МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Державний вищий навчальний заклад
«КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
імені ВАДИМА ГЕТЬМАНА»

Т. В. БЛУДОВА, І. А. ДЖАЛЛАДОВА
О. І. МАКАРЕНКО, Г. В. ШУКЛІН

Математична економіка

Навчальний посібник

Рекомендовано
Міністерством освіти і науки України

1906 КНЕУ
КИЇВ 2009

УДК 330.4
ББК 65в631
М 34

Рецензенти

В. І. Єлейко, канд. фіз.-мат. наук, д-р екон. наук, проф.
(Львівська комерційна академія)
Д. Я. Хусаїнов, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Київський національний університет ім. Тараса Шевченка)
В. В. Барковський, д-р фіз.-мат. наук, проф.
(Державний університет інформаційно-комунікаційних технологій)

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
Лист № 1.4/18-Г-2 від 09.01.07

Математична економіка : навч. посіб. / Т. В. Блудова,
М 34 І. А. Джалладова, О. І. Макаренко, Г. В. Шуклін. — К.: КНЕУ, 2009. — 464, [8] с.
ISBN 978-966-483-183-0

У наш час виникла потреба у створенні дисциплін, які поєднують кілька наукових напрямків і показують, що витоки наук єдині. Як відомо, таке місце в системі наук посіла «евентологія». З огляду на це істотно зростає роль математичної економіки, яка вже кілька років є самостійною дисципліною. Автори сподіваються, що посібник відіграє роль «стимулу» і допоможе економістам засвоїти сучасний математичний апарат. Основні розділи побудовані таким способом, що відомості з математики й економіки наведено на початку, а далі подано комплексне розв’язування того чи іншого завдання.

Посібник призначено для студентів економічних спеціальностей, аспірантів, викладачів, економістів-практиків; сприятиме професійному зростанню майбутніх менеджерів, фінансистів, маркетологів, допоможе працювати їм фахівцями-аналітиками.

УДК 330.4
ББК 65в631

ISBN 978-966-483-183-0

ВСТУП

> Матерія та Розум — це просто зручний
> спосіб пов'язування подій в череду
>
> *Б. Рассел (1946)*

> Евентологія — це зручна теоретична основа,
> яка дозволяє об'єднати в рамках однієї теорії
> вивчення руху розуму та матерії

Математична економіка сьогодення є фактично самостійною дисципліною. Вона виникла на перетині математики та економічної теорії, але зараз вона не є частиною ні тієї, ні іншої дисципліни. Предмет її вивчення постійно змінюється. Те, що вчора вважалося сучасною теорією математичної економіки сьогодні вже є простим і наочним практичним апаратом для аналізу економічних процесів. Наочно, що зараз в курси для студентів включаються питання, які в свій час були проблемними для наукових співробітників. Сучасний економіст повинен знати досить багато із математики, бо сучасна економічна теорія припускає істотно більш високий рівень формалізації, ніж це було раніше.

Метою цієї книги — є зібрати і об'єднати якомога більше задач із різних галузей, потрібних економісту. Математичну економіку характеризує застосування різних розділів математики і розвиток нових методів для розв'язування нових задач. Економісти є дійсно новаторами в застосуванні математики до своїх потреб. Метою цієї книги — наочно показати цей процес застосування і оптимізації.

Історія математичної економіки фактично досі не написана. Серед економістів зараз як і раніше, не дуже багато прихильників математики.

У розвитку математичної економіки можна відокремити 3 етапи:

1. Важливі статті окремих спеціалістів в якої не приймали участь економіки (Ф. Кене, А.Смит, Д. Рикардо).

2. Неокласична математична економіка (Джевонс, Маршалл, Визер, Кларк, Фішер, Вальрас, Парето).

3. «Нова» математична економіка (з 50-х років 20 століття), (Д. Хикс, Р. Солоу, В. Леонтьєв, П. Самуєльсон та ін.)

Неокласичну математичну економіку, основний математичний апарат якої — похідна та рівняння, зараз доповнює аппарат, основи якого — опуклі множини, нерівності, стохастика.

Автори сподіваються, що цей посібник буде «стимулом» і допомагатиме економістам засвоїти сучасний математичний апарат.

Книга містить 12 розділів, в якій головним чином економічні моделі розглядаються з точки зору їх математичних властивостей.

Основні розділи побудовані таким чином, що відомості із математики й економіки наводяться на початку, а потім надається комплексний розгляд розв'язування тої чи тої проблеми.

Автори вважають, що практично розглянуто усі теми, які мають відношення до несучасної математичної економіки.

Викладання матеріалу загалом орієнтовано на задачі економічної теорії, в деяких розділах викладено окремі розділи макроекономіки, мікроекономіки, економіко-математичного моделювання, але акцент при цьому робиться на математичному обґрунтуванні відповідних стверджувань.

Буде дуже приємним, якщо посібник сприятиме професійному зросту майбутніх менеджерів, фінансистів, маркетологів, допоможе їм працювати фахівцями-аналітиками.

Автори хочуть подякувати всім спеціалістам, хто працює в даному напрямі, і тим, чиї результати так чи так використані в книжці. Крім того, автори вдячні рецензентам та всім, хто допомагав у видавництві цього посібника.

Наприкінець, автори дякують усім, хто висловить у майбутньому свої критичні зауваження про посібник і допоможе виправити недоліки.

РОЗДІЛ 1

ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ МАКРОЕКОНОМІКИ

1.1. Математична модель

Розглянемо систему математичних співвідношень між параметрами об'єктів економічної системи, описуваної математичними засобами у вигляді математичних моделей — рівнянь (алгебраїчних, диференціальних, різницевих, інтегральних), графіків, таблиць, схем тощо, які характеризують закономірності перебігу досліджуваних економічних процесів та їхніх істотних властивостей. При цьому неістотними, другорядними з огляду на зміст конкретної задачі властивостями економічних об'єктів та процесів можна знехтувати.

Отже, математичні моделі являють собою абстрактні образи оригіналів — економічних об'єктів і процесів, що з більшим чи меншим ступенем наближення до реальності описують властивості останніх, оскільки жодна модель не може повною мірою відобразити всі властивості й співвідношення між параметрами модельованого об'єкта-оригіналу.

Коли йдеться про моделювання процесів ринкової економіки, на особливу увагу заслуговують *рівноважні моделі*, що описують такий стан економічної системи, коли зміни всіх факторів, які впливають на неї, не можуть вивести її зі стану рівноваги, тобто рівнодійна відповідних впливів дорівнює нулю. Математичні моделі рівноважних економічних моделей — це моделі *макроекономіки*.

У *статичних моделях* описується незмінний стан (постійні параметри) економічного об'єкта в певний момент або впродовж певного проміжок часу. У *динамічних моделях* описується перебіг процесів, що характеризуються функціональною залежністю змінних значень досліджуваних параметрів від часу. Динамічні моделі звичайно використовують математичні засоби диференціальних і різницевих рівнянь.

1.2. Еластичність функції та її геометричний зміст

У математичному аналізі, розглядаючи функціональну залежність $y = f(x)$, вважають, що змінні x (аргумент) та y (функція) є безрозмірними величинами, а в економічному аналізі відповідні змінні є розмірними величинами, які засобами аналізу зводять до безрозмірних у вигляді відношень $\frac{x}{\Delta x}$ і $\frac{y}{\Delta y}$, де Δx і Δy — прирости x і y.

Означення. **Еластичністю функції** $y = f(x)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту аргументу x при $\Delta x \to 0$ і позначається

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right). \qquad (1.1)$$

Еластичність функції виражає наближено на скільки відсотків зміниться $y = f(x)$ у разі зміни незалежної змінної x на 1 %:

$$\frac{\Delta y}{y} \approx E_x(y)\frac{\Delta x}{x}.$$

З означень еластичності та похідної функції випливає:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y} \cdot y'$$

або

$$E_x(y) = \frac{x}{y} \cdot y' = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx}. \qquad (1.2)$$

Отже, для функції $y = f(x)$ виконуються такі рівності:

$$E_x(y) = \frac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}},$$

тобто еластичність виражає відношення граничного (маржинального) $f'(x)$ значення функції в точці x до середнього $\frac{f(x)}{x}$.

Оскільки

$$\frac{y'}{y} = \left(\ln y\right)', \text{ а } x = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{\left(\ln x\right)'},$$

то еластичність

$$E_x(y) = \frac{\left(\ln y\right)'}{\left(\ln x\right)'}, \qquad (1.3)$$

тобто еластичність можна подати у вигляді «логарифмічної похідної».

Розглянемо **геометричний зміст еластичності**. Еластичність, як і її похідна, має простий геометричний зміст.

Оскільки $y'(x) = \text{tg}\alpha$, де α — кут нахилу дотичної до графіка функції $y = f\left(x\right)$ у точці x, то згідно з (1.1) $E_x(y) = \frac{x}{y}\text{tg}\alpha$.

Знайдемо еластичність функції $y = f\left(x\right)$ у довільній точці $C(x, y)$. Для цього проведемо дотичну AB до графіка цієї функції у точці C. Позначимо точки перетину цієї дотичної з осями Ox і Oy відповідно A і B.

Розглянемо спадну опуклу вниз в околі точки C функцію $y = f\left(x\right)$ (рис. 1.1).

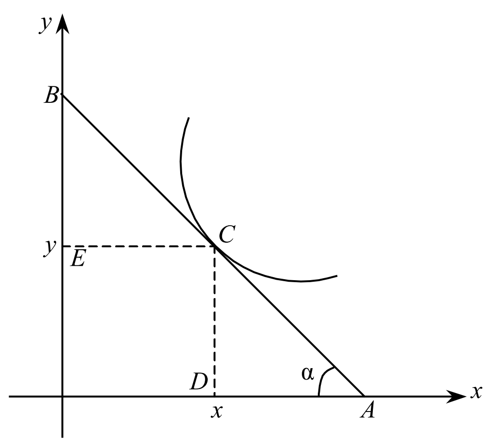


Рис. 1.1

Із ΔACD дістанемо:

$$\frac{CD}{AD} = \mathrm{tg}\angle DAC = \mathrm{tg}\left(180^\circ - \alpha\right) = -\mathrm{tg}\alpha\,,\ AD = \frac{CD}{-\mathrm{tg}\alpha};\ CD = f\left(x\right),$$

тобто

$$AD = \frac{f\left(x\right)}{-f'\left(x\right)} = -\frac{f\left(x\right)}{f'\left(x\right)}.$$

Із подібності трикутників *CBE* та *CDA* випливає, що

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CE}{AD} = -\frac{f'\left(x\right)x}{f\left(x\right)} = -E_x\left(y\right).$$

Отже,

$$E_x\left(y\right) = -\frac{CB}{CA}, \tag{1.4}$$

звідки маємо геометричну інтерпретацію: *еластичність спадної в околі точки C функції дорівнює відношенню відстаней по дотичній від точки C до її перетину з осями Oy* і *Ox*, узятому зі *знаком «мінус».* У випадку зростаючої опуклої вниз (рис. 1.2) і опуклої вгору (рис. 1.3) функції також дорівнюватиме відношенню $\frac{CB}{CA}$, а знак еластичності визначатиметься напрямом відрізків *CB* і *CA*. Якщо точки *A* і *B* лежать по один бік від точки *C* на дотичній (як на рис. 1.2 і 1.3), то в (1.4) потрібно брати знак «плюс». Якщо точки *A* і *B* лежать по різні боки від точки *C* (див. рис. 1.1), то в (1.4) потрібно брати знак «мінус».

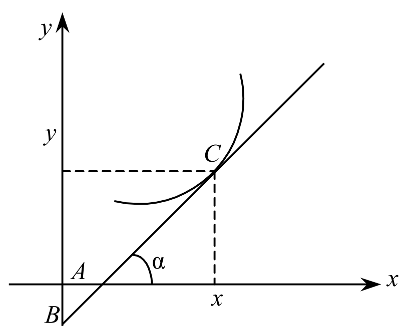


Рис. 1.2

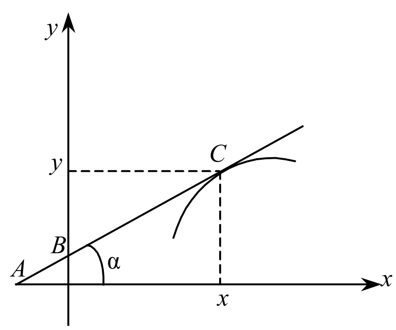


Рис. 1.3

Отже, *еластичність функції (за абсолютною величиною) дорівнює відношенню відстаней по дотичній від даної точки графіка функції до точок її перетину з осями Oy і Ox.*

Означення. Якщо $\left|E_x\left(y\right)\right| < 1$, то функція називається **нееластичною** (її відносний приріст спадає). Якщо $\left|E_x\left(y\right)\right| > 1$, то функція називається **еластичною** (її відносний приріст зростає).

Зауваження. Еластичність функції зображеної на рис. 1.2, більша від одиниці (оскільки $CB > CA$), а на рис. 1.3 менша від одиниці (оскільки $CB < CA$).

Властивості еластичності

1. Еластичність — безрозмірна величина, значення якої не залежить від того, в яких одиницях вимірюються величини *y* і *x*:

$$E_{ax}(by) = E_x(y)\,. \tag{1.5}$$

Справді, $E_{ax}(by) = \dfrac{ax}{by}\dfrac{d(by)}{d(ax)} = \dfrac{ax}{by}\dfrac{b(dy)}{a(dx)} = \dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} = E_x(y)$.

2. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної змінної x на швидкість (темп) зміни функції:

$$E_x(y) = xT_y, \tag{1.6}$$

де $T_y = (\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$.

3. Еластичність взаємно обернених функцій — взаємно обернені величини:

$$E_x(y) = \frac{1}{E_y(x)}\,. \tag{1.7}$$

Справді, $E_x(y) = \dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\dfrac{dx}{dy}\dfrac{y}{x}} = \dfrac{1}{E_y(x)}$.

4. Еластичність добутку двох функцій u(x) і v(x), що залежать від одного й того самого аргументу *x*, *дорівнює сумі еластичностей:*

$$E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)\,. \tag{1.8}$$

Справді,

$$E_x(uv)=\frac{x}{uv}\frac{d(uv)}{dx}=\frac{x}{uv}\left[v\left(\frac{du}{dx}\right)+u\left(\frac{dv}{dx}\right)\right]=\frac{x}{u}\frac{du}{dx}+\frac{x}{v}\frac{dv}{dx}=E_x(u)+E_x(v).$$

5. Еластичність частки двох функцій u(x) і v(x), що залежать від одного й того самого аргументу *x*, *дорівнює різниці еластичностей:*

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v). \tag{1.9}$$

Справді,

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{x}{\frac{u}{v}}\frac{d\left(\frac{u}{v}\right)}{dx}=\frac{xv}{u}\frac{vdu-udv}{v^2}=\frac{x}{u}du-\frac{x}{v}dv=E_x(u)-E_x(v).$$

6. Еластичність суми двох функцій u(x) і v(x) обчислюється за формулою:

$$E_x(u+v)=\frac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}. \tag{1.10}$$

Справді,

$$E_x(u+v)=\frac{x}{u+v}\frac{d(u+v)}{dx}=\frac{x}{u+v}\left[\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right]=$$
$$=\frac{1}{u+v}\left(u\frac{du}{u}:\frac{dx}{x}+v\frac{dv}{v}:\frac{dx}{x}\right)=\frac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}.$$

Наведемо приклади обчислення еластичності елементарних функцій.

1. Еластичність степеневої функції $y=x^{\alpha}$ стала, дорівнює показнику степеня: $E_x(x^{\alpha})=\alpha$.

Справді, $E_x(x^{\alpha})=\frac{x}{x^{\alpha}}\frac{dx^{\alpha}}{dx}=\frac{\alpha x^{\alpha-1}x}{x^{\alpha}}=\alpha$.

2. Еластичність показникової функції $y=a^x$ пропорційна до *x*:

$$E_x(a^x)=x\ln a.$$

Справді, $E_x(a^x) = \frac{x}{a^x}\frac{da^x}{dx} = \frac{x}{a^x}a^x \ln a = x\ln a$.

3. Еластичність лінійної функції $y = kx + b$:

$$E_x(kx+b) = \frac{kx}{kx+b}.$$

Справді, $E_x(kx+b) = \frac{x}{kx+b}\cdot\frac{d(kx+b)}{dx} = \frac{x}{kx+b}\cdot k = \frac{kx}{kx+b}$.

Якщо лінійна функція спадна (кутовий коефіцієнт від'ємний, тобто $k < 0$), то еластичність функції змінюється від нуля в точці (O, y_m) перетину графіка цієї функції з віссю *Oy* до мінус нескінченності $(-\infty)$ у точці (x_m, O) перетину графіка цієї функції з віссю *Ox*, проходячи через граничне значення (-1) у середній точці $\left(\frac{x_m}{2}, \frac{y_m}{2}\right)$.

Отже, еластичність лінійної функції залежить від кута нахилу прямої в точці *x*, в якій оцінюється еластичність (рис. 1.4).

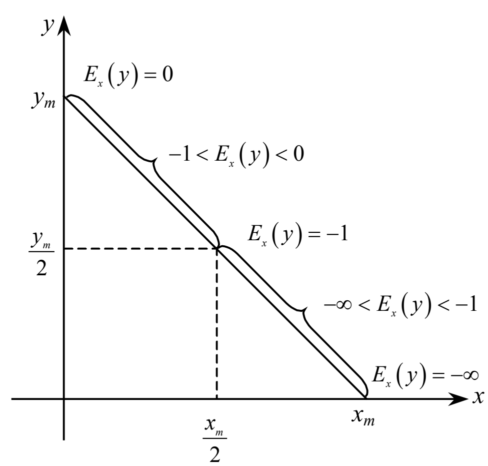


Рис. 1.4

Означення. Функція з нескінченною еластичністю в усіх точках називається **цілком еластичною**, а з нульовою еластичністю в усіх точках — **цілком нееластичною**.

1.3. Застосування еластичності в економічному аналізі

Еластичність функцій застосовується при аналізі попиту та споживання, для прогнозування цінової політики. Нехай $q = q(p)$ — функція попиту товару ціною p.

1. **Еластичність попиту за ціною**

$$E_p(q) = \frac{p}{q}\frac{dq}{dp} = \frac{p}{q}q' \qquad (1.11)$$

виражає відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на будь-яке благо або товар зі зміною ціни на 1 % і характеризує чутливість споживачів до зміни цін на продукцію.

1.1. Нехай дослідним шляхом встановлено функції попиту $q = \frac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s = p + \frac{1}{2}$, де q і s — обсяги товарів; p — ціна товару.

Знайти рівноважну ціну; еластичність попиту і пропозиції при рівноважній ціні.

Рівноважну ціну p' можна знайти з рівняння:

$$\frac{p+8}{p+2} = p + \frac{1}{2}; \; p + 8 = p^2 + 2p + \frac{1}{2}p + 1;$$

$$p^2 + \frac{5}{2}p - p - 7 = 0; \; 2p^2 + 3p - 14 = 0.$$

Маємо $p_1 = -\frac{7}{2}$, $p_2 = 2$. З економічних міркувань $p_1 = -\frac{7}{2} < 0$ — сторонній розв'язок. Отже, рівноважна ціна p =2.

Обчислимо еластичність попиту:

$$E_p(q) = \frac{p}{q}q'_p, \; E_p(q) = \frac{-6p}{(p+2)(p+8)}.$$

Обчислимо еластичність пропозиції:

$$E_p(s) = \frac{p}{s}s'_p, \; E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

При рівноважній ціні $p = 2$ маємо $E_2(q) = -0,3,$ $E_2(s) = 0,8.$

Попит і пропозиція за рівноважною ціною нееластичні. Це означає, що зміна ціни не приведе до різкої зміни попиту та пропозиції. Так, із підвищенням ціни на 1 % попит зменшиться на 0,3 %, а пропозиція збільшиться на 0,8 %.

1.2. Нехай функція попиту описується формулою $q(p) = qe^{-kp^2}$, де q_0 і k — задані сталі.

Знайти, при яких значеннях ціни попит буде еластичним.

Обчислимо еластичність попиту:

$$E_p(q) = \frac{p}{q} q'\left(p\right), \quad E_p(q) = \frac{-2kpq_0 e^{-kp^2}}{q_0 e^{-kp^2}} p = -2kp^2.$$

Для того щоб попит був еластичним, необхідно, щоб виконувалась нерівність $2kp^2 > 1$, тобто $p > \frac{1}{\sqrt{2k}}$.

2. **Еластичність попиту за доходом**

$$E_R(q) = \frac{dq}{q} : \frac{dR}{R} = \frac{R}{q} \frac{dq}{dR} \tag{1.11}$$

виражає відносну зміну (у відсотках) розміру попиту на будь-яке благо або товар у разі зміни доходу споживачів цього блага на 1 %. Додатна еластичність попиту за доходом характеризує нормальні (високоякісні) товари, а від'ємна — малоцінні (низькоякісні) товари.

Високий додатний коефіцієнт попиту за доходом у галузі означає, що її внесок у економічне зростання більший, ніж частка в структурі економіки, і вона має шанси на розширення та розвиток у майбутньому. Навпаки, якщо коефіцієнт еластичності попиту на продукцію галузі за доходом має невелике додатне чи від'ємне значення, то на неї очікує застій і перспектива скорочення виробництва.

2.1. Нехай встановлено зв'язок між доходом підприємства та еластичністю попиту.

Нехай функція доходу $R(x) = xp$, де x — кількість виготовлених та проданих одиниць продукції; p — ціна кожної одиниці продукції. Маржинальний дохід відносно ціни визначається так:

$$\frac{dR(x)}{dp} = \frac{d\left(xp\right)}{dp} = x + p\frac{dx}{dp} = x\left(1 + \frac{p}{x}\frac{dx}{dp}\right) = x\left(1 + E_p(x)\right).$$

2.2. Знайдемо зміну доходу зі збільшенням ціни товару при різних варіантах еластичності попиту.

Дохід $R = R(p)$ дорівнює добутку ціни товару p на значення попиту:

$$R(p) = q(p)p.$$

Обчислимо похідну цієї функції: $R'(p) = q + pq'\left(p\right) = q(1 + E_p(q))$.

Тепер проаналізуємо всі варіанти еластичності попиту.

1) $E_p(q) < -1$. Тоді $R'(p) < 0$. Отже, при еластичному попиті збільшення ціни p веде до зниження доходу. І, навпаки, зниження ціни на товар збільшує дохід.

2) $E_p(q) = -1$. Тоді $R'(p) = 0$, тобто за нейтрального попиту зміна ціни на товар не впливає на дохід.

3) $E_p(q) > -1$. Тоді $R'(p) > 0$, тобто за нееластичного попиту збільшення ціни на товар p приводить до збільшення доходу.

Розглянемо зв'язок еластичності з виторгом продавців. Нехай еластичність виторгу від продажу деякого товару тісно пов'язана з еластичністю попиту на цей товар. Використовуючи формулу доходу $R(p) = qp$ і формулу для еластичності добутку функцій, дістаємо:

$$E_p(R) = E_p(q) + E_p(p) = E_p(q) + 1 = 1 - \left|E_p(q)\right|.$$

Еластичність попиту за ціною завжди від'ємна, оскільки $q'\left(p\right) < 0$. Отже, еластичність виторгу за ціною від'ємна $(E_p(R) < 0)$ для товарів, попит на які еластичний $(\left|E_p(q)\right| > 1)$, і додатна $(E_p(R) > 0)$ для товарів, попит на які нееластичний $(\left|E_p(q)\right| < 1)$. Це означає, що *коли попит нееластичний, то зміна ціни викликає зміну виторгу в тому самому напрямі* і продавцям вигідно підвищувати ціну (що приводить до збільшення їхнього виторгу). *Для еластичного попиту зміна виторгу відбувається в напрямі, протилежному зміні ціни,* і для підвищення виторгу продавцям вигідно знижувати ціну. Аналогічно, підвищення податку на товар з еластичним попитом спричинюється до скорочення доходу від оподаткування.

У разі еластичного попиту зі збільшенням кількості товару або зі зменшенням ціни виторг зростає, а в разі нееластичного —

спадає. Наприклад, доходи фермерів скоротяться в разі доброго врожаю, оскільки еластичність попиту на сільськогосподарську продукцію доволі низька. Аналогічно, підвищення цін на залізничні квитки може призвести до скорочення бюджетних надходжень, якщо попит на відповідний товар або послугу виявиться еластичним.

Поняття еластичності поширюється й на інші галузі економіки.

3. **Еластичність та податкова політика**

Коли уряд вводить ті чи інші податки на деякі товари, він має з'ясувати, на які товари вводити податок; із кого стягувати податок — з виробників чи споживачів; якою буде сума податкових надходжень до бюджету; на кого припаде основний податковий тягар; якщо податок вже стягується, то чи варто збільшувати податкову ставку для покриття дефіциту бюджету.

На перший погляд здається, що податковий тягар припаде на тих, з кого будуть стягуватись податки, і що чим більшою буде податкова ставка, тим більшими будуть надходження від податків до бюджету. Проте економічний аналіз показує, що розмір податкового тягаря визначається не формальними платниками податку, а значеннями еластичності попиту та пропозиції. Аналогічно, збільшення податкової ставки, еквівалентне збільшенню ціни оподатковуваного товару, може призвести як до збільшення податкових надходжень до бюджету, так і до їх зменшення — знову ж таки залежно від еластичності.

Для того щоб розібратись у цих поняттях, розглянемо докладніше **модель стягнення податку**.

Нехай p — ціна товару на деякому ринку; $s(p)$ — його пропозиція; $q(p)$ — попит. Рівноважна ціна p_0 визначається з рівняння $s(p_0) = q(p_0)$.

Припустимо, що вводиться додатковий податок із виробників у розмірі t з кожної одиниці товару. Оскільки залежність пропозиції від ціни визначається прибутком, а при ціні p та податку t прибуток такий самий, як і при ціні $p - t$ за відсутності додаткового податку, то

$$s_t(p) = s(p-t),$$

де $s_t(p)$ — функція пропозиції після введення податку. Таким чином, крива пропозиції після введення податку зсувається вгору на t одиниць (рис. 1.5).

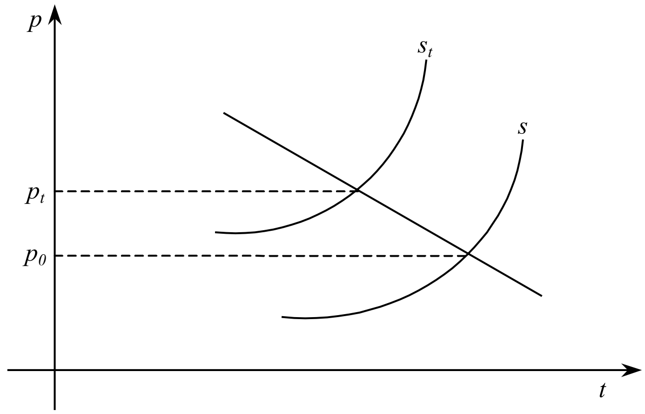


Рис. 1.5

Нехай p_t — нова рівноважна ціна. Рівність попиту та пропозиції при ціні p_t виражається рівнянням $s_t(p_t) = q(p_t)$, еквівалентним рівнянню

$$s(p_t - t) = q(p_t). \tag{1.12}$$

Замінюючи прирости функцій $q(p)$ і $s(p)$ у точці p_0 на відповідні диференціали, дістаємо наближені рівності:

$$s(p_0 + \triangle p) \approx s\left(p_0\right) + s'(p_0)\triangle p, \tag{1.13}$$

$$q(p_0 + \triangle p) \approx q\left(p_0\right) + q'(p_0)\triangle p, \tag{1.14}$$

в яких $\triangle p = p_t - p_0$ — зміна рівноважної ціни.

Ураховуючи (1.12) і (1.13), рівність (1.14) записуємо у вигляді:

$$s(p_0) + s'\left(p_0\right)(\triangle p - t) = q'(p_0)\triangle p\,.$$

Оскільки $s(p_0) = q\left(p_0\right)$, то $s'(p_0)(\triangle p - t) = q'\left(p_0\right)\triangle p$. Звідси дістаємо:

$$\triangle p = \frac{ts'(p_0)}{s'(p_0) - q'(p_0)}\,. \tag{1.15}$$

Таким чином, після введення додаткового податку на купівлю одиниці товару витрати споживача збільшаться на Δp, що можна наближено обчислити за формулою (1.15). Відповідно дохід виробника (також на одиницю продукції) зменшиться на

$$t - \vartriangle p = \frac{-tq'(p_0)}{s'(p_0) - q'(p_0)}.$$

Отже, додатковий податок розподілиться між споживачами та виробниками продукції у відношенні

$$\frac{\vartriangle p}{t - \vartriangle p} = \frac{s'(p_0)}{q'(p_0)}.$$

Оскільки в точці p_0 попит дорівнює пропозиції, то

$$\frac{s'(p_0)}{-q'(p_0)} = \frac{s'(p_0)p_0}{s(p_0)} : \frac{-q'(p_0)p_0}{q(p_0)} = \frac{E_s(p)}{-E_q(p)},$$

де $E_s(p)$ і $E_q(p)$ — коефіцієнти еластичності пропозиції і попиту в точці p_0.

Аналізуючи це співвідношення, бачимо, що майбутній податковий тягар припадає на економічного агента з меншою еластичністю, в якого менше можливостей для послаблення від податкового тягаря. Зокрема, якщо еластичність попиту дорівнює нулю, то весь податковий тягар лягає на плечі споживачів, оскільки незалежно від розміру податку (а отже, і від ціни) споживачі не змінюють обсягу купівлі. А якщо попит на деякий товар характеризується цілковитою еластичністю, то програють виробники, оскільки споживачі відходять від податку, знижують попит та переходять до споживання інших товарів. У цьому разі весь податковий тягар припадає на виробників.

Нехай цінова еластичність попиту дорівнює (– 3), цінова еластичність пропозиції дорівнює 2, а податок, що вводиться, t = 100. Тоді ціна після введення усього податку збільшиться на $\Delta p = \frac{2}{2+3} \cdot 100 = 40,$ а прибуток виробників від одиниці продукції зменшиться на 100 – 40 = 60 (грошових одиниць).

1.4. Виробнича функція та її властивості

Припустимо, що фірма випускає один товар і його кількість позначимо y. Використовується тільки один ресурс x. Фірма повністю характеризується своєю **виробничою функцією** $y = f(x)$, яка виражає *залежність обсягу товару, що випускається, від обсягу витраченого ресурсу x.*

Далі вважатимемо, що виробнича функція двічі диференційовна і задовольняє дві розглянуті далі умови.

Умова 1. В області D, $D \subset D(f)$ — області визначення функції $y = f(x)$, яку далі називатимемо **економічною областю** D, ця функція неспадна, тобто збільшення обсягу ресурсу не приводить до зменшення випуску товару.

Математично це означає, що для довільних двох точок $x_1, x_2 \in D$, таких що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \le f(x_2)$.

Отже, в області D похідна $f'(x)$ невід'ємна, тобто $f'(x) \ge 0$. Похідна $f'(x)$ називається **граничним продуктом**.

Умова 2. Існує підмножина E економічної області D, $E \subset D$, така що для всіх $x \in E$ виконується нерівність $f''(x) \le 0$.

Спинимось на економічному змісті цих двох умов. Перша умова стверджує, що виробнича функція — це не якась абстрактна функція, вона відбиває економічно важливе і водночас очевидне твердження: *у реальній економіці збільшення витрат не може привести до зменшення випуску*.

Друга умова називається в економіці **законом спадної дохідності**: *зі збільшенням обсягу ресурсу з деякого моменту (при вході в область E) починає зменшуватись граничний продукт.*

Розглянемо дії фірми. Нехай p — ціна одиниці ресурсу, а w — ціна одиниці товару, що випускається. Отже, прибуток $P = P(x)$ у результаті є функцією від x (і від цін, але вони вважаються сталими). Тоді $P(x) = wf(x) - px$.

Задача (завдання) фірми: *знайти максимальне значення прибутку фірми $P(x)$ за умови, що $x \ge 0$, тобто*

$$P(x) \to \max, x \ge 0 . \tag{1.16}$$

Обчислимо похідну функції $P(x)$ та прирівняємо її до нуля:

$$P'(x) = wf'(x) - p, \; wf'(x) - p = 0,$$

Звідки

$$f'(x^*) = \frac{p}{w}. \tag{1.17}$$

Очевидно, що обсяг ресурсу додатний, а отже, точка x^*, що задається формулою (1.17), є точкою екстремуму. Оскільки за припущенням $f''(x) \le 0$, то x^* — точка максимуму.

Точку x^*, яка визначається зі співвідношення (1.17), називають **оптимальним розв'язком фірми**.

Розглянемо економічний зміст співвідношення (1.17). Нагадаємо, що $f'(x)$ називається *граничним продуктом*, а $wf'(x)$ — це *вартість граничного продукту*, *додатково отриманого з одиниці ресурсу*. Але вартість одиниці ресурсу дорівнює p, тобто дістаємо *рівновагу*: можна залучити у виробництво додаткову одиницю ресурсу, витративши на її закупівлю p грошових одиниць, але в результаті виграшу не буде, оскільки після переробки та реалізації товару отримаємо стільки само грошей, скільки витратили на придбання одиниці ресурсу.

Отже, оптимальна точка, що задається співвідношенням (1.17), є точкою рівноваги: уже неможливо «витиснути» з товарів (ресурсів) більше, ніж витрачено на їх закупівлю.

Очевидно, нарощування випуску товарів фірми відбувається поступово: спочатку вартість граничного продукту була більшою від купівельної ціни ресурсів, потрібних для його виробництва. Нарощування обсягу виробництва відбувається до того моменту, коли починає виконуватись співвідношення (1.17), тобто рівність граничного продукту та купівельної ціни ресурсу, потрібного для його виробництва.

За певних умов, накладених на виробничу функцію, оптимальний розв'язок задачі фірми, що визначається співвідношенням (1.17), єдиний для всіх p і w.

Нехай обсяг добування щебеню y (т/год) залежить від кількості праці x (людино-год): $y = 6\sqrt{x}$. Ціна щебеню — 40 грн/т, зарплата робітника — 30 грн/год. (Будь-які витрати, крім заробітної плати, не враховуються). Знайти оптимальну кількість праці (кількість робітників).

Якщо кількість робітників становить x, то прибуток фірми

$$P(x) = wy - px = 40 \cdot 6\sqrt{x} - 30x = 30(8\sqrt{x} - x)\,.$$

Знаходимо першу похідну функції прибутку:

$$P'(x) = 30(\frac{4}{\sqrt{x}} - 1)\,;$$

шукаємо стаціонарні точки:

$$P'(x) = \frac{4}{\sqrt{x}} - 1 = 0,\ \text{звідки}\ \sqrt{x} = 4\,,\ \text{тобто}\ x^* = 16\,.$$

Знаходимо другу похідну:

$$P''(x) = 30 \cdot 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} = -60 \frac{1}{x\sqrt{x}} .$$

У стаціонарній точці x^* маємо:

$$P''(16) = -60 \cdot \frac{1}{16 \cdot \sqrt{16}} = -\frac{15}{16} < 0 ,$$

тому $x^* = 16$ — точка максимуму.

1.5. Ціна, граничні витрати та обсяг виробництва

Нехай x — випуск продукції (у натуральних одиницях); $R(x)$ — виторг від продажу; $C(x)$ — витрати виробництва, пов'язані з випуском x одиниць продукції. Тоді прибуток $P(x) = R(x) - C(x)$. Припустимо, що виконуються такі умови.

1. Функції $R(x)$, $C(x)$ визначені на інтервалі $(0;+\infty)$ і диференційовні при $x > 0$.
2. Функція прибутку досягає максимуму в деякій точці $x_0 \neq 0$.

Зауваження. Якщо максимум прибутку $P(x_0) > 0$, умова $x_0 \neq 0$ природно виконується, оскільки $P(0) \leq 0$ (немає випуску — немає виторгу, немає виторгу — немає прибутку).

Якщо умови 1 і 2 виконано, то функція $P(x)$ диференційовна і досягає на інтервалі $(0;+\infty)$ максимуму в точці $x_0 \neq 0$. Тоді за теоремою Ферма $P(x_0) = 0$.

Оскільки $P(x) = R(x) - C(x)$, то в точці $x = x_0$ виконується рівність:

$$R'(x_0) = C'(x_0) . \qquad (1.18)$$

В економічній теорії рівність (1.18) визначає *правило*, згідно з яким *фірма, що максимізує свій прибуток, установлює обсяг виробництва в такий спосіб, що граничний виторг дорівнює граничним витратам.*

У разі, коли обсяг виробництва x не впливає на ціну продукції p, то $R(x) = px$ і $R'(x) = p$. Рівність (1.18) набирає вигляду:

$$p = C'(x_0). \quad (1.19)$$

Нехай відомі ціна одиниці продукції $p = 15$ та функція витрат $C(x) = x^3 + 3x$. Знайти обсяг виробництва фірми.

Прибуток у разі виробництва x одиниць продукції:
$P(x) = 15x - x^3 - 3x = x(12 - x^2)$, звідки $P(0) = 0$ і $P(\sqrt{12}) = 0$.

Тому при $x_0 \in \left[0, \sqrt{12}\right]$ $P'(x_0) = 0$. Оскільки $P(x)$ — неперервна функція на відрізку $\left[0, \sqrt{12}\right]$, то в точці x_0 вона набуває найбільшого значення. Оскільки $P(x) \le 0$ при $x > \sqrt{12}$, то $P(x_0)$ — найбільше значення на відрізку $\left[0, \sqrt{12}\right]$.

Згідно з рівністю (1.19) дістанемо $15 = C'(x_0) = 3(x_0)^2 + 3$, звідки $x_0 = 2$.

Щоб отримати максимальний прибуток, фірма має виробляти 2 одиниці продукції (при ціні $p = 15$ вона має пропонувати на продаж 2 одиниці продукції).

1.6. Прийняття оптимальних рішень в економічних дослідженнях

Нехай, наприклад, монополіст, знаючи (на підставі маркетингових досліджень) функцію попиту на свій товар, вирішує, скільки йому виробляти і за якою ціною продавати свій товар. Якщо він установить достатньо високу ціну, то споживачі за певний період куплять у нього не дуже багато товару. Якщо він вироблятиме більше, то йому доведеться знизити ціну, щоб продати всю продукцію за певний час. При цьому прибуток збільшиться за рахунок обсягу продажу (виторг) і одночасно зменшиться за рахунок зменшення ціни (витрати). Результат залежатиме від того, що виявиться більшим: виторг чи витрати. Як же монополіст може визначити оптимальний обсяг випуску? Для цього він має визначити залежність прибутку (якщо враховувати витрати випуску) від обсягу випуску $P(q) = R(q) - C(q) = p(q)q - C(q)$ і визначити, за якого обсягу прибуток буде максимальним.

Розглянемо задачу вибору оптимального обсягу виробництва фірмою, функцію прибутку якої можна змоделювати залежністю:

$$P(q) = R(q) - C(q) = q^2 - 8q + 10 .$$

1. Знаходимо похідну $P'(q) = 2q - 8$.

2. Згідно з необхідною умовою локального екстремуму прирівнюємо похідну до нуля: $P'(q) = 2q - 8 = 0$, звідки $q_0 = 4$.

3. Проведемо *аналіз,* чи є обсяг випуску $q_0 = 4$ оптимальним для фірми? Досліджуємо зміни знака похідної при переході через точку q_0 (тобто використовуємо достатні умови локального екстремуму): при $q < q_0$ маємо $P'(q) < 0$, а отже, функція прибутку спадає; при $q > q_0$ маємо $P'(q) > 0$), а отже, функція прибутку зростає.

Отже, у точці $q_0 = 4$ прибуток набуває мінімального значення, а тому обсяг виробництва не є оптимальним.

4. *Прийняття рішення*. Яким же має бути оптимальний обсяг випуску фірми? Відповідь на це запитання залежить від додаткового дослідження виробничих потужностей фірми. Якщо фірма не може виробляти за розглядуваний період більш як 4 одиниць продукції, то оптимальним рішенням для фірми є взагалі нічого не виробляти, а здавати в оренду приміщення або обладнання і отримувати дохід. Якщо фірма може виробляти більш як 4 одиниць продукції, то оптимальним рішенням для неї буде випуск на межі її виробничих можливостей.

Нехай фірма реалізує одиницю своєї продукцію за ціною *p*, а витрати виробництва при цьому задаються залежністю $C(x) = ax + \lambda x^3$, де $a < p, \lambda > 0$. Знайдемо оптимальний для виробництва обсяг продукції, що випускається, і відповідний йому прибуток.

Позначимо обсяг продукції *x*. Тоді функція прибутку:

$$P(x) = R(x) - C(x),$$

де $R(x)$ — дохід від реалізації продукції.

У цьому разі $P(x) = px - (ax + \lambda x^3).$ Далі знаходимо:

1) $P'(x) = (p - a) - 3\lambda x^2$;

2) критичні точки першого роду, прирівнюючи $P'(x) = (p - a) -$ $-3\lambda x^2 = 0,$ звідки $x_1 = \sqrt{\dfrac{p - a}{3\lambda}}$, $x_2 = -\sqrt{\dfrac{p - a}{3\lambda}} < 0$ — сторонній розв’язок.

3) $P''(x) = -6\lambda x$ і визначаємо знак другої похідної при $x_1 = \sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$:

$$P''\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = -6\lambda\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}} < 0 \text{ при всіх } x.$$

Отже, при $x = \sqrt{\dfrac{p-a}{3\lambda}}$ прибуток буде максимальним:

$$P_{\max} = P\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = \frac{2(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}.$$

1.7. Закон спадної ефективності виробництва

Цей закон стверджує, що *при збільшенні одного з основних факторів виробництва, наприклад капітальних витрат k, приріст виробництва починаючи з деякого значення k є спадною функцією, тобто обсяг продукції u, що випускається, як функція від k описується графіком зі зміною опуклості вниз на опуклість угору.*

Характерний вигляд цієї функції такий:

$$u(k) = \frac{u_{\lim}}{1 + ae^{-bk+c}}, \tag{1.20}$$

де $u_{\lim}$ — гранично можливий випуск продукції; a, b, c — відомі додатні числа (вони визначаються структурою організації виробництва).

Обчислюємо похідні функції $u'(k)$ і $u''(k)$:

$$u'(k) = u_{\lim}\left[\left(1 + ae^{-bk+c}\right)^{-1}\right]' =$$

$$= u_{\lim}(-1)\left(1 + ae^{-bk+c}\right)^{-2} ae^{-bk+c}(-b) = u_{\lim}abe^{-bk+c}(1 + ae^{-bk+c})^{-2};$$

$$u''(k) = u_{\lim}ab\Big[e^{-bk+c}(-b)\left(1 + ae^{-bk+c}\right)^{-2} + e^{-bk+c}(-2)\left(1 + ae^{-bk+c}\right)^{-3} \times$$

$$\times ae^{-bk+c}(-b)\Big] = u_{\lim}ab^2e^{-bk+c}\left[\frac{-1}{(1 + ae^{-bk+c})^2} + \frac{2ae^{-bk+c}}{(1 + ae^{-bk+c})^3}\right] =$$

$$= u_{\lim}ab^2e^{-bk+c}\,\frac{2ae^{-bk+c} - 1 - ae^{-bk+c}}{(1 + ae^{-bk+c})^3} = \frac{u_{\lim}ab^2e^{-bk+c}\left(ae^{-bk+c} - 1\right)}{(1 + ae^{-bk+c})^3}.$$

Критичну точку другого роду знаходимо з умови $u''(k) = 0$, звідки:

$$ae^{-bk+c} - 1 = 0, - bk + c = -\ln a, bk = \ln a + c, K_{\text{кр}} = \frac{\ln a + c}{b}.$$

Графік функції $u(k)$ (рис. 1.6) змінює напрям опуклості в точці перегину $K_{\text{кр}}$, оскільки $u''(k) > 0$, якщо $k < K_{kp}$ і $u''(k) < 0$, якщо $k > K_{kp}$.

При $k < K_{\text{кр}}$ — збільшення капітальних витрат приводить до темпу приросту інтенсивного зростання обсягу продукції;

При $k > K_{\text{кр}}$ — з подальшим збільшення капітальних витрат темп приросту обсягу продукції зменшується, тобто ефективність капіталовкладень знижується.

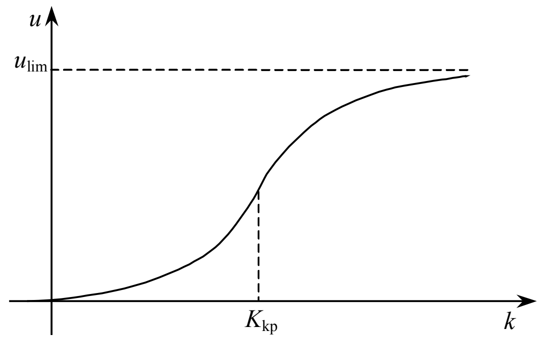


Рис. 1.6

Отже, у стратегії капіталовкладень дуже важливо визначити критичний обсяг витрат, з перевищенням якого додаткові витрати даватимуть дедалі меншу віддачу за даної структури виробництва. Знаючи цей прогноз, можна вдосконалювати та змінювати структуру організації виробництва поліпшуючи показники a, b, c, $u_{\lim}$ у бік підвищення ефективності капіталовкладень.

1.8. Прибуток фірми та обсяг податків, що надходять державі за даною податковою ставкою

Нехай ціна на продукцію описується функцією $p(q) = a - bq$, тобто лінійно спадає зі збільшенням обсягу готової продукції на ринку, а залежність витрат $C(q)$ від обсягу продукції q подається у вигляді: $C(q) = cq^2 + dq + e$, де a, b, c, d, e — деякі додатні числа. Нехай податок є акцизом зі ставкою t, тобто з кожної проданої одиниці товару держава отримує податок t, причому податкова сума дорівнює $T = tq$. Тоді фірма має прибуток:

$$P(q) = p(q)^q - C(q) - T = q(a - bq) - cq^2 - dq - e - tq.$$

1. Для того щоб максимізувати прибуток, фірма шукає оптимальний обсяг виробництва. Обчислимо похідну функції прибутку:

$$P'(q) = a - 2bq - 2cq - d - t = a - d - t - 2q(b + c).$$

2. Знайдемо критичну точку q^* за необхідною умовою локального екстремуму:

$P'(q) = 0,\ 2q(b + c) = a - d - t,$ звідки $q^* = \dfrac{a - d - t}{2(b + c)}$.

3. За достатньою умовою локального екстремуму:

$P''(q^*) = -2(b + c) < 0$, тобто q^* — точка максимуму функції $P(q)$.

Оскільки $t > 0$, то така податкова ставка приводить до зниження оптимального випуску продукції.

Для прогнозування дій уряду зі встановлення податкової ставки t обчислимо податковий дохід уряду (держави):

$$T = tq = \frac{t(a - d - t)}{2(b + c)} = \frac{-t^2}{2(b + c)} + \frac{t(a - d)}{2(b + c)} = \frac{1}{2(b + c)}\left[-t^2 + (a - d)t\right].$$

Отже, крива доходів уряду (держави) є парабола, вітки якої спрямовані вниз (рис. 1.7).

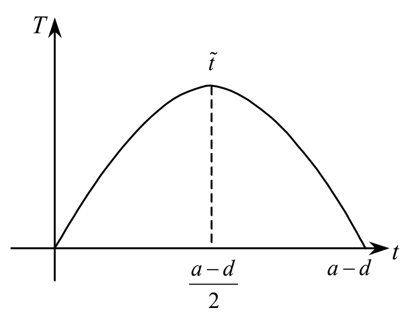


Рис. 1.7

Визначимо критичні точки функції $T(t)$ з необхідної умови $T' = \frac{1}{2(b+c)}\left[-2t + (a-d)\right] = 0$, звідки $t^* = \frac{a-d}{2}$. Оскільки $T'' = \frac{-1}{(b+c)} < 0$, то максимум функції $T(t)$ при $t^* = \frac{a-d}{2}$ дорівнює

$$T^* = t^* q^* = \frac{1}{2(b+c)}\left[-\frac{(a-d)^2}{4} + \frac{(a-d)^2}{2}\right] = \frac{(a-d)^2}{8(b+c)}.$$

Оптимальний випуск продукції при цьому значенні t^* дорівнює $q_1 = \frac{a-d}{4(b+c)}$, а прибуток фірми $P(q_1) = \frac{(a-d)^2}{16(b+c)} - e$.

Взагалі прибуток фірми при податковій ставці t:

$$P(q^*(t)) = \frac{(a-d-t)^2}{4(b+c)} - e.$$

Звідси випливає, що зі збільшенням податкової ставки t прибуток зменшується, якщо $0 \le t \le a-d$ і існує область значень податкової ставки при $t \ge \tilde{t} = a - d - \sqrt{4e(b+c)}$, в якій прибуток фірми від'ємний, хоча доходи уряду додатні.

Це відбувається через те, що критерієм вибору обсягу випуску було взято максимум прибутку, але не зроблено застереження, що цей максимум має бути додатним.

Якщо вважати, що при $t \ge \tilde{t}$ випуск продукції справді дорівнюватиме нулю, то дохід уряду при $t \ge \tilde{t}$ також дорівнюватиме нулю (в околі $\tilde{t}$ відбувається різке скорочення ділової активності).

Нехай t — податкова ставка. Задано функції доходу: $R(q) = 16q - q^2$ і витрат виробництва $C(q) = q^2 + 1$. Тоді функція прибутку

$$P(q) = R(q) - C(q) - T = 16q - q^2 - q^2 - 1 - tq = 16q - 2q^2 - tq - 1.$$

Яким має бути податок t, щоб сумарний податок T з усієї продукції був найбільшим?

Згідно з необхідною умовою максимуму прибутку маємо: $P'(q) = 16 - 4q - t = 0$. Звідки $q^* = 4 - \frac{t}{4}$. Оскільки, $P''(q^*) = -4q < 0$, то q^* — точка максимуму функції $P(q)$.

Отже, дістали оптимальний обсяг $q_{\text{опт}} = q^*$. Тоді сумарний дохід

$$T = q^* \cdot t = t(4 - \frac{t}{4}) = 4t - \frac{1}{4}t^2.$$

Знайдемо максимум функції $T(t)$. Із $T' = 4 - \frac{1}{2}t = 0$ дістанемо $t = 8$. Тому $q^* = 2$, а отже, максимальний прибуток:

$$P_{\text{опт}} = P(q_{\text{опт}}) = 16 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 - 8 \cdot 2 - 1 = 7,$$

а оптимальний з погляду податкового законодавства податковий збір $T_{\text{опт}} = 2 \cdot 8 = 16.$

Цікаво порівняти ці результати з результатами за відсутності оподаткування. При $t = 0$ розв'язок задачі на максимізацію прибутку дав би такі результати: $q_{\text{опт}} = 4,$ $P_{\text{опт}} = 31.$

Отже, зменшення оподаткування стимулює збільшення випуску продукції і приводить при цьому до збільшення прибутку від її реалізації. Тому виробники докладають зусиль, щоб знизити податкову ставку.

РОЗДІЛ 2

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ МАКРОЕКОНОМІКИ

2.1. Лінійна статична економічна модель Леонтьєва багатогалузевої економіки (балансовий аналіз)

Розглянемо спрощену економіко-математичну модель міжгалузевого балансу. Мета балансового аналізу — дати відповідь на запитання, що постає в макроекономіці і пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної галузі, щоб задовольнити всі потреби у продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник даної продукції, а з другого — як споживач і своєї, і виробленої іншими галузями продукції.

Зв'язок між галузями, як правило, відображається в таблицях міжгалузевого балансу, а математичну модель, яка дає змогу аналізувати їх, розробив 1936 року американський економіст В. Леонтьєв.

Припустимо, що весь розглядуваний виробничий комплекс поділено на n «чистих» галузей. Чисті галузі є економічною абстракцією, тобто це умовні галузі, кожна з яких об'єднує все виробництво даного виду продукції. Будемо вважати, що кожна з галузей випускає лише певний продукт, причому різні галузі випускають різні продукти. У процесі виробництва кожна з галузей потребує, взагалі кажучи, продукції, виробленої іншими галузями.

Основні припущення моделі, яку надалі будемо називатимемо моделлю Леонтьєва, такі:

1. В економічній системі виробляються, купуються, споживаються та інвестуються n видів продукції, які позначимо індексами $i = 1, 2, ..., n$.

2. Кожна галузь виробляє лише один вид продукції. Отже, спільне виробництво різних товарів виключається. Різні галузі виробляють різні товари, і тому галузь, що виробляє продукцію виду i, позначатимемо тим самим індексом.

3. Під виробничим процесом у кожній галузі розумітимемо перетворення деяких (можливо, усіх) видів продукції, узятих у певних кількостях, на деяку кількість продукції того чи іншого виду. При цьому припускається, що співвідношення витраченої і випущеної продукції стале.

Нехай економіко-виробнича система складається з n галузей, тобто виробляє n продуктів. Схему міжгалузевого балансу виробництва і розподілу продукції у вартісній формі наведено в табл. 2.1, де подано основні показники та зв'язки виробництва за певний період часу (як правило, за рік).

Введемо позначення:

X_i — загальний (валовий) обсяг продукції i-ї галузі (i = 1, 2, ... n);

x_{ij} — обсяг продукції i-ї галузі, що її потребує j-та галузь у процесі виробництва (i, j = 1, 2, ..., n);

Y_i — обсяги кінцевого продукту i-ї галузі для невиробничого споживання.

Отже, маємо квадратну матрицю n-го порядку (за умовою рівності поданих у балансі галузей виробництва та споживачів продукції). Кожний елемент матриці x_{ij}, i = 1, 2, ..., n; j = 1, 2, ..., n, характеризує обсяг поставки продукції з i-ї галузі, що використовується як виробниче споживання j-ї галузі. Якщо підсумувати міжгалузеві поставки продукції i-ї галузі за всіма галузями-споживачами, дістанемо загальний обсяг проміжного продукту i-ї галузі:

$$X_i' = \sum_{j=1}^{n} x_{ij},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Сума проміжних продуктів усіх галузей-виробників дає загальний обсяг проміжного продукту:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = X'.$$

За економічним змістом проміжний продукт являє собою ту частину валового продукту, яка залишається після вилучення кінцевого продукту і спрямовується для відшкодування поточних матеріальних витрат у межах розглядуваного періоду часу.

Таблиця 2.1

Галузь виробництва	Розподіл випуску продукції за галузями виробництва							Кінцевий продукт	Валовий продукт
	1	2	…	j	…	n	Усього		
1	x_{11}	x_{12}	…	x_{1j}	…	x_{1n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	Y_1	X_1
2	x_{21}	x_{22}	…	x_{2j}	…	x_{2n}	$\sum_{j=1}^{n} x_{2j}$	Y_2	X_2
...	…	…	…	…	…	…	…	…	…
i	x_{i1}	x_{i2}	…	x_{ij}	…	x_{ij}	$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	Y_i	X_i
...	…	…	…	…	…	…	…	…	…
n	x_{n1}	x_{n2}	…	x_{nj}	…	x_{nn}	$\sum_{j=1}^{n} x_{nj}$	Y_n	X_n
Всього	$\sum_{i=1}^{n} x_{i1}$	$\sum_{i=1}^{n} x_{i2}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}$	…	$\sum_{i=1}^{n} x_{in}$	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}$	Y	X

Оскільки валовий обсяг будь-якої i-ї галузі дорівнює сукупному обсягу продукції, що її споживають n галузей, та кінцевого продукту, то маємо таку систему:

$$\begin{cases} X_1 = x_{11} + x_{12} + ... + x_{1n} + Y_1, \\ X_2 = x_{21} + x_{22} + ... + x_{2n} + Y_2, \\ .... \\ X_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + Y_i, \\ .... \\ X_n = x_{n1} + x_{n2} + ... + x_{nn} + Y_n, \end{cases} \tag{2.1}$$

або у скороченій формі:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + Y_i \ \ (i = 1, 2, ..., n). \tag{2.2}$$

Рівняння (2.1) називають *співвідношеннями балансу*.

Розглянемо *міжгалузевий баланс у вартісній формі*, коли всі величини, що входять у (2.1), виражають вартість.

Особливостями системи (2.1) є те, що змінні в ній містяться в першому степені, тому залежність між валовим виробництвом та розподілом продукції кожної галузі лінійна.

Зауважимо, що величини X_i, x_{ij}, Y_i можуть виражатися в натуральних одиницях виміру (штуки, тонни, літри тощо). Тоді говорять про ***міжгалузевий баланс у натуральній формі.***

При побудові та практичних застосуваннях економіко-математичної моделі міжгалузевого балансу використовують коефіцієнти прямих матеріальних витрат. Якщо обсяг міжгалузевих поставок *i*-ї галузі в *j*-ту поділити на обсяг валового випуску *j*-ї галузі, дістанемо шуканий норматив:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j} \ (i = 1, 2, ..., n), \tag{2.3}$$

де a_{ij} — *коефіцієнт прямих витрат* продукції *i*-ї галузі на одиницю валового випуску *j*-ї галузі. Ці коефіцієнти утворюють ***квадратну матрицю коефіцієнтів прямих витрат***

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

яку іноді називають ***матрицею технологічних коефіцієнтів***.

