1 - (h + fg + ed) + hed}.$$

Розглянемо тепер визначення коефіцієнтів відбивання і заломлення при падінні плоскої електромагнітної хвилі на стик середовищ. Розглянемо саме особливості побудови графа з використанням формули Мезона для наступної задачі.

Плоска електромагнітна хвиля (рис. 4.18) падає нормально на пластину ідеального діелектрика ε_{r2} , який з обох сторін обмежений повітряним

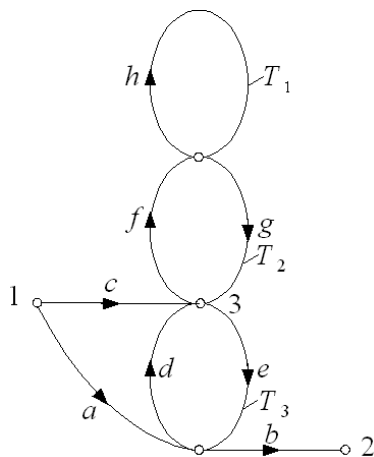


Рис. 4.17. До визначення передачі сигнального графа

середовищем ($\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1$). Користуючись методом направлених графів, визначити коефіцієнт радіопрозорості T та коефіцієнт відбивання R . Під коефіцієнтом радіопрозорості T розуміється відношення напруженості поля заломленої через пластину хвилі до напруженості поля падаючої хвилі: $T = \frac{\dot{E}_3}{\dot{E}_{na\partial}}$.

Під коефіцієнтом відбивання пластини розуміється відношення напруженості поля відбитої хвилі до напруженості поля падаючої хвилі: $R = \frac{\dot{E}_{\partial i\partial}}{\dot{E}_{na\partial}}$.

Коефіцієнт радіопрозорості $T = G_{71} = \frac{\dot{E}_3}{\dot{E}_{na\partial}}$, де G_{71} – передача графа від вузла 1 до вузла 7, яку знаходимо, використовуючи формулу Мезона:

$$G = \frac{\sum_{k=1}^n P_k \Delta_k}{\Delta}.$$

У нашому випадку $n=1$, $P_1 = T_{21} T_{32} e^{-\gamma d}$, $\Delta_1 = 1$, $\Delta = 1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}$. Тоді передача рівна

$$T = \frac{T_{21} T_{32} e^{-\gamma d}}{1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}}.$$

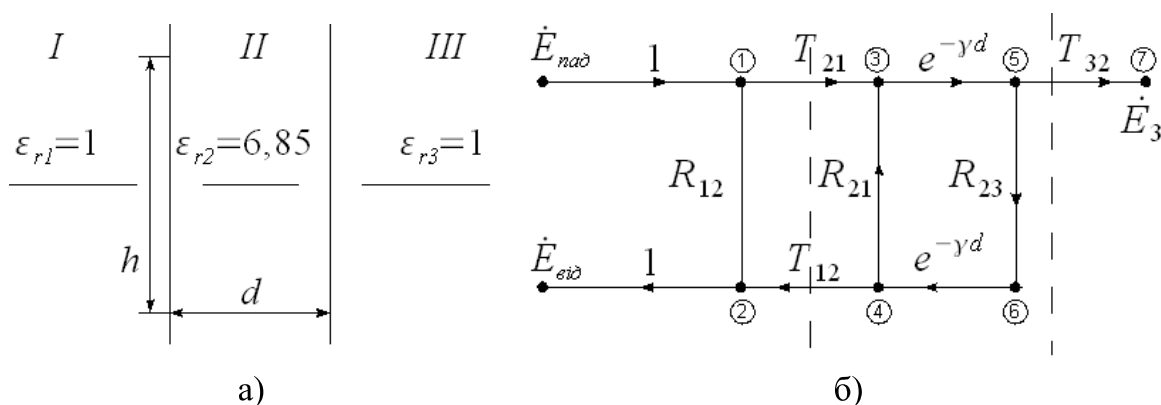


Рис. 4.18. Стик середовищ (а) і його сигнальний граф при нормальному падінні плоскої електромагнітної хвилі (б) (вузли відмічені кружками)

Коефіцієнт відбивання пластини $R = G_{21} = \frac{\dot{E}_{\partial i\partial}}{\dot{E}_{na\partial}}$, де G_{21} – передача графа від вузла 1 до вузла 2. Враховуючи, що в даному випадку $n=2$, $P_1 = R_{12}$,

$\Delta_1 = 1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}$, $P_2 = T_{21} T_{12} R_{23} e^{-2\gamma d}$, $\Delta_2 = 1$, $\Delta = 1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}$, на основі формули Мезона отримаємо:

$$R = \frac{R_{12} (1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}) + T_{21} T_{12} R_{23} e^{-2\gamma d}}{1 - R_{21} R_{23} e^{-2\gamma d}}.$$

Так як $\varepsilon_{r1} = \varepsilon_{r3} = 1$, то $-R_{12} = R_{21} = R_{23}$ і коефіцієнт прозорості T буде рівний:

$$T = \frac{T_{21} T_{12} e^{-\gamma d}}{1 - R_{21}^2 e^{-2\gamma d}},$$

а коефіцієнт відбивання

$$R = R_{12} + T R_{21} e^{-\gamma d}.$$

Обчислимо передачі віток графа через хвильові опори:

$$T_{12} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_{r2}}}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} + 1} = 1,26; \quad T_{21} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} + 1} = 0,73; \quad R_{21} = -R_{12} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{r1}} - 1}{\sqrt{\varepsilon_{r2}} + 1} = 0,268.$$

Тоді коефіцієнт поширення хвилі в діелектрику

$$\gamma = j \frac{2\pi f}{c} \sqrt{\varepsilon_{r2}}.$$

При $f = 25 \text{ ГГц}$ і $\varepsilon_{r2} = 6,85$ $\gamma = j1,36 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$, $T = 0,92 e^{-j3070}$, $R = 0,4 e^{j143^\circ}$ для $d = 10 \text{ мм}$.

Як бачимо, сигнальні графи є сильним аналітичним інструментом для моделювання проходження електромагнітних хвиль на стику різних середовищ, що є важливим для хвилеводів та шаруватих структур.

4.7. Структура електромагнітного поля E -, H -, T - і EH -типів

Важливими компонентами радіотехнічних і телекомунікаційних систем НВЧ є хвилеводи – пристрої для передачі електромагнітних коливань від генератора до навантаження. Будь-який хвилевід незалежно від особливостей його конструкції повинен забезпечувати локалізацію області, в якій поширюється електромагнітна хвиля. Тому простішою конструкцією, яка дає можливість обмежити просторову область існування поля є нескінченна металева площина. За допомогою неї можна екранувати (відокремити) один півпростір від іншого.

У даному розділі ми також розглянемо явища, що відбуваються при падінні під кутом однорідної плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну площину, коли електромагнітна хвиля поляризована.

4.7.1. Падіння плоскої електромагнітної хвилі з паралельною (вертикальною) поляризацією на ідеально провідну поверхню.

Нехай на ідеально провідну площину під деяким кутом φ падає однорідна плоска електромагнітна хвиля (рис. 4.19), електричний вектор якої

лежить в площині xOz (вертикальна або паралельна поляризація). При цьому вважається, що напівпростір $x > 0$ має електродинамічні параметри ε_0 , μ_0 , тобто є вакуумом, а падаюча хвиля гармонічно змінюється з частотою ω . Коефіцієнт фази цієї хвилі $\beta_0 = \frac{\omega}{c}$.

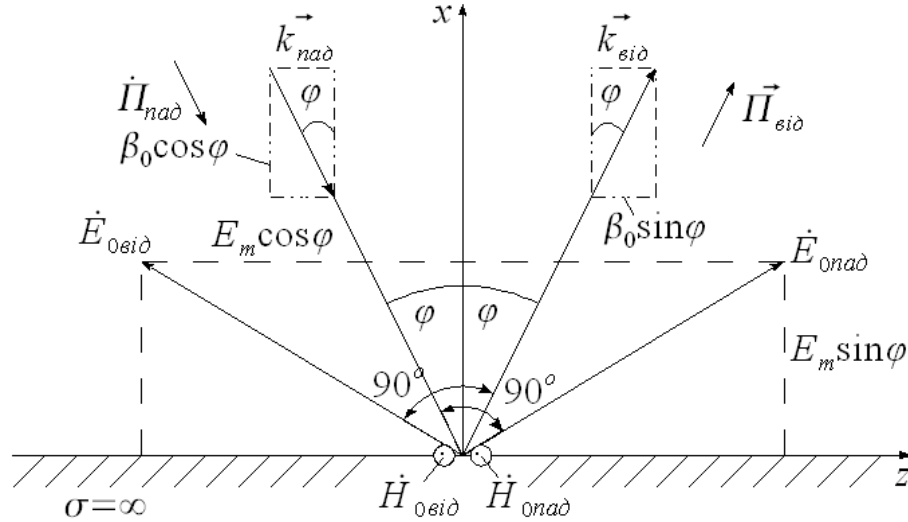


Рис. 4.19. Падіння плоскої електромагнітної хвилі з паралельною (вертикальною) поляризацією

Введемо хвильовий вектор падаючої хвилі \vec{k}_{nao} , який має модуль β_0 і співпадає з вектором Пойтінга падаючої хвилі $\vec{\Pi}_{nao}$. На рис. 4.19 видно, що даний хвильовий вектор утворює кут $180^\circ - \varphi$ з віссю x , $90^\circ - \varphi$ з віссю z і 90° з віссю y (позитивні напрямки). Так як $\cos(180^\circ - \varphi) = -\cos \varphi$, $\cos(90^\circ - \varphi) = \sin \varphi$, то хвильовий вектор падаючої хвилі має наступне координатне представлення:

$$\vec{k}_{nao} = \beta_0 (-\cos \varphi \vec{i}_x + \sin \varphi \vec{i}_z).$$

Тоді комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля падаючої хвилі буде

$$\vec{E}_{nao} = \vec{E}_{0nao} e^{-j\vec{k}_{nao} \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{0nao} e^{-j\beta_0(-x \cos \varphi + z \sin \varphi)}, \quad (4.20)$$

де векторний амплітудний коефіцієнт \vec{E}_{0nao} пов'язаний з фізичною амплітудою електричного вектора E_m наступним чином:

$$\vec{E}_{0nao} = E_m \sin \varphi \vec{i}_x + E_m \cos \varphi \vec{i}_z.$$

При падінні плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну поверхню виникає однорідна плоска відбита хвиля вже з хвильовим вектором

$$\vec{k}_{sio} = \beta_0 (\cos \varphi \vec{i}_x + \sin \varphi \vec{i}_z),$$

який у відповідності із законами відбивання напрямлений під кутом φ до позитивного напрямку осі x . Тоді комплексна амплітуда електричного вектора відбитої хвилі буде рівна

$$\vec{E}_{\text{від}} = \vec{E}_{0\text{від}} e^{-j\vec{k}_{\text{від}}\vec{r}} = \vec{E}_{0\text{від}} e^{j\beta_0(x\cos\varphi + z\sin\varphi)}, \quad (4.21)$$

яка повинна мати такий векторний амплітудний коефіцієнт $\vec{E}_{0\text{від}}$, щоб сумарне електромагнітне поле на межі розділу при $x=0$ задовольняло крайовій умові: z -ова проекція вектора напруженості електричного поля повинна бути рівна нулеві. Тобто, відбита хвиля повинна компенсувати тангенціальну складову електричного вектора поля падаючої хвилі на межі розділу. Тому

$$\vec{E}_{0\text{від}} = E_m \sin\varphi \vec{i}_x - E_m \cos\varphi \vec{i}_z.$$

Тепер можна визначити структури електричного і магнітного полів над ідеально провідною поверхнею для $x > 0$.

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\Sigma} &= \vec{E}_{\text{пад}} + \vec{E}_{\text{від}} = E_m \sin\varphi \left[e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi + z\sin\varphi)} + e^{-j\beta_0(x\cos\varphi + z\sin\varphi)} \right] \vec{i}_x + \\ &+ E_m \cos\varphi \left[e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi + z\sin\varphi)} - e^{-j\beta_0(x\cos\varphi + z\sin\varphi)} \right] \vec{i}_z = \\ &= E_m \sin\varphi e^{-j\beta_0 z \sin\varphi} \left(e^{j\beta_0 x \cos\varphi} + e^{-j\beta_0 x \cos\varphi} \right) \vec{i}_x + \\ &+ E_m \cos\varphi e^{-j\beta_0 z \sin\varphi} \left(e^{j\beta_0 x \cos\varphi} - e^{-j\beta_0 x \cos\varphi} \right) \vec{i}_z = \\ &= 2E_m \sin\varphi \cos(\beta_0 x \cos\varphi) e^{-j\beta_0 z \sin\varphi} \vec{i}_x + \\ &+ j2E_m \cos\varphi \sin(\beta_0 x \cos\varphi) e^{-j\beta_0 z \sin\varphi} \vec{i}_z. \end{aligned} \quad (4.22)$$

При будь-яких значеннях кута падіння в інтервалі $0 < \varphi < 90^\circ$ результуюче поле представляє собою хвилю, яка поширюється в додатному напрямі z , про що говорить фазовий множник $\exp(-j\beta_0 z \sin\varphi)$ – це біжуча хвиля. На відміну від раніше розглянутих однорідних плоских хвиль, в даному випадку амплітуди складових векторів електричного поля вже не постійні, а залежать від поперечної координати x за законом $\cos(\beta_0 x \cos\varphi)$ або $\sin(\beta_0 x \cos\varphi)$. Такі процеси вже називають неоднорідними плоскими хвилями. Із фізичної точки зору в поперечній площині за рахунок інтерференції падаючої і відбитої хвиль виникає стояча хвиля.

Розглянемо тепер, як веде себе вектор напруженості магнітного поля для вертикальної поляризації. Якщо вектор напруженості електричного поля падаючої хвилі лежить в площині xOz , то перпендикулярний йому вектор напруженості магнітного поля має тільки єдину складову, яка орієнтована вздовж осі y (це видно із рис. 4.19). Комплексна амплітуда y -ої проекції магнітного вектора падаючої хвилі повинна залежати від просторових координат x і z таким чином, як і амплітуда електричного вектора

$$\vec{H}_{\text{пад}} = \frac{E_m}{Z_0} e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi + z\sin\varphi)} \vec{i}_y,$$

де $Z_0 = 120\pi = 377 \text{ Ом}$ – хвильовий опір вакууму.

Так як вектор Пойтінга відбитої хвилі направлений вздовж вектора $\vec{R}_{\text{від}}$, то необхідно, щоб магнітний вектор відбитої хвилі $\vec{H}_{\text{від}}$ на межі розділу був направлений в ту ж сторону, що і вектор $\vec{H}_{\text{над}}$. Тоді відповідна комплексна амплітуда магнітного вектора відбитої хвилі рівна

$$\dot{H}_{\text{від}} = \frac{E_m}{Z_0} e^{-j\beta_0(x\cos\varphi+z\sin\varphi)} \vec{i}_y.$$

Сумуючи ці вирази, отримаємо просторову залежність комплексної амплітуди магнітного вектора у вигляді

$$\dot{H}_x = \dot{H}_{\text{над}} + \dot{H}_{\text{від}} = \frac{2E_m}{Z_0} \cos(\beta_0 x \cos\varphi) e^{-j\beta_0 z \sin\varphi} \vec{i}_y. \quad (4.23)$$

Таким чином, магнітний вектор є чисто поперечним, тоді як електричний вектор має як поперечну E_x , так і поздовжню складову E_z . Неоднорідні плоскі хвилі такої структури прийнято називати E -хвилями. У літературі їх подають також як TM -хвилі (*Transverse Magnetic Waves* – поперечні магнітні хвилі). Для таких хвиль $E_x, E_z \neq 0, H_y \neq 0, H_z = 0$.

Можливий варіант, коли $\varphi = 90^\circ$, тобто коли падаюча хвиля поширюється паралельно межі розділу, так що відбита хвиля вже відсутня. Поле в півпросторі для $x > 0$ є при цьому однорідною плоскою хвилею, але вектори електромагнітного поля \vec{E} і \vec{H} не мають складових в напрямі осі z ($E_z = 0, H_z = 0$). Такі електромагнітні хвилі називають T -хвилями (*Transverse Waves* – поперечні хвилі) або TEM -хвилями.

4.7.2. Падіння плоскої електромагнітної хвилі з перпендикулярною (горизонтальною) поляризацією.

Схема променів, які пояснюють орієнтацію векторів поля для даної поляризації, приведена на рис. 4.20. Використавши попередні викладки, запишемо комплексну амплітуду вектора напруженості електричного поля падаючої хвилі у вигляді:

$$\dot{E}_{\text{над}} = E_m e^{-j\beta_0(-x\cos\varphi+z\sin\varphi)} \vec{i}_y,$$

де E_m – амплітудне значення напруженості електричного поля в точці $x = 0$.

Для того щоб виконувалась крайова умова $E_x = 0$ при $x = 0$ необхідно, щоб у півпросторі $x > 0$ існувала плоска відбита хвиля з комплексною амплітудою електричного вектора

$$\dot{E}_{\text{від}} = -E_m e^{-j\beta_0(x\cos\varphi+z\sin\varphi)} \vec{i}_y$$

(проекція E_m з від'ємним знаком та проекція її на вісь x із знаком, протилежним падаючій хвилі).

У цьому випадку результуюче електромагнітне поле у верхній півплощині має комплексну амплітуду вектора напруженості електричного поля

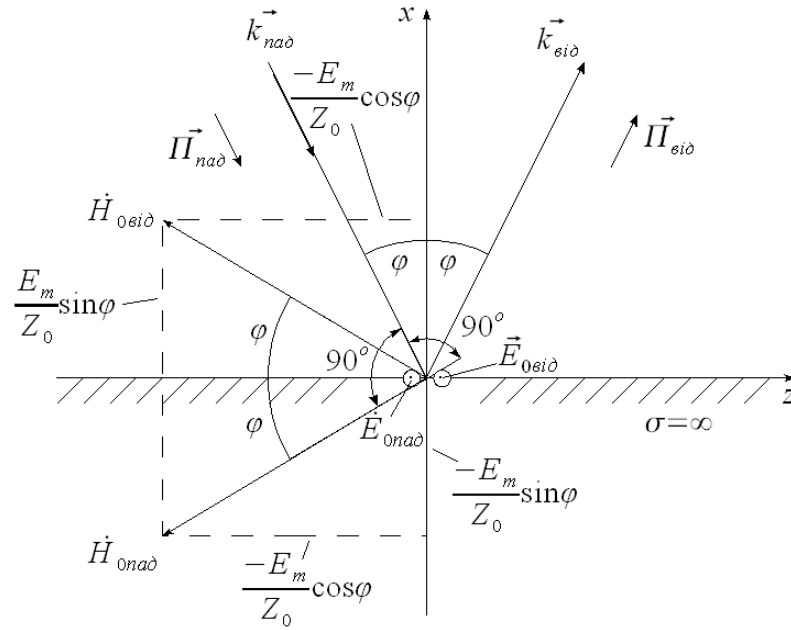


Рис. 4.20. Padіння плоскої електромагнітної хвилі з перпендикулярною (горизонтальною) поляризацією

$$\begin{aligned}\dot{E}_z &= \dot{E}_{nad} + \dot{E}_{eid} = E_m \left(e^{j\beta_0 x \cos \varphi} - e^{-j\beta_0 x \cos \varphi} \right) e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \vec{i}_y = \\ &= j2E_m \sin(\beta_0 x \cos \varphi) e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \vec{i}_y.\end{aligned}\quad (4.24)$$

Щоб в'яснити просторову залежність магнітного вектора, звернемо увагу на рис. 4.20, де вектори Пойтінга \vec{P}_{nad} і \vec{P}_{eid} направлені вздовж хвильових векторів \vec{k}_{nad} і \vec{k}_{eid} , якщо амплітудні коефіцієнти векторів напруженості магнітного поля є такими:

$$\begin{aligned}\vec{H}_{nad} &= -\frac{E_m}{Z_0} \sin \varphi \vec{i}_x - \frac{E_m}{Z_0} \cos \varphi \vec{i}_z, \\ \vec{H}_{eid} &= \frac{E_m}{Z_0} \sin \varphi \vec{i}_x - \frac{E_m}{Z_0} \cos \varphi \vec{i}_z.\end{aligned}$$

Тоді комплексна амплітуда сумарного магнітного вектора буде рівна:

$$\begin{aligned}\dot{H}_z &= \dot{H}_{nad} + \dot{H}_{eid} = -\frac{j2E_m}{Z_0} \sin \varphi \sin(\beta_0 x \cos \varphi) e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \vec{i}_x - \\ &\quad - \frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi \cos(\beta_0 x \cos \varphi) e^{-j\beta_0 z \sin \varphi} \vec{i}_z.\end{aligned}\quad (4.25)$$

Проаналізувавши формули (4.24) і (4.25), можна зробити наступний висновок для випадку перпендикулярної (горизонтальної) поляризації: розглянутий електромагнітний процес представляє собою також неоднорідну плоску хвилю, яка поширюється в сторону збільшення координати z (тобто вздовж межі розділу) і являє собою біжучу хвилю. У поперечному напрямі поле носить характер стоячої хвилі.

Принципова відмінність перпендикулярної поляризації від паралельної полягає в тому, що тут електричне поле має єдину відмінну від нуля проекцію E_y і є чисто поперечним у вигляді стоячої хвилі. Вектор напруженості магнітного поля, навпаки, крім поперечної складової H_x , має і поздовжню проекцію H_z . Такі направляючі хвилі вже називають H -хвилями або TE -хвилями (*Transverse Electric Waves* – поперечні електричні хвилі).

Тут також слід зауважити наступне: при падінні плоскої хвилі з перпендикулярною поляризацією на межу розділу з ідеальним провідником чисто поперечних T -хвиль (як при паралельній поляризації) отримати не можна. Дійсно, якщо $H_z = 0$ лише при $\varphi = 90^\circ$ ($\cos \varphi = 0$), то і при $\cos \varphi = 0$ $\sin(\beta_0 x \cos \varphi) = 0$, тобто $E_y = 0$, а електромагнітна хвиля без електричного вектора існувати не може.

4.7.3. Структура електромагнітного поля E -, H -, T -хвиль.

Так як аналітична форма представлення векторів поля через просторові залежності відповідних проекцій часто немає наочності, тому корисно також побудувати картину розподілу в просторі силових ліній електричного і магнітного полів для паралельної і перпендикулярної поляризацій.

Як уже вказувалось у висновках попередніх підрозділів, характер залежностей проекцій векторів електромагнітного поля хвиль E - і H -типів вздовж поздовжньої координати z і поперечної координати x є різним: по осі z встановлюється біжуча хвиля, а по осі x – стояча хвиля, тобто енергія передається по осі z , а по осі x вона лише коливається, перетворюючись з одного виду в інший. Для того щоб цю особливість хвильового процесу збагнути краще, введемо два параметри:

– поздовжнє хвильове число $h = \beta_0 \sin \varphi$;

– поперечне хвильове число $g = \beta_0 \cos \varphi$,

такі, що $h^2 + g^2 = \beta_0^2$ при будь-якому куті падіння.

Дані вирази дозволяють значно спростити вирази для проекцій векторів поля (індекс Σ опускається), бо розглядаємо лише сумарне поле.

Для E -хвиль (TM) ці вирази запишуться:

$$\begin{cases} \dot{E} = 2 E_m \sin \varphi \cos gx e^{-jhz} \vec{i}_x + j 2 E_m \cos \varphi \sin gx e^{jhz} \vec{i}_z, \\ \dot{H} = \frac{2 E_m}{Z_0} \cos gx e^{-jhz} \vec{i}_y. \end{cases} \quad (4.26)$$

Для H -хвиль (TE) ці вирази мають вигляд:

$$\begin{cases} \dot{E} = j 2 E_m \sin \varphi \sin gx e^{-jhz} \vec{i}_y, \\ \dot{H} = -j \frac{2 E_m}{Z_0} \sin \varphi \sin gx e^{-jhz} \vec{i}_x - \frac{2 E_m}{Z_0} \cos \varphi \cos gx e^{-jhz} \vec{i}_z. \end{cases} \quad (4.27)$$

Характерний вигляд залежностей функцій \dot{E} і \dot{H} , що визначений формулами (4.26) і (4.27), від координати z вказує на те, що поздовжнє хвильове число h відіграє роль коефіцієнта фази направляючих хвиль над

провідною поверхнею. Тоді, за визначенням, фазова швидкість хвильового процесу буде визначатися виразом

$$v_\phi = \frac{\omega}{h} = \frac{\omega}{\beta_0 \sin \varphi} = \frac{\omega/\beta_0}{\sin \varphi} = \frac{c}{\sin \varphi}.$$

Тобто, при будь-якому куті падіння φ , відмінному від 90° , має місце нерівність $v_\phi > c$. Тому хвилі E - і H -типів ще називають швидкими. При $\varphi = 0$ фазова швидкість хвильового процесу вздовж осі z ($\sin \varphi = 0$) буде прямувати до нескінченності.

Незважаючи на суттєві відмінності, структури електромагнітного поля E - і H -типів мають загальну рису: проекція векторів поля описується періодичними функціями як поздовжньої координати z , так і поперечної координати x . Тому просторовий період поля $\Lambda_{\text{позд}}$ вздовж осі поширення біжучої хвилі z будемо називати поздовжньою довжиною хвилі:

$$\Lambda_{\text{позд}} = \frac{2\pi}{h} = \frac{2\pi}{\beta_0 \sin \varphi} = \frac{2\pi/\beta_0}{\sin \varphi} = \frac{\lambda_0}{\sin \varphi}.$$

Згідно викладеного вище $\Lambda_{\text{позд}} \geq \lambda_0$ і $v_\phi \geq c$.

Аналогічно, просторовий період стоячої хвилі вздовж поперечної осі x буде називатися поперечною довжиною хвилі:

$$\Lambda_{\text{поп}} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2\pi}{\beta_0 \cos \varphi} = \frac{2\pi/\beta_0}{\cos \varphi} = \frac{\lambda_0}{\cos \varphi}.$$

Параметри λ_0 , $\Lambda_{\text{позд}}$ і $\Lambda_{\text{поп}}$ пов'язані співвідношенням

$$\Lambda_{\text{позд}}^2 \sin^2 \varphi + \Lambda_{\text{поп}}^2 \cos^2 \varphi = 2\lambda_0^2,$$

бо $h^2 + g^2 = \beta_0^2$.

Для того щоб наочно представити собі електромагнітний процес, який виникає при падінні плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну площину, доцільно побудувати силові лінії електричного і магнітного полів. Виконаємо таку побудову на основі виразів (4.26) і (4.27).

Розглянемо спочатку таку задачу в загальному вигляді. Нехай крива MN (рис. 4.21) є деякою силовою лінією поля \vec{E} , яка спостерігається у фіксований момент часу t_0 . Вектор \vec{E} , який визначений в точці A і який має відповідні проекції на осі E_x і E_z , зображений на рисунку відповідно відрізком AB . Згідно визначення, цей відрізок направлений по дотичній до силової лінії в точці A .

Якщо координата z в точці A отримає приріст dz , то, рухаючись вздовж силової лінії, ми із точки A перейдемо в точку D . При цьому координата x отримає приріст dx . Із рівності (подібності) трикутників ADF і ABC можна записати:

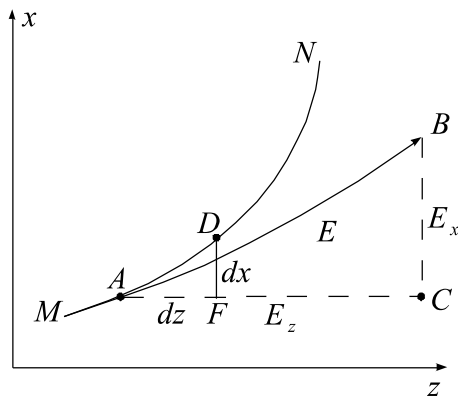


Рис. 4.21. До виведення рівняння силових ліній електромагнітного поля

$$\frac{dx}{E_x(x, z, t_0)} = \frac{dz}{E_z(x, z, t_0)} \quad \text{або}$$

$$\frac{dx}{dz} = \frac{E_x(x, z, t_0)}{E_z(x, z, t_0)}.$$

Ця рівність представляє собою диференціальне рівняння силової лінії поля.

Крім рівняння необхідно також задати початкові умови, вказавши деяку точку простору з координатами (x_0, z_0) , через яку повинна проходити ця силова лінія. Із теорії диференціальних

рівнянь відомо, що якщо в околі вибраної точки права частина рівняння силової лінії має неперервну похідну за аргументом x , то така точка є неособливою і через неї проходить єдина силова лінія як інтегральна крива.

Продемонструємо тепер описану методику на прикладі побудови силових ліній поля електричного вектора для E -хвилі (формула 4.26). Для цього перейдемо від комплексних амплітуд до миттєвих значень:

$$E(x, z, t) = 2 E_m \sin \varphi \cos gx \cos(\omega t - h z) \vec{i}_x - 2 E_m \cos \varphi \sin gx \sin(\omega t - h z) \vec{i}_z.$$

Слід зауважити, що z -ова проекція випереджає за фазою x -ову проекцію на $\pi/2$, і тому $\cos(\omega t - h z + \pi/2) = -\sin(\omega t - h z)$. Побудуємо силові лінії поля в момент часу $t = 0$. Тоді рівняння силової лінії запишеться:

$$\frac{dx}{dz} = \frac{\sin \varphi \cos gx \cos h z}{\cos \varphi \sin gx \sin h z} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} gx \operatorname{ctg} h z. \quad (4.28)$$

Аналізуючи дане рівняння силової лінії, приходимо до наступних висновків:

1) На межі розділу при $x=0$ похідна dx/dz необмежено велика. Значить силові лінії поля \vec{E} в повній відповідності з крайовими умовами підходять до поверхні ідеального провідника по нормалі.

2) Картина силових ліній поля є періодичною з періодами $\Lambda_{\text{позд}}$ і $\Lambda_{\text{нон}}$ по осям z і x відповідно. Тому силові лінії електричного вектора \vec{E} являють собою замкнуті криві, які лежать в площині xOz . Виключення складають лише ті лінії, які входять в ідеальний провідник або виходять з нього.

На рис. 4.22 зображена група кривих, побудованих шляхом чисельного інтегрування на комп'ютері для випадку $\varphi = 45^\circ$, коли хвильові числа h і g співпадають. Із метою зручності побудови ліній по координатним осям відкладені безрозмірні аргументи hx і gz . Криві побудовані в межах квадрата, внутрішні точки якого задовольняють нерівностям $\pi/2 < hz < \pi$ і $0 < gx < \pi/2$.

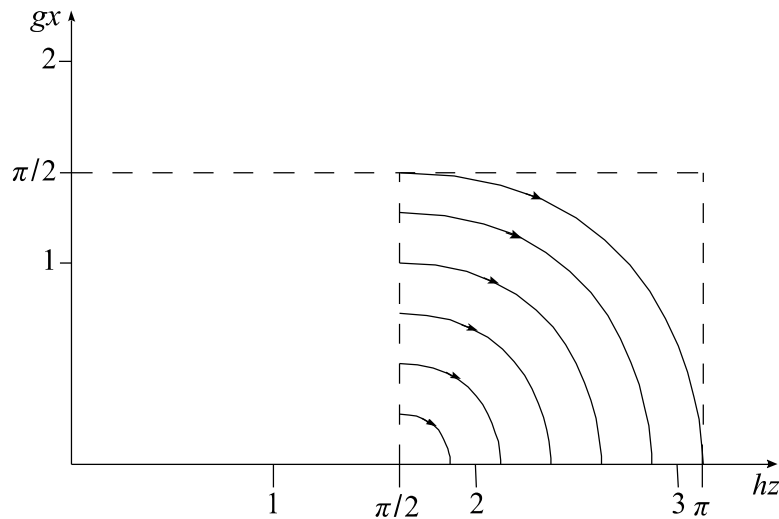


Рис. 4.22. Результат числового інтегрування диференціального рівняння силових ліній електричного вектора \vec{E}

Вимоги до точності графічної побудови картини поля не є високими. Тому нами використаний простий чисельний спосіб розв'язку диференціального рівняння – метод Ейлера першого порядку, згідно з яким диференціальне рівняння замінюється наближеним рівнянням в кінцевих різницях:

$$\Delta x = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{ctg} gx \operatorname{ctg} hz \Delta z.$$

Криві на рис. 4.22 побудовані для шести точок, в яких координата $hz_0 = \pi/2$ одна і та ж, а координата gx_0 приймає значення 0,25; 0,5; 0,75; 1,0; 1,25; 1,5.

Тепер не представляє складності зобразити повну картину силових ліній електричного вектора (рис. 4.23). Для цього достатньо повторити картину, зображену на рис. 4.22, певну кількість раз у відповідності з довжинами $\Lambda_{\text{позд}}$ і Λ_{non} . Тут необхідно слідкувати за тим, щоб напрям стрілки на силових лініях чергувався в силу просторової періодичності поля. На цьому ж рисунку побудовані силові лінії магнітного вектора E -хвилі. Із формули (4.26) слідує залежність напруженості магнітного поля від просторових координат при $t = 0$:

$$H(x, z, 0) = \frac{2E_m}{Z_0} \cos gx \cos hz \vec{i}_y.$$

Силові лінії такого поля представляють собою нитки, паралельні осі y . Напрямок вектора \vec{H} періодично змінюється в просторі. Вектор, орієнтований від спостерігача до площини рисунка, позначений суцільним кружком; вектор протилежного напрямку (до спостерігача) позначений кружком з точкою.

Як прийнято в технічній електродинаміці, силові лінії проведені частіше там, де напруженість поля більша. Тут слід зауважити, що магнітне поле E -

хвилі, будучи поперечним, концентрується в тих областях, де велика поперечна проекція E_x напруженості електричного поля. І навпаки, там, де поздовжня проекція E_z досягає максимуму, проекція H_y стає нульовою.

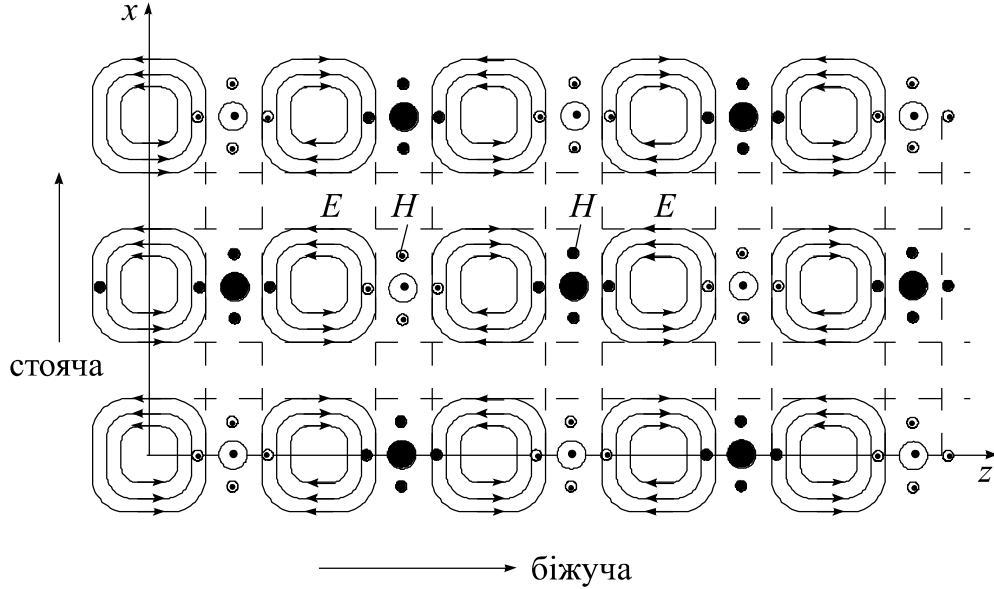


Рис. 4.23. Структура силових ліній хвилі \vec{E} -типу над ідеальною провідною пластинною

Розглянемо тепер структуру поля T -типу. Поперечні електромагнітні хвилі (T - або TEM -хвилі) існують в півпросторі $x > 0$ над ідеальною провідною площиною у випадку, коли кут падіння плоскої хвилі з паралельною (вертикальною) поляризацією рівний $\varphi = \pi/2$. При цьому поперечне хвильове число $g = 0$, а поздовжнє хвильове число $h = \beta_0$, бо $h = \beta_0 \sin \varphi$, а $g = \beta_0 \cos \varphi$. Тоді формули (4.26) запишуться у вигляді:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_m e^{-j\beta_0 z} \vec{i}_x, \\ \vec{H} &= \frac{E_m}{Z_0} e^{-j\beta_0 z} \vec{i}_y.\end{aligned}\quad (4.29)$$

Звідси миттєві значення векторів будуть уже функціями:

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, t) &= E_m \cos(\omega t - \beta_0 z) \vec{i}_x, \\ \vec{H}(z, t) &= \frac{E_m}{Z_0} \cos(\omega t - \beta_0 z) \vec{i}_y.\end{aligned}$$

У момент часу $t = 0$ вони будуть рівні

$$\begin{aligned}\vec{E}(z, 0) &= E_m \cos \beta_0 z \vec{i}_x, \\ \vec{H}(z, 0) &= \frac{E_m}{Z_0} \cos \beta_0 z \vec{i}_y,\end{aligned}$$

і мають структуру поля однорідної плоскої хвилі (рис. 4.24).

