

## Лабораторна робота "Моделі формування оптимального інвестиційного портфеля"

**Мета** – закріплення теоретичного й практичного матеріалу за темою "Сучасна портфельна теорія", набуття навичок побудови моделей оптимізації інвестиційного портфеля в середовищі *Microsoft Excel*.

**Умови завдання.** Котирування цінних паперів задані в табл. 1.

Таблиця 1

### Котирування цінних паперів

Дата	Газпром	АвтоВАЗ	Аерофлот	ВТБ	Уркалій
16.01.2013 р.	146,29	15,833	48,80	0,0575	2 001,00
15.01.2013 р.	147,73	15,950	49,45	0,0574	2 006,00
14.01.2013 р.	149,60	15,725	49,53	0,0578	2 020,00
11.01.2013 р.	147,97	15,670	48,00	0,0575	2 006,10
10.01.2013 р.	147,60	15,850	47,16	0,0552	2 008,50
09.01.2013 р.	148,91	16,040	47,19	0,0548	2 026,70
08.01.2013 р.	147,90	16,163	46,22	0,0549	2 024,60
28.12.2012 р.	143,70	15,932	44,99	0,0536	2 000,20
27.12.2012 р.	144,95	16,050	43,70	0,0542	2 011,00
26.12.2012 р.	145,06	16,058	43,25	0,0542	2 015,60

**Необхідно:** з використанням програми *Microsoft Excel* та надбудови "Пошук рішення" визначити частки капіталу, що потрібно витратити на купівлю кожного виду цінних паперів при:

1) мінімальному ризику й заданій ефективності на рівні не нижче ніж 75 % від максимальної ефективності серед усіх цінних паперів на основі моделі Марковіца і Тобіна;

2) максимальній ефективності й заданому ризику на рівні не вище ніж 125 % від мінімального рівня ризику на основі моделі Марковіца;

3) ризиковано-ефективній моделі;

4) мінімальному ризику й максимальній ефективності на основі моделі Тобіна.

## Методичні рекомендації

**1. Основні поняття.** Мета інвестора – вкласти гроші так, щоб зберегти свій капітал, а при можливості і збільшити його.

Набір цінних паперів, що знаходяться в учасника ринку, називається його портфелем. Вартість портфеля – це сумарна вартість усіх складових його паперів. Якщо сьогодні його вартість є  $P$ , а через рік вона виявиться рівною  $\dot{P}$ , то  $(\dot{P} - P)/P$  природно назвати прибутковістю портфеля у відсотках річних. Тобто прибутковість портфеля – це дохідність на одиницю його вартості.

Нехай  $x_i$  – частка капіталу, витрачена на купівлю цінних паперів  $i$ -го виду. Весь виділений капітал приймається за одиницю. Нехай  $d_i$  – дохідність у частках річних паперів  $i$ -го виду в розрахунку на одну грошову одиницю.

Знайдемо прибутковість усього портфеля  $d_p$ . З одного боку, через рік капітал портфеля буде дорівнювати  $1 + d_p$ , з іншого – вартість паперів  $i$ -го виду збільшиться з  $x_i$  до  $x_i + d_i x_i$ , так що сумарна вартість портфеля буде  $\sum_i x_i + \sum_i x_i d_i = 1 + \sum_i x_i d_i$ . Прирівнюючи обидва вирази для вартості портфеля, отримуємо:  $1 + d_p = 1 + \sum_i x_i d_i$ . Звідси:

$$d_p = \sum_i x_i d_i. \quad (1)$$

Отже, задача збільшення капіталу портфеля еквівалентна аналогічній задачі про дохідність портфеля, виражену через дохідності паперів і їх частки формулою (1).

Як правило, дохідність коливається в часі, так що будемо вважати її випадковою величиною. Нехай  $m_i$  – середня очікувана прибутковість, тобто  $m_i = M[d_i]$  – математичне очікування дохідності і  $D_i = \sigma^2$  – дисперсія  $i$ -ї дохідності. Позначимо  $\sigma^2 = D_i = r_i$  і будемо називати  $m_i$  і  $r_i$  відповідно, ефективністю та ризиком  $i$ -го цінного паперу. Через  $v_{ij}$  позначимо коваріації дохідностей цінних паперів  $i$ -го і  $j$ -го видів.

Оскільки дохідність складових портфеля цінних паперів випадкова, то й дохідність портфеля є також випадковою величиною.

Математичне очікування дохідності портфеля позначимо через  $m_p$  і назовемо ефективністю портфеля:

$$m_p = M[d_p] = x_1 \cdot M[d_1] + \dots + x_n \cdot M[d_n] = \sum_i x_i m_i.$$

Дисперсію дохідності портфеля позначимо через  $r_p$  і назовемо ризиком портфеля.

$$r_p = D[d_p] = \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij}.$$

Вихідні дані на листі *Microsoft Excel* наведені на рис. 1.

	A13					
	A	B	C	D	E	F
1	Котировки ценных бумаг					
2	Дата	Газпром	АвтоВАЗ	Аерофлот	ВТБ	Уркалій
3	16.01.2013	146,29	15,833	48,80	0,0575	2001,00
4	15.01.2013	147,73	15,950	49,45	0,0574	2006,00
5	14.01.2013	149,60	15,725	49,53	0,0578	2020,00
6	11.01.2013	147,97	15,670	48,00	0,0575	2006,10
7	10.01.2013	147,60	15,850	47,16	0,0552	2008,50
8	09.01.2013	148,91	16,040	47,19	0,0548	2026,70
9	08.01.2013	147,90	16,163	46,22	0,0549	2024,60
10	28.12.2012	143,70	15,932	44,99	0,0536	2000,20
11	27.12.2012	144,95	16,050	43,70	0,0542	2011,00
12	26.12.2012	145,06	16,058	43,25	0,0542	2015,60

Рис. 1. Вихідні дані котирування цінних паперів

Перш ніж будувати модель, необхідно визначити дохідності кожного виду цінного паперу  $d_i = (\dot{P}_i - P_i)/P_i$  для кожного моменту часу, тобто побудувати матрицю  $D$ .

Формули розрахунку наведені на рис. 2.

Необхідно визначити частки капіталу, витрачені на купівлю кожного виду цінних паперів, тобто елементи матриці  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$ .

У даному випадку задамося початковим наближенням  $X = \{0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1\}$ .

B16		fx =(B3-B4)/B4				
	A	B	C	D	E	F
14	Таблица доходностей ценных бумаг					
15		Газпром	АвтоВАЗ	Аэрофлот	ВТБ	Уралкай
16	=A3	=(B3-B4)/B4	=(C3-C4)/C4	=(D3-D4)/D4	=(E3-E4)/E4	=(F3-F4)/F4
17	=A4	=(B4-B5)/B5	=(C4-C5)/C5	=(D4-D5)/D5	=(E4-E5)/E5	=(F4-F5)/F5
18	=A5	=(B5-B6)/B6	=(C5-C6)/C6	=(D5-D6)/D6	=(E5-E6)/E6	=(F5-F6)/F6
19	=A6	=(B6-B7)/B7	=(C6-C7)/C7	=(D6-D7)/D7	=(E6-E7)/E7	=(F6-F7)/F7
20	=A7	=(B7-B8)/B8	=(C7-C8)/C8	=(D7-D8)/D8	=(E7-E8)/E8	=(F7-F8)/F8
21	=A8	=(B8-B9)/B9	=(C8-C9)/C9	=(D8-D9)/D9	=(E8-E9)/E9	=(F8-F9)/F9
22	=A9	=(B9-B10)/B10	=(C9-C10)/C10	=(D9-D10)/D10	=(E9-E10)/E10	=(F9-F10)/F10
23	=A10	=(B10-B11)/B11	=(C10-C11)/C11	=(D10-D11)/D11	=(E10-E11)/E11	=(F10-F11)/F11
24	=A11	=(B11-B12)/B12	=(C11-C12)/C12	=(D11-D12)/D12	=(E11-E12)/E12	=(F11-F12)/F12

Рис. 2. Формули розрахунку дохідностей цінних паперів

**2. Модель оптимального портфеля Марковіца, яка забезпечує мінімальний ризик і задану ефективність, має вигляд:**

$$\begin{cases} r_p = D[d_p] = \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_i x_i d_i = m_p \\ \sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0. \end{cases} \quad (2)$$

У даній моделі обмеження – лінійна функція. Обмеження в матричному вигляді можна записати як  $X\bar{D} = m_p$ , де  $\bar{D}$  – матриця-рядок середніх значень дохідностей  $i$ -х цінних паперів, які визначаються за формулою середнього арифметичного:

$$d_i \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N d_{ik}. \quad (3)$$

Для матриці  $\bar{D}$  використовуємо функцію СРЗНАЧ(число1; число2; ...), наприклад СРЗНАЧ(B16:B24).

Результати розрахунків дохідностей кожного з цінних паперів, середніх значень дохідностей та максимального значення (функція МАКС(число1; число2; ...)) дохідності з усіх середніх наведені на рис. 3.

B16		fx =(B3-B4)/B4					
	A	B	C	D	E	F	G
14	Таблица доходностей ценных бумаг						
15		Газпром	АвтоВАЗ	Аерофлот	ВТБ	Уркалий	
16	16.01.2013	-0,975%	-0,734%	-1,314%	0,174%	-0,249%	
17	15.01.2013	-1,250%	1,431%	-0,162%	-0,692%	-0,693%	
18	14.01.2013	1,102%	0,351%	3,188%	0,522%	0,693%	
19	11.01.2013	0,251%	-1,136%	1,781%	4,167%	-0,119%	
20	10.01.2013	-0,880%	-1,185%	-0,064%	0,730%	-0,898%	
21	09.01.2013	0,683%	-0,761%	2,099%	-0,182%	0,104%	
22	08.01.2013	2,923%	1,450%	2,734%	2,425%	1,220%	
23	28.12.2012	-0,862%	-0,735%	2,952%	-1,107%	-0,537%	Максимум доходности
24	27.12.2012	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%	
25	Средняя доходность	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%	1,362%

Рис. 3. Результати розрахунку

Цільова функція у моделі Марковіца (2)  $r_p$  – нелінійна, і є не що інше як квадратична форма, яка в матричній формі запишеться як  $r = X^T V_{ij} X$ , де  $X$  – матриця-стовпець змінних, а  $X^T$  – матриця-рядок змінних, яку отримаємо за допомогою транспонування.

Коваріація або кореляційний момент дохідностей цінних паперів розраховується як:

$$V_{ij} = M \left\{ \overbrace{(d_{ik} - d_i)}^{\Delta_{ik}} \cdot \overbrace{(d_{jk} - d_j)}^{\Delta_{jk}} \right\} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_{ik} \cdot \Delta_{jk}, \quad (4)$$

де  $\Delta_{ik}$  і  $\Delta_{jk}$  – відхилення дохідностей  $i$ -го і  $j$ -го паперів від середньої арифметичної дохідності.

Матрицю коваріацій дохідностей цінних паперів  $V_{ij}$  знайдемо за допомогою функції КОВАР(*массив1*; *массив2*), а саме КОВАР(\$B\$16:\$B\$24;\$B16:B24). Результати усіх проміжних розрахунків, а також компоненти початкового плану наведені на рис. 4.

Розглянута модель Марковіца відноситься до моделей нелінійного програмування. Для її вирішення використовується надбудова "Поиск решения", робота з якою була детально вивчена під час засвоєння нав-

чальної дисципліни "Оптимізаційні методи та моделі". Результат заповнення вікна надбудови "Поиск решения" наведено на рис. 5.

	A	B	C	D	E	F	G	H
21	09.01.2013	0,683%	-0,761%	2,099%	-0,182%	0,104%		
22	08.01.2013	2,923%	1,450%	2,734%	2,425%	1,220%		
23	28.12.2012	-0,862%	-0,735%	2,952%	-1,107%	-0,537%	Максимум доходности	
24	27.12.2012	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%		План
25	Средняя доходность	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%	1,362%	X
26	Матрица ковариаций	0,00016	0,00005	0,00012	0,00010	0,00008		20,000%
27		0,00005	0,00009	0,00002	-0,00001	0,00003		20,000%
28		0,00012	0,00002	0,00022	0,00004	0,00006		20,000%
29		0,00010	-0,00001	0,00004	0,00024	0,00004		20,000%
30		0,00008	0,00003	0,00006	0,00004	0,00004		20,000%
31							Сумма	
32	$X^T$	20,000%	20,000%	20,000%	20,000%	20,000%	100,000%	75% от макс доход
33	$X^T V =$	0,0001014	3,6383E-05	9,3139E-05	8,2081E-05	4,8692E-05	Эффективность	
34	$x_i d_i =$	0,0002034	-0,000304	0,00272314	0,00134149	-0,0001575	0,003806549	0,01021177
35								
36							Цель	
37						$X^T V X =$	0,0000723	Риск

Рис. 4. Результати розрахунків і початковий план

**Поиск решения**

Установить целевую ячейку: **\$G\$37**

Равной: ☐ максимальному значению ☒ значению:  ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки: **\$H\$26:\$H\$30**

Ограничения: **\$G\$32 = 1**  
**\$G\$34 >= \$H\$34**

Кнопки: Выполнить, Закреть, Параметры, Добавить, Изменить, Удалить, Восстановить, Справка

Рис. 5. Результат заповнення вікна надбудови "Поиск решения"



Отриманий оптимальний план наведений на рис. 6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
21	09.01.2013	0,683%	-0,761%	2,099%	-0,182%	0,104%		
22	08.01.2013	2,923%	1,450%	2,734%	2,425%	1,220%		
23	28.12.2012	-0,862%	-0,735%	2,952%	-1,107%	-0,537%	Максимум доходности	
24	27.12.2012	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%		План
25	Средняя доходность	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%	1,362%	X
26	Матрица ковариаций	0,00016	0,00005	0,00012	0,00010	0,00008		0,000%
27		0,00005	0,00009	0,00002	-0,00001	0,00003		9,787%
28		0,00012	0,00002	0,00022	0,00004	0,00006		62,382%
29		0,00010	-0,00001	0,00004	0,00024	0,00004		27,831%
30		0,00008	0,00003	0,00006	0,00004	0,00004		0,000%
31							Сумма	
32	$X^T$	0,000%	9,787%	62,382%	27,831%	0,000%	100,000%	75% от макс доход
33	$X^T V =$	0,0001093	1,8865E-05	0,00015266	9,1591E-05	5,0105E-05	Эффективность	
34	$x_i d_i =$	0	-0,0001488	0,00849376	0,00186677	0	0,010211773	0,01021177
35								
36							Цель	
37						$X^T V X =$	0,0001226	Риск

Рис. 6. Оптимальный план

Звіти за результатами та стійкістю подані на рис. 7 і 8.