Матриця *A* (технологічна матриця) містить інформацію про структуру міжгалузевих зв’язків, про наявну в даній економіко-виробничій системі технологію виробництва. З (2.3) випливає, що

$$x_{ij} = a_{ij} X_j. \tag{2.4}$$

Підставивши (2.4) у (2.2), дістанемо систему:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j + Y_i \ (i = 1, 2, ..., n). \tag{2.5}$$

Запишемо систему (2.5) у матричній формі:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_1 \end{pmatrix}$$

або

$$X = AX + Y. \quad (2.6)$$

Співвідношення (2.6) називають ***рівнянням лінійного міжгалузевого балансу***. Це рівняння при наведених позначеннях ще називають ***моделлю Леонтьєва***.

Основна задача міжгалузевого балансу полягає у відшуканні такого вектора валового випуску *X*, який за відомої матриці прямих витрат *A* забезпечує заданий вектор кінцевого продукту *Y*.

Перепишемо рівняння (2.6) у вигляді:

$$(E - A)X = Y, \quad (2.7)$$

якщо матриця *(E – A)* невироджена, то

$$X = (E - A)^{-1} Y. \quad (2.8)$$

Матриця $B = (E - A)^{-1}$ називається ***матрицею повних витрат***.

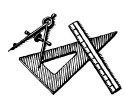
Економічний зміст елементів матриці B такий: кожний елемент b_{ij} матриці *B* — це обсяг валового випуску продукції *i*-ї галузі, необхідний для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту *j*-ї галузі (*i*, *j* = 1, 2, ..., *n*).

Згідно з економічним змістом задачі величини X_i мають бути невід’ємними при невід’ємних значеннях $Y_i \geq 0$ і $a_{ij} \geq 0$, де *i*, *j* = = 1, 2, ..., *n*.

З математичного погляду питання про сумісність системи (2.6) зводиться до існування оберненої матриці $(E - A)^{-1}$, складеної з невід’ємних чисел.

Рівняння міжгалузевого балансу можна використовувати у двох випадках. У першому, простішому випадку за відомою матрицею валового випуску ***X***, потрібно розрахувати вектор кінцевого продукту ***Y***.

Розглянемо таку задачу на прикладі.



Приклад. Нехай вектор валового випуску продукції галузі і матриця внутрішнього споживання мають відповідно вигляд:

$$X = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}.$$

Використовуючи формулу (2.7) і правило множення матриць, дістаємо вектор обсягів кінцевого продукту, призначеного для реалізації:

$$Y = (E - A)X = \begin{pmatrix} 0,7 & -0,1 & -0,2 \\ -0,2 & 0,7 & -0,1 \\ -0,2 & -0,2 & 0,4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 40 \\ 60 \end{pmatrix}.$$

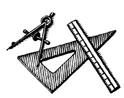
У другому випадку рівняння міжгалузевого балансу використовується для планування поряд з основною задачею.

Матриця A, всі елементи якої невід'ємні, називається ***продуктивною***, якщо для довільного вектора Y з невід'ємними компонентами існує розв'язок рівняння (2.7) — вектор X, усі елементи якого невід'ємні. У такому разі модель Леонтьєва називається ***продуктивною***.

Існує кілька критеріїв продуктивності матриці A. Далі користуватимемося такими критеріями продуктивності.

Перший критерій продуктивності: матриця A продуктивна тоді і тільки тоді, коли матриця $(E - A)^{-1}$ існує і її елементи невід'ємні.

Другий критерій продуктивності: матриця A з невід'ємними елементами продуктивна, якщо максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці, причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менше одиниці, тобто матриця А продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для довільних $i, j = 1, 2, ..., n$ і $\max\limits_{j=1,\ 2,...,n} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, причому існує номер j, такий що $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$.



Приклад. Розглянемо модель Леонтьєва, яка складається з трьох галузей. Нехай витрати одиниць i-ї галузі, що використовуються для випуску одиниць j-ї галузі та кінцевий продукт задано табл. 2.2.

Таблиця 2.2

Галузь виробництва	Прямі витрати			Кінцевий продукт
	1	**2**	**3**	
1	0	0,2	0	200
2	0,2	0	0,1	100
3	0	0,1	0,2	300

Позначимо виробничу програму галузей $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$, де X_1, X_2, X_3 — плани валового випуску галузей. Тут

$$A = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,4 & 0,2 & 0,6 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix}.$$

Виробничі зв'язки галузей задовольняють умови:

$$\begin{cases} X_1 - (0 \cdot X_1 + 0,2 \cdot X_2 + 0 \cdot X_3) = 200, \\ X_2 - (0,2 \cdot X_1 + 0 \cdot X_2 + 0,1 \cdot X_3) = 100, \\ X_3 - (0 \cdot X_1 + 0,1 \cdot X_2 + 0,2 \cdot X_3) = 300, \end{cases} \quad \begin{cases} X_1 - 0,2X_2 = 200, \\ -0,2X_1 + X_2 - 0,1X_3 = 100, \\ -0,1X_2 + 0,8X_3 = 300. \end{cases}$$

Запишемо систему в матричному вигляді $(E - A)X = Y$. Тоді матриця

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо обернену матрицю $B = (E - A)^{-1}$.

Визначник матриці $(E - A)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0,2 & 0 \\ -0,2 & 1 & -0,1 \\ 0 & -0,1 & 0,8 \end{vmatrix} = 0,8 - 0,01 - 0,032 = 0,758.$$

Знайдемо алгебраїчні доповнення елементів матриці $(E - A)$:

$$\begin{array}{lll} B_{11} = 0,79, & B_{21} = 0,16, & B_{31} = 0,02, \\ B_{12} = 0,16, & B_{22} = 0,8, & B_{32} = 0,1, \\ B_{13} = 0,02, & B_{23} = 0,1, & B_{33} = 0,96. \end{array}$$

Обернена матриця має вигляд:

$$B = (E - A)^{-1} = \frac{1}{0,758} \begin{pmatrix} 0,79 & 0,16 & 0,02 \\ 0,16 & 0,8 & 0,1 \\ 0,02 & 0,1 & 0,96 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix}.$$

Тоді $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (E - A)^{-1} Y = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 200 \\ 100 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 238 \\ 186 \\ 400 \end{pmatrix}.$

Отже, плани валового випуску продукції для галузей такі: $X_1 = 238,\ X_2 = 186,\ X_3 = 400$. (При обчисленні оберненої матриці ми округлили всі числа до тисячних).

Визначимо виробничу програму кожного цеху, скориставшись коефіцієнтами a_{ij}:

$$x_{11} = a_{11} X_1 = 0 \cdot 238 = 0;$$

$$x_{12} = a_{12} X_2 = 0,2 \cdot 186 = 37,2;$$

$$x_{13} = a_{13} X_3 = 0 \cdot 400 = 0;$$

$$x_{21} = a_{21} X_1 = 0,2 \cdot 238 = 47,6;$$

$$x_{22} = a_{22} X_2 = 0 \cdot 186 = 0;$$

$$x_{23} = a_{23} X_3 = 0,1 \cdot 400 = 40;$$

$$x_{31} = a_{31} X_1 = 0 \cdot 238 = 0;$$

$$x_{32} = a_{32} X_2 = 0,1 \cdot 186 = 18,6;$$

$$x_{33} = a_{33} X_3 = 0,2 \cdot 400 = 80.$$

Коефіцієнти c_{ij} непрямих (посередницьких) витрат матриці C визначаються як різниця внутрішньовиробничих витрат (елементи матриці B) та прямих витрат (елементи матриці A). Матриця коефіцієнтів непрямих витрат:

$$C = B - A = \begin{pmatrix} 1,04 & 0,21 & 0,03 \\ 0,21 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,13 & 1,27 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0,2 & 0 \\ 0,2 & 0 & 0,1 \\ 0 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1,04 & 0,01 & 0,03 \\ 0,01 & 1,05 & 0,13 \\ 0,03 & 0,03 & 1,07 \end{pmatrix}.$$

2.2. Модель рівноважних цін

Розглянемо тепер балансову модель, яку називають ***моделлю рівноважних цін***. Нехай задано матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \ P = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

де A — матриця прямих витрат, X — матриця валового випуску, P — матриця цін, i-та координата якої дорівнює ціні одиниці продукції i-ї галузі.

Тоді, наприклад, перша галузь одержить прибуток, який дорівнює p_1x_1. Частину свого прибутку ця галузь витратить на закупівлю продукції інших галузей. Так, для випуску одиниці продукції їй необхідна продукції першої галузі в обсязі a_{11}, другої галузі в обсязі a_{21}, і т. д., n-ї галузі в обсязі a_{n1}.

На закупівлю цієї продукції буде витрачено таку суму:

$$a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n.$$

Отже, для випуску продукції в обсязі x_1 першої галузі необхідно витратити на закупівлю продукції інших галузей таку суму:

$$x_1\left(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n\right).$$

Частину доходу, що залишилась, позначимо V_1 (ця частина доходу називається ***додатковою вартістю*** і йде на виплату заробітної плати і податків, підприємницький прибуток та інвестиції).

Отже, виконується така рівність:

$$x_1p_1 = x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + V_1.$$

Поділивши цю рівність на x_i, дістанемо

$$p_1 = (a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n) + W_1,$$

де $W_1 = \dfrac{V_1}{x_1}$ — норма додаткової вартості (це величина додаткової вартості на одиницю продукції, що випускається).

Аналогічно для інших галузей дістанемо:

$$p_2 = a_{12}p_1 + a_{22}p_2 + ... + a_{n2}p_n + W_2\,,$$

$$.. \qquad (2.9)$$

$$p_n = a_{1n}p_1 + a_{2n}p_2 + ... + a_{nn}p_n + W_n\,.$$

Здобуті рівності можна записати в матричній формі:

$$P = A^T P + W, \qquad (2.10)$$

де A^T —матриця, транспонована щодо матриці A;

$$W = \begin{pmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{pmatrix}$$ — матриця норм додаткової вартості.

Як бачимо, рівняння (2.10) дуже схожі на рівняння моделі Леонтьєва. Відрізняються вони тим, що матрицю валового випуску X замінено на матрицю цін P, вектор кінцевого продукту Y — на матрицю додаткової вартості W, матрицю A — на A^T.

Модель рівноважних цін дає змогу, знаючи норми додаткової вартості, прогнозувати ціни на продукцію галузей, а також зміни цін та інфляцію, що є наслідком зміни ціни в одній з галузей.

Приклад. Розглянемо економічну систему, яка складається з трьох галузей. Назвемо їх умовно: паливно-енергетична галузь, промисловість та сільське господарство.

Нехай $A^T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$ — транспонована матриця прямих витрат, $W = (4\ \ 10\ \ 4)$ — матриця додаткової вартості.

Визначимо рівноважні ціни. Для цього скористаємося формулою (2.10):

$$P = A^T P + W \ \text{ або } \ (E - A^T)P = W.$$

Звідси $P = \left(E - A^T\right)^{-1} W$, де $B^T = (E - A^T)$ — транспонована матриця повних втрат. Після необхідних обчислень знайдемо:

$$\left(B^T\right)^{-1} = \frac{1}{0,444}\begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}.$$

Звідси дістанемо, що $P = \left(B^T\right)^{-1} W = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

2.3. Лінійна модель міжнародної торгівлі

Розглянемо ***лінійну модель обміну***, яку часто інтерпретують як ***модель міжнародної торгівлі***. Нехай маємо групу з *n* країн $K_1, K_2, ..., K_n$, які ведуть між собою торгівлю. Позначимо прибуток *j*-ї країни через X_j і вважатимемо, що цей прибуток формується з продажу нею своїх товарів як на внутрішньому, так і на зовнішньому ринку. Структуру торговельних відносин між країнами вважаємо встановленою: частка q_{ij} прибутку X_j *j*-ї країни, яка витрачається на імпортування товарів *i*-ї країни, є сталою. Розглянемо матрицю

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix},$$

яка називається ***структурною матрицею торгівлі***.

Вважатимемо, що весь національний дохід витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн, тобто сума елементів будь-якого стовпця матриці *Q* дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} q_{ij} = 1,\ j = 1, 2, ...\ n. \qquad (2.11)$$

Для країни K_i дохід від внутрішньої та зовнішньої торгівлі становить:

$$p_i = q_{i1}x_1 + q_{i2}x_2 + \ldots + q_{in}x_n .$$

Для збалансованої торгівлі необхідна бездефіцитність торгівлі кожної країни K_i, тобто дохід від торгівлі кожної країни має бути не меншим за її національний дохід:

$$p_i \geq x_i \ (i = 1, 2, ..., n). \qquad (2.12)$$

Вважаючи, що $p_i > x_i$ (i = 1, 2, ..., n), дістанемо систему нерівностей:

$$\begin{cases} q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \ldots + q_{1n}x_n > x_1, \\ q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \ldots + q_{2n}x_n > x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \ldots + q_{nn}x_n > x_n. \end{cases} \qquad (2.13)$$

Додавши всі нерівності системи (2.13), дістанемо:

$$x_1\sum_{i=1}^{n} q_{i1} + x_2\sum_{i=1}^{n} q_{i2} + \ldots + x_n\sum_{i=1}^{n} q_{in} > x_1 + x_2 + \ldots + x_n.$$

З огляду на рівність (2.11) прийшли до суперечності:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_n .$$

Отже, нерівність $p_i > x_i$ неможлива, а тому умова (2.12) набирає вигляду $p_i = x_i$ (i = 1, 2, ..., n). З економічного погляду це зрозуміло, оскільки всі країни не можуть одночасно одержувати прибуток.

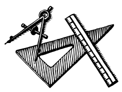
Розглянемо матрицю національних доходів країн X та ***структурну матрицю торгівлі*** Q:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{pmatrix}.$$

Вважаючи, що країни починають торгувати відповідно до матриці торгівлі Q, дістаємо матричне рівняння

$$QX = X, \qquad (2.14)$$

з якого можна знайти X.



ПРИКЛАД. Розглянемо три країни — учасниці торгівлі з державними бюджетами X_1, X_2, X_3, які умовно назвемо США, Німеччина і Кувейт. Вважатимемо, що весь держбюджет кожної країни витрачається на закупівлю товарів або всередині країни, або на імпорт з інших країн. Нехай, скажімо, США втрачає половину свого бюджету на закупівлю товарів всередині країни, $\frac{1}{4}$ бюджету — на товари з Німеччини, та $\frac{1}{4}$ бюджету — на товари з Кувейту. Німеччина витрачає порівну свій бюджет на закупівлю товарів у США, усередині країни і в Кувейті. Кувейт, у свою чергу, витрачає половину бюджету на закупівлю товарів у США, половину — у Німеччині і нічого не закуповує всередині країни. Введемо структурну матрицю торгівлі:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}.$$

Нехай q_{ij} — частина держбюджету, яку j-та країна витрачає на закупівлю товарів i-ї країни. Зауважимо, що сума елементів матриці Q в кожному стовпці дорівнює одиниці.

Після підбиття підсумків торгівлі за рік країна під номером i отримає прибуток $p_i = q_{i1}X_1 + q_{i2}X_2 + q_{i3}X_3$, $i = 1,2,3$.

Запишемо систему рівнянь для знаходження X:

$QX = X$, або $(Q - E)X = 0$,

тобто

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок цієї системи:

$$X_1 = 2X_3,\ X_2 = \frac{3}{2}X_3,\ X_3 \in R.$$

Знайдемо такі бюджети країн, які забезпечують збалансовану бездефіцитну торгівлю, коли відома сума цих бюджетів: $X_1 + {}$ $+ X_2 + X_3 = 9000$ (умовних грошових одиниць). Підставивши в останню рівність значення $X_1 = 2C,\ X_2 = \frac{3}{2}C$, де $C = \text{const}$, дістанемо: $2C + \frac{3}{2}C + C = 9000.$ Тоді $X_1 = 4000,\ \ X_2 = 3000,\ \ X_3 = 2000$ (умовних грошових одиниць).

2.4. Умова продуктивності моделі Леонтьєва

Розглянемо статичну лінійну модель Леонтьєва в загальному вигляді, щоб вивести умову її продуктивності. Модель Леонтьєва будується на таких припущеннях:

1) в економічній системі виробляються, продаються, купуються, споживаються та інвестуються n продуктів;

2) кожна галузь є «чистою», тобто виробляє тільки один продукт, спільне виробництво різних продуктів виключається. Різні галузі випускають різні продукти;

3) під виробничим процесом у кожній галузі розуміється перетворення деяких (можливо, усіх) типів продуктів на певний продукт. При цьому співвідношення між витраченим продуктом і тим, що випускається, передбачається постійним. Тобто, якщо для виробництва одиниці j-го продукту потрібно витратити a_{ij} одиниць j-го продукту, то випуск λ одиниць j-го продукту потребує λa_{ij} одиниць j-го продукту.

Отже, незалежно від масштабу виробництва питомий випуск і співвідношення витрат передбачаються постійними.

Валовий випуск i-го продукту за рік x_i розкладається на дві частини: на виробниче споживання в усіх галузях і на кінцеве (невиробниче) споживання.

За припущень 1—3 виробниче споживання i-го продукту всіма галузями дорівнює $x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j$, тому чистий випуск i-го продукту набирає вигляду:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\ i = 1, \ldots, n.$$

Якщо прирівняти чистий випуск кожного *i-го* продукту та кінцевий попит на нього y_i, дістанемо систему рівнянь:

$$x_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = y_i,\ i = 1, ..., n, \tag{2.15}$$

що є ***моделлю Леонтьєва***.

Кінцевий попит y_i складається з кінцевого споживання, експорту та інвестицій. Проте в самій моделі величини y_i — екзогенні. Тому при заданих значеннях $y_i,\ i = 1, ..., n,$ із лінійних рівнянь моделі Леонтьева можна визначити n галузевих випусків $x_i,\ i = 1, ..., n$.

Таким чином, *сутність методу Леонтьєва полягає у визначенні валового випуску галузей за заданим екзогенним кінцевим попитом на основі даних про технологічні можливості, які втілено у витратних коефіцієнтах* a_{ij}. Не змінюючи рівнянь можна розв'язати й обернену задачу: *за заданими валовими випусками визначити обсяги кінцевого попиту* y_i *на кожний продукт*.

Величини x_i, y_i можна подати в натуральних або вартісних одиницях виміру, а тому розглядаються відповідно *натуральний* або *вартісний міжгалузевий баланс*.

Система (2.15) — це система n лінійних рівнянь із n невідомими x_i, $i = 1, ..., n$, що описує галузеву структуру економіки, а отже, має такі властивості: коефіцієнти прямих витрат a_{ij}; обсяги кінцевого попиту y_i, а також валового випуску x_i — невід'ємні.

Система (2.15) називається ***продуктивною***, якщо вона має невід'ємні розв'язки $x_i \ge 0,\ i = 1, ..., n$.

Двоїстою щодо системи (2.15) називається така система лінійних рівнянь відносно цін продуктів p_j:

$$p_j - \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i = v_j,\ i = 1, ..., n, \tag{2.16}$$

де $v_i \ge 0$ — додана вартість на одиницю випуску *j*-ї галузі.

Оскільки $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i$ — сума витрат на одиницю випуску *j*-ї галузі, то в лівій частині кожного з рівнянь (2.16) маємо чистий дохід від одиничного випуску *j*-ї галузі, який і прирівнюється до доданої вартості v_j.

Система (2.16) називається ***прибутковою***, якщо вона розв'язується для $p_j \geq 0, \quad j = 1, ..., n.$ Можна довести, що продуктивність (2.15) і прибутковість (2.16) еквівалентні: з продуктивності (2.15) випливає прибутковість (2.16), і навпаки.

Нагадаємо, що квадратна матриця D називається ***невід'ємно оберненою***, якщо D невироджена і її обернена матриця невід'ємна.

Систему (2.15) можна записати в матричній формі:

$$\left(I - A\right)x = y, \tag{2.17}$$

де $I = I_n$ — одинична матриця розміру $n \times n;$ $x = (x_1, ..., x_n)';$ $y = (y_1, ..., y_n)'.$

Із (2.17) випливає, що умова продуктивності (2.15) еквівалентна невід'ємності оберненої матриці $\left(I - A\right)^{-1}.$ Якщо одну з цих умов виконано, то

$$x = \left(I - A\right)^{-1} y, \tag{2.18}$$

причому $x \geq 0,$ тобто задачу визначення вектора невід'ємного скінченного попиту y розв'язано.

Позначимо через N множину галузей $N = \{1, 2, ..., n\}.$ Підмножина галузей S ізольована, якщо $a_{ij} = 0$ для $i \in \overline{S} = N \setminus S,$ $j \in S.$ Це означає, що галузі S не потребують товарів, які виробляються іншими галузями $\overline{S},$ хоча, можливо, передають їм свої товари. Коли перенумерувати галузі так, щоб першими були k галузей S, то матриця А матиме такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 \\ 0 & A_3 \end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

де A_1 — квадратна матриця розміру $k \times k,$ що відповідає галузям S; A_3 — квадратна матриця розміру $(n - k) \times (n - k),$ що відповідає галузям $\overline{S}.$

Технологічна матриця називається ***нерозкладною***, якщо переставлення рядків і стовпців її не можна звести до вигляду (2.19). Нерозкладність A означає, що кожна галузь використовує продукцію всіх галузей.

Для нерозкладної матриці справджується ***теорема Фробеніуса—Перрона***:

1. **Нерозкладна матриця *A* має додатне власне число** $\lambda_A > 0,$ **більше за модулем від решти власних чисел**.

2. **Власному числу λ_A відповідає єдиний (з точністю до скалярного множника) власний вектор x_A, усі координати якого ненульові і мають однаковий знак (тобто його завжди можна вибрати додатним за рахунок скалярного множника).**

Згідно з теоремою Фробеніуса—Перрона можна довести таку важливу для застосуванням теорему: **модель Леонтьєва продуктивна тоді і тільки тоді, коли $\lambda_A < 1$**.

Доведення. Д о с т а т н і с т ь . Оскільки $Ax_A = \lambda_A x_A$, $x_A > 0$, $0 < \lambda_A < 1$, то $A^k x_A = A^{k-1}(Ax_A) = \lambda_A(A^{k-1}x_A) = \lambda_A^2(A^{k-2}x_A) = ... = \lambda_A^k x_A$, тому $\lim\limits_{k\to\infty} A^k x_A = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_A^k x_A = 0.$

Беручи до уваги, що $x_A > 0$, $A^k \geq 0$, дістанемо: $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0.$

Розглянемо рівність, яку легко перевірити, розкривши дужки в лівій частині:

$$(I - A)(I + A + A^2 + ... + A^{k-1}) = I - A^k.$$

Оскільки границя правої частини при $k \to \infty$ дорівнює I, то існує і границя лівої частини. Таким чином, $\left(I - A\right)\sum\limits_{k=1}^{\infty} A^k = I,$ тобто обернена матриця існує і для неї справджується розклад, аналогічний сумі нескінченної геометричної прогресії. Оскільки $A^k \geq 0$, то $\left(I - A\right)^{-1} \geq 0$, тому для будь-якого вектора кінцевого попиту $y \geq 0$ існує невід'ємний розв'язок системи рівнянь:

$$x = (I - A)^{-1} y, \tag{2.20}$$

тобто модель Леонтьєва продуктивна.

Н е о б х і д н і с т ь . Нехай модель Леонтьєва продуктивна, тому для вектора кінцевого попиту $y > 0$ існує такий вектор валового випуску $x \geq 0$, що $x - Ax = y$, $y > 0$, тобто $x > Ax \geq 0$ і, отже, $x > 0$. Помножимо останню нерівність на вектор-рядок додатних цін $p_A > 0$, тоді $p_A x > p_A Ax = \lambda_A p_A x$, але $p_A x > 0$, тому $\lambda_A < 1$.

Остання теорема дає змогу перевіряти модель Леонтьєва на продуктивність, проте її формулювання не піддається прямій економічній інтерпретації.

Сформулюємо ***достатню умову продуктивності:*** **якщо технологічна матриця A нерозкладна і сума r_i елементів кожного**

її рядка не більша від одиниці: $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \le 1,$ **причому хоча б для одного рядка** $r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} < 1,$ **то модель Леонтьєва продуктивна**.

Нехай p_A — власний вектор (рядок) матриці A, що відповідає власному числу λ_A, тобто: $p_A A = \lambda_A p_A x,\ \ p_A > 0,\ \ 0 < \lambda_A < 1.$ Тоді, помноживши останню рівність праворуч на вектор-стовпець $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, дістанемо: $p_A Ae = \lambda_A p_A e.$

Оскільки $Ae = \begin{pmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}$, то ліва частина останньої рівності згідно з умовами теореми набирає вигляду: $p_A A = \sum_{i=1}^{n} (pA)_i\, r_i < \sum_{i=1}^{n} (pA)_i,$ а права частина дорівнює $\lambda_A \sum_{i=1}^{n} (pA)_i,$ тому $\lambda_A < 1.$

Таким чином, модель Леонтьєва продуктивна.

Отже, якщо модель Леонтьєва продуктивна, то для будь-якого вектора кінцевого попиту $y \ge 0$ однозначно визначається невід'ємний вектор валового випуску x за формулою:

$$x = y + Ay + A^2 y + \ldots . \tag{2.21}$$

Цей розклад можна інтерпретувати так. Для задоволення даного обсягу кінцевого попиту $y \ge 0$ необхідно витратити Ay продуктів, але спочатку їх потрібно виробити, для чого знадобиться $A(Ay) = A^2 y$ продуктів, для виробництва яких знадобиться $A^3 y$ продуктів, і т. д.

Матриця $A^* = (I - A)^{-1} > 0$ називається ***матрицею повних витрат***, оскільки

$$x = (I - A)^{-1} y = A^* y. \tag{2.22}$$

Кожний її елемент a_{ij}^* показує, скільки потрібно виробити одиниць *i*-го продукту на одиницю *j*-го кінцевого продукту.

Статична модель Леонтьєва дає змогу розглядати не тільки матеріальні, а й трудові ресурси.

Позначимо через l_i трудомісткість одиниці j-го продукту, тоді для забезпечення валового випуску x необхідно $\sum_{j=1}^{n} l_j x_j$ праці. Якщо ресурси праці L задано, то вже не можна ставити питання про задоволення будь-якого кінцевого попиту y, тобто про розв'язання системи (2.21) при будь-якому y. Її можна розв'язувати тільки для тих y, для яких вистачає праці, тобто

$$(I - A)x = y,\ \sum_{j=1}^{n} l_j x_j \le L. \tag{2.23}$$

Вважатимемо, що структуру кінцевого попиту задано, тобто, вибрано такий, наприклад, вектор структури y^0, що $\left\| y^0 \right\| = \sqrt{(y_1^0)^2 + ...(y_n^0)^2} = 1$. Тоді при заданій технології A і обмежених ресурсах праці L задача максимізації кінцевого попиту в заданій структурі αy^0 зводиться до максимізації α.

Отже, дістаємо таку задачу лінійного програмування:

$$\max \alpha,$$

$$(I - A)x \ge \alpha y^0, \tag{2.24}$$

$$lx \le L,$$

$$x \ge 0,\ \alpha > 0.$$

У цій задачі $(n+1)$ змінна $\left(x_1, ..., x_n, \alpha\right)$ і $(n+1)$ обмеження у вигляді нерівності, оскільки $l = (l_1, ..., l_n)$. Запишемо пряму задачу:

$$\max\left(0 \cdot x_1 + ... + 0 \cdot x_n + 1 \cdot \alpha\right),$$

$$\begin{pmatrix} & -(I - A) & & \begin{matrix} y_1^0 \\ \vdots \\ y_n^0 \end{matrix} \\ l_1 & \cdots & l_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ \alpha \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ L \end{pmatrix},$$

$$x \ge 0, \quad \alpha > 0.$$

Запишемо двоїсту задачу:

$$\min\left(0\cdot p_1+\ldots+0\cdot p_n+Lw\right),$$

$$\begin{pmatrix} & & & l_1\\ -(I-A)' & & & \vdots\\ & & & l_n\\ y_1^0 & \cdots & y_n^0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_1\\ \vdots\\ p_n\\ w\end{pmatrix}\geq\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix},$$

$$p\geq 0,\quad w\geq 0,$$

де α, w — скалярні величини.

Якщо матриця A нерозкладна, $\lambda_A<1$, то пряма задача має припустимий розв'язок. Візьмемо $\alpha=1$, тоді з огляду на нерозкладність A і на те, що $\lambda_A<1$, рівняння $(I-A)x=y^0$ має невід'ємний розв'язок $x^0\geq 0$. Оскільки $L>0$, $l>0$, то існує таке значення $\mu>0$, що $\mu\sum_{j=1}^{n}x_j^0 l_j\leq L$, тому вектор є припустимим розв'язком прямої задачі.

Двоїста задача в матричній формі має вигляд:

$$\min Lw,$$

$$wl\geq p(I-A),$$

$$py^0\geq 1,$$

$$p\geq 0, w\geq 0,$$

де p, l — вектори-рядки цін і трудомісткості.

Розглянемо таку інтерпретацію двоїстої задачі: p — вектор оцінок (тіньових цін) матеріальних ресурсів, а скаляр w — оцінка праці (тобто ставка зарплати, якщо L — кількість зайнятих). Тоді wl — вектор-рядок витрат зарплат на одиничні галузеві випуски; $p(I-A)$ — вектор-рядок оцінок кінцевих випусків, відповідних одиничних валових випусків.

Якщо матриця A нерозкладна, то будь-який припустимий вектор $\begin{pmatrix}x\\ \alpha\end{pmatrix}$ задачі (2.24) містить $x>0$. Справді з продуктивності моделі і нерозкладності матриці A випливає, що $x=(I-A)^{-1}\alpha y^0>0$, оскільки $\alpha>0$, $y^0>0$, $(I-A)^{-1}>0$.

Оскільки оптимальний розв'язок прямої задачі $\begin{pmatrix} x \\ \alpha \end{pmatrix} > 0,$ то в оптимальному розв'язку двоїстої задачі всі обмеження виконуються як рівності, тобто

$$wl = p(I - A),\ py^0 = 1. \tag{2.25}$$

З першої рівності знаходимо

$$p = wl(I - A)^{-1} = wl^*, \tag{2.26}$$

де $l^* = l(I - A)^{-1}$ — вектор повних трудових витрат, тобто витрат праці на одиничні кінцеві випуски галузей, оскільки $l^* y = l(I - A)^{-1} \times$ $\times (I - A)x = lx = L$. Таким чином, рівність (2.26) означає, що ціни на товари пропорційні до повних трудових витрат із коефіцієнтом пропорційності, який дорівнює ставці заробітної платні w.

Оптимальні розв'язки прямої і двоїстої задач рівні між собою, тобто

$$\alpha = wL \tag{2.27}$$

(оскільки, $py^0 = 1$, то $\alpha = \alpha p y^0$, тобто α — повна вартість кінцевого продукту в цінах p). Таким чином, рівність (2.27) виражає у вартісній формі рівність попиту (загальний фонд зарплати wL) і пропозиції (загальна вартість кінцевого продукту α). З рівності (2.25) випливає, що ставка зарплати $w = \frac{py^0}{l^* y^0}$ дорівнює відношенню вартості кінцевого асортиментного набору до його трудомісткості.

РОЗДІЛ 3

МАКРОЕКОНОМІЧНІ ВИРОБНИЧІ ФУНКЦІЇ

3.1. Основні поняття

Розглянемо макроекономічну виробничу функцію (ВФ) в економічній інтерпретації, наприклад, виробничу функцію Кобба—Дугласа (ВФКД).

Нехай математичною моделлю макроекономіки є двофакторна ВФ, задана нелінійним рівнянням вигляду:

$$X = F\left(K, L\right), \qquad (3.1)$$

де X — випуск кінцевої продукції у вигляді річних обсягів виробництва (це може бути і валовий випуск, і валовий внутрішній продукт і національний дохід); K — обсяг використаного основного капіталу; L — витрати людської праці. Отже, випуск (продукту) X є функція від витрат ресурсів основного капіталу (фондів) K і праці L.

ВФКД називається ***статичною***, якщо її параметри не залежать від часу t, хоча обсяг ресурсів і обсяг випуску можуть залежати від часу t, тобто можуть мати вигляд часових рядів:

$K(0)$, $K(1), \dots$, $K(T)$, $L(0)$, $L(1), \dots$, $L(T)$, $X(0)$, $X(1), \dots$, $X(T)$; $X\left(t\right) = F\left(K\left(t\right), L\left(t\right)\right)$,

де t — номер року, $t = 0, 1, \dots, T$; $t = 0$ — базовий рік часового проміжку.

Виробнича функція $X = F(K, L)$, називається ***неокласичною***, якщо вона є гладкою і задовольняє такі умови, що піддаються природній економічній інтерпретації:

1) $F(0, L) = F(K, 0) = 0$ — за відсутності одного з ресурсів виробництво неможливе;

2) $\dfrac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial L} > 0$ — зі зростанням ресурсів випуск зростає;

3) $\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0,\ \frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ — зі збільшенням ресурсів швидкість зростання випуску сповільнюється;

4) $F(+\infty, L) = F(K, +\infty) \to \infty$ — при необмеженому збільшенні одного з ресурсів випуск необмежено зростає.

Мультиплікативна ВФ задається виразом:

$$X = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2},\ \alpha_1 > 0,\ \alpha_2 > 0, \tag{3.2}$$

де A — коефіцієнт нейтрального технічного прогресу; α_1, α_2 — коефіцієнти еластичності за працею та фондами.

Графік ВФ Кобба—Дугласа $X = AK^{\alpha}L^{\alpha_2}$ при $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{2}$, $A = 1$, $L \geq 0$, $K \geq 0$ і при $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{1}{4}$, $A = 1$, $L \geq 0$, $K \geq 0$ наведено відповідно на рис. 3.1 і 3.2.

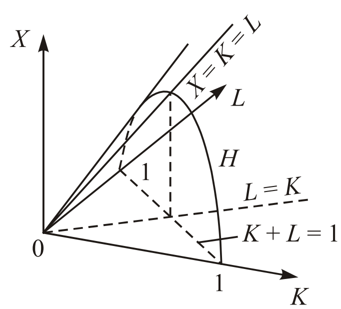


Рис. 3.1

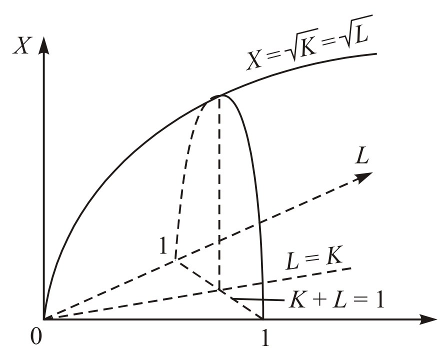


Рис. 3.2

На рис. 3.1 графік функції — конічна поверхня, твірні якої являють собою промені з початком в точці 0, а твірна H у вертикальній площині $K + L = 1$ має рівняння $X = K^{\frac{1}{2}}L(1-K)^{\frac{1}{2}}$.

На рис. 3.2 графік функції — параболічна поверхня, меридіани якої є параболи з початком в точці 0, а напрямна H у вертикальній площині $K + L = 1$ має рівняння $X = K^{\frac{1}{4}}(1-K)^{\frac{1}{4}}$.

Таким чином, ця ВФ задовольняє умову 1, що відповідає реальній економіці: за відсутності одного з ресурсів виробництво неможливе. Окремим випадком цієї функції є функція Кобба—Дугласа:

$$X = AK^{\alpha}L^{1-\alpha},$$

де $\alpha_1 = \alpha,\ \alpha_2 = 1 - \alpha.$

Мультиплікативна ВФ визначається часовим рядом випусків і витрат ресурсів $(X_t K_t L_t),\ t = 1, ..., T$, де T — довжина часового ряду, при цьому передбачається, що виконуються T співвідношень:

$$X_t = \delta_t AK_t^{\alpha_1} L_t^{\alpha_2},$$

де δ_t — коригувальний випадковий коефіцієнт, який приводить у відповідність фактичний і розрахунковий випуск і відбиває флуктуацію результату під впливом інших чинників $M\delta_t = 1$.

Оскільки в логарифмах ця функція лінійна:

$\ln X_t = \ln A + \alpha_1 \ln K_t + \alpha_2 \ln L_t + \varepsilon_t$, де $\varepsilon_t = \ln \delta_t$; $M\varepsilon_t = 0,$

то дістаємо ***модель лінійної множинної регресії***. Параметри A, α_1, α_2 цієї функції можна визначити методом найменших квадратів, скориставшись стандартними пакетами прикладних програм, що містять метод множинної регресії (наприклад, STATGRAF або SAS для персональних ЕОМ).

Мультиплікативна ВФ задовольняє умову 2, що відповідає реальній економіці, оскільки зі зростанням витрат ресурсів випуск збільшується:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 AK^{\alpha_1 - 1}L^{\alpha_2} = \frac{\alpha_1 X}{K} > 0, \qquad \alpha_1 > 0;$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2 - 1} = \frac{\alpha_2 X}{L} > 0, \qquad \alpha_2 > 0. \tag{3.3}$$

Частинні похідні випуску за чинниками називаються ***граничними продуктами*** або ***граничними (маржинальними) ефективностями чинників***, і характеризують приріст випуску на одиницю як завгодно малого приросту чинника: $\frac{\partial F}{\partial K}$ — граничний продукт фондів, граничну фондовіддачу (граничну ефективність фондів); $\frac{\partial F}{\partial L}$ — граничний продукт праці, граничну продуктивність праці (граничну ефективність праці).

Для мультиплікативної функції з (3.3) випливає, що гранична фондовіддача пропорційна до середньої фондовіддачі $\frac{X}{K}$ із коефіцієнтом α_1, а гранична продуктивність праці — середній продуктивності праці $\frac{X}{L}$ із коефіцієнтом α_2:

$$\frac{\partial X}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \qquad \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}. \tag{3.4}$$

Із (3.4) випливає, що при $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$ гранична віддача чинників менша за відповідну середню; за цих самих умов мультиплікативна функція задовольняє умову 3, що дуже часто спостерігається в реальній економіці: зі зростанням витрат ресурсу його гранична віддача падає, тобто

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 X}{\partial K^2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1) A K^{\alpha_1 - 2} L^{\alpha_2} = \alpha_1(\alpha_1 - 1)\frac{X}{K^2} < 0, \qquad \alpha_1 < 1; \\ &\frac{\partial^2 X}{\partial L^2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1) A K^{\alpha_1} L^{\alpha_2 - 2} = \alpha_2(\alpha_2 - 1)\frac{X}{L^2} < 0, \qquad \alpha_2 < 1. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Згідно з (3.2) доходимо висновку, що мультиплікативна функція задовольняє умову 4, тобто при необмеженому збільшенні одного з ресурсів випуск необмежено зростає. Таким чином, мультиплікативна функція при $0 < \alpha_1 < 1$, $0 < \alpha_2 < 1$ є неокласичною.

3.2. Економічна інтерпретація ВФ

Перейдемо тепер до економічної інтерпретації параметрів A, α_1, α_2 мультиплікативної ВФ. Параметр A звичайно інтерпретується як параметр нейтрального технічного прогресу: при тих самих α_1, α_2 випуск у точці (K, L) тим більший, чим більше значення A. Для інтерпретації α_1, α_2 необхідно ввести поняття еластичностей як логарифмічних похідних чинників:

$$\begin{aligned} \alpha_K &= \frac{\partial \ln X}{\partial \ln K} = \lim_{\vartriangle K \to 0} \frac{(\vartriangle X / X)}{(\vartriangle K / K)}, \\ \alpha_L &= \frac{\partial \ln X}{\partial \ln L} = \lim_{\vartriangle L \to 0} \frac{(\vartriangle X / X)}{(\vartriangle L / L)}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Оскільки в нашому випадку $\ln X = \ln A + \alpha_1 \ln K + \alpha_2 \ln L$, то

$$\alpha_K = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln K} = \alpha_1, \qquad \alpha_L = \frac{\partial \ln X}{\partial \ln L} = \alpha_2,$$

де α_1 — еластичність випуску за основними фондами; α_2 — еластичність випуску за працею.

Із (3.6) випливає, що коефіцієнт еластичності чинника показує, на скільки відсотків збільшиться випуск, якщо чинник зросте на 1 %.

Якщо $\alpha_1 > \alpha_2$, то відбувається працезберігаюче (інтенсивне) зростання, у протилежному випадку — фондозберігаюче (екстенсивне) зростання.

Розглянемо темп зростання випуску:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{\alpha_2}. \tag{3.7}$$

Піднесемо обидві частини (3.7) до степеня $\dfrac{1}{\alpha_1 + \alpha_2}$:

$$\left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha}. \tag{3.8}$$

У правій частині рівності (3.8) маємо зважене середнє геометричне темпів зростання витрат ресурсів, причому в ролі ваги виступають відносні еластичності чинників:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}, \;\; 1 - \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}.$$

Якщо $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$, випуск зростає швидше, а при $\alpha_1 + \alpha_2 < 1$ — повільніше, ніж у середньому зростають чинники.

Якщо чинники зростають $\left(K_{t+1} > K_t,\, L_{t+1} > L_t\right)$, то згідно з (3.7) зростає і випуск $\left(X_{t+1} > X_t\right)$, а отже, при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ виконується рівність:

$$\frac{X_{t+1}}{X_t} > \left(\frac{X_{t+1}}{X_t}\right)^{\frac{1}{\alpha_1+\alpha_2}} = \left(\frac{K_{t+1}}{K_t}\right)^{\alpha} \left(\frac{L_{t+1}}{L_t}\right)^{1-\alpha},$$

тобто справді темп зростання випуску вищий за середній темп зростання чинників. Таким чином, при $\alpha_1 + \alpha_2 > 1$ ВФ описує зростаючу економіку.

Лінією рівня на площині *K*, *L*, або ***ізоквантою*** (рис. 3.3), називається множина тих точок площини, для яких $F(K, L) = X_0 = \text{const}$. Для мультиплікативної ВФ ізокванта має вигляд

$$AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2} = X_0 = \text{const}, \text{ або } K^{\alpha_1} = \frac{X_0}{A}L^{-\alpha_2},$$

отже, є степенева гіпербола, асимптоми якої — осі координат.

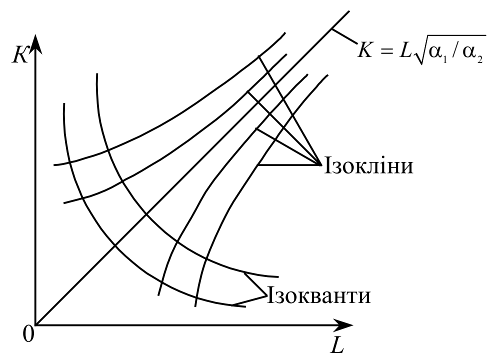


Рис. 3.3

Для різних *K*, *L*, які належать ізокванті, випуск дорівнює значенню X_0, що означає взаємозамінність ресурсів.

Оскільки на ізокванті $F(K, L) = X_0 = \text{const}$, то

$$\text{d}F = \frac{\partial F}{\partial K}dK + \frac{\partial F}{\partial L}dL = 0. \tag{3.9}$$

У цьому співвідношенні $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$, тому dK і dL мають різні знаки. При $dL < 0$, тобто в разі скорочення обсягу праці, маємо $dK > 0$, а це означає, що праця в обсязі $|dL|$ заміщується фондами в обсязі dK.

Із (3.9) випливає таке означення: ***граничною нормою заміни праці фондами*** називається відношення модулів диференціалів основних фондів і праці:

$$S_K = \frac{dK}{|dL|} = -\frac{dK}{dL} = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K}. \tag{3.10}$$

Аналогічно, ***гранична норма заміни*** S ***фондів працею***

$$S_L = -\frac{dL}{dK} = \frac{\partial F/\partial K}{\partial F/\partial L}, \quad S_K S_L = 1.$$

Для мультиплікативної функції норма заміни праці фондами пропорційна до фондозабезпечення:

$$S_K = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{K}{L} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}k, \quad k = \frac{K}{L},$$

що абсолютно природно: дефіцит праці можна компенсувати його фондозабезпеченням.

Ізоклінами називаються лінії найбільшого зростання ВФ. Ізокліни ортогональні до ліній нульового зростання, тобто ізоквантам. Оскільки напрям найбільшого зростання в кожній точці (K, L) задається градієнтом $F = \left(\frac{\partial F}{\partial K}, \frac{\partial F}{\partial L}\right)$, то рівняння ізокліни записується у вигляді

$$\frac{dK}{(\partial F/\partial K)} = \frac{dL}{(\partial F/\partial L)}.$$

Зокрема, для мультиплікативної ВФ дістаємо:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K}, \quad \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L},$$

тому ізокліна задається дифференціальним рівнянням $\frac{1}{\alpha_1}KdK =$ $= \frac{1}{\alpha_2}LdL$, яке має розв’язок:

$$K = \sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}L^2 + a}, \quad a = K_0^{\ 2} - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}L_0^{\ 2},$$

де (L_0, K_0) — координати точки, через яку проходить ізокліна. Найпростіша ізокліна при $a = 0$ є прямою: $K = L\sqrt{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$.

Ізокванти й ізокліни мультиплікативної ВФ зображено на рис. 3.1.

При вивченні чинників зростання економіки виокремлюють ***екстенсивні чинники*** зростання (за рахунок збільшення витрат ресурсів, тобто збільшення масштабу виробництва) та ***інтенсивні чинники*** зростання (за рахунок підвищення ефективності використання ресурсів).

Розглянемо, як за допомогою ВФ можна виразити масштаб і ефективність виробництва. Це порівняно легко зробити, якщо випуск і витрати виражено в одиницях однієї розмірності, наприклад подано у вартісній формі. Проте проблему порівняння теперішньої і минулої праці не розв’язано. Тому скористаємося переходом до відносних (безрозмірних) показників.

У відносних показниках мультиплікативна ВФ записується так:

$$\frac{X}{X_0} = \left(\frac{K}{K_0}\right)^{\alpha_1} \left(\frac{L}{L_0}\right)^{\alpha_2}, \tag{3.11}$$

де A_0, K_0, L_0 — значення випуску і витрат фондів і праці упродовж базового року.

Безрозмірна форма (3.11) легко зводиться до вигляду:

$$X = \frac{X_0}{K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}} K^{\alpha_1} L^{\alpha_2} = AK^{\alpha_1} L^{\alpha_2}.$$

Таким чином, $A = \dfrac{X_0}{K_0^{\alpha_1} L_0^{\alpha_2}}$ — це коефіцієнт, який порівнює ресурси з випуском.

Якщо позначити випуск і ресурси у відносних (безрозмірних) одиницях через $\tilde{X}, \tilde{K}, \tilde{L}$, то ВФ у формі (3.11) запишеться так:

$$\tilde{X} = \tilde{K}^{\alpha_1} \tilde{L}^{\alpha_2}. \tag{3.12}$$

Знайдемо тепер ефективність економіки, яка характеризується ВФ (3.12). Нагадаємо, що ефективність — це відношення результату до витрат. У нашому випадку маємо два види витрат: витрати минулої праці у вигляді фондів $\tilde{K}$ і витрати справжньої праці $\tilde{L}$. Тому є два показники ефективності: $\dfrac{\tilde{X}}{\tilde{K}}$ — фондовіддача; $\dfrac{\tilde{X}}{\tilde{L}}$ — продуктивність праці.

Оскільки показники ефективності мають однакову розмірність, то можна знаходити будь-які середні з них. Оскільки ВФ подається в мультиплікативній формі, то й середнє значення природно взяти в такій самій формі, тобто середньогеометричне значення.

Отже, узагальнений показник економічної ефективності являє собою зважене середнє геометричне частинних показників економічної ефективності:

$$E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{K}}\right)^{\alpha} \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{L}}\right)^{1-\alpha}, \tag{3.13}$$

де вагові коефіцієнти — відносні еластичності $\alpha = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$, $1 - \alpha = \dfrac{\alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}$, тобто частинні ефективності беруть участь в утворенні узагальненої ефективності з такими самими пріоритетами, з якими входять у ВФ відповідні ресурси.

Із (3.13) випливає, що за допомогою коефіцієнта економічної ефективності ВФ набирає у форми, що зовні збігається з функцією Кобба—Дугласа:

$$\tilde{X} = E\tilde{K}^{\alpha}\tilde{L}^{1-\alpha}, \tag{3.14}$$

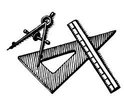
але на відміну від ВФКД у правій частині (3.14) E — не сталий коефіцієнт, а функція від K і L.

Оскільки масштаб M виробництва характеризується обсягом витрачених ресурсів, то згідно з міркуваннями, наведеними при розрахунку узагальненого показника економічної ефективності, середній розмір використаних ресурсів (тобто масштаб виробництва) має вигляд:

$$M = \tilde{K}^{\alpha}\tilde{L}^{1-\alpha}. \tag{3.15}$$

Із (3.14) і (3.15) випливає, що випуск являє собою добуток економічної ефективності та масштабу виробництва:

$$\tilde{X} = EM. \tag{3.16}$$



Приклад. Нехай маємо знайдену за даними 1960—1995 років ВФ $X = 2,248K^{0,404}L^{0,803}$ валового внутрішнього продукту США. Обчислимо масштаб і ефективність виробництва.

Валовий внутрішній продукт США (млрд дол.) у цінах 1987 року зріс за розглядуваний період у 2,82 разу, тобто $\tilde{X}$ = 2,82, основні виробничі фонди за цей самий період збільшилися в 2,88 разу ($\tilde{K}$ = 2,88), а кількість зайнятих — у 1,93 разу ($\tilde{L}$ = 1,93).

Знаходимо відносні еластичності за фондами та працею:

$$\alpha = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2} = \frac{0,404}{0,404 + 0,803} = 0,3347, \qquad 1 - \alpha = 0,6653.$$

Визначаємо частинні ефективності ресурсів:

$$E_K = \frac{\tilde{X}}{\tilde{K}} = \frac{2,82}{2,88} = 0,98, \qquad E_L = \frac{\tilde{X}}{\tilde{L}} = \frac{2,82}{1,93} = 1,46.$$

Знаходимо узагальнений показник ефективності як середнє геометричне частинних:

$$E = E_K^{\alpha} E_L^{1-\alpha} = 0,98^{0,3347} \cdot 1,46^{0,6653} = 1,278.$$

Масштаб установлюємо як середнє геометричне темпів зростання ресурсів:

$$M = \tilde{K}^{\alpha} \tilde{L}^{1-\alpha} = 2,88^{0,3347} \cdot 1,93^{0,6653} = 2,207.$$

Таким чином, загальне зростання ВВП за зазначений період у 2,82 разу відбулося за рахунок зростання масштабу виробництва в 2,207 разу, а також підвищення ефективності виробництва в 1,278 разу (2,82 = 1,273 · 2,207).

Отже, для мультиплікативної ВФ $F(K,L) = AK^{\alpha_1}L^{\alpha_2}$ з'ясовано зміст її параметрів A, α_1, α_2; показано, що при $0 < \alpha_i < 1$, $i = 1,2$, ця функція — неокласична; побудовано ізокванти й ізокліни цієї функції та знайдено норми заміни ресурсів.

Виробнича функція називається ***однорідною степені*** γ, якщо

$$F(\lambda K, \lambda L) = \lambda^{\gamma} F(K,L). \tag{3.17}$$

Наприклад, мультиплікативна ВФ є функцією однорідною степеня $\alpha_1 + \alpha_2$. Для однорідних ВФ можна дістати простіший вираз для норми заміни. Справді,

$$F(K,L) = L^{\gamma} F(\frac{K}{L}, 1) = L^{\lambda} f(k),$$

де $f(k) = F(k,1)$, $k = \dfrac{K}{L}$ — фондозабезпечення.

Далі маємо:

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \gamma L^{\gamma-1} f(k) - L^{\gamma} f'(k) \frac{K}{L^2} = L^{\gamma-1}\left[\gamma f(k) - kf'(k)\right],$$

$$\frac{\partial F}{\partial L} = L^{\gamma} f'(k) \frac{1}{L} = L^{\gamma-1} f'(k),$$

звідки

$$S_k = \frac{\partial F/\partial L}{\partial F/\partial K} = \gamma \frac{f(k)}{f'(k)} - k\,, \qquad (3.18)$$

тобто норма заміни є функцією тільки фондозабезпечення. Для однорідних ВФ вводиться поняття еластичності заміни праці фондами:

$$\sigma_K = \frac{dk/k}{dS_K/S_K}\,. \qquad (3.19)$$

Ця величина показує, на скільки відсотків потрібно змінити фондозабезпечення, щоб досягти зміни норми заміни на 1 %. Аналогічно вводиться і показник еластичності заміни фондів працею σ_L.

Можна перевірити, що $\sigma_L = \sigma_K = \sigma$. Для мультиплікативних ВФ $\sigma_L = 1$. У цьому разі:

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \alpha_1 \frac{X}{K},\ \frac{\partial F}{\partial L} = \alpha_2 \frac{X}{L}\,,$$

а отже,

$$S = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}k,\ \frac{dS}{dk} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ \sigma = \frac{S}{k}\left(\frac{dS}{dk}\right)^{-1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 1.$$

Для лінійної ВФ маємо $\sigma = \infty$.

Геометрично норму заміни праці фондами S можна подати як тангенс кута нахилу дотичної до ізокванти відносно від’ємного напряму осі абсцис. Цей кут нахилу α_A в деякій точці A позначено на рис. 3.4 на ізокванті.

У разі, коли точка A має перейти в точку B, щоб тангенс кута нахилу дотичної зріс на 1 % (тобто норма заміни зросла на 1 %), тобто коли

$$\frac{\mathrm{tg}\alpha_B - \mathrm{tg}\alpha_A}{\mathrm{tg}\alpha_A} \cdot 100\% = 1\%\,,$$

фондозабезпечення (згідно з визначенням еластичності заміни) зросте на $\sigma\%$:

$$\left(\frac{k_B - k_A}{k_A}\right) \cdot 100\% = \left(\frac{K_B}{K_A}\frac{L_A}{L_B} - 1\right) \cdot 100\% = \sigma\%,$$

де $\frac{K_B}{K_A}$ — темп зростання фондів (відносно K_A); $\frac{L_A}{L_B}$ — темп зменшення праці (відносно L_B).

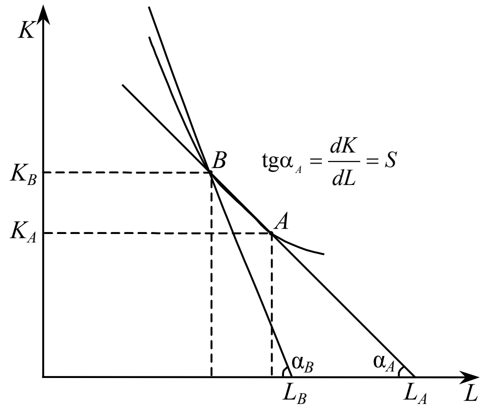


Рис. 3.4

Таким чином, для збільшення тангенса кута α_A на 1 % необхідно збільшення *K* і зменшення *L* (під час руху по ізокванті) за одночасного зростання еластичності σ. Це означає зменшення кривизни ізокванти при зростанні σ.

Клас ВФ із постійною еластичністю заміни (CES-функції) набирає такого вигляду:

$$\frac{d\,k/k}{d\,S/S} = \sigma = \text{const},$$

звідки $S = Ck^{\frac{1}{\sigma}}$, де C — довільна константа. Підставивши останній вираз у (3.18), дістаємо:

$$Ck^{\frac{1}{\sigma}} = \gamma\frac{f(k)}{f'(k)} - k\text{, або } \frac{f'}{f} = \frac{\gamma}{Ck^{\frac{1}{\sigma}} + k},$$

тому

$$\ln f = \gamma\int\frac{\mathrm{d}k}{k + Ck^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\gamma\sigma}{\sigma - 1}\ln C_1\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C\right),$$

де C_1 — довільна константа.

Таким чином, маємо

$$f = C_1 \left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + C \right)^{\gamma \frac{\sigma}{\sigma-1}},$$

або у змінних K, L:

$$X = C_1 \left[K^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} + CL^{\frac{\sigma-1}{\sigma}} \right]^{\frac{\gamma\sigma}{\sigma-1}}.$$

Позначивши $\rho = \frac{1-\sigma}{\sigma}, \frac{1}{C+1} = \alpha < 1, C_1(C+1)^{-\frac{\gamma}{\rho}} = A$, дістанемо загальний вигляд функції з постійною еластичністю заміни (CES-функцію):

$$X = F(K, L) = A\left[\alpha K^{-\rho} + (1-\alpha)L^{-\rho}\right]^{\frac{\gamma}{\rho}}, \quad (3.20)$$

де $A > 0$, оскільки X — випуск.

При $0 < \gamma \le 1, \rho > -1$, CES-функція задовольняє умови 2 і 3 для неокласичних ВФ. При $\gamma = 1, \sigma \to 1 (\rho \to 0)$ CES-функція прямує до функції Кобба—Дугласа, а при $\sigma \to 0$ — до функції з фіксованими пропорціями $X = \min(K^\lambda, L^\gamma)$, яка відповідає випадку відсутності заміни чинників $(\sigma = 0)$. При $\rho \to -1$, $\gamma = 1$ CES-функція переходить у лінійну ВФ.

РОЗДІЛ 4

ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ МАКРОЕКОНОМІКИ З ДИСКРЕТНИМ ЧАСОМ

4.1. Структурна схема економіки динамічної системи

Економічна система — це сукупність національних господарських одиниць (підприємств, організацій), що підтримують між собою виробничо-технологічні та організаційно-господарські зв'язки. При цьому кожна господарська одиниця може мати складну структуру. Економічна система складається з двох головних підсистем: ***виробничої*** та ***фінансово-кредитної***.

Структурну схему керованого об'єкта зображено на рис. 4.1, де x — вхід у керований об'єкт O (наприклад, ресурси); y — вихід з керованого об'єкта (наприклад, продукція); u — сигнал, що керує (вихід органу управління R). Пунктиром позначено агрегований елемент.