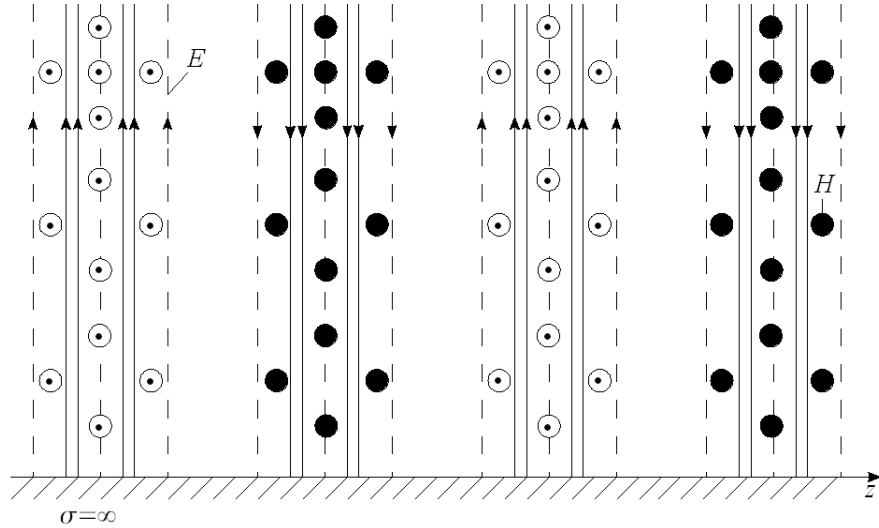


Рис. 4.24. Структура силових ліній T -хвилі

Повернемося тепер до структури поля для H -хвилі. Дослідження просторової структури силових ліній електромагнітного поля хвилі H -типу, яка виникає над ідеально провідною поверхнею ($\sigma = \infty$), можна побудувати за аналогією E -хвилі. Тому запишемо на основі формул (4.27) вирази для миттєвих значень векторів поля хвилі H -типу в момент часу $t = 0$:

$$\vec{E}(x, z, 0) = 2E_m \sin gx \sin hz \vec{i}_y,$$

$$\vec{H}(x, z, 0) = -\frac{2E_m}{Z_0} \sin \varphi \sin gx \sin hz \vec{i}_x - \frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi \cos gx \cos hz \vec{i}_z.$$

Диференціюючи рівняння силових ліній магнітного вектора у відповідності з його виразом приймає вигляд:

$$\frac{dx}{dz} = \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} gx \operatorname{tg} hz. \quad (4.30)$$

Картина силових ліній вектора \vec{H} , побудованого шляхом чисельного інтегрування цього рівняння для випадку $\varphi = 45^\circ$, приведена на рис. 4.25. Тут також зображено просторовий розподіл силових ліній вектора \vec{E} для y -ої складової. Тобто тут вектори поля \vec{E} і \vec{H} міняються місцями у порівнянні з E -хвилею.

4.7.4. Характеристики електромагнітного поля E - і H -типів.

Повертаючись до виразів (4.26) для хвиль \vec{E} -типу, запишемо вирази для комплексного вектора Пойтінга, визначеного в кожній точці півпростору $x > 0$.

$$\dot{P} = \frac{1}{2} \left[\dot{E} \times H^* \right] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{i}_x & \vec{i}_y & \vec{i}_z \\ \dot{E}_x & 0 & \dot{E}_z \\ 0 & H_y^* & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left(\dot{E}_z H_y^* \right) \vec{i}_x + \frac{1}{2} \left(\dot{E}_x H_y^* \right) \vec{i}_z.$$

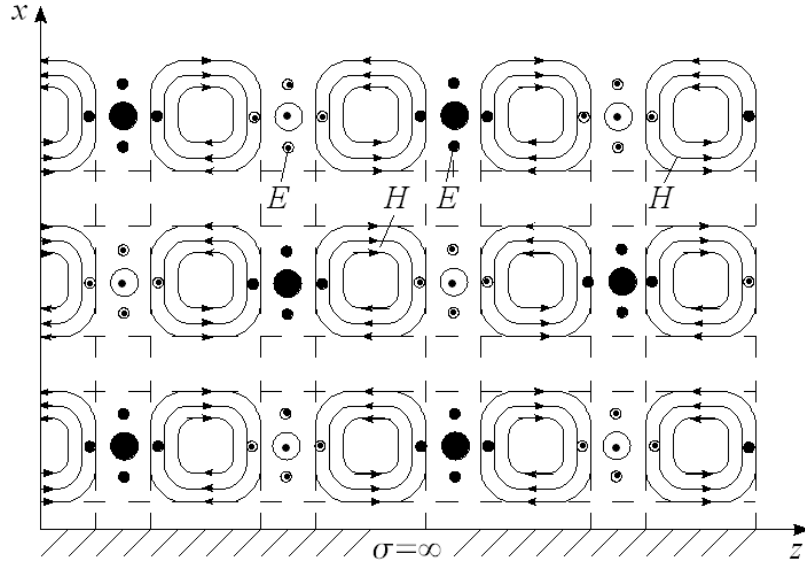


Рис. 4.25. Структура силових ліній хвилі T -типу над ідеальною провідною площиною

Як бачимо, доданки в правій частині рівності є принципово різними. Легко зауважити, що добуток $\dot{E}_x H_y^*$, який утворений поперечними проекціями векторів поля, є чисто дійсним числом, тоді як добуток $\dot{E}_z H_y^*$ є вже чисто уявним. Тому вектор Пойтінга, усереднений за період коливань, орієнтований вздовж напрямку z (поширення біжучої хвилі):

$$\vec{\Pi}_{сер} = \frac{1}{2} \left(\dot{E}_x H_y^* \right) \vec{i}_z = \frac{2E_m^2}{Z_0} \sin \varphi \cos^2 gx \vec{i}_z.$$

А уявну складову комплексного вектора Пойтінга, яка орієнтована вздовж поперечної координати x і фізично пов'язана з виникненням в просторі стоячої хвилі, називають реактивною складовою:

$$\vec{\Pi}_p = \frac{E_m^2}{Z_0} \cos \varphi \sin(2gx) \vec{i}_x,$$

яка представляє коливну енергію стоячих хвиль.

Зрозуміло, що в хвилі T -типу, коли $\varphi = 90^\circ$, реактивна складова вектора Пойтінга відсутня, бо $\cos 90^\circ = 0$.

Також аналогічно для виразів (4.27) визначимо вектор Пойтінга для хвилі H -типу:

$$\begin{aligned} \vec{\Pi}_{сер} &= -\frac{1}{2} \left(\dot{E}_y H_x^* \right) \vec{i}_z = \frac{2E_m^2}{Z_0} \sin \varphi \sin^2 gx \vec{i}_z, \\ \vec{\Pi}_p &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\dot{E}_y H_z^* \right) \vec{i}_x = -\frac{E_m^2}{Z_0} \cos \varphi \sin(2gx) \vec{i}_x. \end{aligned}$$

Як бачимо, у хвилях E - і H -типу обидві складові комплексного вектора Пойтінга розподілені вздовж поперечної координати x нерівномірно за законами гармонічних функцій.

Визначимо тепер розподіл струму на ідеально провідній площині для E - хвилі:

$$\dot{j}_{\text{пов } e} = [\vec{i}_x \times \dot{H}]_{x=0} = \frac{2E_m}{Z_0} e^{-jhz} \vec{i}_z.$$

Як бачимо, густина поверхневого струму представляє також біжучу хвилю, яка поширюється в напрямі z і має лише одну складову – горизонтальну (z).

Зовсім по іншому виглядає структура поверхневого струму H -хвилі:

$$\dot{j}_{\text{пов } e} = \dot{H}_z [\vec{i}_x \times \vec{i}_z] = -\dot{H}_z \vec{i}_y = \frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi e^{-jhz} \vec{i}_y,$$

бо $\dot{H}_z = -\frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi e^{-jhz}$ і має вертикальну складову (y).

Тепер можна зобразити такі розподіли на рис. 4.26.

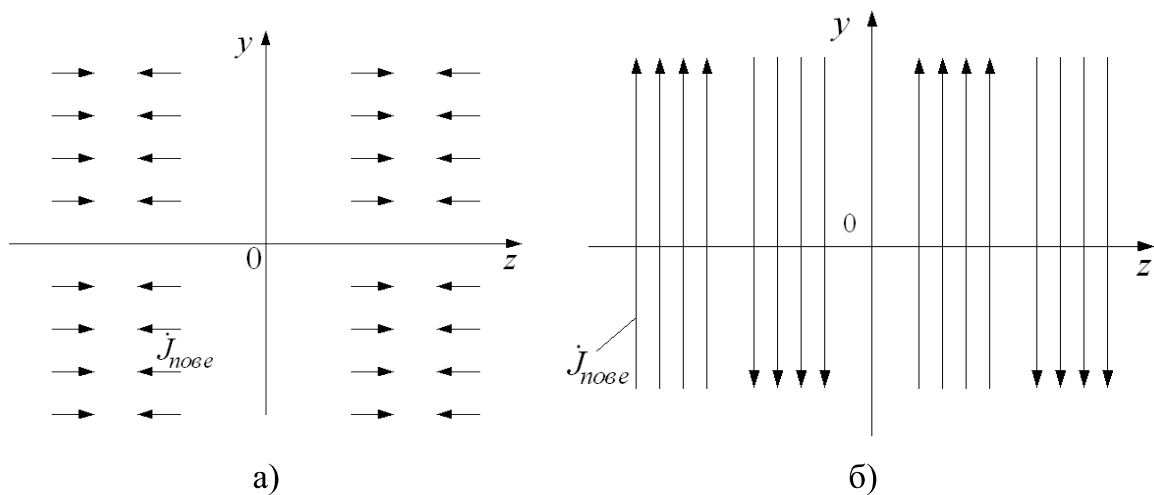


Рис. 4.26. Розподіл вектора густини поверхневого струму на ідеально провідній поверхні для хвиль E - (а) та H - (б) типів

Із сказаного випливає важливий для антенної техніки висновок про те, що при визначеній поляризації падаючих електромагнітних хвиль суцільний металевий відбивач можна замінити системою паралельних провідних стержнів, пластин. Такі провідники повинні розміщуватися достатньо густо із кроком $< \frac{\lambda}{10}$ і бути орієнтованими вздовж ліній поверхневого струму.

Із вектором Пойтінга пов'язана і потужність втрат, оскільки реальна поверхня, на яку падає хвиля, виготовлена із металу з високою, але скінченою електричною провідністю. Тоді у відповідність із граничними (крайовими) умовами Леонтовича на поверхні металу буде виникати

тангенціальна складова вектора \vec{E} , комплексна амплітуда якої $\dot{E}_{\tau.M} = Z_{c.M} \dot{H}_{\tau.M}$. Причому вектор тангенціальної складової $\dot{E}_{\tau.M}$ повинен бути орієнтований так, щоб разом з величиною вектора $\dot{H}_{\tau.M}$ породжувати вектор Пойтінга, який направлений в глибину металу. Тоді середнє значення цього вектора, яке характеризує питому (на одиницю площі) потужність втрат, буде рівне:

$$\vec{P}_{сер} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{E}_{\tau.M} \times \dot{H}_{\tau.M}^* \right].$$

Для хвиль E -типу

$$\dot{H}_{\tau.M} = \dot{H} \Big|_{x=0} = \frac{2E_m}{Z_0} e^{-jhz} \vec{i}_y.$$

Тоді

$$\dot{E}_{\tau.M} = \frac{2Z_{c.M} E_m}{Z_0} e^{-jhz} \vec{i}_z.$$

Звідки

$$\vec{P}_{сер втр} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\dot{E}_{\tau.M} \times \dot{H}_{\tau.M}^* \right] = \frac{2E_m^2}{Z_0} \operatorname{Re} Z_{c.M} [\vec{i}_z \times \vec{i}_y] = -\frac{E_m^2}{Z_0} \sqrt{\frac{2\omega\mu_0}{\sigma}} \vec{i}_x.$$

Від'ємний знак в цій формулі вказує на те, що потік енергії втрат направлений в глибину металевої поверхні.

Для хвиль H -типу

$$\dot{H}_{\tau.M} = \dot{H} \Big|_{x=0} = -\frac{2E_m}{Z_0} \cos \varphi e^{-jhz} \vec{i}_z.$$

Тоді

$$\dot{E}_{\tau.M} = \frac{2Z_{c.M} E_m}{Z_0} \cos \varphi e^{-jhz} \vec{i}_y.$$

Звідки

$$\vec{P}_{сер втр} = -\frac{E_m^2}{Z_0} \sqrt{\frac{2\omega\mu_0}{\sigma}} \cos \varphi \vec{i}_x.$$

Порівнюючи ці вирази для E - і H -хвиль бачимо, що втрати в металі для E -хвиль не залежать від кута падіння φ , тоді як для H -хвиль ці втрати наближаються до нуля, якщо $\varphi \rightarrow \pi/2$, тобто для H -хвиль такі втрати можна звести до нуля при $\varphi = 90^\circ$.

4.7.5. Зв'язок між поздовжніми і поперечними складовими векторів направлених хвиль EH - або HE -типів.

Розглянуті в даному розділі E - і H -хвилі, які виникають в півпросторі над ідеально провідною поверхнею, є гранично ідеалізованими моделями направляючих електромагнітних хвиль. Проте, на основі рівнянь Максвелла можна вивести ряд суттєвих властивостей хвиль, які відносяться до будь-яких направляючих систем і мають у своєму складі як поздовжні, так і поперечні хвилі. Їх називають ще гібридними або EH - чи HE -хвилями.

Така можливість обумовлена тим, що будь-яка направляюча плоска хвиля, яка поширюється вздовж осі z , представляє собою неоднорідну хвилю особливого виду: комплексна амплітуда кожної із шести проекцій векторів $\vec{E}(x, y, z)$ і $\vec{H}(x, y, z)$ такої хвилі залежить від просторових координат за законом:

$$\frac{\partial \dot{V}(x, y, z)}{\partial z} = -j h \dot{V}(x, y, z).$$

Початкову фазу хвилі можна підібрати так, щоб амплітудна функція $V_0(x, y)$ була дійсною. Тоді похідні по z від проекцій векторів поля обчислюються досить просто:

$$\dot{V}(x, y, z) = V_0(x, y) e^{-j h z}.$$

Такий процес дозволяє виразити поздовжні складові поля через їх поперечні складові.

Нехай електромагнітний процес в деякій області простору, вільній від джерел ($\text{div } \vec{D} = 0$, $\text{div } \vec{B} = 0$), описується рівняннями Максвелла

$$\text{rot } \dot{H} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}, \quad \text{rot } \dot{E} = -j \omega \mu_a \dot{H}.$$

У розгорнутій координатній формі ці рівняння виглядають наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial z} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_x \\ \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_y \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} = -j \omega \mu_a \dot{H}_x \\ \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial z} - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j \omega \mu_a \dot{H}_y \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j \omega \mu_a \dot{H}_z \end{cases}$$

Якщо тепер похідні по z у відповідності з $\frac{\partial \dot{V}}{\partial z} = -j h \dot{V}$, то системи рівнянь для поздовжніх і поперечних складових дещо спростяться:

$$\begin{cases} \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} + j h \dot{H}_y = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_x \\ -j h \dot{H}_x - \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_y \quad (*) \\ \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{H}_x}{\partial y} = j \omega \varepsilon_a \dot{E}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} + j h \dot{E}_y = -j \omega \mu_a \dot{H}_x \\ -j h \dot{E}_x - \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} = -j \omega \mu_a \dot{H}_y \quad (**) \\ \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = -j \omega \mu_a \dot{H}_z \end{cases}$$

Тут принципово важливим є те, що в цих системах рівнянь поперечні складові \dot{E}_x , \dot{E}_y і \dot{H}_x , \dot{H}_y представляється у вигляді лінійних комбінацій із похідних від поздовжніх проекцій \dot{E}_z і \dot{H}_z по поперечним координатам x і y . Дійсно, розглядаючи перше рівняння системи (*) та друге рівняння системи (**), отримуємо систему двох лінійних алгебраїчних рівнянь

відносно невідомих \dot{E}_x і \dot{H}_y , причому в правій частині цієї системи вже будуть похідні $\frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x}$ і $\frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y}$. Аналогічно будується система відносно невідомих \dot{E}_y і \dot{H}_x (перше рівняння системи (**)) та друге рівняння системи (*)).

Розв'язуючи ці дві системи рівнянь приходимо до такої системи:

$$\begin{cases} \dot{E}_x = -\frac{j}{g^2} \left(h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right) & \dot{H}_x = \frac{j}{g^2} \left(\omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) \\ \dot{E}_y = -\frac{j}{g^2} \left(h \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial y} - \omega \mu_a \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial x} \right) & \dot{H}_y = \frac{-j}{g^2} \left(\omega \varepsilon_a \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial x} + h \frac{\partial \dot{H}_z}{\partial y} \right) \end{cases}$$

де g – поперечне хвильове число, яке виражається як

$$g = \sqrt{\beta^2 - h^2} = \sqrt{\omega^2 \varepsilon_a \mu_a - h^2}.$$

Задача полягає у визначенні поздовжніх складових $\dot{E}_z(x, y)$ і $\dot{H}_z(x, y)$, а решта поперечних складових визначається вже простим диференціюванням. Це вже особливості EH -хвиль.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення процесу нормального падіння плоскої електромагнітної хвилі на ідеально провідну поверхню, діелектрик, діелектричний шар певної товщини та діелектричний півпростір під довільним кутом
2. Наведіть формули Френеля для перпендикулярно і паралельно поляризованої електромагнітної хвилі.
3. Що представляє собою кут Брюстера? Поясніть явище повного внутрішнього відбивання.
4. Дайте визначення неоднорідних плоских і направлених електромагнітних хвиль.
5. Що виражають наближені граничні умови Леонтовича?
6. Подайте структуру електричного і магнітного полів при падінні плоскої електромагнітної хвилі E - і H -типів з паралельною і перпендикулярною поляризацією на ідеально провідну поверхню.
7. Дайте визначення електромагнітних хвиль T -типу і подайте їх структуру.

Рекомендована література

1. Вайнштейн Л.А. Электромагнитные волны. – М.: Радио и связь, 1988. – 440 с.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Т. 4. Оптика. – М.: Наука, 1985. – 752 с.
3. Гауэр Дж. Оптические системы связи. – М.: Радио и связь, 1989. – 502 с.
4. Калитеевский Н.И. Волновая оптика. – М.: Наука, 1971. – 384 с.

5. Интегральная оптика. Под ред. Т. Тамира. – М.: Мир, 1978. – 344 с.
6. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. Пер. с англ. Под ред. Г.П. Мотулевич. – М.: Наука, 1970. – 856 с.
7. Кравцов Ю.Л., Орлов Б.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. – М.: Наука, 1980. – 304 с.
8. Спайлер А. Теория оптических волноводов. – М.: Радио и связь, 1987. – 386 с.
9. Каценеленбаум Б.З. Высокочастотная электродинамика. Основы математического аппарата. – М.: Наука, 1966. – 240 с.

Розділ 6. Коливальні системи НВЧ. Вібратори

6.1. Об'ємні резонатори

У радіотехнічних пристроях, які працюють на помірно високих частотах (до декількох сотень мегагерц), здебільшого використовують коливальні контури, утворені зосередженими конденсаторами і котушками індуктивності. Загальною рисою подібних контурів є те, що їх геометричні розміри є значно меншими робочої довжини хвилі. Електродинамічні системи, для яких виконується ця умова, в радіофізиці називають квазістаціонарними колами.

На практиці було помічено, що добротність коливальних систем з резонансними частотами в сотні мегагерц сильно зменшується у порівнянні з добротністю низькочастотних кіл. Причина цього явища полягає в наступному. Як відомо, для підвищення резонансної частоти доводиться зменшувати індуктивність та ємність елементів коливального контуру. У границі лише дві пластини утворюють конденсатор, а індуктивність створює котушка в один виток, які разом утворюють коливальну систему. При цьому суттєво зменшується енергія, яка може бути запасена в контурі. Крім цього, зростає відносна частка активних втрат, які пов'язані із ростом омичного опору провідників на високих частотах через скін-ефект. Додатковим фактором, який приводить до зменшення добротності коливальної системи, є також випромінювання електромагнітної енергії відкритими провідниками.

Мірою, яка дозволяє знизити втрати та підвищити добротність коливальної системи і смуги пропускання, може бути те, що індуктивний виток замінюють суцільною металевою поверхнею. Електромагнітні коливання системи, які представляють собою повністю або частково замкнуті об'єми із провідними стінками, називають об'ємними резонаторами. До них, наприклад, належить тороїдальний резонатор, який використовують в ролі коливальної системи в електровакуумних приладах НВЧ типу відбивних клістронів.

Принципово іншим, більш ефективним є створення коливальних систем НВЧ на базі резонансних відрізків розподілених систем передачі з малими втратами.

Розглянемо напівнескінченну двопровідну лінію передачі, яка на кінці є коротко замкнутою (рис. 6.1), в якій тим чи іншим чином збуджені гармонічні коливання. Як нам відомо з попереднього матеріалу, у такій лінії встановлюється стояча хвиля, що представляє собою суму падаючої та відбитої хвиль. Комплексна амплітуда стоячої хвилі \dot{U} повинна задовольняти крайовій умові у точці короткого замикання: $\dot{U} = \dot{U}_{nad} + \dot{U}_{vid} = 0$ при $z = 0$.

Якщо λ_0 – довжина хвилі в лінії, то комплексна амплітуда напруги залежить від поздовжньої координати:

$$\dot{U}_z = U_{\max} \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_0}\right). \quad (6.1)$$

Звідси видно, що гранична (крайова) умова виконується в багатьох точках осі z , які задовольняють умові $z = p\lambda_0/2$, де $p = 1, 2, 3, \dots$ – ціле число.

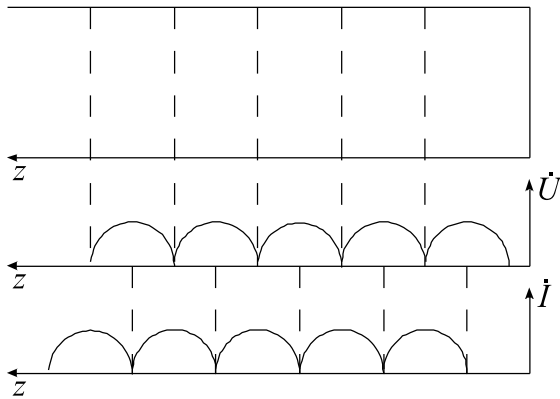


Рис. 6.1. Розподіл напруги і струму в короткозамкненій лінії передачі

Таким чином, якщо взяти замкнутий з обох сторін відрізок лінії довжиною $l = p\lambda_0/2$, то отримаємо електромагнітну систему, коливання в якій при відсутності втрат можуть існувати необмежено довго без якого-небудь впливу із сторони зовнішніх джерел. У курсі теорії кіл також показано, що частотна характеристика такої системи поблизу резонансної частоти в точності відповідає характеристиці звичайного коливального контуру із зосередженими параметрами (рис. 6.2).

Із виразу (6.1) випливає, що замкнений з обох сторін відрізок лінії передачі, на відміну від звичайного коливального контуру, має нескінченну множину резонансних довжин хвиль:

$$\lambda_{0\text{рез}} = \frac{2l}{p}.$$

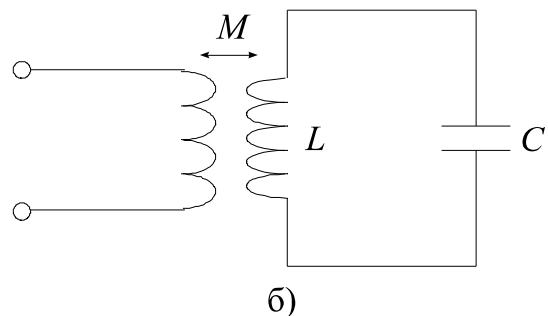
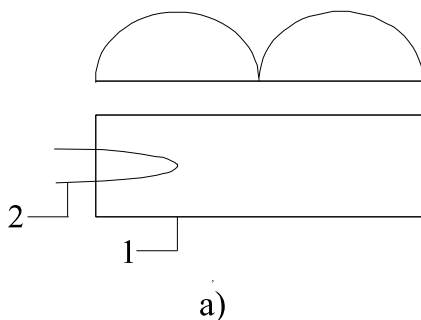


Рис. 6.2. Коливальна система, що створена на відрізку лінії передачі (а) та її еквівалентна схема (б)

Фізично це означає, що вздовж такого відрізка лінії можуть вкладатися одна, дві, три і т.д. стоячі півхвилі. Тому, користуючись таким принципом, можна створювати об'ємні резонатори у вигляді відрізків прямокутного чи круглого металевих хвильоводу з короткозамкненими стінками з обох сторін. Явища в таких резонаторах є складнішими, ніж в короткозамкненій довгій лінії, оскільки стоячі хвилі можуть встановлюватися по всім трьом координатним осям.

6.1.1. Прямокутний об'ємний резонатор.

У цьому підрозділі буде розглянутий метод, який дозволяє розрахувати резонансну довжину хвилі і структуру електромагнітного поля в об'ємному резонаторі на основі відрізка прямокутного хвилеводу.

Для цього розглянемо відрізок прямокутного хвилеводу перерізом $a \times b$, який обмежений двома металевими торцевими поверхнями, які розміщені в перерізах $z=0$ і $z=l$ (рис. 6.3). Така замкнена металева порожнина і представляє собою прямокутний об'ємний резонатор, в якому проведено дослідження на виникнення коливань і структури електромагнітного поля.

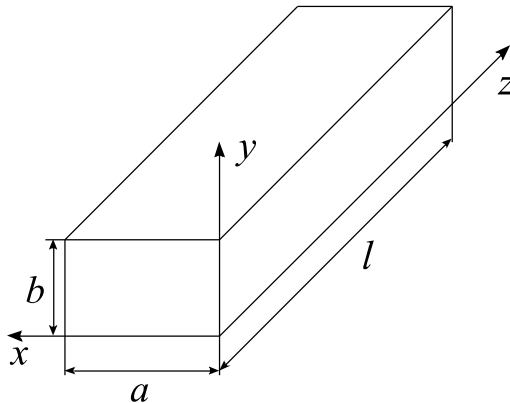


Рис. 6.3. Об'ємний резонатор на основі відрізка прямокутного металевих хвилеводу

Нехай по необмежено протяжному прямокутному хвилеводі поширюється основна хвиля типу H_{10} , яку умовно назвемо падаючою. Ця хвиля рухається в сторону збільшення координати z і характеризується єдиною y -ою складовою вектора напруженості електричного поля з комплексною амплітудою $\dot{E}_{y\text{пад}} = E_{\text{max}} \sin \pi x/a e^{-jhz}$.

Наявність торцевих площин приводить до виникнення відбитої хвилі, для якої $\dot{E}_{y\text{від}} = A E_m \sin \pi x/a e^{-jhz}$, де $A = \text{const}$.

Якщо врахувати, що при $z=0$ сумарне електричне поле з проекцією $\dot{E}_y = \dot{E}_{y\text{пад}} + \dot{E}_{y\text{від}}$ повинно перетворитися в нуль із-за крайових умов на ідеальному провіднику, то $A = \text{const} = -1$. Звідси, використовуючи формулу Ейлера для суми двох експоненціальних функцій з уявними показниками, матимемо:

$$\dot{E}_y = -2j E_{\text{max}} \sin\left(\frac{2\pi z}{\lambda_0}\right) \sin hz. \quad (6.2)$$

Згідно даного виразу, електромагнітний процес буде представляти двовірну стоячу хвилю, яка існує як по осі x , так і по осі z ; вздовж координати y напруженість електричного поля є постійною. Із крайової умови на торцевій поверхні $z=l$, коли $\dot{E}_y = 0$, отримаємо $hl = p\pi$, де p – ціле додатне число.

Значення позовжнього хвильового числа визначимо як $h_{\text{рез}} = p\pi/l$. Від нього можна перейти до резонансного значення довжини хвилі у хвилеводі: $\lambda_{x\text{рез}} = 2\pi/h_{\text{рез}} = 2l/p$. Використовуючи дисперсійне співвідношення для хвилі типу H_{10} у прямокутному хвилеводі, отримаємо:

$$\frac{1}{\lambda_x^2} = \frac{1}{\lambda_0^2} - \frac{1}{4a^2}.$$

Звідси резонансне значення довжини хвилі генератора буде рівним:

$$\lambda_{0\text{рез}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (6.3)$$

На основі викладеного можна зробити наступні висновки:

- Для прямокутної порожнини з ідеально провідними стінками розв'язок рівняння Гельмгольца у вигляді (6.2) існує не при будь-якому значенні довжини хвилі збуджуючого генератора, а лише при таких довжинах хвиль, які задовольняють умові (6.3).

- Кожному допустимому значенню цілочисельного індексу p відповідає своя резонансна довжина хвилі і своя характерна структура просторового розподілу векторів електромагнітного поля, що представляє собою визначений тип коливань у прямокутному об'ємному резонаторі, які називають модами.

- Типи коливань у прямокутному об'ємному резонаторі можна класифікувати як, наприклад, H_{10p} . Така символіка показує, що поле в об'ємному резонаторі породжується хвилею типу H_{10} , а вздовж осі z вкладається p стоячих півхвиль.

Зручніше всього прослідкувати структуру поля у прямокутному резонаторі на прикладі простої моди H_{101} . Як бачимо, тут просторовий розподіл напруженості електричного поля описується формулою

$$\dot{E}_y = E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad (6.4)$$

де E_0 – амплітудний множник.

Магнітне поле в резонаторі знаходимо безпосередньо на основі 2-ого рівняння Максвелла: $\text{rot } \dot{E} = -j\omega\mu_0 \dot{H}$, з якого після підстановки отримуємо наступні формули для проекцій вектора \dot{H} :

$$\dot{H}_x = -\frac{jE_0\pi}{\omega\mu_0 l} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad \dot{H}_y = 0, \quad \dot{H}_z = \frac{jE_0\pi}{\omega\mu_0 a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right).$$

Тут необхідно звернути увагу на наступне: комплексні амплітуди обох проекцій магнітного вектора містять уявні одиниці, тоді як комплексна амплітуда вектора напруженості електричного поля є чисто дійсною. Це говорить про те, що між миттєвими значеннями напруженостей електричного і магнітного поля в резонаторі існує зсув фаз за часом на кут $\pi/2$. Тому в об'ємному резонаторі, як і в іншій коливальній системі, проходить неперервний обмін енергією між електричним і магнітним полями. Два рази за період власних коливань вся енергія електричного поля переходить в енергію магнітного поля і навпаки. Усе це ілюструється картинами розподілу силових ліній електромагнітного поля в об'ємному прямокутному резонаторі

з типом коливань H_{101} (рис. 6.4). Енергія, запасена в такому резонаторі, є реактивною.

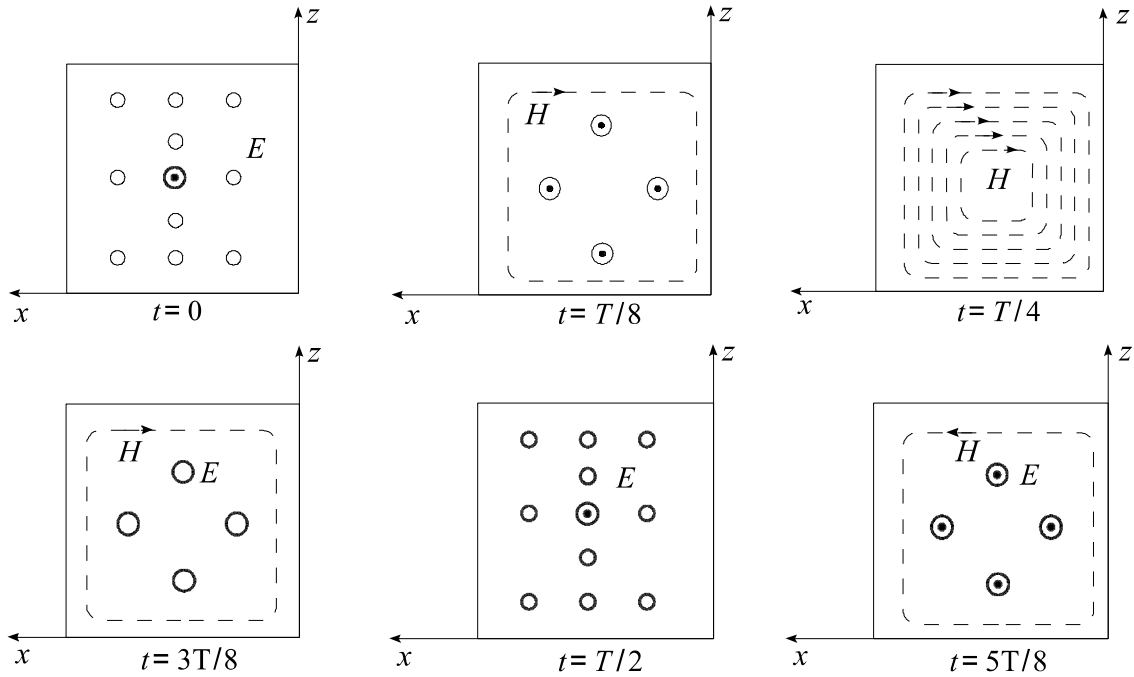


Рис. 6.4. Структура електромагнітного поля для хвилі типу H_{101} у послідовні моменти часу через період коливань

Розглянемо всю сукупність власних коливань різних типів в замкненій порожнині прямокутної форми з ідеально провідними стінками. Для цього повернемося до рис. 6.3 і вважатимемо, що вісь z є віссю стоячої хвилі, а в поперечній площині xOy встановлюється розподіл поля, який відповідає хвилі типу E_{mn} прямокутного хвилеводу. Як вже говорилося вище, резонансне значення довжини хвилі у хвилеводі залежить від параметра p – числа стоячих півхвиль вздовж поздовжньої осі z : $\lambda_{x\text{рез}} = 2l/p$. З іншої сторони величина $\lambda_{x\text{рез}}$ і $\lambda_{0\text{рез}}$ пов'язані між собою дисперсійним співвідношенням

$$\frac{1}{\lambda_{0\text{рез}}^2} = \frac{1}{\lambda_{x\text{рез}}^2} + \frac{1}{\lambda_{kp}^2}.$$

Оскільки хвиля E_{mn} має критичну довжину $\lambda_{kp} = 2/\sqrt{m/a^2 + n/b^2}$, то, враховуючи це, отримаємо формулу для розрахунку резонансної довжини хвилі типу E_{mnp} у прямокутному об'ємному резонаторі:

$$\lambda_{0\text{рез}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}} \quad (6.5)$$

або резонансну частоту

$$f_{рез} = \frac{c}{\lambda_{0рез}} = \frac{c}{2} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}.$$

Таким чином, класифікація типів коливань у прямокутному резонаторі включає в себе такі етапи:

- одна із осей приймається за позовжню вісь регулярного прямокутного хвилеводу, як правило це вісь z ;
- встановлюється, який тип коливань хвилі (H_{mn} чи E_{mn}) здійснюється в такому хвилеводі;
- визначається значення індексу p – числа стоячих півхвиль, які вкладаються між торцевими стінками;
- визначається можливість існування мод, наприклад, E_{mnp} може існувати, а H_{mn0} не існує, оскільки необхідною умовою існування є виконання крайових умов на торцях хвилеводу.

На практиці зазвичай стараються, щоб на заданій резонансній частоті геометричні розміри коливальної системи були мінімальними. Цього вдається досягти, збудивши в резонаторі коливання основного типу, який ще називають нижчим типом. Так прийнято називати моду з найбільшою довжиною хвилі при фіксованих розмірах резонансної порожнини.

Індекси m , n і p для основного типу коливань повинні підбиратися так, щоб зменшити знаменник у формулі (6.5). Зрозуміло, що один з індексів повинен бути рівним нулю, а два інші – одиниці. Нульовий індекс відповідає тій декартовій осі, вздовж якої орієнтовано ребро з найменшою довжиною.

Тут також слід підкреслити, що в об'ємних резонаторах можуть існувати вироджені моди, в яких резонансні довжини хвиль співпадають, незважаючи на те, що структури поля є різними. Прикладом можуть бути коливання типів E_{351} і H_{125} в резонаторі кубічної форми.