Целевая ячейка (Минимум)					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
\$G\$37	XT V X = Цель	0,0000723	0,0001226		
Изменяемые ячейки					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
\$H\$26	Матрица ковариаций X	20,000%	0,000%		
\$H\$27	X	20,000%	9,787%		
\$H\$28	X	20,000%	62,382%		
\$H\$29	X	20,000%	27,831%		
\$H\$30	X	20,000%	0,000%		
Ограничения					
Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$G\$32	XT Сумма	100,000%	\$G\$32=1	не связан.	0
\$G\$34	xidi= Эффективность	0,010211773	\$G\$34>=\$H\$34	связанное	0

Рис. 7. Звіт за результатами

#### Изменяемые ячейки

Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент
\$H\$26	Матрица ковариаций X	0,000%	0,014%
\$H\$27	X	9,787%	0,000%
\$H\$28	X	62,382%	0,000%
\$H\$29	X	27,831%	0,000%
\$H\$30	X	0,000%	0,005%

#### Ограничения

Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель
\$G\$32	ХТ Сумма	100,000%	0,006%
\$G\$34	xidi= Эффективность	0,010211773	0,017678732

Рис. 8. Звіт зі стійкості отриманого плану

Таким чином, для мінімізації ризику капітал необхідно розподілити між цінними паперами так: найбільшу частку – 62,38 % – вкласти в акції Аерофлоту, 27,83 % капіталу вкласти в акції ВТБ, решту капіталу – 9,79 % вкласти в акції АвтоВАЗ. В акції Газпрому та Уркалію в цьому випадку вкладати капітал не потрібно взагалі. Множник Лагранжу найбільший для двоїстої змінної ефективності, тобто її зміна найбільше впливає на значення цільової функції.

**3. Оптимальний портфель Марковіца максимальної ефективності й заданого (прийнятного) ризику** можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} m_p = \sum_i x_i d_i \rightarrow \max \\ \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} = r_p \\ \sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0. \end{cases} \quad (5)$$

Для вирішення цієї задачі нелінійного програмування також використовується надбудова "Поиск решения". Прийнятний ризик задано на рівні 125 % від мінімального рівня ризику, знайденого на попередньому етапі. Результат заповнення вікна надбудови "Поиск решения" для моделі Марковіца з максимізацією ефективності наведено на рис. 9.



**Поиск решения**

Установить целевую ячейку:

Равной: ☒ максимальному значению ☐ значению:  ☐ минимальному значению

Изменяя ячейки:

Ограничения:

Рис. 9. Результат заповнення вікна надбудови "Поиск решения"

Отриманий оптимальний план наведений на рис. 10.

	A	B	C	D	E	F	G	H
24	27.12.2012	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%		План
25	Средняя доходность	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%		X
26	Матрица ковариаций	0,00016	0,00005	0,00012	0,00010	0,00008	Газпром	0,000%
27		0,00005	0,00009	0,00002	-0,00001	0,00003	АвтоВАЗ	0,000%
28		0,00012	0,00002	0,00022	0,00004	0,00006	Аэрофлот	73,297%
29		0,00010	-0,00001	0,00004	0,00024	0,00004	ВТБ	26,703%
30		0,00008	0,00003	0,00006	0,00004	0,00004	Уркалий	0,000%
31							Сумма	
32	$X^T$	0,000%	0,000%	73,297%	26,703%	0,000%	100,000%	
33	$X^T V =$	0,00011663	1,2174E-05	0,00017447	9,4573E-05	5,3086E-05	Эффективность	
34	$x_i d_i$	0	0	0,0099799	0,0017911	0	0,011770992	Цель
35								125%
36							Риск	от мин риска
37						$X^T V X =$	0,0001531	0,0001532

Рис. 10. Оптимальний план

Таким чином, для максимізації ефективності капітал необхідно розподілити між цінними паперами так: найбільшу частку – 73,3 % – вкласти в акції Аерофлоту, решту капіталу – 26,7 % – вкласти в акції ВТБ. В акції

Газпрому, АвтоВАЗу та Уркалію в цьому випадку вкладати капітал не потрібно.

**4. Ризиковано-ефективна модель.** Наведені вище моделі Марковіца в обмеженнях використовують заздалегідь визначені рівні ризику та дохідності. Ці моделі залежать від знань і думок експертів ринку цінних паперів і не дають гравцю ринку відповідь на найголовніше запитання, в яку ж гру грати – ризиковану (прибуткову) або неризиковану (мало-дохідну). Для подолання цього протиріччя була запропонована ризиковано-прибуткова модель, яка дозволяє не розмірковувати над проблемою визначення допустимого рівня ризику для кожного портфеля і має такий вигляд:

$$f(x_i) = \frac{\sqrt{\sum_i x_i^2 v_i^2 + \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij}}}{\sum_i x_i d_i} \rightarrow \min, \quad (6)$$

$$\sum_i x_i = 1; \quad \forall x_i \geq 0$$

де  $v_i$  – варіація дохідності цінних паперів  $i$ -го виду;  $v_{ij}$  – коваріація дохідності цінних паперів  $i$ -го і  $j$ -го видів.

Цільова функція в матричній формі запишеться як:

$$f = \frac{\sqrt{X^2 V_i^2 + X^T V_{ij} X}}{X \bar{D}},$$

де  $V_i^2$  – матриця варіацій дохідностей цінних паперів, яку знайдемо за допомогою функції ДИСП.

Інші позначення та функції ті ж, що і в попередніх моделях.

Отриманий оптимальний план наведений на рис. 11.

Таким чином, застосування ризиковано-прибуткової моделі дозволило визначити склад оптимального портфеля Марковіца. Так, найбільшу частку капіталу – 80,27 % – потрібно вкласти в акції Аерофлоту, 15,79 % капіталу – в акції ВТБ, решту капіталу – 3,94 % – в акції АвтоВАЗ. В акції Газпрому та Уркалію в цьому випадку також вкладати капітал не потрібно.

B39		=(КОРЕНЬ(G35)+G39)/G37						
	A	B	C	D	E	F	G	H
24	27.12.2012	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%		План
25	Средняя доходность	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%		X
26	Матрица ковариаций	0,00016	0,00005	0,00012	0,00010	0,00008	Газпром	3,94%
27		0,00005	0,00009	0,00002	-0,00001	0,00003	АвтоВАЗ	0,00%
28		0,00012	0,00002	0,00022	0,00004	0,00006	Аэрофлот	80,27%
29		0,00010	-0,00001	0,00004	0,00024	0,00004	ВТБ	15,79%
30		0,00008	0,00003	0,00006	0,00004	0,00004	Уркалий	0,00%
31							Сумма	
32	X <sup>T</sup>	3,940%	0,000%	80,266%	15,794%	0,000%	100,000%	
33	X <sup>T</sup> V =	0,000120532	1,70402E-05	0,000190392	7,497E-05	5,566E-05		
34	V <sub>i</sub> <sup>2</sup> =	0,000201583	0,000107217	0,000141834	0,000362937	6,105E-05	Сумма	
35	X <sup>2</sup> V <sup>2</sup> =	3,12895E-07	0	9,13783E-05	9,05384E-06	0	0,000100745	
36							Эффективность	
37	x <sub>i</sub> d <sub>i</sub> =	4,00644E-05	0	0,010928764	0,001059398	0	0,012028226	
38							Риск	
39	Цель	0,848553532				X <sup>T</sup> V X =	0,0001694	

Рис. 11. Оптимальний план

**5. Оптимальний портфель за моделлю Тобіна.** Вплив "портфельної теорії" Марковіца значно посилюється після появи робіт Дж. Тобіна. Дж. Тобін зауважив, що ринковий портфель, тобто сукупність усіх наявних у даний момент у інвесторів цінних паперів, є ефективним. Більш того будь-яка комбінація ринкового портфеля з безризиковим активом дає знову ефективний портфель, який має менший ризик, хоча і з меншим очікуваним доходом. Дж. Тобін запропонував включити в аналіз безризикові активи, наприклад державні облігації. Тому моделі оптимального портфеля Тобіна відрізняються від моделей оптимального портфеля Марковіца лише наявністю безризикових паперів.

Модель оптимального портфеля Тобіна, яка забезпечує мінімальний ризик і задану ефективність, має такий вигляд:

$$\begin{cases} \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} \rightarrow \min; \\ x_0 m_0 + \sum_i x_i d_i = m_p; \\ x_0 + \sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0. \end{cases} \quad (7)$$

де  $m_0$  – ефективність безризикових паперів;

$x_0$  – частка капіталу, вкладена в безризикові папери;

$x_i, x_j$  – частка капіталу, вкладена в цінні папери  $i$ -го і  $j$ -го видів;

$d_i$  – математичне сподівання (середнє арифметичне) дохідності  $i$ -го цінного паперу;

$v_{ij}$  – кореляційний момент між ефективністю паперів  $i$ -го і  $j$ -го видів.

Оптимальний портфель Тобіна максимальної ефективності й заданого (прийнятного) ризику можна представити у вигляді:

$$\begin{cases} x_0 m_0 + \sum_i x_i d_i \rightarrow \max; \\ \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} = r_p; \\ x_0 + \sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0. \end{cases} \quad (8)$$

де  $r_p$  – заданий ризик портфеля.

Розрахункові формули та методи вирішення аналогічні формулам задачі формування оптимального портфеля цінних паперів Марковіца, наведеним вище.

## Лабораторна робота "Модель оцінки довгострокових активів (CAPM)"

**Мета** – закріплення теоретичного й практичного матеріалу за темою "Сучасна портфельна теорія", набуття навичок побудови моделей оцінки довгострокових активів CAPM у середовищі *Microsoft Excel*.

**Умови завдання.** Котирування цінних паперів Сбербанку Росії (СБР) та значення індексу РТС за період з 23.01.2012 р. по 10.02.2012 р. задані в табл. 2.

Безризикова дохідність, заснована на ставках трирічних державних облігацій, дорівнює 8 %.

Дохідність індексу РТС за рік склала 9,81 %.

Таблица 2

### Вихідні дані

Дата	РТС	СБР	Дата	РТС	СБР
1	2	3	4	5	6
10.02.2012 р.	1 603,25	93,63	20.01.2012 р.	1 496,41	85,13
09.02.2012 р.	1 638,09	95,28	19.01.2012 р.	1 503,89	85,70
08.02.2012 р.	1 643,53	95,17	18.01.2012 р.	1 488,37	84,70
07.02.2012 р.	1 632,35	93,46	17.01.2012 р.	1 476,31	84,66
06.02.2012 р.	1 626,46	93,80	16.01.2012 р.	1 455,32	83,95
03.02.2012 р.	1 625,60	94,52	13.01.2012 р.	1 446,46	83,60

1	2	3	4	5	6
02.02.2012 р.	1 602,99	92,62	12.01.2012 р.	1 458,24	84,30
01.02.2012 р.	1 599,56	92,75	11.01.2012 р.	1 452,69	84,85
31.01.2012 р.	1 577,29	90,17	10.01.2012 р.	1 469,76	86,81
30.01.2012 р.	1 546,59	88,92	09.01.2012 р.	1 430,13	83,88
27.01.2012 р.	1 565,82	90,80	06.01.2012 р.	1 423,70	83,20
26.01.2012 р.	1 573,04	90,40	05.01.2012 р.	1 415,48	82,55
25.01.2012 р.	1 534,14	87,05	04.01.2012 р.	1 434,45	83,52
24.01.2012 р.	1 514,93	85,04	03.01.2012 р.	1 434,23	82,42
23.01.2012 р.	1 522,57	85,02	30.12.2011	1 381,87	78,00

**Необхідно:** з використанням програми *Microsoft Excel*:

- 1) обчислити норму прибутковості для Сбербанку Росії;
- 2) розрахувати справедливую норму прибутковості для Сбербанку Росії, зробити висновки.

### ***Методичні рекомендації***

**1. Основні поняття.** CAPM (досл. з англ. *модель ціноутворення активів*) – модель оцінки фінансових активів. Модель використовується для того, щоб визначити необхідний рівень прибутковості активу, який передбачається додати до вже існуючого добре диверсифікованого портфеля з урахуванням ринкового ризику цього активу. Модель оцінювання капітальних активів допомагає визначити справедливую прибутковість цінного паперу ґрунтуючись на її ризику.

Чим більше ризик, тим більше прибутковість. За допомогою моделі CAPM, якщо відомий потенційний ризик цінного паперу, можна прогнозувати норму прибутковості. І навпаки, якщо відома прибутковість, то можна обчислити ризик.

Оскільки будь-яка акція має свій ступінь ризику, цей ризик необхідно покрити прибутковістю, щоб інструмент залишився привабливим. Згідно з моделлю оцінки довгострокових активів, норма прибутковості будь-якого фінансового інструменту (наприклад акції) складається з двох частин: безризикового та преміального доходів.

Іншими словами, будь-який прибуток від акції включає в себе безризиковий прибуток (часто розраховується за ставками державних облі-

гацій) і ризиковий прибуток, який відповідає ступеню ризику даного паперу. Якщо показники дохідності перевищують показники ризику, то інструмент приносить більше прибутку, ніж належить при його ступені ризику. І навпаки, якщо показники ризику опинилися вище дохідності, то інвестору такий інструмент не потрібний.

Модель оцінювання капітальних активів має такий вигляд:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_m) - r_f),$$

де  $E(r_i)$  – очікувана ставка дохідності на довгостроковий актив;

$r_f$  – безризикова ставка дохідності;

$E(r_m)$  – очікувана ринкова ставка дохідності;

$E(r_m) - r_f$  – премія за ризик вкладення в акції, дорівнює різниці ставок ринкової та безризикової дохідностей;

$\beta_i$  – коефіцієнт чутливості активу до змін ринкової прибутковості  $r_m$ .

Розглянемо кожну складову формули моделі оцінки довгострокових активів.

Очікувана норма дохідності – це той прибуток, який інвестор чекає від фінансового інструменту.

Безризиковий дохід – це та частина доходу, яка закладена в усі інвестиційні інструменти. Безризиковий дохід вимірюється, як правило, за ставками державних облігацій, тому що ті практично без ризику. На Заході безризиковий дохід дорівнює приблизно 4 – 5 %, в Україні – 7 – 10 %.

Загальна прибутковість ринку – це норма прибутковості індексу даного ринку. У США таким би виступив індекс S & P 500, у Росії – індекс РТС, в Україні – звичайно ж, індекс ПФТС.