Елементи, з яких складається система, можуть бути статичними або динамічними.

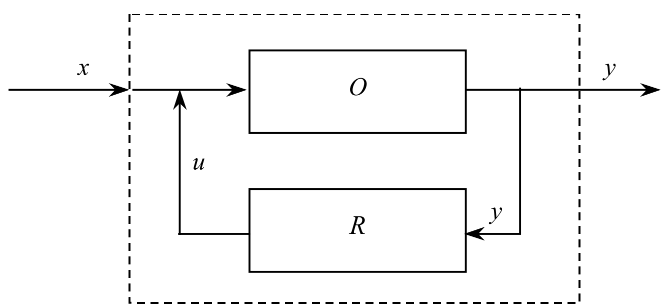


Рис. 4.1

Статичний елемент миттєво перетворить вхід x у вихід $y = F(x)$. Час t однаковий для входу і виходу.

Економіка країни описується у формі макроекономічної виробничої функції

$$Y = F(K, L),$$

де Y — валовий внутрішній продукт (ВВП); K — основні виробничі фонди; L — кількість осіб, зайнятих у виробництві.

Мультиплікативна виробнича функція економіки США, знайдена на підставі даних за 1980—1995 роки, має вигляд

$$Y = 2{,}248 K^{0{,}404} L^{0{,}803},$$

де Y, K вимірюються в млрд дол., а L — у млн чол.

Динамічний елемент характеризується тим, що його вихід у будь-який момент часу t залежить від входу не тільки в момент t, а й від значень входу і виходу в минулі моменти часу $t-1$, $t-2$,….

Наприклад, у статичній формі лінійний зв'язок між національним доходом N і споживанням C упродовж будь-якого року t можна подати у вигляді (індекс часу t опущено)

$$C = aN \text{ (статичний елемент)},$$

де a — частка фонду споживання в національному доході.

У динаміці цей зв'язок можна подати у вигляді

$$C_t = a_0 N_1 + a_1 N_{t-1} + a_2 N_{t-2} \text{ (динамічний елемент)},$$

тобто споживання в поточний рік t залежить від розміру національного доходу не тільки в поточному році t, а й у попередні роки $t-1$, $t-2$.

Система називається ***динамічною***, якщо в її складі є принаймні один динамічний елемент.

4.2. Динамічна модель Кейнса

Розглянемо модель, в якій роль єдиної ендогенної змінної Y, залежної від часу, виконує ВВП, тобто обсяг виробництва товарів кінцевого користування. ВВП складається з чотирьох частин: фонд невиробничого споживання C; валових приватних внутрішніх інвестицій I; державних витрат на закупівлю товарів і послуг G; чистого експорту E. У цій моделі економіка вважається закритою, тому чистий експорт дорівнює нулю, а державні витрати поділяються на споживання і накопичення. Отже, маємо:

$$Y = C + I.$$

У моделі передбачається, що попит на інвестиційні товари постійний, а попит на споживчі товари наступного року являє собою лінійну функцію від ВВП поточного року:

$$C^D{}_{t+1} = \underline{C} + cY_t ,$$

де $\underline{C}$ — нижня межа фонду невиробничого споживання; с — гранична схильність до споживання ($0 < c < 1$).

Динамічну модель Кейнса маємо в том разі, коли прирівняємо планований випуск товарів кінцевого користування до прогнозованого попиту на них:

$$Y_{t+1} = \underline{C} + cY_t + I. \tag{4.1}$$

Ця модель може застосовуватися тільки для аналізу і короткострокового прогнозування поводження економіки. Вона не придатна для довгострокового прогнозування, оскільки не відбиває відтворювального процесу, зокрема не враховує вибуття фондів у зв'язку з їхнім фізичним і моральним зносом.

З математичного погляду модель (4.1) є лінійним скінченно-різницевим рівнянням першого порядку. Між різницевими та диференціальними рівняннями попри певні відмінності існує пряма аналогія.

Зокрема, загальний розв'язок неоднорідного рівняння являє собою суму загального розв'язку однорідного рівняння і частинного розв'язку неоднорідного рівняння (4.1).

Розв'язок однорідного рівняння

$$Y_{t+1} - cY_t = 0$$

шукатимемо у вигляді $Y_t = \lambda^t$, звідки $\lambda^{t+1} - c\lambda^t = 0$.

Для визначення λ дістаємо характеристичне рівняння

$$\lambda - c = 0, \text{ або } \lambda = c.$$

Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння набирає вигляду $Y_t = Ac^t$, де A — стала.

Частинний розв'язок неоднорідного рівняння (4.1) (перевіряється безпосередньою підставленням у рівняння) має вигляд

$$Y_E = \frac{\underline{C} + I}{1 - c},$$

а тому загальний розв'язок неоднорідного рівняння такий:

$$Y_t = Y_E + Ac^t,\ t = 0, 1, 2,\ \ldots.$$

Сталу A визначаємо за допомогою початкового значення Y_0:

$$Y_0 = Y_E + A,$$

звідки

$$A = Y_0 - Y_E,$$

тому ураховуючи (4.1), остаточно дістаємо:

$$Y_t = Y_E + \left(Y_0 - Y_E\right)c^t. \tag{4.2}$$

При цьому $\lim\limits_{t\to\infty} Y_t = Y_E$, оскільки $0 < c < 1$, тобто Y_E — значення ВВП.

4.3. Модель Самуельсона—Хікса

Відмінність моделі Самуельсона—Хікса від динамічної моделі Кейнса полягає у відмові від постійності інвестицій і введенні їхньої змінної частини, пропорційної до приросту ВВП поточного року порівняно з минулим роком:

$$Y_{t+1} = \underline{C} + cY_t + r\left(Y_t - Y_{t-1}\right) + I, \tag{4.3}$$

де r — коефіцієнт акселерації (прискорення), $0 < r < 1$.

Модель Самуельсона—Хікса (4.3) — лінійне скінченно-різницеве рівняння 2-го порядку. Знайдемо розв'язок цього рівняння за допомогою перетворення Лорана.

Перетворенням Лорана дискретного аргументу t називається така функція комплексної змінної *z:*

$$L_{f(t)}\left(z\right) = F\left(z\right) = \sum_{t=0}^{\infty} f\left(t\right) z^{-t}. \tag{4.4}$$

З означення перетворення Лорана випливає, що образ функції зі зсувом набирає вигляду:

$$L_{f(t+k)}(z)=\sum_{t=0}^{\infty}f(t+k)z^{-1}=z^k\sum_{t=0}^{\infty}f(t+k)z^{-(t+k)}=z^k\left[F(z)-\sum_{t=0}^{k-1}f(t)z^{-t}\right]=$$
$$=z^kF(z)-\left[f(0)z^k+f(1)z^{k-1}+\ldots+f(k-1)z\right],$$

тому

$$L_{f(t+k)}(z)=z^kF(z)-\left[f(0)z^k+f(1)z^{k-1}+\ldots+f(k-1)z\right].\qquad(4.5)$$

Якщо відоме перетворення Лорана $F(z)$, то оригінал (тобто функція цілочислового аргументу) визначається за такою формулою (інтегрування виконується проти годинникової стрілки по довільно вибраному колу Г, яке обмежує круг К і поза яким міститься ряд (4.4)):

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}F(z)z^{t-1}dz.\qquad(4.6)$$

Для простих практичних розрахунків користуються таблицею образів, деякі з них наведено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОРАНА ДЕЯКИХ ФУНКЦІЙ ЦІЛОЧИСЛОВОГО АРГУМЕНТУ

$f(t)$	$F(z)$
1	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{z}{(z-1)^2}$
$e^{\omega t}$	$\frac{z}{z-e^{\omega}}$
$\cos\omega t$	$\frac{z(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$
$\sin\omega t$	$\frac{z\sin\omega}{z^2-2z\cos\omega+1}$
$C_t^k\lambda^t$	$\frac{z\lambda^k}{(z-\lambda)^{k+1}}$
λ^t	$\frac{z}{z-\lambda}$

Запишемо скінченно-різницеве рівняння (4.3) у вигляді:

$$Y_{t+2} - (r+c)Y_{t+1} + rY_t = \underline{C} + I$$

і виконуємо таку заміну змінних:

$$Y_t = Y_0 + \eta_t,\ \eta_t = Y_t - Y_0.$$

Тоді η_t задовольняє рівняння

$$\eta_{t+2} - (c+r)\eta_{t+1} + r\eta_t = a, \qquad (4.7)$$

з початковими умовами:

$$\eta_0 = 0,\ \eta_1 = Y_1 - Y_0,$$

де $a = \underline{C} + I - (1-c)Y_0$.

Застосовуємо перетворення Лорана до обох частин рівняння (4.7), використовуючи позначення $H(z) = L_{\eta(t)}(z)$, а також дані табл. 4.1:

$$\left[z^2 - (c+r)z + r\right]H(z) = \frac{az}{z-1} + \eta_1 z,$$

звідки

$$H(z) = \frac{az}{\left[z^2 - (c+r)z + r\right](z-1)} + \frac{\eta_1 z}{z^2 - (c+r)z + r}. \qquad (4.8)$$

Остаточний вигляд розв'язку залежить від вигляду кореня характеристичного рівняння $\lambda^2 - (c+r)\lambda + r = 0$:

$$\lambda_{1,2} = \frac{c+r}{2} \pm \sqrt{\frac{(c+r)^2}{4} - r}.$$

Якщо дискримінант $D = \frac{(c+r)^2}{4} - r > 0,$ то корені дійсні і додатні при $\lambda_1 > \lambda_2$.

Неважко перевірити, що в цьому разі дробово-раціональний вираз у правій частині рівності (4.8) можна розкласти на такі прості дроби:

$$\frac{az}{(z-1)\left[z^2 - (c+r)z + r\right]} = \frac{az}{(1-c)(z-1)} + \frac{aa_1 z}{z-\lambda_1} + \frac{aa_2 z}{z-\lambda_2},$$

$$\frac{\eta_1 z}{z^2-(c+r)z+r}=\frac{\eta_1 b_1 z}{z-\lambda_1}+\frac{\eta_1 b_2 z}{z-\lambda_2},$$

де

$$a_1=-\frac{\lambda_1+1-(c+r)}{(\lambda_1-\lambda_2)(1-c)},\ a_2=-\frac{\lambda_2+1-(c+r)}{(\lambda_1-\lambda_2)(1-c)},\ b_1=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2},\ b_2=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2},$$

тому

$$H(z)=\frac{az}{(1-c)(z-1)}+\frac{(aa_1+\eta_1 b_1)z}{z-\lambda_1}+\frac{(aa_2+\eta_1 b_2)z}{z-\lambda_2}.$$

Скориставшись даними табл. 4.1, знайдемо оригінал

$$\eta_t=\frac{C+I}{1-c}-Y_0+(aa_1+\eta_1 b_1)\lambda_1^t+(aa_2+\eta_1 b_2)\lambda_2^t$$

і шуканий ВВП:

$$Y_t=\frac{\underline{C}+I}{1-c_0}+\left[aa_1+b_1(Y_0-Y_1)\right]\lambda_1^t+\left[aa_2+b_2(Y_1-Y_0)\right]\lambda_2^t. \qquad (4.9)$$

Оскільки $0<\lambda_1<1,\ 0<\lambda_2<1,$ то границя

$$\lim_{t\to\infty}Y_t=\frac{\underline{C}+I}{1-c_0}=Y_E.$$

А якщо дискримінант від'ємний, тобто $D=\frac{(c+r)^2}{4}-r<0,$ то корені комплексні взаємно-спряжені:

$$\lambda_1=\alpha+i\omega,\ \lambda_2=\alpha-i\omega,$$

де

$$\alpha=\frac{c+r}{2},\ \omega=\sqrt{r-\frac{(c+r)^2}{4}},\ i=\sqrt{-1}.$$

У цих позначеннях:

$$a_1=\frac{1-\alpha+i\omega}{2i\omega(1-c)},\ a_2=\frac{1-\alpha-i\omega}{2i\omega(1-c)},\ b_1=\frac{1}{2i\omega},\ b_2=-\frac{1}{2i\omega}.$$

Запишемо корені в полярній системі координат:

$$\lambda_1 = \rho e^{i\varphi},\ \lambda_2 = \rho e^{-i\varphi},$$

де

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \omega^2} = \sqrt{r};\ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\alpha} = \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{4r}{(c+r)^2} - 1}.$$

Тоді розв'язок (4.9) запишеться у вигляді:

$$Y_t = \frac{\underline{C} + I}{1 - c} + \left[aa_1 + b_1(Y_1 - Y_0)\right] r^{\frac{1}{2}} e^{i\varphi t} + \left[aa_2 + b_2(Y_1 - Y_0)\right] r^{\frac{1}{2}} e^{-i\varphi t}.$$

Скориставшись останніми позначеннями, дістанемо:

$$a_1 e^{i\varphi t} + a_2 e^{-i\varphi t} = \frac{1}{\omega(1-c)}\left[(1-\alpha)\sin\varphi t + \omega\cos\omega t\right];$$

$$b_1 e^{i\varphi t} + b_2 e^{-i\varphi t} = \frac{\sin\varphi t}{\omega},$$

тому розв'язок рівняння Самуельсона—Хікса при від'ємному дискримінанті характеристичного рівняння набирає такого вигляду:

$$Y_t = \frac{\underline{C} + I}{1 - c} + r^{\frac{t}{2}}\left[\left(Y_0 - \frac{\underline{C} + I}{1 - c}\right)\left(\cos\varphi t + \frac{1-\alpha}{\varphi}\sin\varphi t\right) + (Y_1 - Y_0)\frac{\sin\varphi t}{\omega}\right]; \quad (4.10)$$

$$t = 0, 1, 2, \ldots$$

При $r < 1$ розв'язок рівняння (4.10) Самуельсона—Хікса після завершення перехідного загасаючого гармонічного процесу набуває сталого значення (такого самого, як і в разі додатного дискримінанта):

$$\lim_{t\to\infty} Y_t = \frac{\underline{C} + I}{1 - c}.$$

4.4. Динамічна модель Леонтьєва

Як і в статичній моделі Леонтьєва, розглянемо економіку, що має в своєму складі n галузей і виробляє та споживає n типів продуктів (товарів). Кожна галузь виробляє один продукт, різні галузі виробляють різні продукти. Коефіцієнти a_{ij} матриці прямих витрат $A = \|a_{ij}\|$, як і раніше, не залежать від часу та масштабу виробництва.

Час у моделі дискретний і змінюється через проміжки, що дорівнюють року, $t = 1, ..., T$. Оскільки модель буде подано в матричній формі, то нижній індекс використовуватимемо як номер року. У моделі застосовуються такі змінні, що характеризують стан економіки в динаміці (усього $(3n + 1)$ змінна):

x_t — вектор-стовпець валових випусків галузей;

$\overline{x}_t$ — вектор-стовпець галузевих потужностей (максимально можливих випусків);

v_t — вектор введення потужностей;

L_t — трудові ресурси.

Крім того, задано такі матриці з постійними коефіцієнтами розмірності (зліва вказані їх розміри): $(n \times n)$ $B = \|b_{ij}\|$ — матриця фондомісткості; $(n \times n)$ $c = (c_1, c_2, ..., c_n)'$ — вектор-стовпець споживання з розрахунку на одного зайнятого; $(1 \times n)$ $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ — вектор-рядок трудомісткості.

У цих позначеннях модель записується в такий спосіб:

$$x_t \geq Ax_t + Bv_t + L_t c, \tag{4.11}$$

$$x_t \leq \overline{x}_{t-1}, \tag{4.12}$$

$$\overline{x}_t \leq \overline{x}_{t-1} + v_t, \tag{4.13}$$

$$lx_t \leq l_t, \tag{4.14}$$

$$x_t \geq 0, \overline{x}_t \geq 0, v_t \geq 0, L_t \geq 0,$$

$$t = 1, 2, ..., T.$$

Нерівності (4.11) показують, що загальний валовий випуск продуктів має покривати поточні виробничі витрати (Ax_t), витрати продукції на розширення виробничих потужностей (Bx_t) і на невиробниче споживання $(L_t c)$.

Нерівності (4.12) обмежують валові випуски галузей наявними потужностями. Нерівності (4.13) є галузевими балансами потужностей з урахуванням їх вибуття і введення. Нерівності (4.14) обмежують випуски галузей наявними трудовими ресурсами.

У розглядуваній моделі лаг капіталовкладень дорівнює одному року: згідно з (4.12) і (4.13) інвестиції, зроблені в рік t, починають працювати в рік $(t + 1)$.

Послідовність векторів $x_t, \bar{x}_t, v_t, t = 1, 2, ..., T,$ назвемо ***припустимою траєкторією***, якщо протягом кожного року t виконуються всі умови моделі (у базовому році потужності задані і рівні між собою).

Введемо такі позначення (вгорі і праворуч від блокових матриць зазначено розміри матриць, що входять до них):

$$\left[(3n+1)\times(3+1)\right]\ \tilde{A} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} n & n & n & 1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} A - I_n & 0 & B & c \\ I_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & -I_n & 0 \\ l & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n \\ n \\ n \\ 1 \end{array} \end{array};$$

$$\left[(3n+1)\times(3+1)\right]\ \tilde{B} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} n & n & n & 1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} n \\ n \\ n \\ 1 \end{array} \end{array};$$

$$\left[(3n+1)\times 1\right]\ \tilde{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \overline{x_t} \\ v_t \\ L_t \end{pmatrix}.$$

Тоді модель динамічного міжгалузевого балансу (4.11) — (4.14) набирає такого вигляду:

$$\tilde{A}\tilde{x}_t \le \tilde{B}\tilde{x}_t,\ \tilde{x}_t \ge 0,\ t = 1,\ 2,\ ...,\ T, \qquad (4.15)$$

$$\tilde{x}_0 = (0,\ \bar{x}',\ 0,\ 0)'.$$

Слід звернути увагу на економічний сенс переходу від форми (4.11) — (4.14) моделі динамічного міжгалузевого балансу до форми (4.15). Першу можна розглядати як розімкнену форму моделі в тому сенсі, що частину виробленої продукції витрачається на внутрішні потреби (Ax_t — на виробниче споживання і Bx_t — на розширення потужностей), тоді як інша частина видається зовні у вигляді невиробничого споживання $L_t c$.

Якщо тепер замкнути економіку, тобто включити споживача (домашні господарства) до складу економічної системи, дістанемо форму (4.15) моделі динамічного міжгалузевого балансу. При цьому домашні господарства розглядаються як (n + 1)-ша галузь економіки, яка споживає продукцію інших галузей із коефіцієнтами прямих витрат c_i, $i = 1, \ldots, n,$ і виробляє єдиний вид продукції — працю з інтенсивністю L_t. У свою чергу, інші галузі споживають продукцію (n + 1)-ї галузі (праця) з коефіцієнтами прямих витрат l_t, $i = 1, \ldots, n$.

Іншою особливістю переходу до форми (4.15) є розгляд уніфікованого вектора змінних

$$\widetilde{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \overline{x}_t \\ v_t \\ L_t \end{pmatrix},$$

усі елементи якого в єдиний спосіб подано в моделі (4.14). Тому цю форму можна назвати ***уніфікованою***.

4.5. Модель Неймана

Модель Неймана є узагальненою моделлю Леонтьєва, оскільки допускає виробництво одного продукту різними способами (у моделі Леонтьєва кожна галузь виробляє один продукт, причому жодна інша галузь не може виробляти цього продукту).

У моделі розглядаються n продуктів і m способів їх виробництва, причому кожний j-й спосіб задається вектором-стовпцем витрат a_i і вектором-стовпцем випусків b_j з розрахунку на одиницю інтенсивності процесу:

$$a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}, \; b_j = \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{pmatrix}. \qquad (4.16)$$

Із векторів витрат і випуску утворюються матриці витрат і випуску

$$A = (a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m),\ B = (b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m). \tag{4.17}$$

Коефіцієнти витрат a_{ij} і випуску b_{ij} — невід'ємні. Природно припустити, що для реалізації будь-якого процесу необхідні витрати принаймні одного продукту, тобто для кожного j знайдеться хоча б одне значення i, таке що

$$a_{ij} > 0, \tag{4.18}$$

причому кожний продукт може бути вироблений хоча б одним способом, тобто для кожного i існує деяке j, таке що

$$b_{ij} > 0. \tag{4.19}$$

Із (4.18) і (4.19) випливає, що кожний стовпець матриці A і кожний рядок матриці B повинні мати принаймні один додатний елемент.

Позначимо через x_t невід'ємний вектор-стовпець інтенсивності виробничих процесів:

$$x_t = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{pmatrix},$$

а через p_t — вектор-рядок невід'ємних цін:

$$p_t = (p_1(t),\ p_2(t),\ \ldots,\ p_n(t)).$$

Вектор $y_t = Ax_t$ — це вектор витрат при заданому векторі інтенсивності процесів x_t, а вектор $z_t = Bx_t$ — вектор випусків.

Модель Неймана описує економіку, замкнену в тому сенсі, що для виробництва продукції в наступному виробничому циклі (упродовж року t) витрачається продукція, вироблена в попередньому виробничому циклі, тобто впродовж року $(t-1)$:

$$Ax_t \le Bx_{t-1},\ x_t \ge 0,\ t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T. \tag{4.20}$$

При цьому передбачається, що заданий первинний вектор запасів $Bx_0 > 0$.

Система (4.20) — це ***модель Неймана в натуральній формі*** і водночас ***уніфікована форма моделі динамічного міжгалузевого балансу***.

Модель Неймана у формі (4.20) має більш теоретичний, ніж практичний характер: у ній в явному вигляді не відображено накопичення та невиробничого споживання. Проте, модель динамічного міжгалузевого балансу в природній економічній формі, в якій відображено і накопичення, і невиробниче споживання, зводиться до уніфікованої форми (4.15), яка має вигляд (4.20). Отже, з (4.15) можна відновити природну форму (4.11) — (4.14).

Двоїстою до системи (4.20) є система

$$p_{t-1}A \geq p_t B, \ t = 1, \ 2, \ ..., \ T, \tag{4.21}$$

що тлумачиться так: жодний процес у замкненій моделі Неймана не приносить додатного доходу. Слід при цьому зазначити, що в (4.21) витрати здійснюються впродовж року (t – 1), а результати цих витрат даються взнаки впродовж року t.

Якщо (4.21) розглядати у формі рівностей, то власник капіталу, вклавши капітал k упродовж року (t – 1) і повернувши його впродовж року t, може одержати при цьому зиск у натуральній формі при $p_t < p_{t-1}$, оскільки протягом року t він може купити більше товарів $\hat{x}$, ніж упродовж року (t – 1):

$$\frac{k}{p_t\hat{x}} - \frac{k}{p_{t-1}\hat{x}} > 0.$$

Якщо модель Неймана здобуто в результаті зведення моделі динамічного міжгалузевого балансу до уніфікованого вигляду (4.15), то система (4.21) у формі рівностей набирає такого вигляду (символи з позначкою «тильда» використовуватимуться в опису моделі Неймана, а без цієї позначки — в опису розімкненої моделі міжгалузевого балансу):

$$\tilde{p}_{t-1}\tilde{A} = \tilde{p}_t\tilde{B}, \ t = 1, \ 2, \ ..., \ T. \tag{4.22}$$

У (4.22) матриці $\tilde{A}, \tilde{B}$ мають вигляд (4.20), при чому змінні $\tilde{x}_t$ поділяються на інтенсивність x_t потужності $\overline{x}_t$, введення потужностей v_t і кількість зайнятих L_t:

$$\tilde{x}_t = \begin{pmatrix} x_t \\ \overline{x}_t \\ v_t \\ L_t \end{pmatrix},$$

тому вектор-рядок цін p_t також розділиться на відповідні члени

$$\tilde{p}_t(p_t,\ r_t,\ i_t,\ w_t), \tag{4.23}$$

де p_t — вектор-рядок цін продуктів галузей; r_t — вектор-рядок галузевих орендних цін за потужності (вартість утримання галузевих потужностей); i_t — вектор-рядок галузевої капіталомісткості; w_t — ставка заробітної плати (із розрахунку на рік).

Тоді рівняння в цій економічній інтерпретації має вигляд:

$$p_{t-1}\left(A-I\right)+r_{t-1}+i_{t-1}+w_{t-1}l=0,\ t=1,\ 2,\ ...,\ T, \tag{4.24}$$

або

$$p_{t-1}=p_{t-1}A+r_{t-1}+w_{t-1}l$$

(ціна містить вартість витрачених на виробництво одиниці продукції продуктів усіх галузей плюс орендна плата за одиницю потужності плюс заробітна плата на одиницю продукції);

$$i_{t-1}=i_t+r_t,\ t=1,\ 2,\ ...,\ T, \tag{4.25}$$

(капіталомісткість упродовж року (t – 1) дорівнює капіталомісткості впродовж року t плюс орендна плата за одиницю потужності);

$$p_{t-1}B-i_{t-1}=0,\ t=1,\ 2,\ ...,\ T, \tag{4.26}$$

або

$$i_{t-1}=p_{t-1}B$$

(капіталомісткість дорівнює вартості продукції, витраченої на одиницю потужності);

$$p_{t-1}c-w_{t-1}=0,\ t=1,...,\ T,$$

або

$$w_{t-1}=p_{t-1}c$$

(заробітна плата дорівнює вартості асортиментного набору продуктів на одного зайнятого).

Перейдемо тепер до інших вартісних рівнянь моделі Неймана. Припустимо, що загальна маса грошей постійна, тобто

$$p_{t-1}Ax_t=p_tBx_t,\ t=1,...,\ T, \tag{4.27}$$

і весь час перебуває в обігу:

$$p_t B x_{t-1} = p_t A X_t. \tag{4.28}$$

Траєкторія інтенсивності називається ***стаціонарною***, якщо існує така кількість $v > 0$, що

$$x_t = v x_{t-1},\ t = 1,\ ...,\ T\ \ (\text{тобто}\ x_t = v^t x_0).$$

Таким чином, стаціонарна траєкторія характеризується сталістю темпів зростання інтенсивності:

$$\frac{x_t}{x_{t-1}} = v,\ t = 1, ...,\ T.$$

Для стаціонарності послідовності $x_t = v^t x$ необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова:

$$vAx \le Bx. \tag{4.29}$$

Траєкторія цін називається стаціонарною, якщо існує таке число $\mu > 0$, що $\mu p_t = p_{t-1}$, $t = 1, ..., T$ (тобто $\mu^t p_t = p_0$). Таким чином, стаціонарна траєкторія характеризується сталістю темпів зростання цін:

$$\frac{p_t}{p_{t-1}} = \mu^{-1},\ t = 1, ...,\ T.$$

Послідовність $p_t = \mu^{-1} p$ буде стаціонарною тоді і тільки тоді, коли

$$\mu pA \ge pB. \tag{4.30}$$

Для стаціонарних траєкторій $x_t = v^t x,\ p_t = \mu^{-1} p,$ умови (4.27) і (4.28) набирають вигляду:

$$\mu pAx = pBx, \tag{4.31}$$

$$\text{v}pAx = pBx. \tag{4.32}$$

Модель Неймана перебуває у стані динамічної рівноваги (v, μ, x, p), якщо виконуються умови (4.29) — (4.32) і v, μ — додатні; x, p — невід'ємні і відмінні від нуля:

$$vAx \le Bx,\ \ \mu pA \ge pB,$$

$$\mu pAx = pBx,\ \nu pAx = pBx, \tag{4.33}$$

$$\nu > 0,\ \mu > 0,\ x \geq 0,\ x \neq 0,\ p \geq 0,\ p \neq 0.$$

Якщо $pAx > 0$, то $\mu = \nu = \alpha$, так що невироджені умови рівноваги (4.33) подаються у формі

$$\alpha Ax \leq Bx,\ \alpha pA \geq pB, \tag{4.34}$$

$$pAx > 0,\ \alpha > 0,\ x \geq 0,\ p \geq 0,\ p \neq 0,$$

при цьому промінь $\{y : y = \mu x,\ \mu \geq 0\}$ називається ***променем Ней-мана***.

Виконується така теорема (подаємо її без доведення): **якщо матриці** $A \geq 0, B \geq 0$ **задовольняють умови (4.17) і (4.18), то існує розв'язок (4.34).**

У рамках моделі Неймана розв'язуються оптимізаційні економічні задачі. Наприклад, оптимум лінійної функції стану наприкінці даного періоду:

$$\max\ cx_T, \tag{4.35}$$

$$Ax_t \leq Bx_{t-1},\ t = 1, \ldots,\ T.$$

Траєкторія називається ***припустимою***, якщо вона задовольняє обмеження (4.35). Задача (4.35) — це задача лінійного програмування.

4.6. Модель Солоу

Модель Солоу є односекторною моделлю економічного зростання. У цій моделі економічна система розглядається як єдине ціле, виробляє один універсальний продукт, який може як споживатися, так і інвестуватися. Модель достатньо адекватно відбиває найважливіші макроекономічні аспекти процесу відтворення. Експорт та імпорт у явному вигляді не враховуються.

Стан економіки в моделі Солоу задається такими п'ятьма ендогенними змінними: X — валовий внутрішній продукт (ВВП); C — фонд невиробничого споживання; I — інвестиції; L — кількість зайнятих; K — фонди.

Крім того, у моделі використовуються екзогенні (задані поза системою) параметри як функції від часу: ν — річний темп приросту кількості зайнятих; μ — частка вибулих за рік основних виробничих фондів; ρ — норма накопичення (частка валових інвестицій у ВВП) (у їхніх позначеннях аргумент t опускається для стислості запису).

Екзогенні параметри задовольняють такі нерівності: $-1 < v < 1$, $0 < < \mu < 1$, $0 < \rho < 1$.

Якщо екзогенні показники сталі, причому норма накопичення ρ є керованим параметром, то в початковий момент часу керуючий орган системи може встановлювати будь-яке значення цього параметра з області допустимих значень: $0 < \rho < 1$.

Нехай річний випуск у кожний момент часу визначається лінійно-однорідною неокласичною виробничою функцією

$$X = F(K,\ L)\,. \tag{4.36}$$

Розглянемо, як змінюються ресурсні показники за нескінченно малий проміжок часу Δt. Згідно з означенням темпу приросту

$$\frac{\Delta L}{L} = v\Delta t\,,\ \text{або}\ \frac{\Delta dL}{dt} = vL,$$

тому

$$\ln L = vt + \ln A,\quad L = Ae^{vt}\,.$$

Використовуючи початкову умову $L(0) = L_0$, дістаємо

$$L = L_0 e^{vt}\,.$$

Знос та інвестиції з розрахунку на рік становлять відповідно μK і I, а за час Δt — відповідно $\mu K\Delta t$, $I\Delta t$, тому приріст фондів за цей час має вигляд:

$$\Delta K = -\mu K\Delta t + I\Delta t.$$

Звідси одержуємо диференціальне рівняння

$$\frac{\Delta \mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = -\mu K + I,\quad K(0) = K_0.$$

Інвестиції та фонд споживання виражаються через ВВП у такий спосіб: $I = \rho X$, $C = (1-\rho)X$.

Отже, дістаємо такий запис моделі Солоу в абсолютних показниках:

$$L = L_0 e^{vt}\,,\ \ \frac{\Delta dK}{dt} = -\mu K + I,\ \ K(0) = K_0, \tag{4.37}$$

$$X = F(K,\ L),\ \ I = \rho X,\ \ C = (1-\rho)X.$$

Схему функціонування економіки згідно з моделлю Солоу наведено на рис. 4.2. Бачимо, що входом у систему є кількість зайнятих *L*, виходом — фонд споживання *C*, тому ця система одно-зв'язна. У структурі системи є контур зворотного зв'язку, який утворюється з нелінійного статичного елемента $X = F(K,\ L)$, розподільної лінійної статичної ланки $X = I + C$ та інерційної ланки $T\frac{\Delta dK}{\mathrm{d}t} + K = \frac{I}{\mu},\ T = \frac{1}{\mu}.$ Оскільки в системі є нелінійний елемент $X = F(K,\ L)$, то система нелінійна.

Нехай

$$x = \frac{F(K,L)}{L} = F\left(\frac{K}{L},1\right) = f(k);\ i = \rho x;\ c = (1-\rho)x;$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{d}{dt}(kL) = \nu Lk + L\frac{dk}{dt}.$$

Тоді модель Солоу набирає такого вигляду:

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho f(k),\ \lambda = \mu + \nu,\ k(0) = k_0 = \frac{K_0}{L_0}; \tag{4.38}$$

$$x = f(k);\ i = \rho f(k);\ i = \rho f(k).$$

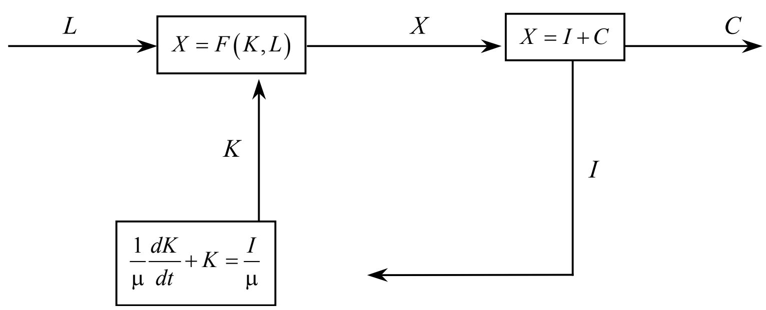


Рис. 4.2

Отже, кожний абсолютний або відносний показник змінюється в часі, тобто можна говорити про траєкторію системи в абсолютних або відносних показниках.

Траєкторія називається ***стаціонарною***, якщо показники не змінюються в часі:

$$k = k^0 = \text{const},\ x = x^0 = \text{const},\ I = I^0 = \text{const},\ c = c^0 = \text{const}.$$

Як випливає з формул (4.38), установлення фондозабезпечення на постійному рівні k^E приводить до виходу на стаціонарну траєкторію. На стаціонарній траєкторії $\frac{dk^E}{dt} = 0$, тому

$$-\lambda k^E + \rho f\left(k^E\right) = 0, \tag{4.39}$$

або

$$\lambda k^E = \rho f\left(k^E\right).$$

Оскільки функція $F(K,\ L)$ — неокласична, то $f(0)\ =\ 0$ $f' > 0,\ f'' < 0.$ Якщо задати умову $\rho f'(0) > \lambda$, то рівняння (4.39) матиме єдиний ненульовий розв'язок k^E (рис. 4.3).

Зауважимо, що на рис. 4.3 через $\hat{k}$ позначено фондозабезпечення, за якого швидкості зростання функцій $g_1(k) = \lambda k$ і $g_2(k) = \rho f(k)$ рівні між собою, тобто $\hat{k}$ — корінь рівняння

$$\rho f'(k) = \lambda. \tag{4.40}$$

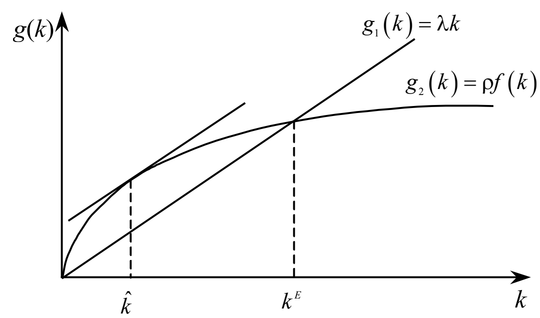


Рис 4.3

Розглянемо перехідний режим у моделі Солоу. Якщо $k^0 = k^E$, то економіка вже перебуває на стаціонарній траєкторії і може зійти з неї тільки в разі зміни зовнішніх умов (установлення іншого значення норми накопичення або переходу до нових технологій зі зміною функції $F(K, L)$).

При $k^0 \neq k^E$ в економіці відбуватиметься перехідний процес, який закінчиться встановленням стаціонарного режиму. У перехідному режимі фондозабезпечення задовольняє рівняння

$$\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}t} = -\lambda k + \rho f(k), \ k(0) = k_0, \tag{4.41}$$

причому, як випливає з рис. 4.3, $\frac{dk}{dt} > 0$ при $k < k^E$ і $\frac{dk}{dt} < 0$ при $k > k^E$.

Диференціюванням (4.41) знаходимо:

$$\frac{d^2k}{dt^2} = \frac{dk}{dt}\left[\rho f'(k) - \lambda\right], \tag{4.42}$$

а отже, при $k < \hat{k}$ маємо $\frac{d^2k}{dt^2} > 0$, при $\hat{k} < k < k^E$, навпаки, $\frac{d^2k}{dt^2} < 0$, а при $k > k^E$ завжди $\frac{d^2k}{dt^2} > 0$, оскільки $\hat{k} < k^E$.

Дослідимо докладніше перехідний процес у тому разі, коли виробнича функція є функцією Кобба—Дугласа:

$$F(K, L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}.$$

Тоді

$$f(k) = Ak^{\alpha}, \ \hat{k} = \left[\frac{\alpha\rho A}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \ k^E = \left[\frac{\rho A}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

а рівняння (4.41) набирає вигляду

$$\frac{dk}{dt} = -\lambda k + \rho A k^{\alpha}, \ k(0) = k_0. \tag{4.43}$$

Виконавши заміну $k = e^{-\lambda t}u, \ u = e^{\lambda t}k,$ дістанемо для u рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{du}{u^{\alpha}} = \rho A e^{(1-\alpha)\lambda t}dt, \ u(0) = k_0,$$

що має такий розв’язок:

$$u(t) = \left[\frac{\rho A}{\lambda}e^{(1-\alpha)\lambda t} + k_0^{1-\alpha} - \frac{\rho A}{\lambda}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

або з використанням значення стаціонарного фондозабезпечення

$$u(t) = \left[(k^E)^{1-\alpha} e^{(1-\alpha)\lambda t} + k_0^{1-\alpha} - (k^E)^{1-\alpha} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Повертаючись до фондозабезпечення, дістаємо:

$$k(t) = \left[(k^E)^{1-\alpha} + (k_0^{1-\alpha} - (k^E)^{1-\alpha}) e^{-(1-\alpha)\lambda t} \right]^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

звідки

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = k^E.$$

Згідно з (4.42) дістаємо три типи перехідного процесу щодо фондозабезпечення:

1) при $k_0 < \hat{k}$ — спочатку відбувається прискорене зростання фондозабезпечення, яке після досягнення значення k змінюється сповільненим зростанням;

2) при $\hat{k} < k_0 < k^E$ — сповільнене зростання фондозабезпечення;

3) при $k_0 > k^E$ — сповільнене спадання фондозабезпечення.

Зазначені три типи збіжності фондозабезпечення до стаціонарного значення k^E (відповідно криві 1—3) ілюструє рис. 4.4.

Так само змінюється і решта відносних показників x, i, c, оскільки вони пропорційні до k^α.

Отже, при $\hat{k} < k_0 < k^E$ відбувається доволі короткий перехідний процес. Теоретично перехідний процес закінчується через нескінченний час, але практично через порівняно невеликий проміжок часу поточне і стаціонарне значення показника мало відрізнятимуться одне від одного.

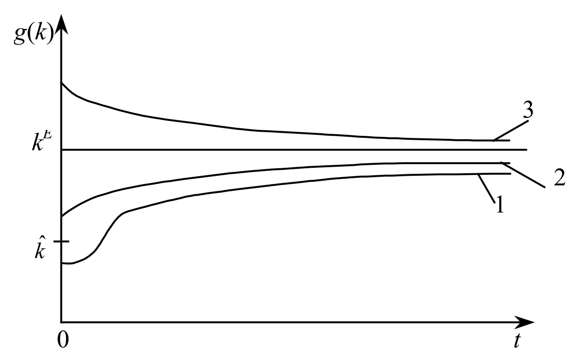


Рис. 4.4

У моделі Солоу норма споживання є функцією накопичення. Належним вибором норми накопичення можна максимізувати середнє споживання в стаціонарному режимі, а отже, через порівняно нетривалий час після початку перехідного процесу.

Справді,

$$c^E(\rho) = (1-\rho)A(k^E)^\alpha = (1-\rho)A\left[\frac{\rho A}{\lambda}\right]^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = B\left[g(\rho)\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \tag{4.44}$$

де

$$B = \left[\frac{A}{\lambda^\alpha}\right]^{\frac{1}{1-\alpha}}, \quad g(\rho) = \rho^\alpha (1-\rho)^{1-\alpha}.$$

Як бачимо, середнє споживання цілком визначається функцією $g(\rho)$. Маємо

$$\frac{dg}{d\rho} = \left(\frac{\rho}{1-\rho}\right)^\alpha \frac{\alpha-\rho}{\rho},$$

тому $\dfrac{dc^E}{d\rho} > 0$ при $\rho < \alpha$, $\dfrac{dc^E}{d\rho} < 0$ при $\rho > \alpha$.

Отже, **найбільше середнє споживання досягається при** $\rho^* = \alpha$, **тобто норма накопичення має дорівнювати еластичності випуску за фондами**. На практиці норма накопичення завжди менша за своє оптимальне значення $(\rho < \alpha)$, тобто спостерігається недонакопичення (рис. 4.5).

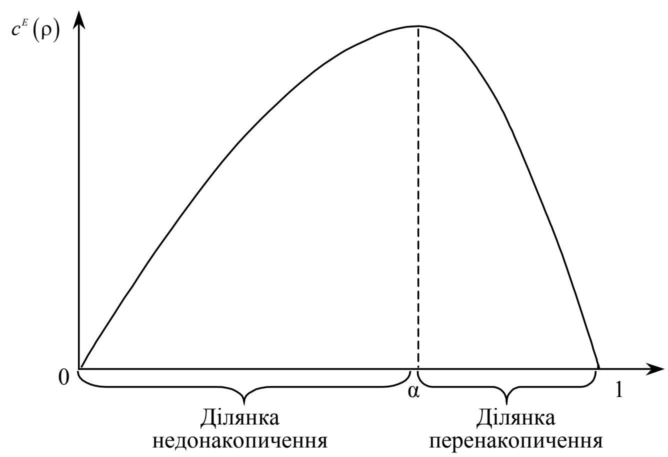


Рис. 4.5

РОЗДІЛ 5

ЛІНІЙНІ ДИНАМІЧНІ МОДЕЛІ МАКРОЕКОНОМІКИ З НЕПЕРЕРВНИМ ЧАСОМ

5.1. Лінійні динамічні елементи

Розглянемо застосування методів теорії динамічних систем, лінійних диференціальних рівнянь і перетворень Лапласа до дослідження відомих макроекономічних динамічних моделей.

Оскільки динамічна система має у своєму складі принаймні один динамічний елемент, то спочатку вивчимо поводження динамічного елемента.

Нелінійний динамічний елемент n-го порядку задається таким рівнянням:

$$F\left(y^{(n)},\ ...,\ y',\ y,\ x^{(m)},\ ...,\ x'\ ,x\right)=0,$$

де $x(t)$ — вхідна дія на елемент (вхід);

$y(t)$ — реакція елемента на вхідну дію (вихід);

$$y^{(n)}=\frac{d^n y}{dt^n},\ x^{(m)}=\frac{d^m x}{dt^m}.$$

Зокрема, лінійний динамічний елемент n-го порядку задається таким лінійним диференціальним рівнянням:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = \sum_{i=0}^{n} b_i x^{(i)}. \tag{5.1}$$

Найчастіше на практиці трапляються елементи нульового порядку (мультиплікатор, акселератор), першого порядку (інерційна ланка) і другого порядку. Ланка другого порядку може бути коливальною ланкою або двома послідовно сполученими інерційними ланками.

5.2. Мультиплікатор

Мультиплікатор — лінійна статична ланка, що задається рівнянням

$$a_0 y = b_0 x, \text{ або } y = \alpha x, \ \alpha = \frac{b_0}{a_0},$$

де α — ***коефіцієнт посилення***.

Наприклад, валові інвестиції I (вхід) пов'язані з ВВП Y (вихід):

$$Y = \frac{1}{\rho} I,$$

де ρ — частка валових інвестицій у ВВП;

$\frac{1}{\rho}\left(\frac{1}{\rho} > 1\right)$ — коефіцієнт посилення (мультиплікатор), який показує наскільки має бути збільшено ВВП для збільшення валових інвестицій на одиницю. Таким чином, мультиплікатор — це підсилювальна лінійна статична ланка, тобто сам коефіцієнт посилення.

5.3. Акселератор

Акселератор — диференціальна ланка нульового порядку, вихід якої пропорційний до швидкості входу.

Наприклад, інвестиції виражаються через швидкість зміни ВВП так:

$$I = r\frac{dY}{dt},$$

де r — коефіцієнт акселерації, тобто приріст потреби в інвестиціях у разі збільшення ВВП на одиницю.

При дискретності часу Δt, зокрема при $\Delta t = 1$ (один рік), те саме рівняння набирає такого вигляду:

$$I_t \Delta t = r\Delta t(Y_t - Y_{t-\Delta t}), \ \ I_t = r(Y_t - Y_{t-1}).$$

5.4 Інерційна ланка

Інерційна ланка задається диференціальним рівнянням першого порядку:

$$a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t), \tag{5.2}$$

або у стандартному вигляді:

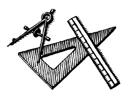
$$T\frac{dy}{dt} + y = \tilde{x}(t), \tag{5.3}$$

де

$$T = \frac{a_1}{a_0}, \; \tilde{x}(t) = \frac{x(t)}{a_0}.$$

Інерційна ланка описує процесс відпрацювання заданої вхідної дії *x(t) (*значок «тильда» опустимо), при цьому швидкість відпрацювання пропорційна до різниці між входом і виходом:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{T}\left[x(t) - y(t)\right].$$



Приклад. Розглянемо модель освоєння введених виробничих потужностей. Позначимо через $x(x = \text{const})$ введену виробничу потужність, через *y(t)* — фактичне виробництво на цій потужності в момент *t* (фактичне використання потужності, *y(t)*< *x*). Припустимо, що приріст виробництва пропорційний до недовикористаної потужності:

$$\vartriangle y = \gamma(x - y)\vartriangle t.$$

Тоді приходимо до рівняння інерційної ланки:

$$T\frac{dy}{dt} + y = x, \; T = \frac{1}{\gamma}, \; y(0) = y_0, \; y_0 < x. \tag{5.4}$$

Відповідно до теорії лінійних диференціальних рівнянь загальний розв’язок неоднорідного рівняння є сумою загального розв’язку однорідного рівняння і частинного розв’язку неоднорідного.

Загальний розв’язок однорідного рівняння

$$T\frac{dy}{dt} + y = 0 \tag{5.5}$$

має вигляд $y = Ce^{\lambda t}$. Підставивши його в (5.5), дістанемо $(T\lambda + 1)y = 0$.

Ураховуючи, що $y \neq 0$, записуємо характеристичне рівняння (відносно λ):

$$T\lambda + 1 = 0, \text{ або } \lambda = -\frac{1}{T}.$$

Оскільки частинним розв’язком неоднорідного рівняння (5.4) є $y = x,$ то загальний розв’язок цього рівняння $y = x + Ce^{-\frac{t}{T}}$.

Константу C знаходимо з початкової умови $y(0) = y_0$:

$$x + C = y_0, \;\; C = y_0 - x.$$

Отже, розв’язок рівняння (5.4) такий:

$$y(t) = x + (y_0 - x)e^{-\frac{t}{T}}.$$

Перехідний процес освоєння виробничих потужностей, що описується цим розв’язком, закінчується виходом на заданий розмір потужності: $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = x.$

Загальну картину перехідного процесу ілюструє рис. 5.1.

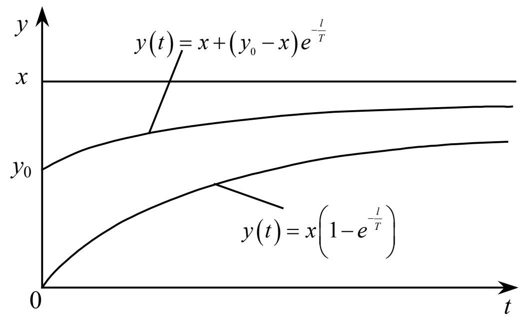


Рис. 5.1

Зокрема, при $y_0 = 0$ розв’язок має вигляд:

$$y(t) = x(1 - e^{-\frac{t}{T}}),$$

тому $y(T) = x(1 - e^{-1})$, тобто сталу часу T можна визначити як довжину проміжку часу, протягом якого перехідний процес проходить основну частину ($\approx 2/3$) свого шляху від 0 до x.

Приклад. Розглянемо модель встановлення рівноважної ціни. Нехай у моделі розглядається ринок одного товару, час вважається неперервним, попит d і пропозиція s лінійно залежать від ціни:

$$d = a - bp, \;\; s = \alpha + \beta p, \;\; a > 0, \, b > 0, \, \alpha > 0, \, \beta > 0, \, a > \alpha.$$

Припустимо, що ціна змінюється пропорційно до перевищення попиту над пропозицією:

$$\Delta p = \gamma(d - s)\Delta t, \quad \gamma > 0,$$

тобто в разі перевищення попиту над пропозицією ціна зростає, інакше — падає.

Звідси дістаємо диференціальне рівняння для ціни:

$$\frac{1}{\gamma}\frac{dp}{dt} + (b+\beta)p = a - \alpha, \quad p(0) = p_0,$$

тобто процес описується рівнянням інерційної ланки з $T = \dfrac{1}{\gamma(b+\beta)}$ і $p_E = \dfrac{a-\alpha}{b+\beta}$, де p_E — рівноважна ціна (точка перетину прямих попиту і пропозиції).

Отже, ціна як вихід інерційної ланки поводиться так, як це показано на рис. 5.1.

5.5. Економіка у формі динамічної моделі Кейнса як інерційна ланка

У моделі Кейнса передбачається, що ВВП $y(t+1)$ наступного року дорівнює сукупному попиту попереднього (поточного) року, а сукупний попит, що складається з попиту на споживчі (C) та інвестиційні (I) товари, залежить тільки від ВВП поточного року:

$$y(t+1) = C\left[y(t)\right] + I(t).$$

У разі лінійної залежності попиту на споживчі товари від ВВП і постійності попиту на інвестиційні товари приходимо до співвідношення

$$y(t+1) = \underline{C} - cy(t) + I, \tag{5.6}$$

де $\underline{C}$ — мінімальний обсяг фонду споживання; $c\,(0 < c < 1)$ — схильність до споживання.

Співвідношення, що справджується при дискретності часу в один рік, при дискретності Δt має вигляд:

$$y(t+\Delta t) - y(t) = \left[\underline{C} - (1-c)y(t) + I\right]\Delta t,$$

де $(1 - c)$ — схильність до накопичення.

При $\Delta t \to 0$ приходимо до рівняння інерційної ланки:

$$\frac{1}{1-c}\frac{dy}{dt} + y = \frac{\underline{C} + I}{1-c}.$$

Рівноважний (стаціонарний) розв'язок цього рівняння

$$y_E = \frac{\underline{C} + I}{1-c}.$$

Якщо в початковий момент попит на інвестиційні товари змінився від значення I_0 до I $\left(I > I_0\right)$, то в економіці відбуватиметься перехідний процес від ВВП $y_0 = \dfrac{\underline{C} + I_0}{1-c}$ до y_E (див. рис. 5.1), при цьому

$$y(t) = y_E + (y_0 - y_E)e^{-t(1-c)}.$$

5.6. Передавальна функція

Поняття передавальної функції динамічного елемента або лінійної динамічної системи пов'язане з операторним методом розв'язування диференціального рівняння. Сутність методу полягає в зведенні розв'язування диференціального рівняння до розв'язування алгебраїчного рівняння. В основу методу покладено перехід від первинних функцій часу $x(t)$, $y(t)$ — ***оригіналів (прообразів)*** до їх образів *X(s)*, *Y(s)* — ***зображень*** за допомогою перетворенням Лапласа у вигляді невласного інтеграла Лапласа:

$$F(s) = Lf(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt, \tag{5.7}$$

де *f(t)* — оригінал; $F(s)$ — зображення.

Це пряме перетворення Лапласа від оригіналу до зображення. Обернене перетворення Лапласа від зображення до оригіналу визначається за формулою:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\delta - i\infty}^{\delta + \infty} e^{st} F(s)ds, \ i = \sqrt{-1}. \tag{5.8}$$

Зображення похідної оригіналу $f'(t)$ знаходимо інтегруванням частинами інтеграла (5.7):

$$Lf'(s) = \int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt = f(t)e^{-st}\Big|_0^\infty + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt.$$

Звідси

$$Lf'(s) = -f(0) + sF(s). \tag{5.9}$$

Інтегруванням частинами послідовно $f'(t), f''(t), ..., f^{(n)}(t)$ знаходимо зображення $f^{(n)}(t)$:

$$Lf^{(n)}(s) = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

Зокрема, при нульових початкових умовах $f^{(i)}(0) = 0$, $i = 0$, ..., $n-1$, дістаємо:

$$Lf^{(n)}(s) = s^n F(s).$$

Перетворення Лапласа деяких функцій наведено в табл. 5.1

Таблиця 5.1

ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА ТИПОВИХ ФУНКЦІЙ

$f(t),\ t>0$	$F(s)$	$f(t),\ t>0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1	$1-e^{-at}$	$\frac{a}{s(s+a)}$
$\chi(t)$	$\frac{1}{s}$	$\sin\omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
t	$\frac{1}{s^2}$	$\cos\omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\frac{t^n}{n!}$	$\frac{1}{s^{n+1}}$	$e^{-at}\sin\omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$e^{-at}\cos\omega t$	$\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$		

Застосуємо перетворення Лапласа до обох частин рівняння динамічного елемента (5.1), скориставшись формулою (5.9) для образу похідних:

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j s^j\right) Y(s) - N(s) = \left(\sum_{i=0}^{m} b_i s^i\right) X(s) - M(s),$$

де

$$N(s) = \sum_{j=0}^{n} a_j \sum_{i=0}^{n-1} y^{(i)}(0) s^{n-1-i}, \;\; M(s) = \sum_{j=0}^{m} b_i \sum_{l=0}^{m-1} x^{(i)}(0) s^{m-1-j}.$$

Звідси дістаємо:

$$Y(s) = G(s) + R(s), \tag{5.10}$$

де

$$G(s) = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m} b_i s^i}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j s^j}, \quad R(s) = \frac{N(s) - M(s)}{\sum\limits_{j=1}^{n} a_j s^j},$$

$R(s) = 0$ при початкових умовах: $y^{(i)}(0) = x^{(i)}\left(0\right) = 0;$ $j = 0, \ldots, n-1;$ $i = 0, \ldots, m-1.$

Означення. ***Передавальною функцією*** *G(s)* динамічної системи (підсистеми або елемента) називається відношення образу виходу до образу входу за нульових початкових умов.

Із (5.10) випливає, що передавальна функція лінійного динамічного елемента є дробово-раціональною функцією параметра *s*.

Наприклад, передавальна функція інерційної ланки (5.3) має вигляд:

$$G(s) = \frac{1}{1 + Ts}.$$

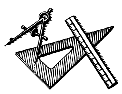
У передавальній функції динамічної системи (підсистеми, ланки) містяться всі відомості про її поводження за нульових початкових умов. Справді, за входом $x(t)$ знаходимо його образ $X(s)$, далі множимо цей образ на передавальну функцію, дістаючи образ виходу $Y(s) = G(s)\ X(s)$, і, нарешті, користуючись або табл. 5.1, або безпосередньо формулою (5.8), визначаємо вихід $y(t)$. Якщо початкові умови ненульові, то до розв’язку $y(t)$ ще додасться прообраз образа $R(s)$.

5.7. Коливальна ланка

Коливальна ланка задається лінійним диференціальним рівнянням другого порядку

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = \sum_{i=0}^{m} b_i x^{(i)}(t) \tag{5.11}$$

із від’ємним дискримінантом $\left(a_1^2 - 4a_2 a_0 < 0\right)$, утвореним із коефіцієнтів у лівій частині рівняння (5.11). Коливальна ланка описує циклічні процеси в економіці.



Приклад. Довести, що однономенклатурна система управління запасами є коливальною ланкою. Нехай $x(t)$ і $\tilde{x}(t)$ — фактичні інтенсивності витрат і надходження товару в систему управління запасами в момент t. Оскільки інтенсивність витрат наперед невідома, то завжди утворюватиметься запас *y(t)* (якщо $y(t) > 0$, то це справді запас, якщо $y(t) < 0$, то це дефіцит). Зміна запасу пов’язана з інтенсивностями витрат і постачань таким співвідношенням:

$$\Delta y = (\tilde{x} - x)\Delta t, \text{ або } \frac{dy}{dt} = \tilde{x} - x. \tag{5.12}$$

Керувати інтенсивністю постачань можна тільки за відомим значенням запасу $y(t)$ (адже інтенсивність витрати невідома). Можливі два варіанти управління.

1. Зміна постачань пропорційно (з протилежним знаком) до обсягу запасу (у разі додатного запасу інтенсивність постачань зменшується, а в разі від’ємного — збільшується)

$$\Delta\tilde{x} = -a_0 y \Delta t,\ a_0 > 0.$$

2. Зміна інтенсивності постачань пропорційна (з протилежним знаком) як запасу, так і до швидкості його зміни

$$\Delta\tilde{x} = -\left(a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt}\right)\Delta t,\ a_0 > 0,\ a_1 > 0,\ a_0 > \frac{a_1^2}{4}.$$

У разі додатного запасу інтенсивність постачань зменшується, а в разі від’ємного — збільшується; за додатної швидкості зростання запасу інтенсивність постачань зменшується, а за від’ємної — збільшується.