Строгий підхід до проблеми власних коливань електромагнітного поля у замкненій порожнині прямокутної форми з ідеально провідними стінками базується на пошуку комплексного значення функції $\dot{E}_{x,y,z}$, яка б задовольняла однорідному рівнянню Гельмгольца $\nabla^2 \dot{E} + \beta_0^2 \dot{E} = 0$ у всіх точках резонатора. Це векторне рівняння є скороченим записом скалярних рівнянь відносно декартових проекцій \dot{E}_α ($\alpha = x, y, z$).

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_\alpha}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_\alpha}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_\alpha}{\partial z^2} + \beta_0^2 \dot{E}_\alpha = 0. \quad (6.6)$$

Проведені раніше дослідження хвилеводу приводять на думку, що серед всіх можливих розв'язків рівнянь (6.6) повинні бути особливо виділені функції виду трьохмірних стоячих хвиль

$$\dot{E}_\alpha \propto \frac{\sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right)}{\cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right)} \frac{\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)}{\cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right)} \frac{\sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right)}{\cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right)}$$

із всіма можливими комбінаціями трьох гармонічних співмножників.

Рівняння Гельмгольца для резонатора має розв'язок вже при конкретному значенні коефіцієнта фази β_0^2 :

$$\beta_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0\text{рез}}} \right)^2 = \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l} \right)^2. \quad (6.7)$$

Врахуємо тепер, що на ідеально провідних стінках резонатора дотичні складові електричного вектора повинні бути рівними нулю. Це означає, що крайові умови будуть такі:

$$\dot{E}_x = 0 \quad \text{при} \quad y = 0, y = b, z = 0, z = l;$$

$$\dot{E}_y = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = a, z = 0, z = l;$$

$$\dot{E}_z = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, x = a, y = 0, y = b.$$

Тоді складові компонентів напруженості електричного поля визначаються як:

$$\dot{E}_x = A \cos\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{E}_y = B \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{p\pi}{l}z\right);$$

$$\dot{E}_z = C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{p\pi}{l}z\right),$$

де m, n, p – цілі додатні числа, які не дорівнюють нулеві одночасно, а A, B, C – постійні.

Дальше слід врахувати, що проекції електричного вектора повинні задовольняти не тільки рівнянню Гельмгольца, але й відповідати векторному полю без джерел, тобто властивості соленоїдальності, коли $\text{div } \vec{E} = 0$:

$$\text{div } \dot{E} = \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial y} + \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial z} = 0.$$

Це означає, що між коефіцієнтами A, B, C повинна існувати лінійна залежність:

$$A \frac{m}{a} + B \frac{n}{b} + C \frac{p}{l} = 0.$$

Якщо розглядати коливання типу E_{mnp} , для якого $\dot{H}_z = 0$, то у відповідності із 2-им рівнянням Максвелла матимемо, що

$$\frac{\partial \dot{E}_y}{\partial x} - \frac{\partial \dot{E}_x}{\partial y} = 0.$$

Звідси отримуємо ще одне рівняння зв'язку

$$B \frac{m}{a} - A \frac{n}{b} = 0.$$

Розв'язуючи систему алгебраїчних рівнянь відносно невідомих A і B , отримаємо

$$A = -C \frac{pm}{al \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]}, \quad A = -C \frac{pn}{bl \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]}.$$

Тоді комплексні амплітуди проекцій вектора напруженості електричного поля для коливань типу E_{mnp} у прямокутному резонаторі набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -C \frac{pm}{al \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sin \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_y &= -C \frac{pn}{bl \left[\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right]} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \sin \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_z &= C \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \quad C = \text{const}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Комплексні амплітуди декартових проекцій магнітного вектора будуть відповідно рівні

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= jC \frac{n \omega_{\text{рез}} \varepsilon_0}{b \pi} \sin \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \cos \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_y &= -jC \frac{m \omega_{\text{рез}} \varepsilon_0}{a \pi} \cos \left(\frac{m\pi}{a} x \right) \sin \left(\frac{n\pi}{b} y \right) \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \quad (6.8.a)$$

Проекції векторів електромагнітного поля для резонаторних мод типу H_{mnp} знаходять аналогічним чином.

6.1.2. Круглий об'ємний резонатор.

Розглянемо циліндричний об'єм, утворений відрізком круглої металевої труби радіусом a з довжиною l , який обмежений провідними торцевими стінками з обох сторін. Така система представляє собою круглий об'ємний резонатор (рис. 6.5). Аналогічно, як і для прямокутного резонатора, поставимо задачу знайти повну сукупність резонансних частот даної коливальної системи.

Як нам відомо, всередині регулярного круглого хвилеводу можуть поширюватися хвилі типу E_{mn} і H_{mn} . Довжина хвилі у резонаторі λ_x

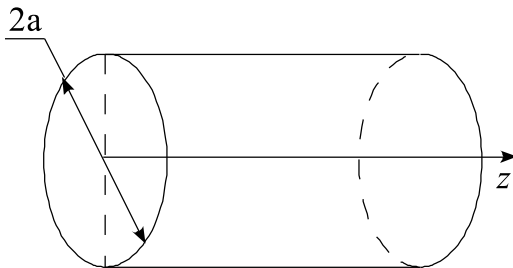


Рис. 6.5. Круглий об'ємний резонатор

пов'язана із довжиною хвилі у вільному просторі λ_0 з допомогою дисперсійного рівняння:

$$\frac{1}{\lambda_0^2} = \frac{1}{\lambda_x^2} + \frac{1}{\lambda_{\text{кр}}^2},$$

яке справедливе для хвиль будь-якого типу. Також нам відомо з попереднього матеріалу, що

критичні довжини хвиль пов'язані із радіусом хвилеводу та з коренями рівняння Бесселя або їх похідними такими співвідношеннями:

$$\lambda_{кр E_{mn}} = \frac{2\pi a}{\nu_{mn}}, \quad \lambda_{кр H_{mn}} = \frac{2\pi a}{\mu_{mn}}.$$

На кожній резонансній частоті вздовж осі коливальної системи повинно вкладатися ціле число стоячих півхвиль, тобто повинна виконуватися умова $\lambda_{рез} = 2l/p$, де $p = 1, 2, 3, \dots$ – ціле додатне число. Тоді із дисперсійного рівняння отримуємо наступні формули для розрахунку резонансних довжин в круглому резонаторі:

– коливання $E_{mn p}$ типу

$$\lambda_{0 рез} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}}; \quad (6.9)$$

– коливання $H_{mn p}$ типу

$$\lambda_{0 рез} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2}} = \frac{2}{\sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{l}\right)^2}}. \quad (6.9.a)$$

Відповідь на можливість існування мод з нульовим значенням індексу p впливає з крайових умов, аналогічно, як і для прямокутного резонатора: типи коливань $E_{mn 0}$ можливі, а $H_{mn 0}$ – ні.

Із формул (6.9) і (6.9.a) видно, що резонансна довжина хвилі тим більша, чим менший корінь ν_{mn} чи μ_{mn} та індекс p . Тому основним (найнижчим) типом коливань або модою в круглому об'ємному резонаторі можуть бути такі типи коливань: H_{111} ($\mu_{11} = 1,844$, $p = 1$) або E_{010} ($\nu_{01} = 2,405$, $p = 0$). Резонансні довжини хвиль вказаних типів коливань стають однаковими при довжині l , яка є коренем рівняння

$$\left(\frac{\nu_{01}}{2\pi a}\right)^2 = \left(\frac{\mu_{11}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{1}{2l}\right)^2,$$

тобто при $l = 2,03a$. Отже, в більш довгих резонаторах основною модою буде хвиля H_{111} -типу, а для більш коротких – E_{010} .

Для того щоб визначити просторовий розподіл векторів поля всередині круглого резонатора, необхідно розв'язати крайову задачу (рівняння Гельмгольца з крайовими умовами): $\nabla^2 \dot{E} + \beta_0^2 \dot{E} = 0$, $\dot{E}_r = 0$ і $\text{div} \dot{E} = 0$.

Як і у випадку прямокутного резонатора, дана крайова задача має ненульові розв'язки тільки при таких значеннях β_0 , які впливають із формул (6.9) і (6.9.a), а саме:

$$\beta_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0 рез}}\right)^2 = \left(\frac{\nu_{mn}}{2\pi a}\right)^2 + \left(\frac{p}{2l}\right)^2 - \text{для } E_{mn p},$$

або

$$\beta_0^2 = \left(\frac{2\pi}{\lambda_{0\text{pez}}} \right)^2 = \left(\frac{\mu_{mn}}{2\pi a} \right)^2 + \left(\frac{p}{2l} \right)^2 - \text{для } H_{mn p}.$$

Остаточні формули, за якими розраховують просторовий розподіл комплексних амплітуд проекцій векторів поля, мають наступний вигляд:

– коливання типу $E_{mn p}$

$$\begin{cases} \dot{E}_r = -C \frac{\nu_{mn}}{a} \frac{p\pi}{l} J'_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi \sin \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_\varphi = C \frac{m p \pi}{r l} J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \sin m\varphi \sin \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_z = C \left(\frac{\nu_{mn}}{a} \right)^2 J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_r = -m C \frac{j \omega_{\text{pez}} \varepsilon_0}{r} J_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \sin m\varphi \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_\varphi = -j \omega_{\text{pez}} C \varepsilon_0 \frac{\nu_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\nu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_z = 0. \end{cases} \quad (6.10)$$

– коливання типу $H_{mn p}$

$$\begin{cases} \dot{E}_r = m C \frac{j \omega_{\text{pez}} \mu_0}{r} J_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \sin m\varphi \sin \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_\varphi = j \omega_{\text{pez}} C \mu_0 \frac{\mu_{mn}}{a} J'_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi \sin \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{E}_z = 0, \\ \dot{H}_r = C \frac{\mu_{mn}}{a} \frac{p\pi}{l} J'_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_\varphi = -C \frac{m p \pi}{r l} J_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \sin m\varphi \cos \left(\frac{p\pi}{l} z \right), \\ \dot{H}_z = C \left(\frac{\mu_{mn}}{a} \right)^2 J_m \left(\frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos m\varphi \sin \left(\frac{p\pi}{l} z \right). \end{cases} \quad (6.10.a)$$

На рис. 6.6 зображені картини силових ліній векторів поля в моді E_{010} , яка має вигляд пучка з максимумом інтенсивності на осі z для вектора \vec{E} , а силові лінії вектора \vec{H} мають вид концентричних кіл.

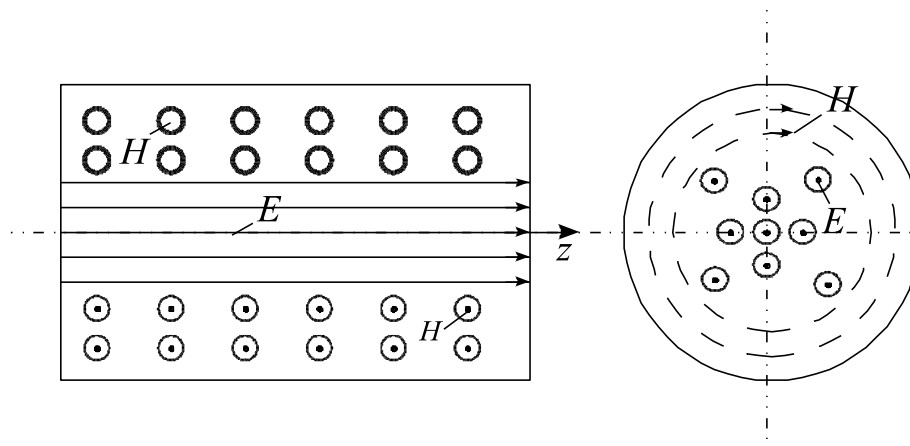


Рис. 6.6. Структура електромагнітного поля для хвилі E_{010} типу

6.1.3. Способи збудження і включення об'ємних резонаторів.

Об'ємний резонатор на практиці завжди повинен бути тим чи іншим способом пов'язаний із зовнішніми пристроями. При цьому особливі конструктивні елементи зв'язку здійснюють збудження самого резонатора. Серед найбільш розповсюджених способів збудження виділимо три:

- за допомогою штиря (рис. 6.7, а);
- за допомогою петлі (рис. 6.7, б);
- за допомогою щілини (рис. 6.7, в).

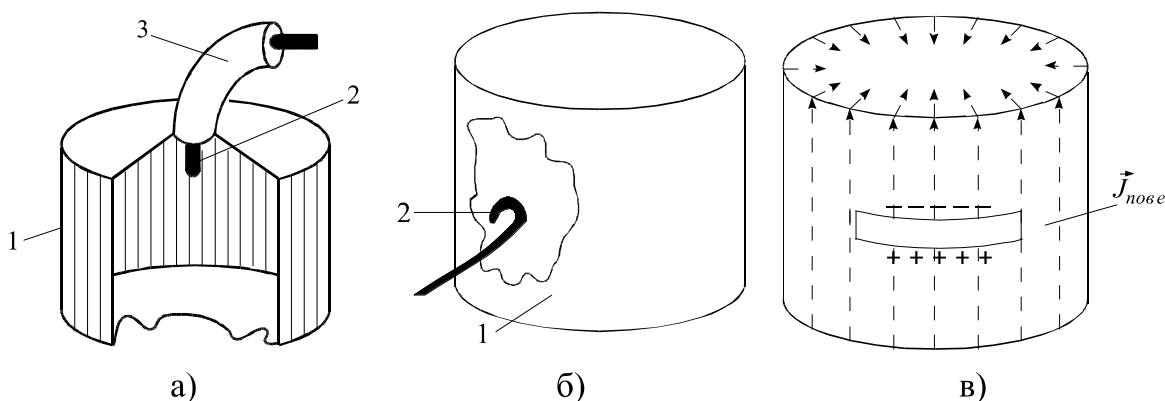


Рис. 6.7. Методи збудження об'ємного резонатора за допомогою штиря (а), петлі (б) та щілини (в): 1 – резонатор; 2 – штир (петля); 3 – кабель.

Збудження за допомогою штиря. При даному способі збудження всередині резонатора через отвір у стінці вводять мініштирову антену, довжина якої суттєво менша робочої довжини хвилі. Такою антеною може бути відрізок коаксіального кабелю. Для ефективного збудження резонатора необхідно, знаючи структуру електромагнітного поля збуджуючої моди,

розмістити штир так, щоб він був паралельний силовим лініям вектора напруженості електричного поля. Підбираючи місце розміщення штиря та його орієнтацію, треба добитися максимуму скалярного добутку $\vec{j}_{cte} \vec{E}$, де \vec{j}_{cte} – густина стороннього електричного струму в штировій антені. При цьому потік потужності від зовнішнього джерела буде максимальним.

Збудження за допомогою петлі. Амплітуда коливань, які збуджуються в резонаторі, буде максимальною в тому випадку, коли площа петлі в максимальній степені пронизується магнітним потоком поля резонатора. Збуджуючу петлю необхідно розміщувати там, де силові лінії вектора напруженості магнітного поля мають найбільшу густину.

Збудження за допомогою щілини. Якщо в стінці резонатора прорізати вузьку щілину, яка прорізає лінії поверхневого струму, то така щілина випромінює електромагнітне поле. Вона може служити елементом зв'язку між об'ємним резонатором і зовнішніми пристроями, наприклад, хвилеводами. На рис. 6.7, в зображена щілина, яка прорізана у стінці для збудження коливань типу E_{010} .

Крім способів збудження, необхідно і правильно включити у хвилеводний тракт об'ємний резонатор. Виділимо два основних способи включення із зовнішніми НВЧ-колами (рис. 6.8). При першому, який називають адсорбційним способом, в околі резонансної частоти відбувається інтенсивний відбір потужності з тієї лінії передачі, до якої підключений резонатор як двополюсник. Як наслідок, на резонансній частоті коефіцієнт передачі $K_p = P_{вих} / P_{вх}$ має ярко виражений мінімум (рис. 6.8, а).

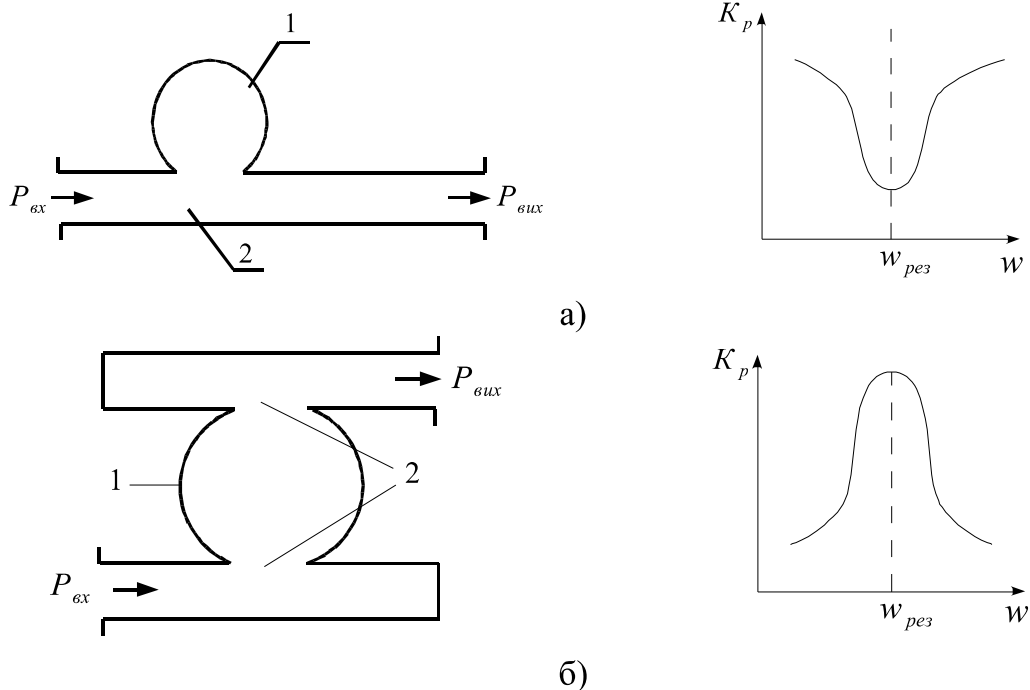


Рис. 6.8. Способи ввімкнення об'ємного резонатора в хвилеподібний тракт: а) адсорбційний; б) прохідний (1 – резонатор; 2 – отвір зв'язку).

Другий спосіб включення об'ємного резонатора називають прохідним (рис. 6.8, б). Тут резонатор має два елементи зв'язку із зовнішнім колом і використовується вже як чотириполюсник. На резонансній частоті використовуваного типу коливань коефіцієнт передачі потужності прохідного резонатора є максимальним. У радіотехнічних пристроях резонатор, включений за прохідною схемою, виконує роль смугового частотного фільтра.

6.1.4. Добротність об'ємних резонаторів.

Частотна селекція сигналів – одна із найважливіших технічних функцій об'ємного резонатора. Якість частотно-вибіркових систем, які з точки зору форми амплітудно-частотної характеристики (АЧХ) в околі резонансної частоти є подібні до простого коливального контуру, який, як нам відомо з основ радіоелектроніки, характеризується особливим параметром – добротністю:

$$Q = \frac{\psi_{рез}}{\Pi_{0,707}},$$

де $\Pi_{0,707}$ – смуга пропускання на рівні $0,707 = 1/\sqrt{2}$ від максимального значення АЧХ, що спостерігається на резонансній частоті.

Виведемо загальну формулу для розрахунку добротності об'ємного резонатора, який працює на деякому заданому типі коливань. Будемо виходити з того, що в момент часу $t=0$ збуджуюче джерело вимикається, а амплітуда власних коливань у резонаторі буде зменшуватися у часі за експоненціальним законом, наприклад, $E t = E_0 e^{-t/\tau} \cos \omega_{рез} t$, де $E t$ – будь-яка із трьох декартових проекцій вектора напруженості електричного поля, E_0 – амплітуда коливань в початковий момент часу $t=0$, τ – постійна часу коливальної системи.

Використаємо співвідношення між τ і $\omega_{рез}$, а саме $\tau = 2Q/\omega_{рез}$. Нехай $W_{зан}$ – початковий запас енергії у резонаторі при $t=0$. Через один період власних коливань, тобто при $t = 2\pi/\omega_{рез}$, $E_0 e^{-\frac{2\pi}{\omega_{рез}\tau}} = E_0 e^{-\frac{\pi}{Q}}$.

Оскільки запасена енергія пропорційна квадрату амплітуд векторів поля, то внаслідок втрат за один період власних коливань у резонаторі буде запасена енергія

$$W_{сн T} = W_{зан} \left[1 - \exp\left(-\frac{2\pi}{Q}\right) \right].$$

Дану формулу можна дещо спростити, оскільки резонатори, які використовують в НВЧ-радіотехніці, є високодобротними, для яких $Q \gg 1$ і можна замінити експоненту рядом, тобто $e^{-\frac{2\pi}{Q}} \cong 1 - 2\pi/Q$. Тоді з досить великою точністю можна вважати, що

$$W_{\text{вт}} = \frac{2\pi W_{\text{зан}}}{Q}.$$

Тепер енергію втрат за один період коливань зручно пов'язати із середньою потужністю втрат

$$W_{\text{вт}} = T P_{\text{вт}} = \frac{2\pi P_{\text{вт}}}{\omega_{\text{рез}}}.$$

Звідси можна визначити добротність

$$Q = \frac{\omega_{\text{рез}} W_{\text{зан}}}{P_{\text{вт}}}.$$

Енергію, запасену в резонаторі, можна знайти, про інтегрувавши за об'ємом квадрати амплітудних значень електричного чи магнітного векторів:

$$W_{\text{зан}} = \frac{\epsilon_0}{2} \int_V E^2 dV = \frac{\mu_0}{2} \int_V H^2 dV.$$

Проте, з попереднього розділу відомо, що питома потужність втрат

$$|P_{\text{вт}}| = \frac{1}{2} \operatorname{Re} Z_{\text{с.м}} |\dot{H}_{\tau.м}|^2 = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} |\dot{H}_{\tau.м}|^2,$$

звідки

$$P_{\text{вт}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_0}{8\sigma}} \int_S |\dot{H}_{\tau.м}|^2 dS$$

визначається інтегруванням по замкненій поверхні S металевих стінок резонатора питомої потужності втрат. Таким чином, добротність об'ємного резонатора буде визначатися формулою

$$Q = \frac{\sqrt{2\omega_{\text{рез}} \mu_0 \sigma} \int_V H^2 dV}{\int_S |\dot{H}_{\tau.м}|^2 dS}. \quad (6.11)$$

Тепер виведемо формулу для розрахунку добротності коливань типу E_{010} в круглому об'ємному резонаторі, який має радіус a та осьову довжину l . Будемо виходити з того, що в даному випадку магнітний вектор має тільки азимутальну складову із комплексною амплітудою, що визначається рівністю (6.10) при $m=0$, $p=0$:

$$\dot{H}_{\phi} r = H_0 J_1 \left(\frac{\nu_{01} r}{a} \right),$$

де H_0 – постійний множник.

Тоді

$$\int_V H^2 dV = 2\pi l H_0^2 \int_0^a J_1^2 \left(\frac{\nu_{01} r}{a} \right) r dr = \pi l a^2 H_0^2 J_1^2 \nu_{01},$$

$$\int_S |\dot{H}_{\tau.м}|^2 dS = 2\pi a l H_0^2 J_1^2 \nu_{01} + 2\pi a^2 H_0^2 J_1^2 \nu_{01} = 2\pi a l + a H_0^2 J_1^2 \nu_{01}.$$

Підставивши ці значення у формулу для добротності Q , отримаємо:

$$Q_{E_{010}} = \frac{\sqrt{\omega_{рез} \mu_0 \sigma l a}}{\sqrt{2} l + a}.$$

Якщо прийняти, що для моди E_{010} круглого резонатора $\lambda_{0 рез} = 2,6/a$, а $\omega_{рез} = 2\pi c/\lambda_{0 рез} = 2,405c/a$, тоді $Q_{E_{010}} = 21,3\sqrt{\sigma} \frac{\sqrt{a}}{l+a}$ (всі розміри в [м]).

Без виведення подамо формулу для визначення добротності прямокутного резонатора для мод H_{101} або E_{110} :

$$Q_{E_{110}} = \pi \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega_{рез} \varepsilon_0}} \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}\right)^{3/2}}{\frac{1}{a^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{a}\right) + \frac{1}{l^2} \left(\frac{1}{b} + \frac{2}{l}\right)}.$$

Найкраще співвідношення між об'ємом і поверхнею, а значить і найбільшу добротність можна отримати в сферичному об'ємному резонаторі. Така коливальна система представляє собою металеву сферу, радіус якої близький до резонансної довжини хвилі. Але такі резонатори важко переналаштовувати.

Цікавим також виглядає коаксіальний об'ємний резонатор, що представляє собою закорочений з обох кінців відрізок коаксіального хвилеводу. Такий резонатор, як правило, працює на хвилях типу T , і тому його поперечні розміри можуть бути будь-якими, незалежно від значення резонансної частоти. Це ефективно використовується при використанні коаксіальних об'ємних резонаторів на хвилях дециметрового діапазону, де аналогічні прямокутні чи круглі резонатори мали б недопустимо великі розміри.

6.2. Неоднорідні рівняння Максвелла. Елементарні випромінювачі

До сих пір ми розглядали так звані однорідні задачі електродинаміки, в рамках яких джерела електромагнітного поля розмішувалися досить далеко від тієї просторової області, в якій необхідно знайти вектори електромагнітного поля. Проте на практиці, наприклад, при розрахунку антен, потрібно знайти безпосередній зв'язок сторонніх електричних струмів, які є джерелами електромагнітного поля, з векторами \vec{E} і \vec{H} у всіх точках простору. Такі ж задачі доводиться також розв'язувати, використовуючи збудження хвилеводів або об'ємних резонаторів за допомогою штиря, петлі, щілини, модульованого за часом електронного потоку.

6.2.1. Постановка крайової задачі. Векторний і скалярний потенціали електромагнітного поля. Функція Гріна.

Із математичної точки зору розв'язання всіх вище згаданих задач пов'язано з неоднорідною системою рівнянь Максвелла, які записуються наступним чином:

$$\begin{aligned}
1. \quad \operatorname{rot} \dot{H} - j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{E} &= \dot{j}_{cm}, \\
2. \quad \operatorname{rot} \dot{E} - j\omega \mu_a \dot{H} &= 0, \\
3. \quad \operatorname{div} \dot{B} &= 0, \\
4. \quad \operatorname{div} \dot{D} &= \rho.
\end{aligned}
\tag{6.12}$$

Для спрощення задач будемо вважати, що у всіх точках простору об'ємна густина електричних зарядів рівна нулю ($\rho = 0$).

У правій частині першого рівняння Максвелла фігурує густина стороннього електричного струму \dot{j}_{cm} , яка є заданою функцією просторових координат. У цьому сенсі існує пряма аналогія між неоднорідною задачею електромагнітного поля і більш простою задачею про струми і напруги в електричному полі, які збуджуються вже відомими сторонніми джерелами е.р.с. При записі системи (6.12) передбачалось, що миттєві значення фізичних величин змінюються в часі за гармонічним законом з постійною кутовою швидкістю.

Безпосередньо розв'язати систему неоднорідних рівнянь Максвелла (6.12), як правило, досить важко хоча б тому, що потрібно визначити одразу всі шість незалежних проекцій векторів \vec{E} і \vec{H} . Тому необхідно знайти деякі допоміжні функції, які пов'язані з векторами напруженостей електричного і магнітного полів і які мають таку властивість, що перехід до них дозволив би спростити процедуру розв'язання саме неоднорідних рівнянь Максвелла. Такі допоміжні функції у технічній електродинаміці називають потенціалами електромагнітного поля.

Властивість соленоїдальності магнітного поля $\operatorname{div} \dot{B} = 0$ автоматично задовольнила векторне поле \dot{B} , яке визначається за формулою $\dot{B} = \operatorname{rot} \vec{A}_e$ (із розділу 1), де \vec{A}_e – деяка векторна функція просторових координат, яку називають електричним векторним потенціалом. Так як $\dot{B} = \mu_a \dot{H}$, то $\dot{H} = \frac{1}{\mu_a} \dot{B} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \vec{A}_e$. Єдиною умовою до векторної функції \vec{A}_e є її диференційованість, що забезпечує існування ротора цього векторного поля. Більше того, приведені рівності зберігають силу, якщо до поля \vec{A}_e додати ще одне векторне поле $F = \operatorname{grad} U r$, де $U r$ – довільна гладка функція радіус-вектора, бо $\operatorname{rot} \operatorname{grad} U r = 0$. Тоді перше рівняння Максвелла запишеться

$$\operatorname{rot} \dot{E} + j\omega \operatorname{rot} \vec{A}_e = 0 \quad \text{або} \quad \operatorname{rot} \dot{E} + j\omega \dot{A}_e = 0. \tag{6.13}$$

Тоді

$$\dot{E} + j\omega \vec{A}_e = -\operatorname{grad} \phi_e,$$

де ϕ_e – деяка функція координат, яка називається скалярним електричним потенціалом. З останнього виразу $\dot{E} = -\operatorname{grad} \phi_e - j\omega \vec{A}_e$.

Таким чином, ми знайшли спосіб виразити напруженості електричного і магнітного полів через векторний і скалярний потенціали:

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -\text{grad} \dot{\phi}_e - j\omega \dot{A}_e, \\ \dot{H} &= \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \dot{A}_e.\end{aligned}\quad (6.14)$$

Задача дещо спрощується, бо замість двох векторних функцій достатньо мати одну векторну і одну скалярну.

Підставимо співвідношення (6.14) у перше рівняння Максвелла системи (6.13):

$$\frac{1}{\mu_a} \text{rot} \text{rot} \dot{A}_e + j\omega \tilde{\epsilon}_a \text{grad} \dot{\phi}_e + j\omega \tilde{\epsilon}_a j\omega \dot{A}_e = \dot{j}_{cm}.$$

Розкриваючи векторну операцію $\text{rot} \cdot \text{rot}$, отримаємо:

$$\text{grad} \text{div} \dot{A}_e + j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_a \dot{\phi}_e - \nabla^2 \dot{A}_e + \gamma^2 \dot{A}_e = \mu_a \dot{j}_{cm}, \quad (6.15)$$

де $\gamma = j\omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \mu_a}$ – комплексний коефіцієнт поширення однорідної плоскої електромагнітної хвилі.

Тепер накладаємо умову на обидва потенціали поля – $\text{div} \dot{A}_e + j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_a \dot{\phi}_e = 0$, яку називають умовою калібрування або умовою Лорентца. Тоді рівняння (6.15) суттєво спроститься і набуде вигляду

$$\nabla^2 \dot{A}_e - \gamma^2 \dot{A}_e = -\mu_a \dot{j}_{cm}. \quad (6.16)$$

Отримане рівняння представляє собою неоднорідне рівняння Гельмгольца відносно векторного електричного потенціалу \dot{A}_e . Якщо із умови Лорентца визначити

$$\dot{\phi}_e = -\frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_a} \text{div} \dot{A}_e,$$

то напруженість електричного і магнітного полів буде рівна

$$\begin{aligned}\dot{E} &= -\text{grad} \dot{\phi}_e - j\omega \dot{A}_e = \frac{1}{j\omega \tilde{\epsilon}_a \mu_a} \text{grad} \text{div} \dot{A}_e - \gamma^2 \dot{A}_e, \\ \dot{H} &= \frac{1}{\mu_a} \text{rot} \dot{A}_e.\end{aligned}\quad (6.17)$$

Таким чином, якщо розв'язок неоднорідного рівняння Гельмгольца отримано у вигляді (6.17), то знаходження векторів електромагнітного поля, збудженого системою сторонніх джерел, зводиться до простих диференціальних операцій $\text{grad} \text{div}$ та rot від векторного електричного потенціалу. Якщо функція \dot{A}_e не є гармонічною функцією, то неоднорідне рівняння Гельмгольца перетворюється в неоднорідне рівняння Д'Аламбера.

Приступаючи до пошуку строгого розв'язку задачі про збудження необмеженого однорідного простору системою сторонніх джерел, обмежимося важливим частинним випадком, коли втрати у середовищі

відсутні. Тоді коефіцієнт поширення $\gamma = j\beta$ і неоднорідне рівняння Гельмгольца приймає вигляд

$$\nabla^2 \dot{A}_e + \beta^2 \dot{A}_e = -\mu_a \dot{j}_{cm}. \quad (6.18)$$

Таке неоднорідне векторне диференціальне рівняння розпадається на три незалежних рівняння відносно проекцій шуканої функції \dot{A}_e x, y, z на осі декартової системи координат:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{A}_{ex} + \beta^2 \dot{A}_{ex} &= -\mu_a \dot{j}_{cmx}, \\ \nabla^2 \dot{A}_{ey} + \beta^2 \dot{A}_{ey} &= -\mu_a \dot{j}_{cmy}, \\ \nabla^2 \dot{A}_{ez} + \beta^2 \dot{A}_{ez} &= -\mu_a \dot{j}_{cmz}. \end{aligned} \quad (6.18.a)$$

Усі три рівняння із системи (6.18.a) ідентичні, тому задачу про збудження електромагнітних хвиль у вільному просторі без втрат можна звести до розв'язання неоднорідного, але вже скалярного рівняння Гельмгольца виду

$$\nabla^2 \dot{U} + \beta^2 \dot{U} = \dot{F},$$

де \dot{U} r – невідома функція при заданій функції \dot{F} r . Спосіб розв'язання цього рівняння суттєвим чином опирається на те, що це рівняння є лінійним, а значить підпорядковується принципу суперпозиції.

Розглянемо деяку точку простору Q , що має радіус-вектор \vec{r}_0 . Нехай $\dot{F} \vec{r}_0$ – значення правої частини цього рівняння в цій точці. Оточимо точку Q фізично малим околom з об'ємом ΔV і назовемо величину $\dot{F} \vec{r}_0 \Delta V$ інтенсивністю джерела в даній точці.

Якщо функція $\dot{F} \vec{r}_0$ всюди приймає лише кінцеве значення, то ця інтенсивність наближається до нуля при $\Delta V \rightarrow 0$. Тоді говорять, що джерела розподілені у просторі неперервно. Проте, може бути й інший варіант, коли в точці Q розміщене джерело скінченної інтенсивності, яка залишається незмінною при дуже малих значеннях ΔV . Тоді говорять, що в точці простору із радіус-вектором \vec{r}_0 розміщене вже дискретне джерело. Якщо інтенсивність джерела рівна одиниці, то праву частину рівняння можна записати у вигляді

$$\dot{F} \vec{r}_0 = \delta \vec{r} - \vec{r}_0,$$

де $\delta \vec{r} - \vec{r}_0$ – трьохмірна дельта-функція, яку можна подати у вигляді добутку трьох однорідних дельта-функцій:

$$\delta \vec{r} - \vec{r}_0 = \delta x - x_0 \delta y - y_0 \delta z - z_0.$$

Проте нам відомо з курсу радіоелектроніки властивості дельта-функцій. Зокрема, знаємо умову її нормування, яка записується наступним чином: якщо $\vec{r} \neq \vec{r}_0$, то $\delta \vec{r} - \vec{r}_0 = 0$ і

$$\int_V \delta \vec{r} - \vec{r}_0 dV = \iiint \delta x - x_0 \delta y - y_0 \delta z - z_0 dx dy dz =$$

$$= \iiint \delta x - x_0 \delta y - y_0 \delta z - z_0 dx_0 dy_0 dz_0 = 1$$

при інтегруванні по будь-якому об'єму, що містить точку Q , де x, y, z – координати точки спостереження, а x_0, y_0, z_0 – координати точки джерела.

За визначенням, функцією Гріна $\dot{G} \vec{r}, \vec{r}_0$ рівняння Гельмгольца називають розв'язок неоднорідного рівняння

$$\nabla^2 \dot{G} \vec{r}, \vec{r}_0 + \beta^2 \dot{G} \vec{r}, \vec{r}_0 = \delta \vec{r} - \vec{r}_0, \quad (6.19)$$

яке описує гармонічний хвильовий процес, що поширюється у всі напрями із точки знаходження джерела.