Бета ( $\beta$ ) – спеціальний коефіцієнт, який вимірює ризикованість інструменту.  $\beta$ -коефіцієнт визначається як коваріація дохідності активу ( $r_i$ ) з прибутковістю всього ринку ( $r_m$ ) відносно дисперсії дохідності всього ринку  $\sigma^2(r_m)$ :

$$\beta_i = \frac{cov(r_i, r_m)}{\sigma^2(r_m)}.$$

Бета-коефіцієнт для ринку в цілому завжди дорівнює одиниці. Бета-коефіцієнт акції є мірою ринкового ризику акції, показуючи мінливість дохідності акції до прибутковості на ринку в середньому (застосовується для оцінки ризику вкладень у цінні папери).



У той час як попередні елементи моделі CAPM прості, зрозумілі, і знайти їх досить просто, то  $\beta$  знайти не так просто; безкоштовні фінансові сервіси не надають  $\beta$  компаній.

Отже, якщо відомо хоча б 3 із 4 елементів формули моделі оцінки довгострокових активів, можна обчислити бракуючий за допомогою простих алгебраїчних маніпуляцій.

**2. Побудова моделі оцінки довгострокових активів CAPM.** Обчислимо дохідність для РТС і СБР, так, як це було зроблено у попередній лабораторній роботі. Фрагмент таблиці з вихідними даними та результати обчислень дохідності наведені на рис. 12.

D3		fx		=B3/B2-1	
	A	B	C	D	E
1	Дата	РТС	СБР	РТС-1	СБР-1
2	10.02.2012	1 603,25	93,63		
3	09.02.2012	1 638,09	95,28	2,17%	1,76%
4	08.02.2012	1 643,53	95,17	0,33%	-0,12%
5	07.02.2012	1 632,35	93,46	-0,68%	-1,80%
6	06.02.2012	1 626,46	93,80	-0,36%	0,36%
7	03.02.2012	1 625,60	94,52	-0,05%	0,77%

Рис. 12. Фрагмент таблиці з вихідними даними

Обчислимо норму прибутковості для Сбербанку Росії (СБР).

Бета-коефіцієнт – це кут нахилу прямої з лінійного рівняння типу  $y = a_0 + a_1x$ , тобто  $\beta = a_1$ . Ця пряма лінія – є прямою лінією регресії двох масивів даних: дохідності індексу та акції. Побудуємо її за допомогою функції ЛИНЕЙН(Е3:Е31;D3:D31;ИСТИНА;ИСТИНА). Результати побудови наведено на рис. 13.

F6		fx		{=ЛИНЕЙН(Е3:Е31;D3:D31;ИСТИНА;ИСТИНА)}				
	B	C	D	E	F	G	H	I
1	РТС	СБР	РТС-1	СБР-1	Бета			
2	1 603,25	93,63			1,183979	-0,00017	$a_1$ (бета)	$a_0$
3	1 638,09	95,28	2,17%	1,76%	0,124752	0,001722	$\delta a_1$	$\delta a_0$
4	1 643,53	95,17	0,33%	-0,12%	0,769375	0,008637	$R^2$	
5	1 632,35	93,46	-0,68%	-1,80%	90,07309	27	F	df
6	1 626,46	93,80	-0,36%	0,36%	0,00672	0,002014	$\sum$ отклон	$\sum$ отклон

Рис. 13. Результати побудови лінійної функції

Для СБР  $\beta$  дорівнює 1,18.

Значення коефіцієнта детермінації  $R^2$  показує наскільки зміна індексу рухає ціну акції. У даному випадку акція Сбербанку сильно залежить від індексу РТС, оскільки коефіцієнт кореляції дорівнює 0,77, що підтверджує і графічне зображення, наведене на рис. 14.

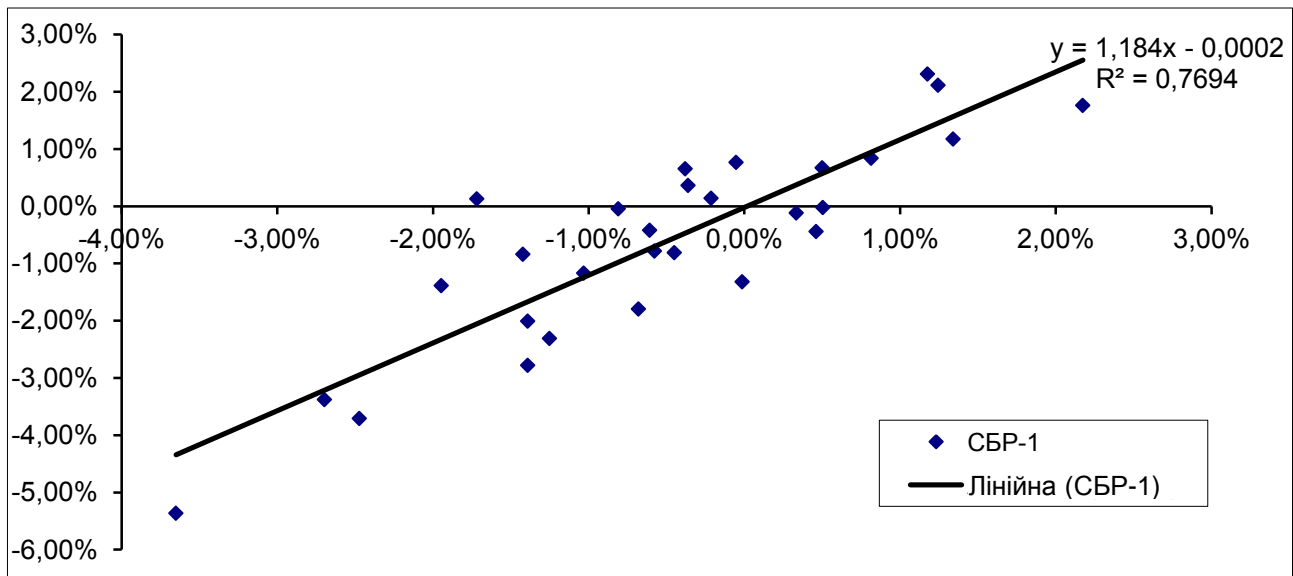


Рис. 14. Графік лінійної функції

Модель оцінки довгострокових активів допоможе розрахувати справедливую норму прибутковості акції Сбербанку Росії (СБР) за допомогою таких вихідних даних:

$r_f$  – безризиковий дохід = 8 %;

$E(r_m)$  – дохідність, індекс РТС = 9,81 %;

$\beta$  – спеціальний коефіцієнт бета для СБР = 1,18.

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_m) - r_f) = 8 + 1,18(9,81 - 8) = 8 + 2,14 = 10,14 (\%).$$

Виходить, що справедлива норма дохідності акції Сбербанку повинна скласти 10,14 %, з яких 8% – це безризиковий дохід, і 2,14 % – компенсація ризику. А насправді, акція СБР принесла своїм акціонерам 8,21 %, що говорить про те, що акція Сбербанку не дуже приваблива з точки зору відношення прибутку до ризику.

У даних висновках є велика ймовірність похибки, оскільки для порівняння даних дохідності СБР і індексу РТС була взята маленька вибірка – усього місяць.

## Лабораторна робота "Моделі аналізу динаміки фінансових ринків на основі методів еконофізики"

**Мета** – закріплення теоретичного й практичного матеріалу за темою "Дослідження фінансових процесів на основі методів еконофізики", набуття навичок прогнозування критичних точок у динаміці фінансових індикаторів, індексів ділової активності фондових ринків за допомогою методів еконофізики в середовищі *Microsoft Excel*.

**Умови завдання.** Динаміка індексу *Dow Jones* за 2012 р. у денному розрізі наведена в розділі "Документи" / "Довідково-ілюстративний матеріал" навчальної дисципліни "Актуальні проблеми моделювання економіки" у системі дистанційного навчання [www.elearn2.ekhneu.org.ua](http://www.elearn2.ekhneu.org.ua).

### Необхідно:

- 1) розрахувати модифікований локальний гелдерівський показник (МЛГП або показник Гелдера) для різних розмірів "вікна";
- 2) здійснити згладжування ряду МЛГП за допомогою методу експонентної середньої при параметрі адаптації, рівному 0,3;
- 3) визначити критичні точки в динаміці індикаторів фінансового ринку;
- 4) зрівняти початок сигналу (падіння рівня ділової активності ринку) МЛГП при різних розмірах "вікна".

### Методичні рекомендації

**1. Основні поняття.** Під терміном "еконофізика" розуміється застосування методів теорії складних систем до економіки, фінансів і бізнесу. До методів теорії складних систем дослідники відносять різні розділи математики, фізики, інформатики, штучного інтелекту, логіки: теорію хаосу, теорію фракталів і мультифракталів, штучні нейронні мережі, методи квантової теорії поля й статистичної фізики і т. д. Напрямом прикладної еконофізики є прогнозування критичних точок у динаміці фінансових ринків. Один із підходів до дослідження кризових процесів заснований на аналізі динаміки модифікованих локальних гелдерівських показників.

Показник Гелдера – характеристика гладкості функції. Локальний гелдерівський показник (ЛГП) характеризує локальну гладкість функції в точці. ЛГП можна визначити в такий спосіб: нехай  $f$  – функція часу, що

задовольняє співвідношенню  $|f(t + \Delta t) - f(t)| \sim C_t(\Delta t)^{a(t)}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ , тоді число  $a(t)$  називається гельдеровським показником функції  $f$  у точці  $t$ . Чим більше гладкість функції, тим більше значення ЛГП. Модифікований ЛГП (МЛГП) показує, збільшилося або зменшилося значення ЛГП порівняно з більш ранніми значеннями цього індикатора. Якщо в якийсь момент часу в часовому ряді МЛГП спостерігається сплеск, то в найближчому майбутньому очікується зміна тренда.

Основний параметр при розрахунку МЛГП – розмір вікна, який характеризує кількість попередніх рівнів ряду, яка застосовується для розрахунку індикатора. При невеликих значеннях розміру вікна МЛГП реагують на найменшу зміну динаміки ряду. При збільшенні розміру вікна прогноз стає більш достовірним. Для згладжування МЛГП застосовується метод експонентного середнього.

**2. Прогнозування кризових тенденцій за допомогою МЛГП на прикладі аналізу динаміки індексу *Dow Jones*.** Динаміка індексу наведена на рис. 15.

Вихідні дані для розрахунку показника Гельдера  $a(t)$  і МЛГП наведені на рис. 16.

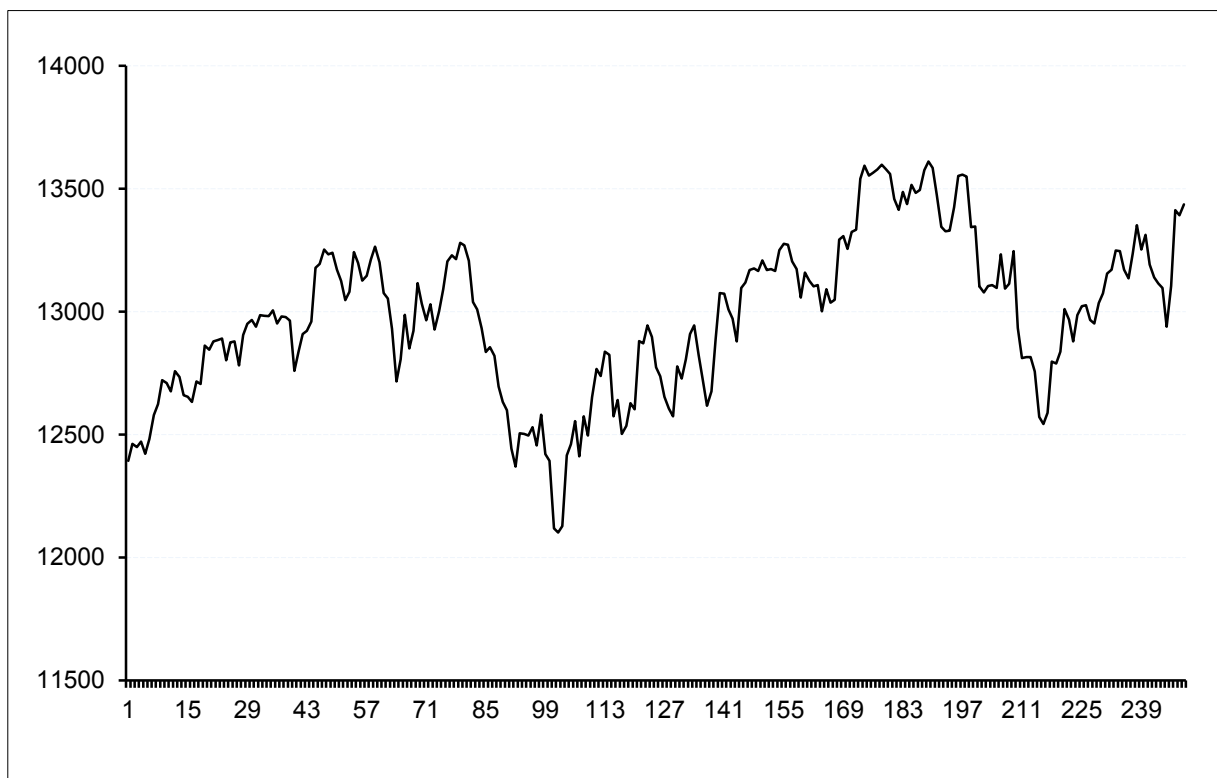


Рис. 15. Динаміка індексу *Dow Jones*, 2012 р. (денний розріз)

	A	B	C	D	E
	t	y <sub>t</sub>	$ \Delta y_t $	$\ln  \Delta y_t $	$\ln(t)$
1					
2	1	12392.69	-	-	-
3	2	12462.47	69.78	4.245347	0.693147
4	3	12449.45	13.02	2.566487	1.098612
5	4	12471.02	21.57	3.071303	1.386294
6	5	12422.06	48.96	3.891004	1.609438
7	6	12482.07	60.01	4.094511	1.791759
8	7	12578.95	96.88	4.573473	1.94591
9	8	12623.98	45.03	3.807329	2.079442
10	9	12720.48	96.5	4.569543	2.197225
11	10	12708.82	11.66	2.456164	2.302585
12	11	12675.75	33.07	3.498627	2.397895

Рис. 16. Вихідні дані (фрагмент)

Для знаходження показника Гельдера необхідно скористатися функцією ЛИНЕЙН, як це показано на рис. 17. Розмір вікна приймемо рівним 15 спостереженням.

Аргументы функции

ЛИНЕЙН

Известные\_значения\_y

D3:D17

= {4.24534743575861

Известные\_значения\_x

E3:E17

= {0.69314718055994

Конст

1

= ИСТИНА

Статистика

0

= ЛОЖЬ

= {-0.200957326422326;3

Возвращает параметры линейного приближения по методу наименьших квадратов.