Перший випадок. Беремо похідну від обох частин (5.12) і, виконуючи підставлення $\frac{d\tilde{x}}{dt} = -a_0 y,$ дістаємо диференціальне рівняння другого порядку для запасу:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_0 y = -\frac{dx}{dt}\,. \qquad (5.13)$$

Це рівняння коливальної ланки при $a_2 = 1,\ a_1 = 0$ та з дискримінантом $D = -4a_0 < 0$. Характеристичне рівняння має вигляд (підставляємо в однорідне рівняння $t = Ce^{\lambda t}$):

$$\lambda^2 + a_0 = 0.$$

Його корені — уявні спряжені:

$$\lambda_1 = i\sqrt{a_0},\ \lambda_2 = -i\sqrt{a_0},\ i = \sqrt{-1}.$$

Нехай на вхід системи, що перебувала в початковий момент у стані рівноваги $\left(x = 0,\ y = 0,\ y'(0) = 0\right)$, почали надходити заявки на товар з інтенсивністю $x(t) = x = \text{const}.$ Таким чином, інтенсивність витрат можна подати у вигляді графіка, зображеного на рис. 5.2, або алгебраїчно:

$$x(t) = x\chi(t),\ \text{де}\ \chi(t) = \begin{cases} 1,\ \text{якщо}\ t > 0; \\ 0,\ \text{якщо}\ t < 0, \end{cases}$$

де $\chi(t)$ — функція Хевісайда.

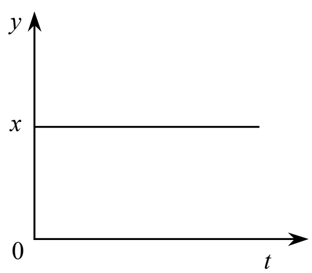


Рис. 5.2

Похідна від функції Хевісайда дорівнює узагальненій функції Дірака $\delta(t)$, яка набуває нескінченно великого значення в точці $t = 0$ і дорівнює нулю, якщо $t \neq 0$; при цьому $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\mathrm{d}t = 1$. Оскільки $\chi'(t) = \delta(t),$ то $\frac{dx}{dt} = x\delta(t)$ і рівняння (5.13) набирає вигляду:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_0 y = -x\delta(t),\ \ y(0) = 0,\ y'(0) = 0. \qquad (5.14)$$

Застосуємо перетворення Лапласа до обох частин рівняння:

$$(s^2 + a_0)Y(s) = -x, \tag{5.15}$$

де $Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} y(t) dt$ — перетворення Лапласа виходу $y(t)$;

$Y(s) = \int_0^\infty e^{-st} (-x\delta(t)) dt = 1$ — перетворення Лапласа від правої частини (5.15), оскільки $\int_0^\infty e^{-st} \delta(t) dt = 1.$

Із (5.15) знаходимо перетворення Лапласа виходу *y(t):*

$$Y(s) = -\frac{x}{s^2 + \omega^2}, \; \omega = \sqrt{a_0}.$$

Згідно з табл. 5.1 вихід

$$y(t) = -\frac{x}{\omega} \sin \omega t.$$

Отже, у першому випадку при постійній інтенсивності витрат x запас $y(t)$ зазнаватиме незагасаючих гармонічних коливань з амплітудою $\frac{x}{\omega}$ (рис. 5.3).

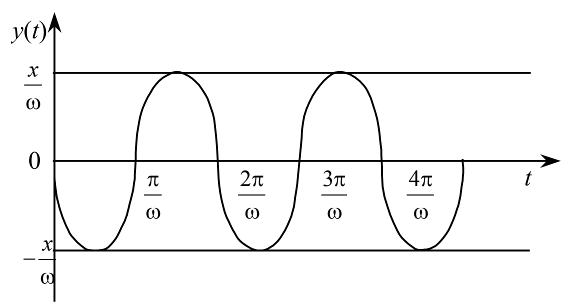


Рис. 5.3

За таких незагасаючих коливань проміжки, де існує дійсний запас, тобто $y(t) > 0$, чергуються з проміжками дефіциту $y(t) < 0$, а це негативно позначається на фінансовому стані організації, яка відповідає за систему управління запасами. Для того щоб система управління запасами знову ввійшла у стан рівноваги, необхідно враховувати не тільки обсяг запасу $y(t)$, а й швидкість зміни $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$.

Другий випадок. Знову, як і в першому випадку, беремо похідну від обох частин (5.12) і, виконуючи підставлення $\frac{d\tilde{x}}{dt} = -\left(a_0 y + a_1 \frac{dy}{dt}\right)$, дістаємо диференціальне рівняння другого порядку для запасу:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = -\frac{dx}{dt}. \tag{5.16}$$

Рівняння (5.16) відрізняється від (5.13) наявністю в лівій частині члена $a_1 \frac{dy}{dt}$, пропорційного до швидкості зміни запасу.

Характеристичне рівняння для (5.16) має вигляд:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0.$$

Його корені —комплексно-спряжені з від'ємною дійсною частиною: $\lambda_1 = -\alpha + i\omega, \lambda_2 = -\alpha - i\omega$, де $\alpha = \frac{a_1}{2}$, $\omega = \sqrt{a_0 - \frac{a_1^2}{4}}$.

Якщо з моменту часу $t = 0$ на вхід системи почали надходити заявки на товар зі сталою інтенсивністю $x(t) = x = \text{const}$, то рівняння (5.16), яке описує поводження системи, набирає вигляду:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = -x\delta(t).$$

Розв'язуючи це рівняння операторним методом, дістаємо:

$$(s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = -x$$

звідки

$$Y(s) = -\frac{x}{s^2 + a_1 s + a_0}.$$

Подавши вираз $s^2 + a_1 s + a_0$ у вигляді $(s+\alpha)^2 + \omega^2$, де $\alpha = \frac{a_1}{2}$, $\omega = \sqrt{a_0 - \frac{a_1}{4}}$, і скориставшись табл. 5.1, знайдемо:

$$y(t) = -\frac{x}{\omega} \mathrm{e}^{-\alpha t} \sin \omega t.$$

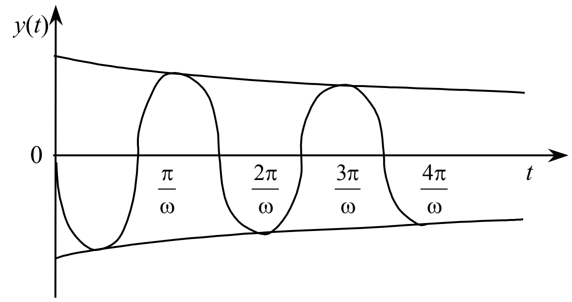


Рис. 5.4

Таким чином, поведінка запасу описується згасаючими гармонійними коливаннями з амплітудою $e^{-\alpha t}\dfrac{x}{\omega}$, графік яких приведений на рис. 5.4.

5.8. Економіка у формі моделі Самуельсона—Хікса як лінійна динамічна ланка другого порядку

Модель Самуельсона—Хікса відрізняється від динамічної моделі Кейнса введенням у співвідношення (5.6) акселератора (далі під *y(t)* розумітимемо ВВП, оскільки велика буква *Y* використовується для позначення образу виходу):

$$I(t) = r\left[y(t) - y(t-1)\right] + I,$$

де $r(0 < r < 1)$ — коефіцієнт акселерації, що показує, наскільки зростуть інвестиції, якщо ВВП зросте на одиницю.

З огляду на сказане лінеаризована модель Самуельсона—Хікса набирає вигляду:

$$y(t+1) = \underline{C} + cy(t) + r\left[y(t) - y(t-1)\right] + I,$$

або

$$y(t+1) - 2y(t) + y(t-1) = \underline{C} + I - (1-c)y(t) - (1-r)\left[y(t) - y(t-1)\right].$$

Останнє співвідношення при дискретності Δt має вигляд:

$$y(t+\Delta t) - 2y(t) + y(t-\Delta t) =$$
$$= \left[\underline{C} + I - (1-c)y(t)\right](\Delta t)^2 - (1-r)\left[y(t) - y(t-\Delta t)\right]\Delta t.$$

Переходячи до неперервного часу, тобто при $\Delta t \to 0,$ остаточно дістаємо рівняння лінійної динамічної ланки другого порядку:

$$\frac{1}{1-c}\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c}\frac{dy}{dt} + y = \frac{I + \underline{C}}{1-c}.$$

Це рівняння, як і в моделі Кейнса, має частинний стаціонарний розв'язок:

$$y_E = \frac{I + \underline{C}}{1-c}.$$

Загальний розв'язок рівняння дорівнює сумі цього частинного розв'язку y_E та загального розв'язку однорідного рівняння

$$\frac{1}{1-c}\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1-r}{1-c}\frac{dy}{dt} + y = 0.$$

Його характеристичне рівняння має вигляд:

$$\frac{1}{1-c}\lambda^2 + \frac{1-r}{1-c}\lambda + 1 = 0.$$

5.9. Характеристики динамічної ланки

Основною характеристикою ланки є передавальна функція, за допомогою якої можна знайти вихід. ***Імпульсною характеристикою*** (функцією) називається вихідна реакція ланки на імпульсну вхідну дію у формі функції Дірака. Оскільки образ функції Дірака

$$X(s) = \int_0^\infty e^{-st}\delta(t)\mathrm{d}t = 1,$$

то образ імпульсної характеристики

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s).$$

Тому сама імпульсна характеристика

$$g(t) = L^{-1}\left[G(s)\right],$$

де L^{-1} — обернене перетворення Лапласа.

Перехідною характеристикою (функцією) називається реакція ланки на східчасту вхідну дію у формі функції Хевісайда $\chi(t)$.

Оскільки образ функції Хевісайда

$$X(s)=\int_0^\infty e^{-st}\chi(t)dt=\int_0^\infty e^{-st}dt=\frac{1}{s},$$

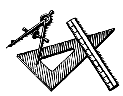
то образ перехідної функції

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{G(s)}{s}.$$

Тому сама перехідна функція

$$\gamma(t)=L^{-1}\left[\frac{G(s)}{s}\right].$$

Частотна характеристика задає встановлену реакцію ланки у формі вимушених автоколивань на синусоїдну вхідну дію $\sin\omega t$ і дорівнює $G(i\omega)$. Амплітуда вихідних коливань дорівнює $|G(i\omega)|$, а зсув за фазою $\varphi=\arg[G(i\omega)]$.



Приклад. Характеристики інерційної ланки. Нагадаємо, інерційна ланка задається рівнянням

$$T\frac{dy}{dt}+y=x(t).$$

Його передавальна функція дорівнює

$$G(s)=\frac{1}{1+Ts}.$$

Знайдемо імпульсну характеристику ланки, тобто реакцію на імпульсну вхідну дію у формі функції Дірака $\delta(t)$. Оскільки образ характеристики дорівнює передавальній функції $\frac{1}{1+Ts}$, то згідно з табл. 5.1 знаходимо прообраз, тобто імпульсну функцію інерційної ланки:

$$g(t)=\frac{1}{T}e^{-\frac{t}{T}}.$$

Отже, якщо на вхід інерційної ланки подано імпульсну дію, то після загасаючого експоненціального перехідного процесу ланка знову повернеться до стану спокою. Графік перехідного процесу (імпульсної функції) зображено на рис. 5.5.

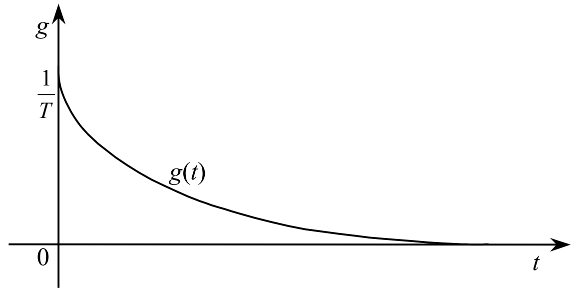


Рис. 5.5

Перехідна функція як реакція на одиничну східчасту дію $\chi(t)$ подається у вигляді

$$\frac{G(s)}{s} = \frac{1}{s(1+Ts)} = \frac{1}{s} - \frac{T}{1+Ts},$$

тому сама перехідна функція як прообраз згідно з табл. 5.1 така:

$$\gamma(t) = \chi(t) - e^{-\frac{t}{T}} = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \ t > 0.$$

Отже, після завершення експоненціального перехідного процесу інерційна ланка перейде в новий стан рівноваги:

$$\lim_{t \to 0} \gamma(t) = 1.$$

Графік перехідної функції інерційної ланки зображено на рис. 5.6.

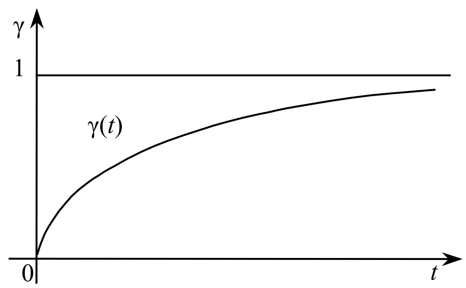


Рис. 5.6

Тепер знайдемо реакцію інерційної ланки на синусоїдну вхідну дію $\sin\omega t$, скориставшись за табл. 5.1:

$$X(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\sin\omega t dt=\frac{\omega}{s^2+\omega^2},$$

тому образ виходу

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{\omega}{(1+Ts)(\omega^2+s^2)}$$

Останній вираз можна подати у вигляді

$$Y(s)\frac{\omega}{1+\omega^2T^2}\left(\frac{T^2}{Ts+1}+\frac{1}{\omega^2+s^2}+\frac{Ts}{\omega^2+s^2}\right)$$

і за табл. 5.l знайти його прообраз (реакцію системи на синусоїдну дію):

$$y(t)=\frac{1}{1+\omega^2T^2}\left(T\omega e^{-\frac{t}{T}}+\sin\omega t-\omega T\cos\omega t\right).$$

Перший доданок — швидко загасаючий експоненціальний перехідний процес, другий і третій доданки — вимушені гармонічні коливання.

Отже, у результаті зазначені дії на виході після закінчення перехідного процесу встановляться вимушені автоколивання:

$$y_E(t)=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\left(\frac{\sin\omega t}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}-\frac{\omega T}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}\cos\omega t\right)=\frac{\sin(\omega t-\varphi)}{\sqrt{1+\omega^2T^2}},$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}},\ \sin\varphi=\frac{\omega T}{\sqrt{1+\omega^2T^2}},$$

амплітуда яких дорівнює $\frac{1}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$, тобто менша за амплітуду вхідних коливань у $\sqrt{1+\omega^2T^2}$ раз, а зсув за фазою дорівнює $\varphi=-\mathrm{arctg}(\omega T)$.

Вхідну синусоїдну дію та вихідні сталі гармонічні коливання з амплітудою $a = \dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$ і зсувом за фазою $\varphi = -\mathrm{arctg}\left(\omega T\right)$ унаочнює рис. 5.7.

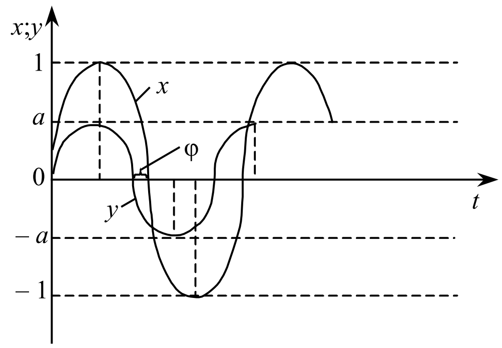


Рис. 5.7

Усі відомості про амплітуду та зсув за фазою вимушених автоколивань відносно до синусоїдного входу містяться в частотній характеристиці. Справді,

$$G\left(i\omega\right) = \frac{1}{1+i\omega T} = \frac{1}{1+\omega^2 T^2} - \frac{i\omega T}{1+\omega^2 T^2},$$

тому радіус частотної характеристики (корінь квадратний із суми квадратів дійсної і уявної частин) дорівнює $\dfrac{1}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$, тобто амплітуді виходу, а аргумент — зсуву за фазою φ.

5.10. Аналіз і синтез динамічних систем, перехідні процеси в них

Аналіз динамічної системи полягає в розкладанні системи на елементи та встановленні зв'язків між ними. Існують три основні види зв'язків.

1. ***Послідовне з'єднання*** (рис. 5.8), коли вхід з'єднання є входом першого елемента, вихід першого елемента є входом другого елемента, вихід другого елемента — є виходом з'єднання.

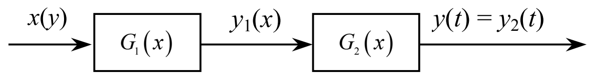


Рис. 5.8

2. ***Паралельне з'єднання*** з підсумовувальною ланкою (рис. 5.9), коли вхід з'єднання є одночасно і входом кожного з елементів, а сума (різниця) виходів елементів — виходом з'єднання.

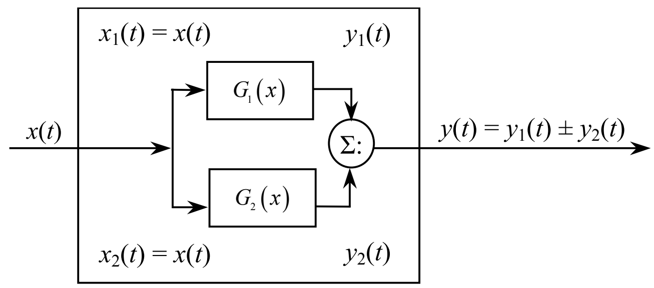


Рис. 5.9

3. ***Замкнений контур зі зворотним зв'язком*** (рис. 5.10).

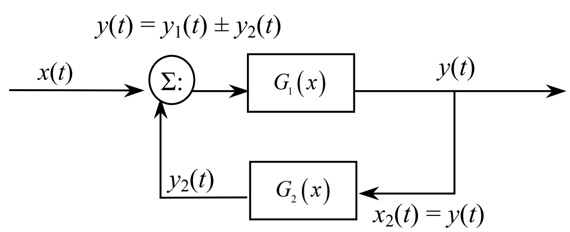


Рис. 5.10

Синтез системи полягає в побудові системи з бажаними властивостями або близькими до них (наприклад, найбільш важливою є властивість стійкості системи). Перший крок у цьому напрямі: визначити характеристики системи на підставі характеристик її елементів. Далі можна розглядати основну задачу: змінюючи склад системи, взаємозв'язки між елементами та їхні характеристики, — вибрати з усіх можливих варіантів таку систему, характеристики якої найближчі до бажаних.

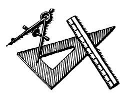
Оскільки основними з'єднаннями елементів у системі є послідовне, паралельне та зі зворотним зв'язком, то передусім необхідно вміти знаходити характеристики цих з’єднань. Але всі характеристики елементів і систем визначаються за передавальною функцією, тому завдання зводиться до знаходження передавальної функції з’єднання за передавальними функціями його ланок.

5.11. Передавальна функція послідовного і паралельного з’єднання та замкненого контура зі зворотним зв’язком

Передавальна функція послідовного з’єднання (див. рис. 5.8). згідно з означенням являє собою відношення образів виходу і входу, тому

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Y_2(s)}{X_2(s)}=\frac{G_2(s)Y_1(s)}{X_1(s)}=G_1(s)G_2(s). \qquad (5.17)$$

Отже, **передавальна функція послідовно з’єднаних елементів дорівнює добутку їхніх передавальних функцій.**



Приклад. Розглянемо модель введення і освоєння виробничих потужностей. Процес освоєння введених виробничих потужностей можна описувати у формі інерційної ланки. Припустимо, що процес введення потужностей можна також описати за допомогою інерційної ланки, тоді об’єднаний процес введення і освоєння потужностей відповідає двом послідовно з’єднаним інерційним ланкам зі сталими часу T_1 і T_2, де T_1, T_2 — тривалість відповідно введення і освоєння приблизно двох третин потужності.

Передавальна функція цього послідовного з’єднання має вигляд:

$$G(s)=\frac{1}{(T_1s+1)(T_2s+1)}.$$

Звідси дістаємо:

$$Y(s)=G(s)X(s)=\frac{X(s)}{(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{x}{s(T_1s+1)(T_2s+1)},$$

оскільки

$$X(s)=\int_0^\infty e^{-st}x\,dt=\frac{x}{s},$$

де x — повний обсяг потужності, що вводиться.

Подамо дробово-раціональний вираз образу виходу у вигляді елементарних дробів:

$$\frac{Y(s)}{x}=\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{\alpha}{s}+\frac{\beta}{(T_1s+1)}+\frac{\gamma}{(T_2s+1)}.$$

Визначаємо коефіцієнти:

$$\frac{1}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}=\frac{\alpha(T_1s+1)(T_2s+1)+\beta s(T_2s+1)+\gamma s(T_1s+1)}{s(T_1s+1)(T_2s+1)},$$

звідки (коефіцієнти при s і s^2 (прирівнюємо до нуля, а коефіцієнт при s^0 — до одиниці)

$$\alpha=1;\ \beta=-(T_1+T_2)-\frac{T_2{}^2}{T_1-T_2};\ \gamma=\frac{T_2{}^2}{T_1-T_2}.$$

Тепер за табл. 5.1 знаходимо прообраз кожного з простих дробів:

Образ	Прообраз
$\frac{1}{s}$	1
$\frac{\beta}{T_1s+1}$	$\frac{\beta}{T_1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_1}}$
$\frac{\gamma}{T_2s+1}$	$\frac{\gamma}{T_2}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T_2}}$

Отже, для введеної і освоєної потужностей дістаємо вираз

$$y(t)=x\left(1+\frac{\beta}{T_1}e^{-\frac{t}{T_1}}+\frac{\gamma}{T_2}e^{-\frac{t}{T_2}}\right),$$

який достатньо швидко збігається до повної потужності x.

Для паралельного з’єднання (див. рис. 5.9) маємо:

$$G(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{Y_1(s)\pm Y_2(s)}{X(s)}=G_1(s)\pm G_2(s). \tag{5.18}$$

Таким чином, **передавальна функція паралельно з'єднаних елементів із сумарною ланкою дорівнює сумі (різниці) передавальних функцій елементів.**

Для замкненого контура зі зворотним зв'язком (рис. 5.10) дістаємо:

$$Y(s) = Y_1(s) = G_1(s)\big(X(s) \pm Y_2(s)\big) = G_1(s)\big(X(s) \pm G_2(s)Y(s)\big),$$

тому

$$Y(s) = \frac{G_1(s)X(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)},$$

звідки

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{G_1(s)}{1 \mp G_1(s)G_2(s)}. \tag{5.19}$$

5.12. Введення мультиплікатора в контур зворотного зв'язку з динамічною моделлю Кейнса

Нагадаємо, що динамічна модель Кейнса має вигляд:

$$\frac{dy}{dt} + (1 - c)y = \underline{C} + I, \tag{5.20}$$

де y — ВВП; $\underline{C}$ — фіксована частина фонду споживання; I — інвестиції; c — схильність до споживання ($0 < c < 1$); $(1 - c)$ — схильність до накопичення.

Поділивши ліву і праву частини рівняння (5.20) на $(1 - c)$, дістанемо

$$T\frac{dy}{dt} + y = y_E, \tag{5.21}$$

де $T = \dfrac{1}{1 - c}$ — стала часу інерційної ланки, обернено пропорційна до схильності до накопичення;

$y_E = \dfrac{\underline{C} + I}{1 - c}$ — значення ВВП для даного обсягу інвестицій I.

Розглянемо поводження економіки у формі інерційної ланки (5.21), яка в початковий момент $t = 0$ перебувала у стані рівноваги $y(0) = y_E^0 = \frac{C + I_0}{1-c}$, після чого інвестиції збільшилися з I_0 до $I = I_0 + \Delta I$, $\Delta I > 0$. Тоді праву частину (5.21) можна подати у вигляді двох доданків:

$$y_E = \frac{C + I_0}{1-c} + \frac{\Delta I}{1-c} = y_E^0 + x;\ x = \frac{\Delta I}{1-c}.$$

У свою чергу, розв'язок рівняння (5.21) можна розкласти на дві відповідні частини:

$$y(t) = y_E^0 + \eta(t),$$

де $\eta(t)$ — змінна частина перехідного процесу $y(t)$.

Змінна $\eta(t)$ задовольняє рівняння:

$$T\frac{dy}{dt} + \eta = x\chi(t),\ \eta(0) = 0. \tag{5.22}$$

Його розв'язок:

$$\eta = x\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right),$$

тобто

$$\lim_{t\to\infty}\eta(t) = x = \frac{\Delta I}{1-c}.$$

Тому після закінчення перехідного процесу економіка справді перейде в стан y_E:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = y_E^0 + x = \frac{c_0 + I_0}{1-c} + \frac{\Delta I}{1-c} = \frac{c_0 + I}{1-c} = y_E.$$

Дослідимо тепер, як зміниться поводження економіки в результаті включення мультиплікатора в контур зворотного зв'язку. Контур зворотного зв'язку, утворений із моделі Кейнса та мультиплікатора з коефіцієнтом посилення $\alpha > 0$, зображено на рис. 5.11. Якщо вихід мультиплікатора додається до вхідної дії, то відбувається додатний зворотний зв'язок, а якщо віднімається — від'ємний зворотний зв'язок.

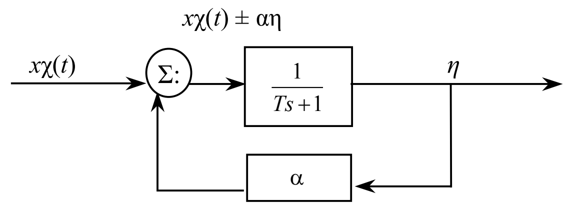


Рис. 5.11

Використовуючи вираз (5.19), знаходимо передавальну функцію контура зі зворотним зв’язком:

$$G(s)=\frac{G_1(s)}{1\mp G_1(s)G_2(s)}=\frac{\frac{1}{Ts+1}}{1\mp\frac{\alpha}{Ts+1}}=\frac{1}{Ts+1\mp\alpha}. \tag{5.23}$$

Знак «мінус» при α у знаменнику (5.23) відповідає додатному, а знак «плюс» — від’ємному зворотному зв’язку.

Оскільки образ входу набирає вигляду

$$X(s)=x\int_0^\infty e^{-st}\chi(t)dt=\frac{x}{s},$$

то можна визначити образ виходу за допомогою передавальної функції:

$$H(s)=G(s)X(s).$$

За табл. 5.1 знаходимо прообраз:

$$\eta(t)=\frac{x}{1\pm\alpha}\left[1-e^{-\frac{(1\pm\alpha)t}{T}}\right],\ \lim_{t\to\infty}\eta(t)=\frac{x}{1\pm\alpha}, \tag{5.24}$$

звідки

$$y(t)=y_E^0+\eta(t)=\frac{C+I_0}{1-c}+\frac{\Delta I}{(1\pm\alpha)(1-c)}\left[1-e^{-\frac{(1\pm\alpha)t}{T}}\right]. \tag{5.25}$$

Зауважимо, що такі самі результати можна дістати, ввівши мультиплікатор всередину моделі Кейнса. Справді, із рис. 5.11 випливає, що входом в інерційну ланку є $x\chi(t)\pm\alpha\eta$, тобто сума або різниця входу в систему $(x\chi(t))$ і виходу з неї без мультиплікатора $(\alpha\eta)$. Тому приріст ВВП $\eta(t)$ задовольняє таке диференціальне рівняння:

$$T\frac{d\eta}{dt}+\eta = x\chi(t)\pm\alpha\eta,\ \ \eta(0)=0,$$

або

$$\frac{T}{1\pm\alpha}\cdot\frac{d\eta}{dt}+\eta=\frac{x\chi(t)}{1\pm\alpha},\ \ \eta(0)=0,$$

а розв'язок цього рівняння саме й має вигляд (5.24).

Після закінчення перехідного процесу розв'язок (5.25) має вигляд (стаціонарний розв'язок):

$$\lim_{t\to\infty} y(t)=\tilde{y}_E=\frac{\underline{C}+I_0}{1-c}+\frac{\Delta I}{(1\pm\alpha)(1-c)}.$$

Значення ВВП, інвестицій і споживання у сталому режимі при початкових інвестиціях I_0 та інвестиціях $I=I_0+\Delta I$ у разі введення додатного і від'ємного зворотного зв'язку наведено в табл. 5.2.

Таблиця 5.2

ВВП, ІНВЕСТИЦІЇ ТА СПОЖИВАННЯ

Характеристика	Початкове значення	Сталі значення		
		без введення зворотного зв'язку	у разі додатного зворотного зв'язку	у разі від'ємного зворотного зв'язку
ВВП	$\frac{\underline{C}+I_0}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+I_0+\Delta I}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+I_0+\Delta I/(1-\alpha)}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+I_0+\Delta I/(1+\alpha)}{1-c}$
Інвестиції	I_0	$I_0+\Delta I$	$I_0+\frac{\Delta I}{1-\alpha}$	$I_0+\frac{\Delta I}{1+\alpha}$
Споживання	$\frac{\underline{C}+cI_0}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+c(I_0+\Delta I)}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+c\left(I_0+\frac{\Delta I}{1-\alpha}\right)}{1-c}$	$\frac{\underline{C}+c\left(I_0+\frac{\Delta I}{1+\alpha}\right)}{1-c}$

Таким чином, введенням мультиплікатора $(0<\alpha<1)$ у контур додатного зворотного зв'язку з моделлю Кейнса забезпечуються вищі прирости ВВП, інвестицій та споживання, проте при цьому перехідний процес триваліший, ніж процес за відсутності зворотного зв'язку, оскільки при $0<\alpha<1$ виконується нерівність

$$\frac{T}{1-\alpha}>T.$$

Навпаки, при введенні від'ємного зворотного зв'язку прирости ВВП, інвестицій і споживання нижчі, але перехідний процес відбувається швидше, оскільки при $\alpha > 0$ маємо

$$\frac{T}{1-\alpha} < T.$$

5.13. Введення акселератора в контур додатного зворотного зв'язку з динамічною моделлю Кейнса

Дослідимо тепер, як зміниться поводження економіки у формі моделі Кейнса (у приростах) унаслідок включення акселератора в контур додатного зворотного зв'язку. Цей контур зображено на рис. 5.12, де $\eta(t)$ — приріст ВВП, тобто

$$\eta(t) = y(t) - y_E^0.$$

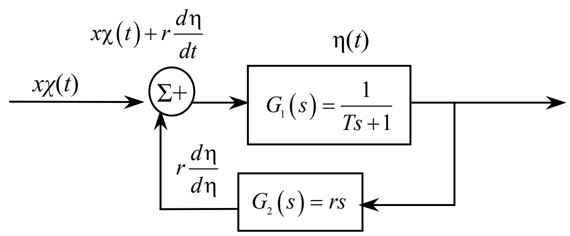


Рис. 5.12

Використовуючи вирази (5.19), знаходимо передавальну функцію зазначеного контура:

$$G(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} = \frac{\frac{1}{Ts+1}}{1 - \frac{rs}{Ts+1}} = \frac{1}{(T-r)s+1}. \tag{5.26}$$

Використовуючи образ входу

$$X(s) = x\int_{-\infty}^{\infty} e^{-st}\chi(t)dt = \frac{x}{s},$$

визначаємо за допомогою передавальної функції контура образ виходу:

$$H(s) = G(s)X(s) = \frac{x}{s\left[(T-r)s+1\right]}.$$

І, нарешті, за табл. 5.1 знаходимо прообраз:

$$\eta(t) = x\left[1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{T-r}}\right], \ \lim_{t\to\infty}\eta(t) = x. \tag{5.27}$$

Отже, ВВП поводиться в такий спосіб:

$$y(t) = y_E^0 + \eta(t) = \frac{\underline{C}+I_0}{1-c} + \frac{\Delta I}{(1-c)}\left[1-e^{-\frac{t}{T-r}}\right],$$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{\underline{C}+I_0}{1-c} + \frac{\Delta I}{(1-c)}.$$

Таким чином, уведенням акселератора в контур зворотного зв'язку з моделлю Кейнса досягаємо того самого значення ВВП у сталому режимі, що й за відсутності зворотного зв'язку. При цьому збіжність до цього значення відбувається швидше, оскільки $T-r<T$. Проте прискорення збіжності досягається за рахунок скорочення споживання на початку перехідного періоду.

Справді, споживання в перехідний період без введення акселератора має вигляд:

$$C(t) = \frac{\underline{C}+c(I_0+\Delta I)}{1-c} - \frac{\Delta I}{1-c}e^{-\frac{t}{T}},$$

із введенням акселератора:

$$C(t) = \frac{\underline{C}+c(I_0+\Delta I)}{1-c} - \frac{\Delta I}{1-c}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T-r}}\frac{r}{T-r},$$

тому справді на початку перехідного процесу (при $t<\tilde{t} = \frac{T(T-r)}{r}\ln\left(\frac{T}{T-r}\right)$) відбувається скорочення споживання на величину

$$C(t)-\tilde{C}(t) = \frac{\Delta I}{1-c}\left(\frac{T}{T-r}e^{-\frac{t}{T-r}} - e^{-\frac{t}{T}}\right) = \frac{\Delta I}{1-c}\left(\frac{T}{T-r}e^{\frac{rt}{T(T-r)}}-1\right),$$

а при $t<\tilde{t}$, навпаки, споживання більше.

Графік споживання з уведенням і без уведення акселератора зображено на рис. 5.13.

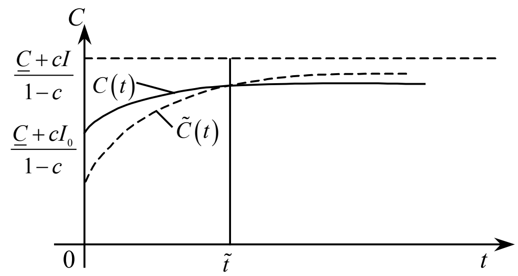


Рис. 5.13

5.14. Стійкість лінійних динамічних систем

Система називається ***стійкою***, якщо її реакція на імпульсну дію загасає, тобто імпульсна характеристика $g(t)$ має нульову асимптоту:

$$\lim_{t\to\infty} g(t) = 0. \tag{5.28}$$

З імпульсної характеристики інерційної ланки

$$g(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

випливає, що $g(t)$ загасає на нескінченності, тому інерційна ланка стійка. Отже, стійка й економіка, описувана динамічною моделлю Кейнса, оскільки ця модель у неперервному часі являє собою інерційну ланку.

Імпульсна характеристика ланки є розв'язком такого рівняння:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j y^{(j)} = \delta(t). \tag{5.29}$$

Знайдемо перетворення Лапласа від обох частин рівняння (5.29):

$$\left(\sum_{j=0}^{n} a_j s^j\right) Y(s) = 1.$$

Образ імпульсної характеристики подається у вигляді

$$L_g(s) = Y(s) = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n} a_j s^j}.$$

Характеристичний многочлен $\sum_{j=0}^{n} a_j s^j$ має n корнів $\lambda_1, ..., \lambda_n$ (позначення відповідають характеристичному рівнянню $\sum_{j=0}^{n} a_j \lambda^j = 0$), причому його можна розкласти на такі множники:

$$\sum_{j=0}^{n} a_j s^j = a_n \sum_{j=1}^{n} (s - \lambda_j).$$

Якщо серед коренів трапляються комплексні, то вони взаємно-спряжені, наприклад $\lambda_1 = \alpha + i\omega$, $\lambda_2 = \alpha - i\omega$. Тоді множники з парою таких коренів можна подати у вигляді квадратного тричлена:

$$(s - \alpha - i\omega)(s - \alpha + i\omega) = \left(s - \alpha\right)^2 + \omega^2.$$

Образ імпульсної характеристики лінійної ланки набирає вигляду:

$$\frac{1}{\sum_{j=0}^{n} a_j s^j} = \sum_{j=1}^{k} \frac{\beta_j + \gamma_j s}{(s - \alpha_j)^2 + \omega_j^2} + \sum_{j=2k+1}^{n} \frac{\beta_j}{(s - \lambda_j)}, \tag{5.30}$$

де k — кількість пар взаємно-спряжених коренів; $(n - 2k)$ — кількість дійсних коренів; β_j, γ_j — коефіцієнти розкладу (5.30), які визначаються зведеним правої частини (5.30) до спільного знаменника, що дорівнює $\sum_{j=0}^{n} a_j s^j$.

З розкладу (5.30) випливає вигляд імпульсної характеристики динамічної ланки як прообразу (5.30) (див. табл. 5.1):

$$g(t) = \sum_{j=1}^{k} e^{\alpha_j t} (\beta_j \sin \omega_j t + \gamma_j \cos \omega_j t) + \sum_{j=2k+1}^{n} \beta_j e^{\lambda_j t}. \tag{5.31}$$

Отже, динамічна ланка стійка, тобто $\lim\limits_{t\to\infty} g(t)=0$, якщо від'ємні дійсні частини комплексних коренів $\left(\alpha_j<0,\ j=1,\ \ldots,\ k\right)$, а також дійсних корені $\left(\lambda_j<0,\ j=2k+1,\ \ldots,\ n\right)$.

Характеристичне рівняння моделі Самуельсона—Хікса має такий вигляд:

$$\lambda^2+(1-r)\lambda+1-c=0,\ 0\le r<1,\ 0<c<1. \tag{5.32}$$

Його корені:

$$\lambda_1=-\frac{1-r}{2}+\sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2-(1-c)},\ \lambda_2=-\frac{1-r}{2}-\sqrt{\left(\frac{1-r}{2}\right)^2-(1-c)}. \tag{5.33}$$

Якщо дискримінант невід'ємний:

$$(1-r)^2-4(1-c)\ge 0,\ \ r\le 1-2\sqrt{1-c}, \tag{5.34}$$

то корені дійсні від'ємні $\left(\lambda_1<0,\lambda_2<0\right)$, тому економіка стійка і поводиться як дві послідовно з'єднані інерційні ланки зі сталими часу $\left(-\dfrac{1}{\lambda_1};-\dfrac{1}{\lambda_2}\right)$ (експоненціальне загасання).

Якщо дискримінант від'ємний: $(1-r)^2-4\cdot(1-c)<0$, тобто $r>1-2\sqrt{1-c}$, то рівняння має комплексні взаємно-спряжені корені:

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm i\omega,\ \alpha=\frac{1-r}{2},\ \omega=\sqrt{(1-c)-\left(\frac{1-r}{2}\right)^2}. \tag{5.35}$$

Оскільки дійсні частини коренів від'ємні, то економіка стійка і поводиться як коливальна ланка (гармонічні коливання з експоненціальною загасаючою амплітудою).

Зауваження. Якщо коефіцієнт акселерації $r>1$, то економічна система стає нестійкою: у разі додатного дискримінанта спостерігається аперіодична нестійкість, що монотонно збільшується, а в разі від'ємного — нестійкість у вигляді автоколивань з експоненціально зростаючою амплітудою.

РОЗДІЛ 6

ОПТИМАЛЬНЕ КЕРУВАННЯ ДИНАМІЧНИМИ СИСТЕМАМИ

6.1. Задача про максимальний дохід підприємства, що здійснює оптову торгівлю

Підприємство здійснює імпорт товарів. Щомісяця здійснюється продаж деякої частини імпортованого товару, а решта його залишається на складі для формування товарних запасів. Дохід від продажу товарів покупцям виражається функцією $f(x)$, де x — кількість проданої продукції. Приклад графіка такої функції $f(x)$ наведено на рис. 6.1.

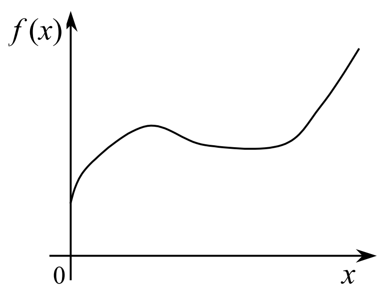


Рис. 6.1.

Нехай кількість товару, що залишається на складі, у наступному місяці збільшується в $a(t)$ раз. Постає запитання: в який спосіб підприємство може отримати за n місяців максимальний дохід, якщо мінімальний обсяг щомісячно продажу становить b?

Розв'язання. Щоб відповісти на це запитання, позначимо через $x(0)$ початкову кількість товару на складі; $x(t)$ — кількість товару, що залишилася на складі наприкінці t-го місяця; $u(t)$ — кількість товару, який було продано в t-му місяці ($t = 1, 2, ..., n$). Тоді в ($t - 1$)-му місяці на підприємстві було залишено для формування складу кількість товару, яка дорівнює $x(t-1)$, а в t-му місяці (перед початком продажу) на складі підприємства буде кількість товару $a(t)\ x(t-1)$. Із цієї кількості буде продано $u(t)$, а решта, тобто $a(t)\ x(t-1) - u(t)$, залишиться наприкінці t-го місяця на складі.

Отже, маємо:

$$x(t) = a(t)x(t-1) - u(t),\ \ t = 1, 2, ..., n. \tag{6.1}$$

Дохід підприємства за n місяців становить

$$J = f(u(1)) + f(u(2)) + ... + f(u(n)) = \sum_{t=1}^{n} f(u(t))\ . \tag{6.2}$$

З огляду на те, що мінімальний обсяг продажу товарів за місяць дорівнює b, для керуючого параметра $u(t)$ дістаємо такі обмеження:

$$u(t) \geq b\ ,\ \ t = 1, 2, ..., n. \tag{6.3}$$

Крім того, за змістом задачі змінна $x(t)$ невід’ємна:

$$x(t) \geq 0\ ,\ \ t = 1, 2, ..., n. \tag{6.4}$$

Отже, задачу про максимум доходу за n місяців підприємства, що здійснює оптову торгівлю, можна сформулювати в такий спосіб.

Для дискретного керованого об’єкта (6.1) знайти таке керування $u(1), u(2), ..., u(n)$, яке задовольняло б умову (6.3), при цьому для відповідних значень $x(1), ..., x(n)$ і заданої початкової умови $x(0) = c$ виконувалось співвідношення (6.4), а сума (6.2) набувала найбільшого можливого значення.

Зауважимо, що значення $x(n)$, тобто кількість товару, яка залишається на складі наприкінці n-го місяця, умовами задачі не регламентується. Тому, вочевидь, для досягнення максимального доходу за n місяців доцільно в n-му місяці продати весь наявний на той час товар на складі. А отже, рівно через n місяців у підприємства на складі не буде товару, через що його покупці перейдуть до конкурентів. Щоб цього уникнути, умову (6.4) потрібно замінити співвідношенням $x(n) \geq d$, де d — планова наявність товару на складі наприкінці n-го місяця.

6.2. Задача перевезення сировини від виробника до місць споживання

Нехай виробник деякої сировини має чотири склади готової продукції, які перебувають у різних місцях, а кількість споживачів цієї сировини дорівнює *n*. Припустимо також, що існує тільки один вид сировини, при цьому запас дорівнює попиту.

Інакше кажучи, якщо позначимо через a_1, a_2, a_3, a_4 кількість сировини на складах, а через $b_1, b_2, ..., b_n$ — потреби споживачів у сировині, то

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = b_1 + b_2 + ... + b_n . \qquad (6.5)$$

Вартість перевезення одиниці сировини з *i*-го складу до *t*-го споживача залежить від того, скільки сировини необхідно перевезти, а також від значень *i* та *t*, якими характеризується дальність перевезення.

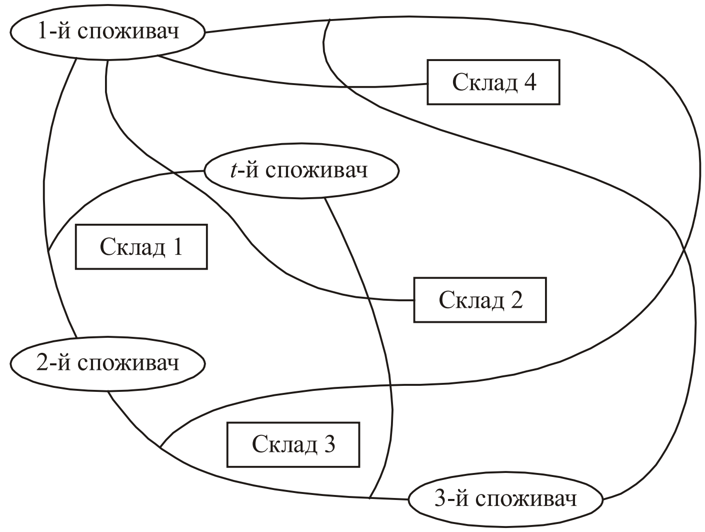


Рис. 6.2.

Позначимо цю вартість через $f_t^i(u)$.

Задача полягає в перевезенні сировини зі складу до споживачів із мінімальними транспортними витратами.

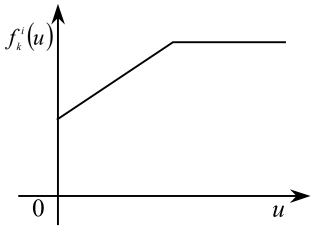


Рис. 6.3.

Розв'язування. Розв'язуючи цю задачу, можна міркувати в такий спосіб. Щоб скласти план перевезення, ми маємо передусім визначити кількість сировини, яку необхідно завезти з кожного зі складів 1—3 до кожного зі споживачів. Тоді кількість сировини, яку має бути поставлено зі складу 4, визначається однозначно: кожному споживачеві необхідно довезти з цього складу саме стільки сировини, скільки йому бракує. Позначимо через $u_i(k)$ кількість сировини, що поставляється *t*-му споживачеві *i*-м складом. Тоді оскільки загальна потреба *t*-го споживача в сировині дорівнює b_t, то зі складу 4 йому необхідно буде завезти таку кількість сировини: $b_t - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t)$.

Таким чином, для складання плану перевезення достатньо вибрати числа $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, $t = 1, 2, ..., n$. Але вибір цих чисел підпорядковуватись деяким обмеженням. Передусім числа $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$ мають бути невід'ємними, а їхня сума має не перевищувати b_t:

$$u_1(t) \geq 0,\ u_2(t) \geq 0,\ u_3(t) \geq 0,\ u_1(t) + u_2(t) + u_3(t) \leq b_t,\ t = 1, 2, ..., n. \quad (6.6)$$

Іншими словами, "керуюча точка" $u(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ має міститися всередині піраміди $OABC$, яку позначимо через U_t (рис. 6.4):

$$u(t) \in U_t.$$

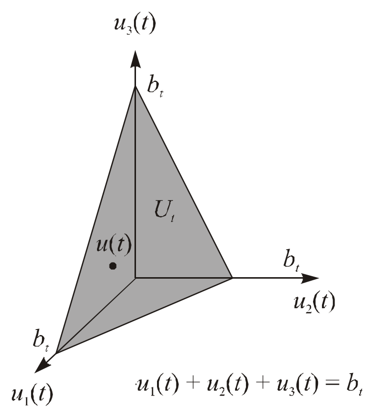


Рис. 6.4

Але цього замало. Якщо план перевезення (тобто набір чисел $u_1(t), u_2(t), u_3(t), t=1,2,...,n$) складати необережно, то можна «запланувати» вивезення з деякого складу більшої кількості сировини, ніж там її існує. Щоб цього не відбулося, будемо по кожному складу вести облік запланованої до вивезення сировини.

Позначимо через $x(t), y(t), z(t)$ кількість сировини, яка вивозиться до перших t споживачів відповідно зі складу 1, 2 і 3:

$$x(t) = u_1(1) + u_1(2) + ... + u_1(t);$$

$$y(t) = u_2(1) + u_2(2) + ... + u_2(t);$$

$$z(t) = u_3(1) + u_3(2) + ... + u_3(t).$$

Тоді при плануванні поставок сировини $(t+1)$-му споживачеві матимемо уявлення про те, скільки ще сировини є на перших трьох складах. Очевидно, що

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t-1) + u_1(t); \\ y(t) &= y(t-1) + u_2(t); \\ z(t) &= z(t-1) + u_3(t), \end{aligned} \tag{6.7}$$

$$t = 1, 2, ..., n.$$

Для зручності візьмемо

$$x(0) = 0; \quad y(0) = 0; \quad z(0) = 0. \tag{6.8}$$

Оскільки запас дорівнює попиту, тобто виконується співвідношення (6.5), то після завезення сировини всім n споживачам, склади залишаться порожніми:

$$x(n) = a_1; \;\; y(n) = a_2; \;\; z(n) = a_3. \tag{6.9}$$

Легко зрозуміти, що коли співвідношення (6.6), (6.9) виконуються, то план перевезення припустимий, тобто споживачі отримують із чотирьох складів необхідну кількість сировини. При цьому вартість усіх перевезень (за складеним планом) становитиме

$$\begin{aligned} J = \sum_{t=1}^{n} [& f_t^1(u_1(t)) + f_t^2(u_2(t)) + f_t^3(u_3(t)) + \\ & + f_t^4(b_t - u_1(t) - u_2(t) - u_3(t))]. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Отже, транспортну задачу можна сформулювати так.

Для дискретного керованого об'єкта (6.7) знайти таке припустиме (тобто яке має задовольняти умову (6.6)) керування $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$, t = 1, 2, …, n, щоб при цьому для відповідних значень $x(t), y(t), z(t)$, $t = 1, 2, ..., n$, із заданими початковими умовами (6.8) виконувалась умова (6.9) і сума (6.10) набувала найменшого можливого значення.

6.3. Задача загального максимального прибутку взаємозв'язаних галузей

Розглянемо найпростішу модель трьох галузей (умовно назвемо їх машинобудівною, металургійною і верстатобудівною), які взаємодіють між собою.

Припустимо, що кожну з цих галузей у довільний момент часу можна описати її сировинним ресурсом та виробничою потужністю.

Введемо такі змінні стану:

$x_1(n)$ — кількість машин, вироблених до моменту часу n;

$x_2(n)$ — виробнича потужність машинобудівних заводів у момент часу n;

$x_3(n)$ — запас сталі в момент часу n;

$x_4(n)$ — виробнича потужність металургійних заводів у момент часу n;

$x_5(n)$ — кількість (ресурс) верстатів у момент часу n;

$x_6(n)$ — виробнича потужність верстатобудівних заводів у момент часу n.

Для того щоб дістати систему рівнянь, яка описує цю модель, тобто знайти співвідношення, які пов'язують $x_i(n+1)$ і $x_i(n)$, необхідно зробити деякі припущення щодо економічної взаємозалежності розглядуваних трьох галузей.

Припустимо, скажімо, таке:

1) для того щоб збільшити виробничу потужність кожної з трьох галузей, потрібні тільки верстати і сталь;

2) для виробництва машин необхідні сталь і виробнича потужність машинобудівних заводів;

3) для виробництва сталі необхідна тільки виробнича потужність металургійних заводів;

4) для виробництва верстатів необхідні сталь і виробнича потужність верстатобудівних заводів.

Динаміка процесу виробництва така: у момент часу $t=n$ деяка кількість сталі та верстатів розміщуються на заводах трьох галузей для подальшого виробництва сталі, верстатів і машин, а також для збільшення наявних виробничих потужностей, причому кожна галузь використовує для цього свої запаси.

Нехай $u_i(n)$ — кількість сталі, необхідної для збільшення $x_i(n)$ у момент часу n, $i=1,2,...,6$;

$v_i(n)$ — кількість верстатів, необхідних для збільшення $x_i(n)$ у момент часу n, $i=1,2,...,6$.

Згідно з припущенням 1—4 маємо:

$$u_3(n)=0, \tag{6.11}$$

$$v_1(n)=v_2(n)=v_5(n)=0. \tag{6.12}$$

Для того щоб дістати співвідношення, які пов'язують $x_i(n+1)$ із $x_j(n), u_j(n)$ і $v_j(n)$, припустимо, що вихід продукції прямо пропорційний до входу за найменш забезпеченим параметром. Інакше кажучи, це означає, що обсяг продукції, яка випускається, пропорційний до виробничої потужності, коли немає жодних обмежень на сировинні матеріали, і пропорційний до кількості найменш забезпеченого сировинного матеріалу за відсутності обмежень на виробничу потужність.

Обмеження на вибір $u_i(n)$ і $v_i(n)$ полягають у тому, що, з одного боку, ми не можемо на кожному етапі використовувати більше матеріалів, ніж їх є в запасі, а з другого, немає сенсу виділяти більше сировини, ніж можна освоїти за даної виробничої потужності. Отже, обмеження на вибір $u_i(n)$ і $v_i(n)$ мають вигляд:

$$\begin{gathered} u_i \geq 0, v_i \geq 0, \\ u_1+u_2+u_4+u_5+u_6 \leq x_3, \\ v_2+v_4+v_6 \leq x_5. \end{gathered} \tag{6.13}$$

Оскільки, обмеження, пов'язані з виробничими потужностями, є визначальними, то в цьому разі

$$\begin{gathered} u_2(n)=k_2v_2(n),\ u_4(n)=k_4v_4(n), \\ u_6(n)=k_6v_6(n),\ \ k_i=\text{const},\ \ i=1,2,...,6. \end{gathered} \tag{6.14}$$

Беручи до уваги, що кількість матеріалу в момент часу $n+1$ дорівнює кількості матеріалу в момент часу n мінус його кількість, використану за проміжок часу $(n; n+1)$ плюс обсяг продукції, виробленої за проміжок часу $(n; n+1)$, дістанемо таку систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) + u_1(n), \\ x_2(n+1) = x_2(n) + u_2(n), \\ x_3(n+1) = x_3(n) + \gamma x_4(n) - u_1(n) - \\ -u_2(n) - u_4(n) - u_5(n) - u_6(n), \quad \gamma = \text{const}, \\ x_4(n+1) = x_4(n) + u_4(n), \\ x_5(n+1) = x_5(n) - \dfrac{1}{k_2} u_2(n) - \dfrac{1}{k_4} u_4(n) - \dfrac{1}{k_6} u_6(n) + u_5(n), \\ x_6(n+1) = x_6(n) + u_6(n) \end{cases} \tag{6.15}$$

із початковими умовами:

$$x_1(0) = c_1;\ x_2(0) = c_2;\ x_3(0) = c_3;\ x_4(0) = c_4;\ x_5(0) = c_5;\ x_6(0) = c_6. \tag{6.16}$$

Обмеження на вибір керування u_i набирають такого вигляду:

$$\begin{cases} u_i \geq 0, \\ u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + u_5 + u_6 \leq x_3, \\ k_1 u_2 + k_4 u_4 + k_6 u_6 \leq x_5, \\ u_1 \leq l_1 x_2, \\ u_5 \leq l_6 x_6. \end{cases} \tag{6.17}$$

Легко зрозуміти, що прибуток підприємств залежить від виробничих потужностей галузей. Розглядаючи підвищення виробничих потужностей як результат збільшення переробки сталі для виробництва машин і верстатів, вводимо функції $f_2(u_2(n+1))$, $f_4(u_4(n+1))$, $f_6(u_6(n+1))$ як функції прибутку від збільшення виробничих потужностей відповідно машинобудівної, металургійної та верстатобудівної галузі. Тоді можна сформулювати задачу, про максимізацію суми цих трьох функцій, тобто відшукання умов, за яких сума

$$J = f_2(u_2(n+1)) + f_4(u_4(n+1)) + f_6(u_6(n+1)) \tag{6.18}$$

набуває найбільшого значення. Отже, задачу про максимізацію загального прибутку взаємозв'язаних галузей можна сформулювати так:

Для дискретного керованого об'єкта (6.15) знайти таке припустиме (тобто яке задовольняє умову (6.17)) керування $u_1(n),\ u_2(n),\ u_3(n),\ u_4(n),\ u_5(n),\ u_6(n),$ **щоб при цьому для відповідних значень** $x_1(n+1),\ x_2(n+1),\ x_3(n+1),\ x_4(n+1),\ x_5(n+1),\ x_6(n+1),$ **із заданими початковими умовами (6.16) сума (6.18) набувала найбільшого можливого значення.**

6.4. Системи із загаюванням (запізненням)

Розглянемо ферму, що має деяке стадо великої рогатої худоби. Щороку частина стада відправляється на м'ясозаготівлю, а решта залишається на фермі для відтворення потомства. Водночас щороку на фермі є молодняк, який наступного року ще не дасть потомства; при цьому якщо y — кількість залишених на фермі дорослих тварин, то наступного року від них буде ky голів приплоду. Припускаємо також, що м'ясопоставки здійснюються тільки за рахунок дорослих тварин. Дохід від продажу худоби м'ясозаготівельним підприємствам виражається функцією $\varphi(x)$, де x — кількість проданих голів.

Функція $\varphi(x)$ може, наприклад, характеризуватись графіком, наведеним на рис. 6.5, поставки м'яса понад планове завдання b оплачуються за вищими цінами. Кількість голів худоби, що залишається на фермі для відтворення поголів'я, у наступному році (до початку м'ясозаготівель) збільшується в a $(a>1)$ раз.

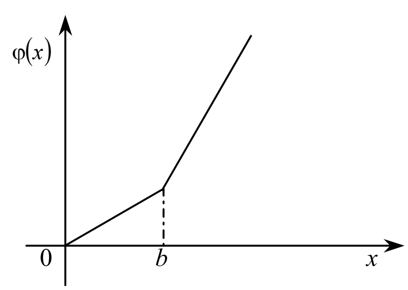


Рис. 6.5

В який спосіб ферма може отримати за n років максимальний дохід, якщо обсяг мінімальних річних м'ясозаготівель становить b?