Покажемо, що знаючи функцію Гріна, можна до кінця розв'язати задачу про збудження вільного простору довільною сукупністю сторонніх джерел, як неперервних, так і дискретних, причому на основі принципу суперпозиції процедура розв'язання зводиться до обчислення деякого інтегралу. Для цього спочатку помножимо обидві частини рівняння (6.19) на невідому функцію \dot{U} , а потім обидві частини рівності $\nabla^2 \dot{U} + \beta^2 \dot{U} = \dot{F}$ на функцію \dot{G} . Віднімаючи отримані рівняння почленно, отримаємо:

$$\dot{U} \nabla^2 \dot{G} - \dot{G} \nabla^2 \dot{U} = \dot{U} \delta \vec{r} - \vec{r}_0 - \dot{G} \dot{F}.$$

Візьмемо тепер деякий достатньо великий об'єм V з поверхнею S , що містить точку Q , і проінтегруємо по ньому обидві частини отриманого рівняння. При цьому об'ємний інтеграл від лівої частини можна замінити поверхневим інтегралом, якщо використати із векторного аналізу формулу Гріна:

$$\int_V \dot{U} \nabla^2 \dot{G} - \dot{G} \nabla^2 \dot{U} dV = \oint_S \dot{U} \text{grad} \dot{G} - \dot{G} \text{grad} \dot{U} dS = \int_V \left[\dot{U} \delta \vec{r} - \vec{r}_0 - \dot{G} \dot{F} \right] dV.$$

Фізично зрозуміло, що для достатньо віддалених точок поверхні S від точки розміщення джерела Q значення функцій \dot{U} і \dot{G} на поверхні S можуть бути дуже малими, так що поверхневий інтеграл може бути рівний нулю. Звідси приходимо до цікавого співвідношення, якому повинен задовольняти шуканий розв'язок $\dot{U} \vec{r}$:

$$\int_V \dot{U} \delta \vec{r} - \vec{r}_0 dV = \int_V \dot{G} \dot{F} dV.$$

Тут обидві функції $\delta \vec{r} - \vec{r}_0$ і $\dot{G} \vec{r}, \vec{r}_0$ симетричні відносно своїх аргументів, тобто

$$\delta \vec{r} - \vec{r}_0 = \delta \vec{r}_0 - \vec{r}, \quad \dot{G} \vec{r}, \vec{r}_0 = \dot{G} \vec{r}_0, \vec{r}.$$

Виходячи з цього, інтегрування по об'єму можна проводити як за координатними точками спостереження, так і за координатами точок джерела. Інтегруючи за координатами точок джерела x_0, y_0, z_0 і використовуючи фільтруючу властивість дельта-функції, отримаємо

загальний розв'язок неоднорідного скалярного рівняння Гельмгольца $\nabla^2 \dot{U} + \beta^2 \dot{U} = \dot{F}$ з довільною правою частиною:

$$\dot{U}(\vec{r}) = \int_V \dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0) \dot{F}(\vec{r}_0) dx_0 dy_0 dz_0. \quad (6.20)$$

Фізичний зміст цього розв'язку є простим і наочним – результуюче збудження, яке спостерігається у точці із радіус-вектором \vec{r} , є зваженою сумою елементарних збуджень від всіх джерел; роль вагової функції тут відіграє функція Гріна.

Тепер подивимось, як буде виглядати функція Гріна для неоднорідного рівняння Гельмгольца. Однорідний трьохмірний простір є ізотропним, оскільки характеристики хвиль ніяк не пов'язані з напрямом їх поширення. Тому можна стверджувати, що функція Гріна $\dot{G}(\vec{r}, \vec{r}_0)$ фактично залежить тільки від одного аргумента $R = |\vec{r} - \vec{r}_0|$ – довжини радіус-вектора, проведеного з точки розміщення джерела в точку спостереження. Очевидно, що для всіх $R \neq 0$ функція Гріна $\dot{G}(R)$ є розв'язком однорідного рівняння Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{G}(R) + \beta^2 \dot{G}(R) = 0$$

або, розкриваючи оператор Набла (чи Лапласа, бо $\nabla^2 = \Delta$) у сферично симетричному випадку ($\partial/\partial\theta = \partial/\partial\varphi = 0$), отримаємо

$$\frac{d^2 \dot{G}}{dR^2} + \frac{2}{R} \frac{d\dot{G}}{dR} + \beta^2 \dot{G} = 0. \quad (6.21)$$

Із даного рівняння можна виключити доданок з першою похідною, якщо використати заміну $\dot{\Psi} = R \dot{G}$. Тоді, як ми переконалися, відносно нової змінної функції $\dot{\Psi}$ отримуємо рівняння

$$\frac{d^2 \dot{\Psi}}{dR^2} + \beta^2 \dot{\Psi} = 0,$$

яке має, як нам відомо, два розв'язки:

$$\dot{\Psi}_{1,2}(R) = \exp \pm j \beta R.$$

Кожний такий розв'язок описує комплексну амплітуду біжучої гармонічної хвилі, яка поширюється вздовж радіальної координати. Одна із цих хвиль рухається у напрямі із нескінченості до джерела, а друга – від джерела в нескінченість. Так як фізичний зміст може мати тільки остання із згаданих хвиль, то розв'язком рівняння (6.21) буде функція

$$\dot{\Psi}(R) = \exp -j \beta R,$$

яка дає наступний вираз для функції Гріна:

$$\dot{G}(R) = \frac{A e^{-j \beta R}}{R},$$

де $A = \text{const.}$

У математичній фізиці прийнято говорити, що дана функція Гріна описує однорідну сферичну хвилю. Амплітуда цієї хвилі зменшується обернено пропорційно першій степені радіус-вектора R . Для того щоб

знайти чисельне значення постійної A , доцільно звернутися до рівняння (6.19), записавши його у вигляді

$$\nabla^2 \dot{G} R + \beta^2 \dot{G} R = \delta R. \quad (6.22)$$

Опишемо навколо точки розміщення джерела кулю \mathcal{D} з радіусом ξ . Нехай Γ – поверхня цієї кулі. Про інтегрувавши обидві частини рівняння (6.22) за об'ємом \mathcal{D} , отримаємо:

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla^2 \dot{G} R d\mathcal{D} + \beta^2 \int_{\mathcal{D}} \dot{G} R d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \delta R d\mathcal{D} = 1.$$

Оскільки другий доданок набагато менший першого, тому рівняння дещо спрощується:

$$\int_{\mathcal{D}} \nabla^2 \dot{G} R d\mathcal{D} = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div} \operatorname{grad} \dot{G} d\mathcal{D} = \int_{\Gamma} \operatorname{grad} \dot{G} d\Gamma = 1$$

(якщо $\delta R = \operatorname{div} \operatorname{grad} \dot{G}$ і $\operatorname{grad} \dot{G} = \frac{d\dot{G}}{dR} \vec{i}_r$). Тоді останнє нормуюче рівняння можемо записати

$$\left. \frac{d\dot{G}}{dR} \right|_{R=\xi} \cdot 4\pi \xi^2 = 1 \quad \text{або} \quad \left. \frac{d\dot{G}}{dR} \right|_{R=\xi} = \frac{1}{4\pi \xi^2}.$$

Звідси $\dot{G} R = -\frac{1}{4\pi R}$ і значить $A = -\frac{1}{4\pi}$. Тому кінцевий вигляд функції

Гріна буде

$$\dot{G} R = -\frac{e^{-j\beta R}}{4\pi R} \quad \text{або} \quad \dot{G} \vec{r}, \vec{r}_0 = -\frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}_0|}.$$

Вираз, отриманої таким чином функції Гріна, дозволяє записати розв'язок неоднорідного рівняння Гельмгольца у вигляді скалярного потенціалу

$$\dot{U} \vec{r} = -\frac{1}{4\pi} \int_V \dot{F} \vec{r}_0 \frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} dx_0 dy_0 dz_0. \quad (6.23)$$

Або, для векторного рівняння (6.18) отримаємо значення векторного потенціалу

$$\dot{A}_e \vec{r} = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \dot{j}_{cm} \vec{r}_0 \frac{e^{-j\beta|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} dx_0 dy_0 dz_0, \quad (6.23.a)$$

який ми згадували у першому розділі.

6.2.2. Елементарний електричний випромінювач – диполь Герца. Структура його поля.

Елементарним електричним випромінювачем (вібратором) називають ідеалізовану випромінюючу систему, в якій змінний електричний струм протікає вздовж відрізка прямої лінії при надзвичайно малій площі поперечного перерізу. При цьому вважається, що довжина випромінюючої області l є значно меншою довжини електромагнітної хвилі λ в навколишньому середовищі.

Фізична картина протікання струму по елементарному електричному випромінювачу полягає в наступному. Нехай, наприклад, у розрив випромінюючого відрізка провідника увімкнене джерело гармонічної е.р.с. Тоді струм провідності проходить по одному плечу випромінювача, створюючи у просторі струм зміщення і через друге плече повертається в джерело (рис. 6.9).

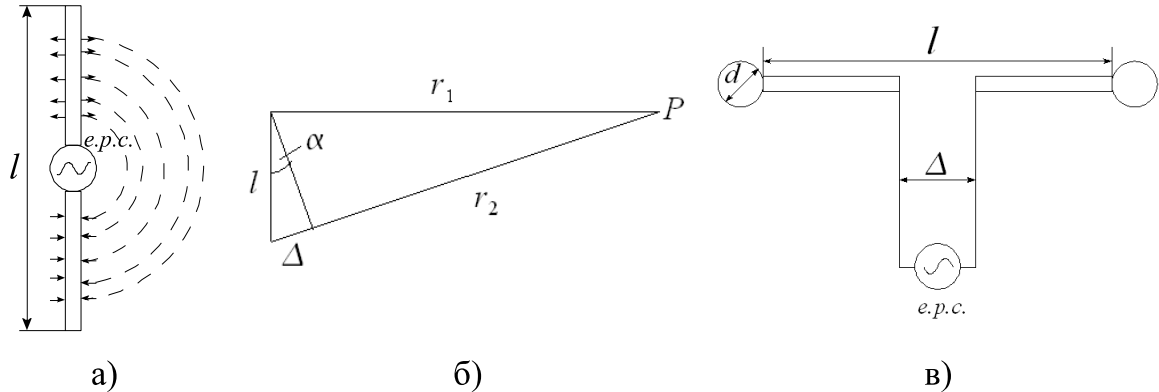


Рис. 6.9. Елементарний електричний випромінювач (а), різниця ходу хвиль від двох крайніх точок випромінювача (б) та диполь Герца (в)

Мала довжина випромінювача у порівнянні з довжиною хвилі ($l \ll \lambda$) дозволяє розглядати його як точковий випромінювач електромагнітних хвиль. Саме елементарний електричний вібратор є математичною моделлю диполя Герца, який являє собою дві металеві кулі діаметром d , з'єднаних тонким провідником, а до перерізу провідника за допомогою двопровідної лінії підключене джерело е.р.с.

Дійсно, у довільним чином розміщену точку спостереження P приходять сферичні хвилі, які збуджуються всією областю випромінюючого провідника. Найбільша геометрична різниця ходу (рис. 6.9, в) для двох хвиль із радіус-векторами r_1 і r_2 складає $\Delta = l \sin \alpha$, звідки різниця фаз збуджених

коливань, виражена у радіанах рівна $\delta\varphi = \beta \Delta = \frac{2\pi}{\lambda} l \sin \alpha$. Згідно цієї формули при $l/\lambda \ll 1$ система випромінює ніби одну сферичну хвилю і в цьому сенсі може вважатися точковим джерелом електромагнітних хвиль.

Будемо вважати, що елементарний випромінювач розташований у початковій точці сферичної системи координат (r, θ, φ) , причому для визначеності випромінювач орієнтований паралельно полярній осі z (рис. 6.10). Завдяки малості геометричних розмірів випромінювача у порівнянні з довжиною хвилі формулу (6.23.а) можна дещо спростити, виносячи за знак інтегралу ті співмножники, від яких визначається характером функції Гріна; при цьому вважаємо, що $r_0 = 0$ і $\mu_a = \mu_0$ (середовище – вакуум або повітря):

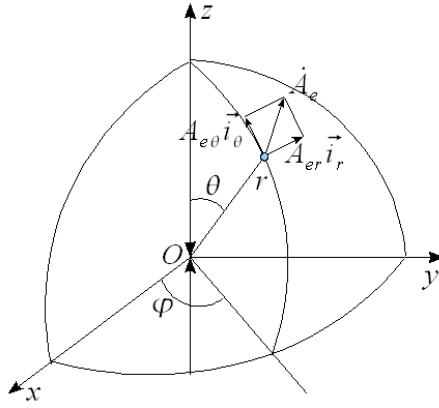


Рис. 6.10. Визначення сферичних поверхонь векторного потенціалу

$$\dot{A}_e \vec{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{-j\beta\vec{r}}}{r} \int_V \dot{j}_{cm} dx_0 dy_0 dz_0.$$

Комплексна амплітуда вектора густини стороннього електричного струму виражається як

$$\dot{j}_{cm} = \dot{I} \delta x_0 \delta y_0 \vec{i}_z.$$

Використовуючи фільтруючу дію дельта-функції, знаходимо

$$\int_V \dot{j}_{cm} dx_0 dy_0 dz_0 = \dot{j}_{cm} = \vec{i}_z \int_0^l dz \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \dot{I} \delta x_0 \delta y_0 dx_0 dy_0 = \dot{I} l \vec{i}_z.$$

Тоді векторний потенціал буде рівний

$$\dot{A}_e \vec{r} = \frac{\mu_0 \dot{I} l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta\vec{r}}}{r} \vec{i}_z. \quad (6.24)$$

Із даного виразу випливає, що векторний електричний потенціал електромагнітного поля, яке збуджується елементарним вібратором, описується функцією однорідної сферичної хвилі, яка поширюється вздовж радіальної координати r із швидкістю світла.

Якщо розкласти векторний потенціал \dot{A}_e на його складові \dot{A}_{er} , $\dot{A}_{e\theta}$, $\dot{A}_{e\varphi}$, то отримаємо:

$$\begin{aligned} \dot{A}_{er} &= \dot{A}_e \cos \theta = \frac{\mu_0 \dot{I} l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta\vec{r}}}{r} \cos \theta, \\ \dot{A}_{e\theta} &= -\dot{A}_e \sin \theta = -\frac{\mu_0 \dot{I} l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta\vec{r}}}{r} \sin \theta, \\ \dot{A}_{e\varphi} &= 0. \end{aligned}$$

Азимутальна складова $\dot{A}_{e\varphi} = 0$ тому, що в кожній точці простору вектор \dot{A}_e орієнтований вздовж полярної осі \vec{r} сферичної системи координат.

Таким чином, елементарний електричний випромінювач представляє собою просту антену, що збуджує в навколишньому просторі електромагнітні коливання.

Вивчимо тепер закони зміни просторового розподілу напруженостей електричного і магнітного полів, які збуджуються таким випромінювачем.

Використаємо формулу $\dot{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \dot{A}_e$, яка пов'язує магнітний вектор поля з електричним потенціалом. Тому доцільно обчислити ротор у сферичній системі координат, використовуючи проекції \dot{A}_{er} , $\dot{A}_{e\theta}$, $\dot{A}_{e\varphi}$. Так як $\dot{A}_{e\varphi} = 0$, то $\partial/\partial\varphi = 0$. Тоді проекції для напруженості магнітного поля будуть рівні

$$\begin{aligned}\dot{H}_r &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \dot{A}_{e\varphi} - \frac{\partial \dot{A}_{e\theta}}{\partial \varphi} \right) \right] = 0, \\ \dot{H}_\theta &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \dot{A}_{er}}{\partial \varphi} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \dot{A}_{e\varphi} \right) \right] = 0, \\ \dot{H}_\varphi &= \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} r \dot{A}_{e\theta} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{A}_{er}}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{\mu_0} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \dot{A}_{e\theta} = \frac{\dot{I} l}{4 \pi r^2} 1 + j \beta r \sin \theta e^{-j \beta r}.\end{aligned}$$

Як правило, на практиці цікавляться полями на відстані r від випромінюючого джерела, значно більшої довжини хвилі λ ($r \gg \lambda$). При цьому безрозмірний параметр $\beta r \gg 1$ і точка спостереження знаходиться у так званій далекій зоні випромінювача. Тому азимутальну складову \dot{H}_φ можна наближено записати

$$\dot{H}_\varphi = \frac{j \dot{I} l \beta}{4 \pi} \sin \theta \frac{e^{-j \beta r}}{r}. \quad (6.25)$$

Електричний вектор поля, яке збуджується випромінювачем, можна знайти, використовуючи перше рівняння Максвелла – $\dot{E} = \frac{1}{j \omega \varepsilon_0} \text{rot } \dot{H}$, у праву частину якого потрібно підставити вже знайдену проекцію магнітного поля \dot{H}_φ . Тоді проекції електричного вектора у далекій зоні будуть рівні:

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= \frac{1}{j \omega \varepsilon_0} \left[\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \dot{H}_\varphi \right] = \frac{\dot{I} l \beta}{2 \pi \omega \varepsilon_0 r^2} \cos \theta e^{-j \beta r}, \\ \dot{E}_\theta &= -\frac{1}{j \omega \varepsilon_0 r} \frac{\partial}{\partial r} r \dot{H}_\varphi = \frac{j \dot{I} l \beta^2}{4 \pi \omega \varepsilon_0} \sin \theta \frac{e^{-j \beta r}}{r}, \\ \dot{E}_\varphi &= 0.\end{aligned}$$

Так як модуль проекції \dot{E}_r зменшується із збільшенням радіусу пропорційно множнику $1/r^2$, а в той же час проекція \dot{E}_θ спадає за законом

$1/r$, тобто повільніше, тому в далекій зоні проекцією \dot{E}_r можна знехтувати і єдиною відмінною від нуля буде лише проекція

$$\dot{E}_\theta = \frac{j\dot{I}l\beta^2}{4\pi\omega\epsilon_0} \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r} = \frac{j\dot{I}l\beta}{4\pi} Z_0 \sin\theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \quad (6.25.a)$$

де $Z_0 = 120\pi = 377 \text{ Ом}$ – характеристичний (хвильовий) опір вакууму.

Розглядаючи формули (6.25) і (6.25.a) для визначення проекцій векторів поля для елементарного електричного випромінювача, можна зробити наступні висновки:

- електромагнітне поле, яке збуджується у просторі елементарним електричним випромінювачем, представляє собою сферичну хвилю, яка виражається функцією Гріна;

- у кожній точці простору відношення комплексних амплітуд $\dot{E}_\theta / \dot{H}_\varphi = Z_0$, що є характерним для однорідної плоскої хвилі у необмеженому вільному просторі;

- сферична хвиля, яка при цьому збуджується, є неоднорідною, оскільки амплітуди полів залежать від полярного кута θ ;

- вектор Пойтінга у далекій зоні направлений вздовж одиничного вектора \vec{i}_r , тобто хвиля переносить потужність лише в радіальному напрямі.

На рис. 6.11 подана структура миттєвого розподілу силових ліній електричного вектора елементарного випромінювача, яка була вказана ще Герцом.

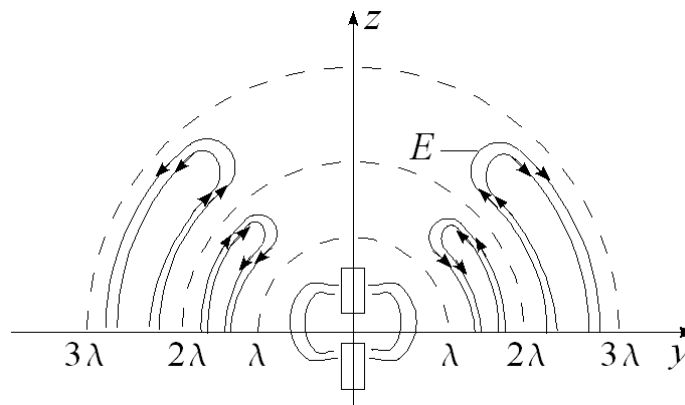


Рис. 6.11. Структура силових ліній вектора напруженості електричного поля поблизу елементарного випромінювача

6.2.3. Діаграма направленості, опір випромінювання елементарного випромінювача.

У теорії антен дуже важливу роль відіграє функція, яка описує залежність комплексних амплітуд полів, які збуджуються у просторі деякою випромінюючою системою, від кутів спостереження θ та φ . Таку функцію називають діаграмою направленості антени.

У випадку нашого електричного випромінювача (вібратора) кутова залежність амплітуди випромінюючого поля має вид $\sin\theta$ (від азимутального кута φ амплітуда поля не залежить). Початкові фази проекцій векторів поля, як це видно із формул проекцій, взагалі не пов'язані з кутовими координатами, тобто хвильові фронти (поверхні рівних фаз) утворюють сімейство концентрованих сфер. Максимум випромінювання спостерігається при куті $\theta = \pi/2$ ($\sin \pi/2 = 1$), тобто в екваторіальній площині сферичної системи координат; вздовж осі вібратора при $\theta = 0$ або $\theta = \pi$ випромінювання відсутнє.

На практиці, зазвичай, використовують нормовані діаграми направленості. При цьому по осі ординат відкладають модуль напруженості поля при заданому куті спостереження, віднесений до максимального значення напруженості поля. Нормована діаграма направленості елементарного електричного випромінювача (рис. 6.12, а) представляє собою синусоїдальну функцію, побудовану на відрізку значень аргумента θ від 0 до π .

Для наочності нормовану діаграму направленості часто подають у полярній системі координат (рис. 6.12, б). Принцип побудови такої діаграми полягає в тому, що на кожному промені, проведеному з початку координат від куту спостереження θ , відкладають нормоване значення модуля напруженості поля; масштаб рисунку може бути будь-яким. Неважко переконатися, що геометричним місцем точок діаграми направленості елементарного електричного випромінювача буде коло, оскільки $OA = OB \sin \theta$.

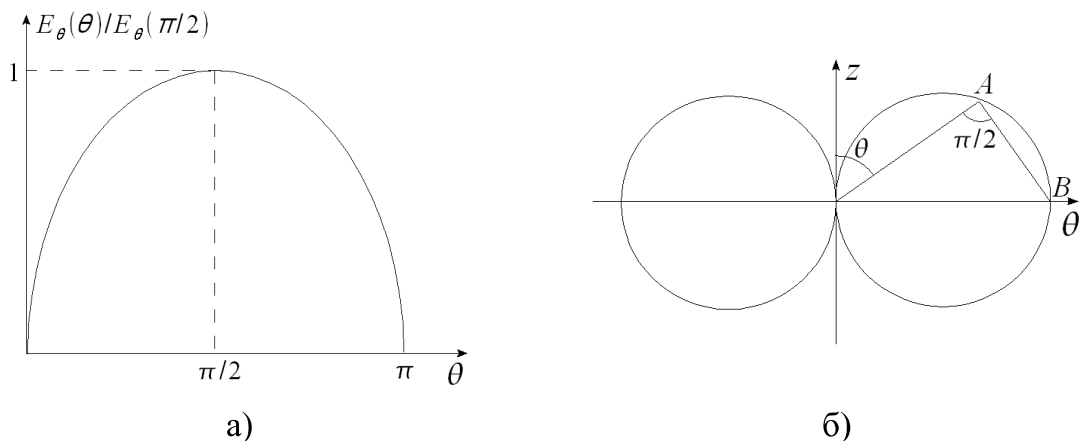


Рис. 6.12. Нормована (а) та полярна (б) діаграми направленості елементарного електричного випромінювача

Незважаючи на те, що фактичною областю зміни кута спостереження є відрізок $0, \pi$, діаграму направленості часто зображають в обох півплощинах, підкреслюючи цим, що вібратор рівномірно (ізотропно) випромінює за всіма кутами θ .

Обчислимо тепер потужність, яка випромінюється елементарним вібратором в середньому за один період коливань. Для цього уявно оточимо випромінювач замкненою поверхнею S довільної форми. Значення випромінюваної потужності P_Σ знайдемо, проінтегрувавши середнє значення вектора Пойтінга $\vec{\Pi}_{сер}$ по поверхні S : $P_\Sigma = \int_S \vec{\Pi}_{сер} d\vec{S}$. Якщо поверхню S вибрати у вигляді сфери радіусом r так, що $\beta r \ll 1$ і точки сфери розміщувалися у далекій зоні випромінювання, знаходимо радіальну проекцію середнього вектора Пойтінга у далекій зоні, яка при синфазності величин \dot{E}_θ і \dot{H}_ϕ є чисто дійсною величиною:

$$\vec{\Pi}_{сер r} = \frac{1}{2} \dot{E}_\theta \dot{H}_\phi^* = \frac{\dot{I}_m^2 l^2 \beta^2 Z_0}{32 \pi^2 r^2} \sin^2 \theta.$$

При інтегруванні по поверхні сфери радіусом r врахуємо, що диференціал площі $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$. Тому отримаємо:

$$P_\Sigma = \frac{\dot{I}_m^2 l^2 \beta^2 Z_0}{32 \pi^2} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta.$$

Враховуючи те, що $\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{4}{3}$, то $P_\Sigma = \frac{\dot{I}_m^2 l^2 \beta^2 Z_0}{12 \pi^2}$.

Згідно даної формули, потужність випромінювання пропорційна квадрату амплітуди струму, який протікає по вібратору. У цьому є певна аналогія між виразом для P_Σ і формулою із теорії кіл, яка виражає потужність змінного струму в деякому резистивному двополюснику: $P_\Sigma = I_m^2 R_\Sigma / 2$.

Отже,

$$R_\Sigma = \frac{1}{6\pi} Z_0 l \beta^2 = 20 l \beta^2 = 80 \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda} \right) \text{ Ом}, \quad (6.26)$$

бо $Z_0 = 120 \pi$.

Ми отримали вираз для опору випромінювання елементарного електричного випромінювача. Дана величина характеризує випромінюючу здатність антени.

Максимальне значення модуля вектора Пойтінга має місце при $\theta = \pi/2$ і складає

$$\Pi_{сер \max} = \frac{\dot{I}_m^2 l^2 \beta^2 Z_0}{32 \pi^2 r^2}.$$

Якщо потужність випромінюється за всіма напрямками ізотропно, то густина потоку потужності на відстані r від джерела буде рівна

$$\Pi_{сер \text{ рівн}} = \frac{P_\Sigma}{4\pi r^2} = \frac{\dot{I}_m^2 l^2 \beta^2 Z_0}{48 \pi^2 r^2}.$$

Для характеристики антен вводять числову характеристику $D = \frac{\Pi_{\text{сер max}}}{\Pi_{\text{сер рівн}}}$,

яку називають коефіцієнтом направленої дії (КНД). У нашому випадку $D = 1,5$, що вказує на те, що елементарний вібратор погано концентрує випромінювання у просторі.

6.2.4. Елементарний випромінювач в режимі приймання. Елементарний щілинний і рамковий випромінювачі.

Будь-яка антена може з однаковим успіхом працювати як на передавання, так і на приймання коливань (сигналів). Вивчимо для цього закономірності приймальних антен на прикладі електричного випромінювача (вібратора) довжиною l , який опромінюється плоскою електромагнітною хвилею, в якій вектор \vec{E} паралельний осі випромінювача.

Якщо затискачі антени розімкнені, то під дією поля на них виникає змінна комплексна напруга $\dot{U} = \dot{E}l$ або наведена е.р.с. Для того щоб взяти певну потужність з вібратора, його необхідно навантажити на деякий комплексний опір Z_n . Зазвичай таким двополюсником навантаження є вхідний опір приймача. При цьому в замкненому колі буде виникати наведений струм і антена буде перевипромінювати (розсіювати) падаюче поле. Ця обставина є принциповою – будь-яка антена розсіює частину потужності у навколишнє середовище. На рис. 6.13 зображена еквівалентна схема елементарного випромінювача, який працює в режимі приймання. Через наявність ефекту перевипромінювання внутрішній опір еквівалентного генератора містить дійсну (активну) частину, чисельно рівну опору випромінювання R_Σ . Крім того, дана антена подібно до конденсатора, який дає реактивний опір, врахування якого на еквівалентній схемі подане елементом C_a .

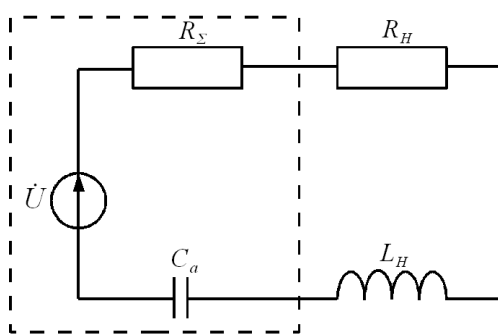


Рис. 6.13. Еквівалентна схема елементарного випромінювача в режимі приймання

Потужність, яка передається з антени у навантаження, буде максимальною в режимі узгодження, при якому абсолютне значення реактивних опорів елементів C_a і L_n на робочій частоті є однаковими. Це означає, як нам відомо з основ радіоелектроніки, що коло антени повинно бути налаштоване в резонанс, що означає $R_n = R_\Sigma$. При цьому струм в антені буде мати комплексну амплітуду $\dot{I} = \dot{U} / 2R_\Sigma$, а потужність, виділена в навантаженні, набуде максимального значення:

$$P_{n \text{ max}} = \frac{1}{2} I_m^2 R_\Sigma = \frac{U_m^2}{8 R_\Sigma}.$$

Якщо прийняти, що $\dot{U} = \dot{E}l$, а $R_{\Sigma} = 20 \beta l^2$, то

$$P_{n \max} = \frac{E_m^2 \lambda^2}{640 \pi^2}$$

і не залежить від довжини антени l .

Якщо тепер врахувати, що середнє значення вектора Пойтінга падаючої хвилі в точці розміщення антени $\Pi_{\text{сер}} = E_m^2 / 240 \pi$, то максимальне значення потужності в навантаженні $P_{n \max} = \Pi_{\text{сер}} A_{\text{еф}}$, де $A_{\text{еф}} = 3 \lambda^2 / 8 \pi = 0,119 \lambda^2$ і представляє собою так звану ефективну площу елементарного випромінювача в режимі приймання.

Таким чином, елементарний електричний випромінювач здатний виділити з падаючої плоскої електромагнітної хвилі і передати в узгоджене навантаження всю потужність, яка переноситься в межах хвильового фронту площею $0,119 \lambda^2$.

Для надійного і високоякісного приймання необхідно, щоб потужність сигналу в навантаженні антени P_n у 5-10 разів перевищувала потужність власних шумів приймача $P_{\text{ш}}$, яка визначається за формулою $P_{\text{ш}} = RT_{\text{ш}} \Delta f$.

Розглянемо тепер інші випромінювачі: щілинний і рамковий.

Дана випромінююча система представляє собою нескінчену ідеально провідну поверхню (площину), в якій прорізана щілина довжиною l і шириною Δ (рис. 6.14). Якщо впоперек щілини створити змінне електричне поле, то, як відомо, така щілина стає елементом, по якому пробігає уявний магнітний струм у напрямі, паралельному кромкам щілини. У відповідності з принципом дуальності щілинний випромінювач є дуальним по відношенню до розглянутого раніше елементарного електричного випромінювача і тому може називатися також магнітним випромінювачем.

Збудження щілини здійснюється різними способами. Можна, наприклад, до довгих кромek щілини безпосередньо підключити джерело електромагнітної високочастотної напруги (рис. 6.14, а). При цьому виникає двостороннє збудження щілини, так як енергія електромагнітного поля випромінюється в обидва півпростори. Але частіше всього використовують одностороннє збудження щілинного випромінювача, наприклад, за допомогою прямокутного хвилеводу з хвилею типу H_{10} (рис. 6.14, б). Тут змінні в часі електричні заряди на кромках щілини наводяться за рахунок протікання поверхневих струмів по тій області металевої поверхні, яка закорочує хвилевід.

Для того щоб дана щілина могла вважатися елементарним випромінювачем, необхідно вимагати виконання нерівності $l \ll \lambda$; при цьому щілина є дуже вузькою, тобто $\Delta \ll l$. Тут розглянемо двосторонній випромінювач. При цьому немає необхідності розв'язувати нову електродинамічну задачу, так як достатньо застосувати розглянутий нами принцип перестановочної дуальності до раніше визначених проекцій

векторів поля елементарного електричного випромінювача. Запишемо формули, які будуть описувати поля обох випромінювачів у дальній зоні:

– електричний випромінювач (вібратор):

$$\dot{H}_\varphi = \frac{j\dot{I}_e l \beta}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \quad \dot{E}_\theta = \frac{j\dot{I}_e l \beta}{4\pi} Z_0 \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r};$$

– щілинний випромінювач:

$$\dot{E}_\varphi = -\frac{j\dot{I}_m l \beta}{4\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \quad \dot{H}_\theta = \frac{j\dot{I}_m l \beta}{4\pi Z_0} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}.$$

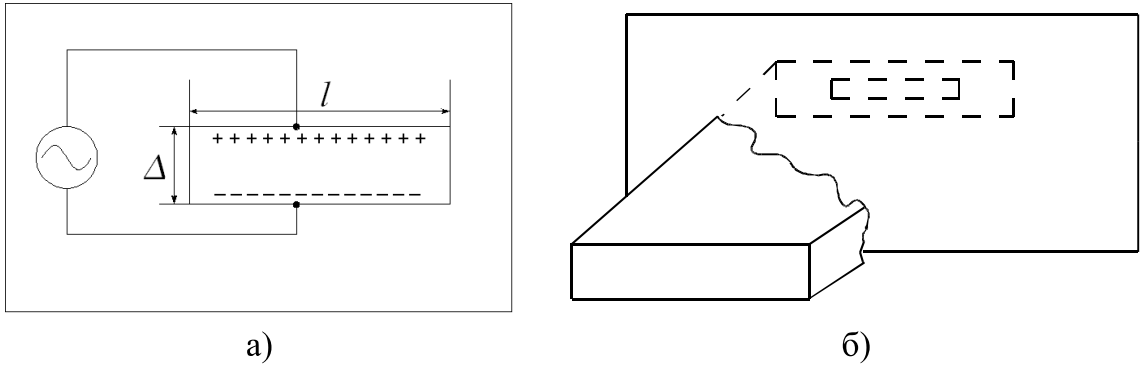


Рис. 6.14. Елементарний щілинний випромінювач з двостороннім (а) та одностороннім (б) випромінюванням

При переході від вібратора до щілинного випромінювача виконана заміна $Z_0 \leftrightarrow 1/Z_0$, $\dot{H}_\varphi \leftrightarrow \dot{E}_\varphi$, $\dot{E}_\theta \leftrightarrow \dot{E}_\theta$. Замість стороннього магнітного струму \dot{I}_m більш зручніше використовувати комплексну амплітуду напруги \dot{U}_m у щілині, яка визначається як

$$\dot{H}_\tau = \dot{I}_e / 2\Delta, \quad \dot{E}_\tau = \dot{U}_m / \Delta.$$

Застосувавши в силу дії принципу перестановчої дуальності, що електричний і магнітний вектори взаємозамінні, останню формулу для \dot{E}_τ можна записати $\dot{E}_\tau = \dot{I}_m / 2\Delta$, звідки $\dot{I}_m = 2\dot{U}_m$.

Таким чином, комплексна амплітуда стороннього магнітного струму, який протікає по щілинному випромінювачу, буде чисельно рівна подвоєній комплексній амплітуді напруги у щілині. Тоді остаточні формули для розрахунку проєкцій векторів електромагнітного поля у далекій зоні щілинного випромінювача запишуться:

$$\begin{aligned} \dot{E}_\varphi &= -\frac{j\dot{U}_m l \beta}{2\pi} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \\ \dot{H}_\theta &= \frac{j\dot{U}_m l \beta}{2\pi Z_0} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Визначимо тепер опір щілинного випромінювача. Для цього, використовуючи формули (6.27), визначимо середній за період коливань

вектор Пойтінга, який має єдину складову, направлену вздовж орта радіального напрямку:

$$P_{\text{сер } r} = -\frac{1}{2} \dot{E}_\varphi^* H_\theta = \frac{\dot{U}_{m.m}^2 l \beta^2}{8\pi^2 Z_0} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{\dot{U}_{m.m}^2 l \beta^2}{3\pi Z_0}.$$

Оскільки потужність випромінювання пропорційна квадрату напруги у щілині, можна записати

$$P_\Sigma = \frac{\dot{U}_{m.m}^2}{2R_{\Sigma_{\text{щ}}}}.$$

Порівнюючи ці два вирази, визначимо опір щілинного вібратора:

$$R_{\Sigma_{\text{щ}}} = \frac{3\pi Z_0}{2 l \beta^2} = 45 \left(\frac{\lambda}{l} \right)^2. \quad (6.28)$$

Тобто, чим менша довжина хвилі у порівнянні з робочою довжиною хвилі, тим більший опір випромінювання і тим менша випромінювана потужність.

Розглянемо тепер особливості рамкового випромінювача. Так прийнято називати круговий виток із провідника радіусом $a \ll \lambda$, по якому протікає змінний електричний струм з комплексною амплітудою \dot{I}_e , однаковою у всіх точках провідної рамки.

Зафіксуємо, що рамка розміщується в екваторіальній площині сферичної системи координат; початок відліку співпадає з центром випромінюючого елемента (рис. 6.15). Розглянемо два елемента струму величиною $\dot{I}_e a d\varphi_0$, які розміщені симетрично по відношенню до осі x у точках з координатами $\pm\varphi_0$. Кожний такий елемент веде себе подібно елементарному електричному випромінювачу, і на основі принципу суперпозиції може бути поданий у вигляді двох складових по осям x і y . При цьому, як можна зауважити, x -ові складові взаємно компенсуються, а y -ові складові подвоюються. Значить кожна пара таких елементів струму створює в просторі електричний векторний потенціал з єдиною проекцією вздовж азимутальної координати φ .