Рис. 17. Аргументи функції ЛИНЕЙН

Для згладжування ряду МЛГП у меню команд "Сервис" необхідно вибрати "Анализ данных". Як метод згладжування використовується метод експонентного середнього (рис. 18).

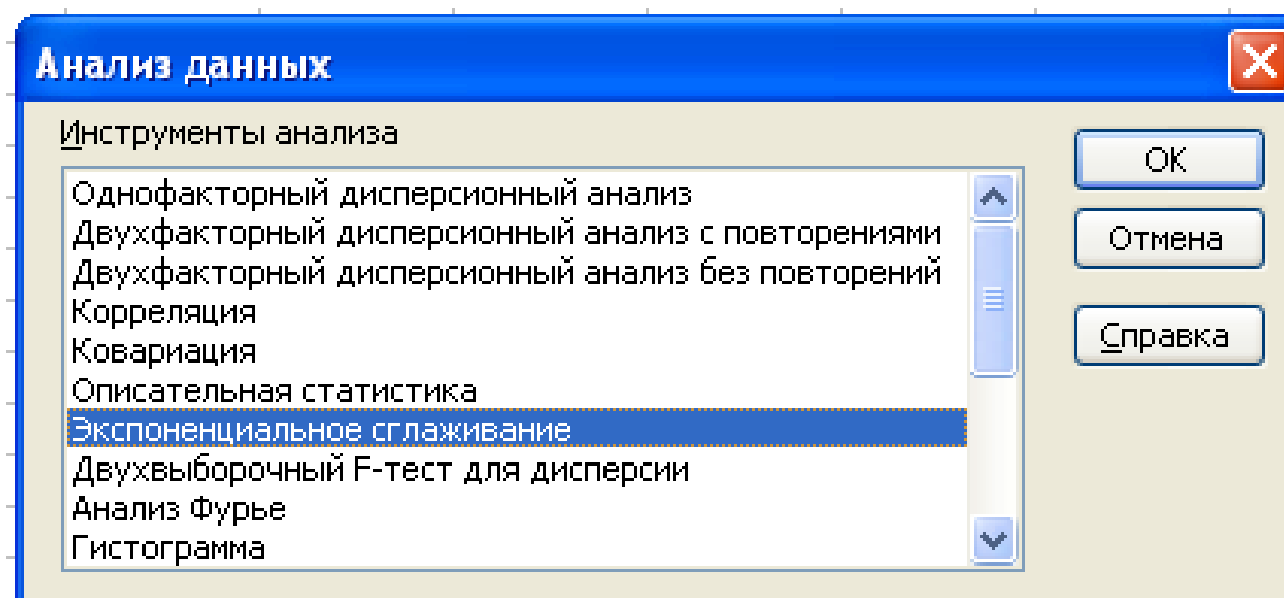


Рис. 18. Вибір методу згладжування ряду МЛГП

При розрахунку експонентного середнього параметр адаптації ( $\alpha$ ) прийнятий рівним 0,3, відповідно фактор загасання  $(1 - \alpha) = 0,7$  (рис. 19).

Результати розрахунків показника Гельдера, МЛГП, згладжених значень МЛГП наведені на рис. 20.

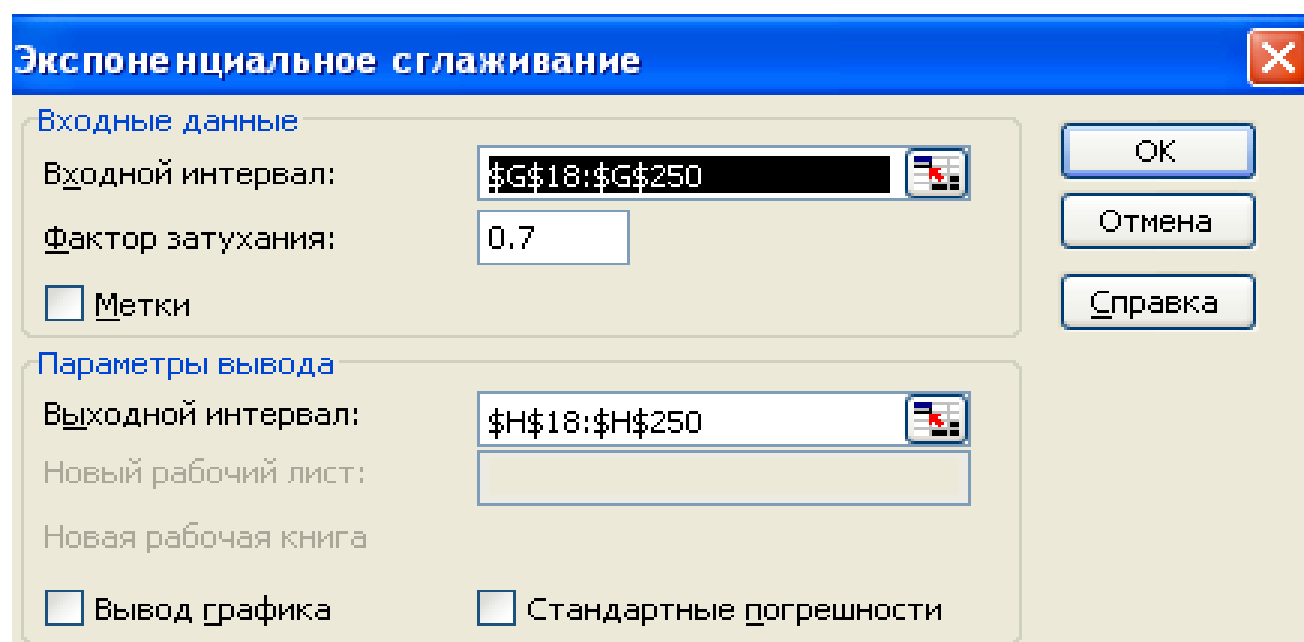


Рис. 19. Визначення параметра адаптації



	A	B	C	D	E	F	G	H
	t	y <sub>t</sub>	$ \Delta y_t $	$\ln  \Delta y_t $	$\ln(t)$	a(t)	МЛГП <sub>t</sub>	ЕМА <sub>t</sub>
1								
2	1	12392.69	-	-	-	-	-	-
3	2	12462.47	69.78	4.245347	0.693147	-	-	-
4	3	12449.45	13.02	2.566487	1.098612	-	-	-
5	4	12471.02	21.57	3.071303	1.386294	-	-	-
6	5	12422.06	48.96	3.891004	1.609438	-	-	-
7	6	12482.07	60.01	4.094511	1.791759	-	-	-
8	7	12578.95	96.88	4.573473	1.94591	-	-	-
9	8	12623.98	45.03	3.807329	2.079442	-	-	-
10	9	12720.48	96.5	4.569543	2.197225	-	-	-
11	10	12708.82	11.66	2.456164	2.302585	-	-	-
12	11	12675.75	33.07	3.498627	2.397895	-	-	-
13	12	12756.96	81.21	4.397038	2.484907	-	-	-
14	13	12734.63	22.33	3.105931	2.564949	-	-	-
15	14	12660.46	74.17	4.30636	2.639057	-	-	-
16	15	12653.72	6.74	1.90806	2.70805	-	-	-
17	16	12632.91	20.81	3.035434	2.772589	-0.20096	-	-
18	17	12716.46	83.55	4.425445	2.833213	0.121548	0.32250501	#N/D
19	18	12705.41	11.05	2.40243	2.890372	-0.47815	-0.59969915	0.322505
20	19	12862.23	156.82	5.055099	2.944439	-0.48062	-0.0024671	0.045844
21	20	12845.13	17.1	2.839078	2.995732	-0.71436	-0.23374303	0.031351
22	21	12878.2	33.07	3.498627	3.044522	-0.66602	0.04833704	-0.04818

Рис. 20. Результати розрахунків показника Гельдера, МЛГП, згладжених значень МЛГП (фрагмент)

Графік динаміки індексу *Dow Jones* і індикатора МЛГП поданий на рис. 21.

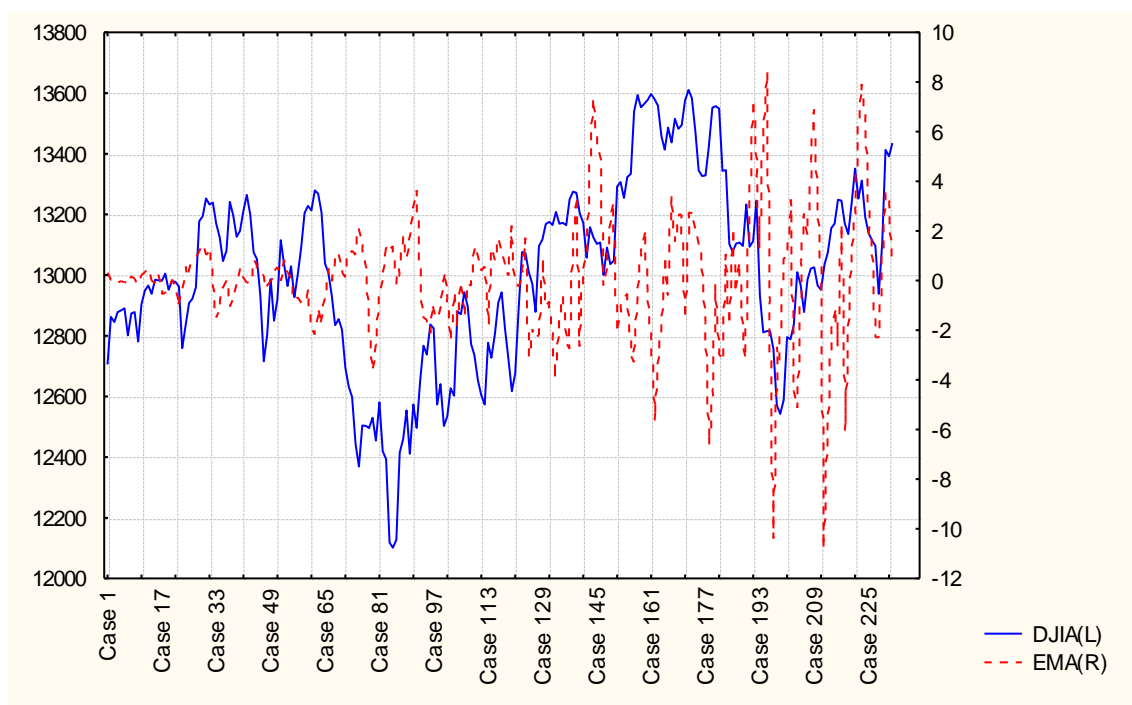


Рис. 21. Динаміка індексу *Dow Jones* і індикатора МЛГП

Як видно з рис. 21, у динаміці індикатора МЛГП спостерігається сплеск у 92 точці, що свідчить про посилення в найближчому майбутньому висхідного тренда, який характерний для динаміки індексу *Dow Jones*. Наступний значущий сплеск у динаміці індикатора МЛГП спостерігається в 144 точці, що дозволяє зробити висновок про посилення в найближчому майбутньому спадного тренда індексу *Dow Jones*. Останній значущий сплеск у динаміці індикатора МЛГП спостерігається в точці 223. При цьому тренд у динаміці основного індексу має спадний характер, що дозволяє зробити висновок про можливе формування кризової ситуації в січні 2013 р.

### **Лабораторна робота "Гравітаційні моделі в аналізі процесів конвергенції регіонального розвитку"**

**Мета** – закріплення теоретичного й практичного матеріалу за темою "Гравітаційні моделі в аналізі розвитку територій", набуття навичок побудови моделей конвергенції в середовищі *Microsoft Excel*.

**Умови завдання.** Значення валового регіонального продукту (ВРП) на душу населення за період 2009 – 2010 рр. наведені в табл. 3.

Відстані між обласними центрами наведені у розділі "*Документи*" / "*Довідково-ілюстративний матеріал*" навчальної дисципліни "*Актуальні проблеми моделювання економіки*" у системі дистанційного навчання [www.elearn2.ekhneu.org.ua](http://www.elearn2.ekhneu.org.ua).

Результати угруповання регіонів за рівнем соціально-економічного розвитку наведені в табл. 4.

Таблиця 3

#### **ВРП на душу населення, 2009 – 2010 рр.**

№	Область	2009 р.	2010 р.	№	Область	2009 р.	2010 р.
1	2	3	4	5	6	7	8
1	АРК	13933	16507	14	Миколаївська	17050	20276
2	Вінницька	12145	14332	15	Одеська	20341	22544
3	Волинська	11796	13916	16	Полтавська	22337	29652
4	Дніпропетровська	27737	34709	17	Рівненська	11699	13785
5	Донецька	23137	28986	18	Сумська	13631	15711

1	2	3	4	5	6	7	8
6	Житомирська	11419	14616	19	Тернопільська	10240	11713
7	Закарпатська	10081	12278	20	Харківська	21228	23639
8	Запорізька	20614	23657	21	Херсонська	12256	14346
9	Івано-Франківська	12485	14814	22	Хмельницька	11780	13602
10	Київська	21769	26140	23	Черкаська	14393	17325
11	Кіровоградська	13096	15533	24	Черновицька	9383	10939
12	Луганська	16562	19788	25	Чернігівська	13121	15406
13	Львівська	14093	16353				

Таблиця 4

### Угрупування регіонів за рівнем соціально-економічного розвитку

Регіони з високим рівнем соціально-економічного розвитку	Регіони з низьким рівнем соціально-економічного розвитку
Донецька область, Дніпропетровська область, Запорізька область, Полтавська область, Одеська область, Харківська область, Київська область, Миколаївська область, Луганська область, Львівська область	Сумська область, Закарпатська область, Івано-Франківська область, Волинська область, Чернігівська область, Херсонська область, Тернопільська область, АРК, Кіровоградська область, Вінницька область, Черкаська область, Черновицька область, Рівненська область, Хмельницька область, Житомирська область

#### Необхідно:

1) перевірити наявність ефекту глобальної конвергенції (зближення рівнів розвитку по всій сукупності регіонів у цілому) на основі моделей Баумоля, Квадрадо-Роура. Провести аналіз темпу конвергенції;

2) дослідити наявність ефекту кластерної конвергенції на основі моделі умовної  $\beta$ -конвергенції, зробити висновки про необхідність формування диференційованих стратегій соціально-економічного розвитку регіонів;

3) оцінити вплив міжрегіональної взаємодії на процеси конвергенції на основі моделей з урахуванням просторових лагів. Зробити висновок про можливість мінімізації витрат, що пов'язані зі стимулюванням зростання рівня ділової активності регіонів.