Розв’язування. Позначимо через $x(0)$ початкову кількість голів великої рогатої худоби на фермі, а через $x(t)$ — кількість голів, що залишилось до кінця t-го року $\left(t = 1, 2, ..., n\right)$. Кількість голів, проданих для м’ясозаготівель у t-му році, позначимо через $u(t)$, $t = 1,2,...,n.$ Тоді в t-му році потомство буде отримано тільки від тих тварин, які народилися в (t – 2)-му році або раніше, тобто від тварин, які було залишено на фермі до кінця (t – 2)-го року і які ще збереглися на фермі до t-го року. Але в (t – 2)-му році на фермі було залишено $x(t-2)$ тварини, причому $u(t-1)$ з них було в (t – 1)-му році відправлено на м’ясозаготівлю. Отже, до t-го року на фермі було $x(t-1) + k(x(t-2) - u(t-1))$ тварин. Після м’ясозаготівлі ця кількість тварин зменшиться на $u(t)$, з чим ферма й підійде до кінця t-го року. Таким чином,

$$x(t) = x(t-1) + k(x(t-2) - u(t-1)) - u(t), \quad t = 2, 3, ..., n. \qquad (6.19)$$

Бачимо, що на відміну від раніше розглянутих прикладів, співвідношення (6.19) має вигляд

$$x(t) = f_i(x(t-1), x(t-2), u(t), u(t-1)), \quad t = 2, 3, ..., n, \qquad (6.20)$$

тобто стан $x(t)$ залежить не тільки від $x(t-1)$ і $u(t)$, а й від попередніх величин $x(t-2), u(t-1).$

Зазначимо, що співвідношення (6.19) записано лише для $t = 2,3, ..., n.$ Якщо в це співвідношення підставимо $t = 1$, то в правій його частині дістанемо величини $x(-1)$ і $u(0)$, які в задачі не було визначено. Тому величини $x(0), x(1)$ необхідно визначити окремо, а решту $x(2), ..., x(n)$ можна знайти за формулою (6.19).

Дохід ферми за n років становить

$$J = \varphi(u(1)) + \varphi(u(2)) + ... + \varphi(u(n)) = \sum_{t=1}^{n} \varphi(u(t)). \qquad (6.21)$$

Ураховуючи обов’язкові м’ясопоставки, дістанемо для керуючого параметра u такі обмеження:

$$u(t) \geq b, \quad t = 1, 2, ..., n. \qquad (6.22)$$

Окрім того, за змістом задачі будь-яке значення x (кількість голів рогатої худоби, що залишається для відтворення) невід’ємне:

$$x(t) \geq 0\,. \qquad (6.23)$$

Отже, поставлена задача про максимум доходу тваринницької ферми за n-річний період набирає такого вигляду:

для дискретного керованого об'єкта (6.19) знайти таке керування $u(1), u(2), ..., u(n)$***, яке задовольняло б умову (6.22) і при цьому для відповідних значень*** $x(0), x(1), ..., x(n)$ ***із заданими початковими умовами*** $x(0) = c$ ***виконувалось співвідношення (6.23) і сума (6.21) набувала найбільшого можливого значення.***

6.5. Задача оптимального керування дискретними об'єктами

Узагальнивши розглянуті приклади, подамо загальний математичний опис дискретних керованих об'єктів.

Вважатимемо, що змінна t (в економічних моделях це час) може набувати лише дискретної множини значень, а саме $t = 0, 1, ..., n$, де n — фіксоване натуральне число.

У загальному випадку припускатимемо, що впливати на керований об'єкт можна за рахунок вибору ***керуючих параметрів*** $u_1, u_2, ..., u_k$, або, що те саме, вибору точки u простору змінних $u_1, u_2, ..., u_k$. Таким чином, у кожний момент часу t керуюча точка $u(t)$ має k координат:

$$u(t) = (u_1(t), ..., u_k(t)) .$$

Керуванням називатимемо послідовність точок

$$u(1), u(2), ..., u(n) \tag{6.24}$$

у просторі змінних $u_1, u_2, ..., u_k$.

Вважатимемо, що в кожний момент часу t фазовий стан об'єкта характеризується n координатами $x_1(t), x_2(t), ..., x_n(t)$, які називатимемо ***фазовими координатами,*** тобто цей стан характеризується точкою x векторного простору E^n змінних $x_1, ..., x_n$. У розглянутих раніше прикладах фазові стани подавалися співвідношення (6.1), (6.7), (6.15), (6.19). Отже, у кожний момент часу t фазовий стан $x(t)$ має n координат:

$$x(t) = (x_1(t), ..., x_n(t)) .$$

Послідовність

$$x(0), x(1), ..., x(n) \tag{6.25}$$

станів об'єкта в моменти $t = 0, 1, ..., n$ називатимемо ***траєкторією*** руху об'єкта.

Початковий стан $x(0)$ об'єкта має бути задано. У разі вибору деякого (6.24) подальше поводження об'єкта визначається однозначно за допомогою співвідношень

$$x(t) = f_t(x(t-1), u(t)),\ t = 1, 2, ..., n, \tag{6.26}$$

де $f_t(x,u) = (f_t^1(x,u),..., f_t^n(x,u))$ — деяка вектор-функція, значення якої належать простору E^n. Індекс t у функції $f_t(x,u)$ означає, що розглядається не одна функція $f(x,u)$ для всіх моментів $t = 1, 2, ..., n$, а, загалом кажучи, різні функції, які змінюються від одного момента часу до іншого. А якщо функція $f_t(x,u)$ насправді не залежить від t, то маємо лише одну функцію $f(x,u)$, причому співвідношення (6.26) набирає вигляду

$$x(t) = f(x(t-1), u(t)).$$

Саме такий випадок було розглянуто в наведених раніше задачах, де поводження дискретного керованого об'єкта не залежала явно від t.

Траєкторію (6.25), яка задовольняє співвідношення (6.26), називатимемо такою, що ***відповідає початковому стану*** $x(0)$ ***і керуванню (6.24).***

Припускаючи, що для кожної точки $x \in E^n$ і кожного $t = 1, 2, ..., n$ у просторі змінних $u_1, u_2, ..., u_k$ задано деяку непорожню множину $U_t(x)$ — ***область керування***, що в момент часу t відповідає фазовому стану x, розглядатимемо далі лише такі керування (6.24), які задовольняють умову

$$u(t) \in U_t(x(t-1)),\ t = 1, 2, ..., n, \tag{6.27}$$

де траєкторія (6.25) має початковий стан (лівий кінець) $x(0)$ і відповідає керуванню (6.24).

Керування, що задовольняють цю умову, називатимемо ***припустимими*** (відносно початкового стану $x(0)$).

Співвідношення (6.26) і (6.27) визначають ***дискретний керований об'єкт.*** Процес керування ним здійснюється в такий спосіб. Оскільки задано початковий стан $x(0)$, то нам відома відповідна область керування $U_1(x(0))$. З умови (6.27) можемо вибрати довільну керуючу точку $u(1) \in U_1(x(0))$, унаслідок чого визначиться фазовий стан $x(1)$ у момент $t=1$. Далі, знаючи $x(1)$, можемо розглянути відповідну область керування $U_2(x(1))$. Після цього, вибравши довільну керуючу точку $u(2) \in U_2(x(1))$, зможемо знайти наступний фазовий стан $x(2)$, і т. д. Очевидно, що керування (6.24), яке дістанемо в результаті такого послідовного виконання побудови, є припустимим (відносно початкового стану $x(0)$), а утворена при цьому траєкторія (6.25) є такою, що відповідає цьому керуванню.

Тепер поставимо ***задачу оптимального керування*** для дискретного керованного об'єкта (6.26), (6.27), припустивши, що задано деякі функції $F_t(x,u)$, $t=1,\dots,n$.

За критерій ефективності, тобто функціонал, що показує, наскільки «вигідним» було вибрано процес (6.26), (6.27), візьмемо такий:

$$J = F_1(x(0),u(1)) + F_2(x(1),u(2)) + \dots + \\ + F_n(x(n-1),u(n)) = \sum_{t=1}^{n} F_t(x(t-1),u(t)). \tag{6.28}$$

Задача оптимального керування полягає в тому, щоб, **знаючи початковий стан** $x(0)$, **знайти таке припустиме керування (6.24) для об'єкта (6.26), (6.27), яке надає функціоналу (6.28) найбільшого (найменшого) значення.**

Цю задачу — називатимемо її ***основною*** — можна охарактеризувати як ***задачу оптимального керування із закріпленним лівим кінцем і вільним правим.*** Інакше кажучи, початковий стан $x(0)$ вважається заданим, а стан у правому кінці відрізка часу, тобто $x(n)$, нічим не зв'язаний (лише б значення функціоналу (6.28) було найбільшим (найменшим)).

6.6. Зв'язок задач дискретної оптимізації з іншими оптимізаційними задачами

6.6.1. *Екстремум функції*

Розглянемо зв'язок між задачею оптимального керування дискретними об'єктами, яку було сформульовано в підрозд. 6.5, і добре відомою задачею на екстремум (тобто максимум або мінімум) функції.

Розглянемо деяку функцію $f(x)$, задану на деякій множині M (її називають — ***областю визначення*** функції $f(x)$), яка набуває дійсних значень. Це означає, що кожній точці $a \in M$ поставлено у відповідність деяке число $f(a)$, яке називають ***значенням*** функції $f(x)$ у точці a.

Точка $x_0 \in M$ називається ***точкою мінімуму*** функції $f(x)$, якщо для кожної точки $x \in M$ справджується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$. Якщо x_0 — точка мінімуму функції $f(x)$, то відповідне значення $f(x_0)$ називається ***найменшим значенням*** (або також ***мінімумом***) функції $f(x)$.

Для запису мінімального значення функції $f(x)$ користуються позначенням

$$\begin{aligned} &\min f(x), \\ &x \in M. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Отже, символ (6.29) визначається такими двома умовами:

1) $f(x) \geq \min\limits_{x \in M} f(x)$ для довільного $x \in M$;

2) існує така точка $x_0 \in M$, що $f\left(x_0\right) = \min\limits_{x \in M} f(x)$.

Аналогічно визначається ***максимум*** функції. Зауважимо, що задача відшукання максимуму функції $f(x)$ еквівалентна задачі відшукання мінімуму функції $-f(x)$.

Задача на відшукання екстремумів функцій у такій постановці є занадто загальною, і тому, як правило, накладають деякі обмеження на саму функцію $f(x)$ та її область визначення.

Математична теорія оптимального керування дискретними об'єктами також пов'язана з розглядом спеціального класу задач на екстремуми функцій. А саме, як буде показано, **задача оптимального керування дискретним об'єктом еквівалентна задачі на екстремум функції, визначеної на деякій підмножині евклідового простору.** Інакше кажучи, ми покажемо, що кожну задачу на екстремум функції можна переформулювати як задачу оптимального керування для деякого дискретного об'єкта (причому доволі спеціального виду) і, навпаки, кожна задача оптимального керування дискретним об'єктом зводиться до задачі на екстремум деякої функції.

Нехай у *n*-вимірному векторному просторі E^n змінних $u_1, u_2, ..., u_n$ задано множину U_t, на якій визначено функцію $F(u) = F(u_1, u_2, ..., u_n)$, і поставлено задачу про відшукання точки

$u_0 = (u_1, u_2, ..., u_n) \in U_t$, в якій функція $F(u)$ (що розглядається на множині U_t) досягає найбільшого значення.

Візьмемо $n = 1$. У цьому разі ***задача оптимального керування дискретним об'єктом*** (із закріпленим лівим кінцем і вільним правим) описується так:

задано деяку початкову точку $x(0) = x_0$ і деяку множину $U = U_0(x(0))$. Траєкторія крім точки $x(0)$ складається ще з однієї точки $x(1)$, яка визначається співвідношеннями (6.26) і (6.27):

$$x(1) = f_1(x(0), u(1)), \text{ де } u(1) \in U. \tag{6.30}$$

Окрім того, задано функцію $F(x(0), u(1))$. Необхідно вибрати керування (тобто точку $u(1) \in U$) так, щоб функціонал

$$J = F(x(0), u(1)) \tag{6.31}$$

набув найбільшого можливого значення.

Візьмемо тепер

$$f(x,u) = u, \quad F(x,u) = F(u).$$

Тоді дискретна задача оптимального керування, описувана співвідношеннями (6.30), (6.31), набирає такого вигляду: знаючи траєкторію об'єкта, описувану рівнянням $x(1) = u(1)$, необхідно вибрати точку $u(1) \in U$ так, щоб функціонал $J = F(u(1))$ набував найбільшого можливого значення. Але це і є задача на максимум функції $F(u)$ на множині U.

Отже, довільну задачу на екстремум функції, заданої на підмножині евклідового простору, можна переформулювати як задачу оптимального керування дискретним об'єктом.

6.6.2. *Задача математичного програмування*

Як бачимо, задача оптимального керування дискретними об'єктами зводиться до задачі на екстремум функції, заданої на підмножині U евклідового простору. Через це клас розглядуваних екстремальних задач значно звужується. Але навіть у такому вигляді задача є занадто загальною, а тому щоб дістати змістовні результати, доводиться накладати деякі обмеження на множину U та на функцію, розглядувану на цій множині.

Найчастіше доводиться розглядати випадки, коли множина U задається в евклідовому просторі деякою ***системою рівнянь і нерівностей*** (скажімо, у розглянутих раніше прикладах, це умови (6.1), (6.3), (6.4); (6.5), (6.6), (6.7), (6.15), (6.17)), а функція, яка на ній розглядається, має неперервні похідні за всіма аргументами. Докладніше це формулюється так: в евклідовому просторі E^n змінних $u_1, u_2, ..., u_n$ задано функції

$$F(u_1, u_2, ..., u_n),$$

$$f_i(u) = f_i(u_1, u_2, ..., u_n),\ g_j(u) = g_j(u_1, u_2, ..., u_n),$$

які мають неперервні похідні за всіма аргументами. При цьому множина U визначається як множина всіх точок $u \in E^n$, які задовольняють систему співвідношень

$$f_i(u) = 0, \quad g_i(u) \le 0.$$

На цій множині U розглядається функція $F(U)$ і ставиться задача відшукання максимуму (мінімуму) цієї функції на множині E^n.

Сформульовану задачу називають ***задачею математичного програмування.***

6.7. Методи розв'язування задач дискретної оптимізації

6.7.1. *Динамічне програмування*

Основний метод дискретної оптимізації — це метод ***динамічного програмування***, автором якого є американський математик Річард Беллман.

Сутність цього методу полягає в тому, що для оптимальності всього процесу в цілому, необхідно, щоб для кожного проміжного етапу наступна частина процесу також мала властивість оптимальності.

Припустимо, що у процесі керування дискретним об'єктом (6.26) — (6.28) ми вже якось вибрали керування $u(1), u(2), ..., u(k)$ і траєкторію $x(0), x(1), ..., x(k)$ із початку процесу до моменту $t = k$ і маємо намір закінчити процес, тобто вибрати $u(k+1), ..., u(m)$ і $x(k+1), ..., x(m)$. Тоді якщо остання частина процесу (від моменту $t = k$ до моменту $t = m$) не буде оптимальною, тобто функціонал

$$J_k = \sum_{t=k+1}^{m} f_t(x(t-1), u(t)) \qquad (6.32)$$

не набуватиме найбільшого значення, то й весь процес у цілому не буде оптимальним.

Справді, якщо вдалося б поліпшити останню частину процесу, тобто змінити $u(k+1), ..., u(m)$ і $x(k+1), ..., x(m)$ так, щоб сума відповідних доданків (6.28) збільшилась, то це забезпечило б поліпшення всього процесу в цілому.

Ця ідея реалізується в такий спосіб. Нехай у момент $t = k$ ми вже перебуваємо в точці $x = x(k)$ (при цьому неістотно, як ми потрапили в цю точку з початкового стану). Будемо всіма можливими способами закінчувати процес:

$$u(k+1), ..., u(m); \quad x(k+1), ..., x(m), \qquad (6.33)$$

дбаючи про те, щоб виконувались співвідношення (6.26), (6.27). Для кожної такої останньої частини процесу обчислимо суму (6.32) і найбільшу з усіх цих сум позначимо через $\omega_k(x) = \omega_k(x(k))$.

Таким чином, рухаючись із точки $x = x(k)$, ми можемо вибрати останню частину процесу (6.33) так, щоб сума (6.32) набула значення $\omega_k(x)$, але *більшого* значення (якщо рухатись із точки x) ця сума досягти не зможе.

Беручи в цих міркуваннях $k = 0, 1, ..., m$, дістанемо $m+1$ функцію $\omega_0(x), \omega_1(x), ..., \omega_m(x)$. Оскільки в сумі (6.32) при $k = m$ немає доданків, то ця сума дорівнює нулю, тобто $\omega_m \equiv 0$. Значення $\omega_0(x_0)$ і являє собою те значення функціоналу J, якого він набував для оптимального процесу з початковими умовами $x(0) = x_0$. Таким чином, задача дискретного оптимального керування полягає у відшуканні значення $\omega_0(x_0)$ і способу його досягнення.

Якщо б ми вміли послідовно обчислювати функції $\omega_m(x)$, $\omega_{m-1}(x), ..., \omega_1(x), \omega_0(x)$, починаючи від $\omega_m(x) \equiv 0$ і до шуканої функції $\omega_0(x)$, то це й означало б, що ми маємо метод розв'язування дискретної задачі оптимального керування. Такий метод легко дістати.

Нехай у момент часу $t = k-1$ ми перебуваємо в точці $x = x(k-1)$. Виходячи з цієї точки, знайдемо найкраще закінчення процесу, тобто виберемо $u(t), x(t)$ для $t = k, k+1, ..., m$ так, щоб сума

$$J_{k-1} = \sum_{t=k}^{m} f_t(x(t-1), u(t))$$

набула свого найбільшого значення $\omega_{k-1}(x)$. Цю суму можна записати у вигляді

$$J_{k-1} = f_k(x(k-1), u(k)) + \sum_{t=k+1}^{m} f_t(x(t-1), u(t)),$$

причому другий доданок у правій частині дорівнює J_k. Оскільки $J_k = \omega_k(x(k))$ — найбільше можливе значення суми J_k при русі від точки $x(k)$, то

$$\omega_{k-1}(x) = f_k(x(k-1), u(k)) + \omega_k(x(k)). \tag{6.34}$$

Це співвідношення виконується, якщо $x(k), u(k)$ входять у найкраще закінчення процесу, що виходить із точки $x = x(k-1)$. А коли ми довільно (згідно з (6.26), (6.27)) візьмемо $x(k)$, $u(k)$, то рівність (6.34) заміниться нерівністю

$$\omega_{k-1}(x) \geq f_k(x(k-1), u(k)) + \omega_k(x(k)), \tag{6.35}$$

оскільки у правій частині (6.35) тепер міститься не обов'язково максимальна сума J_{k-1}. Отже, $\omega_{k-1}(x)$ — найбільше з усіх можливих значень суми

$$f_k(x(k-1), u(k)) + \omega_k(x(k)),$$

яке можна дістати, вибравши в припустимий спосіб $x(k)$, $u(k)$, тобто

$$\omega_{k-1}(x) = \max_{u \in U_k(x)} [f_k(x(k-1), u(k)) + \omega_k(x(k))], \; k = 1, 2, ..., m. \tag{6.36}$$

Тут максимум береться за всіма $u = u(k) \in U_k(x)$, оскільки $x(k)$ не входить у праву частину.

Співвідношення (6.36), яке називається ***рівнянням Беллмана***, дає змогу послідовно обчислювати $\omega_m(x), \omega_{m-1}(x), ..., \omega_1(x), \omega_0(x)$, починаючи від $\omega_m(x) \equiv 0$ і до шуканої функції $\omega_0(x)$. Метод відшукання функції $\omega_0(x)$ за допомогою співвідношення (6.36) і було названо ***динамічним програмуванням.***

6.7.2. *Алгоритм методу динамічного програмування*

Розглянемо приклади на застосування цього методу до розв'язування економічних задач дискретного оптимального керування.

***Задача* 1**

Інвестор розподіляє суму в розмірі S грн між N підприємствами. Виділення k-му підприємству суми в розмірі u грн приносить прибуток у розмірі $J_k(u)$ грн, $k = 1, 2, ..., N$.

Визначити, скільки грошей необхідно виділити кожному підприємству, щоб сумарний дохід усіх підприємств був максимальним.

Математичне формулювання задачі. Позначимо кошти, які виділяються k-му підприємству $(k = 1, 2, ..., N)$, через u_k, а загальну суму коштів, виділених підприємствам з номерами від 1 до k, через x_k. Задача динамічного програмування формулюється так:

$$J(x,u) = \sum_{k=1}^{k=N} J_k(u_k) \to \max,$$

$$x_k = x_{k-1} + u_k, \ k = 1,2,...,N,$$

$$u_k \in [0; S - x_{k-1}], \ k = 1,2,...,N,$$

$$x(0) = 0, \ x(N) = S.$$

***Задача* 2**

Фірма є оптовою базою, яка містить Q т продукції. Запаси продукції можуть надходити та продаватися на початку кожного з N місяців, причому поповнення запасів передує продажу. Зберігання однієї тонни продукції протягом k-го місяця коштує p_k грн, а продаж тієї самої кількості на початок k-го місяця приносить q_k грн доходу. Початкова кількість продукції на складі дорівнює a т.

Визначити кількість продукції, яку на початок кожного місяця слід приймати на зберігання і продавати, щоб сумарний прибуток бази за N місяців був максимальним.

Математичне формулювання задачі. Нехай $x(k)$ — кількість продукції, що надійшла до бази на початок k-го місяця, а $u(k)$ — кількість продукції, проданої на початок k-го місяця. Тоді протягом *k*-го місяця на базі зберігається кількість продукції, що дорівнює $x(k)-u(k).$ Дохід, який фірма отримає протягом *k*-го місяця від продажу кількості $u(k)$ продукції, дорівнює $q_k u(k)$ грн, а витрати на зберігання продукції протягом k-го місяця становлять $p_k\left(x(k)-u(k)\right)$ грн. Тоді прибуток $J(x(k),u(k)),$ який фірма отримає протягом *k*-го місяця, дорівнює $q_k u(k)-p_k\left(x(k)-u(k)\right)$ грн, або

$$J(x(k),\, u(k)) = -p_k x(k) + (p_k + q_k)u(k).$$

Задача динамічного програмування формулюється так:

$$J(x,u) = -\sum_{k=1}^{k=N} p_k x(k) + \sum_{k=1}^{k=N}(p_k + q_k)u(k) \to \max,$$

$$x(0) = a\,,\;\; x(k) - u(k) \le Q,$$

$$x(k) \ge 0, u(k) \ge 0\,,\;\; k = 1, 2, ..., N.$$

Для багатьох економічних і виробничих задач характерною є ***дискретна модель***, оскільки величини, що описують процес, можуть набувати тільки дискретного ряду значень. Функціональні залежності в таких задачах задаються, як правило, не аналітично, а у вигляді таблиць. Проте загальна схема їх розв'язування методом динамічного програмування залишається без змін.

***Задача* 3**

Загальна сума в 4 млн грн розподіляється між трьома філіями, причому кожна з них отримує суму, кратну 1 млн грн. У результаті виділення *k*-й філії коштів у розмірі *u* вона дає дохід $J_k(u),\; k=1, 2, 3,$ значення якого може знайти з табл. 6.1.

Таблиця 6.1

u	0	1	2	3	4
$J_1(u)$	0	5	9	11	12
$J_2(u)$	0	4	8	12	14
$J_k(u)$	0	7	9	10	11

Розподілити кошти між філіями так, щоб їхній сумарний дохід був максимальним.

Легко побачити, що ця задача є частинним випадком **задачі 1.** З огляду на це позначимо суму коштів, які виділяються *k*-му підприємству $(k = 1, 2, 3)$, через u_k, а загальну суму коштів, виділених підприємствам із номерами від 1 до *k*, через x_k. Тоді задача багатокрокової оптимізації має вигляд:

$$J(x,u) = \sum_{k=1}^{k=3} J_k(u_k) \to \max,$$

$$x_k = x_{k-1} + u_k \ , k = 1, 2, 3,$$

$$u_k \in [0;4 - x_{k-1}] \bigcap Z^+ \ , \ k = 1, 2, 3,$$

$$x(0) = 0 \ , \ x(3) = 4,$$

де Z^+ — множина цілих невід'ємних чисел.

Алгоритм розв'язування методом динамічного програмування складається з двох етапів.

Етап 1. (*Умовна оптимізація*)

Крок 1. Беручи до уваги, що x_2 — це сума коштів, яку було виділено першій і другій філіям, знаходимо максимальний дохід, який отримає при цьому третя філія. Згідно з (6.36) маємо:

$$\omega_3(x_2) = \max_{u_3 \in [0;4-x_2] \bigcap Z^+} J_3(u_3).$$

Оскільки функція $f_3(x_2,u_3) = J_3(u_3)$ — зростаюча функція аргументу u_3 (див. табл. 6.1), то вона досягає максимуму при найбільшому припустимому значенні u_3:

$$\max u_3(x_2) = [4 - x_2], \tag{6.37}$$

де $[a]$ означає цілу частину числа a.

Звідси дістанемо: $\omega_3(x_2) = f_3(x_2, \max u_3(x_2)) = J_3([4 - x_2])$.

Значення $\omega_3(x_2)$, знайдені згідно з табл. 6.1, наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2

x_2	0	1	2	3	4
$J_3(x_2)$	11	10	9	7	0

Крок 2. Обчислимо

$$\omega_2(x_1) = \max_{u_2 \in [0;4-x_1] \cap Z^+} \{\omega_3(x_1 + u_2) + J_2(u_2)\}.$$

Для відшукання $f_2(x_1, u_2) = \omega_3(x_1 + u_2) + J_2(u_2)$ складемо таблицю значень цієї функції (табл. 6.3), скориставшись даними табл. 6.1 і 6.2.

Таблиця 6.3

x_1	u_2				
	0	1	2	3	4
0	11	14	17	**19**	14
1	10	13	**15**	12	—
2	9	**11**	8	—	—
3	**7**	4	—	—	—
4	**0**	—	—	—	—

Із табл. 6.3 випливає, що при $x_1 = 0$, max u_2 = **19**; при $x_1 = 1$, max u_2 = **15**; при $x_1 = 2$, max u_2 = **11**; при $x_1 = 3$, max u_2 = **7**; при $x_1 = 4$, max u_2 = **0** (ці значення в таблиці також виділено напівжирним шрифтом).

Використовуючи табл. 6.3, знаходимо значення функцій $\omega_2(x_1)$ і $u_2(x_1)$, наведені в табл. 6.4 і 6.5.

Таблиця 6.4

x_1	0	1	2	3	4
$\omega_2(x_1)$	19	15	11	7	0

Таблиця 6.5

x_1	0	1	2	3	4
$u_2(x_1)$	3	2	1	0	0

Крок 3. Беручи до уваги, що $x_0 = 0$, знаходимо тільки $\omega_1(0)$ і $u_1(0)$:

$$\omega_1(0) = \max_{u_1 \in [0;4] \cap Z^+} \{\omega_2(0 + u_1) + J_1(u_1)\}.$$

Для визначення максимуму в правій частині останньої рівності складемо таблицю значень функції $f_2(0, u_1) = \omega_2(u_1) + J_1(u_1)$ (табл. 6.6), скориставшись даними табл. 6.1 і 6.4.

Таблиця 6.6

u_1	0	1	2	3	4
$f_2(0, u_1)$	19	20	20	19	12

Як випливає з табл. 6.6, $\omega_1(0) = 20$, коли $u_1(0) = 1$ або $u_1(0) = 2$, тобто в даній задачі існують два оптимальні керування і дві оптимальні траєкторії.

Етап 2. (*Безпосередня оптимізація*)

Крок 1.

1) Нехай $\max u_1 = 1$, тоді $\max x_1 = \max x_0 + \max u_1 = 1;$

2) нехай $\max u_1 = 2$, тоді $\max x_1 = \max x_0 + \max u_1 = 2.$

Крок 2.

1) Для $\max x_1 = 1$ маємо $\max u_2 = u_2(1) = 2$ (див. табл. 6.5), $\max x_2 = \max x_1 + \max u_2 = 3;$

2) для $\max x_1 = 2$ дістаємо $\max u_2 = u_2(1) = 2$ (див. табл. 6.5), $\max x_2 = \max x_1 + \max u_2 = 3.$

Крок 3. Оскільки для обох оптимальних траєкторій $\max x_2 = 3,$ то з (6.37) знаходимо $\max u_3 = u_3(3) = 1,$ $\max x_3 = \max x_2 + \max u_3 = 4.$

Остаточно дістаємо $u_{опт.} = \{1,2,1\}$ або $u_{\text{опт}} = \{2,1,1\}$, тоді як $x_{\text{опт}} = \{0,1,3,4\}$ (в обох випадках).

Отже, існують два оптимальні варіанти розподілу сум між філіями:

1-й варіант: першій філії виділяється 1 млн грн, другій — 2 млн грн, третій — 1 млн грн.

2-й варіант: першій філії виділяється 2 млн грн, другій — 1 млн грн, третій — 1 млн грн.

В обох випадках сумарний дохід філій становить $\omega_1(0) = 20$ млн грн.

Розглянемо ще одну задачу на основі методу динамічного програмування, відому у світовій практиці під назвою ***оптимізації розподілу ресурсів між стратегічними одиницями бізнесу,*** подавши спочатку деякі пояснення.

Під ***стратегічною одиницею бізнесу*** розумітимемо самостійний підрозділ у межах однієї фірми, відповідальний за відповідну товарну групу, із концентрацією на відповідному ринку та менеджером, який відповідає за об’єднання всіх функцій в єдину стратегію.

На практиці з огляду на необхідність своєчасного реагування на тенденції ринку, а також формування конкурентоспроможних стратегій і розподілу обмежених ресурсів між стратегічними одиницями бізнесу перед менеджерами постає потреба у виборі й порівняльному аналізі методик та інструментів дослідження і ведення бізнесу.

У практиці маркетингу широко відомий матричний підхід до оцінювання стратегічної одиниці на ринку, що дає змогу приймати рішення про вибір стратегій. Ідеться про групу матричних методів, за допомогою яких вдається побудувати просторову модель з такими властивостями: її координати відбивають значення характерних факторів, які описують ринкову ситуацію та власні можливості стратегічної одиниці бізнесу.

Існують два підходи до прийняття рішення про збереження чи ліквідацію деяких аспектів діяльності фірми.

Перший — ***портфельний аналіз***, базою якого є матриця (її у світовій практиці позначають BCG), котра розглядає стратегічну одиницю бізнесу, тобто продукти або послуги компанії, з погляду їхньої інвестиційної привабливості (рис. 6.6).

		Відносна ринкова частка	
Відносна швидкість зростання обсягів продажу	висока	висока	низька
		Зірки	Невдахи
	низька	Дійні корови	Важкі діти

Рис. 6.6

Портфельний аналіз на основі матриці BCG — доволі ефективний практичний інструмент для аналізу бізнес-портфеля компанії та прийняття рішень стосовно того, в цьому портфелі розвивати та звідки брати гроші, а що ліквідувати. Практично аналіз бізнес-портфеля компанії являє собою констатацію фактів, відомих топ-менеджеру компанії. Основна цінність такого аналізу — підтвердження необхідності припинення діяльності за тими напрямками бізнесу (продуктами), які підпадають під категорію «Важкі діти» (див. рис. 6.6). Проте портфельний аналіз попри всю свою наочність і практичність прийнятний передусім для функціонально гнучких, багатопродуктових компаній, здатних оперативно вносити зміни до свого бізнес-портфеля (наприклад, для підприємств харчової, легкої промисловості).

Другий підхід призначений для багатопродуктових підприємств, жорстко прив’язаних до власних технологій. Він базується на так званій ***матриці аутсорсингу*** (рис. 6.7).

		Оцінка порівняно з ринком		
		гірше	так само	краще
Стратегічна важливість	висока	**1** Створюй та вступай до альянсу!	**2** Розвивай та захищай	**3** Захищай та виділяй
	середня	**4** Вступай до альянсу	**5** Роби сам та розвивай	**6** Роби сам та продавай
	низька	**7** Ліквідуй та купуй на ринку	**8** Ліквідуй та купуй на ринку	**9** Виділяй та продавай

Рис. 6.7

Сутність методу матриці аутсорсингу — матричне подання аналізованих аспектів (компетенцій, функцій, переділу, технологій тощо) за двома головними факторами:

• *стратегічною важливістю* — наскільки той чи інший елемент бізнесу (компетенції, окремі технологічні процеси, відділи, функції, переділи, технології тощо) важливий із погляду стратегії компанії;

• *оцінкою розглядуваного елемента* бізнес-системи порівняно з ринком — наскільки добре (щодо ринку) виконується та чи інша робота, наскільки відповідає наявному галузевому розвитку конкретний технологічний процес, наскільки добре виконує свої функції той чи інший відділ, наскільки кваліфіковані співробітники тощо.

Матриця аутсорсингу формує дев'ять полів, класифікація за якими допомагає вибрати керівне стратегічне рішення згідно з вимогами, що визначаються діяльністю підприємства (компетенції, функції, переділи, технології), незалежно від бізнес-портфеля компанії. Результатом такого аналізу стає пошук нових можливостей, зміна меж бізнесу, розподіл ризиків між сторонніми спеціалістами в тих галузях діяльності, в яких не варто конкурувати з ними.

Проте жодний із цих підходів не дає економічної оцінки ефективності прийняття остаточного стратегічного рішення щодо розподілу обмежених ресурсів фірми, а тому вибір варіантів рішень на основі стратегій матриць BCG і аутсорсингу може бути недостатньо обгрунтованим.

Зауважимо, що розподіл ресурсів між стратегічними одиницями бізнесу є сенс розглядати як керований процес. У цьому разі слід використовувати метод динамічного програмування, розглядаючи об'єкт керування, що переводиться з початкового стану в кінцевий за k кроків. Припустимо, що рішення приймається послідовно на кожному кроці, а керування, яке переводить систему з початкового стану S_0 у кінцевий S_n, являє собою сукупність із k покрокових керувань. Застосування методу динамічного програмування для пошуку рішення зводиться до виконання описаних далі дій.

1. Вибирають спосіб поділу процесу на кроки.

2. На кожному кроці визначають параметри стану S_k і змінні керування u_k.

3. Записують рівняння станів.

4. Вводять цільову функцію кроку k і сумарну цільову функцію.

5. Вводять до розгляду умовні максимуми (мінімуми) $\omega_k(S_{k-1})$ й умовне оптимальне керування на кроці k: $u_k^*(S_{k-1})$, $k = 1,2,...,n$.

6. Згідно з обчислювальною схемою динамічного програмування записують основне рівняння Беллмана для $\omega_n(S_{n-1}), \omega_k(S_{k-1})$, $k = 1,2,...,n-1$.

7. Розв'язують послідовно рівняння Беллмана (умовна оптимізація) і дістають дві послідовності функцій: $\{\omega_k(S_{k-1})\}$, $\{u_k^*(S_{k-1})\}$.

8. Після виконання умов оптимізації дістають оптимальні розв'язки для конкретного початкового стану S_0:

а) $\omega_{\max} = \omega_1^*(S_0)$;

б) за ланцюжком $S_0 \Rightarrow u_1^* \to S_1^* \Rightarrow ... \Rightarrow u_n^* \to S_n^*$ — оптимальне керування $u^*(u_1^*,...,u_n^*)$.

Розглянемо приклад на застосування цього методу для відшукання розв'язку задачі оптимального розподілу ресурсів між стратегічними одиницями на k років.

Нехай планується діяльність двох стратегічних одиниць бізнесу на k = 4 роки. Початкові ресурси $S_0 = 10\,000$ грн. Кошти x, вкладені в першу стратегічну одиницю бізнесу на початку року, дають наприкінці року прибуток $f_1(x)$ і повертаються в розмірі $q_1(x) < x.$ Для другої стратегічної одиниці бізнесу прибуток становить $f_2(x),$ а повертаються кошти в розмірі $q_2(x) < x.$ Наприкінці року всі повернені кошти знову розподіляються між двома стратегічними одиницями бізнесу. Для зручності введемо два обмеження: нові кошти не надходять, прибуток у виробництво не вкладається (ці умови спрощують вид рівнянь стану, але на алгоритм динамічного програмування не впливають). Необхідно розподілити кошти S_0 між двома стратегічними одиницями бізнесу на k років у такий спосіб, щоб сумарний прибуток від обох галузей за k років був максимальним за умови, що $f_1(x) = 0{,}6x;$ $q_1(x) = 0{,}7x$; $f_2(x) = 0{,}5x$; $q_2(x) = 0{,}8x.$

Процес розподілу коштів між двома одиницями бізнесу відбувається в часі, рішення приймають на початку кожного року, тим самим виконуючи поділ на кроки: номер кроку — номер року. Керована система — дві стратегічні одиниці бізнесу, а керування полягає у виділенні коштів для кожної стратегічної одиниці бізнесу в поточному році. На початок року k параметри стану: $S_{k-1}(k = 1,2,...,n)$ — кількість коштів, які необхідно розподілити. На кожному кроці маємо дві змінні: x_k і y_k — кількість коштів, виділених відповідно першій і другій стратегічним одиницям бізнесу. Оскільки всі кошти в кількості S_k розподіляються, то $y_k = S_{k-1} - x_k,$ і тому керування на k-му кроці залежить від однієї змінної x_n, тобто $u_k(x_k, S_{k-1} - x_k).$

Рівняння стану

$$S_k = q_1(x_k) + q_2(S_{k-1} - x_k) \tag{6.38}$$

виражають залишок коштів, які буде повернено наприкінці року k. Показник ефективності кроку k — це прибуток, отримуваний наприкінці року k від обох стратегічних одиниць бізнесу:

$$f_1(x_k) + f_2(S_{k-1} - x_k). \tag{6.39}$$

Сумарний показник ефективності — це прибуток за n років:

$$J = \sum_{k=1}^{n} (f_1(x_k) + f_2(S_{k-1} - x_k)). \tag{40}$$

Нехай $\omega_k(S_{k-1})$ — умовний оптимізаційний прибуток за $n-k+1$ років (починаючи з k-го року до року n включно) за умови, що кошти S_k, наявні на початок року k, надалі розподіляються оптимально. Тоді оптимальний прибуток за n років дорівнює $\omega_{\max} = \omega_1^*(S_0)$. Рівняння Беллмана (6.36) має вигляд:

$$\omega_n^*(S_{n-1}) = \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}} \{f_1(x_n) + f_2(S_{n-1} - x_n)\}, \tag{6.41}$$

$$\begin{gathered} \omega_k^*(S_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}} \{f_1(x_k) + \\ + f_2(S_{k-1} - x_k) + \omega_{k+1}^*(S_k)\}. \end{gathered} \tag{6.42}$$

$$k = 2,3,\ldots,n-1.$$

Підставляючи дані умови задачі в рівняння стану (6.38), дістаємо:

$$S_k = 0{,}7x_k + 0{,}8(S_{k-1} - x_k), \text{ або } S_k = 0{,}8S_{k-1} - 0{,}1x_k. \tag{6.43}$$

При цьому цільова функція кроку k має вигляд:

$$0{,}6x_k + 0{,}5(S_{k-1} - x_k) = 0{,}1x_k + 0{,}5S_{k-1}, \tag{6.44}$$

цільова функція за весь розглядуваний період набирає вигляду:

$$J = \sum_{k=1}^{4} (0{,}5S_{k-1} + 0{,}1x_k), \tag{6.45}$$

а функціональні рівняння мають вигляд:

$$\omega_4^*(S_3) = \max_{0 \le x_4 \le S_3} \{0{,}5S_3 + 0{,}1x_4\}, \tag{6.46}$$

$$\omega_k^*(S_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le S_{k-1}} \{0{,}5S_{k-1} + 0{,}1x_k + \omega_{k+1}^*(S_k)\}. \tag{6.47}$$

Крок $k = 4$. Проводимо умовну оптимізацію. Для цього використовуємо рівняння (6. 46). Вираз у фігурних дужках позначимо через J_4. Функція J_4 лінійна, а оскільки її кутовий коефіцієнт $0{,}1 > 0$, то вона зростаюча. Тому максимум функції досягається у правому кінці відрізка $[0; S_3]$.

Отже, $J_4^*(S_3) = 0{,}6 \cdot S_3$ при $x_4^*(S_3) = S_3$.

Крок $k = 3$. Максимум цільової функції визначається з формули $\omega_3^*(S_3) = \max\limits_{0 \le x_3 \le S_2} \{0{,}1x_3 + 0{,}5S_2 + 0{,}6S_3\}$. Знайдемо S_3 із рівняння стану (6.43): $S_3 = 0{,}8S_2 - 0{,}1x_3$. Підставивши його у праву частину рівняння максимуму цільової функції на кроці $k = 3$, дістанемо:

$$\max J_3 = \max_{0 \le x_3 \le S_2} \{0{,}1x_3 + 0{,}5S_2 + 0{,}6(0{,}8S_2 - 0{,}1x_3)\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max J_3 = \max_{0 \le x_3 \le S_2} \{0{,}04x_3 + 0{,}98S_2\}.$$

Як і в попередньому випадку, максимум досягається при $x_3 = S_2$, тобто

$$\omega_3^*(S_2) = 1{,}02S_2 \text{ при } x_3^*(S_2) = S_2.$$

Крок $k = 2$. Із рівняння стану дістанемо $S_2 = 0{,}8S_1 - 0{,}1x_2$. Рівняння (6.46) набирає вигляду $\omega_2^*(S_1) = \max\limits_{0 \le x_2 \le S_1} \{1{,}316S_1 - 0{,}002x_2\}$. Функція $\omega_2^*(S_1)$ лінійна відносно x_2 і є спадною на відрізку $[0; S_1]$, тому вона досягає максимуму при $x_2 = 0$. Тоді $\omega_2^*(S_1) = 1{,}316S_1$ при $x_2^*(S_1) = 0$.

Крок $k = 1$. Запишемо рівняння (6.46): $\omega_1^*(S_0) = \max\limits_{0 \le x_1 \le S_0} \{1{,}5528S_0 - 0{,}0316x_1\}$. Як і в попередньому випадку, максимум досягається в лівому кінці відрізка, тобто $\omega_1^*(S_0) = 1{,}5528S_0$ при $x_1^*(S_0) = 0$.

На цьому умовна оптимізація закінчується. Використовуючи її результати і початкові дані, дістанемо:

$$\max J = \omega_1^*(10000), \text{ тобто } \max J = 15528.$$

Результати покрокового розв'язування задачі оптимального розподілу ресурсів методом динамічного програмування подано в табл. 6.7.

Таблиця 6.7

Номер кроку (року) k	S_{k-1}	x_k	y_k	Одиниця бізнесу, якій виділяються всі кошти
1	$S_0 = 10000$	$\max x_1 = 0$	$\max y_1 = S_0 = 10000$	другій одиниці
2	$\max S_1 = 0{,}8 \cdot 10000 - 0{,}1 \cdot 0 = 8000$	$\max x_2 = 0$	$\max y_2 = S_1 = 8000$	другій одиниці
3	$\max S_2 = 0{,}8 \cdot 8000 - 0{,}1 \cdot 0 = 6400$	$\max x_3 = 6400$	$\max y_3 = 0$	першій одиниці
4	$\max S_3 = 0{,}8 \cdot 6400 - 0{,}1 \cdot 6400 = 4480$	$\max x_4 = 4480$	$\max y_4 = 0$	першій одиниці

Отже, оптимальний прибуток за 4 роки, отриманий від двох стратегічних одиниць бізнесу за наявності початкових коштів у розмірі 10 000 грн, дорівнює 15 528 грн за умови, що перша стратегічна одиниця бізнесу отримає по роках (0; 0; 6400; 4480), а друга — (10000; 8000; 0; 0).

Використовуючи динамічне програмування в поєднанні з розглянутими підходами, можна приймати економічно обгрунтовані рішення щодо розподілу обмежених ресурсів між стратегічними одиницями бізнесу, істотно сприяючи підвищенню ефективності діяльності підприємства.

***Задача* 4**

На початок року на підприємстві було встановлено нове устаткування. Залежність виробничої потужності цього устаткування від часу його використання, а також залежність витрат на його утримання та ремонт для різних термінів його використання наведено в табл. 6.8.

Таблиця 6.8

Характеристика	Час τ, протягом якого експлуатується устаткування, роки					
	0	1	2	3	4	5
Річний випуск продукції $R(\tau)$ у вартісному виразі, тис. грн	80	75	65	60	60	55
Річні витрати $Z(\tau)$, пов'язані з утриманням і ремонтом устаткування, тис. грн	20	25	30	35	45	55

Знаючи, що витрати, пов'язані з придбанням та встановлення відповідного устаткування, становлять 40 тис. грн, а замінюване устаткування списується, скласти такий план заміни устаткування впродовж п'яти років, згідно з яким загальний прибуток за даний період часу буде найбільшим.

Математичне формулювання задачі. Цю задачу можна розглядати як задачу динамічного програмування, в якій роль системи S відіграє устаткування. Стан цієї системи визначається фактичним часом використання устаткування (його віком) τ, тобто описується єдиним параметром τ.

При цьому роль керування відіграє рішення про заміну та збереження устаткування, яке приймається на початку кожного року.

Нехай u_1 — рішення про збереження устаткування, а u_2 — рішення про заміну устаткування. Тоді задача полягає у відшуканні такої стратегії керування, яка визначається рішеннями, що приймаються на початок кожного року, і завдяки якій загальний прибуток за п'ять років буде найбільшим.

На першому етапі при русі від початку 5-го року до початку 1-го року для кожного припустимого стану устаткування знайдемо умовне оптимальне керування (розв'язок), а на другому етапі при русі від початку 1-го року до початку 5-го з умовних оптимальних розв'язків для кожного року складемо оптимальний план заміни устаткування на п'ять років.

Для відшукання умовних оптимальних розв'язків спочатку необхідно скласти функціональне рівняння Беллмана.

Оскільки за нашим припущенням до початку k-го року $(k = 1,2,...,5)$ може прийматись тільки одне з двох рішень — замінювати або не замінювати устаткування, то прибуток підприємства за k-й рік становить

$$F_k(\tau^{(k)}, u_k)_k = \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) \quad \text{при} \quad u_1, \\ R(\tau^{(k)} = 0) - Z(\tau^{(k)} = 0) - C_n \quad \text{при} \quad u_2, \end{cases}$$

де $\tau^{(k)}$ — вік устаткування на початок k-го року $(k = 1,2,...,5)$; u_k — керування, що реалізується на початок k-го року; C_n — вартість нового устаткування.

Отже, в даному випадку рівняння Беллмана набирає вигляду

$$F_k(\tau^{(k)}) = \max_{\tau} \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) + F_{k+1}(\tau^{(k+1)}), \\ R(\tau^{(k)} = 0) - Z(\tau^{(k)} = 0) - C_n + F_{k+1}(\tau^{(k)} = 1). \end{cases} \qquad (6.48)$$

Використовуючи тепер рівняння (6.48), приступаємо до відшукання розв'язку початкової задачі. Насамперед визначаємо умовне оптимальне керування для останнього 5-го року, знаходячи множину припустимих станів устаткування на початок даного року. Оскільки на початок 1-го року було нове устаткування $(\tau^{(k)}=0)$, то вік устаткування на початок 5-го року може становити 1,2,3 і 4 роки. Тому припустимі стани системи на цей період часу такі: $\tau_1^{(5)}=1$; $\tau_2^{(5)}=2$; $\tau_3^{(5)}=3$; $\tau_4^{(5)}=4$. Для кожного з цих станів знайдемо умовний оптимальний розв'язок і відповідне значення функції $F_5(\tau^{(5)})$. Використовуючи рівняння (6.48) і співвідношення $F_6(\tau^{(k+1)})=0$ (оскільки розглядається останній рік розрахункового періоду), дістаємо:

$$F_5(\tau^{(5)})=\max\begin{cases} R(\tau^{(5)})-Z(\tau^{(5)}), \\ R(\tau^{(5)}=0)-Z(\tau^{(5)}=0)-C_n. \end{cases} \tag{6.49}$$

Підставляючи тепер у (6.49) замість $\tau^{(5)}$ його значення, що дорівнює 1, і враховуючи дані табл. 6.8, знаходимо:

$$F_5(\tau_1^{(5)})=\max\begin{Bmatrix} R(\tau^{(5)}=1)-Z(\tau^{(5)}=1) \\ R(\tau^{(5)}=0)-Z(\tau^{(5)}=0)-C_n \end{Bmatrix}=$$

$$=\max\begin{Bmatrix} 75-25 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix}=50,\ u^0=u_1.$$

Отже, умовно оптимальний розв'язок у цьому разі є u_1.

Виконаємо аналогічні обчислення для інших припустимих станів устаткування на початок 5-го року:

$$F_5(\tau_2^{(5)})=\max\begin{Bmatrix} 65-30 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix}=35,\ u^0=u_1;$$

$$F_5(\tau_3^{(5)})=\max\begin{Bmatrix} 60-35 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix}=25,\ u^0=u_1;$$

$$F_5(\tau_4^{(5)})=\max\begin{Bmatrix} 60-45 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix}=20,\ u^0=u_2.$$

Результати обчислень зведемо в табл. 6.9.

Таблиця 6.9

Вік устаткування $\tau^{(5)}$, років	Значення функції $F_5(\tau^{(5)})$, тис. грн	Умовно оптимальний розв'язок u^0
1	50	u_1
2	35	u_1
3	25	u_1
4	20	u_2

Розглянемо тепер можливі стани устаткування на початок 4-го року. Очевидно, припустимими є стани $\tau_1^{(4)} = 1$; $\tau_2^{(4)} = 2$; $\tau_3^{(4)} = 3$. Для кожного з них визначаємо умовний оптимальний розв'язок і відповідне значення функції $F_4(\tau^{(4)})$. Для цього використовуємо рівняння (6.48) і дані табл. 6.8 і 6.9.

Так, для $\tau_1^{(4)} = 1$ маємо:

$$F_4(\tau_1^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} R(\tau^{(4)} = 1) - Z(\tau^{(4)} = 1) \quad + F_5(\tau^{(5)} = 2 \\ R(\tau^{(4)} = 0) - Z(\tau^{(4)} = 0) - C_n + F_5(\tau^{(5)} = 1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 35 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 85,\ u^0 = u_1.$$

Аналогічно знаходимо:

$$F_4(\tau_2^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70\,,\ u^0 = u_2\,;$$

$$F_4(\tau_3^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70,\ u^0 = u_2.$$

Результати обчислень запишемо в табл. 6.10.

Таблиця 6.10

Вік устаткування $\tau^{(4)}$, років	Значення функції $F_4(\tau^{(4)})$, тис. грн	Умовно оптимальний розв'язок u^0
1	85	u_1
2	70	u_2
3	70	u_2

Визначимо тепер умовний оптимальний розв'язок для кожного з припустимих станів на початок 3-го року. Очевидно, такими є станами $\tau_1^{(3)} = 1$; $\tau_2^{(3)} = 2$. Згідно з рівнянням (48) маємо

$$F_3(\tau_1^{(3)}) = \max\left\{\begin{array}{c} R(\tau^{(3)} = 1) - Z(\tau^{(3)} = 1) \quad + F_4(\tau^{(4)} = 2) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{array}\right\};$$

$$F_2(\tau_2^{(3)}) = \max\left\{\begin{array}{c} R(\tau^{(3)} = 2) - Z(\tau^{(3)} = 2) \quad + F_4(\tau^{(4)} = 3) \\ R(\tau^{(3)} = 0) - Z(\tau^{(3)} = 0) - C_n + F_4(\tau^{(4)} = 1) \end{array}\right\}.$$

Використовуючи дані табл. 6.8 і 6.10, дістаємо:

$$F_3(\tau_1^{(3)}) = \max\left\{\begin{array}{c} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{array}\right\} = 120, \ u^0 = u_1;$$

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max\left\{\begin{array}{c} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{array}\right\} = 105, \ u^0 = u_2.$$

З останнього виразу випливає, що коли на початок 3-го року вік устаткування становить два роки, то незалежно від того, яке рішення (u_1 чи u_2) буде прийнято, прибуток буде однаковим. Це означає, що як умовно оптимальний можна взяти довільний розв'язок, наприклад u_2. Знайдене значення для $F_3(\tau^{(3)})$ і відповідний умовний оптимальний розв'язок записуємо в табл. 6.11.

Таблиця 6.11

Вік устаткування $\tau^{(3)}$, роки	Значення функції $F_3(\tau^{(3)})$, тис. грн	Умовно оптимальний розв'язок u^0
1	120	u_1
2	105	u_2

Нарешті, розглянемо припустимий стан устаткування на початок 2-го року. Очевидно, що на цей момент часу вік устаткування може дорівнювати лише одному року (табл. 6.12).

Таблиця 6.12

Вік устаткування $\tau^{(2)}$, роки	Значення функції $F_2(\tau^{(2)})$, тис. грн	Умовно оптимальний розв'язок u^0
1	155	u_1

Отже, необхідно порівняти два можливі рішення: зберегти устаткування чи зробити заміну.

Згідно з умовою на початок встановлено нове устаткування $\left(\tau_1^{(1)} = 0\right)$. Тому проблеми вибору між зберіганням і заміною устаткування не існує: устаткування слід зберегти. Це означає, що, умовно оптимальним є розв'язок u_1, а значення функції

$$F_1(\tau_1^{(1)}) = R(\tau_2^{(1)} = 0) - Z(\tau_1^{(1)} = 0) + F_2(\tau^{(1)} = 1) = 80 - 20 + 155 = 215 .$$

Таким чином, максимальний прибуток підприємства може бути 215 тис. грн. Він відповідає оптимальному плану заміни устаткування, побудованому за даними табл. 6.9—6.12, тобто в результаті реалізації другого етапу обчислювального процесу, який полягає в проходженні всіх розглянутих кроків з початку 1-го року до кінця 5-го. Для 1-го року рішення єдине — слід зберегти устаткування. Отже, вік устаткування на початок 2-го року дорівнює одному року. Тоді згідно з даними табл. 6.12 оптимальним для 2-го року є рішення про збереження устаткування. Реалізація такого рішення приводить до того, що вік устаткування на початок 3-го року становить два роки. За такого віку (див. табл. 6.13) устаткування в 3-му році слід замінити. Після заміни устаткування його вік на початок 4-го року становить один рік. Як бачимо з табл. 6.13, за такого віку устаткування його не слід змінювати. Тому вік устаткування на початок 5-го року становить два роки, і змінювати його не потрібно (див. табл. 6.9).

Таким чином, дістанемо оптимальний план заміни устаткування (табл. 6.13).

Таблиця 6.13

Оптимальне рішення	1-й рік	2-й рік	3-й рік	4-й рік	5-й рік
	Зберегти	Зберегти	Виконати заміну	Зберегти	Зберегти

***Задача* 5**

Щоб збільшити обсяг випуску продукції підвищеного попиту, у виробництві якої беруть участь три підрозділи підприємства, засновники концерну прийняли рішення про виділення цим підрозділам додаткових коштів у сумі 700 тис. грн. Використання *i*-м підрозділом x_i тис. грн із виділенних коштів забезпечує приріст випуску продукції, який визначається нелінійною функцією $f_i(x_i)$. Відповідні дані наведено в табл. 6.14.

Таблиця 6.14

Обсяг додаткового фінансування, тис. грн	Приріст продукції $f_i(x_i)$ залежно від суми фінансування		
	для першого підрозділу, тис. грн	другого підрозділу, тис. грн	для третього підрозділу, тис. грн
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Математичне формулювання задачі. Для розв'язування даної задачі динамічного програмування слід скласти рекурентне співвідношення Беллмана. У розглядуваному випадку це співвідношення приводить до таких функціональних рівнянь:

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_1 \le x} \{ f_1(x_1) \};$$

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x} \{ f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2) \}; \qquad (6.50)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\varphi_{n-1}(x) = \max_{0 \le x_{n-1} \le x} \{ f_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_{n-1}) \}.$$

Тут функції $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$ визначають максимальний приріст випуску продукції внаслідок відповідного розподілу x тис. грн додаткового фінансування між i підрозділами. Тому значення функції $\varphi_n(x)$ обчислюється лише для одного значення $x = S$, оскільки обсяг додаткового фінансування для n підрозділів дорівнює S тис. грн.

Використовуючи тепер рекурентні співвідношення (6.50) і дані таблиці 6.14, приступаємо до відшукання розв'язку задачі, тобто до визначення спочатку умовно оптимального, а далі й до оптимального розподілу додаткового фінансування між підрозділами.

Починаємо з визначення умовно оптимального додаткового фінансування, яке виділяється для розвитку першого підрозділу. Із цією метою цього знаходимо значення $\varphi_1(x)$ для таких значень x : 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 і 700.

Нехай $x=0$; тоді $\varphi_1(0)=0$. Візьмемо тепер $x=100$. Тоді, скориставшись даними табл. 6.14, дістанемо:

$$\varphi_1(100)=\max\begin{Bmatrix}0\\30\end{Bmatrix}=30,\quad x_1^0=100.$$

Тут перший рядок відповідає розв'язку $x_1=0$, а другий рядок — розв'язку $x_1=100$. Так як при першому розв'язку приріст випуску продукції не забезпечується, а при другому він дорівнює 30 тис. грн, то умовно оптимальним розв'язком є $x_1^0=100$.

Аналогічно знаходимо умовно оптимальний розв'язок для решти значень x:

$$\varphi_1(200)=\max\begin{Bmatrix}0\\30\\50\end{Bmatrix}=50,\quad x_1^0=200;$$

$$\varphi_1(300)=\max\begin{Bmatrix}0\\30\\50\\90\end{Bmatrix}=90,\quad x_1^0=300;$$

$$\varphi_1(400)=\max\begin{Bmatrix}0\\30\\50\\90\\110\end{Bmatrix}=110,\quad x_1^0=400;$$

$$\varphi_1(500)=\max\begin{Bmatrix}0\\30\\50\\90\\110\\170\end{Bmatrix}=170,\quad x_1^0=500;$$

$$\varphi_1(600) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \end{Bmatrix} = 180, \quad x_1^0 = 600;$$

$$\varphi_1(700) = \max\begin{Bmatrix} 0 \\ 30 \\ 50 \\ 90 \\ 110 \\ 170 \\ 180 \\ 210 \end{Bmatrix} = 210, \quad x_1^0 = 700.$$

Знайдені в результаті обчислень умовно оптимальні розв'язки щодо першого підрозділу записуємо в табл. 6.15.