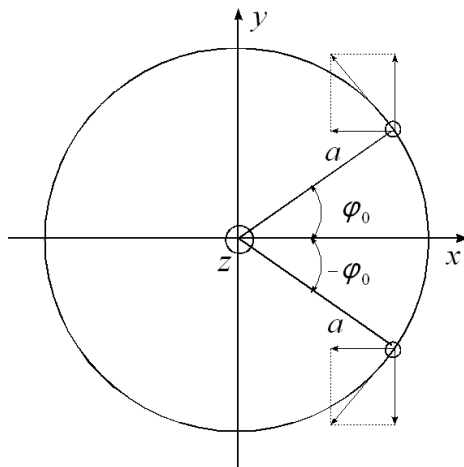


Рис. 6.15. Елементарний рамковий випромінювач

Будемо вважати, що точка спостереження P лежить у площині xOy і має полярну координату θ та розміщена в дальній зоні, тобто на відстані не лише декількох довжин хвиль від випромінюючої рамки. Як бачимо з рис. 6.15, геометрична різниця ходу до точки спостереження від центра рамки та з віддалених елементів рівна $a \sin \theta \cos \varphi_0$. Цю величину необхідно врахувати в швидкоосцилюючому експоненціальному множнику, який входить у

формулу векторного потенціалу $\dot{A}_e r = \frac{\mu_0 \dot{I} l}{4\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \vec{i}_z$. У той же час довжина радіус-вектора, що фігурує в цій формулі є однаковою і рівною r для всіх точок випромінюючої рамки. Тому можна записати, що векторний потенціал в даному випадку визначається як

$$\dot{A}_{e\varphi} = \frac{\mu_0 a \dot{I}_e}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_0^\pi \cos \varphi_0 e^{j\beta a \sin \theta \cos \varphi_0} d\varphi_0.$$

Так як розмір рамки є набагато меншим довжини хвилі, тобто $\beta a \ll 1$, то експоненціальну функцію розкладаємо в ряд Тейлора:

$$e^{j\beta a \sin \theta \cos \varphi_0} \cong 1 + j\beta a \sin \theta \cos \varphi_0.$$

Тоді

$$\dot{A}_{e\varphi} = \frac{\mu_0 a \dot{I}_e}{2\pi} \frac{e^{-j\beta r}}{r} \int_0^\pi (1 + j\beta a \sin \theta \cos \varphi_0) \cos \varphi_0 d\varphi_0 \cong \frac{j\mu_0 \dot{I}_e S_p}{2\lambda} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r},$$

де $S_p = \pi a^2$ – площа рамки. Із останньої рівності у відповідності з формулою

$\dot{H} = \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \dot{A}_e$ знаходимо проекції вектора напруженості магнітного поля, яке збуджується в просторі елементарним випромінювачем:

$$\begin{aligned} \dot{H}_r &= \frac{1}{\mu_0 r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \dot{A}_{e\varphi} = \frac{j \dot{I}_e S_p}{\lambda} \cos \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}, \\ \dot{H}_\theta &= -\frac{1}{\mu_0 r} \frac{\partial}{\partial r} r \dot{A}_{e\varphi} = -\frac{I_e S_p \beta}{2\lambda} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Слід звернути увагу на те, що амплітуда проекції \dot{H}_r зменшується із збільшенням радіуса рамки за законом $1/r^2$, тобто швидше, ніж амплітуда проекції \dot{H}_θ . Тому можна обґрунтовано вважати, що в далекій зоні магнітний вектор має лише одну проекцію \dot{H}_θ .

Електромагнітне поле, що створюється рамковим випромінювачем, представляє собою в далекій зоні сферичну хвилю, яка переносить потужність в радіальному напрямі і на основі формули (6.29) має єдину, відмінну від нуля, проекцію електричного вектора:

$$\dot{H}_\varphi = -Z_0 \dot{H}_\theta = \frac{Z_0 I_e S_p \beta}{2\lambda} \sin \theta \frac{e^{-j\beta r}}{r}. \quad (6.29.a)$$

Порівнюючи ці формули із формулами для щілинного випромінювача, можемо сказати, що рамка, яка є малою у порівнянні з довжиною хвилі, може розглядатися як елементарний магнітний випромінювач, в якого магнітний потік протікає перпендикулярно площині рамки. Діаграма направленості рамкового випромінювача описується функцією $\sin \theta$ і тому такий елемент не випромінює і не приймає хвиль в осьовому напрямі, а опір випромінювання визначається формулою

$$R_{\Sigma} = \frac{2P_{\Sigma}}{I_{pm}^2} = \frac{320\pi^4 S_p^2}{\lambda^4}. \quad (6.30)$$

Рамкові антени часто використовуються в радіоприймальній техніці, наприклад, в радіокомпасах для пеленгації кута проходження хвилі. У портативних приймачах повсюдно використовують багатовиткові рамкові антени, які намотані на феритові стержні і мають дуже малі габарити.

Контрольні запитання

1. Дайте характеристику прямокутного об'ємного резонатора. Приведіть структуру електромагнітного поля в прямокутному резонаторі. Наведіть формулу дисперсійного співвідношення в прямокутному резонаторі.
2. Дайте характеристику круглого об'ємного резонатора. Приведіть структуру електромагнітного поля в круглому резонаторі.
3. Вкажіть способи збудження і включення об'ємних резонаторів.
4. Дайте характеристику тороїдального об'ємного резонатора.
5. Запишіть неоднорідні рівняння Максвелла. Дайте визначення векторного і скалярного потенціалу електромагнітного поля.
6. Виведіть з першого рівняння Максвелла неоднорідне рівняння Гельмгольца з використанням умови калібрування Лорентца.
7. Визначте функцію Гріна як розв'язок неоднорідного рівняння Гельмгольца.
8. Запишіть вирази для скалярного і векторного потенціалів через функцію Гріна.
9. Що представляє собою елементарний електричний випромінювач (вібратор)?

Рекомендована література

1. Григорьев А.Д., Янкевич В.Б. Резонаторы и резонаторные замедляющие системы СВЧ. – М.: Радио и связь, 1984. – 248 с.
2. Диэлектрические резонаторы / Под ред. М.Е. Ильченко. – М.: Радио и связь, 1989. – 328 с.
3. Вайнштейн Л.А. Открытые резонаторы и открытые волноводы. – М.: Советское радио, 1966. – 476 с.
4. Радиотехнические системы / Под ред. Ю.М. Казаринова. – М.: Высшая школа, 1990. – 496 с.
5. Горелик Г.С. Колебания о волны. – М.: Гостехиздат, 1950. – 551 с.
6. Веселов Г.И. Микроэлектронные устройства СВЧ. – М.: Высшая школа, 1988. – 280 с.
7. Голант М.Б., Маклаков А.А., Шур М.Б. Изготовление резонаторов и замедляющих систем электронных приборов / Под ред. Н.Д. Девяткова. – М.: Советское радио, 1969. – 408 с.
8. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ. – М.: Высшая школа, 1972. – Т. 1. – 389 с.; Т. 2. – 375 с.

Розділ 7. Пасивні мікроелектронні пристрої НВЧ. Багатополюсники та їх параметри

До пасивних елементів пристроїв НВЧ відносять: лінії передачі, індуктивні, ємнісні, резистивні неоднорідності, резонатори і фільтри. Розглянемо фізико-технологічні особливості їх формування та розрахунку.

7.1. Лінії передачі інтегральних схем НВЧ. Індуктивні елементи ІС НВЧ

Частіше всього в ІС НВЧ використовують мікросмугові (МСЛ), щілинні (ЩЛ) і компланарні (КЛ) лінії передачі (рис. 7.1).

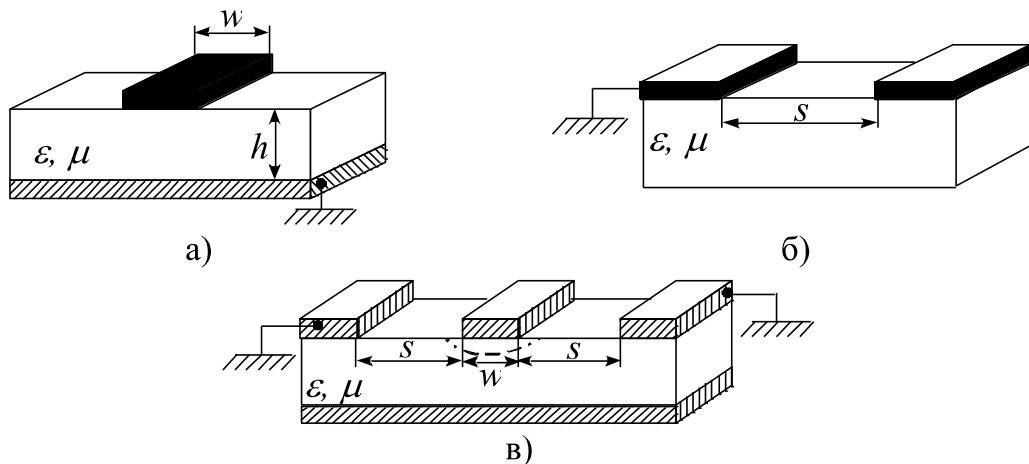


Рис. 7.1. Лінії передачі інтегральних схем НВЧ: МСЛ (а), ЩЛ (б) і КЛ (в).

Як правило, при аналізі МСЛ використовують наближення T -хвилі (ТЕМ), а при аналізі ЩЛ і КЛ – H -хвилі, розглянуті нами в попередніх розділах. Крім того, для ліній передачі використовується поняття ефективної діелектричної проникності ϵ_{ef} , бо діелектрик заповнює лінію не повністю.

При цьому хвильовий опір, фазову швидкість і фазову постійну визначають за формулами:

$$Z'_x = \frac{Z_x}{\sqrt{\epsilon_{ef}}}, \quad v_\phi = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_{ef}}}, \quad \beta = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_{ef}}}{c}. \quad (7.1)$$

Крім того, в металі і діелектрику необхідно враховувати втрати на випромінювання, так як розглянуті нами лінії представляють собою відкриті хвилеводи: $\alpha = \alpha_m + \alpha_o + \alpha_i$. На практиці, якщо $\epsilon \geq 10$, α_i можна знехтувати. Якщо підкладка напівпровідникова, що має місце в монолітних інтегральних схемах (МІС), то втрати у підкладці стають значними.

Проводячи порівняльний аналіз ліній, необхідно відзначити, що ЩЛ і КЛ зручні для підключення активних елементів і утворення невзаємних пристроїв, і, на відміну від МСЛ, мають великий хвильовий опір Z_x . У ЩЛ і

КЛ дисперсійні властивості виражені сильніше, чим більша ε підкладки. У МСЛ земляна шина знаходиться на тильній стороні ІС, що утруднює (технологічно) заземлення елементів і активних пристроїв. Проте відсутність у ЩЛ і КЛ на тильній стороні металізації значно погіршує відвід тепла (в потужних ІС переважаючим є використання МСЛ). У ЩЛ і КЛ пластина заземлення знаходиться на верхній поверхні ІС (рис. 7.1, б, в), що значно збільшує площу і погіршує теплопередачу на корпус.

До переваг смугових ліній необхідно віднести широку смугу, яка може займати інтервал частот $0 < \omega < \infty$ при малій масі і габаритах, а також можливість застосування друкованого монтажу, що дозволяє автоматизувати технологічний процес їх виготовлення.

Лінії передачі на напівпровідникових підкладках (*Si*, *GaAs*) технологічно вигідні для виготовлення МІС. Незважаючи на те, що затухання і дисперсія в таких лініях більші, але вони мають більш широкі функціональні можливості, наприклад, такі як трансформація хвильового опору або використання в ролі атенюатора з електронним регулюванням.

МСЛ передачі на напівпровідниковій підкладці і сигнальна металева пластина утворюють з підкладкою бар'єр Шотткі, що приводить до виникнення області збіднення, що показано на рис. 7.1, в. При подачі на сигнальну шину від'ємного потенціалу можна змінювати розміри області просторового заряду. Це звичайно дозволяє реалізовувати елементи з електронним регулюванням.

Схемотехнічний аналіз ліній передачі ІС НВЧ полягає в оцінці коефіцієнтів α_m , α_d , α_i за параметрами ε_r , σ , μ , $tg\delta$, β та розрахунку погонних параметрів і постійної поширення хвилі γ . Потім розраховується хвильовий опір і $[A]$ -матриця лінії передачі:

$$[A] = \begin{bmatrix} -ch\gamma l & Z_x sh\gamma l \\ sh\gamma l / Z_x & ch\gamma l \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

Якщо підкладка діелектрична і можна прийняти наближення до “нульової” товщини металевої смужки, то параметри МСЛ можуть бути розраховані за формулами

– для $w/h < 1$

$$Z_x = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \ln \left(\frac{8h}{w} + \frac{w}{4h} \right),$$

$$\text{де } \varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left[\left(1 + \frac{12h}{w} \right)^{-1/2} + 0,04 \left(1 - \frac{w}{h} \right)^2 \right]; \quad (7.3)$$

– для $w/h \geq 1$

$$Z_x = \frac{120\pi}{\sqrt{\varepsilon_{ef}}} \frac{1}{w/h + 1,4 + 0,7 \ln(w/h + 1,4)},$$

$$\text{де } \varepsilon_{ef} = \frac{\varepsilon_r + 1}{2} + \frac{\varepsilon_r - 1}{2} \left(1 + \frac{12h}{w} \right)^{-1/2}.$$

Розглянемо тепер індуктивні елементи ІС НВЧ. Найпростіший індуктивний елемент може бути представлений як короткозамкнений відрізок лінії передачі. Вхідний опір такого відрізка визначається уже відомим нам співвідношенням

$$Z_{\text{вх}} = Z_x \gamma l = (R_0 + j\omega L_0)l \quad (7.4)$$

і має або резистивний, або індуктивний характер в залежності від співвідношення його складових, причому друга складова переважає на НВЧ.

На відміну від відрізків ліній передачі роль підкладки для зосереджених елементів полягає у фізичній реалізації та ізоляції індуктивного елемента. Найбільш типові послідовні індуктивні елементи можуть бути представлені наступними конструкціями.

1. *Балочний (послідовний) індуктивний елемент* (рис. 7.2), коли $Z_1 \ll Z_x$, $l < \lambda_x/8$, тоді $L \cong Z_1 l \sqrt{\varepsilon_{ef}}/c$, $Z_1 = (1+j)\sqrt{\pi f \mu/\sigma}$. Звуження сигнальної смужки МСЛ передачі проводить до росту індуктивної складової комплексного опору. Такий елемент легко реалізується методом літографії. Електрофізичні параметри металевої смужки визначаються типом плівки та технологією її формування. Для зміни ε_{ef} , μ , σ такі плівки можна легувати багатозарядною імплантацією.

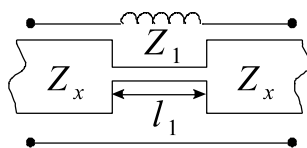


Рис. 7.2. Балочний індуктивний елемент

2. *Кільцевий індуктивний елемент* (рис. 7.3). Значення індуктивності у приведених нижче конструкціях визначається геометричними розмірами, а також параметрами металізації та підкладки. При зменшенні довжини кола індуктивність збільшується, а із збільшенням ширини кільця і товщини шару металізації – зменшується.

3. *Меандровий та спіральний індуктивні елементи* (рис. 7.4). Збільшення розмірів a і b , а також кількості секцій приводить до збільшення індуктивності. Чим ширша смужка металізації меандру, тим менша індуктивність.

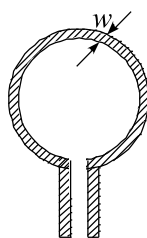


Рис. 7.3. Кільцевий індуктивний елемент

У спіральному круглому індуктивному елементі значення індуктивності визначається радіусами внутрішньої і зовнішньої спіралі, а також кількістю витків.

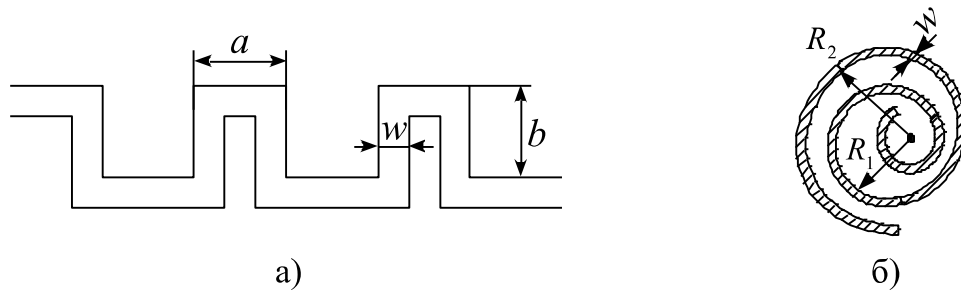


Рис.7.4. Меандровий (а) та спіральний (б) індуктивні елементи

4. *Спіральний квадратний індуктивний елемент* (рис. 7.5). Зменшення зазору між витками спіралі дозволяє створити більш компактну структуру в складі ІС і збільшити кількість витків на тій же площі, проте це призводить до паразитної міжвиткової ємності.

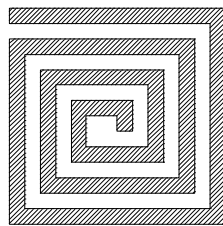


Рис. 7.5. Спіральний квадратний індуктивний елемент

Слід зауважити, що всі геометричні розміри зосереджених індуктивних елементів повинні бути набагато меншими за λ_x .

Розглянуті нами конструкції індуктивних елементів для схмотехнічного аналізу ІС можуть бути представлені наступними схемними моделями:

а) балочні, кільцеві меандрові елементи – схемною моделлю, зображеною на рис. 7.6, а.

б) спіральний елемент – схемною моделлю, зображеною на рис. 7.6, б.

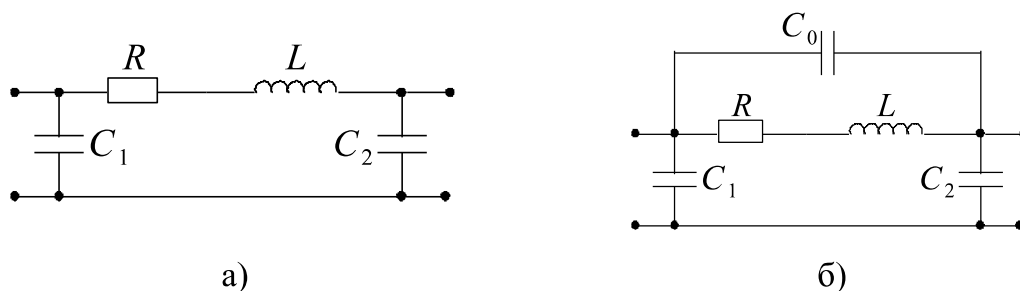


Рис.7.6. Схемні моделі індуктивностей для балочних, кільцевих і меандрових (а) та спіральних (б) індуктивних елементів

Тут паралельні ємності C_1 і C_2 пов'язані із контактами елементів з лініями передачі на вході і на виході; R – з опором металізації; C_0 – сумарною міжвитковою ємністю. Великі значення індуктивностей дозволяють отримувати спіральні елементи, проте вони мають суттєвий технологічний недолік, пов'язаний з підключенням до лінії внутрішнього контакту спіралі – треба виконувати так звані піднири або напиляти додатковий шар ізолятора.

Паралельний індуктивний елемент може бути реалізований у вигляді короткозамкненого шлейфа (рис. 7.7), при цьому його довжина не повинна перевищувати $\lambda_x/4$. Тоді матриця провідності паралельного короткозамкненого шлейфа (без втрат) запишеться:

$$[A] = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \frac{j \operatorname{tg} \beta l}{2} & 1 \end{vmatrix}.$$



Рис.7.7. Паралельний індуктивний елемент на базі короткозамкненого шлейфа

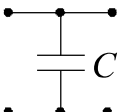
Неперевершеним індуктивним елементом для інтегральної електроніки НВЧ є гіратор, який виконується на основі активних елементів.

7.2. Ємнісні та резистивні елементи ІС НВЧ

Паралельний ємнісний елемент може бути реалізований у вигляді відрізка лінії. Оскільки вхідний опір розімкненої лінії передачі

$$Z_{\text{ex}} = \frac{Z_x \operatorname{ch} \gamma l}{\operatorname{sh} \gamma l} = Z_x \operatorname{cth} \gamma l,$$

а для короткої розімкненої лінії передачі, коли $\gamma l \ll 1$, то справедлива формула

$$Z_{\text{ex}} = \frac{Z_x}{\gamma l} = \frac{1}{l(G_0 + j\omega C_0)} = \frac{1}{l} \frac{G_0 - j\omega C_0}{G_0^2 + \omega^2 C_0^2}. \quad (7.5)$$


На НВЧ другий доданок суттєво перевищує омичний опір і вхідний опір представляє собою чисто ємнісний опір

$$X_c = \frac{\omega C_0}{l(G_0^2 + \omega^2 C_0^2)}.$$

Послідовні ємнісні елементи можуть бути представлені наступними конструкціями.

1. Розрив МСЛ передачі і його схемна модель (паразитний резистивний елемент пов'язаний з неідеальністю діелектрика підкладки) (рис. 7.8). Тут ємності C_1 і C_2 пов'язані з контактними схемними елементами з лінією передачі, а індуктивність L резистора описують відповідно реактивні та омичні властивості шарів.

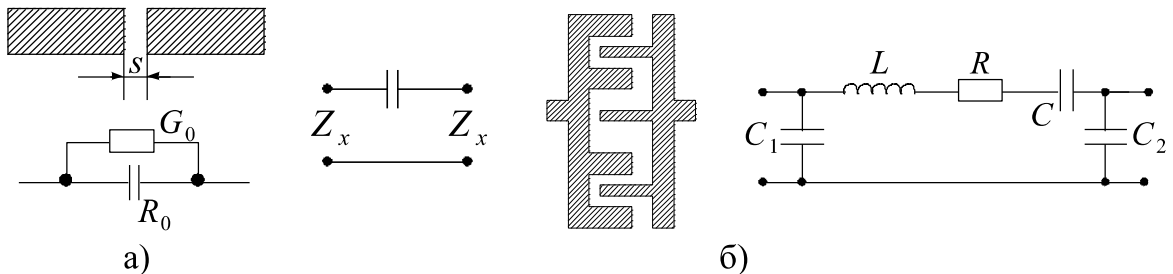


Рис. 7.8. Послідовний ємнісний елемент: а) у вигляді розриву лінії та його схемна модель; б) на зустрічних штирях та його схемна модель.

2. Паралельний ємнісний елемент також може бути сформований на зустрічних штирях, як показано на рис. 7.9.

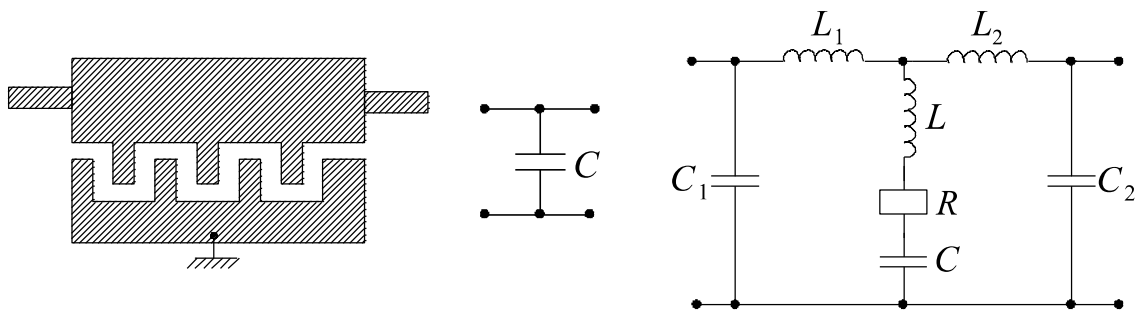


Рис. 7.9. Паралельний конденсатор на зустрічних штирях та його схемна модель

Паразитні індуктивності L_1 і L_2 пов'язані з контактами на вході і виході лінії, а L і R відповідно визначають індуктивність та опір зустрічних штирів.

3. Плоский (планарний) послідовний ємнісний елемент може бути поданий конструкцією на тонких шарах (рис. 7.10). Його схемна модель відповідає послідовному ємнісному елементу на зустрічних штирях.

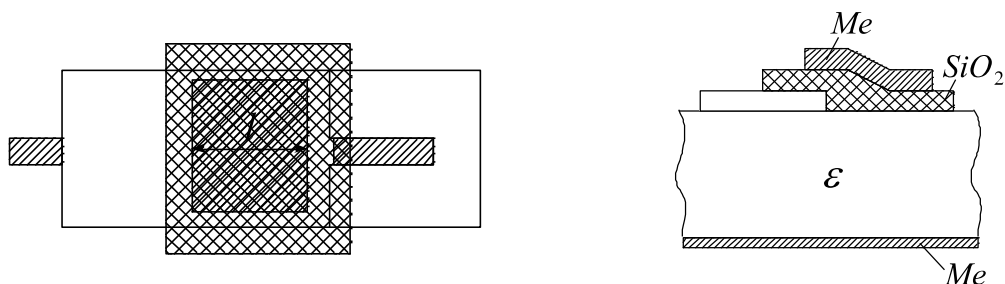


Рис.7.10. Плоский планарний конденсатор, сформований тонкоплівковою технологією

4. Велику перспективу для ємнісних елементів ІС мають варикапи, які можуть бути реалізовані на обернено зміщених діодах Шотткі, структура яких також може бути зустрічно-штирова.

До основних параметрів ємнісних елементів відносять: температурний коефіцієнт ємності (ТКЄ) та точність їх формування.

Плівкові резистори використовують в ролі навантаження, подільників, кіл керування та живлення. До основних параметрів резистивних елементів відносять: поверхневий опір, температурний коефіцієнт опору (ТКО), тепловий опір, максимально допустима розсіювана потужність. У ролі матеріалів для їх формування використовують метали, напівпровідники і кермети. Для виготовлення напівпровідникових резисторів використовують той же шар, що і для каналів ПТШ (так звані пінч-резистори). Проте такі резистори мають і суттєві недоліки: нелінійні ВАХ, додатний ТКО, велику термопольову нестабільність.

Опір плівкових резистивних елементів, крім електрофізичних параметрів, залежить від коефіцієнта форми $n = l/w$, як відношення його довжини до ширини. У ролі плівкових резисторів може бути використана наступна конструкція (рис. 7.11).

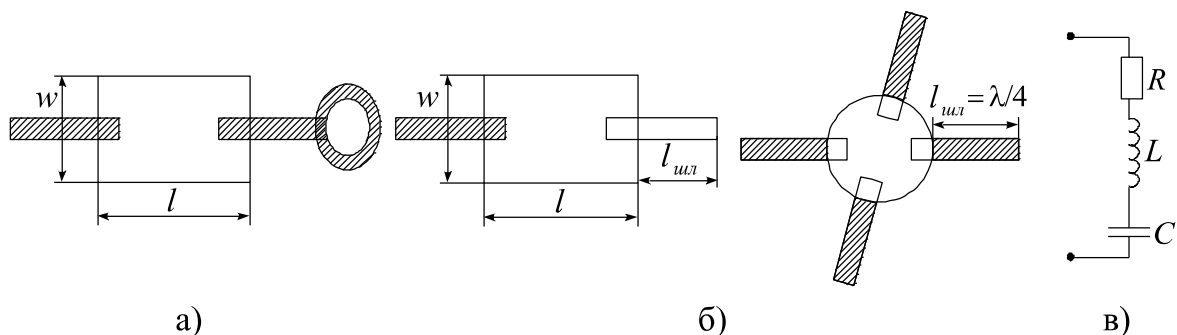


Рис. 7.11. Резистори з короткозамкненим (а) і розімкненим (б) шлейфами та схемна модель резистора із розімкненим шлейфом (в)

Такі структури використовуються в ролі узгоджених навантажень на одній (рис. 7.11, а) або декількох (рис. 7.11, б) частотах. При цьому довжина шлейфу, який поданий на рис. 7.11, складає $l_{\text{шл}} = \lambda_z/4$.

При великих рівнях потужності використовують розподілені резистори у вигляді меандрових чи спіральних структур, подібних до індуктивних елементів, проте, замість шару металізації використовують матеріали плівкових резисторів. Слід звернути увагу на те, що плівкові резистори і резистори у розподілених структурах формують з високою точністю та заданим значенням ТКО із використанням технології підгонки їх багатозарядною імплантацією.

У НВЧ техніці необхідно враховувати неоднорідності в ІС, до найбільш типових із яких можна віднести згини ліній передачі, стрибки хвильового опору, розімкнені лінії, замкнені лінії, T -подібні з'єднання, перетини ліній, зазори в лінії.

Прямокутний згин лінії може бут поданий у відповідних перерізах схемною моделлю, поданою на рис. 7.12. Тут паралельна ємність C зумовлена накопиченням електричного заряду, а індуктивність L – спотворенням магнітного поля у згині. Зменшити вплив неоднорідності можна, заокруглюючи згин лінії.

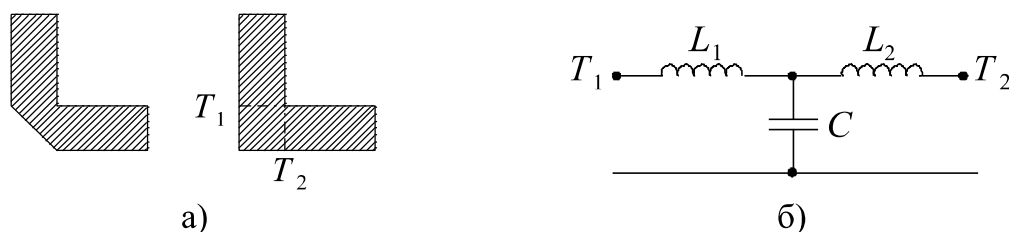


Рис. 7.12. Згин лінії (а) та його схемна модель (б)

Стрибок хвильового опору, наприклад, при з'єднанні двох ліній з різною шириною сигнальної смужки і його схемна модель подані на рис. 7.13, які представляють собою Т-подібний фільтр нижніх частот. Відповідно такий стрибок негативно впливатиме на передачу НВЧ-сигналів.

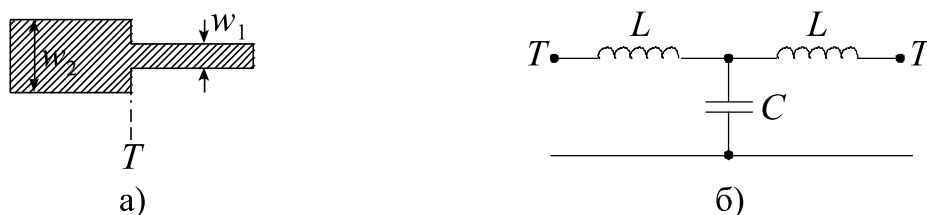


Рис. 7.13. Стрибок хвильового опору (а) та його схемна модель (б)

Розімкнені МСЛ і ЩЛ можуть бути представлені разом із схемною моделлю, як показано на рис. 7.14. Тут резистивний елемент R пов'язаний з неідеальністю діелектрика підкладки, а ємнісний C – з паралельною ємністю, утвореною сигнальним провідником і заземленою шиною.

Короткозамкнені МСЛ і ЩЛ разом із своєю схемною моделлю показані на рис. 7.15. такі неоднорідності приводять до спотворення сигналу при його передачі в ІС і їх відносять до паразитних ефектів топологічного формування.

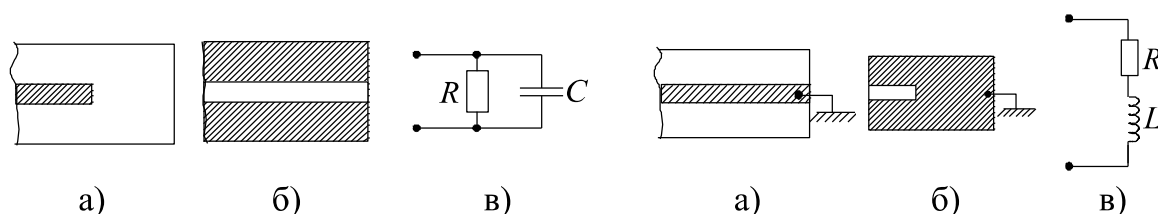


Рис. 7.14. Розімкнені МСЛ (а) і ЩЛ (б) лінії та їх схемна модель (в)

Рис. 7.15. Короткозамкнені МСЛ (а) і ЩЛ (б) лінії та їх схемна модель (в)

Дуже цікавим є приклади використання ємнісних та індуктивних елементів для формування паралельного чи послідовного коливального контурів (рис. 7.16). Для їх формування використовують так звані гребінкові ємнісні структури з кільцевими індуктивними елементами.

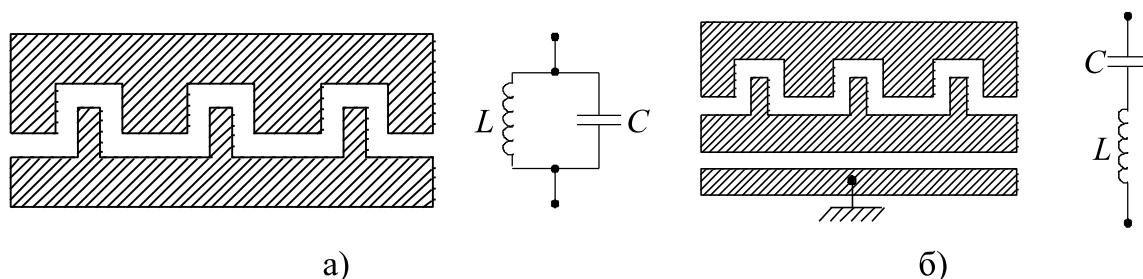


Рис. 7.16. Паралельний (а) і послідовний (б) коливальний контури та їх схемні моделі

7.3. Резонатори і фільтрові схеми НВЧ

В ІС НВЧ використовують інтегральні та об'ємні резонатори. Найбільш широко резонатори виконують у вигляді відрізків МСЛ довжиною $\lambda_x/4$, $\lambda_x/2$, λ_x (рис. 7.17).

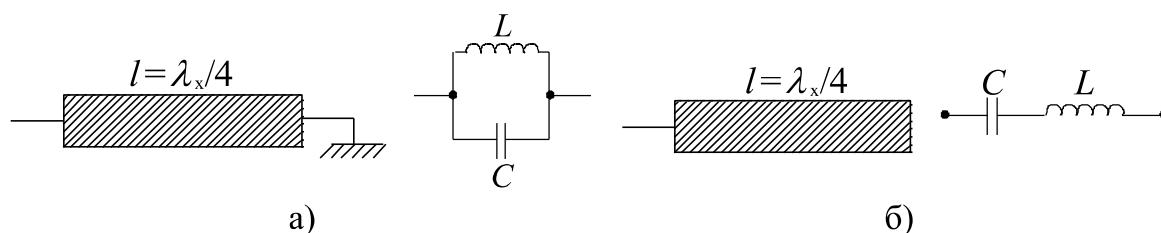


Рис. 7.17. Резонатор у вигляді чвертьхвильового короткозамкнутого (а) і розімкнутого (б) відрізків лінії та їх схемні моделі

Резонатор з короткозамкненим шлейфом має більш високу добротність і менше випромінювання у порівнянні із розімкненим. Технологічним недоліком короткозамкнених резонаторів є необхідність застосування спеціальних короткозамикачів.

У ролі резонатора може бути використано підключення до лінії послідовної або паралельної RC -ланки на зосереджених елементах (рис. 7.18).

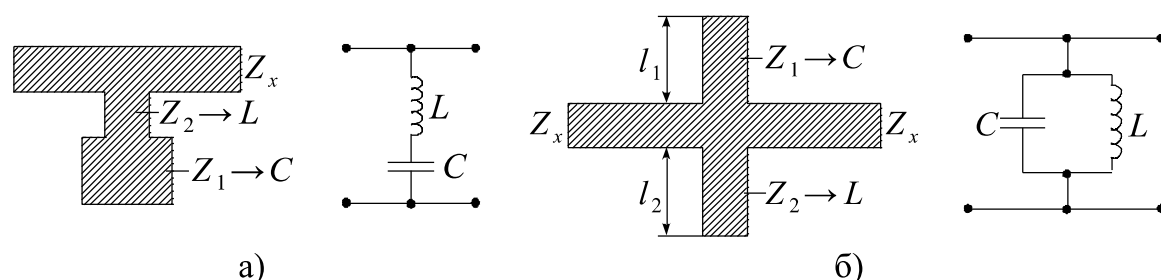


Рис. 7.18. Резонатори у вигляді послідовного і паралельного коливального контурів

В якості інтегральних резонаторів використовуються так звані кільцеві резонатори (рис. 7.19) з ємнісним зв'язком (розрив лінії) з лінією передачі на вході і виході резонатора.