## Методичні рекомендації

**1. Основні поняття.** Поняття "гравітація" має на увазі якусь чинність притягання. Гравітаційна модель (від лат. *gravitas* – вага, чинність, дія) – модель, що відбиває соціальні та економічні взаємодії між просторовими об'єктами (містами, регіонами, країнами). Використовується в просторовому аналізі економіки. У різних модифікаціях такі моделі застосовуються при дослідженні процесів урбанізації, розміщення промисловості, експортно-імпортних взаємозв'язків, міграції населення.

Модель заснована на припущенні про те, що величина взаємодії пропорційна добутку показників значущості об'єктів і обернено пропорційна відстані між ними.

Моделі гравітації одержали широке поширення в аналізі конвергенції регіонального розвитку. Під конвергенцією розуміється процес зближення в часі рівнів розвитку регіонів. Протилежний процес називається дивергенцією. Розглядаються такі типи конвергенції:  $\sigma$ -конвергенція і  $\beta$ -конвергенція, а також глобальна та локальна конвергенція.

Під  $\sigma$ -конвергенцією розуміється тенденція до зменшення дисперсії індикаторів регіонального розвитку.  $\beta$ -конвергенція характеризує ситуацію, коли регіони з низьким рівнем соціально-економічного розвитку мають більш високі темпи економічного зростання, ніж регіони з низьким рівнем соціально-економічного розвитку, і, таким чином, у довгостроковому періоді відбувається вирівнювання рівнів економічного розвитку регіонів. Гіпотези  $\beta$ -конвергенції та  $\sigma$ -конвергенції є взаємозалежними, але не еквівалентними.  $\beta$ -конвергенція вказує на існування тенденції до зменшення міжрегіональної соціально-економічної диференціації. Але в той же час випадкові шоки, що впливають на економіку регіонів, можуть протидіяти цій тенденції й тимчасово збільшувати дисперсію розподілу показників соціально-економічного розвитку ( $\sigma$ -дивергенцію).

Під глобальною конвергенцією розуміється зближення рівнів розвитку регіонів по всій сукупності в цілому. Локальна (кластерна, клубна) конвергенція припускає угруповання регіонів на однорідні кластери, усередині яких швидкість зближення значно перевищує відповідний показник для всієї вибірки.

Як базова модель при аналізі конвергенції регіонального розвитку розглядається модель Баумоля (модель безумовної  $\beta$ -конвергенції), у якій

передбачається, що в довгостроковому періоді регіони приходять до єдиної для всіх траєкторії пропорційного зростання:

$$\ln \left[ \frac{Y(T)}{Y(0)} \right] = C + b \cdot \ln Y(0) + \varepsilon,$$

де  $Y(T)$  – ВРП на душу населення в період часу  $T$ ;

$Y(0)$  – ВРП на душу населення в період часу 0;

$C, b$  – параметри моделі;  $b$  – темп конвергенції (показує, наскільки в процентних пунктах знизиться темп економічного зростання при збільшенні первісного ВРП на душу населення на 1 %).

При наявності конвергенції оцінки параметра  $b$  повинні задовольняти умові  $0 < b < 1$ . А якщо ні, то спостерігаються дивергентні процеси (поляризація економічного зростання регіонів).

У роботі Квадрадо-Роура для тестування ефекту  $\beta$ -конвергенції використовується така модель:

$$\Delta y_{it} - \Delta \bar{y}_t = \alpha + \beta \cdot (y_{i,t-1} - \bar{y}_{t-1}) + v_{it},$$

де  $y_{it}$  – логарифми ВРП на душу населення в регіоні  $i$  у період часу  $t$ ;

$$\Delta y_{it} = y_{it} - y_{i,t-1};$$

$\alpha, \beta$  – параметри моделі ( $\beta < 0$ );

$v_{it}$  – випадкова величина;

$$\Delta \bar{y}_t = \frac{\sum_{i=1}^N \Delta y_{it}}{N}.$$

У моделі умовної  $\beta$ -конвергенції робиться припущення про різні стійкі траєкторії зростання для різних регіонів, що є більш реалістичним в умовах істотних відмінностей між територіями:

$$y = \alpha + \beta Y_0 + \varphi Z + \varepsilon,$$

де  $Z$  – матриця специфічних факторів розвитку;

$\varepsilon$  – похибка ( $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ ).

Одна з можливих реалізацій даної моделі має такий вигляд:

$$\ln \left[ \frac{Y_i(T)}{Y_i(0)} \right] = \alpha + \beta \cdot \ln Y(0) + \sum_{j=1}^n \gamma_j d_{ij} + \varepsilon_i,$$

де  $d_{ij}$  – думмі-змінні, що відображають приналежність регіону до одного з виділених кластерів;

$\alpha, \beta, \gamma_j$  – параметри моделі,  $\beta < 0$ .

Для аналізу впливу міжрегіональної взаємодії на процеси конвергенції використовуються моделі, які дозволяють враховувати просторові лаги. Модель просторового лага мінімально умовної конвергенції дозволяє перевірити значущість просторових зовнішніх ефектів, які викликані темпами зростання сусідніх регіонів, і просторову кластеризацію темпів зростання:

$$y = \alpha + \beta Y_0 + \rho W y + \varepsilon,$$

де  $W$  – матриця просторових ваг;

$\rho W y$  – компонента, що враховує просторовий лаг.

Елементи матриці просторових ваг відображають відстань між регіонами. Найпоширеніший тип матриці ваг – це бінарна матриця, що відображає сусідство, де елемент  $w_{ij}$  дорівнює одиниці, якщо  $i$ -й і  $j$ -й регіони ( $i \neq j$ ) мають загальну границю, і дорівнює нулю, якщо ні. Така специфікація припускає, що сусідні регіони впливають і що просторові зв'язки за межами загальних границь відсутні. Інший підхід до визначення  $w_{ij}$  такий:

$$w_{ij}(q) = \begin{cases} 0 & \text{якщо } i = j \\ 1/d_{ij}^2 & \text{якщо } d_{ij} \leq D(q), \\ 0 & \text{якщо } d_{ij} > D(q) \end{cases} \quad (9)$$

де  $d_{ij}$  – відстань між обласними центрами;

$D(q)$  – квантілі відстаней ( $q = 1, 2, 3, 4$ ).

Елементи такої матриці просторових ваг є аналогами коефіцієнтів гравітації.

Модель умовної конвергенції із просторовою помилкою припускає, що просторові зовнішні ефекти пояснюються неспостережуваною просторовою гетерогенністю в структурі помилки й загальною реакцією на макроекономічні шоки, яка просторово корельована:

$$y = \alpha + \beta Y_0 + \varphi Z + u, \quad u = \lambda W u + \varepsilon.$$

Перетворення моделі просторової помилки приводить до просторової моделі умовної конвергенції Дарбіна:

$$y = (1 - \lambda W)\alpha + \beta Y_0 + \varphi Z + \gamma W Y_0 + \lambda W y + \varepsilon,$$



Дана модель має таку інтерпретацію: регіональний розвиток залежить від темпів зростання сусідніх регіонів (через ендогенний просторовий лаг) і від початкового значення досліджуваної ознаки (через екзогенний просторовий лаг).

**2. Побудова моделей Баумоля і Квадрадо-Роура.** Базовою є модель Баумоля (модель безумовної  $\beta$ -конвергенції). Фрагмент вихідних даних для побудови моделі наведено на рис. 22.

Для знаходження оцінок параметрів моделі й усіх її характеристик необхідно скористатися функцією ЛИНЕЙН, як це показано на рис. 23.

Аргумент "Конст" приймає значення 1, якщо в моделі враховується вільний параметр, 0 – якщо ні.

	A	B	C	D	E	F
1		<b>ВРП на душу населення</b>				
2	<b>Область</b>	<b>2009 р.</b>	<b>2010 р.</b>	<b><math>Y(T)/Y(0)</math></b>	<b><math>\ln(Y(T)/Y(0))</math></b>	<b><math>\ln(Y(0))</math></b>
3	АРК	13933	16507	1.185	0.170	9.542
4	Вінницька	12145	14332	1.180	0.166	9.405
5	Волинська	11796	13916	1.180	0.165	9.376
6	Дніпропетровська	27737	34709	1.251	0.224	10.231
7	Донецька	23137	28986	1.253	0.225	10.049
8	Житомирська	11419	14616	1.280	0.247	9.343
9	Закарпатська	10081	12278	1.218	0.197	9.218
10	Запорізька	20614	23657	1.148	0.138	9.934
11	Івано-Франківська	12485	14814	1.187	0.171	9.432

Рис. 22. Вихідні дані для моделі Баумоля (фрагмент)

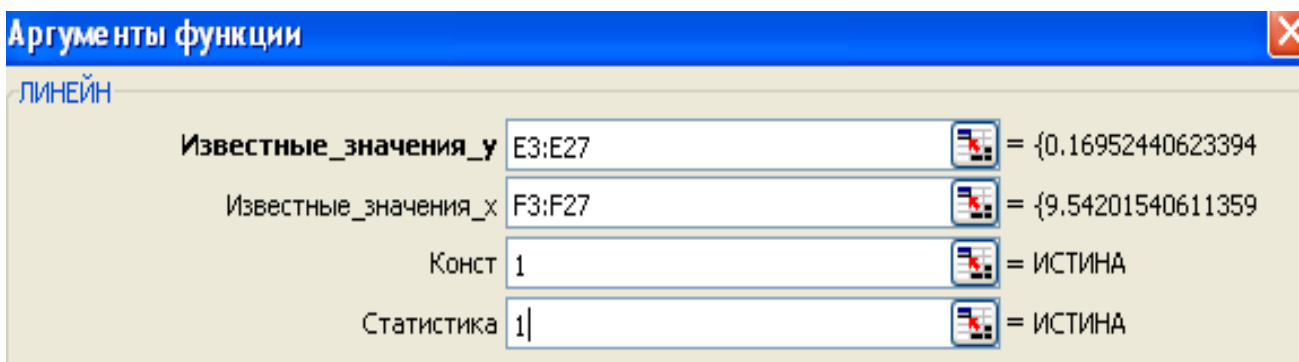


Рис. 23. Аргументи функції ЛИНЕЙН

Результати розрахунків подані в табл. 5.

Таблиця 5

### Перевірка гіпотези про безумовну $\beta$ -конвергенцію на основі моделі Баумоля

Значення параметра	Значення критерію Стюдента	Висновок	Значення коефіцієнта детермінації
$C = -0.11018$	$t_C = -0.4177$	статистично не значущий	0.04733
$b = 0.029354$	$t_b = 1.068956$	статистично не значущий	

Аналіз даних, наведених у табл. 5, дозволяє зробити висновок про статистичну незначущість параметрів моделі безумовної конвергенції, що підтверджує гіпотезу про відсутність єдиної для всіх регіонів траєкторії рівноважного зростання.

Аналогічно здійснюється тестування гіпотези про наявність ефекту глобальної конвергенції на основі моделі Квадрато-Роура. Фрагмент вихідних даних для побудови моделі наведено на рис. 24.

	A	B	C	D	E	F	G	H
		ВРП на душу населення						
	Область	2009 р.	2010 р.	$y_{i,t-1} = \ln(Y_{i,t-1})$	$y_{it} = \ln(Y_{it})$	$\Delta y_{it} = y_{it} - y_{i,t-1}$	$y_{i,t-1} - \overline{y_{i,t-1}}$	$\Delta y_{it} - \overline{\Delta y_{it}}$
3	АРК	13933	16507	9.542	9.712	0.170	-0.059	-0.002
4	Вінницька	12145	14332	9.405	9.570	0.166	-0.196	-0.006
5	Волинська	11796	13916	9.376	9.541	0.165	-0.225	-0.006
6	Дніпропетровська	27737	34709	10.231	10.455	0.224	0.630	0.053
7	Донецька	23137	28986	10.049	10.275	0.225	0.448	0.054
8	Житомирська	11419	14616	9.343	9.590	0.247	-0.258	0.075
9	Закарпатська	10081	12278	9.218	9.416	0.197	-0.382	0.026
10	Запорізька	20614	23657	9.934	10.071	0.138	0.333	-0.034
11	Івано-Франківська	12485	14814	9.432	9.603	0.171	-0.169	-0.001
12	Київська	21769	26140	9.988	10.171	0.183	0.387	0.011
13	Кіровоградська	13096	15533	9.480	9.651	0.171	-0.121	-0.001
14	Луганська	16562	19788	9.715	9.893	0.178	0.114	0.006

Рис. 24. Вихідні дані для оцінки параметрів моделі Квадрато-Роура

Результати розрахунків подано в табл. 6.

Таблиця 6

### Перевірка гіпотези про $\beta$ -конвергенцію на основі моделі Квадрато-Роура

Значення параметра	Значення критерію Стюдента	Висновок	Значення коефіцієнта детермінації
$\alpha = 2.95024E-17$	$t_\alpha = 3.66E-15$	статистично не значущий	0.0473298
$\beta = 0.029354228$	$t_\beta = 1.068956$	статистично не значущий	

Аналіз даних, наведених у табл. 6, дозволяє зробити висновок про статистичну незначущість параметрів моделі конвергенції, і як наслідок, неможливість підтвердити або спростувати гіпотезу про наявність ефекту конвергенції (дивергенції) регіонального розвитку.

**3. Побудова моделі умовної  $\beta$ -конвергенції.** У цій моделі враховуються специфічні фактори регіонального розвитку. Одним із можливих підходів до відображення впливу специфічних факторів є введення в модель *dummy*-змінної, яка визначена в такий спосіб: Cambria Math

$$d_i = \begin{cases} 1 & \text{— група регіонів з високим рівнем соціально-екон. розвитку} \\ 0 & \text{— група регіонів з низьким рівнем соціально-екон. розвитку} \end{cases}$$

Виділення однорідних за соціально-економічними характеристиками груп регіонів здійснювалося на основі методів кластерного аналізу, зокрема, ітеративних методів, які дозволяють одержати непересічні кластери, не мають обмежень на кількість об'єктів й ознак, що їх характеризують. Результати угруповання подано в табл. 4. Вихідні дані для побудови моделі умовної  $\beta$ -конвергенції наведені на рис. 25.