Таблиця 6.15

Обсяг додаткового фінансування x, яке виділяється першому підрозділу	Максимальний приріст $\varphi_i(x)$ випуску продукції, тис. грн	Умовно оптимальний обсяг додаткового фінансування x_1^0, що виділяється першому підрозділу, тис. грн
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

Використовуючи тепер дані табл. 6.14 і 6.15, визначаємо умовно оптимальний обсяг додаткового фінансування, яке виділяється другому підрозділу. Знаходимо $\varphi_2(x) = \max\limits_{0 \le x_2 \le x} \{f_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\}$ для кожного з припустимих значень x, а саме: 0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 і 700. Отже: маємо:

$$\varphi_2(0) = 0, \quad x_2^0 = 0;$$

$$\varphi_2(100) = \max\begin{Bmatrix} 0+30 \\ 50+0 \end{Bmatrix} = 50, \quad x_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(200) = \max\begin{Bmatrix} 0+50 \\ 50+30 \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 80, \quad x_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(300) = \max\begin{Bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ 80+30 \\ 90+0 \end{Bmatrix} = 110, \quad x_2^0 = 200;$$

$$\varphi_2(400) = \max\begin{Bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ 150+0 \end{Bmatrix} = 150, \quad x_2^0 = 400;$$

$$\varphi_2(500) = \max\begin{Bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ 190+0 \end{Bmatrix} = 190, \quad x_2^0 = 500;$$

$$\varphi_2(600) = \max\begin{Bmatrix} 0+180 \\ 50+170 \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{Bmatrix} = 220, \quad x_2^0 = 100;$$

$$\varphi_2(700) = \max\begin{Bmatrix} 0+210 \\ 50+180 \\ 80+170 \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 190+50 \\ 210+30 \\ 220+0 \end{Bmatrix} = 250, \quad x_2^0 = 200.$$

Знайдені в результаті обчислень умовно оптимальні обсяги додаткового фінансування другого підрозділу наведено в табл. 6.16.

Таблиця 6.16

Обсяг додаткового фінансування x, яке виділяється другому підрозділу	Максимальний приріст $\varphi_i(x)$ випуску продукції, тис. грн	Умовно оптимальний обсяг додаткового фінансування x_2^0, що виділяється другому підрозділу, тис. грн
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	200
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

Переходимо тепер до відшукання значень $\varphi_3(x) = \max\limits_{0 \le x_3 \le x} \{ f_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3) \}$, використовуючи для цього відповідні дані табл. 6.14 і 6.16.

Оскільки в цьому разі кількість підрозділів дорівнює трьом, то виконуємо обчислення для одного значення $x = 700$:

$$\varphi_3(700) = \max \begin{Bmatrix} 0 + 250 \\ 40 + 220 \\ 50 + 190 \\ 110 + 150 \\ 120 + 110 \\ 180 + 80 \\ 220 + 50 \\ 240 + 0 \end{Bmatrix} = 270, \quad x_3^0 = 600.$$

Отже, максимальний приріст випуску продукції становить 270 тис. грн. Це відбувається тоді, коли третьому підрозділу виділяється 600 тис. грн, а першому і другому підрозділам — 100 тис. грн. Тоді, як бачимо з табл. 6.16, другому підрозділу слід виділити 100 тис. грн, а з табл. 6.15 випливає, що першому підрозділу не виділяються додаткові кошти.

Таким чином, ми дістали оптимальний план розподілу додаткового фінансування між підрозділами, згідно з яким забезпечується максимальний приріст випуску продукції.

Вправи для самостійного розв’язування

Використовуючи метод динамічного програмування, розв’язати задачі (**1—4**).

1. На початок року на підприємстві було встановлено нове устаткування вартістю 10 тис. грн, а старе списано. Залежність виробничої потужності цього устаткування від часу його використання, а також залежність витрат на його утримання та ремонт для різних періодів експлуатації наведено в таблиці.

Таблиця 6.17

Характеристика	Час τ, протягом якого експлуатується устаткування, роки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Річний випуск продукції $R(\tau)$ у вартісному виразі, тис. грн	25	24	24	23	23	23	22	22	21	20
Річні витрати $Z(\tau)$, пов'язані з утриманням і ремонтом устаткування, тис. грн	15	15	16	16	17	17	18	18	19	20

2. Скласти оптимальний план розподілу капіталовкладень між чотирма підрозділами, про які йдеться в умові задачі 5 (див. с. 151), за даними, наведеними в поданій далі таблиці, якщо $S = 100$ тис. грн.

Обсяг капіталовкладень x_i, тис. грн	Приріст випуску $f_i(x_i)$			
	для першого підрозділу	для другого підрозділу	для третього підрозділу	для четвертого підрозділу
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

3. На складі об'ємом 90 м^3 необхідно розмістити три різні типи устаткування. Об'єм першого устаткування 24 м^3, другого — 19 м^3, третього 16 м^3, а вартість кожного з них становить відповідно 9600 грн, 5000 грн, 2500 грн.

Визначити, який об'єм устаткування кожного типу слід розмістити на складі, щоб загальна його вартість була максимальною.

4. Попит на виготовлену підприємством продукцію за перший місяць становить 2000 одиниць, за другий — 3000 одиниць, за третій — 3000 одиниць, а за четвертий — 2000 одиниць. Запаси на початок першого місяця становлять 2000 одиниць. У кожному місяці підприємство може випускати не більш як 4000 одиниць. Одночасно підприємство може зберігати не більш як 4000 одиниць. Витрати, пов'язані з виробництвом 1000, 2000, 3000 і 4000 одиниць, відповідно 130, 150, 170 і 190 грн, а витрати, пов'язані зі зберіганням 1000 одиниць, дорівнюють 10 грн.

Визначити такий план випуску продукції, згідно з яким загальна сума витрат на її виробництво та зберігання була б найменшою, а попит на продукцію був би повністю своєчасно задоволений.

Вправи для самостійної роботи

Сформулюйте задачі в термінах загальної задачі динамічного програмування (**5**—**7**).

5. До складу виробничого концерну входять два підприємства, пов'язані взаємними поставками. Вкладаючи додаткові кошти з метою розвитку цих підприємств, можна поліпшити техніко-економічні показники діяльності концерну в цілому, давши йому змогу тим самим отримати додатковий прибуток. Розмір цього прибутку залежить від того, скільки виділяється коштів кожному підприємству і як ці кошти використовуються.

Вважаючи, що на розвиток i-го підприємства на початку k-го року виділяється $u_i^{(k)}$ млн грн, знайти такий варіант розподілу коштів між підприємствами протягом n років, згідно з яким за даний період часу концерн отримає максимальний прибуток.

6. До складу виробничого концерну входять m підприємств, між якими на початку кожного року повністю розподіляється створений у концерні централізований фонд розвитку виробництва. При цьому завдяки виділенню із зазначеного фонду x_i млн грн. i-му підприємству забезпечується отримання додаткового прибутку в сумі $f_i(x_i)$ млн грн. На початок планового періоду, що становить n років, централізованому фонду розвитку виробництва було виділено A млн грн. Кожного наступного року цей фонд формується за рахунок відрахувань до нього отриманого прибутку. Ці відрахування для i-го підприємства становлять $u_i(x_i)$ млн грн.

Знайти такий варіант розподілу централізованого фонду розвитку виробництва між підприємствами, згідно з яким загальний прибуток, отриманий за n років, був би найбільшим.

7. Для здійснення своєї ефективної діяльності виробничі концерни мають періодично замінювати використовуване ними устаткування. При виконанні такої заміни враховується продуктивність використовуваного устаткування (тобто обсяг відповідного випуску продукції за одиницю часу), витрати, пов'язані з утриманням і ремонтом, а також вартістю придбаваного і замінюваного устаткування. Припустимо, що на початок планового періоду на підприємстві встановлено нове устаткування, яке дає змогу за рік τ-й випустити готової продукції на суму $R(\tau)$ млн грн, а річні витрати, пов'язані з утриманням і ремонтом устаткування, дорівнюють $Z(\tau)$ млн грн. За рік τ устаткування може бути продано за $u_1(\tau)$ млн грн і придбано за $u_2(\tau)$ млн грн.

З урахуванням усіх цих факторів знайти оптимальний план заміни устаткування, тобто план, який забезпечує максимальний прибуток від заміни устаткування протягом n років.

8. Підприємства, які випускають товари народного споживання, виробляють їх окремими партіями. Чим більший розмір партії, тим вигідніше це для підприємства. Тому кожне підприємство зацікавлене в окремі місяці випускати більше товарів, ніж це потрібно для задоволення попиту, зберігаючи залишки на складі, щоб реалізувати їх у наступні місяці. Проте, зберігання товару на складі пов'язане з відповідними витратами.

Вважатимемо, що підприємство намагається знайти оптимальний план виробництва продукції протягом n років, упродовж кожного з яких необхідно a_i $(i=1,2,...,n)$ одиниць продукції. Запаси на початок планового періоду становлять b одиниць продукції, а протягом кожного з планових місяців підприємство може виготовити не більш ніж d_i одиниць продукції. При цьому на складі може одночасно зберігатися не більш ніж A одиниць продукції. Витрати, пов'язані з виробництвом a_j $(j=1,2,...,k)$ одиниць продукції, становлять c_j тис. грн, а витрати, пов'язані зі зберіганням протягом місяця однієї одиниці продукції, становлять β тис. грн.

Визначити такий план випуску продукції, згідно з яким загальна сума витрат на її виробництво та зберігання була б мінімальною, а попит на вироби був би повністю задоволений.

6.8. Задачі опуклого програмування

Задача нелінійного програмування формулюється так: нехай $f(x_1,x_2,...,x_n)$, $g_i(x_1,x_2,...,x_n)$ — деякі функції від n змінних і

$$f(x_1,x_2,...,x_n)\to\min \tag{6.51}$$

при заданих обмеженнях

$$g_i(x_1,x_2,...,x_n)\le b_i \ \ (i=1,2,...,m), \tag{6.52}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,...,n). \tag{6.53}$$

Зауважимо, що для розв’язування сформульованої задачі в такому загальному формулюванні універсальних методів не існує. Проте для окремого класу задач, в яких зроблено додаткові обмеження щодо властивостей функцій f, g_i, створено ефективні методи.

Наприклад, якщо функція (6.51) опукла і область припустимих розв’язків, що визначається обмеженнями (6.52) і (6.53), також опукла, то можна скористатися кількома відомими методами розв’язування таких задач.

Означення 1. Функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, визначена на деякій опуклій множині X, називається ***опуклою вгору***, якщо для довільних точок X_1 і X_2 з множини X і довільного $0 \leq \lambda \leq 1$ виконується співвідношення

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \leq \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1). \tag{6.54}$$

Означення 2. Функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$, визначена на деякій опуклій множині X, називається ***опуклою вниз***, якщо для довільних точок X_1 і X_2 з множини X і довільного $0 \leq \lambda \leq 1$ виконується співвідношення

$$f(\lambda X_2 + (1-\lambda)X_1) \geq \lambda f(X_2) + (1-\lambda) f(X_1). \tag{6.55}$$

Означення 3. Говорять, що множина припустимих значень задачі (6.51) — (6.53) ***задовольняє умову регулярності***, якщо існує хоча б одна точка X, яка належить множині припустимих розв’язків, така, що виконується нерівність

$$g_i(X_i) < b_i, \ \ i = 1, 2, ..., m.$$

Означення 4. Задача (6.51) — (6.53) називається ***задачею опуклого програмування***, якщо функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ опукла вгору (вниз), а функція $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$, $i = 1, 2, ..., m$, опукла.

Означення 5. ***Функцією Лагранжа*** задачі опуклого програмування (6.51) — (6.53) називається функція

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [b_i - g_i(x_i, x_2, ..., x_n)], \tag{6.56}$$

де $\lambda_1, ..., \lambda_n$ — множники Лагранжа.

Означення 6. Точка $(X_0;Y_0)=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;\lambda_1^0;\lambda_2^0;...;\lambda_m^0)$ називається ***сідловою точкою функції Лагранжа***, якщо для всіх $x_j\geq 0$ $(j=1,2,...,n)$ і всіх $\lambda_i\geq 0$ $(i=1,2,...,m)$ виконується нерівність

$$L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1^0,...,\lambda_m^0)\leq L(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;\lambda_1^0;\lambda_2^0;...;\lambda_m^0)\leq$$
$$\leq L(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\lambda_1,...,\lambda_m).$$

***Теорема 1* (*Куна—Такера*)**

Для задачі опуклого програмування (6.51) — (6.53), множина припустимих розв'язків якої задовольняє умову регулярності, точка $X_0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ є оптимальним планом тоді і тільки тоді, коли існує точка $\lambda_0=(\lambda_1^0,\lambda_2^0,...,\lambda_n^0)$, $\lambda_i\geq 0$ $(i=1,2,...,m)$, така що точка $(X_0;\lambda_0)$ є *сідловою точкою функції Лагранжа*.

За припущення, що цільова функція $f(x_1,x_2,...,x_n)$ і функції $g_i(x_1,x_2,...,x_n)$ неперервно диференційовні, теорему Куна—Такера можна доповнити аналітичними виразами, які визначають необхідні і достатні умови того, щоб точка $(X_0;\lambda_0)$ була сідловою точкою функції Лагранжа, тобто розв'язком задачі опуклого програмування. Ці вирази мають такий вигляд:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_j}\leq 0\ (j=1,2,...,n);\\ x_j^0\dfrac{\partial L_0}{\partial x_j}=0\ (j=1,2,...,n);\\ x_j^0\geq 0\ (j=1,2,...,n);\\ \dfrac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}\geq 0\ (i=1,2,...,m);\\ \lambda_i^0\dfrac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}=0\ (i=1,2,...,m);\\ \lambda_i^0\geq 0\ (i=1,2,...,m),\end{cases}\tag{6.57}$$

де $\dfrac{\partial L_0}{\partial x_j}$ і $\dfrac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}$ — значення відповідних частинних похідних функції Лагранжа в сідловій точці.

В економічних моделях цільова функція найчастіше являє собою квадратичну форму, а функції $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ є лінійними функціями відносно змінних $x_1, x_2, ..., x_n$. У такому разі всі необхідні і достатні умови (6.57) для відшукання сідлової точки виконуються, а задача опуклого програмування називається ***задачею квадратичного програмування***.

Перш ніж сформулювати задачу квадратичного програмування, наведемо деякі означення.

ОЗНАЧЕННЯ 7. ***Квадратичною формою*** відносно змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називається числова функція від цих змінних, що подається у вигляді:

$$F = c_{11}x_1^2 + c_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3 + c_{22}x_2^2 + c_{21}x_1x_2 + c_{23}x_2x_3 + ... = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j .$$

ОЗНАЧЕННЯ 8. Квадратична форма F називається ***невід'ємно (недодатно) визначеною***, якщо $F(X) \geq 0$ ($F(X) \leq 0$) для всіх значень змінних $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Теорема 2

Квадратична форма є опуклою функцією вниз, якщо вона невід'ємно визначена, і опуклою вгору, якщо вона недодатно визначена.

ОЗНАЧЕННЯ 9. Задача, яка полягає у відшуканні найбільшого (найменшого) значення функції

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j \tag{6.58}$$

при обмеженнях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} \leq b_i \quad (i = 1, 2, ..., m), \tag{6.59}$$

$$x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, ..., n), \tag{6.60}$$

де $\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_kx_j$ — невід'ємно (недодатно) визначена квадратична форма, називається ***задачею квадратичного програмування.***

Для сформульованої задачі квадратичного програмування функція Лагранжа записується у вигляді

$$L=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j+\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{kj}x_k x_j+\lambda_i(b_i-\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j).$$

Якщо функція L має сідлову точку $(X_0;\lambda_0)=(x_1^0;x_2^0;...;x_n^0;\lambda_1^0;\lambda_2^0;...;\lambda_m^0)$, то в цій точці виконується співвідношення (6.57). Вводячи тепер додаткові змінні z_j $(j=1,2,...,n)$ і t_i $(i=1,2,...,m)$, що перетворюють нерівності, які входять у систему (6.57), на рівності, дістанемо такі співвідношення для задачі квадратичного програмування:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L_0}{\partial x_j}+z_j=0\ (j=1,2,...,n);\\ \dfrac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}-t_i=0\ (i=1,2,...,m);\\ x_j^0 z_j=0\ (j=1,2,...,n);\\ \lambda_i^0 t_i=0\ (i=1,2,...,m);\end{cases}\tag{6.61}$$

$$x_j^0\ge 0,\ z_j\ge 0,\ \lambda_i^0\ge 0,\ t_i\ge 0\ \ (j=1,2,...,n;\ i=1,2,...,m).$$

Таким чином, щоб знайти розв’язок задачі квадратичного програмування (6.58) — (6.60), достатньо визначити невід’ємний розв’язок системи лінійних рівнянь (6.61). Цей розв’язок можна знайти за допомогою методу штучного базису, який використовується для відшукання функції $F=-\sum_{i=1}^{m} My_i$ за умов (6.61), де y_i — штучні змінні, які вводяться в перші два рівняння системи (6.61).

Використовуючи метод штучного базису при розв’язуванні системи (6.61), після скінченної кількості кроків або встановлюємо неможливість існування розв’язку, або дістанемо оптимальний план початкової задачі.

Отже, процес відшукання розв’язку задачі квадратичного програмування (6.58) — (6.60) складається з таких етапів:

1. Будуємо функцію Лагранжа.
2. Записуємо у вигляді виразів (6.61) необхідні і достатні умови існування сідлової точки для функції Лагранжа.

3. Використовуючи метод штучного базису, або встановлюємо відсутність сідлової точки для функції Лагранжа, або знаходимо її координати.

4. Записуємо оптимальний розв’язок початкової задачі і знаходимо значення цільової функції.

Приклад 1. Підприємство продає на ринку дві одиниці товару, ціни на які змінюються, перебуваючи в межах ринкових. Нехай ціна однієї одиниці x_1, а другої x_2. На підставі попереднього досвіду було з’ясовано, що ціни продажу мають належати області, яка визначається системою нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 \le 12, \end{cases} \tag{6.62}$$

а прибуток, який підприємство отримає після покриття всіх витрат і виплати податків від продажу кожної одиниці товару, визначається формулою:

$$f = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 . \tag{6.63}$$

З’ясуємо, якою має бути ціна кожної одиниці товару, щоб прибуток (6.63) від продажу кожної одиниці товару був найбільшим.

Оскільки функція (6.63) є опуклою вниз, а система обмежень (6.62) містить лише лінійні нерівності, то можна використати теорему Куна—Такера. Будуємо функцію Лагранжа

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2)$$

і записуємо у вигляді (6.61) необхідні і достатні умови існування сідлової точки побудованої функції:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \le 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \ge 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + x_2 \ge 0; \end{cases} \tag{6.64}$$

$$\begin{cases} x_1 \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2) = 0, \\ x_2 \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2) = 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0; \end{cases} \tag{6.65}$$

Зрозуміло, що ціни x_1 і x_2 не можуть бути від'ємними, а оскільки множники Лагранжа λ_1, λ_2 у даній задачі мають зміст ціни, то, зрозуміло, що $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$.

Вводячи додаткові невід'ємні змінні z_1, z_2, t_1, t_2, які перетворюють систему нерівностей (6.64) у систему лінійних рівнянь, дістаємо:

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - z_1 = 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - z_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + t_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + t_2 = 12; \end{cases} \tag{6.66}$$

$$x_1, x_2 > 0, \ \lambda_1, \lambda_2, z_1, z_2, t_1, t_2 \geq 0. \tag{6.67}$$

Ураховуючи рівності (6.66), можна записати:

$$z_1 x_1 = 0, z_2 x_2 = 0, t_1 \lambda_1 = 0, t_2 \lambda_2 = 0. \tag{6.68}$$

Якщо тепер знайдемо базисний розв'язок системи лінійних рівнянь (6.66) з урахуванням рівностей (6.68), то дістанемо сідлову точку функції Лагранжа для початкової задачі, тобто знайдемо оптимальний розв'язок.

Для відшукання базисного розв'язку системи лінійних рівнянь (6.66) скористаємось методом штучного базису. У перше і друге рівняння системи (6.66) введемо відповідно дві додаткові невід'ємні змінні y_1, y_2 і розглянемо задачу лінійного програмування, яка полягає у відшуканні максимального значення функції

$$F = -My_1 - My_2 \tag{6.69}$$

за умов

$$\begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - z_1 + y_1 = 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - z_2 + y_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + t_1 = 8, \\ 2x_1 - x_2 + t_2 = 12, \end{cases} \tag{6.70}$$

а також умови (6.67).

У результаті розв'язування задачі (6.69) — (6.70) і (6.67) з урахуванням умов (6.68)) знаходимо припустимий базисний розв'язок системи лінійних рівнянь (6.70) (див. таблицю, де використано такі позначення: $C_б, P_0, P_{x_1}, P_{x_2}, P_{\lambda_1}, P_{\lambda_2}, P_{z_1}, P_{z_2}, P_{t_1}, P_{t_2}, P_{y_1}, P_{y_2}$).

i	Базис	$C_б$	P_0	0	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$
				P_{x_1}	P_{x_2}	P_{λ_1}	P_{λ_2}	P_{z_1}	P_{z_2}	P_{t_1}	P_{t_2}	P_{y_1}	P_{y_2}
				2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	P_{y_2}	$-M$	4	0	4	2	-1	0	-1	0	0	0	1
3	P_{t_1}	0	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	P_{t_2}	0	12	2	-1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			-6	-2	-1	-3	-1	1	1	0	0	0	0
1	P_{y_1}	$-M$	2	2	0	1	2	-1	0	0	0	1	0
2	P_{x_2}	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{1}{4}$
3	P_{t_1}	0	6	1	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$
4	P_{t_2}	0	13	2	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	1	0	$\frac{1}{4}$
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6			-2	-2	0	-1	-2	1	0	0	0	0	1
1	P_{x_1}	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	0
2	P_{x_2}	0	1	0	1					0	0		
3	P_{t_2}	0	5	0	0					1	0		
4	P_{t_2}	0	11	0	0					0	1		
5			0	0	0					0	0		

Отже, маємо:

$$x_1^0 = 1; x_2^0 = 1; t_1 = 5; t_2 = 11; \lambda_1^0 = \lambda_2^0 = z_1 = z_2 = 0.$$

Оскільки, $z_1 x_1^0 = 0,\ z_2 x_2^0 = 0,\ t_1 \lambda_1^0 = 0,\ t_2 \lambda_2^0 = 0,$ то точка $(X_0; \lambda_0) = (1;1;0;0)$ є сідловою точкою функції Лагранжа для початкової задачі. Таким чином, якщо вартість кожної одиниці товару становитиме одну грошову одиницю, тобто оптимальним планом початкової задачі буде точка $X^* = (1;1)$, то підприємство матиме від продажу кожної одиниці товару максимальний прибуток, що дорівнює 3 грошовим одиницям, тобто $f_{\max} = 3$.

Розглянемо ще одну економічну задачу, яка зводиться до задачі квадратичного програмування. Це ***задача прогнозувального керування економічною системою виробництва, зберігання та поставлення товарів споживачам.***

Метод прогнозувального керування полягає ось у чому. Стан динамічної системи $x(k)$ змінюється в дискретному часі за заданим законом залежно від вибору керування $u(k)$. Задамо натуральне число p — ***горизонт керування***. Позначимо через $x(k + \frac{i}{k})$ прогнозоване значення стану, а через $u(k + i - \frac{1}{k})$ — прогнозоване значення керування, $i = 1, ..., p.$ Припустимо, що можна обчислити значення керування $u(k + i - \frac{1}{k}),\ \ i = 1, ..., p,$ з урахуванням обмежень. Для спрощення візьмемо одного виробника і одного споживача, не розглядаючи цін і попиту. Динаміка системи описується рівняннями:

$$z(k+1) = z(k) + Bu(k) - v(k), \qquad (6.71)$$

$$q(k+1) = Aq(k) + v(k), \qquad (6.72)$$

де $z(k)$ — кількість товарів на складі виробника; $q(k)$ — кількість товарів у споживача; $u(k)$ — обсяг виробництва; $v(k)$ — обсяг поставок; k — дискретний час ($k = 0,1,2,...,n$). У загальному випадку $z(k), q(k), u(k), v(k)$ — вектори; B — матриця, яка визначає динаміку виробництва; A — матриця, яка визначає динаміку попиту і для якої справджується рівність $\lim\limits_{k \to \infty} A^k = 0$.

Кількість товарів на складі не може бути меншою за мінімальне припустиме значення $z_{\min}$ і більшою за розмір складу $z_{\max}$. На обсяг виробництва накладається обмеження $u_{\max}$. Обсяг поставок залежить від кількості товарів на складі. Таким чином, у кожний момент часу k мають виконуватись умови:

$$z_{\min} \le z(k) \le z_{\max}, \quad 0 \le u(k) \le u_{\max}, \quad 0 \le v(k) \le z(k). \qquad (6.73)$$

Змінні $u(k)$ і $v(k)$ розглядатимемо як змінні керування. Необхідно визначити стратегію виробництва, зберігання і поставлення товарів, що забезпечує задану кількість товарів у споживача $q_{\text{задане}}$ з урахуванням умови:

$$\lim_{k\to\infty} q(k) = q_{\text{задане}}.$$

Розглянемо тепер алгоритм розв'язування цієї задачі. Нехай система в момент часу k перебуває у стані $z(k), q(k)$. Позначимо через $z(k+\frac{i}{k})$, $q(k+\frac{i}{k})$, $i=1,...,p$, прогнозоване значення стану. Нагадаємо, що p — горизонт керування. Прогнозоване значення керування $u(k+i-\frac{1}{k})$, $v(k+i-\frac{1}{k})$, $i=1,...,p$, шукатимемо з умови мінімуму квадратичного функціоналу якості:

$$J = \sum_{i=1}^{p} \left\| q_{\text{задане}} - q(k+\frac{i}{k}) \right\|^2 + w\sum_{i=1}^{p-1} \left\| u(k+\frac{i}{k}) - u(k+i-\frac{1}{k}) \right\|^2,$$

де $\|\bullet\|$ — норма матриці; $w>0$ — ваговий коефіцієнт.

Введемо такі позначення:

$$\overline{z(k)} = \begin{pmatrix} z(\frac{k+1}{k}) \\ z(\frac{k+2}{k}) \\ ... \\ z(\frac{k+p}{k}) \end{pmatrix}; \quad \overline{q(k)} = \begin{pmatrix} q(\frac{k+1}{k}) \\ q(\frac{k+2}{k}) \\ ... \\ q(\frac{k+p}{k}) \end{pmatrix};$$

$$\overline{u(k)} = \begin{pmatrix} u(\frac{k}{k}) \\ u(\frac{k+1}{k}) \\ \dots \\ u(\frac{k+p-1}{k}) \end{pmatrix}; \quad \overline{v(k)} = \begin{pmatrix} v(\frac{k}{k}) \\ v(\frac{k+1}{k}) \\ \dots \\ v(\frac{k+p-1}{k}) \end{pmatrix};$$

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} A \\ A^2 \\ \dots \\ A^p \end{pmatrix}; \overline{A} = \begin{pmatrix} E & 0 & \dots & 0 \\ A & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A^{p-1} & A^{p-2} & \dots & E \end{pmatrix}; r = \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$R = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & E & 0 \end{pmatrix}; g = \begin{pmatrix} E \\ E \\ \dots \\ E \end{pmatrix}; h = \begin{pmatrix} E \\ E \\ \dots \\ E \end{pmatrix};$$

$$G = \begin{pmatrix} B & 0 & \dots & 0 \\ B & B & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ B & B & B & B \end{pmatrix}; \quad F = \begin{pmatrix} E & 0 & \dots & 0 \\ E & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ E & E & E & E \end{pmatrix};$$

$$S = \begin{pmatrix} -E & E & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -E & E & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -E & E \end{pmatrix},$$

де E — одинична матриця.

Із рівнянь системи (6.71), (6.72) випливають співвідношення:

$$\overline{z(k)} = gz(k) + G\overline{u(k)} - F\overline{v(k)},$$

$$\overline{q(k)} = \bar{a}q(k) + \overline{A}\overline{v(k)}.$$

Функціонал якості набирає вигляду

$$J = \left\| gq_{\text{задане}} - \overline{q(k)} \right\|^2 + w\left\| \overline{Su(k)} \right\|^2,$$

а обмеження на змінні стану і керування подається так:

$$\overline{z(k)} \le gz_{\max}, \ \overline{z(k)} \ge gz_{\min}, \ \overline{u(k)} \le hu_{\max},$$

$$\overline{v(k)} \le rz(k) + R\overline{z(k)}, \ \overline{u(k)} \ge 0, \ \overline{v(k)} \ge 0.$$

У результаті дістанемо задачу мінімізації квадратичної цільової функції

$$J = \left\| gq_{\text{задане}} - \overline{a}q(k) - \overline{A}\overline{v(k)} \right\|^2 + w\left\| \overline{Su(k)} \right\|^2 \quad (6.74)$$

відносно змінних $\overline{u(k)}, \overline{v(k)}$ з обмеженнями у вигляді лінійних нерівностей:

$$G\overline{u(k)} - F\overline{v(k)} \le g(z_{\max} - z(k)); \ -G\overline{u(k)} + F\overline{v(k)} \le g(z(k) - z_{\min}); \quad (6.75)$$

$$\overline{u(k)} \le hu_{\max}; \ -RG\overline{u(k)} + (E + RF)\overline{v(k)} \le (r + Rg)z(k); \quad (6.76)$$

$$\overline{u(k)} \ge 0, \ \overline{v(k)} \ge 0. \quad (6.77)$$

Матриця Гессе

$$H = \begin{pmatrix} 2wS^T S & 0 \\ 0 & 2\overline{A}^T \overline{A} \end{pmatrix}.$$

Цільова функція (6.74) невід’ємно визначена, а отже, є опуклою. Область припустимих значень, яка визначається нерівностями (6.75) — (6.77), обмежена, замкнена і непорожня для всіх p і для всіх $z(k) \in [z_{\min}; z_{\max}]$, оскільки точка $\overline{u(k)} = 0, \overline{v(k)} = 0$ завжди належить цій області. Таким чином, задача оптимізації є стандартною задачею квадратичного програмування з опуклою цільовою функцією.

Керування в момент часу k вважаємо таким: $u(k) = u(\frac{k}{k})$, $v(k) = v(\frac{k}{k})$. У наступний момент часу $k+1$ спочатку розв’язуємо задачу квадратичного програмування і т. д.

ПРИКЛАД 2. Розглянемо систему з двома видами товарів, динаміка якої описується рівняннями:

$$z_1(k+1) = z_1(k) + 0{,}3u_1(k) + 0{,}1u_2(k) - v_1(k),$$

$$z_2(k+1) = z_2(k) + 0{,}2u_1(k) + 0{,}8u_2(k) - v_2(k),$$

$$q_1(k+1) = 0{,}75q_1(k) + v_1(k),$$

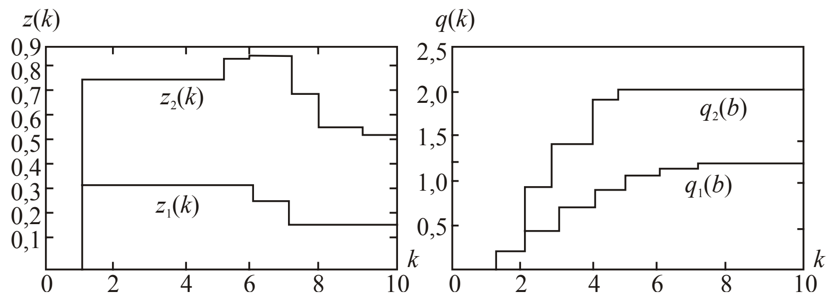
$$q_2(k+1) = 0{,}9q_2(k) - 0{,}25q_1(k) + v_2(k).$$

Таким чином, у цій моделі

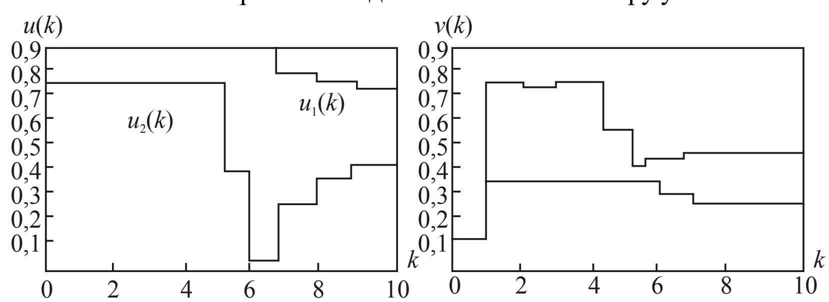
$$B = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \; A = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0 \\ -0{,}25 & 0{,}9 \end{pmatrix}.$$

Візьмемо: $z_{\min} = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}'$, $z_{\max} = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 1{,}5 \end{pmatrix}'$, $u_{\max} = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}7 \end{pmatrix}'$, $z(0) = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 \end{pmatrix}^T$, $q(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}'$, $q_{\text{задане}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}'$, $p = 3$, $w = 10$.

Результати моделювання у вигляді графіків перехідних процесів за змінними стану і керування наведено на рисунку, зображення *а* — *г*.



а. Кількість товарів на складі *б*. Кількість товару у споживача



в. Виробництво товарів *г*. Поставки товарів

Ця модель показує, що кількість товарів у споживача монотонно зростає і досягає заданого значення в момент часу $k = 8$, причому в кожний момент часу виконуються всі обмеження, які накладаються на змінні стану і керування. Змінні керування спочатку набувають максимально припустимих значень, а потім після досягнення мети керування стабілізуються, а вся система переходить до стану рівноваги.

Відповідні розрахунки було виконано в системі MATLAB з використанням функції quadprog для розв'язування задачі квадратичного програмування.

РОЗДІЛ 7

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ МІКРОЕКОНОМІКИ

7.1. Основні моделі поведінки споживачів

7.1.1. *Простір товарів, преференції споживачів*

Під ***окремим споживачем*** розумітимемо не тільки фізичну особу, а й будь-якого учасника економіки, який згідно зі своєю системою преференцій споживає наявні товари та послуги за наявними цінами і відповідно до власних достатків. Це може бути домашнє або фермерське господарство, магазин, фірма тощо.

Під ***товаром*** розумітимемо деяке благо (або послугу), що надійшло в продаж у деякий час у деякому місті.

Рішення споживача щодо придбання певного набору товарів з математичного погляду можна тлумачити як вибір деякої точки у просторі товарів. Якщо цій точці поставити у відповідність n-вимірний вектор-стовпець $X = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n)$, то його компоненти можна розглядати як кількості певного товару, що його придбав споживач за певний період (наприклад, за рік, місяць і т. ін.) за певних цін і доходів у цей період. Розглядаючи цю сукупність векторів як множину всіх наборів товарів із невід'ємними координатами, можна поставити їй у відповідність деякий n-вимірний простір $C = \{X : \bar{x} \ge 0\}$, який надалі називатимемо — *простором товарів.*

Простір товарів має всі властивості n-вимірного векторного простору [1], оскільки в ньому можна скласти будь-які набори товарів (додавання векторів), а також вибрати кілька однакових наборів товару (множення вектора на число). Окрім того, якщо кожний споживач початково має свої преференції на деякій підмножині простору товарів $D \subset \{X : \bar{X} \ge 0\}$, то це означає, що для кожної пари наборів $X \in D$ і $Y \in D$ виконується одне з трьох ***співвідношень преференції***:

- $X \succ Y$ — набір X має більше преференцій порівняно з набором Y;

- $X \prec Y$ — набір *X* має менше преференцій порівняно з набором *Y*;
- $X \sim Y$ — для споживача обидва набори еквівалентні з погляду преференцій.

Відношення преференції мають ще й такі властивості:

1) якщо $X \succ Y$, $Y \succ Z$, то $X \succ Z$ (транзитивність);

2) якщо $X \succ Y$, то $Y \prec X$ (більший набір завжди має преференції щодо меншого набору).

Зрозуміло, що преференції споживача визначаються не лише наявним простором товарів, а й ціною на них. Вважаючи, що кожний товар має певну ціну, причому строго додатну, можна кожному вектор-стовпцю певного набору товарів *X* поставити у відповідність вектор-рядок $P = (p_1,\ p_2, ...,\ p_n)$ цін на товари, де p_i — ціна одиниці *i*-го товару. Простір товарів і цін на них розглядатимемо як евклідів простір, а скалярний добуток $PX = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$ називатимемо **ціною набору** *X* або його **вартістю**.

Керуючись аксіомою про те, що **споживач приймає рішення про споживання, закупівлю та інші дії на підставі лише своєї системи преференцій**, розглянемо докладніше відношення преференції.

Споживач розрізняє набори товарів за преференціями своїх смаків і бажань.

Знаком «$\preccurlyeq$» позначатимемо слабку преференцію, при цьому запис $Y \preccurlyeq X$ означатиме, що споживач визнає перевагу набору *X* порівняно з набором *Y* або не вбачає між ними відмінностей. Математики називають відношення ***рефлексивним***, якщо $X \preccurlyeq X$ для будь-якого *X*; ***симетричним***, якщо з $X \preccurlyeq Y$ випливає $Y \preccurlyeq X$; ***повним***, або ***досконалим***, якщо для будь-яких двох наборів *X і Y* виконується або $X \preccurlyeq Y$, або $Y \preccurlyeq X$.

Аксіома. **1. Відношення слабкої преференції $\preccurlyeq$ рефлексивне, транзитивне і досконале.**

2. Відношення еквівалентності (рівноцінності) ~ рефлексивне, симетричне і транзитивне.

3. Відношення преференції $\prec$ транзитивне.

4. Для будь-якого $X \in C$ множина преференцій $P_X = \{Y : X \preccurlyeq Y\}$ опукла.

5. Кожний товар бажаний для споживача: якщо $X \preccurlyeq Y$, то і $Y \preccurlyeq X$, а якщо до того ще й $X \neq Y$ (тобто $x_i < y_i$ для деякого *i*), то $X \prec Y$.

Окрім того, вважатимемо, що відношення преференції неперервне. Це означає, що коли набір товарів X_0 має преференцію щодо набору товарів Y_0 $(X_0 \succ Y_0)$, то внаслідок малої зміни кожного з цих наборів відношення преференції зберігається. Тобто якщо точки (X, Y) і (X_0, Y_0) у просторі товарів близькі між собою, то $X \succ Y$.

Розглянемо економічний міст деяких із пунктів наведеної щойно аксіоми. Так, рефлексивність означає, що будь-який товар рівноцінний сам собі, а досконаліcть — що споживач має змогу порівняти за привабливістю будь-які два набори товарів. Опуклість множини преференцій означає, що краще мати комбінацію кількох товарів, кожного навіть і потроху, ніж тільки один із цих товарів. Тобто краще мати трохи чаю, цукру, кави, солі, хліба, картоплі, аніж самого лише чаю, цукру, кави, солі, хліба, картоплі, нехай і у великій кількості. Наявність властивості транзитивності, коли йдеться про відношення преференції і слабкої преференції, очевидна, якщо набір товарів оцінюється за однією і тієї самою властивістю. А якщо преференції встановлюються за кількома властивостями, транзитивність не зовсім очевидна, не дуже наочна і не відразу сприймається споживачем. Але якщо йому пояснити, що може статися, коли його система преференцій нетранзитивна, то він погодиться, що транзитивність неодмінно має бути. На підтвердження цього розглянемо приклад [2]. Дехто, збираючись купити дачу, розглядає три запропоновані варіанти, кожний з яких має переваги за двома властивостями з трьох (див. таблицю).

Дача	Ціна	Розміри	Зручності
A	Краща	Гірші	Середні
B	Середня	Кращі	Гірші
C	Гірша	Середні	Кращі

Оцінивши переваги кожного з двох варіантів, споживач вирішує віддати перевагу *A* порівняно з *B*; *C* порівняно з *A*; *B* порівняно з *C*, тобто $B \prec A$; $A \prec C$; $C \prec B$. У такому разі транзитивність порушується. З'ясуємо, що з цього випливає. Нехай споживач щойно придбав дачу *B*, а йому з невеликою націнкою пропонують дачу *A*. Якщо його преференції мають вагу, він змінює *B* на *A*. Тепер у нього є *A*, а йому пропонують *C*, причому також за невелику винагороду. З тих самих міркувань переваги він змінює *A* на *C*, але *B*, у свою чергу, краще за *C*. У такий спосіб із нього можна викачувати винагороду до нескінченності. Ясно, що споживачеві це не сподобається, тому потрібна транзитивність.

Стосовно еквівалентності можна зауважити, що будь-яка еквівалентність на множині розбиває цю множину на підмножини, які не перетинаються і називаються ***класами рівноцінності***, або ***байдужості***. У випадку двох або трьох товарів ці класи називаються ***лініями***, або ***поверхнями***, ***рівноцінності***. Кожний окремий клас рівноцінності складається з наборів товарів, однаково прийнятних для споживача. Він не надає переваги ні одному з цих наборів. При цьому кожний набір із простору товарів належить одному з класів рівноцінності, а саме тому, де зібрано набори, однаково цінні з погляду конкретного споживача.

Типову картину для двох товарів зображено на рис. 7.1, де L_X і L_Y — класи рівноцінних наборів X і Y. Стрілка вказує напрям преференції, заштриховане поле являє собою множину преференцій M_Y.

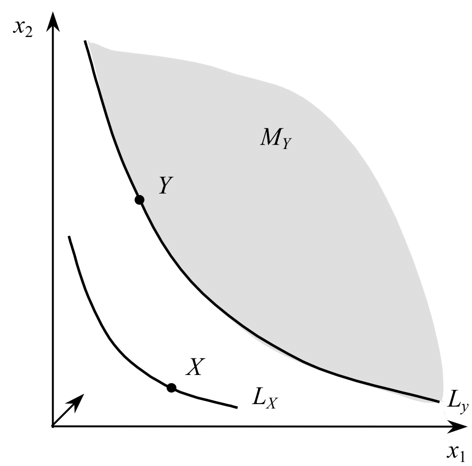


Рис. 7.1

7.1.2. *Функція корисності, її властивості. Теорема Дебре*

З погляду моделювання поведінки споживача стосовно вибору певного набору товарів доцільно розглянути кількісні індикатори преференцій. За такий індикатор можна взяти деяку функцію $u(X)$, яку надалі називатимемо ***функцією корисності***. Ця функція кожному набору X із простору товарів C ставить у відповідність деяке число. З економічного погляду головна вимога до функції корисності полягає в тому, щоб вона відображала відношення преференції на множині C, тобто задовольняла такі вимоги:

1) якщо $X \preccurlyeq Y$, то $u(X) \le u(Y)$;

2) якщо $X \sim Y$, то $u(X) = u(Y)$;

3) якщо $X \prec Y$, то $u(X) < u(Y)$.

Розглядаючи функцію корисності, можна кількісно визначити відношення преференції за допомогою звичних математичних відношень між числами: «більше», «менше», «дорівнює».

Спираючись на розглянуте раніше поняття неперервності відношення преференції, можна сформулювати теорему Дебре [3] існування функції корисності.

Теорема Дебре

Якщо множина С зв'язна, а відношення преференції неперервне, то функція корисності $u(x)$ існує.

Зрозуміло, що працювати з функцією корисності значно зручніше, ніж із системою преференцій. Крім того, слід зазначити, що **коли $u(x)$ — функція корисності на множині *C*, а $f(t)$ — зростаюча функція, то $v(x) = f(u(x))$ також є функцією корисності**.

Таким чином, якщо для відношення преференції існує хоча б одна функція корисності, то їх існує нескінченна кількість. Незважаючи на це, функція корисності широко використовується в теоретичних і практичних дослідженнях, що вивчають поведінку споживача в задачах встановлення деяких норм економічної політики. З уведенням поняття функції корисності стає зрозумілим поняття рівноцінності набору товарів. Так, у просторі товарів C кожному рівнянню $u(X) = \mathrm{const}$ відповідає деяка поверхня рівноцінності (байдужості). Якщо функція корисності $u(x)$ має найбільше значення на множині C, то набір товарів X_0, який відповідає цій точці, будемо називати ***точкою насичення***. Ненасиченість відповідає тому, що $u(X)$ не досягає свого найбільшого значення на множині C.

Розглянемо властивості функції корисності, більшість яких випливає з її економічного змісту.

1. Більшій преференції $X \prec Y$ відповідає більше значення функції корисності: $u(X) > u(Y)$, тобто якщо функція $u(X)$ диференційовна, то $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} > 0$. В економіці частинні похідні $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$ інтерпретують як граничну корисність i-го товару в наборі товарів X. Додатність частинних похідних із погляду економіки означає, що коли споживач має навіть набір товарів X, він усе одно бажає ще придбати i-го товару. Вектор, складений із частинних похідних $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1}, \dfrac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \dfrac{\partial u}{\partial x_u}\right)$, є градієнтом $\overline{\text{grad}}\, u(X)$ функції $u(X)$ і вказує напрям найбільшого зростання значень функції.

2. $\lim\limits_{x_i \to 0} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = \infty$ — це означає, що невеликий приріст блага в разі початкової його відсутності різко збільшує корисність.

3. $\lim\limits_{x_i \to \infty} \dfrac{\partial u}{\partial x_i} = 0$ — у разі дуже великої кількості блага його подальше збільшення не збільшує корисності.

4. Функція корисності має бути двічі диференційовною, а її матриця Гессе других похідних $U(X) = \left(\dfrac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}\right)$ має бути від'ємно визначеною в усіх точках X простору C. Зауважимо також, що від'ємно визначена матриця є невиродженою.

Таким чином, функція корисності існує, якщо виконано умови теореми Дебре. Постає питання, як її побудувати. При побудові реальної функції корисності потрібно крім тих властивостей, які вона повинна мати, ураховувати її відповідність наявним фактам і спостереженням в умовах певних економічних досліджень. Розглянемо кілька можливих виглядів функції корисності, які відповідають розглянутим властивостям.

Неокласична $u(x_1,\ x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, де $\alpha,\ \beta > 0,\ \ \alpha + \beta < 1$.

Квадратична $u(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i x_i + \sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j$, де матриця $B = (b_{ij})$ від'ємно визначена і $\dfrac{\partial u}{\partial x_i} = a_j + \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij} x_i > 0$ для $j = 1,\ 2,\ ...,\ n$.

Логарифмічна $u(X) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - b_i)$, де $a_i > 0$ і $x_i > b_i \geq 0$ для $i = 1, 2, ..., n$.

Покажемо, наприклад, що для неокласичної функції корисності виконуються властивості 1—4.

1. Додатність граничних корисностей: $\frac{\partial u}{\partial x_1} = \alpha \frac{x_2^\beta}{x_1^{1-\alpha}} > 0$ і $\frac{\partial u}{\partial x_2} =$
$= \beta \frac{x_1^\alpha}{x_2^{1-\beta}} > 0.$

2 і 3. З умов $\alpha, \beta > 0$ і $\alpha + \beta > 1$ випливає, що $1 - \alpha > 0$; $1 - \beta > 0$, тому $\lim\limits_{x_1 \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim\limits_{x_2 \to 0} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \infty$, а $\lim\limits_{x_1 \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \lim\limits_{x_2 \to \infty} \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$.

4. Знайдемо другі частинні похідні $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = \alpha(\alpha - 1) x_1^{\alpha-2} x_2^\beta$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} =$
$= \beta(\beta - 1) x_1^\alpha x_2^{\beta-2}$; $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1 x_2} = \alpha\beta x_2^{\alpha-1} x_2^{\beta-1}$. Тоді матриця Гессе має вигляд $U(X) = \begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^\beta & \alpha\beta x_1^{d-1}x_2^{\beta-1} \\ \alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} & \beta(\beta-1)x_1^\alpha x_2^{\beta-2} \end{pmatrix}$. Використовуючи критерій Сільвестра, маємо: $\alpha(\alpha - 1) < 0$ і $|U(X)| = \alpha\beta(1 - \alpha - \beta) > 0$. Отже, при виконанні умов, накладених на α і β, матриця Гессе від'ємно визначена.

7.1.3. *Гранична норма заміщення одного товару іншим*

З погляду споживача наявність множини наборів товарів, які мають однакову корисність $u(X) = \text{const}$, означає можливість заміни одного набору X_0 рівноцінним йому набором товарів X_1. Розглянемо картину, що відображає систему преференцій споживача на наборах з двох товарів (рис. 7.2).

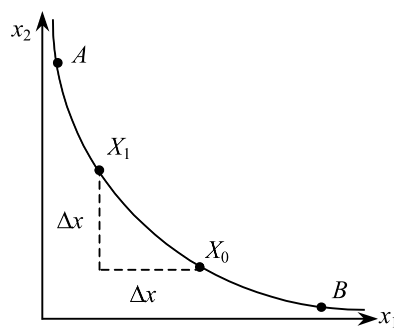


Рис. 7.2

Лінія AB — клас рівноцінних наборів. Нехай споживач має набір $X_0(x_1^0,\ x_2^0)$. Із рис. 7.2 бачимо, що зменшення першого товару на Δx_1 можна компенсувати збільшенням другого товару на Δx_2. Ця компенсація означає, що набір $X_1(x_1^0+\Delta x_1,\ x_2^0+\Delta x_2)$ має ту саму корисність (точка міститься на лінії $u(x_1, x_2) = \text{const}$, що й набір X_0.

Проаналізуємо відношення $\left|\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right|$, яке показує, скільки одиниць другого товару може компенсувати зменшення першого товару на одиницю. Переходячи в цьому відношенні до границі з урахуванням того, що $\Delta x_1 < 0$, а $\Delta x_2 > 0$, дістаємо граничну норму заміщення першого товару другим: $\lim\limits_{\Delta x_1 \to 0}\left(-\dfrac{\Delta x_2}{\Delta x_1}\right)$.

Розглянемо також рівняння $u(X) = \text{const}$, або в диференціальній формі $du = \sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}dx_i = 0$. До речі, остання умова означає, що дотична до поверхні байдужості перпендикулярна до градієнта функції корисності.

Нехай в останньому співвідношенні всі $dx_n = 0$, крім $dx_i \neq 0$ і $dx_k \neq 0$. Тоді маємо $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}dx_i + \dfrac{\partial u}{\partial x_k}dx_k = 0$, звідки $-\dfrac{dx_i}{dx_k} = \dfrac{\dfrac{\partial u}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial u}{\partial x_i}}$, тобто гранична норма заміщення k-го товару на i-й товар дорівнює відношенню граничних корисностей k-го і i-го товарів і показує, скільки потрібно одиниць i-го товару, щоб замінити вилучену одиницю k-го товару. Наприклад, якщо гранична корисність першого товару дорівнює 6, а другого товару тільки 2, то в разі зменшення кількості першого товару на одиницю для його компенсації потрібно збільшити кількість другого товару на 3 одиниці.

Звернемо також увагу на те, як змінюється норма заміщення першого товару другим при русі по кривій рівноцінності AB (див. рис. 7.2) зліва направо. Ця норма від дуже великої за абсолютною величиною зменшується до дуже малої. **Цей факт підтверджує перший закон Госсена про те, що при збільшенні споживання гранична корисність зменшується.** При розглянутому русі вздовж кривої AB x_1 збільшується, тоді $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ зменшується; x_2 зменшується, тоді $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ збільшується, а також, відношення $\frac{\partial u}{\partial x_1} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial x_2}$ зменшується.

В економіці зручніше оцінювати зміни параметрів не в абсолютних величинах, а у відсотках. Тому при оцінюванні приростів часто використовують поняття еластичності $E_x^y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{x}{y} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Коли йдеться про аналіз заміщення, зміст еластичності $E_{x_1}^{x_2}$ полягає в тому, що її можна розглядати як коефіцієнт, котрий показує, на скільки відсотків потрібно збільшити кількість товару x_2, щоб компенсувати зменшення на один відсоток товару x_1. Так, якщо $u(x_1,\ x_2)$ — функція корисності, то $E_{x_1}^{x_2} = \frac{x_2}{x_1} \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial x_2}$.

Як приклад розглянемо неокласичну функцію корисності $u(x_1 x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$. Знайдемо граничні норми заміщення одного товару іншим: $\frac{\partial u}{\partial x_1} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{x_2}{x_1}$; $\frac{\partial u}{\partial x_2} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{x_1}{x_2}$; еластичності заміни одного товару іншим дорівнюють відповідно $E_1^2 = \frac{\alpha}{\beta}$ і $E_2^1 = \frac{\beta}{\alpha}$.

Використання граничних співвідношень для аналізу економічних закономірностей, а також поведінки суб'єктів економіки є сутністю «маржиналізму» — течії в економічній теорії, започаткованій у середині XIX ст. Одним з її провідників був К. Госсен. Маржиналізм залишив глибокий слід у світовій економічній науці. Здебільшого завдяки йому економічні дослідження зосередились не на антагонізмі класів, а на потребах окремої людини, мотивації її господарської поведінки, попиту, споживання.

7.1.4. *Бюджетна множина, модель поведінки споживача*

Досі ми розглядали набори товарів, абстрагуючись їхньої ціни та певних обмежень, які завжди бере до уваги споживач, коли оцінює корисність того чи іншого набору товарів. Зрозуміло, що головним обмеженням вибору є наявність певної кількості грошей, або розмір доходу, що його має споживач.

Припустимо, що споживач має певну грошову суму I, яку назвемо його ***доходом***.

Множину наборів товару, вартість яких не перевищує I за наявних цін $P = (p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)$, назвемо ***бюджетною множиною E***. Тоді множину наборів товарів, вартість яких дорівнює I, назвемо ***межею* Г *бюджетної множини***. Математично бюджетну множину E та її межі можна визначити за допомогою звичайних нерівностей і рівностей:

$$E(P,I) = \{X : X \ge 0\ \ , PX < I\},$$
$$\Gamma(P,I) = \{X : X \ge 0, PX = I\}.$$

Розглянемо випадок двох товарів (рис. 7.3). При $P = (2,\ 3)$ та $I = 30$ бюджетна множина являє собою трикутник AOB. Відрізок AB є межею Г бюджетної множини; $P = (2;\ 3)$ — вектор цін. При збільшенні доходу I межа бюджетної множини рухається в напрямі вектора цін P (лінія CD при $I = 60$). Якщо змінюються ціни, руху зазнають точки A, B.

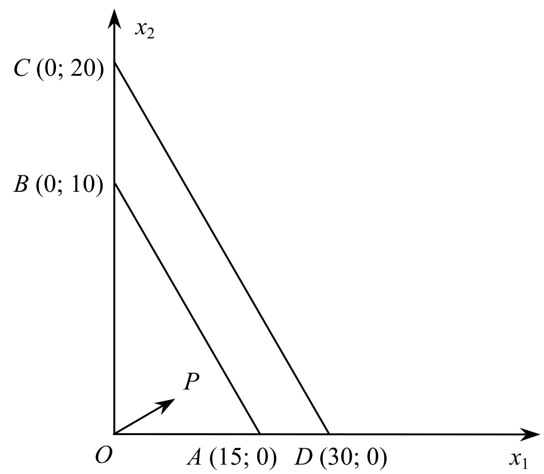


Рис. 7.3.

Вважатимемо, що бюджетна множинна E опукла, обмежена та замкнена. Зрозуміло, що такі обмеження випливають з економічного змісту цієї множини.

Розглянемо тепер поведінку споживача в умовах товарно-грошових відносин. Вона полягає в тому, щоб споживач, маючи певний дохід I, міг витратити його при встановлених цінах із максимальною корисністю.

Формалізуючи описану щойно поведінку споживача, маємо ***задачу математичного програмування***:

$$u(X) \to \max, \quad PX \le I, \quad X \ge 0, \tag{7.1}$$

тобто потрібно знайти набір товарів $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який максимізує функцію корисності $u(x_1, x_2, ..., x_n)$ у разі виконання бюджетного обмеження $p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + p_n x_n \le I$, причому за економічним змістом задачі всі $x_i \ge 0$, $i = 1, 2, ..., n$.

Геометричну інтерпретацію моделі (7.1) для двох товарів подано на рис. 7.4.

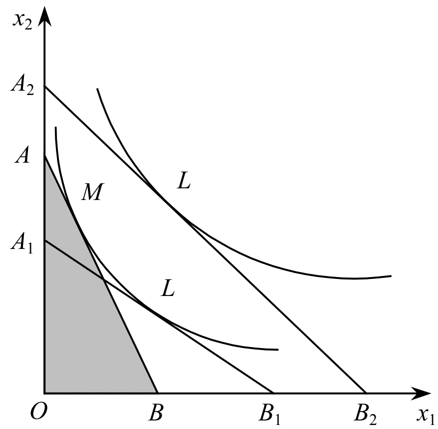


Рис. 7.4

Трикутники AOB, A_1OB_1, A_2OB_2 інтерпретують бюджетні множини E залежно від доходу I та рівня цін $P = (p_1, \ p_2)$, а криві, які дотикаються до меж відповідних бюджетних множин у точках M, L, K, є кривими байдужості.

Оскільки $u(X)$ — неперервна функція своїх аргументів, а бюджетна множина обмежена і замкнена, то за теоремою Веєрштраса функція $u(X)$ досягає на бюджетній множині E свого максимуму, причому відбувається це в точках дотику до неї кривих байдужості $u(x_1, \ x_2) = \text{const}$, тобто на межах бюджетних множин. Згідно з рис. 7.4 доходимо висновку, що AB і A_1B_1 — межі бюджетних множин з однаковим рівнем доходів, але з різними цінами на товари; A_2B_2 — межа бюджетної множини з більшим рівнем доходів.