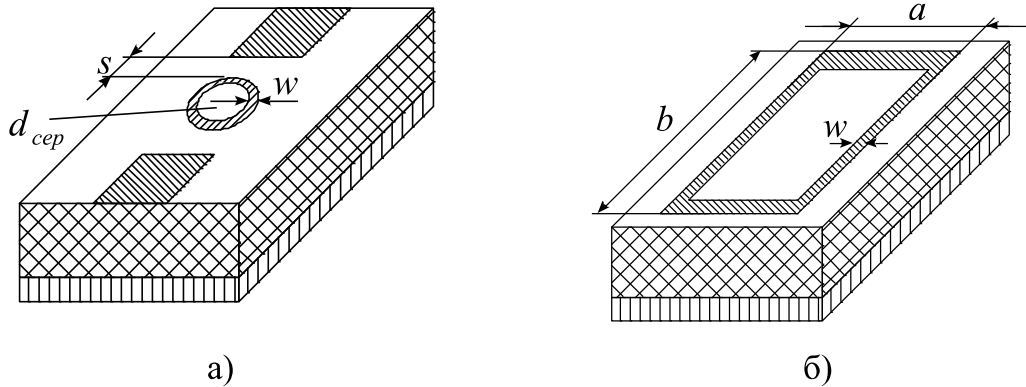


Рис. 7.19. Резонатори у вигляді кільця (а) і квадрата (прямокутника) (б)

У таких резонаторах у вигляді кільця чи квадрата практично відсутні крайові ефекти. Резонансна частота пов'язана з геометричними розмірами структур наступними співвідношеннями:

$$l_{\square} = n\lambda_x, \quad l_{\square} = 2(a+b) = n\lambda_x,$$

де $\lambda_{\text{рез}} = \pi d_{\text{сер}} \sqrt{\epsilon_{\text{эф}}} / v_{mn}$; $\lambda_{\text{рез}} = l \sqrt{\epsilon_{\text{эф}}} / n$ при $a \ll w$, $b \ll w$, v_{mn} – корінь похідної функції Бесселя.

Чим ширше кільце, тим більш високі типи коливань можуть виникати при резонансі. При ширині кільця, більшій $\lambda_x/2$, у резонаторі виникають типи коливань E_{mn0} ($n > 1$).

У лінію резонатори можуть включатися по-різному. Найбільше поширення отримали способи включення резонаторів за схемою двополюсника (рис. 7.20). Розмір зазору вибирається із заданого коефіцієнта зв'язку.

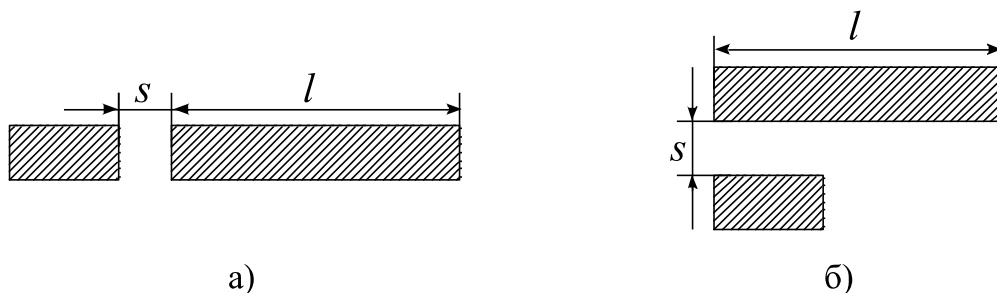


Рис. 7.20. Варіанти включення резонатора в лінію за схемою двополюсника: а) горизонтальної структури; б) вертикальної структури.

Можливі наступні способи включення резонаторів за схемою чотиріполюсника (рис. 7.21).

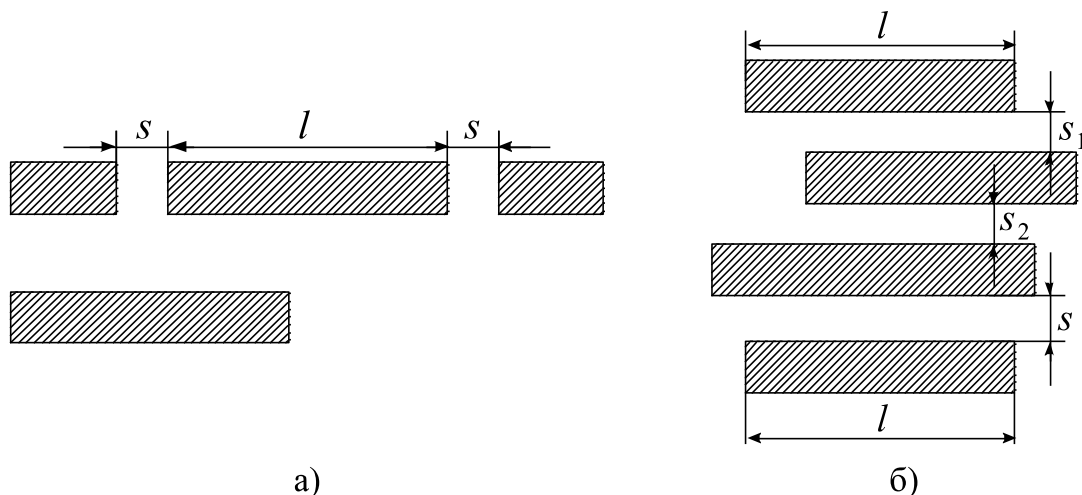


Рис. 7.21. Варіанти включення резонатора в лінію за схемою чотириполюсника: а) горизонтальна топологія; б) вертикальна топологія.

У сучасних мікроелектронних пристроях НВЧ широко знаходять застосування такі типи резонаторів, топологія яких подана на рис. 7.22.

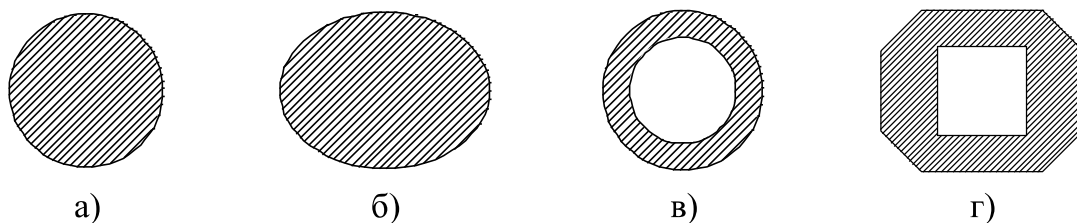


Рис. 7.22. Варіанти топології інтегральних резонаторів: а) круглий; б) еліптичний; в) кільцевий; г) прямокутний (квадратний).

На щілинній лінії передачі можливі свої варіанти резонаторів (рис. 7.23).

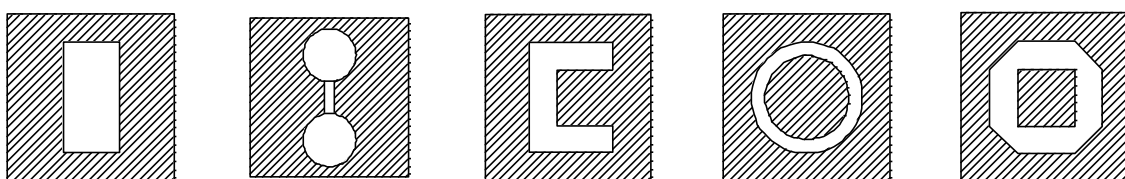


Рис. 7.23. Варіанти топології резонаторів на щілинній лінії передачі

Передача сигналів НВЧ не може обійтися без фільтрових схем, які теж виконуються в інтегральному виконанні. Тому в ролі базових елементів у фільтрових схемах використовують відрізки МСЛ, які, на відміну від прямокутного хвилеводу, не мають нижньої частоти відсічки. Розглянемо основні з них.

Фільтри нижніх частот (ФНЧ) використовують у схемах детекторів, змішувачів, а також в колах живлення. Надвисокочастотні ФНЧ можуть бути реалізовані на розподілених компонентах – відрізках ліній (рис. 7.24). Тут

відрізки ліній з великим хвильовим опором Z_{x1} еквівалентні послідовним індуктивностям L , а розімкнені відрізки з низьким опором Z_{x2} представляють собою паралельні ємності.

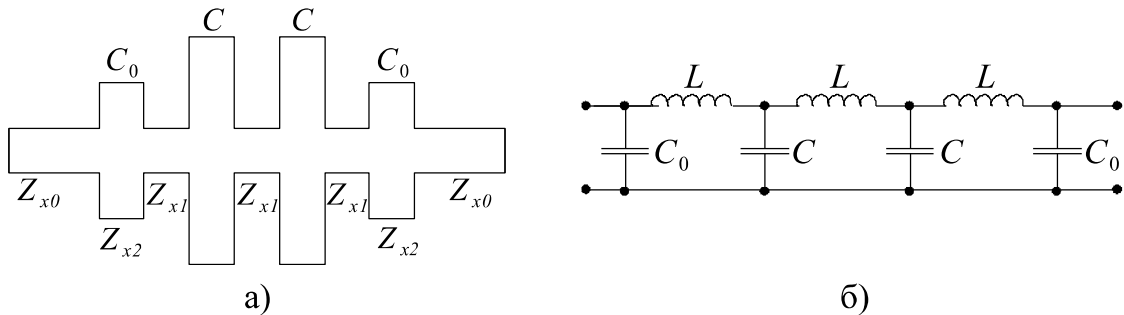


Рис. 7.24. Фільтр нижніх частот (а) і його електрична модель (б)

ФНЧ на зосереджених компонентах може бути сформований з використанням штирової і кільцевої топологій (рис. 7.25).

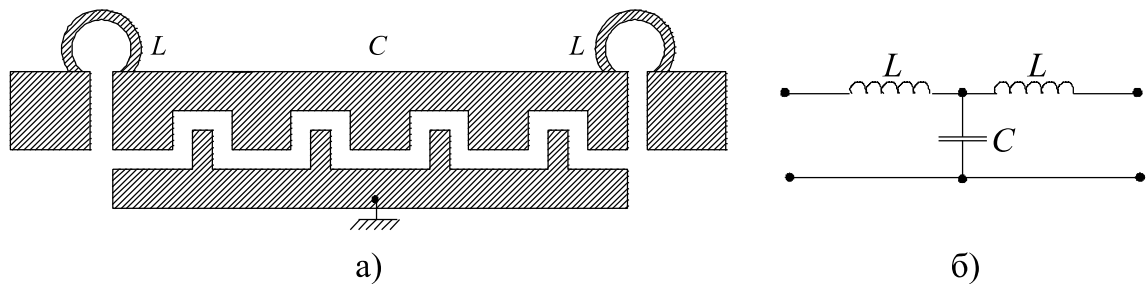


Рис. 7.25. Фільтр нижніх частот на зосереджених компонентах лінії (кільцево-штировій топології) (а) і його електрична модель (б)

Аналогічно можуть бути сформовані НВЧ фільтри верхніх частот на індуктивних елементах у вигляді короткозамкнених відрізків ліній і ємнісних елементів як розривів лінії (рис. 7.26).

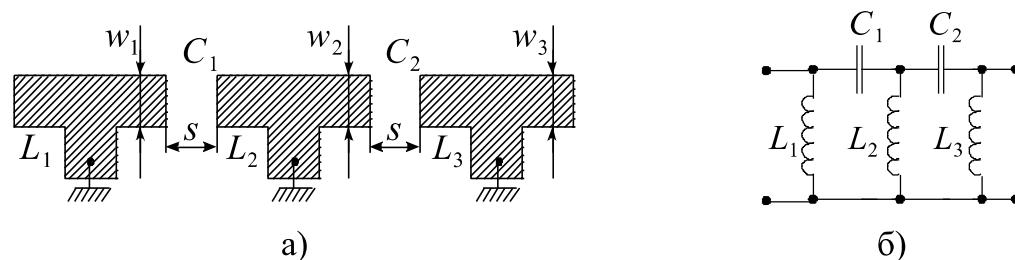


Рис. 7.26. Фільтр верхніх частот (а) і його електрична модель (б)

Без труднощів можна сформулювати і смуговий фільтр (СФ) НВЧ, в основі якого є півхвильові розімкнені відрізки (рис. 7.27). Дана конструкція надвисокочастотних СФ представляє собою мікросмугові резонатори з ємнісним зв'язком. Відстань між центрами зазорів складає $\lambda_x/2$, а величина

зазору визначає смугу пропускання фільтра (чим менший зазор, тим сильніше резонатори зв'язані між собою і тим ширша смуга пропускання). Саме тут мають місце високі вимоги щодо роздільної здатності літографічного процесу формування топології. Кожний з таких резонаторів має свою резонансну частоту, а результуюча АЧХ формується у результаті перекриття АЧХ окремих резонаторів. Резонансні частоти зв'язаних резонаторів вибирають так, щоб забезпечити задані значення смуги пропускання СФ НВЧ і нерівномірність АЧХ. Збільшення кількості резонаторів розширює смугу. Такі прецизійні зазори повинні формуватися лише плазмохімічним анізотропним травленням.

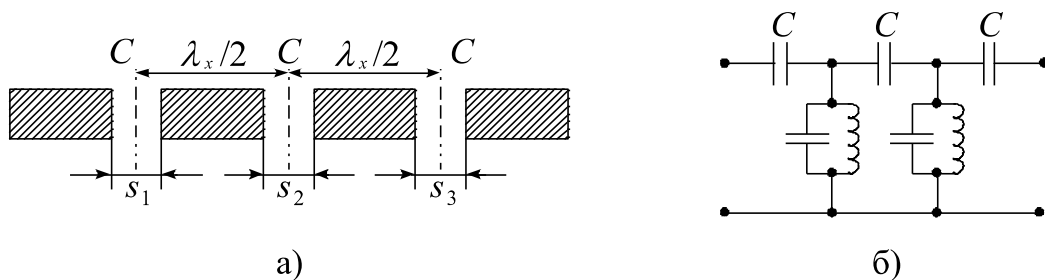


Рис. 7.27. Смуговий фільтр НВЧ на півхвильових відрізках розімкнутої лінії (а) і його електрична модель (б)

Більш компактна конструкція і топологія СФ із зв'язком півхвильових резонаторів через бокові поверхні показана на рис. 7.28.

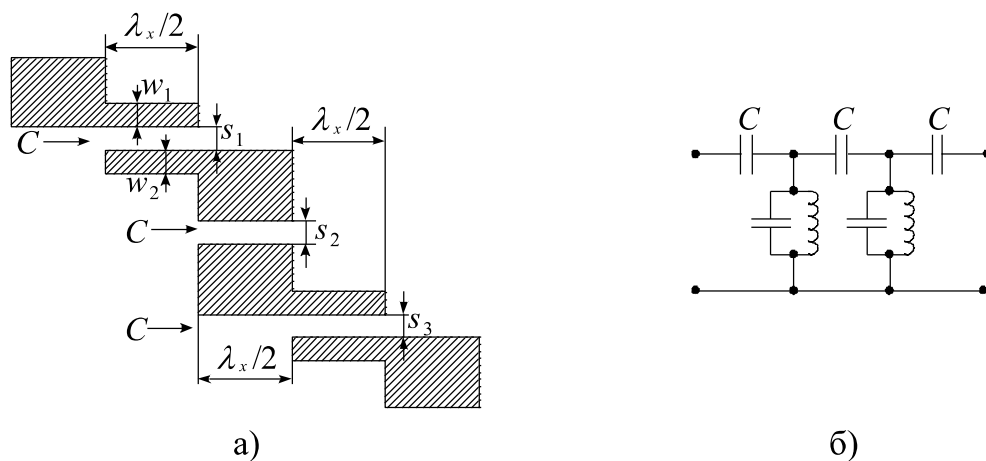


Рис. 7.28. Смуговий фільтр на півхвильових відрізках (а) і його електрична модель (б)

Загальним недоліком СФ на півхвильових відрізках є чутливість до допусків на геометричні розміри (h , s , w) і, як наслідок, відхід центральної частоти і смуги пропускання. Сьогодні дана проблема ефективно вирішується субмікронною технологією з використанням проекційної літографії та анізотропного плазмохімічного травлення.

Затухання фільтра у смузі пропускання буде тим менше, чим вища власна добротність резонатора і чим менше число ланок (тобто резонаторів).

Ще більш компактна топологія СФ НВЧ може бути реалізована на зустрічних короткозамкнених шлейфах (чвертьхвильових резонаторах), топологія яких показана на рис. 7.29.

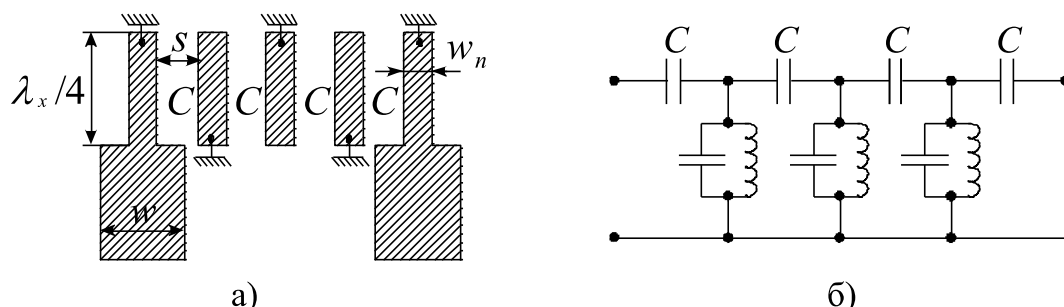


Рис. 7.29. Смуговий фільтр НВЧ на короткозамкнутих шлейфах ($\lambda_x/4$) (а) і його електрична модель (б)

Такі структури характеризуються топологією з мінімальною площею, досить широкою смугою пропускання (до 60 %) і малими втратами на випромінювання.

7.4. Діафрагми, резонансні вікна і трансформатори повних опорів

Повернемося до неоднорідностей у прямокутному хвилеводі, які мають вигляд ідеально провідної перегородки, що частково перекриває переріз хвилеводу і розміщена перпендикулярно до його осі. Розглянемо два простих типи таких перегородок – діафрагм, які показані на рис. 7.30. Введемо певне допущення, що товщина діафрагм d є набагато меншою довжини хвилі у хвилеводі, але набагато більшою глибини проникнення поля в метал. Тоді по хвилеводі може поширюватися тільки хвиля нижчого типу H_{10} .

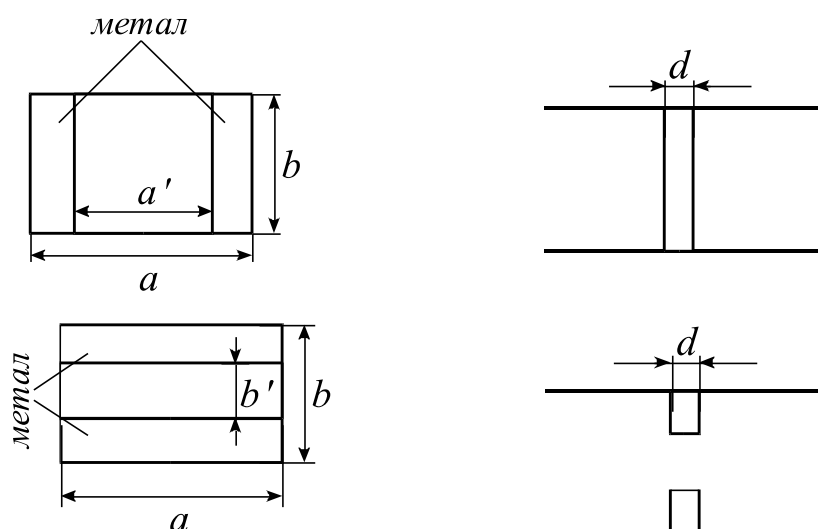


Рис. 7.30. Прості симетричні діафрагми у прямокутному хвилеводі

Очевидно, що в безпосередній близькості до діафрагми можуть існувати поля вищих типів хвиль, які затухають по мірі віддалення від неоднорідності, так як розміри перерізу хвильоводу задовольняють умовам

$$\lambda > a > \lambda/2, \quad \lambda/2 > b > 0.$$

Розглянемо спочатку діафрагми з якісної точки зору, використовуючи концепцію еквівалентного опору. Тут діафрагму будемо розглядати, як короткий відрізок хвильоводу, розміри перерізу якого відрізняються від розмірів основного хвильоводу. Тоді хвильвід з діафрагмою можна подати у вигляді еквівалентної схеми, показаної на рис. 7.31. Ця схема складається із трьох ділянок довгої лінії (рис. 7.31, а) з еквівалентними опорами Z_e і Z'_e . У даному випадку поля діафрагм не можуть бути повністю враховані еквівалентними опорами, оскільки це поняття можна застосувати до однорідних хвильоводів при хвилі типу H_{10} . Тому тут не можна отримати точної формули для розрахунку діафрагми.

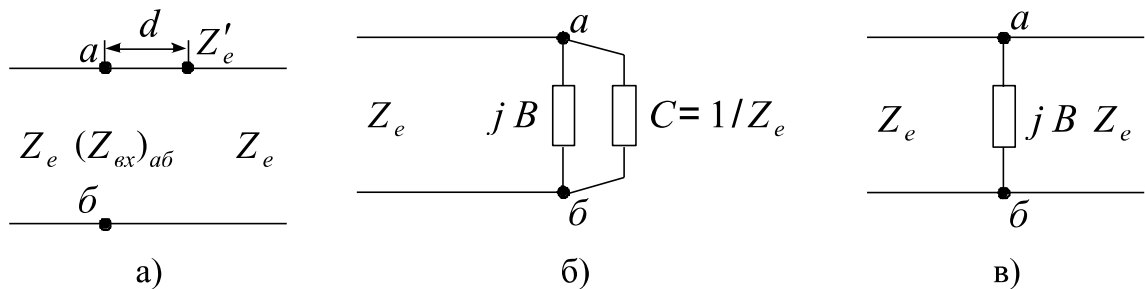


Рис. 7.31. Перетворення еквівалентної схеми тонкої діафрагми у хвильоводі

Еквівалентний опір для основного хвильоводу з повітряним заповненням, як відомо, визначається формулою

$$Z_e = \frac{b}{a} \frac{\sqrt{\mu_0/\epsilon_0}}{\sqrt{1 - \lambda^2/(4a^2)}}.$$

При звуженні широкого розміру перерізу хвильоводу (рис. 7.30) маємо такі співвідношення розмірів: $a' < a$, $Z'_e > Z_e$ (для першого варіанту) і $b' < b$, $Z'_e < Z_e$ (для другого варіанту).

Постараємося звести отриману еквівалентну схему діафрагми до схеми із зосередженими параметрами. Для цього проведемо послідовні перетворення, користуючись методами, які розглядалися в теорії довгих хвиль. Вхідний опір у точках ab (рис. 7.31, б) за рівнянням вхідного опору визначається рівністю

$$(Z_{ax})_{ab} = Z'_e \frac{Z_e + j Z'_e \operatorname{tg} \beta' d}{Z'_e + j Z_e \operatorname{tg} \beta' d}. \quad (7.6)$$

де через β' позначена фазова постійна в лінії, що відповідає діафрагмі. При малій товщині діафрагми можна записати: $\beta' d \ll 1$, $\operatorname{tg} \beta' d \cong \beta' d$. Тоді вхідна провідність у точках ab буде визначатися наступним співвідношенням:

$$(Y_{\text{ex}})_{a\bar{b}} = \frac{1}{(Z_{\text{ex}})_{a\bar{b}}} = \frac{1}{Z'_e} \frac{Z_e Z'_e - j(Z'_e)^2 \beta' d + Z_e Z' (\beta' d)^2}{Z_e^2 + (Z'_e \beta' d)^2}.$$

Членами, які містять $(\beta' d)^2$ можна знехтувати в силу дії умови $\beta' d \ll 1$. Тоді отримаємо

$$(Y_{\text{ex}})_{a\bar{b}} = \frac{1}{Z_e} + j \frac{\beta' d}{Z'_e} \left[1 - \left(\frac{Z'_e}{Z_e} \right)^2 \right] = G + jB, \quad (7.6.a)$$

$$\text{де } G = \frac{1}{Z_e}, \quad B = \frac{\beta' d}{Z'_e} \left[1 - \left(\frac{Z'_e}{Z_e} \right)^2 \right].$$

Таким чином, отриману раніше еквівалентну схему можна переводити до виду, як показано на рис. 7.31, б. Тут замість двох відрізків ліній фігурують зосереджені паралельно увімкнені активна G і реактивна jB провідності. Проте активну провідність $G = 1/Z_e$ можна замінити нескінченною довгою лінією з еквівалентним опором Z_e , як показано на рис. 7.31, в. Отже, в точках $a\bar{b}$ залишається реактивна провідність jB , яка підключена в однорідну довгу лінію з постійним опором Z_e .

Повернемося до виразу (7.6.a). У випадку діафрагми першого варіанту маємо $Z'_e > Z_e$. У результаті реактивна провідність діафрагми має від'ємний знак, що вказує на індуктивний характер провідності. Діафрагма другого варіанту має вже позитивну, тобто ємнісну реактивну провідність, бо тут $Z'_e < Z_e$.

Такі діафрагми називають відповідно індуктивною або ємнісною, коли відповідно виконуються умови $Z'_e > Z_e$ і $Z'_e < Z_e$. Виразити реактивну провідність B в абсолютних одиницях ($1/\text{Ом}$) недоцільно. Зазвичай її вказують у відносних одиницях у вигляді відношення реактивної провідності до характеристичної провідності самого хвилеводу Y_0 .

Теорія, яка враховує вищі типи хвиль, приводить до більш точного визначення реактивної провідності тонкої симетричної індуктивної діафрагми:

$$B = -\frac{\lambda_x}{a} \text{ctg}^2 \left(\frac{\pi a'}{2a} \right) (\text{відн. од.}). \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{---} L_e \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array}$$

У випадку тонкої симетричної ємнісної діафрагми можна користуватися формулою

$$B = \frac{4b}{\lambda_x} \ln \left[\csc \left(\frac{\pi b'}{2b} \right) \right] (\text{відн. од.}). \quad \rightarrow \quad \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \text{---} C_e \text{---} \\ | \\ \bullet \end{array}$$

Одне із головних призначень діафрагм – трансформатори повних опорів у хвилеводних лініях НВЧ. Таке застосування індуктивних та ємнісних діафрагм в погодженні хвильових опорів є важливим елементом не тільки

радіотехнічних пристроїв, але в ряді типів електронних і газорозрядних приладів НВЧ.

У хвильоводних пристроях, головним чином в електровакуумних приладах НВЧ, часто необхідна тонка перегородка у хвильоводі, яка дозволяє розділити його на дві частини – вакуумну і невакуумну. Тут перегородка зазвичай виконується у вигляді тонкої діелектричної пластини – вікна, впаяного у металеву рамку, яка, в свою чергу, спаюється з корпусом хвильоводу. Форма вікна може бути різною (рис. 7.32) і визначається їх призначенням.

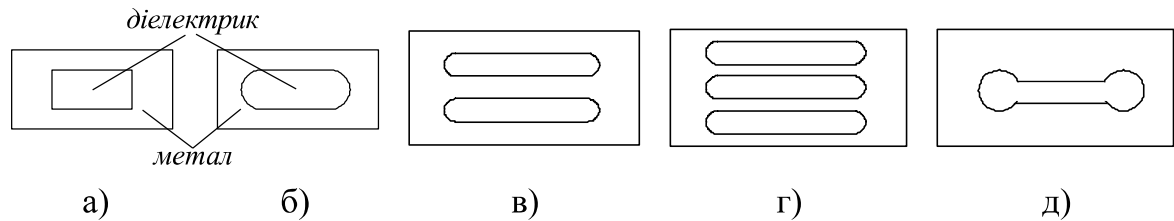


Рис. 7.32. Резонансні вікна в прямокутному хвильоводі

Розглянемо вікно, яке розміщене у прямокутному хвильоводі, розміри якого мають певне обмеження: $\lambda > a > \lambda/2$, $\lambda/2 > b > 0$. Для спрощення розрахунків розглянемо спочатку отвір прямокутної форми, що не містить діелектрика (рис. 7.32, а). Розрахунок такого вікна можна вести за допомогою поняття еквівалентного опору хвильоводу (рис. 7.33). Представимо вікно у вигляді короткого відрізка хвильоводу, який вмонтований в основний хвильовід, як показано на рис. 7.33, б. Умовою відсутності відбивання від вікна при заданій довжині хвилі λ згідно еквівалентної схеми є рівність еквівалентних опорів хвильоводу і вікна, тобто $Z'_e = Z_e$. Цю рівність можна записати через геометричні розміри:

$$\frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2/(4a^2)}} = \frac{b'}{a'} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2/(4a'^2)}}. \quad (7.7)$$

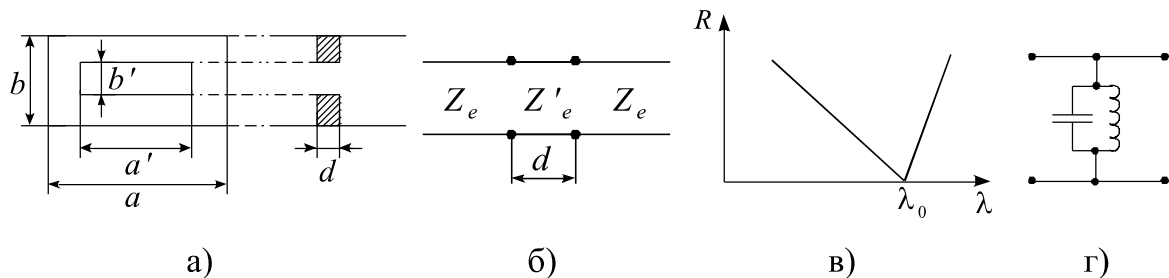


Рис. 7.33. Прямокутне вікно без діелектрика та його еквівалентна схема

Величина λ_0 , яка забезпечує проходження хвилі через вікно без відбивання, буде визначатися як

$$\lambda_0 = 2a' \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{b'a}{a'b}\right)^2}{1 - \left(\frac{b'}{b}\right)^2}}. \quad (7.8)$$

Залежність коефіцієнта відбивання хвилі в залежності від довжини хвилі подано на рис. 7.33, в. Саме цю хвилю λ_0 , при якій існує мінімум коефіцієнта відбивання, називають резонансною хвилею вікна. А відповідне вікно, що забезпечує R_{\min} , називають резонансним вікном.

Така залежність (рис. 7.33, в) співпадає із зміною коефіцієнта відбивання у двопровідній лінії, яка містить паралельно ввімкнений резонансний контур (рис. 7.33, г). При $\lambda > \lambda_0$ і $\lambda < \lambda_0$ паралельний коливальний контур характеризується відповідно індуктивною та ємнісною провідністю, а відбивання зростає по обидві сторони від λ_0 . Досвід показує, що резонанс забезпечує не тільки вікно прямокутної форми, але й вікна більш складної форми.

Якщо тепер вікно заповнюється діелектриком, то картина резонансу дещо ускладнюється. Наявність діелектрика у першому наближенні можна врахувати у виразі еквівалентного опору хвилеводу, що відповідає даному вікну. Для нашого випадку дане погодження еквівалентних опорів дає наступне співвідношення:

$$\frac{b}{a} \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2/(4a^2)}} = \frac{b'}{a'} \frac{\sqrt{\mu/\varepsilon}}{\sqrt{1 - \lambda^2/(4a'^2 \varepsilon \mu)}}, \quad (7.9)$$

де ε і μ – відносні діелектрична і магнітна проникності діелектричного вікна.

На основі цього виразу можна зробити висновок, що мінімальний розмір вікна a' , який задовольняє узгодженню на згаданій довжині хвилі λ , рівний $a'_{\min} = \lambda / (2\sqrt{\varepsilon \mu})$. При $\mu = 1$ $a'_{\min} = \lambda / (2\sqrt{\varepsilon})$, а при повітряному заповненні ($\varepsilon = 1$) $a'_{\min} = \lambda/2$ і товщина вікна не впливає на його параметри.

Для практичних цілей (задач) резонансному вікну надається спеціальна форма, зручна з точки зору отримання вакуумно-щільних спаїв. Скло, яке використовують для запайки вікон, повинно мати мінімальні втрати на НВЧ. У нашій промисловості для цього використовували скло 3С-9, а в ролі рамки – ковар Н29 К18. Замість скла використовують також слюду або кераміку (полікор).

А тепер повернемося до трансформаторів повних опорів, які використовують для узгодження хвильових опорів у хвилеводах. При цьому розглянемо найбільш поширені типи трансформаторів повних опорів.

А. Четвертьхвильовий трансформатор.

Властивості відрізка лінії довжиною в чверть хвилі розглядалися нами в розділі направляючих систем. Там було сказано, що вхідний опір лінії

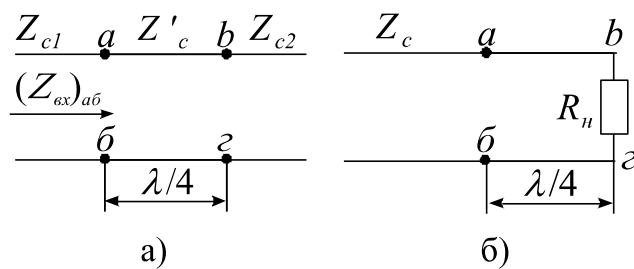


Рис. 7.34. Чвертьхвильовий трансформатор для узгодження хвильових опорів ліній

використана для узгодження двох ліній з різними хвильовими (характеристичними) опорами Z_{c1} і Z_{c2} (рис. 7.34). Відповідно умовою узгодження є відома рівність $(Z_{вх})_{ab} = Z_{c1}$. Згідно рівняння чвертьхвильового трансформатора (рис. 7.34, а) маємо:

$$(Z_{вх})_{ab} = \frac{(Z'_c)^2}{Z_{c2}},$$

де Z'_c – хвильовий опір чвертьхвильового відрізка лінії. Тоді на основі цих співвідношень отримаємо: $Z'_c = \sqrt{Z_{c1} Z_{c2}}$. А для схеми на рис. 7.34, б умова узгодження приймає вигляд $Z'_c = \sqrt{R_n Z_{c1}}$.

Приклади чвертьхвильового трансформатора в жорсткій коаксіальній лінії без діелектричного наповнення і у хвилеводі прямокутного перерізу показані на рис. 7.35. Трансформуюча секція в коаксіальній лінії може мати незмінний діаметр зовнішнього провідника, рівний D . Тоді діаметр внутрішнього провідника d' визначиться із залежності

$$\lg \frac{D}{d'} = \sqrt{\lg \frac{D}{d_1} \lg \frac{D}{d_2}}.$$

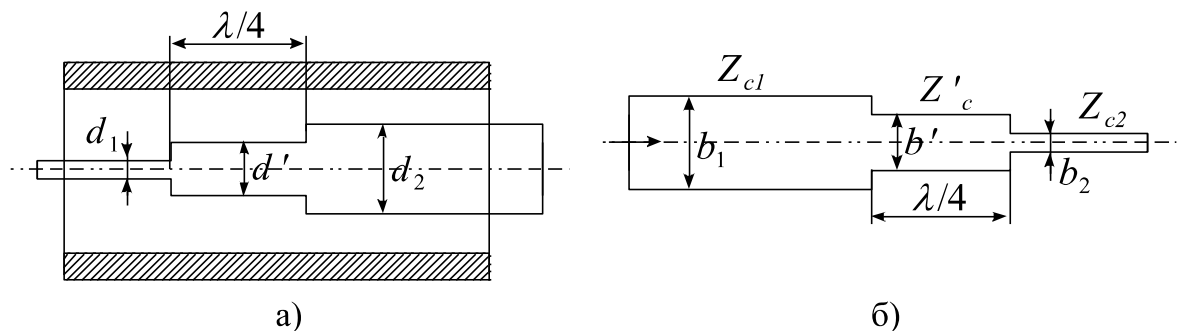


Рис. 7.35. Застосування чвертьхвильових трансформаторів у коаксіальному (а) і прямокутному (б) хвилеводах для узгодження хвильових опорів

довжиною $\lambda_x/4$ рівний $Z_{вх} = Z_c^2 / Z_n$. Якщо опір навантаження Z_n має чисто активний характер, то при дійсному значенні Z_c , тобто при відсутності втрат, вхідний опір $Z_{вх}$ також стає чисто активним. Ця властивість чвертьхвильового відрізка може бути

Для трансформатора у прямокутному хвилеводі з хвилею H_{10} при незмінному широкому розмірі a розмір b' (рис. 7.35, б) може бути визначений з наступних співвідношень:

$$Z'_c = \sqrt{Z_{c1} Z_{c2}}, \quad b' = \sqrt{b_1 b_2}.$$

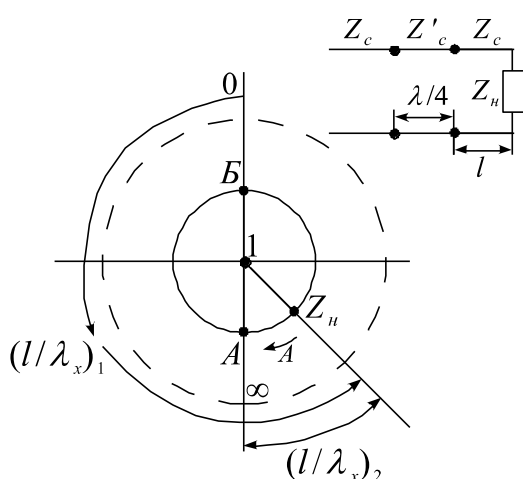


Рис. 7.36. Діаграма Смітта для визначення узгодженого комплексного навантаження Z_n

Чвертьхвильовий трансформатор можна також використати для узгодження не тільки чисто активних, але й комплексних опорів. Для цього необхідно включати трансформатор на такій відстані від навантаження, де вхідний опір є чисто активним. Таке узгодження комплексного навантаження розглянемо на круговій діаграмі Смітта (рис. 7.36), де комплексний опір навантаження зображено точкою Z_n . Рух вздовж лінії до генератора відповідає руху по колу $\rho = \text{const}$ за годинниковою стрілкою. Точки A і B відповідають максимуму і мінімуму, а вхідний опір в цих точках є чисто активним і визначається як $(Z_{\text{вх}})_A = Z_c \rho$,

$(Z_{\text{вх}})_B = Z_c / \rho$. Відповідно в точці A чи B можна підключити до лінії чвертьхвильовий трансформатор з хвильовим опором $(Z'_c)_A = Z_c \sqrt{\rho}$ і $(Z'_c)_B = Z_c / \sqrt{\rho}$. Таким чином, можливі два варіанти чвертьхвильового трансформатора, які відрізняються величиною хвильового опору узгоджуючої трансформаторної секції і відстанню l від трансформатора до навантаження. Для коаксіальної лінії зручніше використовувати другий варіант, оскільки узгоджуюча трансформаторна секція легко виконується у вигляді рухомої металевої чи діелектричної втулки, яка забезпечує $Z'_c < Z_c$.