	A	B	C	D	E	F	G
1		ВРП на душу населення					
2	Область	2009 р.	2010 р.	$Y(T)/Y(0)$	$\ln(Y(T)/Y(0))$	$\ln(Y(0))$	$d_i$
3	АРК	13933	16507	1.1847	0.1695	9.5420	0
4	Вінницька	12145	14332	1.1801	0.1656	9.4047	0
5	Волинська	11796	13916	1.1797	0.1653	9.3755	0
6	Дніпропетровська	27737	34709	1.2514	0.2242	10.2305	1
7	Донецька	23137	28986	1.2528	0.2254	10.0492	1
8	Житомирська	11419	14616	1.2800	0.2468	9.3430	0
9	Закарпатська	10081	12278	1.2179	0.1972	9.2184	0
10	Запорізька	20614	23657	1.1476	0.1377	9.9337	1
11	Івано-Франківська	12485	14814	1.1865	0.1710	9.4323	0
12	Київська	21769	26140	1.2008	0.1830	9.9882	1
13	Кіровоградська	13096	15533	1.1861	0.1707	9.4801	0
14	Луганська	16562	19788	1.1948	0.1780	9.7149	1
15	Львівська	14093	16353	1.1604	0.1487	9.5534	1
16	Миколаївська	17050	20276	1.1892	0.1733	9.7439	1
17	Одеська	20341	22544	1.1083	0.1028	9.9204	1

**Рис. 25. Вихідні дані для оцінки параметрів моделі умовної  $\beta$ -конвергенції (фрагмент)**

Для знаходження оцінок параметрів моделі необхідно скористатися функцією ЛИНЕЙН, як це показано на рис. 26.

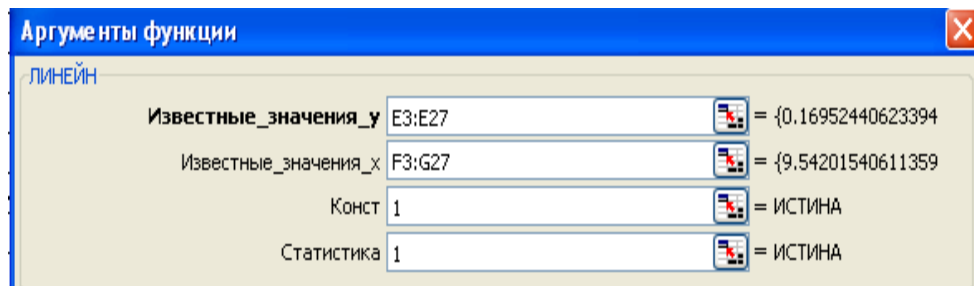


Рис. 26. Аргументи функції ЛИНЕЙН

Результати розрахунків подано в табл. 7.

Таблица 7

### Перевірка гіпотези про наявність ефекту умовної $\beta$ -конвергенції

Значення параметра	Значення критерію Стьюдента	Висновок	Значення коефіцієнта детермінації
$\alpha = -0.496482$	$t_\alpha = -0.963433$	статистично не значущий	0.079313
$\beta = 0.070787$	$t_\beta = 1.290640$	статистично не значущий	
$\gamma = -0.028700$	$t_\gamma = -0.874210$	статистично не значущий	

Як видно з табл. 7, статистично незначущий коефіцієнт при змінній логарифма ВРП на душу населення дозволяє зробити висновок про відсутність ефекту кластерної конвергенції.

Графічний аналіз взаємозв'язку між темпами зростання й рівнем ВРП підтверджує висновок про дивергентну динаміку регіонального розвитку протягом досліджуваного періоду: регіони з високим значенням ВРП характеризуються більш високими темпами економічного зростання (рис. 27).

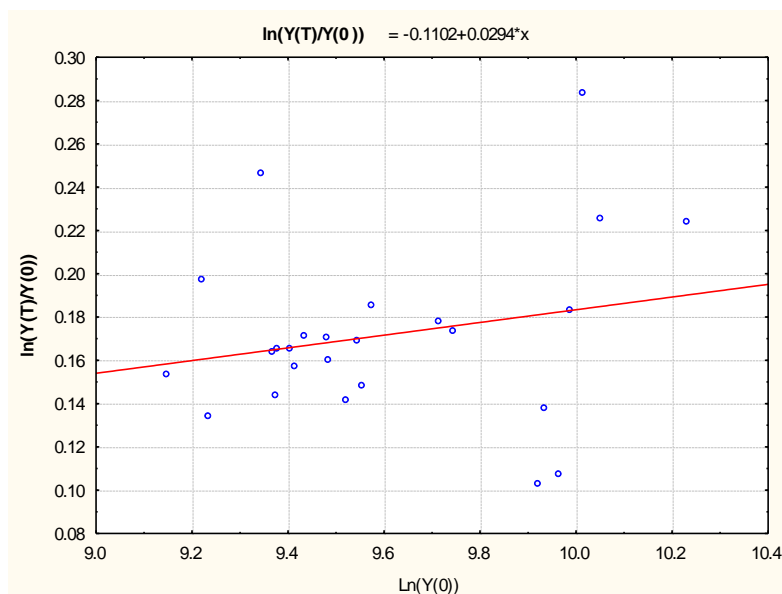


Рис. 27. Збіжність рівнів економічного розвитку регіонів України

При цьому більш виражений ефект дивергенції характерний для регіонів із високим рівнем соціально-економічного розвитку (рис. 28).

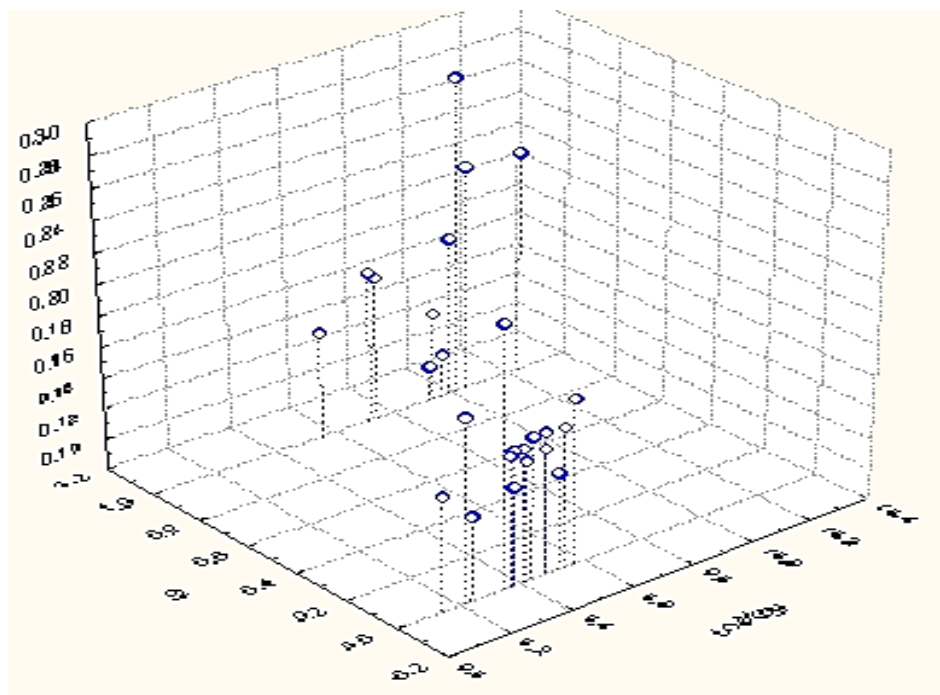


Рис. 28. Графічне зображення збіжності рівнів економічного розвитку регіонів у кластерах

**4. Побудова моделі з урахуванням просторових лагів** проводиться для аналізу впливу міжрегіональної взаємодії на процеси конвергенції. Вихідні дані для побудови моделі просторового лага мінімально умовної конвергенції наведені на рис. 29.

	A	B	C	D	E	F	G
1		ВРП на душу населення					
2	Область	2009 р.	2010 р.	$Y(T)/Y(0)$	$\ln(Y(T)/Y(0))$	$\ln(Y(0))$	$W_y$
3	АРК	13933	16507	1.1847	0.1695	9.5420	1.134E-05
4	Вінницька	12145	14332	1.1801	0.1656	9.4047	4.676E-05
5	Волинська	11796	13916	1.1797	0.1653	9.3755	6.12E-05
6	Дніпропетровська	27737	34709	1.2514	0.2242	10.2305	4.687E-05
7	Донецька	23137	28986	1.2528	0.2254	10.0492	2.269E-05
8	Житомирська	11419	14616	1.2800	0.2468	9.3430	4.338E-05

Рис. 29. Вихідні дані для оцінки параметрів моделі просторового лага мінімально умовної конвергенції (фрагмент)

Фактор, що враховує просторовий лаг, формується в такий спосіб. На першому кроці на основі матриці відстаней між обласними центрами визначається матриця ваг, розмірністю 25x25 (рис. 30).

	A	B	C	D	E	F
29	Номер регіону	1	2	3	4	5
30	1	0	1.5586E-06	7.08544E-07	4.76726E-06	3.0671E-06
31	2	1.5586E-06	0	6.67695E-06	3.0671E-06	1.51666E-06
32	3	7.08544E-07	6.67695E-06	0	1.26816E-06	7.72175E-07
33	4	4.76726E-06	3.0671E-06	1.26816E-06	0	0.000016
34	5	3.0671E-06	1.51666E-06	7.72175E-07	0.000016	0

Рис. 30. Матриця просторових ваг (фрагмент)

Елементи матриці ваг визначаються за формулою (9). На другому кроці за допомогою функції МУМНОЖ розраховуються значення фактора, що враховує просторовий лаг (рис. 31).

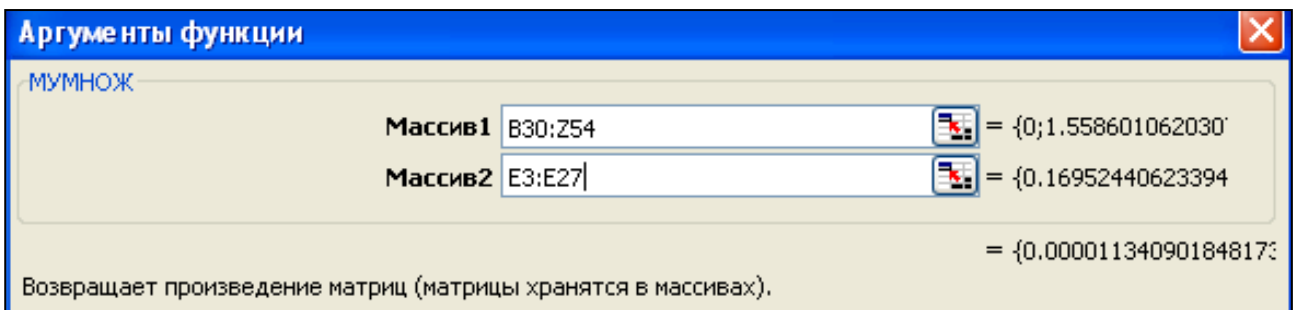


Рис. 31. Аргументи функції МУМНОЖ

Результати оцінки параметрів моделі просторового лага мінімально умовної конвергенції подано в табл. 8.

Таблица 8

### Параметри моделі просторового лага мінімально умовної конвергенції

Значення параметра	Значення критерію Стюдента	Висновок	Значення коефіцієнта детермінації
$\alpha = -0.086$	$t_{\alpha} = -0.314581$	статистично не значущий	0.05646040
$\beta = 0.028$	$t_{\beta} = 0.991333$	статистично не значущий	
$\rho = -257.841$	$t_{\rho} = -0.461404$	статистично не значущий	

Результати, наведені в табл. 8, дозволяють зробити висновок про статистичну незначущість параметра при факторі, що враховує просторо-



вий лаг. Таким чином, гіпотеза про позитивний вплив міжрегіональної взаємодії на процеси конвергенції територіального розвитку не підтверджується.

Модель умовної конвергенції із просторовою помилкою припускає, що регіональний розвиток залежить від темпів зростання сусідніх регіонів (через ендогенний просторовий лаг) і від початкового значення досліджуваної ознаки (через екзогенний просторовий лаг).

Вихідні дані для оцінки параметрів моделі умовної конвергенції із просторовою помилкою наведені на рис. 32.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		ВРП на душу населення							
2	Область	2009 р.	2010 р.	$Y(T)/Y(0)$	$\ln(Y(T)/Y(0))$	$\ln(Y(0))$	$W_y$	$d_i$	$WY$
3	АРК	13933	16507	1.1847	0.1695	9.5420	1.134E-05	0	0.0007
4	Вінницька	12145	14332	1.1801	0.1656	9.4047	4.676E-05	0	0.0025
5	Волинська	11796	13916	1.1797	0.1653	9.3755	6.12E-05	0	0.0035
6	Дніпропетровська	27737	34709	1.2514	0.2242	10.2305	4.687E-05	1	0.0028
7	Донецька	23137	28986	1.2528	0.2254	10.0492	2.269E-05	1	0.0013
8	Житомирська	11419	14616	1.2800	0.2468	9.3430	4.338E-05	0	0.0025
9	Закарпатська	10081	12278	1.2179	0.1972	9.2184	1.101E-05	0	0.0006
10	Запорізька	20614	23657	1.1476	0.1377	9.9337	4.976E-05	1	0.0024

**Рис. 32. Вихідні дані для оцінки параметрів моделі умовної конвергенції із просторовою помилкою (фрагмент)**

Елементи вектора, що враховує екзогенний просторовий лаг, розраховуються за допомогою функції МУМНОЖ(B30:Z54;F3;F27).

Результати оцінки параметрів моделі подано в табл. 9.

Таблица 9

### Параметри моделі умовної конвергенції з просторовою помилкою

Значення параметра	Значення критерію Стьюдента	Висновок	Значення коефіцієнта детермінації
$\alpha = -0.697$	$t_\alpha = -1.440$	статистично не значущий	0.29888155
$\beta = 0.094$	$t_\beta = 1.826$	статистично значущий	
$\varphi = -0.037$	$t_\varphi = -1.212$	статистично не значущий	
$\gamma = 127.956$	$t_\gamma = 2.455$	статистично значущий	
$\lambda = -7621.901$	$t_\lambda = -2.502$	статистично значущий	

Гіпотеза про статистичну значущість параметрів при факторах, що враховують екзогенний і ендогенний просторовий лаг, підтверджується з 95-відсотковим рівнем довірчої ймовірності і свідчить про наявність просторової кластеризації реакцій на вплив зовнішніх шоків.

## **Лабораторна робота "Моделі динаміки швидких соціально-економічних процесів"**

**Мета** – закріплення теоретичного й практичного матеріалу за темою "Моделювання швидких та лавиноподібних соціально-економічних процесів", набуття навичок побудови моделей лавиноподібних процесів поширення паніки у соціумі в середовищі *Microsoft Excel*.

**Умови завдання.** Значення показників, що характеризують процес поширення валютної паніки на ринку, такі: загальна чисельність населення –  $N = 2000$  осіб, кількість схильних до паніки людей  $S(0) = 1050$  осіб; кількість заражених панікою –  $I(0) = 50$  осіб; кількість не панікуючих – 45 % від загальної кількості людей; одна особа контактує з 10 іншими; ймовірність зараження при контакті дорівнює 0,1; коефіцієнт мимовільного одужання за одиницю часу дорівнює 0,05.

Функція ефективності методу лікування за одиницю часу має такий вигляд:  $U(t) = e^{t/100} - 1$ .