Отже, поставлена задача (7.1) має розв'язок, який лежить на межі бюджетної множини, причому в разі виконання умови опуклості вниз функції $u(x_1,\ x_2)$ (у загальному випадку це властивість 4 функції корисності) єдиний. Через це у споживача немає вибору щодо того, як із найбільшою корисністю витратити свої гроші (адже існує єдиний набір товарів, що максимізує його функцію корисності). Ця єдина точка максимуму називається точкою попиту, або просто ***попитом споживача***. Позначатимемо цю точку X^*.

Таким чином, задачу вибору споживача можна звести до задачі умовного екстремуму $u(X) \to \max$ при $PX = I$, $X \geq 0$. Її розв'язання [4] зводиться до відшукання локального екстремуму (максимуму) функції Лагранжа L. Для даної задачі

$$L(X,\ \lambda) = U(X) + \lambda(I - PX). \tag{7.2}$$

Знаходячи частинні похідні функції $L(X,\ \lambda)$ і прирівнюючи їх до нуля, дістаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial X} - \lambda P = 0 \\ I - PX = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial X} = \lambda P, \\ X \in \Gamma. \end{cases} \tag{7.3}$$

Звідси випливає, що точка попиту лежить на межі Γ бюджетної множини і характеризується тим, що в ній вектор граничних корисностей $\overrightarrow{\text{grad}}\ u(X) = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2},\ ...,\ \dfrac{\partial u}{\partial x_n}\right)$ пропорційний до вектора цін $P = (p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)$, тобто **в точці попиту відношення граничної корисності товару до його ціни є величина стала для будь-якого товару з оптимального набору** X^*:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \bigg/ p_i = \lambda \tag{7.4}$$

для будь-якого $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$. Розглядаючи два товари x_i і x_j, маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} \bigg/ \frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{p_i}{p_j}. \tag{7.5}$$

Тобто **граничнa норма заміщення *i*-го товару *j*-м товаром у точці попиту** дорівнює відношенню ринкових цін на товари $\frac{p_i}{p_j}$.

Інтерпретуючи рівність (7.5) можна стверджувати, що коли *i*-й товар втричі дорожчий від *j*-го товару, то зменшення *i*-го товару на одиницю компенсується збільшенням *j*-го товару на три одиниці. Це можна пояснити ще й так: взаємозамінними є ті кількості товару, які коштують однаково. У цьому виявляється **другий закон Госсена, з якого випливає, що споживачеві невигідно споживати одне благо замість іншого**, яке коштує стільки ж, і взагалі в будь-який спосіб змінювати структуру споживання, оскільки внаслідок кожної такої зміни тільки погіршується його добробут.

Розглянемо докладніше рівність (7.4). Із неї випливає, що **оптимальний множник Лагранжа λ, який дорівнює відношенню граничної корисності до ціни, вимірюється корисністю одиниці будь-якого товару, поділеної на ціну цього товару, що зводиться до корисності на грошову одиницю.**

Інакше кажучи, значення λ **можна розглядати як граничну корисність додаткового доходу** $\frac{du}{dI}$ **в точці попиту**, яку іноді називають ***граничною корисністю грошей***.

Цей результат можна дістати аналітично: нехай дохід I є змінною величиною, тоді оптимальний набір X^* і λ, а також максимум функції Лагранжа L^* залежатимуть від I:

$$L^*(I) = u\left(X^*(I)\right) + \lambda(I)\left(I - PX^*(I)\right).$$

Знайдемо похідну функції $L^*(I)$ за I:

$$\frac{dL^*}{dI} = \frac{\partial u}{\partial X} \cdot \frac{\partial X^*}{\partial I}\Big|_{X=X^*} + \frac{d\lambda}{dI}\left(I - PX^*(I)\right) + \lambda\left(1 - P\frac{\partial X^*}{\partial I}\right) =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial X}\Big|_{X=X^*} - \lambda P\right)\frac{\partial X^*}{\partial I} + \frac{\partial \lambda}{\partial I}\left(I - PX^*(I)\right) + \lambda.$$

Оскільки в точці попиту

$$\frac{\partial u}{\partial X}\Big|_{X=X^*} - \lambda P = 0 \ \text{ і } \ I - PX^*(I) = 0,$$

то дістаємо

$$\left.\frac{du}{dI}\right|_{X=X^*}=\lambda,$$

тобто той самий результат, що й раніше.

Знайдемо, наприклад, точку попиту (оптимальний набір товарів) для функції корисності набору з двох товарів $u(x_1, \ x_2)=\sqrt{x_1x_2}$, коли ціни дорівнюють відповідно p_1 і p_2, а дохід *I*.

Функція Лагранжа $L(x_1,\ x_2,\ \lambda)=\sqrt{x_1x_2}+\lambda(x_1p_1+x_2p_2-I)$.

Далі маємо:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=\frac{\sqrt{x_2}}{2\sqrt{x_1}}+\lambda p_1=0;\quad \frac{\partial L}{\partial x_2}=\frac{\sqrt{x_1}}{2\sqrt{x_2}}+\lambda p_2=0;\quad p_1x_1+p_2x_2=I.$$

Після перетворень дістаємо систему:

$$\begin{cases}\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{p_2}{p_1},\\ p_1x_1+p_2x_2=I,\end{cases}$$

з якої знаходимо розв'язок $x_1^*=\dfrac{I}{2p_1}$, $x_2^*=\dfrac{I}{2p_2}$, тобто оптимальним буде набір товарів, що складається з $\dfrac{I}{2p_1}$ одиниць першого і $\dfrac{I}{2p_2}$ одиниць другого товару. При цьому функція корисності $u=\dfrac{I}{2\sqrt{p_1p_2}}$ набуває максимального значення.

7.1.5. *Функція попиту, модель Р. Стоуна*

Зі щойно викладеного випливає, що за певних обмежень на функцію корисності в разі додатності вектора *P* цін на товари та заданого доходу *I* задача відшукання набору товарів, який можна придбати при цьому доході і який характеризується найбільшою корисністю, має єдиний розв'язок. Цей розв'язок оптимальний і являє собою координати точки X^* попиту. Зрозуміло, що кожна з координат точки попиту є, у свою чергу, функцією цін $p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$ і доходу *I*. Тому цю точку X^* можна розглядати як функцію попиту від $n+1$ змінної ($p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n$ і доходу *I*), а її координати — як функції попиту на певний товар:

$$x_1^* = x_1^*(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n,\ I),$$
$$x_2^* = x_2^*(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n,\ I), \qquad (7.6)$$
$$x_n^* = x_n^*(p_1 + p_2,\ ...,\ p_n,\ I).$$

Надалі вважатимемо, що функція попиту X^* є неперервною і диференційовною за своїми аргументами. Знайдена в такий спосіб функція попиту повністю характеризує поведінку споживача, який має певну функцію корисності і максимізує її в межах свого доходу.

Наведемо деякі приклади аналітичної побудови функції попиту вважаючи, що ціни сталі, а дохід є змінною величиною, та розглянемо деякі геометричні інтерпретації.

Так, рис. 7.5 ілюструє частинний випадок, коли вектор цін $P(p_1,\ p_2)$ залишається незмінним, а змінюється тільки дохід, що зображається переміщенням межі бюджетної множини AB паралельно самій собі. Криві, які дотикаються до меж бюджетних множин, являють собою лінії байдужості $u(x_1,\ x_2) = \text{const.}$ Точки дотику — це відповідні точки попиту, які є розв'язками задачі (7.2) для відповідних значень розмірів доходу. Крива, яка сполучає точки O, M_1, M_2, M_3, є графічним відображенням векторної функції попиту від доходу при заданому векторі цін.

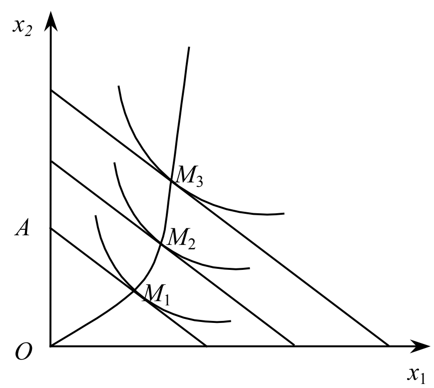


Рис. 7.5

Нехай функція корисності має вигляд $u(X) = x_1 x_2^3$; вектор цін $P = (3;6)$, а дохід I, тоді умови (7.3) екстремуму функції Лагранжа для цього випадку визначають систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_2^3 = 3\lambda, \\ 3x_1x_2^2 = 6\lambda, \\ 3x_1 + 6x_2 = I. \end{cases}$$

Розв’язавши її відносно x_1 і x_2, для даного прикладу знайдемо функції попиту на товари x_1, x_2:

$$x_1 = \frac{I}{12}; \;\; x_2 = \frac{I}{8}.$$

Такі однофакторні функції попиту від доходу широко використовуються при аналізі споживчого попиту і називаються ***кривими Енгеля***. Залежно від вигляду функції попиту можна проаналізувати залежність зміни попиту від приросту доходу, а також розмежування груп товарів за типами функції попиту від доходу.

Наприклад, шведський економіст Л. Торнквіст запропонував функції попиту спеціального вигляду (***функції Торнквіста***) для трьох груп товарів: першої необхідності, другої необхідності, предметів розкоші.

Скажімо, для товарів першої необхідності запропоновано функцію попиту у вигляді

$$x = \frac{a_1 I}{I + C_1}.$$

Вона відбиває той факт, що зростання попиту на товари першої необхідності зі зростанням доходу поступово сповільнюється асимптотично наближаючись до прямої лінії $x = a_1$.

На товари другої необхідності за Торнквістом функція попиту подається формулою

$$x = \frac{a_2(I - b_2)}{I + C_2},$$

де $I \geq b_2$.

Ця функція має горизонтальну асимптоту $y = a_2$, але вищого рівня $(a_2 > a_1)$, причому попит на цю групу товарів з’являється, коли дохід перевищує деяке значення b_2.

І, нарешті, для попиту на предмети розкоші було запропоновано функцію

$$x = \frac{a_3 I(I - b_3)}{I + C_3}.$$

Ця функція не має горизонтальної асимптоти. Попит на ці товари виникає тільки після того, як дохід перевищує значення b_3, а далі швидко зростає. Відповідні графіки на рис. 7.6 позначено *I*, *II*, *III*.

В аналітичних моделях споживчого попиту використовуються крім розглянутих також і інші функції.

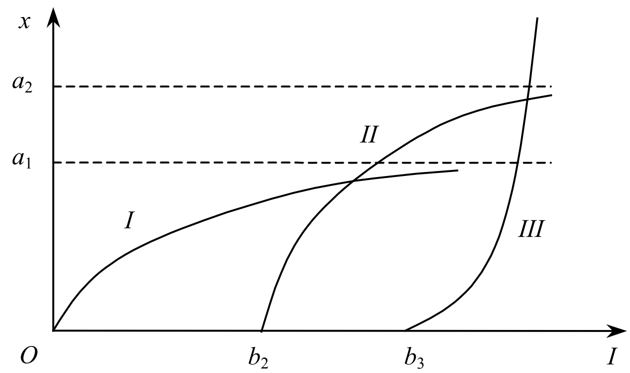


Рис. 7.6

В аналізі зміни попиту при невеликих змінах доходу важливу роль відіграють коефіцієнти еластичності. Вони вказують на відносну зміну попиту при зміні доходу. Наприклад, коефіцієнт еластичності для *i*-го товару за доходом I обчислюється за формулою:

$$E_i^I = \frac{dx_i}{dI} \cdot \frac{I}{x_i},$$

де x_i — функція попиту на цей товар.

Зокрема, для функції попиту Торнквіста на товари першої необхідності коефіцієнт еластичності

$$E_i^I = \frac{C_1}{I + C_1}.$$

Він показує, на скільки відсотків зміниться попит на товари при зміні доходу на 1 %. Коефіцієнти еластичності можуть бути різними за абсолютною величиною і навіть від'ємними, що характеризує зменшення попиту зі зростанням доходу. За значенням еластичності розрізняють такі групи товарів:

1) малоцінні $\left(E_i^I < 0\right)$;

2) товари з малою еластичністю $\left(0 < E_i^I < 1\right)$;

3) товари із середньою еластичністю $\left(E_i^I \approx 1\right)$;

4) товари з високою еластичністю $\left(E_i^I > 1\right)$.

Наприклад, до товарів із від'ємною еластичністю належать хліб, товари низького сорту. Згідно з результатами досліджень коефіцієнт еластичності для основних харчових продуктів коливається від 0,4 до 0,8; для одягу, тканин, взуття — від 1,1 до 1,3. Зі зростанням добробуту попит із товарів першої та другої груп переміщується на товари третьої та четвертої груп.

Розглянемо тепер ***модель споживання Р. Стоуна***, в якій запропоновано функцію корисності у вигляді

$$u(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^{\alpha_i}, \tag{7.7}$$

де a_i — мінімальна необхідна кількість *i*-го товару, що купується в будь-якому разі і не є предметом вибору, $\alpha_i > 0$ — показники степеня, які характеризують відносну цінність товару для споживача.

Задача (7.1) для функції (7.7) за економічно зрозумілого обмеження $\sum_{i=1}^{n} p_i a_i < I$ (дохід має перевищувати кількість грошей, необхідну для закупівлі мінімального $\{a_i\}$ набору товарів). Тобто маємо:

$$u\left(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\right) \to \max,\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - I = 0;\ \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \le I. \tag{7.8}$$

Прирівнюючи до нуля частинні похідні функції Лагранжа за змінними x_i і за λ, дістаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{u^{\alpha}(X)}{x_i - a_i} + \lambda p_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} p_i x_i - I = 0. \end{cases} \tag{7.9}$$

Знайдемо з кожного з перших рівнянь $x_i = a_i - \dfrac{\alpha_i u(X)}{\lambda p_i}$. Помноживши обидві частини кожної з цих рівностей на λp_i і виконавши підсумовування за *i*, дістанемо:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u(X) + \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i x_i - \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i a_i = 0. \tag{7.10}$$

Далі, урахувавши останню рівність системи (7.9), замінимо суму $\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ її значенням I

$$\frac{u(X)}{\lambda} = -\frac{I - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}. \tag{7.10}$$

Згідно з рівністю $x_i = a_i - \frac{\alpha_i u(X)}{\lambda}$ знайдемо відношення $\frac{u(X)}{\lambda}$ і остаточно дістанемо функцію попиту в моделі Р. Стоуна:

$$x_i = a_i + \frac{\alpha_i \left(I - \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \right)}{p_i \sum_{i=1}^{n} \alpha_i}. \tag{7.11}$$

Функцію попиту (7.11) легко інтерпретувати таким чином: спочатку закуповується мінімально необхідна кількість кожного товару a_i. Далі розраховується сума грошей, що залишається після початкової закупівлі, і розподіляється пропорційно до ступеня α_i важливості того чи іншого товару. Поділивши кількість розподілених грошей на ціну p_i, дістанемо додаткову кількість *i*-го товару, котрий можна придбати понад мінімум.

Модель Стоуна має різні частинні випадки. Наприклад, коли всі $a_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, а всі α_i рівні між собою, дістанемо функцію попиту у вигляді $x_i = \frac{I}{np_i}$, тобто дохід поділяється на n рівних частин, а попит на *i*-й товар розраховується як частка від ділення одержаної суми грошей на ціну товару. Знайшовши відповідні еластичності, дістанемо, що попит зростає зі зростанням доходу з еластичністю, яка дорівнює одиниці, і зменшується зі зростанням ціни з еластичністю, що дорівнює мінус одиниці. Отже, товари цієї моделі належать до груп 1—3.

Для того щоб вивчити складніші форми поведінки споживача щодо попиту на товари, модель має містити складніші форми функції корисності $u(X)$ споживача. Наприклад, для двотоварної функції корисності дістанемо:

$$u(x_1 x_2) = x_1^a x_2^{b-a} (x_1 + b - a)^{-b},$$

де a, b — параметри функції попиту на товари; $x_1 = \dfrac{aI}{I + bp_1}$, $x_2 = \dfrac{I(I + p_1(b-a))}{I + bp_1}$, причому ці вирази з точністю до позначень збігаються з відповідними функціями Торнквіста для товарів першої необхідності і предметів розкоші.

7.1.6. *Рівняння Слуцького*

Повернемось до задачі (7.2), яка визначає точку споживання $X^*(x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*)$, що задовольняє систему рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} x_i^* - \lambda p_i = 0\ , \tag{7.12}$$

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i^* = I\ ,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ n\ , \tag{7.13}$$

а $X^* = X^*(P,\ I)$ — здобута з (7.12) функція попиту.

Розглянемо вплив зміни ціни одного товару, наприклад p_n, на поведінку споживача. Нехай ціна *n*-го товару зросла на dp_n. Тоді, маючи функцію попиту, дістанемо, що попит на кожний товар зміниться так:

$$dx_i^* = \frac{\partial x_i^*}{\partial p_n} dp_n\ ,\ \ i = 1,\ 2, ...,\ n. \tag{7.14}$$

Для відшукання $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial p_n}$ диференціюємо рівняння (7.12) і (7.13) за p_n, дістаючи в результаті систему рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_n} = -x_n^*\ , \tag{7.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j^*}{\partial p_n} - \frac{\partial \lambda}{\partial p_n} p_i = \begin{cases} 0,\ i = 1,\ 2,\ n-1, \\ \lambda,\ i = n. \end{cases} \tag{7.16}$$

Тут частинні похідні $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ обчислюються в точці попиту $X^* = (x_1^*,\ x_2^*,\ ...,\ x_n^*)$.

Система рівнянь (7.15), (7.16) — це система, що складається з $n+1$ лінійного рівняння відносно невідомих $\frac{\partial\lambda}{\partial p_n},\ \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n},\ ...,\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}$. Скориставшись такими позначеннями:

$\frac{\partial X^*}{\partial p_n}=\left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p_n},\ \frac{\partial x_2^*}{\partial p_n},\ ...,\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\right)$ — вектор, яким подається шуканий розв'язок; $P=(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)$ — вектор цін (вектор-рядок), P' — вектор, транспонований щодо вектора P (вектор-стовпець), запишемо цю систему рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & -P \\ -P' & U \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial p_n} \\ \frac{\partial X^*}{\partial p_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_n^* \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}, \qquad (7.17)$$

де U — матриця Гессе. Оскільки матриця Гессе від'ємно визначена і невироджена, то невироджена й матриця системи (7.17), а отже, для неї існує обернена. Безпосередньою перевіркою можна встановити, що матриця, обернена до матриці системи (7.17), має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 0 & -P \\ -P' & U \end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix} \mu & \mu PU \\ \mu U^{-1}P' & \mu U^{-1}P'PU^{1}+U^{-1} \end{pmatrix},$$

де $\mu=-(PU^{-1}P')-1$.

Тоді розв'язок системи рівнянь (7.17) набирає вигляду

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial\lambda}{\partial x_n} \\ \frac{\partial X^*}{\partial x_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mu & \mu PU^{-1} \\ \mu U^{-1}P' & \mu U^{-1}P'PU^{-1}+U^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n^* \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} \mu x_n^*+\lambda\left(\mu PU^{-1}\right) \\ \mu U^{-1}P'x_n^*+\lambda\left(\mu U^{-1}P'PU^{-1}+U^{-1}\right)_n \end{pmatrix}.$$

Індекс n у матриці в дужках означає, що взято її n-й стовпець.

Таким чином, підставивши знайдений вираз вектора

$$\frac{\partial X^*}{\partial p_n}=\mu U^{-1}P'x_n^*+\lambda\left(\mu U^{-1}P'PU^{-1}+U^{-1}\right)_n$$

у (7.14), знайдемо, як зміниться попит x_i^* на товар унаслідок зміни ціни p_n.

Розглянемо тепер вплив ***компенсованої зміни ціни***, яка полягає в тому, що одночасно зі зміною ціни змінюється й дохід I, причому так, що максимальне значення функції корисності залишається незмінним. З урахуванням (7.12), (7.13), (7.14) знаходимо

$$du = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u\left(X^*\right)}{\partial x_i} dx_i^* = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i = \lambda \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_n} dp_n = 0.$$

Таким чином, умова сталої корисності $du = 0$ має вигляд

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_n} = 0. \qquad (7.18)$$

Тепер з урахуванням (7.13) і (7.18) можемо знайти

$$dI = \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial p_n} dp_n + x_n^* dp_n = x_n^* dp_n, \qquad (7.19)$$

тобто дохід має зрости рівно на таку суму, яку споживачеві довелося б витратити додатково на придбання n-го товару в попередньому обсязі в разі зростання його ціни на dp_n.

Об'єднавши рівняння (7.16) і (7.18) у систему для відшукання $\left(\dfrac{\partial x^*}{\partial p_u}\right)_{\text{компенс}}$ у матричному вигляді, дістанемо:

$$\begin{pmatrix} 0 & -P \\ -P' & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \lambda}{\partial p_n} \\ \dfrac{\partial x^*}{\partial p_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda \end{pmatrix}.$$

Звідси, побудувавши обернену матрицю, знайдемо розв'язок

$$\left(\frac{\partial X^*}{\partial p_n}\right)_{\text{компенс}} = \lambda\left(\mu\lambda U^{-1} P' P U^{-1} + U^{-1}\right)_n. \qquad (7.20)$$

Розглянемо, нарешті, що відбудеться, коли дохід зміниться на величину dI, тоді попит зміниться так:

$$dX^* = \frac{\partial X^*}{\partial \mathrm{I}} dI.$$

Рівняння для $\frac{\partial X^*}{\partial I}$, $\frac{\partial \lambda}{\partial I}$ знову дістанемо диференціюванням за I співвідношень (7.12), (7.13). Маємо:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i^*}{\partial I} = 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 u\left(X^*\right)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial x_j^*}{\partial I} - p_i \frac{\partial \lambda}{\partial I} = 0, \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ n, \end{cases} \tag{7.21}$$

або в матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} 0 & -P \\ -P' & U \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial I} \\ \frac{\partial X^*}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

звідки дістаємо:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \lambda}{\partial I} \\ \frac{\partial X^*}{\partial I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu & \mu P U^{-1} \\ \mu U^{-1} P' & \mu U^{-1} P' P U^{-1} + U^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mu \\ -\mu U^{-1} P' \end{pmatrix}.$$

Отже, шуканий розв'язок набирає вигляду:

$$\frac{\partial X^*}{\partial I} = -\mu U^{-1} P'. \tag{7.22}$$

Підставивши тепер у вираз $\frac{\partial X^*}{\partial p_n} = \mu U^{-1} P x_n^* + \lambda \left(\mu U^{-1} P' P U^{-1} + U^{-1}\right)_n$ значення (7.20) і (7.21), дістанемо ***рівняння Слуцького:***

$$\frac{\partial X^*}{\partial p_n} = \left(\frac{\partial X^*}{\partial p_n}\right)_{\text{компенс}} - \frac{\partial X^*}{\partial I} x_n^*. \tag{7.23}$$

Це рівняння є основним у неокласичній теорії вартості, пов'язуючи дію ефекту зміни ціни та доходу зі зміною попиту. Уперше його опублікував російський математик Е. Е. Слуцький у 1915 році.

Для аналізу співвідношення між попитом і доходом на основі рівняння Слуцького вивчимо матрицю, яка входить у праву частину співвідношення (7.20), скориставшись таким позначенням:

$$H = \mu U^{-1} P' P U^{-1} + U^{-1}.$$

Ця матриця симетрична, оскільки симетричні матриці Гессе U і обернена до неї U^{-1}. Матриця H від'ємно напіввизначена, тобто $zHz' \le 0$ для будь-якого вектора рядка $z \in R^n$ (z' — транспонований вектор-рядок).

Розглянемо спочатку випадок $z = \alpha P$, $\alpha \ne 0$, тоді, пригадуючи, що $\mu = -PU^{-1}P' > 0$, маємо:

$$\begin{aligned}(\alpha P) H (\alpha P') &= \alpha^2 \left(\mu P U^{-1} P' P U^{-1} + P U^{-1}\right) P' = \\ &= \alpha^2 \left(-PU^{-1} + PU^{-1}\right) P' = 0.\end{aligned} \tag{7.24}$$

Нехай тепер напрям вектора z не збігається з напрямом вектора P ($z \ne \alpha P$ при жодному α), Тоді подамо z у вигляді $z = \alpha P + V$; $V \ne 0$; $V = z - \alpha P$ і для виконання умови $VU^{-1}P' = 0$ потрібно взяти $\alpha = \dfrac{zU^{-1}P'}{PU^{-1}P'}$. Ураховуючи (7.24), подання $z = \alpha P + V$ і вибір α, маємо:

$$zHz' = VHV' = \mu V U^{-1} P' P U^{-1} V' + V U^{-1} V' = V U^{-1} V' < 0,$$

оскільки матриця U^{-1} разом зі матрицею Гессе U від'ємно визначена.

Узявши вектор $z = (0,\ 0,\ ...,\ 0{,}1,\ 0,\ ...,\ 0)$, дістанемо $zHz' = h_{ii} < 0$, тобто всі діагональні елементи матриці H від'ємні. Водночас із співвідношення (7.20) маємо

$$\left(\frac{\partial x_n^*}{\partial p_n}\right)_{\text{comp}} = \lambda h_{ii} < 0.$$

Таким чином, збільшення ціни товару при відповідній компенсації доходу призводить, все ж таки, до зменшення попиту на цей товар.

Назвемо i-й товар ***цінним***, якщо зі зростанням доходу попит на цей товар збільшується, тобто $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} > 0$, і ***малоцінним***, якщо $\dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} \le 0$. Із системи рівнянь (7.21) маємо $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i \dfrac{\partial x_i^*}{\partial I} = 1$, а це означає, що цінні товари існують.

Із рівняння Слуцького, записаного для *i*-го товару

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i} = \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{компенс}} - \left(\frac{\partial x_i}{\partial I}\right) x_i^* < 0,$$

безпосередньо випливає, що з підвищенням ціни на цінний товар попит на нього неодмінно падає $\left(\frac{\partial x_i}{\partial p_i} < 0\right)$.

Відповідно до (7.18) маємо:

$$\sum_{i=1}^{u} p_i \left(\frac{\partial x_i}{\partial p_n}\right)_{\text{компенс}} = 0.$$

З огляду на це неодмінно знайдеться принаймні один товар, наприклад *j*-й, такий, що $\left(\frac{\partial x_j}{\partial p_n}\right)_{\text{компенс}} > 0$. Це випливає з того, що $p_i > 0$ і $\frac{\partial x_n}{\partial p_n} < 0$.

Інакше кажучи, зменшення попиту на *i*-й товар $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial p_i}\right)_{\text{компенс}} < 0$ приводить до збільшення попиту на *j*-й товар $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i}\right)_{\text{компенс}} > 0$.

Товари, для яких виконуються такі співвідношення попиту, називаються ***взаємозамінними***, наприклад сало і масло.

Якщо для обох товарів виконуються одночасно нерівності менше (збільшення ціни обох товарів приводить до зменшення попиту на обидва товари), то такі товари називаються ***взаємодоповняльними***. Наприклад, компенсоване зростання цін на бензин призводить до зниження попиту на нього, а водночас і попиту на автомобілі.

Товар *j* називається ***валовим замінником*** товару *i*, якщо $\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} > 0$. Функція попиту $X^*(P,\ I)$ має властивість ***валової замінності***, якщо зі збільшенням ціни на будь-який товар попит на решту товарів не зменшується:

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} \geq 0, \quad i = j,$$

якщо всі частинні похідні строго додатні $\left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_i} > 0\right)$, то функція попиту має властивість ***сильної валової замінності***.

Прикладом функції попиту із сильною валовою замінністю є функція $X^*(P, I)$, яка є розв'язком задачі (7.3) з функцією корисності

$$u(X) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i^{v_i},$$

де $\mu_i > 0$; $0 < v_i < 1$, $i = 1, 2, ..., n$, $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Справді, згідно з (7.5) для двох товарів — *i*-го і, наприклад, першого, маємо:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{p_i}{p_1} \frac{\partial u}{\partial x_1}.$$

Підставляючи значення частинних похідних для $u(X)$ у це співвідношення, дістаємо:

$$x_i = \left(\frac{p_i \mu_1 v_1}{p_1 \mu_i v_i}\right)^{\frac{1}{v_i - 1}} x_1^{\frac{v_1 - 1}{v_i - 1}}.$$

Здобуте значення для x_i підставимо в друге з рівнянь (7.9) і розглянемо функцію

$$G(P, x_1) = \sum_{i=1}^{u} p_i \left(\frac{p_i \mu_1 v_1}{p_1 \mu_i v_i}\right)^{\frac{1}{v_i - 1}} x_1^{\frac{v_1 - 1}{v_i - 1}} - I = 0.$$

За формулою для відшукання частинної похідної неявно заданої функції знаходимо:

$$\frac{\partial x_1}{\partial p_i} = -\frac{\partial G}{\partial p_i}\left(\frac{\partial G}{\partial x_1}\right)^{-1}.$$

Оскільки $\frac{v_1 - 1}{v_i - 1} > 0$, то, очевидно, $\frac{\partial G}{\partial x_1} > 0$. Водночас $\frac{\partial G}{\partial p_i} = \left(\frac{\mu_1 v_1}{p_1 \mu_i v_i} x_1^{v_1 - 1}\right)^{\frac{1}{v_i - 1}} \frac{1}{v_i - 1} p_i^{\frac{v_i}{v_i - 1}}$ для всіх $i \neq 1$. За умови $0 < v_i < 1$ доходимо висновку, що $\frac{\partial G}{\partial p_i} < 0$, а отже, $\frac{\partial x_1}{\partial p_i} > 0$ при $i \neq 1$. Узявши для порівняння наступний товар, можна показати, що для розглянутої функції корисності для всіх x_j, $i \neq j$, $\frac{\partial x_j}{\partial p_i} > 0$, тобто маємо сильну валову замінність.

Як приклад формального оцінювання компенсаційних ефектів розглянемо таку задачу. Нехай функція корисності $u(x_1,\ x_2) = x_1 x_2$, ціни товарів p_1 і p_2, а дохід *I*. Очевидно, що

$$x_i = \frac{I}{2p_i};\ \frac{\partial x_i}{\partial p_i} = -\frac{I}{2p_i^2};\ \frac{\partial x_i}{\partial I} = \frac{1}{2pi};\ \frac{\partial x_i}{\partial p_j} = 0.$$

Нехай тепер ціна p_1 підвищилась у *n* раз $(n > 1)$. При цьому споживач одержує необхідну компенсацію. Новий розмір доходу позначимо I', попит — x_1' і x_2'. Тоді $x_1' = \frac{I'}{2np_1}$, $x_2 = \frac{I}{2p_2}$, а умова компенсації набере вигляду $\frac{(I')^2}{4np_1p_2} = \frac{I^2}{4p_1p_2}$, звідки $I' = \sqrt{n} \cdot I$ і $x_1' = \frac{x_1}{\sqrt{n}}$, $x_2' = x_2\sqrt{n}$.

Таким чином, попит на перший товар у випадку з компенсацією скоротився в $\sqrt{n}$ раз (а не в n, як без неї), тоді як попит на другий товар підвищився в $\sqrt{n}$ раз. Остаточно дістаємо:

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\text{компенс}} = \lim_{n \to 1} \frac{x_1\left(1 - \sqrt{n}\right)}{p_1\sqrt{n}(n-1)} = -\lim_{u \to 1} \frac{x_1}{p_1\sqrt{n}\left(1 + \sqrt{n}\right)} = -\frac{x_1}{2p_1} = -\frac{I}{4p_1^2} < 0;$$

$$\left(\frac{\partial x_2}{\partial p_1}\right)_{\text{компенс}} = \lim_{n \to 1} \frac{x_2\left(\sqrt{n} - 1\right)}{p_1\sqrt{n}(n-1)} = -\lim_{u \to 1} \frac{x_2}{p_1\sqrt{n}\left(1 + \sqrt{n}\right)} = \frac{x_2}{2p_2} = \frac{I}{4p_1p_2} > 0.$$

Таким чином товари в розглянутому прикладі взаємозамінні.

Вправи для самостійного розв'язування

1. У просторі двох товарів із цінами (3, 5) назвіть кілька наборів товарів вартістю 15, 30, 45. Нехай ціни змінилися і стали (4; 4). Наведіть приклади наборів товарів: а) які подешевшали; б) подорожчали; залишились незмінною ціною.

2. На двох різних ринках ціни різні. На першому (p_1, p_2), на другому — (p_1', p_2'). Нехай S — деяка початкова грошова сума. Із цієї суми починається придбання товарів на одному і продаж на другому ринку. На виторгувану суму процес повторюється знову і т. д. За якого співвідношення цін на ринках можна збагатитися в результаті таких дій? Опишіть різні стратегії дій за різних співвідношень цін на ринках.

3. Переконайтесь, що завищений курс гривні (за гривню дають більшу кількість доларів, ніж потрібно насправді) вигідний імпортерам, а занижений — експортерам. Кому вигідний фіксований курс гривні при інфляції в Україні?

Вказівка. Імпортер купує товари за долари за кордоном, продає в Україні за гривні, купує в Україні долари за гривні і т. д.

4. Які властивості має функція корисності?

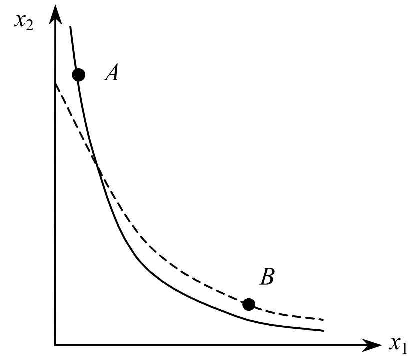
5. Який економічний зміст функції корисності?

6. Накресліть карту преференцій (кілька кривих рівноцінності для пропорційних функцій двох товарів): а) $u(x_1, x_2) = \min(x_1, 2x_2)$; б) $u(x_1,\ x_2) = \min(3x_1,\ x_2)$. Знайдіть граничні корисності і норми заміщення в кількох точках x.

7. Перевірте, чи справді неокласична функція корисності $u(x_1,\ x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$, де $\alpha,\ \beta > 0$; $\alpha + \beta < 1$, строго опукла вниз.

8. Маємо два набори товарів A та B, лінії рівноцінності яких зображено відповідно суцільною і пунктирною лініями. Точки A, B на цих лініях відповідають наборам товарів A та B. Назвіть будь-який варіант обміну товарами, щоб A і B залишились у виграші. Чи можна знайти такий варіант обміну товарами, щоб поліпшити його було неможливо?

9. Нехай у вільному продажу є n товарів за цінами $P = (p_1, p_2, ..., p_n)$, а $(n+1)$-й товар — це гроші, ціна яких $p_{n+1} = 1$. Функція корисності збігається з ціною товару $U(x_1, x_2, ..., x_n) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + ... + x_{n+1}$. Знайдіть граничну корисність кожного товару, граничну норму заміщення товару грошима. Якого вигляду набирає перший закон Госсена щодо грошей?



10. Обсяг бюджетної множини $E(P,I)$ можна вважати мірою можливостей споживача, який має дохід *I*, придбати товари за ціною *P*. У скільки разів зросте обсяг бюджетної множини зі збільшенням доходу удвічі; усіх цін удвічі? Розв'яжіть цю задачу хоча б для двох-трьох товарів.

11. Преференції різних людей різні. Нехай особа *A* має такі преференції: п(омаранчі) $\prec$ а(пельсини) $\prec$ я(блука); особа *B* — преференції а $\prec$ я$\prec$ п, особа *C* — преференції я $\prec$ п $\prec$ а. Нехай у кожного було спочатку по 1 кг кожного виду плодів. Чи можуть вони в результаті обміну стати «багатшими» (мати більше улюблених плодів)?

12. Сформулюйте задачу споживацького вибору. Запишіть необхідні умови для розв'язування цієї задачі.

13. Чому в точці попиту (оптимальна точка) задачі споживацького вибору бюджетне обмеження виконується як рівність?

14. Чому в точці попиту значення корисності приросту товарів, що припадає на одну витрачену грошову одиницю, рівні між собою?

15. Які параметри споживацьких преференцій задаються екзогенно в моделі Стоуна?

16. Запишіть формулу для суми грошей, яку витрачають для придбання *i*-го товару, у розв'язку моделі Стоуна.

17. Чи залежить сума грошей, витрачених на *i*-й товар у моделі Стоуна від ціни *j*-го товару ($i \neq j$):

а) при $a_j = 0$; б) при $a_j > 0$?

18. Як поводять себе товари в моделі Стоуна з погляду залежності попиту на них від доходу (як предмети першої необхідності чи предмети розкоші)?

19. Для неокласичної функції корисності $u(x_1 x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$ складіть рівняння Слуцького та проаналізуйте його.

20. Нехай функція корисності має вигляд $u(x_1 x_2) = x_1 + 3x_2$; ціни дорівнюють (10, 20), дохід становить 60. Знайти компенсацію доходу, якщо ціна другого товару підвищилась до 22.

21. Визначте, який набір товарів обере споживач, котрий має доход 300 гр. од. Його функція корисності $u(x_1,\ x_2,\ x_3) = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$, а ціни (у цих самих грошових одиницях) $p_1 = 2$, $p_2 = 4$, $p_0 = 1$.

22. Знайдіть функцію попиту, якщо функція корисності $u(x_1 x_2) = A x_1^{\alpha} x_2^{1-\alpha}$, дохід дорівнює I, а ціни товарів становить відповідно p_1 і p_2.

23. Визначте функцію попиту за такими експериментальними даними:

Ціна товару, грн	54	50	55	59	60	59	64
Обсяг попиту на товар, шт	570	600	580	510	480	500	450

24. Функція корисності споживача має вигляд $u(x_1 x_2) = 3x_1^{\frac{2}{3}} x_2^{\frac{1}{3}}$. Знайдіть максимальну корисність, функцію попиту, якщо споживач має дохід 100 гр. од., а ціна одиниці товару дорівнює відповідно 5 і 10. Обчисліть норму заміни другого товару на перший в оптимальній точці.

25. Нехай функція попиту на товар x_1 залежить від його ціни p_1 та доходу I споживача так: $x_1 = \dfrac{2\sqrt{I}}{3p_1^2}$. Використовуючи рівняння Слуцького, знайдіть $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial p_1}\right)_{\text{компенс}}$.

26. Чи можуть всі еластичності попиту на i-й товар за доходом і за цінами бути невід'ємними?

27. Розв'яжіть задачу споживчого вибору, знайшовши функцію попиту при цінах на товари $p_1 = 10$, $p_2 = 2$ і доході $I = 60$ з такими функціями корисності:

а) $u(x_1,\ x_2) = x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{2}{3}}$;

б) $u(x_1,\ x_2) = (x_1 - 1)^{\frac{1}{4}} (x_2 - 3)^{\frac{3}{4}}$;

в) $u(x_1,\ x_2) = 5(4 - x_1)^2 + (20 - x_2)^2$.

Для кожної задачі зобразіть бюджетну множину та криві рівноцінності (байдужості).

7.2. Моделі поведінки виробників

7.2.1. *Виробничі множини і виробничі функції*

Розглянемо тепер другу важливу дійову особу економічного процесу — окремого виробника. Будемо вважати, що його поведінка повністю описується ***аксіомою***:

Кожний виробник приймає рішення про виробництво, реалізацію продукції тощо, виключно виходячи з максимізації одержуваного прибутку.

Надалі спробуємо описати, в який спосіб цей виробник щось виробляє з ресурсів та як виникає прибуток.

Зрозуміло, що в моделях споживач—виробник має бути присутнім ще один учасник реального економічного процесу — це торговець, який є посередником між споживачем і виробником. Але задовільної математичної формалізації ролі торговця практично не існує, тому вилучимо його з розглядуваної схеми, ототожнивши з виробником.

Отже, виробник відіграє роль підлеглого щодо споживача, бо має вгадати, зрозуміти й задовольнити його потреби.

За аналогією з простором товарів, про який ішлося в попередньому підрозділі, розглянемо поняття ***виробничої множини.*** За своєю структурою ця множина складатиметься з векторів двох типів. Вектори першого типу (позначимо їх X) назвемо ***векторами витрат***. Вони характеризуватимуть набори товарів, необхідних виробникові (фірмі) для випуску окремого товару або деякого набору товарів. З економічного погляду компонентами вектора X можуть бути різноманітні ресурси, тоді як трудові витрати (середня кількість зайнятих на виробництві або відпрацьованих за рік людино-годин); предмети праці (витрачене за рік паливо, сировина, енергія, матеріали, комплектуючі і т. ін.), основні виробничі фонди тощо. Стосовно набору X товарів виробник виступає в ролі споживача зі своєю функцією корисності $u(X)$.

Вектори другого типу (позначимо їх Y) назвемо ***векторами продукції***. Вони за своєю економічною структурою відповідають набору товарів, що їх випускає виробник. Щодо множин X і Y у різних ситуаціях роблять ті чи інші припущення, накладаючи, скажімо, вимоги невід'ємності або інші вимоги технічного характеру. Здебільшого кожна з таких вимог пов'язана з економічним тлумаченням параметрів моделі. Далі в кожному конкретному випадку звертатимемо на це увагу.

Утворена так множина $(X,\ Y)$ за своїм економічним змістом є деякою технологією — способом переробки ресурсів у готову продукцію. Образно кажучи, змішавши ресурси в кількості X, дістанемо продукцію в кількості Y. Кожний конкретний виробник характеризується множиною τ технологій, які й утворюють ***виробничу множину***.

Розглянемо тепер відображення множини *ресурсів* X на множину *випусків* Y (відображення виробничої множини τ самої в себе). Функція f, яка задає це відображення, називається ***виробничою функцією*** $Y = f(X)$.

У загальному випадку для вектора витрат X, розглянемо множину $M_X = \{Y : (X;\ Y) \in \tau\}$, M_X — це множина всіх можливих випусків при витратах X. У цій множині розглянемо криву $K_X = \{Y \in M_X;\ \text{якщо}\ Z \in M_X,\ Z \geq Y,\ \text{то}\ Z = Y\}$, тобто крива K_X — це множинна найкращих випусків при даних витратах X. Отже, крива K_X відображає таку виробничу функцію $Y = f(X)$, яку в мікроекономічній теорії вважають ***максимально можливим обсягом випуску продукції***, якщо ресурси витрачаються і використовуються в кількості $X = (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$. У геометричній інтерпретації залежно від розмірності простору (кількості товарів, що випускаються) це може бути лінія (для двох товарів), або деяка поверхня, або множина відповідної розмірності (коли кількість товарів більша від двох).

Таким чином, **для будь-якого вектора витрат *X* усі найкращі випуски лежать на поверхні так званих *виробничих можл*ивостей, а виробнича функція встановлює відповідність між витратами і випуском.** Тому з економічних міркувань виробник має звідти й вибирати технологію, яка дає найкращі випуски.

Розглянемо, наприклад, так звану **однофакторну виробничу функцію** (ВФ) $y = f(x)$ однієї змінної, де $x \geq 0$, $y \geq 0$ — числові величини. Це може бути, скажімо, функція виду $y = ax^b$, де x — кількість витраченого ресурсу (наприклад, робочого часу); y — обсяг продукції, що випускається (наприклад кількість телевізорів); a, b — параметри цієї ВФ, $a > 0$, $0 < b < 1$. Графік такої ВФ зображено на рис. 7.7. У цьому разі під ***виробничою множиною*** можна розуміти множину точок, що лежить під графіком ВФ $y = ax^b$. Розглянемо точки A, B цієї множини. З їхнього розміщення випливає, що витрати за технологіями A, B однакові, а випуск різний. Виробник, керуючись здоровим глуздом, надасть перевагу технології B порівняно з A. При цьому найкраща технологія за тих самих витрат, вочевидь міститься на ВФ. Водночас графік показує, що зі зростанням витраченого ресурсу обсяг випуску зростає, хоча кожна додаткова одиниця ресурсу дає дедалі менший приріст обсягу y продукції, що випускається. Цей факт відбиває фундаментальне положення економічної теорії — ***закон спадаючої ефективності***.

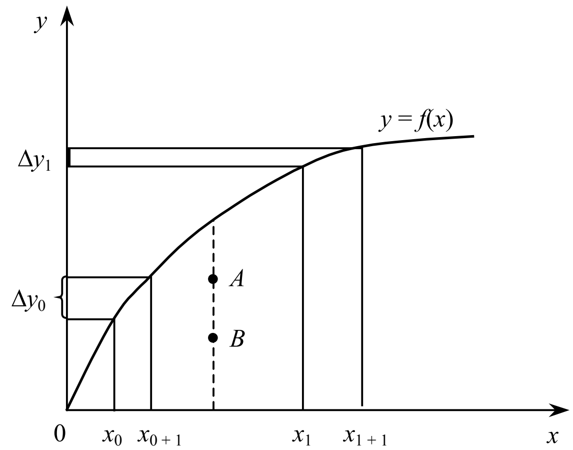


Рис. 7.7

Багатофакторну ВФ можна розглядати як функцію багатьох змінних $y = f(X) = f(x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$. Для окремої фірми, яка випускає однорідний продукт, функція $f(x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ може пов'язувати обсяг випуску (у натуральному або вартісному виразі) із витратами робочого часу за різними галузями трудової діяльності, різними видами сировини, комплектуючих виробів, енергії, основного капіталу (виміряного зазвичай у натуральних одиницях) тощо. ВФ такого типу характеризує технологію, що діє на підприємстві.

На практиці можна розглядати як ***статичні ВФ***, тобто такі, що разом зі своїми параметрами не залежать від часу, так і ***динамічні ВФ***, які разом зі своїми параметрами змінюються з часом. Здебільшого в динамічних ВФ час фігурує як самостійна змінна, що впливає на обсяг виробленої продукції, а параметри таких ВФ є функціями часу. Наприклад, для врахування впливу науково-технічного прогресу у ВФ вводиться множник e^{pt}, де $p > 0$ — параметр, що характеризує вплив науково-технічного прогресу на темп приросту випуску продукції. Тоді ВФ набирає вигляду:

$$y = e^{pt} f\left(x_1(t),\ x_2(t),\ ...,\ x_n(t)\right).$$

Виокремлення істотних видів ресурсів (факторів виробництва) і вибір аналітичної форми запису функції $f(x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ називається **специфікацією ВФ.**

Перетворення реальних експертних даних на модельну інформацію, тобто розрахунок числових значень параметрів ВФ на базі статистичних даних за допомогою регресивного і кореляційного аналізу, називається **параметризацією ВФ**.

Перевірка адекватності (правдивості) називається **верифікацією ВФ**. Вибір аналітичної форми ВФ $y = f(x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ (тобто її специфікація) диктується, передусім, *теоретичними* міркуванням, які мають явно або неявно враховувати особливості взаємозв'язків між конкретними ресурсами, особливості реальних або експертних даних, перетворених у параметри ВФ. На специфікацію і параметризацію у процесі побудови ВФ впливають результати верифікації. До речі, оцінювання параметрів ВФ зазвичай виконується за допомогою методу найменших квадратів.

Окрім того, ВФ має характеризуватися певними властивостями, які випливають з її економічного змісту, а саме:

1) $f(0,\ x_2,\ ...,\ x_n) = f(x_1,\ 0,\ ...,\ x_n) = ... = f(x_1,\ x_2,\ ...,\ 0) = 0;$

2) $\dfrac{\partial f(X)}{\partial x_i} \geq 0;\ \ X > 0,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ n;$

3) $\dfrac{\partial^2 f(X)}{\partial x_i \partial x_j} \leq 0,\ \ X > 0,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ n;$

4) $f(tx_1,\ tx_2,\ ...,\ tx_n) = t^p f(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n)$

Властивість 1 відбиває той факт, що за відсутності одного з ресурсів немає випуску продукції. Із властивості 2 випливає, що зі зростанням витрат ресурсів випуск не зменшується, тобто для $X_1,\ X_2 \in \tau$, таких що $X_1 \geq X_2$, виконується нерівність $f(X_1) \geq f(X_2)$.

Пригадавши граничні величини, зазначимо, що вектор $\dfrac{\partial f}{\partial X} =$ $= \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2},\ ...,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ є вектором граничних продуктів.

Властивість 3 являє собою розглянутий раніше закон спадної ефективності. Недодатність других частинних похідних відбиває той факт, що зі зростанням витрат i-го ресурсу за незмінної кількості іншого ресурсу приріст випуску на кожну додаткову одиницю i-го ресурсу не зростає. Якщо утворити матрицю Гессе других частинних похідних ВФ, то вона буде від'ємно визначеною. Геометрично це означає, що лінія або поверхня, яка відповідає ВФ, має бути опуклою вгору.

Властивість 4, взагалом кажучи, іноді не виконується, але якщо вона справджується, то ВФ є однорідною функцією виміру p; при цьому, якщо $p>1$, то зі зростанням масштабу виробництва в t раз обсяг випуску зростає в t^p раз, тобто маємо зростання ефективності виробництва при зростанні його масштабу. При $p<1$, навпаки, ефективність виробництва знижується; при $p=1$ маємо сталу ефективність.

Однією з найбільш поширених ВФ є ВФ Коба — Дугласа (ВФКД) вигляду $Y = AK^{\alpha}L^{\beta}$; де $A, \alpha, \beta > 0$ — параметри $(\alpha+\beta \le 1)$; Y — випуск продукції в ціновому або натуральному виразі. ВФКД використовується для розв'язування модельних економічних задач як на макро-, так і на мікроекономічному рівні. Здебільшого її аргументами є K — обсяг фондів у натуральній або ціновій вартості (обсяг використаного основного капіталу); L — обсяг трудових ресурсів у тій самій вартості (витрати живої праці). Ця функція належить до так званого класу двофакторної мультиплікативної ВФ.

Перевіримо виконання властивостей 1—4 для ВФКД.

Властивість 1, очевидно, виконується:

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = A\alpha K^{\alpha-1}L^{\beta} > 0;\ \frac{\partial Y}{\partial L} = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} > 0.$$

Властивість 2 також виконується. Для перевірки властивості 3 знайдемо другі частинні похідні:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial K^2} = A\alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2}L^{\beta} < 0;\ \frac{\partial^2 Y}{\partial L^2} = A\beta(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2} < 0.$$

Матриця Гессе

$$U = A\begin{pmatrix} \alpha(\alpha-1)K^{\alpha-2} & \alpha\beta K^{\alpha-1}L^{\beta-1} \\ \alpha\beta K^{\alpha-1}L^{\beta-1} & \beta(\beta-1)K^{\alpha}L^{\beta-2} \end{pmatrix}$$

для ВФКД — від'ємно визначена.

Властивість 4 виконується для випадку $\alpha+\beta=1$.

Розглянемо основні економіко-математичні характеристики ВФКД.

Середня продуктивність праці $\frac{Y}{L}$ — відношення обсягу виробленого продукту до кількості витраченої на це праці; середня фондовіддача $\frac{Y}{K}$ — відношення обсягу виробленого продукту до розміру фонду. Для ВФКД середня продуктивність $AK^{\alpha}L^{\beta-1}$, якщо $\beta < 1$, є спадною функцією. Таким чином, при зростанні витрат праці середня її продуктивність знижується. З погляду економіки це означає, що при незмінності K приріст робочої сили не забезпечується додатковою кількістю засобів виробництва, а отже, продуктивність праці знижується.

Гранична продуктивність праці $\frac{\partial Y}{\partial L} = A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1}$, тобто вона пропорційна до середньої продуктивності і менша за неї.

Те саме можна сказати й щодо аргументу K та відповідних значень середньої і граничної фондовіддачі.

Важливою характеристикою є також фондоозброєність $\frac{K}{L}$, тобто обсяг фондів, що припадає на одного працівника. Знайдемо тепер еластичність продукції за працею:

$$\frac{\partial Y}{\partial L} \cdot \frac{L}{y} = \frac{A\beta K^{\alpha}L^{\beta-1} \cdot L}{AK^{\alpha}L^{\beta}} = \beta.$$

Отже, β — це еластичність продукції за працею, аналогічно α — еластичність продукції за фондами.

Розглянемо випадок $\alpha + \beta = 1$. Легко перевірити, що $Y = \frac{\partial Y}{\partial K}K + {}$ $+ \frac{\partial Y}{\partial L}L.$ Припустимо, що суспільство складається тільки з робітників і підприємців, тоді вироблена продукція Y розпадається на дві частини, одна з яких іде в дохід робітників, а друга — у дохід підприємців. Тоді $\frac{\partial Y}{\partial L}L$ являє собою частину доходу робітників, а $\frac{\partial Y}{\partial K}K$ — частину доходу підприємців.

7.2.2. *Еластичність заміни ресурсів. CES-функції*

Важливою особливістю реальних процесів виробництва є можливість заміни одного ресурсу іншим. Необхідність заміни ресурсів (факторів) випливає з того, що той чи той ресурс може бути дефіцитним, а тому постане потреба замінити його у процесі виробництва іншим, більш доступним. У рамках великих виробничих систем існують, як правило, широкі можливості маневруванням ресурсами.

Для аналізу цього процесу розглянемо двофакторну ВФ $y = F(x_1,\ x_2)$. Нехай один із факторів, наприклад x_2, зменшився на Δx_2. З'ясуємо, яким має бути приріст Δx_1 фактора x_1, щоб випуск y залишився незмінним. Вважаючи випуск y постійною величиною, знаходимо повний диференціал ВФ:

$$dy = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 = 0.$$

Граничною нормою S_{x_1} заміни ресурсу x_1 ресурсом x_2 називається величина

$$S_{x_1} = -\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{\partial F}{\partial x_2} \Bigg/ \frac{\partial F}{\partial x_1}.$$

Зрозуміло, що можна ввести аналогічний показник S_{x_2}, причому ці два показники пов'язані простим співвідношенням $S_{x_1} S_{x_2} = 1$.

Для однорідної ВФ можна одержати більш простіший вираз для S_{x_2}. У цьому разі $y = F(x_1,\ x_2) = x_2^v f\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$ (у випадку ВФКД $x_1 = K$, $x_2 = L$, а $\frac{x_1}{x_2} = \frac{K}{L} = k$ — фондоозброєність) і виконуються рівності:

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_2^{p-1}\left(pf(k) - kf'(k)\right) : \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2^{p-1} f'(k),$$

звідки $S_{x_1} = p\frac{f(k)}{f'(k)} - k$.

Отже, для однорідної ВФ норма заміни залежить тільки від значення $\frac{x_1}{x_2} = k$. Для ВФКД маємо $S_K = \frac{\beta}{\alpha} k$, тобто норма заміни S_K у цьому випадку виробничої функції прямо пропорційна до фондоозброєності $\frac{K}{L}$ — чим вища фондоозброєність, тим більше потрібно фондів для компенсації однієї одиниці трудових ресурсів.

Розглянемо поняття еластичності заміни для однорідних ВФ, яке відбиває той факт, що при зміні на 1 % показника k (за аналогією з ВФКД назвемо його фондоозброєністю) значення норми заміни S_{x_1} змінюється на $\frac{dS_{x_1}}{dk} \cdot \frac{k}{S_{x_1}}$ відсотка. Таким чином, щоб відбулася зміна норми заміни на 1 % необхідно змінити фондоозброєність на $\left(\frac{dS_{x_1}}{dK} \frac{k}{S_{x_1}} \right)^{-1}$ відсотка. Ця величина називається *еластичністю заміни* σ_{x_1} другого фактора першим:

$$\sigma_{x_1}^{-1} = \frac{dS_{x_1}}{dk} \cdot \frac{k}{S_k}.$$

Читач може перевірити, що для ВФКД еластичність зміни є сталою величиною, що дорівнює одиниці.

Ураховуючи вираз для S_{x_1}. дістаємо:

$$\sigma_{x_1} = -\frac{pf'(f - kf')}{k\left((1-p)(f')^2 + ff''\right)}.$$

Аналогічно попередньому можна розглянути еластичність заміни σ_{x_2} першого фактора x_1, другим x_2, що визначається за формулою:

$$\sigma_{x_2}^{-1} = \frac{dS_{x_2}}{d\left(\frac{1}{k}\right)} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)}{S_{x_2}}.$$

Неважко перевірити, що при цьому $\sigma_{x_1} = \sigma_{x_2}$, тому будемо використовувати для позначення еластичності символ σ без індексів.

Відповідно до характеру поведінки показника еластичності заміни розрізняють два класи виробничих функцій: ***VES*** (**Variable Elastisity of Substitution** — змінна еластичність заміни) і ***CES*** (**Contant Elastisity** — стала еластичність заміни).

Розглянемо останній клас функцій *CES*. Ці функції можна подати у простій формі, для відшукання якої достатньо розв'язати диференціальне рівняння

$$\sigma = -\frac{f'(f - kf')}{k\left((1-p)(f')^2 + ff''\right)},$$

де σ — задана стала. Можна також розглянути еквівалентне, але простіше за попереднє рівняння

$$\frac{dk}{dS}\cdot\frac{S}{k}=\sigma.$$

Переписавши його у вигляді $\frac{dS}{S}=\frac{1}{\sigma}\frac{dk}{k}$, легко дістанемо розв'язок $S=Ck^{\frac{1}{\sigma}}$, де C — довільна стала. Підставивши знайдене значення S у вираз для S_{x_1}, дістанемо рівняння

$$\frac{f'(k)}{f(k)}=\frac{p}{k+Ck^{\frac{1}{\sigma}}},$$

або остаточно $\ln f=p\int\frac{dk}{k+Ck^{\frac{1}{\sigma}}}$.