Б. Трансформатор типу одинокої рухомої реактивної провідності.

Якщо узгоджене навантаження змінюється в широких межах, то може також бути використаний трансформатор спеціальної конструкції (рис. 3.37). У цьому випадку по лінії передачі переміщується чисто реактивний елемент із змінною провідністю jB , яка шунтує дану лінію. У ролі такого елемента може бути використаний короткозамкнений шлейф, довжина якого змінюється за допомогою рухомого моста чи поршня. У хвилеводних лініях з цією метою застосовують рухомий реактивний штир, в якого регулюється глибина занурення.

Такі трансформатори з одинокою рухомою реактивною провідністю отримали назву одношлейфових трансформаторів. Пояснення дії одно-

шлейфового трансформатора можна дати за допомогою кругової полярної діаграми Смітта. У зв'язку з тим, що узгоджувачий елемент увімкнений в основну лінію паралельно, то зручно користуватися діаграмою Смітта в термінах провідностей, що демонструє рис. 3.37. Точкою Y_n на діаграмі позначена провідність навантаження у відносних одиницях. Зміна відстані L від навантаження до точок підключення шлейфа відповідає переміщенню по колу $\rho = \text{const}$ (ρ – КСХ). У даному випадку роль узгоджувачого елемента зводиться до зміни реактивної провідності. Активна провідність лінії шлейфа не може бути змінна. Так як для узгодження вимагається одинична активна вхідна провідність, то очевидно, що узгоджувачий реактивний елемент повинен бути увімкнений в лінію у перерізі, де активна складова вхідної провідності рівна одиниці. На круговій діаграмі (рис. 7.37, в) є дві точки A і B , яким відповідає перетин кола $\rho = \text{const}$ з колом $G=1$. Звідти визначається відстань від навантаження до шлейфа або штиря, що відповідає фазовим кутам $(l/\lambda_x)_1$ і $(l/\lambda_x)_2$. Після того, як шлейф (штир) встановлений в одному із вказаних положень, необхідно змінити величину його реактивної провідності таким чином, щоб сумарна реактивна провідність стала рівною нулю. Цьому відповідає рух по колу $G=1$ у напрямі до центра кругової діаграми. Із даного рисунку видно, що узгодження за допомогою одношлейфового трансформатора можливе при будь-яких значеннях КСХ (ρ).

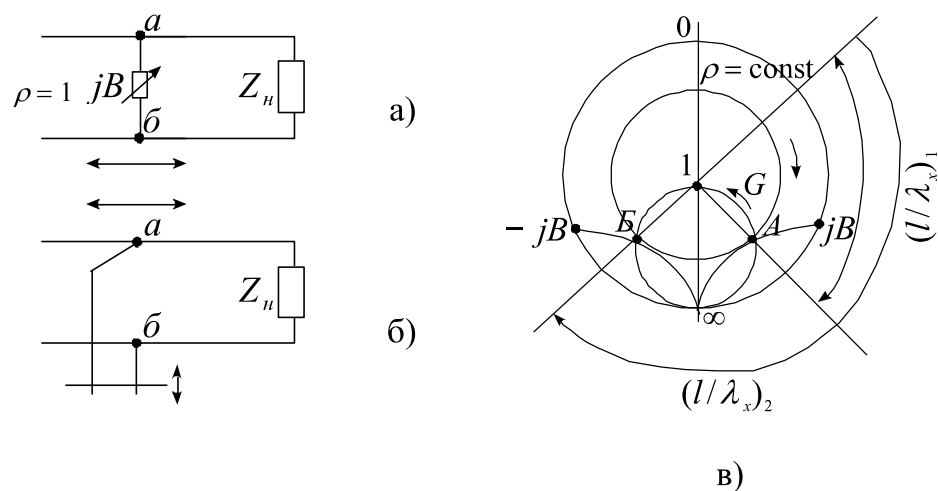


Рис. 7.37. Одношлейфовий трансформатор (а, б) та його пояснення на круговій діаграмі Смітта

Величина реактивної провідності діафрагми jB , необхідна для узгодження, також визначається за точкою перетину кіл $\rho = \text{const}$ і $G = \text{const} = 1$. Як видно з діаграми Смітта, діафрагма, яка відповідає точці A , повинна мати індуктивний характер, так як вхідна реактивна провідність у точці A є ємнісною (повинна бути компенсація). Навпаки, у режимі, якому відповідає точка B , треба вже використовувати ємнісну діафрагму, бо вхідна

реактивна провідність у точці B є вже індуктивною. Розміри діаграм визначаються за величиною jB і відповідних графіків.

В. Двошлейфовий і трьохшлейфовий трансформатори.

Розглянемо тепер узгодження за допомогою двох нерухомих шунтуючих реактивних провідностей, наприклад, шлейфів, увімкнених в лінію на відстані $L \neq \lambda/2$. Реактивна провідність шлейфів змінюється шляхом переміщення короткозамкнених поршнів.

Аналіз дії трансформаторів почнемо із точок ab на рис. 7.38, а. У цих точках при наявності узгодження повна вхідна провідність у відносних одиницях $(Y_{ex})_{ab}$ повинна бути рівною $(Y_{ex})_{ab} = 1 + j0$.

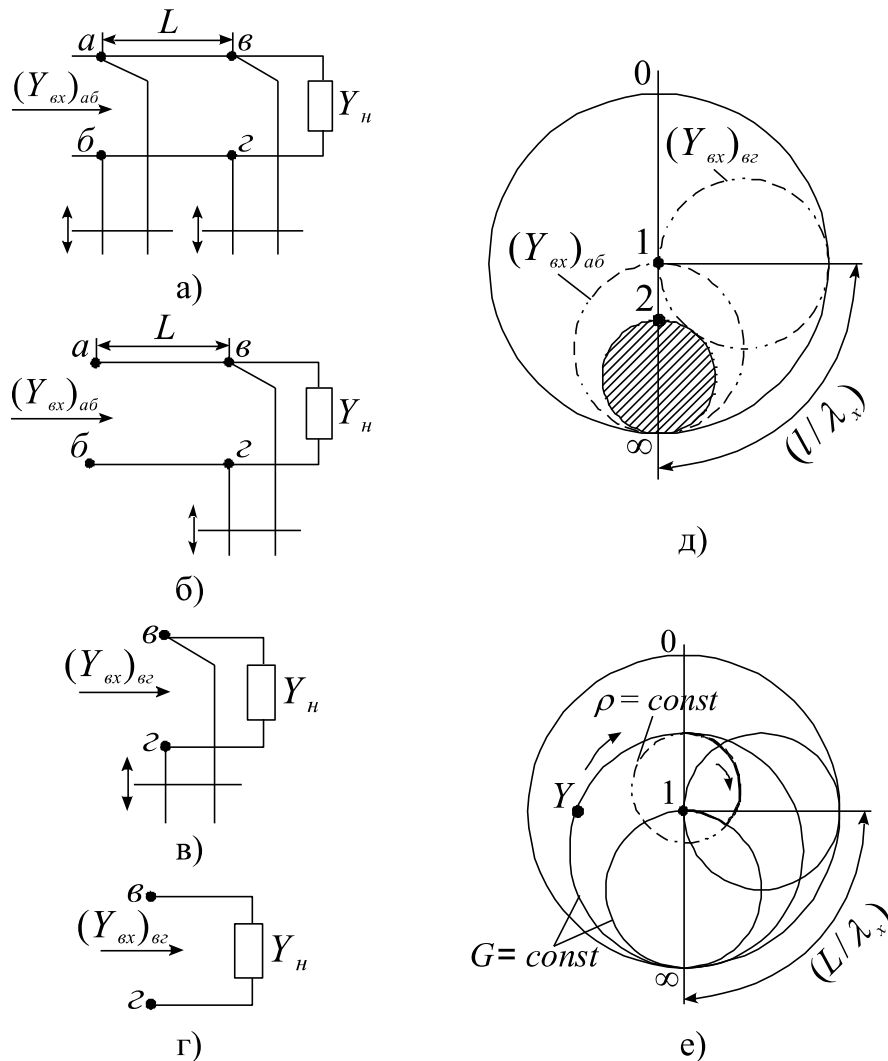


Рис. 7.38. Двошлейфовий трансформатор повних опорів та його кругова діаграма Смітта

У процесі узгодження шлейф не може змінювати активної складової провідності у вказаних точках. Тому повна вхідна провідність лінії без шлейфа Y_{ab} правіше точки ab (рис. 7.38, б) повинна лежати на колі $G=1$ діаграми Смітта (рис. 7.38, в).

Повна вхідна провідність лінії разом з другим шлейфом у точках $вг$ ($Y_{вг}$) відрізняється від провідності $Y_{аб}$ поворотом на діаграмі на фазовий кут L/λ_x . Тому геометричним місцем точок, на якому повинна знаходитися провідність ($Y_{вг}$), є коло $G=1$, повернуте проти годинникової стрілки на вказаний кут. На рис. 7.38, д довжина L вибрана рівною $\lambda_x/8$.

Шлейф, включений у точках $вг$, також не може змінювати активної провідності. Для того щоб потрапити на коло ($Y_{вг}$) і потім забезпечити узгодження за допомогою двох шлейфів, необхідно, щоб провідність Y правіше точок $вг$ лежала за межами заштрихованого круга на рис. 7.38, д. Цей круг обмежений колом $G = const$ є дотичним до кола ($Y_{вг}$).

Проведені дослідження показують, що двошлейфовий трансформатор має деяку недосяжну зону провідностей навантаження на круговій діаграмі. Чим ближче відстань L до $\lambda_x/4$, тим ця зона є більшою. Для кожного фіксованого значення L існує гранична величина КСХ ρ навантаження, коли узгодження можливе при будь-якій фазі стоячої хвилі. При більш високих значеннях КСХ двошлейфовий трансформатор забезпечує узгодження лише при певних значеннях фази, коли провідність навантаження в перерізі найближчого до нього шлейфа не попадає у заштрихований круг.

У випадку $\lambda_x/8$, що демонструє рис. 7.38, е, гранична величина КСХ рівна двом. На цьому ж рисунку для наочності показаний процес узгодження навантаження з провідністю, яка позначена на діаграмі точкою Y .

Для узгодження навантаження, яке характеризується будь-якими значеннями КСХ, застосовують трьохшлейфовий трансформатор, який показаний на рис. 7.39. Він представляє собою комбінацію двох двошлейфових трансформаторів. Відстань між шлейфами вибирають $\lambda_x/4$. У випадку, коли провідність у точках $де$ стає меншою одиниці, для узгодження достатньо використати лише пару шлейфів, які найближчі до навантаження.

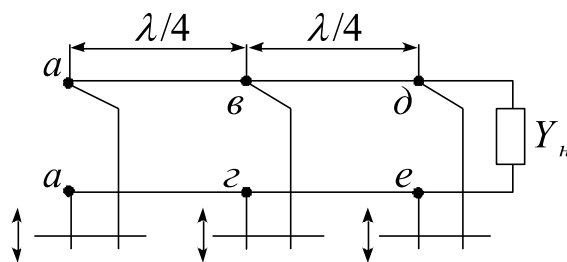


Рис. 7.39. Трьохшлейфовий трансформатор

7.5. Багатополюсники на НВЧ та їх параметри

При аналізі розподілених кіл зручно використовувати декомпозицію кола на підсхеми. При цьому окремі елементи кола, що з'єднані довільним чином, можуть представляти собою багатополюсники, які описані в різних системах параметрів.

У залежності від особливостей кола і частотного діапазону, широко використовуються системи параметрів класичної теорії, в якій під сигналами розуміють струми і напруги, та хвильової теорії, де під сигналами вже розуміють хвилі струмів і напруг. Між параметрами цих теорій існують однозначні зв'язки.

У загальному випадку розподілені кола описують рівняннями Максвелла. Проте, на практиці, такі задачі розв'язувати достатньо складно — це ми переконалися на прикладі хвильоводів, резонаторів і випромінювачів. Тому використовують такі допущення, які дозволяють використати методи теорії електричних кіл — представлення елементів у вигляді багатополісників. Таким чином, розподілені кола в цьому випадку можна розрахувати за допомогою матричного апарату теорії кіл в припущенні, що матриці, які описують елементи кіл, залишаються незмінними при будь-якому складному з'єднанні елементів. При цьому передбачається, що зона збудженого поля поблизу неоднорідностей локалізована у безпосередній близькості від елемента (лінійне наближення). Крім того, визначається, що взаємодія елементів між собою здійснюється на основному типі хвилі.

Розглянемо найбільш типові з'єднання 4-полісників і відповідні їм параметри класичної теорії кіл. Паралельне з'єднання 4-полісників зручно описувати матрицею провідності; при цьому результуючу матрицю знаходять як суму матриць k з'єднаних паралельно 4-полісників (рис. 7.40).

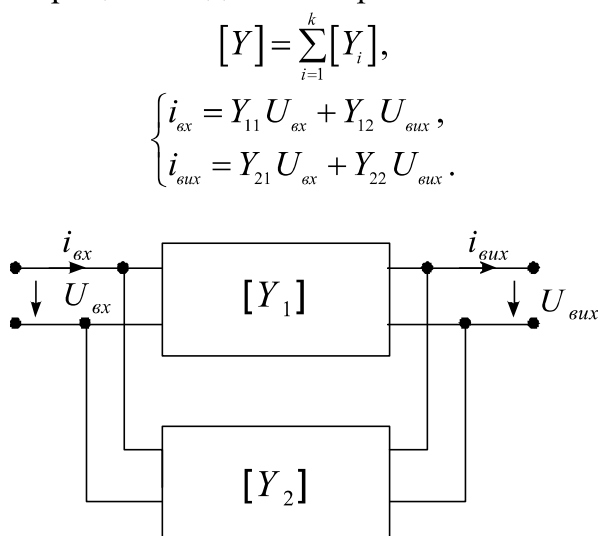


Рис. 7.40. Паралельне з'єднання 4-полісників

Послідовне з'єднання 4-полісників зручно описувати матрицею опорів, при якому результуючу матрицю знаходять як суму матриць k з'єднаних послідовно 4-полісників (рис. 7.41).

$$[Z] = \sum_{i=1}^k [Z_i],$$

$$\begin{cases} U_{\text{вх}} = Z_{11} i_{\text{вх}} + Z_{12} i_{\text{вих}}, \\ U_{\text{вих}} = Z_{21} i_{\text{вх}} + Z_{22} i_{\text{вих}}. \end{cases}$$

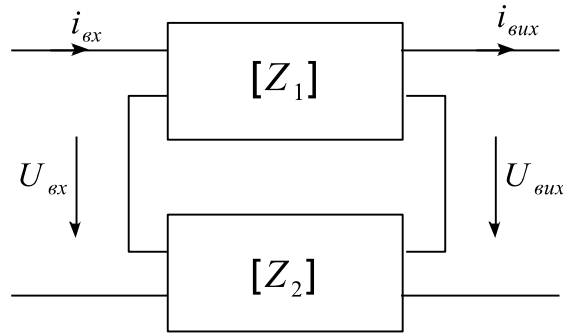


Рис. 7.41. Послідовне з'єднання 4-полюсників

При каскадному з'єднанні 4-полюсників результуючу матрицю знаходять шляхом перемноження k з'єднаних каскадно 4-полюсників (рис. 7.42).

$$[a] = \prod_{i=1}^k [a_i],$$

$$\begin{cases} U_{\text{вх}} = a_{11} U_{\text{вих}} + a_{12} i_{\text{вих}}, \\ i_{\text{вх}} = a_{21} U_{\text{вих}} + a_{22} i_{\text{вих}}. \end{cases}$$

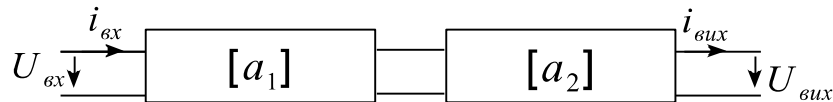


Рис. 7.42. Каскадне з'єднання 4-полюсників

Визначимо тепер хвильові параметри 4-полюсників. Вони визначаються хвильовою матрицею розсіювання. Перевага опису багатополюсників у вигляді хвильової матриці розсіювання (S -параметри) можуть бути пов'язані із наступними факторами.

По-перше, із можливістю безпосереднього вимірювання, що не є здійсненим для параметрів класичної теорії, так як, наприклад, при вимірюванні Y -параметрів необхідно здійснювати режими холостого ходу та короткого замикання, що в практичній роботі реалізувати досить складно.

По-друге, параметри розсіювання вимірюють на основі хвиль, які поширюються, що дозволяє проводити вимірювання на деякій відстані від фізично розміщеного об'єкта. Остання обставина є актуальною і на мікрооб'єктах чи елементах інтегральних схем НВЧ.

Обмежившись розглядом 4-полюсників, виберемо в ролі залежних змінних хвилі, які відходять від 4-полюсника, тобто розсіяні хвилі (рис. 7.43). Тоді система рівнянь для хвиль, які сходяться і розходяться від 4-полюсника, з коефіцієнтами у вигляді параметрів розсіювання може бути подана як:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^- = S_{11} \dot{U}_1^+ + S_{12} \dot{U}_2^-, \\ \dot{U}_2^+ = S_{21} \dot{U}_1^+ + S_{22} \dot{U}_2^-. \end{cases} \quad (7.10)$$

де S_{ii} – коефіцієнти відбивання від входу та виходу 4-полюсника, S_{ik} – коефіцієнти передачі з плеча k в плече i .

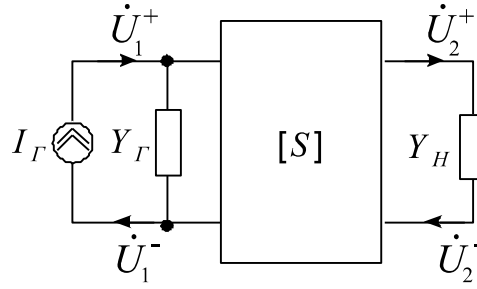


Рис. 7.43. 4-полюсник і параметри розсіювання

У даному випадку падаючі і відбиті хвилі нормуються таким чином, щоб їх квадрат давав відповідну потужність. У матричній формі рівняння (7.10) можуть бути записані у вигляді

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1^- \\ \dot{U}_2^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1^+ \\ \dot{U}_2^- \end{bmatrix}. \quad (7.10.a)$$

Знаючи параметри матриці розсіювання, можна з успіхом розрахувати схемні функції 4-полюсника. Наприклад, однонаправлений коефіцієнт передачі потужності може бути розрахований за формулою $K_p = |S_{21}|^2$. Параметри матриці розсіювання можуть бути розраховані за відомою матрицею провідності 4-полюсника:

$$[S] = ([1] - [Y]) \cdot ([1] + [Y])^{-1},$$

де $[1]$ – одинична матриця.

Тут необхідно відмітити важливу особливість параметрів матриці розсіювання, пов'язану з напрямом проходження сигналів. При зміні напрямку передачі змінюються лише індекси в параметрах розсіювання (S_{12} на S_{21} , S_{11} на S_{22}), знаки ж величин, які входять у рівняння (7.10), залишаються незмінними.

Встановимо зв'язок між параметрами хвильової теорії (S -матриця) і параметрами класичної теорії (Y -матриця). Для цього розглянемо 4-полюсники з напрямом падаючих і відбитих хвиль, а також струмів і напруг, як показано на рис. 7.44, і відповідні даним системам параметрів рівняння.

$$\begin{cases} \dot{U}_1^- = S_{11} \dot{U}_1^+ + S_{12} \dot{U}_2^-, \\ \dot{U}_2^+ = S_{21} \dot{U}_1^+ + S_{22} \dot{U}_2^-, \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 + Y_{12} \dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 = Y_{21} \dot{U}_1 + Y_{22} \dot{U}_2. \end{cases}$$

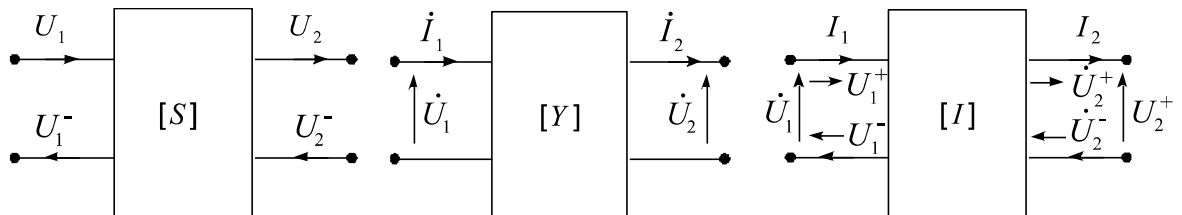


Рис. 7.44. 4-полюсники в системі хвильової та класичної теорій

Враховуючи введені нами позначення для падаючої і відбитої хвиль

$$\begin{cases} \dot{U}_1^+ = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 + \dot{I}_1 Z_x), & \dot{U}_2^+ = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_x), \\ \dot{U}_1^- = \frac{1}{2}(\dot{U}_1 - \dot{I}_1 Z_x), & \dot{U}_2^- = \frac{1}{2}(\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_x), \end{cases}$$

а також взявши із цих рівнянь вирази для струмів і напруг

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_1^+ + \dot{U}_1^-, & \dot{U}_2 = \dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^-, \\ \dot{I}_1 = \frac{1}{Z_x}(\dot{U}_1^+ - \dot{U}_1^-), & \dot{I}_2 = \frac{1}{Z_x}[-(\dot{U}_2^+ - \dot{U}_2^-)], \end{cases}$$

де “-” у струмі \dot{I}_2 вказує, що він направлений від 4-полюсника.

Тоді, підставляючи ці вирази для рівнянь 4-полюсника в $[Y]$ -формі, отримаємо:

$$\begin{cases} \frac{1}{Z_x}(\dot{U}_1^+ - \dot{U}_1^-) = Y_{11}(\dot{U}_1^+ + \dot{U}_1^-) + Y_{12}(\dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^-), \\ \frac{1}{Z_x}(\dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^-) = Y_{21}(\dot{U}_1^+ + \dot{U}_1^-) + Y_{22}(\dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^-), \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} \dot{U}_1^+ - \dot{U}_1^- = Z_x Y_{11} \dot{U}_1^+ + Z_x Y_{11} \dot{U}_1^- + Z_x Y_{12} \dot{U}_2^+ + Z_x Y_{12} \dot{U}_2^-, \\ \dot{U}_2^+ + \dot{U}_2^- = Z_x Y_{21} \dot{U}_1^+ + Z_x Y_{21} \dot{U}_1^- + Z_x Y_{22} \dot{U}_2^+ + Z_x Y_{22} \dot{U}_2^-. \end{cases}$$

Перегрупувавши доданки

$$\begin{cases} -(\dot{U}_1^- + Z_x Y_{11} \dot{U}_1^-) = \dot{U}_1^+ (Z_x Y_{11} - 1) + \dot{U}_2^+ Z_x Y_{12} + \dot{U}_2^- Z_x Y_{12}, \\ -\dot{U}_2^- + Z_x Y_{22} \dot{U}_2^- = \dot{U}_1^+ Z_x Y_{21} + \dot{U}_1^- Z_x Y_{21} + \dot{U}_2^- (Z_x Y_{22} + 1), \end{cases}$$

отримаємо вирази для падаючої і відбитої хвиль:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^- = \frac{\dot{U}_1^+ (Z_x Y_{11} - 1) + \dot{U}_2^+ Z_x Y_{12} + \dot{U}_2^- Z_x Y_{12}}{1 + Z_x Y_{11}}, \\ \dot{U}_2^+ = \frac{\dot{U}_1^+ Z_x Y_{21} + \dot{U}_1^- Z_x Y_{21} + \dot{U}_2^- (Z_x Y_{22} + 1)}{1 - Z_x Y_{22}}. \end{cases}$$

Враховуючи нормування через значення хвильового опору через $[Y]$ -параметри, матимемо:

$$\begin{cases} \dot{U}_1^- = \frac{\dot{U}_1^+ [(Y_{11} - 1)(Y_{22} - 1) - Y_{12} Y_{21}] + \dot{U}_2^- [-2Y_{12}]}{(Y_{11} + 1)(Y_{22} - 1) - Y_{12} Y_{21}}, \\ \dot{U}_2^+ = \frac{-[\dot{U}_1^+ 2Y_{21} + \dot{U}_2^- [(1 + Y_{22})(1 + Y_{11}) + Y_{12} Y_{21}]]}{(-Y_{22} + 1)(Y_{11} + 1) + Y_{12} Y_{21}}. \end{cases}$$

Тоді матриця коефіцієнтів $[S]$ -системи через $[Y]$ -параметри має вид:

$$[S] = \begin{bmatrix} (Y_{11}-1)(Y_{22}-1) - Y_{12}Y_{21} & -2Y_{12} \\ -2Y_{21} & (1+Y_{22})(1+Y_{11}) + Y_{12}Y_{21} \end{bmatrix} \times \frac{1}{(1+Y_{11})(1-Y_{22}) - Y_{12}Y_{21}}. \quad (7.11)$$

Повернемося до хвильової матриці передачі. Вона формується, якщо в ролі залежних змінних вибрати хвилі на виході 4-полюсника (хвилю, яка падає на вхід, і хвилю, яка відбивається від входу), а в ролі незалежних змінних – хвилі на виході 4-полюсника (хвилі, які поширюються до навантаження, і відбиті від нього хвилі) (рис. 7.45). Тоді система рівнянь, коефіцієнтами в якій будуть параметри хвильової матриці передачі, може бути записана у вигляді

$$\begin{aligned} \dot{U}_1^+ &= \dot{U}_2^+ T_{11} + \dot{U}_2^- T_{12}, \\ \dot{U}_1^- &= \dot{U}_2^+ T_{21} + \dot{U}_2^- T_{22}, \end{aligned} \quad [T] = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

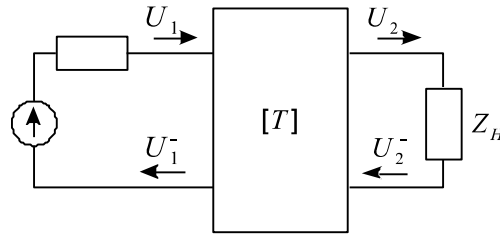


Рис. 7.45. Опис 4-полюсника через хвильову матрицю передачі

Опис 4-полюсників у вигляді хвильової матриці передачі є зручним при їх каскадному включенні. Результируючу матрицю передачі в цьому випадку визначаємо за співвідношенням $[T] = \prod_{i=1}^k [T]_i$, де k – число каскадно з'єднаних 4-полюсників. Як і в попередньому випадку можна показати, що для взаємних 4-полюсників справедливе співвідношення $T_{11}T_{22} - T_{21}T_{12} = 1$, а для симетричних $T_{21} = -T_{12}$. Тоді між хвильовою матрицею і матрицею класичної теорії кіл $[Y]$ справедливі співвідношення

$$[T] = \frac{1}{2Y_{21}} \begin{bmatrix} (1+Y_{11})(1-Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} & -(1+Y_{11})(1+Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} \\ (1-Y_{11})(1-Y_{22}) - Y_{12}Y_{21} & -(1-Y_{11})(1+Y_{22}) - Y_{12}Y_{21} \end{bmatrix}. \quad (7.12)$$

А тепер проведемо розрахунок схемних функцій за матрицею передачі $[T]$, матрицею розсіювання $[S]$ та класичною матрицею $[A]$. Спочатку розрахуємо вхідний і вихідний імпеданси 4-полюсника, а також коефіцієнт передачі напруги при довільних навантаженнях на вході і на виході за $[A]$ -матрицею (або $[ABCD]$ -матрицею) у відповідності з прийнятими на рис. 7.46 позначеннями.

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_2 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \dot{U}_1 &= A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{aligned}$$

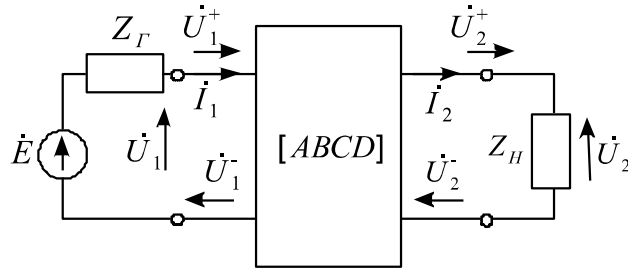


Рис. 7.46 Опис 4-полюсника через $[A]$ -матрицю

Визначимо опір навантаження і генератора:

$$Z_n = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}, \quad Z_r = \frac{\dot{E} - \dot{U}_1}{\dot{I}_1}.$$

Тоді вхідний опір визначимо через рівняння 4-полюсника в $[A]$ -формі:

$$Z_{ex} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_n + B}{CZ_r + D}.$$

Визначимо тепер фізичний зміст параметрів $[A]$ -матриці передачі.

$$A = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{K_U} \text{ — обернений коефіцієнт передачі напруги;}$$

$$B = \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} = \frac{1}{Y_{nep}} = Z_{nep}^{ob} \text{ — опір передачі;}$$

$$C = \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2} = Y_{nep}^{ob} \text{ — провідність передачі;}$$

$$D = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{1}{K_i} \text{ — обернений коефіцієнт передачі струму.}$$

Коефіцієнт передачі за напругою від джерела до навантаження знайдемо, підставляючи вирази для Z_n і Z_r :

$$K_U = \frac{\dot{U}_2}{\dot{E}} = \frac{Z_n}{AZ_n B + CZ_r Z_n + DZ_r}.$$

Для виведення виразу для схемної функції $Z_{вих}$ розглянемо 4-полюсник із незалежним джерелом напруги на виході, як обернене включення 4-полюсника. Тоді

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} = -AZ_{вих} + B, \quad \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = -CZ_{вих} + D.$$

Із першого рівняння $\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_1}{-AZ_{вих} + B}$. Підставляючи в друге рівняння,

отримаємо:

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \frac{\dot{I}_1(-AZ_{вих} + B)}{\dot{U}_1} = -\frac{1}{Z_r}(-AZ_{вих} + B) = -CZ_{вих} + D$$

або

$$-AZ_{\text{вих}} + B = CZ_{\text{вих}}Z_{\Gamma} - DZ_{\Gamma}$$

і

$$Z_{\text{вих}} = \frac{DZ_{\Gamma} + B}{CZ_{\Gamma} + A}.$$

Коефіцієнти відбивання на вході і виході 4-полюсника представимо у вигляді

$$\Gamma_{\text{вх}} = \frac{Z_{\text{вх}} - Z_{\Gamma}}{Z_{\text{вх}} + Z_{\Gamma}}, \quad \Gamma_{\text{вих}} = \frac{Z_{\text{вих}} - Z_{\Pi}}{Z_{\text{вих}} + Z_{\Pi}}.$$

А тепер, як висновок, встановимо зв'язок між системами хвильових параметрів $[T]$ і $[S]$ -матриць.

$$[T] = \frac{1}{S_{21}} \begin{bmatrix} 1 & -S_{22} \\ S_{11} & -|S| \end{bmatrix}, \quad [S] = \frac{1}{T_{21}} \begin{bmatrix} T_{21} & |T| \\ 1 & T_{12} \end{bmatrix},$$

$$|T| = T_{11}T_{22} - T_{12}T_{21} = \frac{S_{12}}{S_{21}} = |a|, \quad |S| = S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} = -\frac{T_{22}}{T_{11}}.$$

Ці матриці існують, коли $S_{21} \neq 0$ і $T_{11} \neq 0$.

Відповідно зв'язки між матрицями хвильової та класичної теорій матиме наступний вигляд:

$$\begin{aligned} [T] &= \frac{1}{2Y_{21}} \begin{bmatrix} (1+Y_{11})(1-Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} & -(1+Y_{11})(1+Y_{22}) + Y_{12}Y_{21} \\ (1-Y_{11})(1-Y_{22}) - Y_{12}Y_{21} & -(1-Y_{11})(1+Y_{22}) - Y_{12}Y_{21} \end{bmatrix}, \\ [T] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} A_{11} + A_{21} + A_{12} + A_{22} & A_{11} + A_{21} - A_{12} - A_{22} \\ A_{11} - A_{21} + A_{12} - A_{22} & A_{11} - A_{21} - A_{12} + A_{22} \end{bmatrix}, \\ [A] &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_{11} + T_{21} + T_{12} + T_{22} & T_{11} + T_{21} - T_{12} - T_{22} \\ T_{11} - T_{21} + T_{12} - T_{22} & T_{11} - T_{21} - T_{12} + T_{22} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.13)$$

Для розрахунків у схемах НВЧ зручно використовувати вже нормовані хвильові матриці. Нормування рівнянь 4-полюсника, навантаженого за входом і виходом на відрізки ліній із заданими хвильовими опорами, яке пов'язане із отриманням при описі розподілених кіл однозначних величин, тут потребує уточнення понять струму і напруги.