### **Необхідно:**

- 1) побудувати модель поширення валютної паніки через кількість панікуючих;
- 2) побудувати модель поширення валютної паніки через кількість здорових, але схильних до паніки; зробити висновки.

## **Методичні рекомендації**

**1. Основні поняття.** Широке коло явищ у природі та суспільстві (процеси горіння і вибуху, розмноження вірусів, у тому числі комп'ютерних, соціальні конфлікти з мітинговим характером протікання, валютні та біржові паніки, ажіотажний попит на ті чи інші товари, поширення технологічних та управлінських нововведень, у тому числі інформаційних систем і технологій) має лавиноподібний, за типом ланцюгової реакції, характер поширення, розвитку процесу. Для таких процесів характерна наявність внутрішніх або зовнішніх зв'язків, що характеризу-

ються великою, найчастіше експоненціальною, зміною одного параметра при невеликій зміні іншого.

**Лавиноподібним соціально-економічним процесом** (ЛСЕП) називається процес поширення деякої властивості або стану в середовищі суб'єктів соціально-економічних відносин із соціально-психологічним механізмом зараження, наслідування, навіювання, що приводить до різкої зміни економічної ситуації або середовища (попиту, пропозиції, способів або прийомів господарювання) в певному сегменті ринку. Зазначений механізм поширення – зараження, навіювання, наслідування – у сукупності з множинним характером взаємодії суб'єктів (кількість зв'язків суб'єкта зазвичай більше одиниці) призводить до ланцюгового з розгалуженням процесу утворення активних суб'єктів, що має повну аналогію з ланцюговими реакціями, що гілкуються, відкритими Семеновим Н. Н. Зазначені процеси в системі соціально-економічних відносин є одними з найшвидших.

Розглянемо механізм контактного поширення валютної паніки (від людини до людини). На рис. 33 наведена схема контактного зараження.

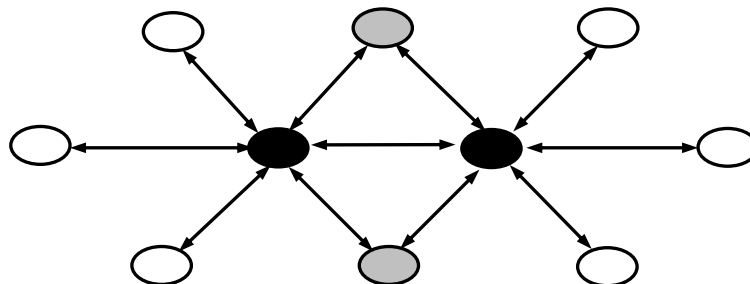


Рис. 33. Схема контактної паніки

Нехай:

$S(t)$  – кількість здорових, але схильних до паніки людей (чутливих);

$I(t)$  – кількість заражених панікою, вони ж поширюють паніку (є індукторами);

$R(t)$  – число не панікуючих (володіють імунітетом).

Необхідно підрахувати зміни цих кількостей. Існує два підходи.

Перший підхід – це "прохід" по всім, хто панікує, і підрахунок кількості людей, яку вони заразили.

Другий підхід – це "прохід" по всім здоровим, але схильним до паніки, і підрахунок кількості тих, які заразилися знову.

Розглянемо в розгорнутому вигляді перший підхід.

Нехай індивіди всіх типів розподілені в масі рівномірно. Кожен заражений впливає на  $r$  тих, хто з ним контактує. Частка чутливих дорівнює  $\frac{S(t)}{N-1}$ , адже сам заражений не бере участь у визначенні частки. Для простоти викладу будемо використовувати вираз  $\frac{S(t)}{N}$ . На підсумковий вид моделі ця поправка не впливає й істотна тільки при порівнянні різних дискретних варіантів моделі. При необхідності будемо її враховувати.

Отже, один заражений контактує з  $r \cdot \frac{S(t)}{N}$  чутливими. Нехай ймовірність зараження при контакті дорівнює  $p_1$ . Отже, один заражений інфікує  $p_1 \cdot r \cdot \frac{S(t)}{N}$  чутливих.

Загальне число зв'язків-заражень у момент часу  $t$  дорівнює  $r \cdot I(t)$ , але спрацює з них тільки частина.

Перший інфікований заражає  $c_1 = p_1 \cdot r \cdot \frac{S(t)}{N}$ ,

$$(i + 1) \text{-й: } c_{i+1} = p_1 \cdot r \cdot \frac{S(t) - \sum_{k=1}^i c_k}{N} = c_i \cdot \left(1 - \frac{p_1 \cdot r}{N}\right).$$

У всіх формулах для  $c_i$ , при  $i \geq 2$ , враховується зменшення кількості незаражених  $i$ , крім того, вони знову рівномірно розподіляються по людській масі. Звичайно, це ідеалізація, вона призводить до дещо завищеного приросту заражених.

Величина  $\sum_{k=1}^{I(t)} c_k$  складає спад чутливих незаражених за одиницю часу і становить суму геометричної прогресії. Ця сума дорівнює:

$$\delta = p_1 r \cdot \frac{S(t)}{N} \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{p_1 r}{N}\right)^{I(t)}}{1 - \left(1 - \frac{p_1 r}{N}\right)} = S(t) \cdot 1 - \left(1 - \frac{p_1 r}{N}\right)^{I(t)}.$$

Отже,

$$\Delta S(t) = -S(t) \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{p_1 r}{N}\right)^{I(t)}\right] \cdot \Delta t.$$

Це дискретна модель зміни  $S(t)$ , вона найбільшою мірою відповідає дискретності поведінки реального соціуму.

Для зараженого індивідуума характерна панічна поведінка. Залежно від емоційно-психологічних характеристик людини вона виражається в різних формах: поширення панічних чуток, панічні дії або те й інше разом. При побудові математичних моделей було враховано лише інформаційний вплив на зовнішнє середовище у вигляді поширення панічних чуток.

З описаного можна зробити висновок, що швидкість зміни кількості схильних до паніки буде залежати від їх частки в загальній масі, від частки панікуючих, від кількості контактів, а також від імовірності зараження.

Кількість несприйнятливих поповнюється за рахунок тих, що одужали. Швидкість зміни видужалих може залежати як від мимовільного одужання, так і від процедури "лікування", тобто втручання ззовні. Кількість мимовільно видужалих зазвичай пропорційна кількості хворіючих. Кількість "вилікованих" буде залежати від зовнішніх впливів. Впливають на маси ЗМІ, а також "агенти" і "контрагенти впливу", тобто особистості – лідери думок, що володіють сильним впливом на суспільство (володіють реальною владою або харизмою).

Таким чином:

$$\Delta R(t) = [q \cdot I(t) + U(t) \cdot I(t)] \cdot \Delta t,$$

де  $q$  – коефіцієнт мимовільного одужання за одиницю часу;

$U(t)$  – функція ефективності методу лікування за одиницю часу.

Підсумкова система різницевих рівнянь, що відповідають дискретній моделі, буде мати такий вигляд (при  $\Delta t = 1$ ):

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i \cdot \left(1 - \frac{p_1 r}{N-1}\right)^{I_i} \\ I_{i+1} = I_i \cdot (1 - q - U_i) + S_i \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{p_1 r}{N-1}\right)^{I_i}\right]. \end{cases} \quad (10)$$

Дискретна модель більш природна для соціально-економічних процесів (наприклад валютних панік: курс валюти змінюється раз на добу; люди обмінюються чутками і купують валюту вдень).

Дискретна модель, отримана при другому підході, буде мати такий вигляд:

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i \cdot (1 - p_1)^{\frac{r}{N-1} I_i} \\ I_{i+1} = I_i \cdot (1 - q - U_i) + S_i \cdot \left[1 - (1 - p_1)^{\frac{r}{N-1} I_i}\right]. \end{cases} \quad (11)$$

Зауважимо, що моделі (10) і (11) співпадають, якщо  $r = N - 1$ , тобто кожен елемент соціуму пов'язаний із кожним, а значення  $S_0, I_0$  – задані.

**2. Побудова моделей поширення валютної паніки.** Вихідні дані для побудови першої моделі наведені на рис. 34.

	A	B	C	D	E	F	G
1	N =	2000	R(t) =	900	=	45 %	от N
2	S(0) =	1050	r =	10		q =	0,05
3	I(0) =	50	p =	0,1			
4							
5	t	S(t)	I(t)	$\Delta S(t)$	$\Delta I(t)$	U	R(t)
6	0	1050,000	50,0000				

Рис. 34. Вихідні дані

Введемо формули для розрахунку усіх проміжних та кінцевих значень, як це показано на рис. 35.

A	B	C	D	E	F	G
t	S(t)	I(t)	$\Delta S(t)$	$\Delta I(t)$	U	R(t)
0	=B2	=B3				
1	=B6*((1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C6)	=C6*(1-\$H\$2-F6)+B6*(1-(1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C6)	=B7-B6	=C7-C6	=EXP(A7/100)-1	=B\$1-B7-C7
2	=B7*((1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C7)	=C7*(1-\$H\$2-F7)+B7*(1-(1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C7)	=B8-B7	=C8-C7	=EXP(A8/1000)-1	=B\$1-B8-C8
3	=B8*((1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C8)	=C8*(1-\$H\$2-F8)+B8*(1-(1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C8)	=B9-B8	=C9-C8	=EXP(A9/1000)-1	=B\$1-B9-C9
4	=B9*((1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C9)	=C9*(1-\$H\$2-F9)+B9*(1-(1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C9)	=B10-B9	=C10-C9	=EXP(A10/1000)-1	=B\$1-B10-C1
5	=B10*((1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C10)	=C10*(1-\$H\$2-F10)+B10*(1-(1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C10)	=B11-B10	=C11-C10	=EXP(A11/1000)-1	=B\$1-B11-C1
6	=B11*((1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C11)	=C11*(1-\$H\$2-F11)+B11*(1-(1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C11)	=B12-B11	=C12-C11	=EXP(A12/1000)-1	=B\$1-B12-C1
7	=B12*((1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C12)	=C12*(1-\$H\$2-F12)+B12*(1-(1-\$E\$3*\$E\$2/(\$B\$1-1))^C12)	=B13-B12	=C13-C12	=EXP(A13/1000)-1	=B\$1-B13-C1

Рис. 35. Формули для розрахунку (фрагмент)

Результати побудови першої моделі наведені на рис. 36.

	A	B	C	D	E	F	G
5	t	S(t)	I(t)	$\Delta S(t)$	$\Delta I(t)$	U	R(t)
6	0	1050,000	50,0000				
7	1	1024,056	73,4438	-25,9438	23,44381	0,0100502	902,50
8	2	987,106	105,9839	-36,9504	32,54009	0,002002	906,91
9	3	936,122	151,4566	-50,9841	45,47271	0,0030045	912,42
10	4	867,799	211,7512	-68,3225	60,29463	0,004008	920,45
11	5	780,555	287,5591	-87,2442	75,80789	0,0050125	931,89
12	6	675,949	376,3457	-104,606	88,78659	0,006018	947,71
13	7	559,925	471,2872	-116,024	94,94149	0,0070246	968,79

Рис. 36. Результати розрахунку (фрагмент)

Дзеркальний лавиноподібний характер швидкості зміни кількості схильних до паніки людей та заражених панікою зображено на рис. 37.

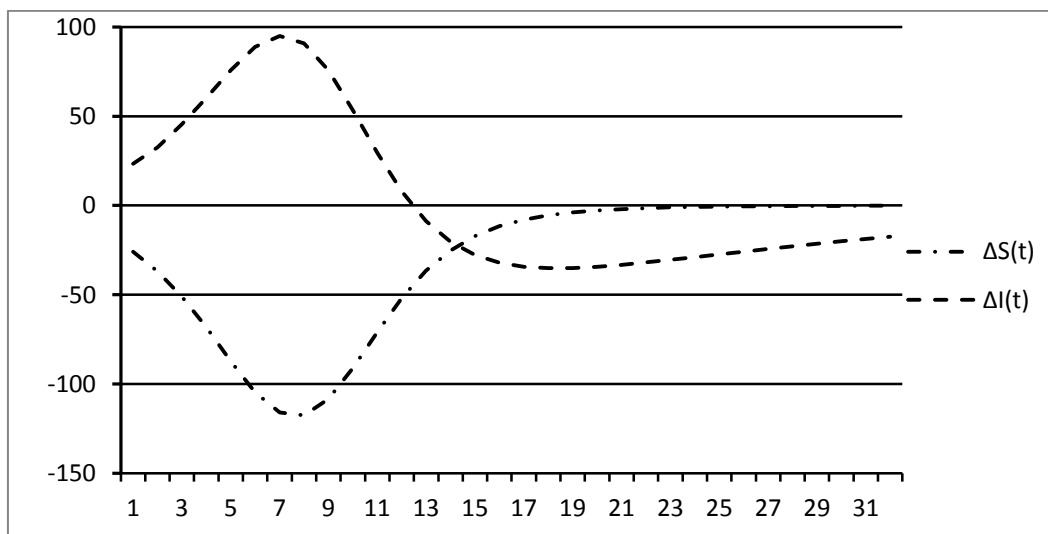


Рис. 37. Динаміка швидкості

Динаміка загальної кількості схильних до паніки людей, заражених панікою та не панікуючих наведена на рис. 38.

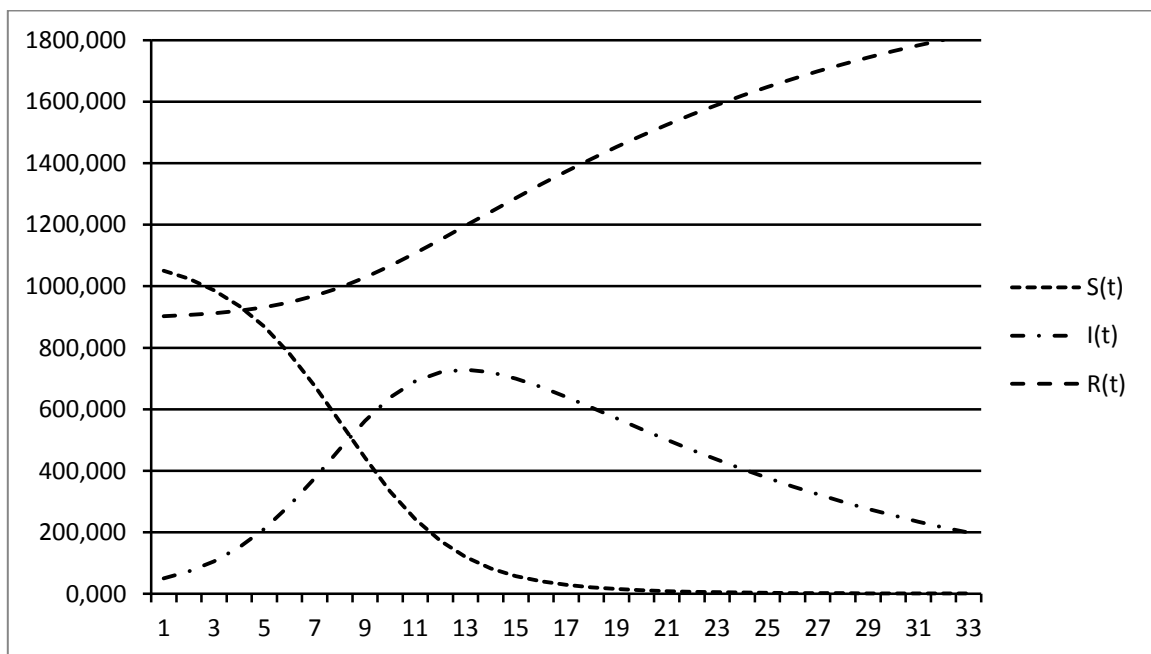


Рис. 38. Динаміка кількості людей

Побудова другої моделі виконується аналогічним чином.