Величиною, яка однозначно визначена в будь-яких колах і на будь-яких частотах, є потужність на сторонах відрізка лінії або 4-полюсника (рис. 7.47). Нехай хвильовий опір лінії на вході буде R_{x1} , а на виході — R_{x2} , і є чисто активними. Тоді потужність можна визначити як U^2/R_x або I^2R_x . Для того щоб врахувати фазові властивості системи, необхідно від потужністю розуміти добуток комплексного струму на комплекс напруги. Тоді нормовані хвилі на вході і виході 4-полюсника можна записати як

$$\tilde{U}_1^+ = \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}}, \quad \tilde{U}_1^- = \frac{\dot{U}_1^-}{\sqrt{R_{x1}}}, \quad \tilde{U}_2^+ = \frac{\dot{U}_2^+}{\sqrt{R_{x2}}}, \quad \tilde{U}_2^- = \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}}.$$

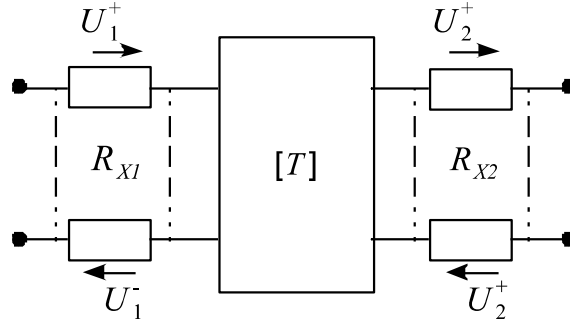


Рис. 7.47. Подання 4-полюсника для $[A]$ -параметрів

Тоді нормовані рівняння для хвильових параметрів передачі будуть визначені наступним чином:

$$\begin{cases} \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}} = \left(T_{11} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) \frac{\dot{U}_2^+}{\sqrt{R_{x2}}} + \left(T_{12} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}}, \\ \frac{\dot{U}_1^-}{\sqrt{R_{x1}}} = \left(T_{21} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) \frac{\dot{U}_2^+}{\sqrt{R_{x2}}} + \left(T_{22} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}}. \end{cases} \quad (7.14)$$

Нормовані таким чином хвилі представляють собою корені із потужності, яка переноситься падаючою і відбитою хвилями, тобто, це вже не хвилі струму чи напруги, а деякі нові змінні, які мають розмірність кореня із потужності, яка переноситься даними хвилями у відповідних лініях передачі, під'єднаних до входу і виходу 4-полюсника.

$$[\tilde{T}] = \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{bmatrix}.$$

Аналогічні умови нормування для $[S]$ -матриці можна також записати

$$\begin{cases} \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}} = \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}} S_{11} + \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}} \left(S_{12} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right), \\ \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}} = \frac{\dot{U}_1^+}{\sqrt{R_{x1}}} \left(S_{21} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \right) + \frac{\dot{U}_2^-}{\sqrt{R_{x2}}} S_{22}, \end{cases} \quad [\tilde{S}] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} \\ S_{21} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} & S_{22} \end{bmatrix}.$$

Нормування класичної матриці передачі $[A]$ пов'язане із наступними нормованими змінними:

$$\tilde{U}_1 = \frac{\dot{U}_1}{\sqrt{R_{x1}}}, \quad \tilde{U}_2 = \frac{\dot{U}_2}{\sqrt{R_{x2}}}, \quad \tilde{I}_1 = I_1 \sqrt{R_{x1}}, \quad \tilde{I}_2 = I_2 \sqrt{R_{x2}}.$$

Тоді нормована матриця передачі $[\tilde{A}]$ приймає вид

$$[\tilde{A}] = \begin{bmatrix} A_{11} \sqrt{\frac{R_{x2}}{R_{x1}}} & \frac{A_{12}}{\sqrt{R_{x1} R_{x2}}} \\ A_{21} \sqrt{R_{x1} R_{x2}} & A_{22} \sqrt{\frac{R_{x1}}{R_{x2}}} \end{bmatrix}.$$

Хвильові нормовані матриці для типових пасивних елементів можуть бути представлені у вигляді наступних n -полюсників (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Хвильові нормовані матриці пасивних елементів НВЧ-кіл

№ п/п	Тип n -полюсника	Схема	Формула
1	Двополюсник біля лівого плеча		$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1-Y}{1-Y} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{Z_{x1}}{Z}$
2	Двополюсник біля правого плеча		$[S] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-Y}{1-Y} \end{bmatrix} \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{Z_{x2}}{Z}$
3	Послідовний опір		$[S] = \begin{bmatrix} \frac{Z}{2+Z} & \frac{2}{2+Z} \\ \frac{2}{2+Z} & \frac{Z}{2+Z} \end{bmatrix} \quad Z = \frac{Z}{Z_x}$
4	Паралельний опір		$[S] = \begin{bmatrix} \frac{-Y}{2+Y} & \frac{2}{2+Y} \\ \frac{2}{2+Y} & \frac{-Y}{2+Y} \end{bmatrix} \quad Y = \frac{1}{Z} = \frac{Z_x}{Z}$
5	Ідеальний трансформатор		$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1-N^2}{1+N^2} & \frac{\pm 2N}{1+N^2} \\ \frac{\pm 2N}{1+N^2} & \frac{1-N^2}{1+N^2} \end{bmatrix} \quad N = \frac{w_1}{w_2}$
6	Відрізок однорідної лінії передачі без втрат довжиною l і хвильовим опором Z_x		$[S] = \begin{bmatrix} 0 & e^{-j\theta} \\ e^{-j\theta} & 0 \end{bmatrix} \quad \theta = \frac{2\pi l}{\lambda}$

7.6. Пристрої НВЧ: направлені відводи і мости, подільники, суматори, фазообертачі

7.6.1. Основні параметри направлених відводів і мостів та їх зв'язок із матрицею розсіювання.

Направлений відвід (НВ) є восьмиполюсним пристроєм, який здійснює направлене відведення енергії. У таких пристроях розрізняють первинну (основну) і вторинну (допоміжну) лінії. При збудженні одного із плеч первинної лінії частина потужності передається у друге плече цієї лінії, а частина – в одне із плеч вторинної лінії. При цьому в друге плече вторинної лінії потужність не передається і воно є розв'язаним відносно збудженого плеча первинної лінії.

Різновидністю НВ є гібридні з'єднання, які представляють собою НВ, що здійснюють рівний поділ потужності між зв'язаними плечами. Таке гібридне з'єднання, напруга у вихідних плечах якого має постійний фазовий зсув у заданій смузі частот, називають мостом. Різновидності НВ показані на рис. 7.48. В ідеальному випадку НВ представляє собою чисто реактивний (без втрат) взаємний восьмиполюсник, який може бути описаний матрицею розсіювання

$$[S] = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & S_{34} \\ S_{41} & S_{42} & S_{43} & S_{44} \end{bmatrix}.$$

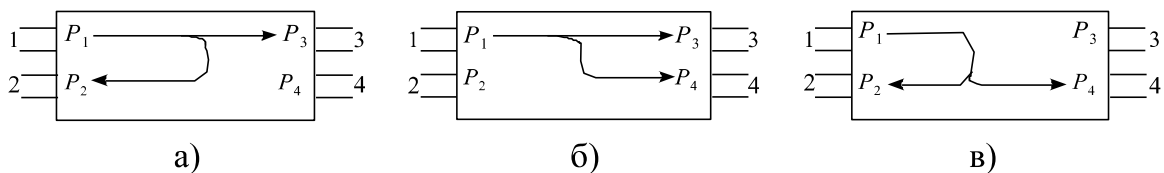


Рис. 7.48. Різновидності направлених відводів

Характеристики НВ можуть бути визначені через елементи матриці розсіювання. Основними характеристиками НВ є:

– робоче затухання ($\delta\beta$), яке визначається як відношення потужностей на вході і виході первинної лінії:

$$C_{13} = 10 \lg \left(\frac{P_1}{P_3} \right) = 10 \lg \left(\frac{1}{|S_{13}|^2} \right);$$

– перехідне затухання, яке визначається як відношення потужностей на вході первинної лінії і на зв'язаному з ним виході вторинної лінії:

$$C_{12} = 10 \lg \left(\frac{P_1}{P_2} \right) = 10 \lg \left(\frac{1}{|S_{12}|^2} \right);$$

– розв'язка, яка визначається як відношення потужностей на вході первинної лінії і на розв'язаному виході вторинної лінії:

$$C_{14} = 10 \lg \left(\frac{P_1}{P_4} \right) = 10 \lg \left(\frac{1}{|S_{14}|^2} \right);$$

– направленість НВ:

$$C_{24} = 10 \lg \left(\frac{P_2}{P_4} \right) = 10 \lg \left(\frac{|S_{12}|^2}{|S_{14}|^2} \right);$$

– нерівномірність ділення, яке являє собою різницю між перехідним затуханням і затуханням у первинній лінії:

$$\Delta C = C_{12} - C_{13};$$

– КСХ в i -ому плечі:

$$K_{cm U_i} = \frac{1 + |S_{ii}|}{1 - |S_{ii}|};$$

– коефіцієнт ділення за напругою $M = S_{13}/S_{12}$ та коефіцієнт ділення за потужністю $m = |M|^2 = |S_{13}|^2 / |S_{12}|^2$;

– фазові співвідношення НВ, які характеризують абсолютні значення фаз напруг у плечах або відносну різницю фаз напруг вихідних плеч.

За типом зв'язку розрізняють кільцеві і шлейфові НВ. Топологія кільцевого НВ на МСЛ показана на рис. 7.49. При збудженні плеча 1 вхідний

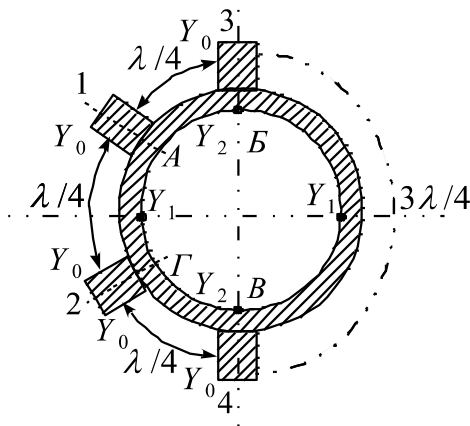


Рис. 7.49. Кільцевий направлений відвід

сигнал ділиться на дві частини і поширюється по двом каналам. Сигнали складаються синфазно (пучність напруг) у точках B і Γ кільця і протифазно в точці A (вузол напруг). При рівності амплітуд цих сигналів напруга в точці B рівна нулю і потужність у плече 4 не передається. Таким чином, сигнал, який поступає в плече 1, ділиться між плечами 2 і 3, які є суміжними по відношенню до плеча 1.

Умова ідеального узгодження в термінах, нормованих відносно Y_0 хвильових провідностей ($y_1 = Y_1/Y_0$, $y_2 = Y_2/Y_0$), приймає вигляд: $y_1^2 + y_2^2 = 1$. Матриця розсіювання кільцевого НВ на середній частоті робочого діапазону визначається як

$$[S] = -1 \begin{bmatrix} 0 & y_1 & y_2 & 0 \\ y_1 & 0 & 0 & y_2 \\ y_2 & 0 & 0 & -y_1 \\ 0 & y_2 & -y_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, що $\arg(S_{21}/S_{31})=0$, $\arg(S_{24}/S_{34})=\pi$, тобто кільцевий НВ є синфазно-протифазним. Коефіцієнт поділу потужності $m=|S_{31}|^2/|S_{21}|^2=y_2^2/y_1^2$, а відносні хвильові провідності рівні $y_1=\sqrt{1/(1+m)}$, $y_2=\sqrt{m/(1+m)}$. Для гібридного кільця (моста) $m=1$, $Y_1=Y_2=Y_0/\sqrt{2}$.

Шлейфовий НВ являє собою два відрізки лінії передачі, які з'єднані між собою двома або більшим числом шлейфів, довжина яких рівна $\lambda/4$ (рис. 7.50). Шлейфи включаються в лінію на відстані $\lambda/4$. Тут умова ідеального погодження вже визначається як $y_1^2=y_2^2-1$, де $y_1=Y_1/Y_0$, $y_2=Y_2/Y_0$ – нормовані хвильові провідності відрізків лінії передачі.

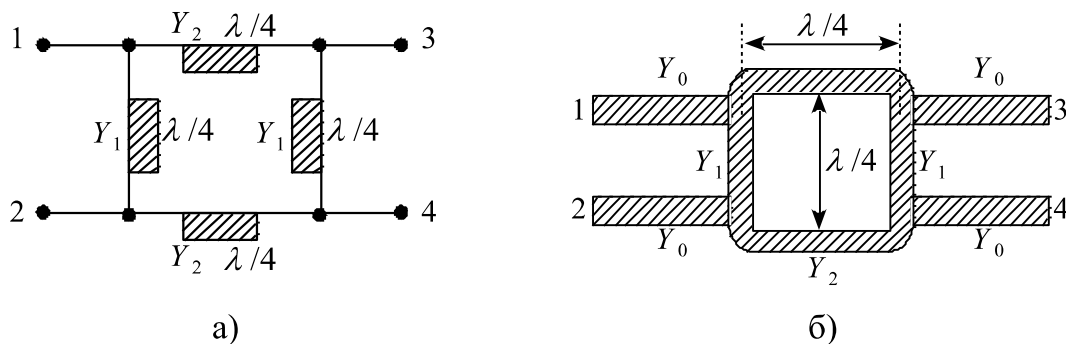


Рис. 7.50. Електрична схема та топологія двошлейфового НВ

При ідеальному погодженні матриця розсіювання двошлейфового НВ має вигляд

$$[S] = -\frac{1}{y_2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & j & y_1 \\ 0 & 0 & y_1 & j \\ j & y_1 & 0 & 0 \\ y_1 & j & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Робоче затухання в первинній лінії визначається як $C_{13}=10\lg y_2^2$, а перехідне затухання $C_{14}=10\lg(y_2^2/y_1^2)$. Коефіцієнт поділу потужності $m=|S_{31}|^2/|S_{41}|^2=1/y_1^2=1/(y_2^2-1)$ або $y_1=\sqrt{1/m}$, $y_2=\sqrt{(m+1)/m}$.

7.6.2. Подільники і суматори потужності НВЧ. Фазообертачі.

При розробці пристроїв НВЧ різного призначення широке застосування знаходять подільники і суматори потужності. Подільники потужності поділяють потужність, яка поступає на вхід, між вихідними каналами (аналогічно як резистивні подільники в електричних колах). Суматори забезпечують додавання потужностей, які поступають по вхідним каналам, до загального навантаження. Подільники і суматори є взаємними пристроями, тобто можуть виконувати як ділення, так і сумування

потужностей. У залежності від призначення подільники потужності здійснюють рівний або нерівний поділ на два і більше число каналів.

Подільники можуть бути виконані на основі послідовних або паралельних схем. Вибір того чи іншого схемного рішення проводиться, виходячи із технічних вимог до пристрою і технології його формування.

Подільник потужності послідовного типу є одним із найбільш поширених і простих подільників на гладких переходах (рис. 7.51). Умовно погодження такого подільника має вигляд $Y_i = Y_{i+1} + Y_{i+2}$, де Y_i – хвильовий опір відповідних ліній. Розподіл потужності залежить від співвідношення хвильових провідностей вихідних ліній передачі. При рівномірному розподілі потужності $Y_2 = Y_4 = Y_6 = Y_8 = Y_{10}$ ($Y_0 = Y_9$).

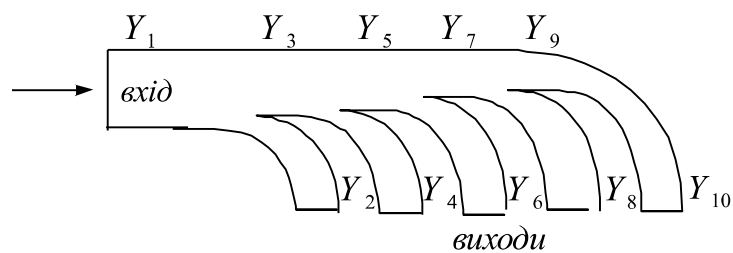


Рис. 7.51. Топологія подільника потужності послідовного типу

Простою схемою паралельного типу є суматор потужності, який виконаний у вигляді багатопроменевої зірки. На рис. 7.52 подана схема суматора потужності, вхідні і вихідні плечі якого мають однакові хвильові опори Z_0 . Їх узгодження здійснюється за допомогою чвертьхвильового відрізка лінії передачі, хвильовий опір якої рівний $Z_1 = Z_0 \sqrt{N}$, де N – число вхідних плечей. Розв'язка генераторів в дБ визначається числом вхідних плечей:

$$C = 10 \lg \left(\frac{1 - N^2}{2N - 1} \right).$$

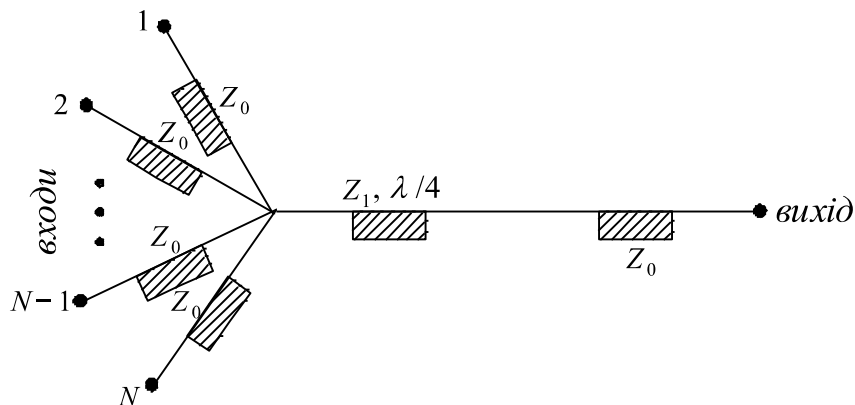


Рис. 7.52. Електрична схема суматора потужності у вигляді багатопроменевої зірки

Особливу увагу заслуговують кільцеві подільники потужності (рис. 7.53). Узгодження входу і виходів у них досягається підбором хвильових опорів чвертьхвильових відрізків МСЛ, в яких при рівному поділі потужності $Z_1 = Z_0 \sqrt{2}$. При збудженні подільника із входу 3 внаслідок його електричної симетрії точки B і C є еквіпотенціальними. Тому струм через резистор R_ϕ не протікає і потужність на ньому не витрачається. Уся потужність ділиться порівну і передається у навантаження до вихідних плеч 1 і 2. При збудженні подільника із сторони одного із вихідних плеч (нехай 1), сигнал у точку C приходить двома шляхами: через чвертьхвильовий відрізок шлях $B-A-C$ і через резистор R_ϕ шлях $B-C$. Різниця фаз сигналів, які пройшли ці шляхи складає π . Баластний опір $R_\phi = 2Z_0$ забезпечує рівність амплітуд протифазних сигналів. Тоді напруга в точці C рівна нулю, а потужність сигналу, який поступає на вихід 1, частково гаситься на опорі R_ϕ і частково поступає в плече 3. Це ніби фільтр протифазних сигналів.

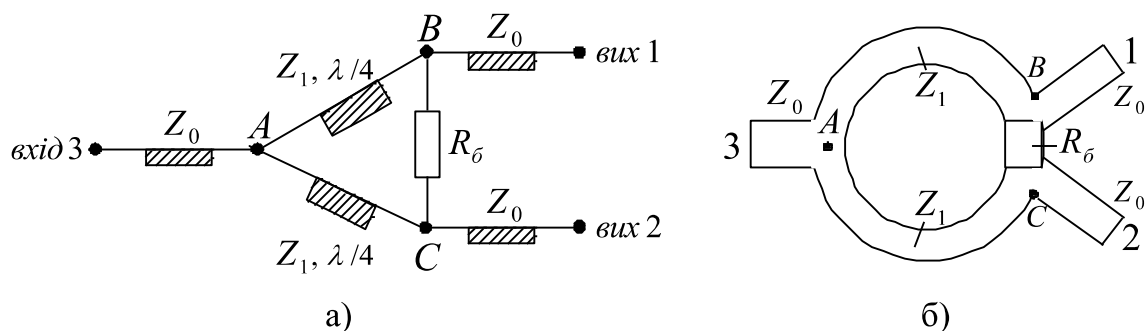


Рис. 7.53. Електрична схема (а) і топологія (б) одноступеневого кільцевого подільника потужності

Кільцеві подільники можуть здійснювати також і нерівний поділ потужності. Тоді чвертьхвильові відрізки мають різні хвильові опори як на вході, так і на виходах подільника потужності. Якщо $n^2 = P_2/P_1$, то опори на вході $Z_1 = Z_0 \sqrt[4]{n(1+n^2)}$, $Z_2 = Z_0 \sqrt[4]{n^3(1+n^2)}$, $Z_3 = Z_0 \sqrt[4]{(1+n^2)/n^5}$, а опори на виході $Z_4 = Z_0 \sqrt{n}$, $Z_5 = Z_0/\sqrt{n}$, і $R_\phi = Z_0(1+n^2)/n$. Саме такі суматори легко формуються за рахунок інтегральної технології.

Застосування НВ та мостів у схемах суматорів потужності має свої особливості, які визначаються необхідністю синхронізації збуджуючих генераторів.

Керування фазою сигналу в тракті НВЧ проводиться за допомогою дво- або чотирьополусних пристроїв із змінними параметрами, які змінюються під дією електричного чи магнітного поля. Такі пристрої називаються фазообертачами і широко використовуються у фазованих антенних ґратках, радіопередавальних і радіоприймальних пристроях НВЧ.

Сьогодні широке розповсюдження отримали фазообертачі на напівпровідникових діодних структурах ($p-n$, $p-i-n$, $n-i-p-i-n$). Робота $p-i-n$ -діода базується на зміні активної складової опору i -області при позитивному зміщенні, коли через діод протікає струм. При відсутності позитивного зміщення опір діода складає одиниці кілоом. При позитивному зміщенні ($\approx 1B$) опір падає до одиниць Ом і залежить від величини струму.

Фазообертачі на напівпровідникових діодах можуть бути як прохідними (тоді їх розглядають як 4-поліусники), так і відбивними (як двополіусники). На рис. 7.54 показана принципова електрична схема дискретного прохідного фазообертача на $p-i-n$ -діодах з використанням 3дБ -направленого відводу. Сама схема представляє собою восьмиполіусник, два плеча якого використовуються як вхід (плече 1) і вихід (плече 2), та два плеча (3 і 4), які навантажені ідентичними відбивними комірками.

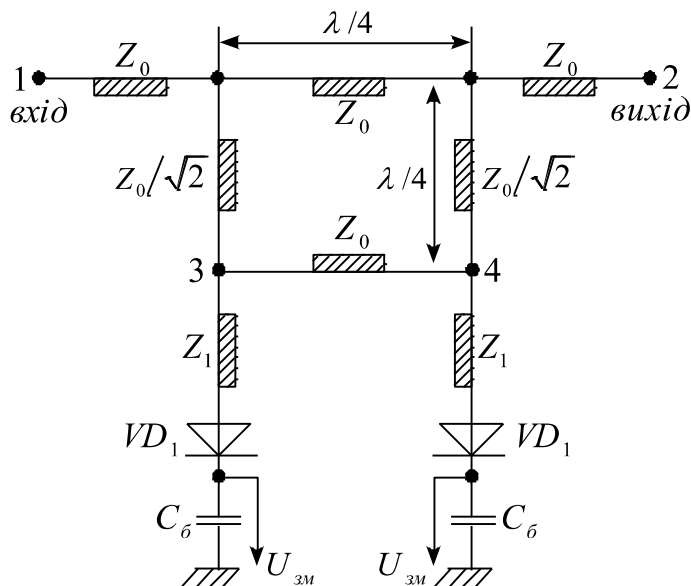


Рис. 7.54. Прохідний фазообертач

Вхідний сигнал подається в плече 1 і ділиться на два сигнали рівної амплітуди, які поступають в плечі 3 і 4. Фази цих сигналів відрізняються на 90° . Сигнали, які поступили в плечі 3 і 4, відбиваються, причому, фази відбитих сигналів визначаються вхідним опором відбивача, а відповідно, наявністю або відсутністю позитивного зміщення на $p-i-n$ -діодах, і відбиті сигнали складаються синфазно в плече 2 і поступають у навантаження.

7.7. Автоматизоване проектування пасивних пристроїв НВЧ. Метод декомпозиції

Однією із тенденцій у розвитку техніки НВЧ на сучасному етапі є все більша її мініатюризація та інтеграція, тобто створення таких конструкцій, які об'єднують десятки елементів та пристроїв без проміжних розмикачів.

При розробці ІС НВЧ найбільш повно розкриваються переваги автоматизованого проектування. Найширше застосування в ІС знайшли МСЛ та елементи на їх основі, які формуються технологією мікроелектроніки. Поряд з цим досліджується можливість використання для створення ІС НВЧ ліній передачі на основі діелектричних хвилеводів.

Необхідність автоматизації проектування ІС НВЧ обумовлена тим, що практично неможливе налаштування і регулювання параметрів мікросмугових і діелектричних структур, які складають основу схем. Крім цього, велике число елементів ІС утруднює можливість експериментального підбору необхідних параметрів і режимів роботи схеми. Все це вимагає строгого електродинамічного підходу при розробці математичного забезпечення систем автоматизованого проектування (САПР) пристроїв НВЧ. Тут також потрібний особливий підхід до створення бази даних елементів та їх тестового контролю в процесі їх формування.

До розробки будь-яких алгоритмів завжди слідує так звана формалізація задачі. Це питання в САПРі називається постановкою задачі. У ній виділяється дуже важливих два етапи:

- 1) перехід від реального об'єкта до фізичної моделі;
- 2) математична формалізація прийнятої фізичної моделі або, іншими словами, математичне моделювання.

Ці два етапи повинні закінчуватися верифікацією, тобто перевіркою правильності прийнятих фізичних і математичних моделей.

Математична модель – це звичайна система лінійних алгебраїчних рівнянь, до розв'язання якої зводиться задача аналізу електродинамічної структури. Результатом розв'язання такої системи є спектр власних функцій і власних значень (якщо мова йде про регулярний відрізок направляючої системи) або матриця розсіювання (у випадку аналізу неоднорідностей полів). Очевидно, що будь-який пасивний пристрій НВЧ можна подати у вигляді набору відрізків регулярних ліній передачі і різних неоднорідностей, на які можуть бути спроектовані свої тестові елементи і структури. Результати їх аналізу дозволяють отримати матрицю розсіювання пристрою в цілому і за правилами об'єднання матриць окремих елементів. Тоді задача параметричного синтезу зводиться, в свою чергу, до оптимізації відповідних елементів матриці розсіювання шляхом підбору електричних параметрів і геометричних розмірів структури, що синтезується. Це вже так званий етап тестового аналізу електрофізичних параметрів елементів.

Розглянемо властивості матриці розсіювання пасивного багатополіусника. Повернемося до його визначення. Багатополіусним з'єднанням чи багатополіусником називається електричне коло, що має $2n$ затискачів, які попарно утворюють n входів. У загальному випадку число входів визначається не тільки числом розгалужень, але й числом типів хвиль, які існують в даному пристрої у певному частотному діапазоні. У цьому випадку число входів багатополіусника визначається реальним числом входів даного пристрою.

Матриця розсіювання багатополюсника будується за тим же самим принципом, що і матриця 4-полюсника. Запишемо для пасивного багатополюсника, зображеного на рис. 7.55, вирази, які пов'язують амплітуди напруги падаючих і відбитих від багатополюсника хвиль:

$$\begin{aligned}\dot{U}_{1\text{ від}} &= S_{11} \dot{U}_{1\text{ над}} + S_{12} \dot{U}_{2\text{ над}} + \dots + S_{1n} \dot{U}_{n\text{ над}}, \\ \dot{U}_{2\text{ від}} &= S_{21} \dot{U}_{1\text{ над}} + S_{22} \dot{U}_{2\text{ над}} + \dots + S_{2n} \dot{U}_{n\text{ над}}, \\ &\dots\dots\dots \\ \dot{U}_{n\text{ від}} &= S_{n1} \dot{U}_{1\text{ над}} + S_{n2} \dot{U}_{2\text{ над}} + \dots + S_{nn} \dot{U}_{n\text{ над}}.\end{aligned}$$

Ці співвідношення можуть бути подані в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{ від}} \\ \dot{U}_{2\text{ від}} \\ \dots\dots\dots \\ \dot{U}_{n\text{ від}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots\dots S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots\dots S_{2n} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots\dots S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{ над}} \\ \dot{U}_{2\text{ над}} \\ \dots\dots\dots \\ \dot{U}_{n\text{ над}} \end{bmatrix} \quad \text{або} \quad [\dot{U}_{\text{від}}] = [S][\dot{U}_{\text{над}}]$$

де $[S]$ – матриця розсіювання, $\dot{U}_{\text{над}}$ і $\dot{U}_{\text{від}}$ – вектор-стовпець падаючих і відбитих хвиль напруг відповідно, а елементи матриці $S_{\sigma\nu} = \left. \frac{U_{\text{від}\sigma}}{U_{\text{над}\nu}} \right|_{U_{\text{над}i}=0}$ мають зміст коефіцієнта передачі за напругою із плеча ν в плече σ .

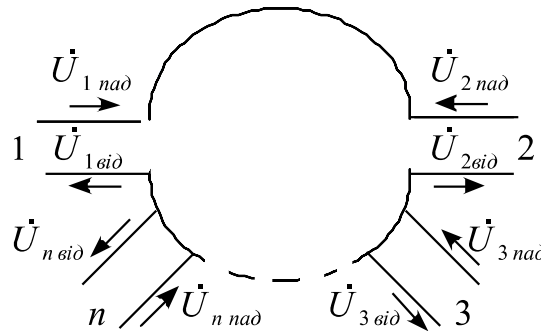


Рис. 7.55. Пасивний багатополюсник, який описує розгалуження (неоднорідність) n ліній передачі

Якщо втрати в багатополюснику відсутні, то сумарна потужність відбитих хвиль рівна сумарній потужності падаючих хвиль, що відповідає унітарності матриці розсіювання:

$$\sum_{k=1}^{\infty} S_{k\sigma} S_{k\nu}^* = \begin{cases} 1, & \sigma = \nu \\ 0, & \sigma \neq \nu \end{cases}.$$

Елементи матриці розсіювання $S_{\nu\nu}$ визначають коефіцієнти відбивання при подачі сигналу в ν -плече, якщо до решти входів підключені узгоджені навантаження.

У загальному випадку, як було визначено раніше, число входів, а відповідно, і число рядків і стовпців у матриці розсіювання визначаються не тільки числом розгалужень у багатополюснику, але й числом типів хвиль, які є в пристрої на робочій частоті. Тоді матриця, яка описує електромагнітний процес у досліджуваному багатополюснику, складається із n^2 блоків, де n – число ліній передачі (хвильових каналів), які підходять до багатополюсника. Число рядків і стовпців у кожному блоці визначається числом типів хвиль, які існують в каналах, що відповідають даному блоку.

Нехай до визначеного числа входів (каналів) досліджуваного пристрою приходить сигнал у вигляді набору власних хвиль. У цьому випадку в кожному каналі поширюються і відбиті хвилі, які є відкликами пристрою на падаючі прямі хвилі. Поле в кожному каналі можна подати у вигляді суперпозиції падаючих і відбитих обернених хвиль:

$$\begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}_i = \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}_{i\text{ над}} + \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{H} \end{bmatrix}_{i\text{ від}} , \quad i=1\dots n.$$

Відбиті хвилі в кожному каналі представляють результат дії на даний пристрій падаючих хвиль у всіх каналах. Введемо вектори комплексних амплітуд в i -ому каналі хвиль $\dot{U}_{k\text{ над}}^i$ і вектори комплексних амплітуд в тому ж каналі $\dot{U}_{k\text{ від}}^i$. Тут k – номер хвилі в даному каналі. У загальному випадку будуть нескінченно мірними, оскільки число типів хвиль у кожному каналі є нескінченним. Тоді залежність між цими векторами можна записати у вигляді матричного рівняння:

$$\begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{ від}}^1 \\ \dot{U}_{2\text{ від}}^1 \\ \dots \\ \dot{U}_{1\text{ від}}^2 \\ \dot{U}_{2\text{ від}}^2 \\ \dots \\ \dot{U}_{1\text{ від}}^n \\ \dot{U}_{2\text{ від}}^n \\ \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11}^{11} & S_{12}^{11} & S_{13}^{11} & \dots & S_{11}^{12} & S_{12}^{12} & S_{13}^{12} & \dots & S_{11}^{1n} & S_{12}^{1n} & S_{13}^{1n} & \dots \\ S_{21}^{11} & S_{22}^{11} & S_{23}^{11} & \dots & S_{21}^{12} & S_{22}^{12} & S_{23}^{12} & \dots & S_{21}^{1n} & S_{22}^{1n} & S_{23}^{1n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{11}^{21} & S_{12}^{21} & S_{13}^{21} & \dots & S_{11}^{22} & S_{12}^{22} & S_{13}^{22} & \dots & S_{11}^{2n} & S_{12}^{2n} & S_{13}^{2n} & \dots \\ S_{21}^{21} & S_{22}^{21} & S_{23}^{21} & \dots & S_{21}^{22} & S_{22}^{22} & S_{23}^{22} & \dots & S_{21}^{2n} & S_{22}^{2n} & S_{23}^{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ S_{11}^{n1} & S_{12}^{n1} & S_{13}^{n1} & \dots & S_{11}^{n2} & S_{12}^{n2} & S_{13}^{n2} & \dots & S_{11}^{nn} & S_{12}^{nn} & S_{13}^{nn} & \dots \\ S_{21}^{n1} & S_{22}^{n1} & S_{23}^{n1} & \dots & S_{21}^{n2} & S_{22}^{n2} & S_{23}^{n2} & \dots & S_{21}^{nn} & S_{22}^{nn} & S_{23}^{nn} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_{1\text{ над}}^1 \\ \dot{U}_{2\text{ над}}^1 \\ \dots \\ \dot{U}_{1\text{ над}}^2 \\ \dot{U}_{2\text{ над}}^2 \\ \dots \\ \dot{U}_{1\text{ над}}^n \\ \dot{U}_{2\text{ над}}^n \\ \dots \end{bmatrix},$$

де n – число каналів.

На практиці в кожному каналі враховується лише кінцеве число типів хвиль. Тоді блок S^{ij} матриці розсіювання, який характеризує передачу з j -ого каналу в i -ий, складається з k_i рядків та l_j стовпців, де k_i – число типів хвиль, які враховані в i -ому каналі, l_j – число типів хвиль, які враховані в j -ому каналі.

Саме матриця розсіювання $[S]$ описує будь-які можливі режими в конкретному багатополюснику. Відповідно, якщо відомі всі її компоненти, то

можна повністю дослідити електромагнітний процес, який відбувається в багатополюснику, без врахування його внутрішньої структури.

Хвильові матриці розсіювання $[S]$ дуже широко використовують при аналізі кіл НВЧ. Основним засобом їх обчислення є електродинамічна теорія. Для дослідження будь-якого складного пристрою НВЧ необхідно розв'язати ряд так званих ключових задач. Під ключовою задачею тут розуміється крайова задача електродинаміки, розв'язавши яку можна отримати інформацію про матрицю розсіювання пристрою.

Для визначення елементів матриці розсіювання $[S]$ ключову задачу вирішують у режимі дифракції хвиль всіх врахованих типів у всіх каналах. При цьому розв'язуються однорідні рівняння Максвелла при умові, що в одному із каналів багатополюсника, що відповідає даному пристрою, існує пряма хвиля заданого типу, а у всіх інших каналах прямі хвилі відсутні.

При визначенні елементів матриці повних опорів $[Z]$ ключові задачі розв'язують в режимі холостого ходу. Елементи матриці $[Y]$ повних провідностей визначають в режимі короткого замикання. У першому випадку на один із входів подається $H_r \neq 0$, а на решту входів $H_r = 0$, де H_r – дотична до площини входу складова напруженості магнітного поля. У другому випадку на один із входів подається $E_r \neq 0$, а на решту входів $E_r = 0$, де E_r – аналогічна дотична складова напруженості електричного поля.

Застосовувані на практиці пристрої НВЧ є досить складними і можуть мати розміри, які значно перевищують довжину хвилі. Це приводить, як правило, до великих і часто нездоланих труднощів при розв'язанні задач для пристрою в цілому. Тоді доцільно будь-який пристрій подати у вигляді сукупності елементів, для кожного із яких незалежно від інших можна розв'язати просту електродинамічну задачу. Такий метод дослідження пристроїв НВЧ називають методом декомпозиції, а окремі елементи, на які розбивається пристрій – автономними блоками. Тоді загальна матриця $[S]$ буде визначатися із блочних матриць $[S_i]$.

Контрольні запитання

1. Які структури відносяться до пасивних елементів пристроїв НВЧ?
2. Які види ліній передач частіше всього використовуються в ІС НВЧ? Які наближення використовуються при їх аналізі?
3. Якими конструкціями можуть бути представлені найбільш типові послідовні індуктивні елементи ІС НВЧ? Якими схемними моделями для схемотехнічного аналізу ІС можуть бути представлені дані конструкції?
4. Які конструкції використовуються для представлення ємнісних елементів ІС НВЧ? Що відноситься до основних параметрів ємнісних елементів?

5. Які функції виконують плівкові резистори в ІС НВЧ? Назвіть їх основні параметри.
6. Яке призначення резонаторів і фільтрів у схемах НВЧ? Які особливості їх топології і схемних моделей?
7. Які функції виконують діафрагми, резонансні вікна і трансформатори повних опорів у схемах НВЧ? Назвіть найбільш поширені типи трансформаторів повних опорів, які використовують для узгодження хвильових опорів у хвильоводах.
8. Назвіть основні способи з'єднання 4-полюсників. Який математичний апарат використовується для опису хвильових параметрів 4-полюсників?
9. Назвіть основні параметри направлених відводів і мостів та їх зв'язок із матрицею розсіювання.
10. Яке призначення подільників і суматорів потужності НВЧ? Які схеми і топології використовуються для їх реалізації. Для чого призначені фазообертачі в схемах НВЧ, які структури лежать в їх основі?

Рекомендована література

1. Веселов Г.И. Микроэлектронные устройства СВЧ. – М.: Высшая школа, 1988. – 280 с.
2. Гассанов Л.Г., Липатов А.А. и др. Твердотельные устройства СВЧ в технике связи. – М.: Радио и связь, 1988. – 288 с.
3. Фуско В. СВЧ цепи. Анализ и автоматизированное проектирование. – М.: Радио и связь, 1990. – 288 с.
4. Гупта К., Гардж Р., Чадха Р. Машинное проектирование СВЧ устройств. – М.: Радио и связь, 1987. – 432 с.
5. Качанов З.Г. Электрические цепи с распределенными параметрами и цепные схемы. – М.: Энергоатомиздат, 1990. – 218 с.
6. Фельдштейн А.Л., Явиг Л.Р. Синтез четырехполюсников и восьмиполюсников на СВЧ. – М.: Связь, 1971. – 388 с.
7. Гайдук В.И., Палатов К.И., Петров Д.И. Физические основы электроники СВЧ. – М.: Советское радио, 1971. – 601 с.
8. Лебедев И.В. Техника и приборы СВЧ. – М.: Высшая школа, 1972. – Т. 1. – 389 с.; Т. 2. – 375 с.
9. Величко Ю.Т. Чотирьополюсники. – Львів: Політехніка, 1972. – 620 с.
10. Шматько О.О., Одарено Є.М. Електроніка надвисоких частот. Основи теорії і лабораторний практикум. – Харків: Факт, 2003. – 245 с.
11. Тимофеев В.И. Электронные цепи СВЧ. – К.: НТУУ “КПИ”, 2006. – 170 с.