Друга модель більшою мірою відповідає реальному механізму поширення паніки (перша модель дає завищене значення швидкості поши-

рення). Однак головним її достоїнством є інше. Метод її отримання дозволяє оцінити і врахувати ефект синергії, характерний для взаємодії заразливих осіб. В інформаційному суспільстві кожна людина відчуває на собі дію декількох джерел інформації, які, в певних ситуаціях, виступають в якості провокаторів паніки, "інфікують" панікою. Синергізм такої дії виявляється в зростанні ймовірності зараження вище величини, обумовленої незалежним впливом.

## Лабораторна робота "Когнітивна модель складної ситуації"

**Мета** – закріплення теоретичного й практичного матеріалу за темою "Когнітивне моделювання складних ситуацій в умовах сучасної ринкової економіки", набуття навичок побудови когнітивних моделей у середовищі *Microsoft Excel*.

**Умови завдання.** Значення елементів матриці суміжності вершин – матриці впливу факторів на рівень життя у регіоні – наведені в табл. 10.

Таблиця 10

### Матриця впливу факторів

Назва фактора	Код	(А)	(Б)	(В)	(Г)	(Д)	(Е)
Рівень життя населення	(А)	0	0,75	0,3	0	0	0
Рівень зайнятості	(Б)	0	0	0,2	0,5	0	0
Рівень розвитку освіти й охорони здоров'я	(В)	0	0	0	0,2	0,1	0
Рівень розвитку промисловості	(Г)	0	0	0	0	0,4	0
Інвестиційна привабливість	(Д)	0	0	0	0,7	0	-0,6
Рівень злочинності	(Е)	-0,5	-0,3	0	0,1	0	0

### Необхідно:

- 1) побудувати когнітивну модель оцінки рівня життя в регіоні;
- 2) розрахувати консонанс, зробити висновки.

### Методичні рекомендації

**1. Основні поняття.** Методологія когнітивного моделювання призначена для аналізу й ухвалення рішень у погано визначених ситуа-



ціях. Вона заснована на моделюванні суб'єктивних уявлень експертів про ситуацію і включає:

методологію структуризації ситуації: модель представлення знань експерта у вигляді знакового орграфа;

методи аналізу ситуації.

Нині методологія когнітивного моделювання розвивається у напрямі вдосконалення апарату аналізу й моделювання ситуації. Розробляються моделі прогнозу розвитку ситуації; методи рішення зворотних завдань.

Початковим поняттям у когнітивному моделюванні складних ситуацій є поняття когнітивної карти ситуації.

**Когнітивна карта ситуації** є орієнтованим зваженим графом, в якому:

вершини взаємно-однозначно відповідають базисним чинникам ситуації, в термінах яких описуються процеси в ситуації. Безліч спочатку відібраних базисних чинників може бути верифіковано за допомогою технології *data mining*, що дозволяє відкинути надмірні чинники, слабо пов'язані з ядром базисних чинників;

визначаються безпосередні взаємозв'язки між чинниками шляхом розгляду причинно-наслідкових ланцюжків, що описують поширення впливів одного чинника на інші. Вважається, що чинники, які входять в посилення "якщо" ланцюжка "якщо, ... то", впливають на чинники сліdstва "то" цього ланцюжка, причому цей вплив може бути таким, що або посилює (позитивним), або гальмує (негативним), або змінного знака залежно від можливих додаткових умов.

Когнітивна карта відображає лише факт наявності впливів чинників один на одного. У ній не відбиваються ні детальний характер цих впливів, ні динаміка зміни впливів залежно від зміни ситуації, ні тимчасові зміни самих чинників. Облік усіх цих обставин вимагає переходу на наступний рівень структуризації інформації, відображеної в когнітивній карті, тобто до **когнітивної моделі**. На цьому рівні кожен зв'язок між чинниками когнітивної карти розкривається до відповідного **рівняння**, яке може містити як кількісні (вимірювані), так і якісні (не вимірювані) змінні. Формально когнітивна модель ситуації може бути, як і когнітивна карта, представлена графом, проте кожна дуга в цьому графові представляє вже деяку функціональну залежність між відповідними базисними чинни-

ками, тобто когнітивна модель ситуації представляється **функціональним графом**.

Найчастіше взаємодія чинників експертом описується так: "При значному зростанні чинника А чинник Б трохи убуває". Одиниці виміру відсутні. Тому можемо вивести закон виду "Якщо значення чинника  $k$  зростає на  $X_k$  відсотків, то значення чинника  $m$  убуває на  $X_m$  відсотків", що виражається формулою:

$$X_m(t + 1) = W_{mk} \cdot X_k(t).$$

Тобто всі взаємодії чинників моделі визначаються тільки матрицею суміжності вершин орієнтованого графа  $W = (W_{mk})$ . Зрозуміло, якщо на когнітивній карті ребро з вершини  $k$  у вершину  $m$  відсутнє, то  $W_{mk} = 0$ . Фактично ми кожному ребру графа, окрім знака, приписали його вагу. Це і є зважений орієнтований граф.

Зазвичай вимагають, щоб  $-1 \leq W_{mk} \leq 1$ . Це відповідає тому, що аналізована система інерційна, тобто зміна якого-небудь чинника не здійснює великих змін в інших чинниках.

Достатньою умовою загасання наслідків одиничної дії є те, щоб відображення вектору значень чинників у момент часу  $t$  в їх значення у момент часу  $t + 1$  було таким, що стискує.

Для того щоб оцінити достовірність висновків, існують механізми нечіткої логіки. Розраховується значення консонансу, що означає упевненість у висновку, відповідність очікуваної та отриманої інформації. Чим більше значення консонансу, тим краще. Максимальна впевненість рівна 1 досягається, коли немає чинників, діючих у різних напрямках; мінімальна рівна 0 – коли є приблизно рівні по силі протилежні дії.

Розрахунок консонансу повинен здійснюватися за формулою:

$$C_m(t) = \frac{|\sum_k W_{mk} \cdot X_k(t)|}{\sum_k |W_{mk} \cdot X_k(t)|}.$$

**2. Побудова когнітивної моделі оцінки рівня життя в регіоні.** Вихідні дані для побудови моделі та формули розрахунку наведені на рис. 39.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Матриця впливу факторів		(A)	(Б)	(В)	(Г)	(Д)
2	Рівень життя населення	(A)	0	0,75	0,3	0	0
3	Рівень зайнятості	(Б)	0	0	0,2	0,5	0
4	Рівень розвитку освіти і охорони здоров'я	(В)	0	0	0	0,2	0,1
5	Рівень розвитку промисловості	(Г)	0	0	0	0	0,4
6	Інвестиційна привабливість	(Д)	0	0	0	0,7	0
7	Рівень злочинності	(Е)	-0,5	-0,3	0	0,1	0
9	Зміна у % покроково	0	1	2	3	4	5
10	Рівень життя населення	0	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)
11	Рівень зайнятості	2	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)
12	Рівень розвитку освіти і охорони здоров'я	5	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)
13	Рівень розвитку промисловості	20	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)
14	Інвестиційна привабливість	0	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)
15	Рівень злочинності	15	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)	=МУМНОЖ(\$C\$2:\$H\$7;B10:B15)
17	Зміна у % зростаючим підсумком	0	1	2	3	4	5
18	Рівень життя населення	=100*(1+B10/	=100*(1+B10/	=100*(1+B10/	=100*(1+B10/	=100*(1+B10/	=100*(1+B10/
19	Рівень зайнятості	=100*(1+B11/	=100*(1+B11/	=100*(1+B11/	=100*(1+B11/	=100*(1+B11/	=100*(1+B11/
20	Рівень розвитку освіти і охорони здоров'я	=100*(1+B12/	=100*(1+B12/	=100*(1+B12/	=100*(1+B12/	=100*(1+B12/	=100*(1+B12/

Рис. 39. Вихідні дані та формули розрахунку (фрагмент)

На рис. 40 подано динаміку зміни значень факторів, які впливають на рівень життя в регіоні.

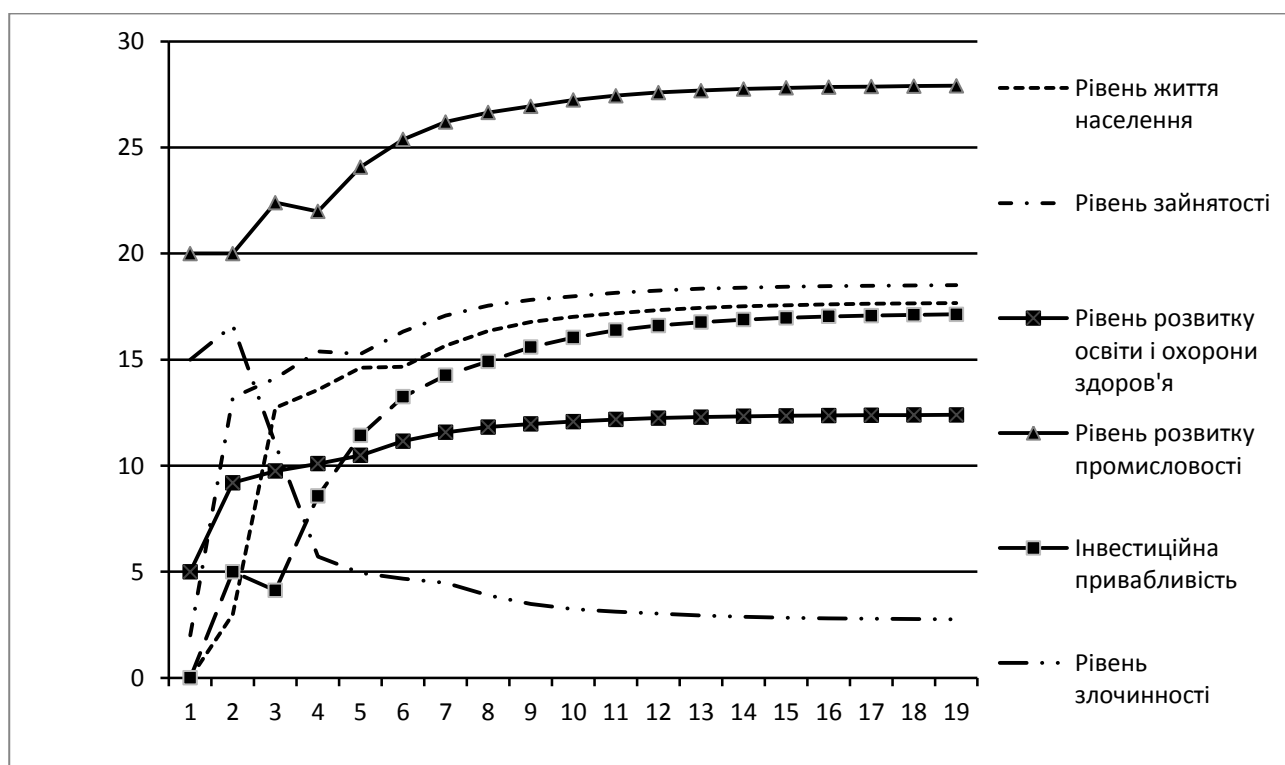


Рис. 40. Динаміка зміни факторів

Як видно з рис. 40, з часом відбувається зростання рівня розвитку промисловості, який "за собою тягне" рівень зайнятості й інвестиційну привабливість, які, у свою чергу, підвищують рівень життя в регіоні. По-

мірне зростання рівня розвитку освіти та охорони здоров'я протягом тривалого часу відповідає дійсності. Усі ці позитивні зміни викликають зниження рівня злочинності, хоча початкове значення його було досить високим.

Результати розрахунку консонансу наведені на рис. 41.

Фактор	Код	$ \sum W_{mk} \cdot X_k(t) $	$\sum  W_{mk} \cdot X_k(t) $	$C_m(t)$
Рівень життя населення	(А)	16,7	16,7	1,000
Рівень зайнятості	(Б)	15,6	15,8	0,987
Рівень розвитку освіти і охорони здоров'я	(В)	6,9	6,9	1,000
Рівень розвитку промисловості	(Г)	6,4	7,1	0,905
Інвестиційна привабливість	(Д)	16,1	17,8	0,905
Рівень злочинності	(Е)	-11,0	13,8	0,797

Рис. 41. Розрахунок консонансу

Як видно з рис. 41 можна бути впевненим в отриманих результатах (очікувана й отримана інформація відповідні), оскільки всі розраховані значення консонансу дуже високі.

## Рекомендована література

### Основна

1. Власов М. П. Моделирование экономических процессов / М. П. Власов, П. Д. Шимко. – Ростов н/Д : Феникс, 2005. – 409, [1] с.
2. Даніч В. М. Моделювання швидких соціально-економічних процесів : монографія / В. М. Даніч. – Луганськ : Вид-во СНУ ім. В. Даля, 2004. – 304 с.
3. Касимов Ю. Ф. Введение в теорию оптимального портфеля ценных бумаг / Ю. Ф. Касимов. – М. : Анкил, 2005. – 140 с.
4. Кузнецова С. В. Управление портфелем ценных бумаг: модели Марковица и Тобина : учебн. пособ. / С. В. Кузнецова, Н. Р. Стронгина ; М-во образования Рос. Федерации ; Нижегород. гос. ун-т им. Н. И. Лобачевского. – Н. Новгород : Изд-во Нижегород. госуниверситета, 2002. – 102 с.
5. Лук'яненко І. Г. Системне моделювання показників бюджетної системи України / І. Г. Лук'яненко. – К. : Вид. дім "Києво-Могилянська академія", 2004. – 242 с.