Безпосередньо обчислюючи інтеграл у правій частині останньої формули, дістанемо загальний розв'язок рівняння

$$f(k)=C_1\left(k^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+C\right)^{\frac{p\sigma}{\sigma-1}},$$

або, повертаючись до змінних $x_1,\ x_2$, остаточно знаходимо загальний вираз виробничих функцій *CES* у вигляді

$$y=C_1\left(x_1^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}+Cx_2^{\frac{\sigma-1}{\sigma}}\right)^{\frac{p\sigma}{\sigma-1}}.$$

Позначимо $v=\frac{1-\sigma}{\sigma}$ і доберемо відповідним чином сталі C_1 і C, тоді остаточно дістанемо клас *CES* двофакторних ВФ у вигляді

$$y=F(x_1,\ x_2)=A\left(\sigma x_1^{-v}+(1-\sigma)x_2^{-v}\right)^{-\frac{p}{v}},$$

де $A>0$; $0<p\le 1$; $v>-1$. Умови $0<p\le 1$; $v>-1$ забезпечують виконання властивостей 1—4 ВФ, а здобутий вираз функції є загальновживаним записом виробничих функцій класу *CES*.

Знайдений розв'язок придатний лише в разі, коли $\sigma\ne 1$, $\sigma\ne 0$. Узявши $\sigma=1$ і підставивши це значення в початкове рівняння, дістанемо вже знайому функцію Кобба—Дугласа. У випадку $\sigma=0$,

$v \to \infty$ з останньої формули для ВФ шляхом граничного переходу дістаємо:

$$\lim_{v\to\infty}\left(\sigma x_1^{-v} + (1-\sigma)x_2^{-v}\right)^{-\frac{p}{v}} = \min\left\{x_1^p;\ x_2^p\right\}.$$

Знайдена ВФ називається ***виробничою функцією з фіксованими пропорціями***. При $p = 1$ маємо так звану ***функцію Леонтьєва*** $y = \min(aK;\ bL)$; тут коефіцієнт a має зміст фондовіддачі, а коефіцієнт b відповідає продуктивності праці. Зауважимо, що економічно $\sigma = 0$ означає відсутність заміни ресурсів, і це повністю відповідає характеру функції Леонтьєва. У разі $K \neq L$ повністю використовується ресурс, який є в мінімальній кількості, а другий залишається використаним не повністю.

При побудові ВФ конкретної фірми найважливішим етапом є вибір скінченно параметричного класу функцій від факторів виробництва. Нехай за допомогою статистики $(Y_t,\ K_t,\ L_t)$ за різні періоди часу складено різницевий аналог показника еластичності, наприклад за першим фактором $\frac{Y_t - Y_\tau}{K_t - K_\tau}\cdot\frac{K_t}{Y_t}$, і при цьому за малої різниці $K_t - K_\tau$ даний показник неістотно коливається біля сталого числа α. Тоді цей факт свідчить на користь того, що як ВФ потрібно взяти клас функцій *CES*. До сказаного можна додати, що показники еластичності α, β ВФ за відповідними факторами мають особливо наочну економічну інтерпретацію. Це також допомагає при виборі класу ВФ з огляду на поводження показників α, β.

Так, для *CES*-функції, записаної для аргументів K і L у вигляді $y = A\left(\sigma K^{-v} + (1-\sigma)L^{-v}\right)^{-\frac{p}{v}}$, показник α залежить тільки від фондоозброєності $k = \frac{K}{L}$ і подається так:

$$\alpha(k) = \frac{p}{1 + \frac{1-\sigma}{\sigma}k^v}.$$

Графік функції L при $v > 1$ зображено на рис. 7.8. Значення $\bar{k}$ є коренем рівняння $\alpha''(k) = 0$, $\bar{k} = \left(\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{v-1}{v+1}\right)^{\frac{1}{v}}$. Отже, виокремлюються дві характерні області для *CES*-функцій: область $(0;\ \bar{k})$ дефіциту ресурсу K і область $(\bar{k};\ \infty)$ дефіциту ресурсу L.

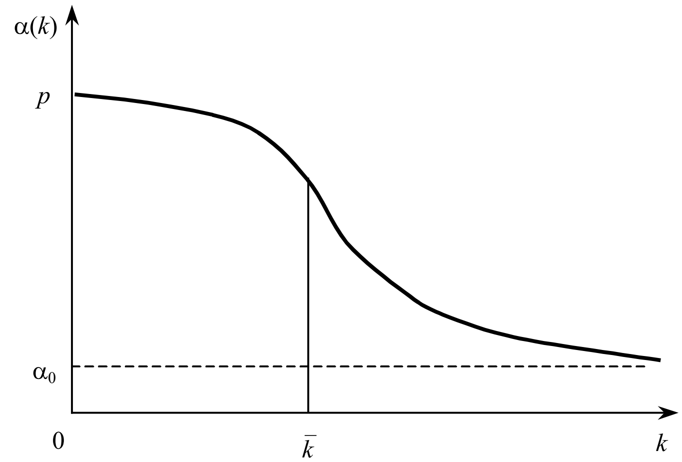


Рис. 7.8

Припустимо, що реальне поводження еластичності таке, що дефіцитність фактора L має асимптотичний характер: $\lim\limits_{k\to\infty}\alpha(k)=\alpha_0$. Таку функцію можна апроксимувати виразом вигляду

$$\alpha_1(k)=\frac{p}{1+\dfrac{1-\sigma}{\sigma}K^{v}}+\alpha_0$$

і знайти підходящу ВФ, розв'язавши рівняння

$$\frac{kf_1'}{f_1}=\alpha_1(k).$$

З останнього рівняння маємо

$$\ln f_1=\int\frac{\alpha_1(k)}{k}dk=\int\frac{\alpha(k)}{k}dk+\int\frac{\alpha_0}{k}dk.$$

Оскільки $\alpha(k)$ — еластичність деякої *CES*-функції f, то $\dfrac{kf'}{f}=$ $=\alpha(k)$, або $\ln f=\dfrac{\alpha(k)}{k}dk$, звідки маємо $f_1=Afk^{\alpha_0}$, де $f(k)=$ $=F\left(\dfrac{K}{L},\ 1\right)=\dfrac{Y}{L_{p-1}}$; $y=F(K,\ L)$ — *CES*-функція степеня однорідності p.

Таким чином, шукана функція $Y_1 = A\left(\sigma K^{-v} + (1-\sigma)L^{-v}\right)^{-\frac{p}{v}} K^{\alpha} L^{\beta}$, тобто являє собою добуток *CES*-функції і функції Кобба—Дугласа. Степінь її однорідності $\mu = \alpha + \beta + p$.

Розглянута процедура дає змогу побудувати ВФ, що моделює виробничу систему з двома режимами роботи: дефіциту або фактора *K*, або фактора *L*. Однак для більшості реальних об'єктів реалізуються три режими роботи: окрім зазначених двох, коли в дефіциті той чи інший ресурс, ще й режим нормальної роботи, коли співвідношення ресурсів збалансоване відповідно до технології.

Графік залежності еластичності за першим фактором наведено на рис. 7.9. Тут області $(0;\ k_1)$, $(k_2;\ \infty)$ відповідають режимам роботи з дефіцитом відповідно першого і другого ресурсу, а область $(k_1;\ k_2)$ — нормальному режиму роботи.

Залежність такого вигляду, як зображено на рис. 7.9, можна дістати, узявши $\alpha(k) = \alpha_1(k) + \alpha_2(k) + \alpha_3(k)$, де $\alpha_1(k)$, $\alpha_2(k)$ — еластичності підходящих *CES*-функцій; $\alpha_3(k)$ — стала (еластичність Кобба—Дугласа).

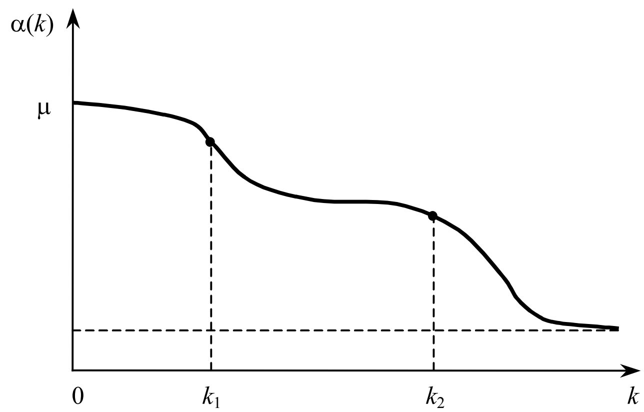


Рис. 7.9

За аналогією з побудовою ВФ, виконаною раніше, дістаємо:

$$F(K, L) = A\left(\sigma_1 K^{-v_1} + (1-\sigma_1)L^{-v_1}\right)^{-\frac{p_1}{v_1}} \cdot \left(\sigma_2 K^{-v_2} + (1-\sigma_2)L^{-v_2}\right)^{-\frac{p_2}{v_2}} K^{\alpha} L^{\beta}.$$

Степінь однорідності цієї функції дорівнює $\mu = p_1 + p_2 + \alpha + \beta$. Можна перевірити, що побудована в такий спосіб функція має властивості 1—4 виробничої функції.

7.2.3. *Модель діяльності фірми*

Зрозуміло, що для побудови більш чи менш реальних моделей діяльності фірми недостатньо понять і множин, розглянутих у попередньому підрозділі. Адже кожний вироблений продукт так само, як і ресурс, що його витрачає виробник, має свою ціну. Якщо фірма функціонує в умовах чистої (довершеної) конкуренції, то жодного впливу на ринкові ціни на продукцію та ресурси вона не має. Вважатимемо, що вектор $P=(p_1,\ p_2,\ ...,\ p_n)$, компоненти якого є цінами певної одиниці виробленої продукції, відбиває рівень цін на продукцію, а ціна одиниці ресурсу *j*-го вигляду подається вектором $W=(w_1,\ w_2,\ ...,\ w_n)$. Тоді прибутком виробника, який має виробничу функцію $Y=f(X)$, буде функція $\Pi(X)=Pf(X)-WX$.

Мета виробника — відшукати таку технологію на виробничій множині, щоб максимізувати прибуток.

Якщо немає інших обмежень на розміри залучених у виробництво ресурсів, крім очевидної їхньої невід'ємності, то задача на максимум прибутку має вигляд:

$$\max(Pf(X)-WX),\quad X\geq 0. \tag{7.25}$$

Це задача нелінійного програмування з *n* умовами невід'ємності вектора $X\geq 0$. Щоб вона мала розв'язок, необхідним є виконання умови Куна—Таккера [5]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\Pi}{\partial X}=P\frac{\partial f}{\partial X}-W\leq 0,\\ &\frac{\partial\Pi}{\partial X}X=\left(P\frac{\partial f}{\partial x}-W\right)X=0. \end{aligned} \tag{7.26}$$

Якщо в розв'язанні цієї задачі використано всі види ресурсів $X>0,$ то умови (7.26) набирають вигляду

$$P\frac{\partial f\left(X^*\right)}{\partial X}=W\Rightarrow P\frac{\partial f(X)}{\partial x_i}=w_i. \tag{7.27}$$

Таким чином, у разі виконання умов, накладених на виробничу функцію $f(X)$ (її матриця Гессе від'ємно визначена), співвідношення (7.27) дає розв'язок задачі виробника (фірми), тобто визначає обсяг X^* перероблених ресурсів, який забезпечує випуск $Y^*=f\left(X^*\right).$ Точка $X^*,$ або $\left(X^*,\ f\left(X^*\right)\right)$, надає максимального значення прибутку $\Pi(X)$ і називається ***оптимальним розв'язання задачі виробника***.

Розглянемо економічний зміст співвідношень (7.27). Нагадаємо, що вектор $\frac{\partial f}{\partial X} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$ розглядався як вектор граничних продуктів і характеризував відгук випуску на зміну витрат *i*-го ресурсу. Отже, $P \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$ — це ціна одиниці *i*-го граничного продукту, додатково отриманого з dx_i одиниць *i*-го ресурсу. Але вартість dx_i одиниць *i*-го ресурсу дорівнює $w_i dx_i$, тобто маємо рівновагу. Можемо залучити у виробництво додатково dx_i одиниць *i*-го ресурсу, витративши на його закупівлю $p_i dx_i$, але додаткового прибутку не буде, оскільки після переробки цього ресурсу одержимо продукції точно на таку саму суму, яку витратили на його придбання. Таким чином, оптимальна точка, що дає співвідношення (7.27), є точкою рівноваги — із товарів-ресурсів вже не можна отримати більше, ніж витрачено на їх придбання.

Таким чином нарощування випуску фірми відбувається поступово. Спочатку вартість граничних продуктів була меншою, ніж закупівельна ціна потрібних для виробництва ресурсів. Зростання обсягів виробництва товарів відбувається доти, доки не починає виконуватись співвідношення (7.27) — рівність вартості граничних продуктів і закупівельної ціни ресурсів, потрібних для їх виробництва.

Як приклад розглянемо задачу. Нехай обсяг виробництва гравію *y*, т/год, залежить від кількості вкладеної праці *x*, людино/год, так: $y = 6\sqrt{x}$. Ціна гравію $p = 40$ грн, заробітна плата робітника $w = 30$ грн/год. Жодні витрати, крім заробітної плати, не розглядаються. Знайти оптимальну кількість x^* вкладеної праці.

Для розв'язання складемо вираз для прибутку: $\Pi = py - wx = 240\sqrt{x} - 30x$. Співвідношення (7.27) для даної задачі набирає вигляду $\frac{240}{2\sqrt{x}} - 30 = 0$, звідки $x^* = 16$, максимальний прибуток при цьому $\Pi(16) = 480$.

Аналогічний за формою розв'язок має задача на максимум випуску товарів за заданого обсягу витрат:

$$\max f(X), \; WX \le C, \; X \ge 0. \tag{7.28}$$

Цю задачу можна розв'язати, відшукавши екстремум функції Лагранжа, яка для даного випадку набирає вигляду

$$L(X,\lambda) = f(X) + \lambda(C - WX).$$

Для знаходження її максимуму за умови невід'ємності змінних маємо:

$$\frac{\partial f}{\partial X} - \lambda W \le 0; \ \left(\frac{\partial f}{\partial X} - \lambda W\right) X = 0. \qquad (7.29)$$

Як бачимо, ці умови збігаються з умовами Куна—Таккера попередньої задачі, якщо взяти $\lambda = \frac{1}{p}$.

Визначимо поведінку фірми на такому прикладі. Нехай випуск задається виробничою функцією Коба—Дугласа вигляду

$$Y = F(KL) = 3K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}}.$$

Визначити максимальний випуск, якщо на оренду фондів і оплату праці виділено 150 гр. од., вартість оренди одиниці фондів $w_K = 5$ гр. од., ставка заробітної плати на одиницю фондів $w_L = 10$ гр. од. Яка гранична норма заміщення фондами одного працівників в оптимальній точці?

Для даної задачі умови (7.29) набирають вигляду

$$\frac{\partial F}{\partial K} = \lambda W_K; \ \frac{\partial F}{\partial L} = \lambda W_L, \qquad (7.30)$$

а для конкретного випадку маємо $\frac{2}{3}\frac{F(K^*, L^*)}{K^*} = \lambda W_K$; $\frac{1}{3}\frac{F(K^*, L^*)}{L^*} = \lambda W_L$. Поділивши почленно перше рівняння на друге, дістанемо:

$$\frac{2L^*}{K^*} = \frac{W_K}{W_L}.$$

Скориставшись співвідношенням $W_K K^* + W_L L^* = 150$, знайдемо $K^* = 20$; $L^* = 5$.

Норма заміни праці фондами в оптимальній точці

$$S_k = \frac{\partial F}{\partial L} \bigg/ \frac{\partial F}{\partial K} = \frac{1}{3} : \frac{2}{3} \frac{K^*}{L^x} = 2,$$

тобто одного працівника можна замінити двома одиницями фондів. Розглянемо геометричну ілюстрацію здобутого розв'язку.

Розглянемо лінії сталих витрат, які надалі називатимемо **ізокостами**. На рис. 7.10 це прямі $5K + 10L = C$, де витрати C дорівнюють відповідно 50, 100, 150. Лінії сталих випусків продукції — це **ізокванти**. На рис. 7.10 ізокванти — лінії, яким відповідають рівняння

$$3K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}} = X = \text{const},$$

де $X = 25{,}2$; $X = 37{,}8$.

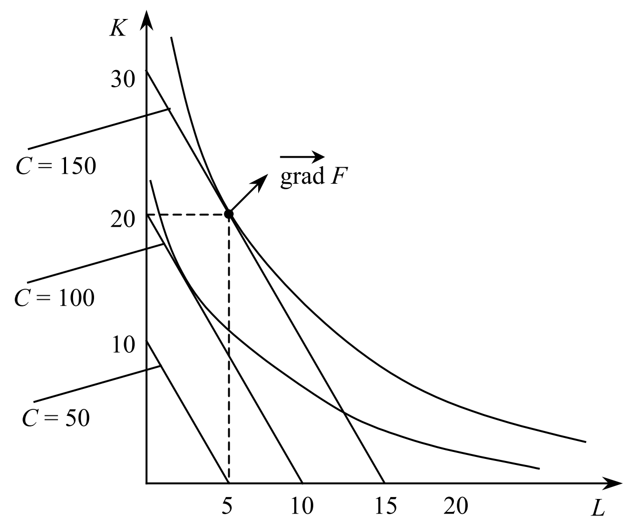


Рис. 7.10

В оптимальній точці $K^* = 20$; $L^* = 5$ ізокванта $3K^{\frac{2}{3}} L^{\frac{1}{3}} = 37{,}8$ та ізокоста $5K^* + 10L^* = 150$, що проходять через цю точку, дотикаються, оскільки згідно із (7.30) нормалі до цих ліній, задані градієнтами $\left(\frac{\partial F}{\partial K}; \frac{\partial F}{\partial L}\right)$, $(W_k; W_L)$, колінеарні.

7.2.4. ***Функція попиту на ресурси та функція пропозиції***

При розв'язуванні задачі виробника на максимум прибутку за відповідних умов, які має задовольняти виробнича функція, було знайдено *єдиний* оптимальний набір ресурсів $X^* > 0$ (розглядався випадок, коли всі ресурси входять до набору). Цьому набору відповідало єдине значення витрат за заданих цін на ресурси $C^* = WX^*$. Розв'язавши задачу на максимум випуску за заданих витрат C^*, можна показати, що ця задача еквівалентна попередній (це випливає з єдиності розв'язку обох задач).

Отже, якщо задача на максимум прибутку має єдиний розв'язок $X^* > 0$, то їй відповідає задача на максимум випуску продукції за заданих витрат $C^* = WX^*$, причому остання має такий самий розв'язок, як і перша.

Визначивши точку дотику ізокост і ізоквант для різних значень витрат *C,* можна знайти довготерміновий шлях розвитку фірми $X(C)$, тобто з'ясувати, як змінюватиметься випуск залежно від зміни витрат на виробництво.

Розглянемо *n* співвідношень виду (7.27)

$$\Psi_i = p_i \frac{\partial f\left(X^*\right)}{\partial x_i} - w_i = 0, \; i = 1, \; 2, \; ..., \; n.$$

Розглядаючи ці співвідношення як рівняння для відшукання $X = (x_1, \; x_2, \; ..., \; x_n)$, їх можна розв'язати, якщо якобіан $|I| \neq 0$, де

$$I = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_n} \\ \hdashline \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial\psi_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{X = X^*} =$$

$$= P\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \hdashline \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}_{X = X^*} = PH.$$

Це означає, що має бути відмінним від нуля гессіан $|H|$ виробничої функції $f(X)$. Ця вимога виконується, оскільки матриця Гессе H від'ємно визначена, а отже, $|H| \neq 0$. Тоді, розв'язавши систему, дістанемо:

$$x_i^* = x_i^*(P,\ W),\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ n. \tag{7.31}$$

Ці n рівнянь задають функцію попиту на ресурси, знайдені за допомогою моделі поведінки фірми. Зрозуміло, що побудована в такий спосіб функція має дещо теоретичних характер. Функції попиту на ресурси можна знайти експериментально за допомогою методів математичної статистики — оцінюванням параметрів і правдоподібності за вибірковими даними.

Отже, якщо склалися ціни на ресурси W і ціна P на товар, що його випускає фірма, то певний виробник, який характеризується своєю виробничою функцією $Y = f(X)$, визначає обсяги необхідних ресурсів за формулами (7.31) і закуповує ці обсяги на ринку.

Нехай відомі обсяги ресурсів, які потрібно переробити. Тоді, підставляючи їх у виробничу функцію, дістаємо випуск як функцію цін. Позначимо цю функцію через $q^*(P,\ W) = f\left(X^*(P,\ W)\right) = Y^*$ і будемо називати її ***функцією пропозиції*** продукції.

Як приклад розглянемо фірму з виробничою функцією $y = \ln(x+1)$. Нехай p — ціна одиниці продукції; W — ціна одиниці ресурсу.

Знаходимо оптимальний розв'язок:

$$p\frac{\partial y}{\partial x} = W \to x^* = \frac{p}{W} - 1$$

— це функція попиту на ресурс. Функція пропозиції $y = \ln\frac{p}{W}$.

7.2.5. *Реакція виробника на зміну цін випуску та ресурсу*

Маючи функції попиту і пропозиції, знайдені раніше, вивчимо реакцію виробника на зміну цін на товари, які він випускає, і цін на ресурси. Нагадаємо, що при заданих цінах P, W — відповідно на товари і ресурси поведінка виробника визначається такими $n+1$ співвідношеннями:

$$\begin{cases} Y^*(P,\ W) = f(X(P,\ W)) \\ P\dfrac{\partial f\left(X^*(P,\ W)\right)}{\partial x} = W. \end{cases} \tag{7.32}$$

Спочатку розглянемо випадок, коли змінилася ціна випуску, а ціна на ресурси залишилась незмінною. Продиференціювавши (7.32) за *P*, дістанемо:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial P},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} + P\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial P} = 0,\ \ j = 1,\ 2,\ ...,\ n,$$

або в матричному вигляді:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial P} = \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial X^*}{\partial P},$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)' + PH\frac{\partial X^*}{\partial P} = 0,$$

де $\dfrac{\partial f}{\partial X} = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1},\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2},\ ...,\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)$; $\dfrac{\partial Y^*}{\partial P} = \left(\dfrac{\partial x_1^*}{\partial P},\ \dfrac{\partial x_2^*}{\partial P},\ ...,\ \dfrac{\partial x_n^*}{\partial P}\right)$ (штрих означає транспонування). Остаточно маємо:

$$\begin{pmatrix} -1 & \dfrac{\partial f}{\partial X} \\ 0 & PH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial Y^*}{\partial P} \\ \dfrac{\partial X^*}{\partial P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\left(\dfrac{\partial f}{\partial X}\right)' \end{pmatrix}. \tag{7.33}$$

Рівняння (7.33) являють собою реакцію виробника (зміну випуску, зміну попиту на ресурси) на зміну ціни випуску *P*. Цю реакцію було знайдено при тому, що за умов, які змінилися, виробник знову ж таки максимізує свій прибуток.

Нехай тепер змінилася ціна k-го ресурсу w_k. Тоді продиференціювавши (7.32) за w_k, дістанемо:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial w_k} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k^*}{\partial w_k}; \tag{7.34}$$

$$P\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_j} \cdot \frac{\partial x_i^*}{\partial w_k} = \delta_{jk}; \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n; \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1, & k = j, \\ 0 & k \neq j \end{cases} \text{— символ Кронекера.}$$

Введемо позначення:

$$\frac{\partial Y^*}{\partial W} = \left(\frac{\partial Y^*}{\partial w_1} : \frac{\partial Y}{\partial w_2},\ \ldots,\ \frac{\partial Y^*}{\partial w_n} \right),$$

$$\frac{\partial X^*}{\partial W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial w_1} & \frac{\partial x_2^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_2^*}{\partial w_n} \\ \hdashline \frac{\partial x_n^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_n} \end{pmatrix}.$$

Тоді $n(n+1)$ рівняння (7.34) в матричній формі набуде вигляду

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial X} \\ 0 & PH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^*}{\partial W} \\ \frac{\partial X^*}{\partial W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_n \end{pmatrix}, \tag{7.35}$$

де E_n — одинична матриця.

Об'єднавши рівняння (7.33) і (7.35), дістанемо ***основне матричне рівняння теорії фірми***:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial X} \\ 0 & PH \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial Y^*}{\partial P} & \frac{\partial Y^*}{\partial W} \\ \frac{\partial X^*}{\partial P} & \frac{\partial X^*}{\partial W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)' & E_n \end{pmatrix}. \tag{7.36}$$

Воно показує реакцію виробника на одночасну зміну ціни випуску і ціни ресурсів.

Розв'язавши рівняння (7.36) відносно зміни випуску $\frac{\partial Y^*}{\partial P}$; $\frac{\partial Y^*}{\partial W}$ і попиту на ресурси $\frac{\partial X^*}{\partial P}$; $\frac{\partial X^*}{\partial W}$, дістанемо:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial Y^*}{\partial P} & \frac{\partial Y^*}{\partial W} \\ \frac{\partial X^*}{\partial P} & \frac{\partial X^*}{\partial W} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial X} \\ 0 & PH \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\partial f}{\partial X} & E_n \end{pmatrix}. \tag{7.37}$$

Використовуючи правило обернення блокових матриць [1], дістанемо:

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial X} \\ 0 & PH \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{P}\frac{\partial f}{\partial X} H^{-1} \\ 0 & \frac{1}{P} H^{-1} \end{pmatrix}.$$

Підставляючи явний вираз оберненої матриці в (7.37) і виконуючи операцію множення матриць, знайдемо в явному вигляді розв'язок системи рівнянь фірми відносно змін випуску і попиту на ресурси:

$$\begin{cases} \frac{\partial Y^*}{\partial P} = -\frac{1}{P}\frac{\partial f}{\partial X} H^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)'; \\ \frac{\partial X^*}{\partial P} = -\frac{1}{P} H^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)'; \\ \frac{\partial Y^*}{\partial W} = \frac{1}{P}\frac{\partial f}{\partial X} H^{-1}; \\ \frac{\partial X^*}{\partial W} = \frac{1}{P} H^{-1}. \end{cases} \tag{7.38}$$

(штрих означає транспонування).

Перше рівняння системи (7.38) показує, як зміниться випуск при збільшенні ціни на продукцію фірми. Оскільки матриця Гессе H від'ємно визначена, то й матриця H^{-1} також від'ємно визначена, тому

$$\frac{\partial f}{\partial X} H^{-1} \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)' < 0,$$

а отже,

$$\frac{\partial Y^*}{\partial P} > 0. \qquad (7.39)$$

Нерівність (7.39) означає, що зі зростанням ціни на продукцію завжди зростає оптимальний рівень випуску продукції.

Таким чином, пригадуючи, що $Y^* = f\left(X^*(P,\ W)\right)$, маємо $\frac{\partial Y^*}{\partial P} =$ $= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i^*}{\partial P} > 0;$ але всі граничні продукти для розглядуваної виробничої функції — величини додатні $\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0\right)$, тому неодмінно деякі $\frac{\partial x_i^*}{\partial P} > 0$, тобто підвищення ціни продукції, що випускається, призведе до зростання попиту на деякі ресурси.

Зауважимо, що i-й ресурс називається ***малоцінним***, якщо $\frac{\partial x_i^*}{\partial P} < 0$. Це означає, що з підвищенням ціни на продукцію попит на малоцінний ресурс зменшується. З виразу для $\frac{\partial Y^*}{\partial P} > 0$ випливає, що не всі ресурси є малоцінними.

Із системи рівнянь (7.38) випливає також, що $\left(\frac{\partial Y^*}{\partial W}\right)' = -\frac{\partial X^*}{\partial P}$, або в розгорнутому вигляді $\frac{\partial Y}{\partial w_i} = -\frac{\partial x_i^*}{\partial P}$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. Звідси доходимо висновку: зростання ціни продукції приводить до зростання або спадання попиту на окремі ресурси — залежно від виду цих ресурсів $\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial P} < 0 \text{ або } \frac{\partial x_i^*}{\partial P} > 0\right)$.

Так, підвищення ціни на малоцінний ресурс приводить до збільшення випуску.

Розглянемо реальний вираз $\frac{\partial Y^*}{\partial P}$. З урахуванням останніх рівностей його можна подати у вигляді

$$\frac{\partial Y^*}{\partial P} = \frac{\partial f\left(X^*\right)}{\partial X} \frac{\partial X^*}{\partial P} = -\frac{\partial f\left(X^*\right)}{\partial X} \cdot \left(\frac{\partial Y^*}{\partial W}\right)' = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial Y^*}{\partial w_i} > 0.$$

Тому з $\frac{\partial f}{\partial x_i} > 0$ випливає, що має виконуватись нерівність $\frac{\partial Y^*}{\partial w_i} < 0 \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ n)$, тобто зростання ціни на деякий ресурс призводить зменшення випуску продукції.

Повернемось до системи (7.38). З неї маємо $\frac{\partial X^*}{\partial W} = \frac{1}{P} H^{-1}$, звідки випливає, що матриця $\frac{\partial X^*}{\partial W}$ від'ємно визначена і, відповідно, $\frac{\partial x_i}{\partial w_i} < 0$. Це означає, що підвищення ціни на деякий ресурс завжди приводить до зниження попиту на нього (відповідно криві попиту спадають).

З останньої рівності $\frac{\partial X^*}{\partial W} = \frac{1}{P} H^{-1}$ випливає, що матриця $\frac{\partial X^*}{\partial W}$ — симетрична, тоді

$$\frac{\partial x_j^*}{\partial w_i} = \frac{\partial x_i^*}{\partial w_j},\ i,\ j = 1,\ 2,\ ...,\ n. \tag{7.40}$$

Цю рівність можна тлумачити так: зміна ціни на *i*-й ресурс так само впливає на зміну попиту на *j*-й ресурс, як зміна ціни на *j*-й ресурс на зміну попиту на *i*-й ресурс.

Витрати *j*-го і *i*-го видів ресурсів є взаємозамінними (взаємодоповняльними), якщо $\frac{\partial x_j^*}{\partial w_i} > 0 \ \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial w_i} < 0\right)$.

Таким чином, із (7.40) випливає, що для взаємозамінних ресурсів підвищення ціни на один із них призводить до зниження попиту на цей ресурс, але до підвищення попиту на інший, тоді як для взаємодоповняльних ресурсів підвищення ціни одного з них призводить водночас до зниження попиту на обидва ресурси. Нагадаємо, що для споживача можуть існувати так звані ***товари Гіффіна***, підвищення цін на які приводить до підвищення попиту. Проте, як випливає з останнього аналізу, для фірми не можуть існувати «ресурси Гіффіна», оскільки вона не повинна задовольняти обмеження бюджетного типу і, як уже зазначалося, криві попиту на ресурси завжди спадні.

7.2.6. *Поведінка фірми на конкурентному ринку*

Розглянемо дві конкуруючі фірми, що виготовляють одну й ту саму продукцію згідно зі своєю виробничою функцією. Для першої фірми виробнича функція $Y_1 = F_1(X^1)$, для другої — $Y_2 = F_2(X^2)$. Вектори $X^1 = (x_i^1)$ і $X^2 = (x_i^2)$ — вектори витрат на виробництво відповідно першої і другої фірми.

Зважаючи на те, що ринок конкурентний, ціна продукції залежатиме тільки від випуску:

$$P = P(Y_1,\ Y_2). \tag{7.41}$$

При цьому вважатимемо, що зі зростанням випуску продукції ціна спадає:

$$\frac{\partial P}{\partial Y_1} < 0;\ \ \frac{\partial P}{\partial Y_2} < 0.$$

Ціна ресурсів також залежить від обсягів їх закупівлі x_i^1, x_i^2 першою і другою фірмами. Відповідно маємо:

$$w_i = w_i(x_i^1,\ x_i^2),\ \ i = 1,\ 2, ...,\ n, \tag{7.42}$$

причому ціни зростають з підвищенням попиту:

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} > 0;\ \ \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2} > 0.$$

Кожна фірма намагається максимізувати свій прибуток. Наприклад, для першої фірми стратегія випливає з такої моделі дій:

$$\begin{gathered}\max\left(P(Y_1,\ Y_2)Y_1 - \sum_{i=1}^{n} w_i(x_i^1,\ x_i^2)x_i^1 \right) \\ \text{за умови } Y_1 = F_1(x_1^1,\ x_2^1,\ ...,\ x_n^1).\end{gathered} \tag{7.43}$$

Аналогічну задачу має розв’язувати й друга фірма.

Складемо функцію Лагранжа для розв’язання поставленої задачі:

$$L(Y,\ X^1,\ \lambda) = P(Y_1,\ Y_2)Y_1 - \sum_{i=1}^{n} W_i(x_i^1,\ x_i^2)x_i^1 - \lambda(F(x_1^1,\ x_2^1,\ ...,\ x_n^1) - Y_1).$$

Необхідні умови екстремуму функції Лагранжа мають вигляд:

$$\frac{\partial L}{\partial Y_1} = P(Y_1,\ Y_2) + Y_1\frac{\partial P}{\partial Y_1} + Y_1\frac{\partial P}{\partial Y_2}\cdot\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1} - \lambda = 0\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_i^1} = -W_i\left(x_i^1,\ x_i^2\right) - x_i^1\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} - x_i^1\frac{\partial w_i}{\partial x_i^2}\frac{\partial x_i^2}{\partial x_i} + \lambda\frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = 0\,,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = F_1\left(x_1^1,\ x_2^1,\ ...,\ x_n^1\right) - Y_1 = 0.$$

Виключивши зі здобутої системи рівнянь λ, дістанемо $n+1$ рівняння для визначення стратегії $Y_1,\ x_1^1,\ x_2^1,\ ...,\ x_n^1$ поведінки першої фірми в умовах конкуренції з другою фірмою:

$$\begin{aligned}
&\left(P(Y_1,\ Y_2) + Y_2\left(\frac{\partial P}{\partial Y_1} + \frac{\partial P}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}\right)\right)\frac{\partial F_1}{\partial x_i^1} = \\
&= W_i + x_i^1\left(\frac{\partial w_i}{\partial x_i^1} + \frac{\partial w_i}{\partial x_i^2}\frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^2}\right),\ i = 1,\ 2,\ ...,\ n, \\
&Y_1 = F_1\left(x_1^1,\ x_2^1,\ ...,\ x_n^1\right).
\end{aligned} \tag{7.44}$$

Розв’язок цих рівнянь істотно залежить від $\frac{\partial Y_2}{\partial Y_1}$ і $\frac{\partial x_i^2}{\partial x_i^1}$. З економічного погляду ці величини являють собою реакцію другої фірми на стратегію $Y_1,\ x_1^1,\ x_2^1, ...,\ x_n^1$ першої фірми. Розглядаючи різні варіанти цієї реакції, дістанемо різні розв’язки задачі конкуренції виробників.

Нехай витрати фірми є однаковими лінійними функціями випуску $C_i(Y_i) = cY_i + d$, $i = 1,\ 2$, де c — граничні витрати; d — постійні витрати, а ціна продукції — лінійна функція загального випуску фірм $p(Y) = a - bY$ (тут $Y = Y_1 + Y_2$; b — зниження ціни в результаті збільшення на одиницю загального випуску фірм). Тоді вирази для прибутку конкуруючих фірм набирають вигляду:

$$\begin{aligned}
П_i(Y_1,\ Y_2) &= (a - b(Y_1 + Y_2))Y_i - cY_i - d = \\
&= bY_i(Y_0 - (Y_1 + Y_2)) - d,\ i = 1,\ 2,
\end{aligned} \tag{7.45}$$

де $Y_0 = \dfrac{a-c}{b}$.

Визначаємо максимум прибутку першої фірми:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial Y_1} = b(Y_0 - (Y_1 + Y_2)) - bY_1 - bY_1\frac{dY_2}{dY_1} = b\left(Y_0 - (Y_1 - Y_2) - Y_1\left(1 + \frac{dY_2}{dY_1}\right)\right) = 0.$$

З останнього рівняння знаходимо випуск, що максимізує прибуток:

$$Y_1^* = \frac{Y_0 - Y_2}{2 + \dfrac{dY_2}{dY_1}}. \tag{7.46}$$

Аналогічно знаходимо випуск, що максимізує прибуток другої фірми:

$$Y_2^* = \frac{Y_0 - Y_1}{2 + \dfrac{dY_1}{dY_2}}. \tag{7.47}$$

Розглянемо випадок, коли кожна з фірм вважає незмінною стратегію поведінки на ринку іншої фірми. Тоді $\frac{dY_2}{dY_1} = \frac{dY_1}{dY_2} = 0$. Зі співвідношень (7.46) і (7.47) випливає $Y_1^* = Y_2^*$, звідки $Y_1^* = \frac{Y_0 - Y_1^*}{2}$, або $Y_1^* = Y_2^* = \frac{Y_0}{3}$.

Знайдено так звану ***точку рівноваги Курно*** $Y_1^K = \frac{Y_0}{3}$, $Y_2^K = \frac{Y_0}{3}$, в якій загальний випуск фірм $Y^K = \frac{2Y_0}{3}$, а ціна $p^K = a - bY^K = = a - \frac{2}{3}bY_0$.

Відшукання точки рівноваги Курно можна подати як деякий інтераційний процес, що збігається до точки $\left(\frac{Y_0}{3}; \frac{Y_0}{3}\right)$. На рис. 7.11 зображено прямі $Y_1 = \frac{Y_0 - Y_2}{2}$; $Y_2 = \frac{Y_0 - Y_1}{2}$, кожна з яких характеризує реакцію однієї фірми на дії іншої, являючи собою множину точок оптимального випуску однієї фірми при заданому фіксованому випуску іншої.

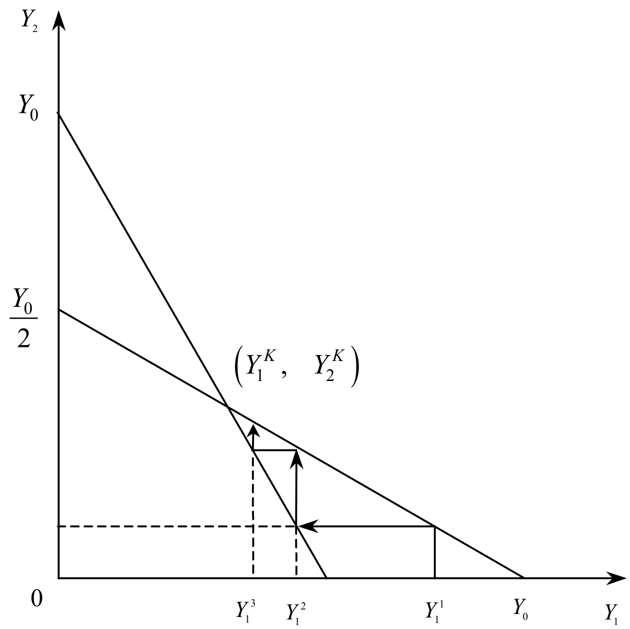


Рис. 7.11

Нехай перша фірма вибирає випуск $Y_1^1 < Y_0$, а друга фірма діє так, ніби перша весь час випускає Y_1^1. Тоді $Y_2^1 = \frac{Y_0 - Y_1^1}{2}$, причому перша фірма діє так, ніби друга весь час має випуск Y_2^1, тобто $Y_1^2 = \frac{Y_0 - Y_2^1}{2} = \frac{Y_0 + Y_1^1}{4}$. Таким чином, на m-му кроці ітерації дістаємо:

$$Y_1^{m+1} = \frac{Y_0 - Y_2^m}{2}; \;\; Y_2^{m+1} = \frac{Y_0 - Y_1^m}{2} \;\; (m \text{ — номер кроку інтерації}).$$

На рис. 7.11 стрілками зображено траєкторію руху фірми до точки рівноваги Курно. Як бачимо, процес монотонно збігається до цієї точки.

Припустимо тепер, що перша фірма знає, що друга фірма діє за Курно, тобто

$$Y_2 = \frac{Y_0 - Y_1}{2}.$$

Тоді маємо $\frac{dY_2}{dY_1} = -\frac{1}{2}$, причому випуск першої фірми, що максимізує її прибуток, становить

$$Y_1^* = \frac{Y_0 - Y_2}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2(Y_0 - Y_2)}{3}.$$

Якщо друга фірма надалі також діятиме за Курно, то, наприклад, друга ітерація випуску першої фірми буде $Y_1' = \frac{5Y_0 - 2Y_2}{12}$, а процес зрештою збігатиметься до так званої ***точки рівноваги Стакельберга***: $Y_1^S = \frac{Y_0}{2}$ (це значення можна дістати як розв'язок рівняння $Y_1 = \frac{Y_0 - \frac{1}{2}(Y_0 - Y_1)}{2}$). Для другої фірми $Y_2^3 = \frac{Y_0 - Y_1^s}{2} = \frac{Y_0}{4}$.

За такої стратегії перша фірми одержить прибуток $\Pi_1\left(Y_1^S,\ \ Y_2^S\right) = \frac{bY_0^2}{8} - d$, а друга $\Pi_2\left(Y_1^S,\ Y_2^S\right) = \frac{bY_0^2}{16} - d$, що значно менше за прибуток першої. Загальний обсяг випуску $Y^s = \frac{3}{4}Y_0$, а ціна $P^s = a - \frac{3}{4}bY_0$, тобто загальний випуск більший, а ціна менша, ніж у точці Курно.

Якщо тепер друга фірма так само, як і перша, діятиме за Стакельбергом, тобто вважатиме, що перша весь час діє за Курно $\left(\frac{\partial Y_1}{\partial Y_2} = -\frac{1}{2}\right)$, то створиться ситуація, яку називають ***нерівновагою Стакельберга***. У цьому разі стратегії симетричні, тому при однакових функціях витрат $Y_1^* = Y_2^*$ вираз (7.46) набирає вигляду $Y^{\bar{S}} = \frac{2\left(Y_0 - Y_1^s\right)}{3}$, звідки $Y_1^{\bar{S}} = Y_2^{\bar{S}} = \frac{2}{5}Y_0$. При цьому, обчисливши прибуток фірм у точках Стакельберга $\left(\frac{2}{5}Y_0,\ \frac{2}{5}Y_0\right)$ і Курно $\left(\frac{Y_0}{3};\ \frac{Y_0}{3}\right)$, дістанемо $\Pi_i^{\bar{S}} = \frac{2bY_0^2}{25} - d$; $\Pi_i^K = \frac{1}{9}bY_0^2 - d$, а отже, $\Pi_i^{\bar{S}} < \Pi_i^{\bar{K}}$ (у точці Стакельберга прибутки фірм менші). А загальний випуск $Y^{\bar{S}} = \frac{4}{5}Y_0$ і ціна $p^{\bar{S}} = a - \frac{4}{5}bY_0$ стають більш привабливими для споживача, ніж у точці Курно: $Y^K = \frac{2}{3}Y_0$ і $p^K = a - \frac{2}{3}bY_0$.

Припустимо, що фірми об'єднуються і домовляються між собою про максимізацію загального прибутку, тобто утворюється монополія. При цьому максимум прибутку $\max(bY(Y_0 - Y) - 2d)$ досягається в точці $Y^M = \frac{Y_0}{2}$, а ціна $p^M = a - \frac{bY_0}{2}$. Отже, у такому разі випуск найменший, а ціна найбільша порівняно з точками Курно і Стакельберга. Зрозуміло, що утворення монополії є найгіршою подією для споживача.

Розглянемо ще одну модель взаємодії двох фірм на ринку одного товару — так звану ***стратегію Бертрана***. Кожна фірма призначає свою ціну p_i, $i = 1, 2$. Споживачі купують товар за найнижчою ціною згідно зі своєю функцією попиту $\min(p_1, p_2)$ і зовсім не купують його за вищою ціною. При цьому будемо вважати, що фірма, яка призначила найнижчу ціну, задовольняє попит споживача. Якщо ціни однакові $(p_1 = p_2 = p)$, то товар обох фірм продається порівну у відповідній кількості. Нехай граничні витрати однакові в обох фірм і дорівнюють C. Для спрощення вважатимемо, що постійні витрати дорівнюють нулю $(d = 0)$, тобто витрати фірм є однаковими лінійними функціями $C_i(Y_1) = CY_i$, $i = 1, 2$. Припустимо також, що й виробничі цикли фірм збігаються.

Стратегія поведінки фірм ***стійка за Нешем***, якщо обидві фірми можуть працювати за цією стратегією і жодній з них не вигідно відходити від обраної стратегії, якщо інша фірма й далі її додержує.

З огляду на таку стратегію розглянемо ситуацію рівноваги ціни на ринку $(p_1 = p_2 = C)$. Обидві фірми мають нульовий прибуток, але не мають збитків. При цьому жодна з фірм не захоче підняти ціну, якщо друга не буде її піднімати. Зрозуміло, що в такій ситуації перша фірма нічого не продасть.

Таким чином, стратегія підтримки однакових цін, які дорівнюють граничним витратам $(p_1 = p_2 = C)$, є стійкою за Нешем.

Розглянемо тепер ситуацію однакових цін, які не дорівнюють граничним витратам ($p_1 = p_2$, але $p_i > C$, $i = 1, 2$). При цьому обидві фірми мають половину ринку, обсяг продажу становить $\frac{Y_0}{2}$

для кожної фірми, але ця ситуація стає нестійкою за Нешем. Кожна фірма, намагаючись трохи знизити ціну зі збереженням деякого прибутку $\left(p^* > C\right)$, може захопити весь ринок. Але те саме спробує зробити й інша фірма. У результаті кількох вдалих для однієї і невдалих для іншої змін цін ситуація дійде до точки $p_1 = p_2 = c$, яка вже буде *стійкою за Нешем*. Тобто жодній із фірм не вигідно відходити від обраної стратегії за умови, що інша фірма не змінює своєї.

Повернемось до розглянутих раніше стратегій Курно та Стакельберга і вивчимо їх з погляду стійкості за Нешем. Нехай випуски фірм дорівнюють Y_1 і Y_2. Тоді сумарний прибуток:

$$\Pi\left(Y_1, \quad Y_2\right) = \Pi_1\left(Y_1, \quad Y_2\right) + \Pi_2\left(Y_1, \quad Y_2\right) = bY_1\left(Y_0 - \left(Y_1 + Y_2\right)\right) +$$
$$+ bY_2\left(Y_0 - \left(Y_1 + Y_2\right)\right) = bY\left(Y_0 - Y\right),$$

де $Y = Y_1 + Y_2$.

Максимальне значення прибутку $\frac{bY_0^2}{4}$ у точці $Y = \frac{Y_0}{2}$. Оскільки $\frac{\partial \Pi_1}{\partial Y_2} = -bY_1 < 0$; $\frac{\partial \Pi_2}{\partial Y_1} = -bY_2 < 0$, то зі збільшенням випуску однієї фірми прибуток іншої зменшується, а зі зменшенням випуску однієї фірми прибуток іншої збільшується.

Зрозуміло, що для стійкості за Нешем необхідно, щоб $\frac{\partial \Pi_1}{\partial Y_1} = \frac{\partial \Pi_2}{\partial Y_2} = 0$, і достатньо, щоб на додаток до першої умови було $\frac{\partial^2 \Pi_i}{\partial Y_i^2} < 0$. Знайдемо відповідні частинні похідні:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial Y_1} = b(Y_0 - Y_2 - 2Y_1); \ \frac{\partial \Pi_2}{\partial Y_2} = b(Y_0 - Y_1 - 2Y_2) \text{ і } \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial Y_1^2} = -2b < 0;$$
$$\frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial Y_2^2} = -2b < 0.$$

Із наведених рівностей випливає, що обидві перші частинні похідні спадають і екстремум функції прибутку може бути тільки максимумом.

Розглянемо стратегію Курно. Ситуація симетрична відносно обох фірм, тому достатньо проаналізувати спробу першої збільшити свій випуск. Маємо:

$$\Pi_1(Y_1) = bY_1\left(Y_0 - \left(Y_1 + \frac{Y_0}{3}\right)\right), \text{ звідси } \Pi_1'(Y_1) = b\left(\frac{2Y_0}{3} - 2Y_1\right) = 0$$

$$\text{при } Y_1 = \frac{Y_0}{3},$$

тобто в точці Курно. А оскільки $\Pi_1''(Y_1) = -2b < 0$, то $\Pi_1(Y_1)$ має максимум у точці Курно. Таким чином при відході від цієї точки прибуток першої фірми зменшиться. Те саме стосується й другої фірми. Як висновок маємо, що точка Курно стійка за Нешем.

Нехай тепер кожна фірма збільшить на Δt свій випуск продукції. Тоді, наприклад, для першої фірми маємо:

$$\Pi_1(\Delta t) = b\left(\frac{Y_0}{3} + \Delta t\right)\left(\frac{Y_0}{3} - 2\Delta t\right), \quad \Pi_1'(0) = -\frac{bY_0}{3} < 0.$$

Отже, точка Курно не вигідна обом фірмам, але відходити від неї їм треба разом, одночасно зменшуючии свої випуски продукції.

У точці Стакельберга випуск продукції першої і другої фірми дорівнює відповідно рівні $\frac{Y_0}{2}$ і $\frac{Y_0}{4}$. Розглянемо спочатку дії першої фірми. Для неї прибуток

$$\Pi_1(Y_1) = bY_1\left(Y_0 - \left(Y_1 + \frac{Y_0}{4}\right)\right), \ \Pi_1'(Y_1) = b\left(\frac{3Y_0}{4} - 2Y_1\right) < 0 \text{ при } Y_1 = \frac{Y_0}{2},$$

тобто першій фірмі вигідно зменшувати свій випуск продукції за умови, що друга фірма й далі випускатиме $\frac{Y_0}{4}$ одиниці продукції.

Тепер розглянемо поведінку другої фірми. Для неї маємо:

$$\Pi_2(Y_2) = bY_2\left(Y_0 - \left(\frac{Y_0}{2} + Y_2\right)\right), \ \Pi_2'(Y_2) = b\left(\frac{Y_0}{2} - 2Y_2\right) = 0 \text{ при } Y_2 = \frac{Y_0}{4}.$$

А оскільки $\Pi_2''(Y_2) = -2b$, то прибуток другої фірми $\Pi_2(Y_2)$ має максимум у точці $Y_2 = \frac{Y_0}{4}$, тобто їй не вигідно змінювати випуск за умови, що перша фірма випускатиме $\frac{Y_0}{2}$ одиниці продукції. Незважаючи на це, можливі дії першої фірми щодо зменшення випуску продукції роблять точку Стакельберга нестійкою за Нешем.

За стратегією Стакельберга перша фірма перебуває в явно вигіднішій ситуації, ніж друга, оскільки її прибуток удвічі більший. Якщо друга не погоджується з цим, усе що вона може зробити — це змінити в той чи інший бік випуск продукції. При цьому її прибуток тільки зменшиться, але зменшиться і прибуток першої фірми. Якщо перша фірма більш могутня, вона може піти на зменшення свого прибутку, випускаючи й далі $\frac{Y_0}{2}$ одиниці продукції, з огляду на те, що зменшення прибутку другої фірми поверне її до випуску $\frac{Y_0}{4}$ одиниці продукції.

Проте можна розглянути й інший сценарій взаємодії фірм. Наприклад, як відомо з попереднього, перша фірма в будь-якій ситуації в точці Курно згідно зі стратегією Стакельберга може одержати прибуток, не більший за $\frac{bY_0^2}{8}$. Якщо перша фірма потужніша за другу, то вона може нав'язати їй стратегію Стакельберга, а потім за домовленістю з нею перейти до однакових випусків $\frac{Y_0}{4}$. При цьому її прибуток залишиться таким самим і становитиме $\frac{bY_0^2}{8}$, а прибуток другої фірми збільшиться з $\frac{bY_0^2}{16}$ до $\frac{bY_0^2}{8}$. Якщо буде попередня домовленість фірм поділити приріст прибутку другої фірми $\frac{bY_0^2}{16}$ між собою, то прибуток першої фірми перевищить $\frac{bY_0^2}{8}$.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Доведіть, що коли гранична норма заміщення s для лінійно однорідної двофакторної виробничої функції $F(K,\ L)$ не залежить від K і L, то $F(K,L) = AK + BL$, де A, B сталі.

2. Доведіть, що функція $F(K,L) = A\left(\delta K^{-v} + (1-\delta)L^{-v}\right)^{-\frac{1}{v}}$, де $A > 0$; $0 < \delta < 1$; $v > -1$, є вгнутою.

3. Доведіть, що для виробничої функції Леонтьєва $F(K,L) = \min(aK,\ \ bL)$ гранична норма заміщення s дорівнює нескінченності. Що це означає з погляду економіки?

4. Доведіть, що $\lim\limits_{v\to\infty}\left(\delta K^{-v} + (1-\delta)L^{-v}\right)^{-\frac{1}{v}} = \min\{K,\ L\}$.

5. Виробнича функція фірми має вигляд

$$Y = -4x_1^2 + 24x_1 + 2x_1x_2 + 6x_2 - x_2^2.$$

Знайдіть максимальний випуск і витрати, що забезпечують цей випуск.

6. У невеликій теплиці щоденно збирають врожай y огірків, який залежить від кількості робітників: $y = 4\sqrt{x} + 4\ln x$. Знайдіть оптимальну кількість робітників, якщо денна заробітна плата робітника дорівнює доходу від продажу 2 кг огірків.

7. Група «човників» у кількості x_1 вирішили об’єднатися з x_2 продавцями. Прибуток за день роботи (виторг мінус витрати, без заробітної плати) виражається формулою $Y = 600(x_1x_2)^{\frac{1}{3}}$. Денна заробітна плата «човника» становить 50 у.о., а продавця — 20 у.о. Знайдіть оптимальний за кількістю «човників» і продавців склад групи.

8. Виробнича функція фірми $Y = 3x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{2}{3}}$. Знайдіть граничні продукти за ресурсами та побудуйте ізокванту $Y = 3$. Обчисліть норму заміни першого ресурсу другим у точці $x_1 = 1,\ \ x_2 = 1$.

9. Виробнича функція $Y = 5x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}x_3^{\frac{1}{3}}$. Знайдіть максимальний випуск за умови $x_1 + x_2 + x_3 = 9$, а також граничні продукти в цій точці.

10. Залежність щоденного виторгу автотранспортного підприємства від кількості A автомобілів і кількості N робітників подається наближеною формулою $Y = 900A^{\frac{1}{2}}N^{\frac{1}{4}}$. Щоденні витрати на один автомобіль становить 40 у.о., а щоденна зарплата робітника 10 у.о. Знайдіть оптимальну чисельність робітників і автомобілів.

11. Виторг Y кав’ярні залежить від кількості x_1 столиків і кількості x_2 офіціантів, причому $Y = 2x_1^{\frac{2}{3}}x_2^{\frac{1}{4}}$. Витрати на один столик становлять 5 у.о., заробітна плата офіціанта 10 у.о. (усе в розрахунку на одну зміну). Знайдіть оптимальний розмір кав'ярні (кількість столиків, кількість офіціантів).

12. Рекламне оголошення в газеті коштує 500 грн, а хвилина телевізійного часу — 1500 грн. Якщо $x_1,\ x_2$ — кількість відповідно оголошень у газеті і хвилин рекламного часу на телебаченні за тиждень, то прибуток фірми за цей період

$$\Pi(x_1,\ x_2) = 4x_1x_2 - 5x_1^2 - x_2^2 + 20x_1 = 100\,000.$$

Як потрібно розподілити рекламний бюджет, щоб прибуток був максимальним?

13. Знайдіть середню і граничну ефективність ресурсу x_2, якщо виробнича функція має вигляд

$$F(x_1,\ x_2) = x_2\frac{2x_1^2 + x_2^2}{3x_1^2 + x_2^2}.$$

14. За даного рівня виробництва граничний продукт праці становить 5 одиниць продукції на місяць, а граничний продукт фондів — 10 одиниць на місяць. Обчисліть граничні норми заміни праці фондами і фондів працею.

15. Виробнича функція невеликого цеху з виробництва рам для картин має вигляд $y = 5K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{2}}$, де y — кількість картин, виготовлених за день; K — кількість годин роботи устаткування за день; L — кількість працівників.

Знайдіть середні та граничні продукти праці при $K = 9$, $L = 9$. Як зміняться ці продукти при подвоєнні витрат ресурсів?

16. Прибутки двох фірм, що конкурують на ринку одного товару, і ціна товару подаються відповідно такими виразами:

$$\Pi_i(Y_1,\ Y_2) = (9 - (Y_1 + Y_2))Y_i;\ \ p(Y_1,\ Y_2) = 15 - (Y_1 + Y_2),\ \ i = 1,\ 2.$$

Знайдіть оптимальний випуск кожної фірми за відомого випуску іншої, а також найкращі відповіді першої фірми на стратегії другої:

а) $Y_2 = \dfrac{9 - Y_1}{2}$; б) $Y_2 = \dfrac{2(9 - Y_1)}{3}$.

Яким буде загальний випуск при об'єднанні фірм? Який із варіантів (а, б чи об'єднання фірм) найкращий з погляду споживача стосовно ціни і обсягу випуску продукції?

17. Залежність витрат і ціни на продукцію однопродуктової фірми від випуску Y подається відповідно такими виразами:

$$C(Y) = \gamma Y^2 + \beta Y + \alpha, \quad p(Y) = a - bY.$$

Який випуск Y має обрати фірма?

18. Виробнича функція фірми

$$Y = F(x_1,\ x_2) = Ax_2 \ln x_1; \quad x_i > x_i^0 > 1, \quad i = 1, 2.$$

Знайдіть функцію попиту на ресурси $x_1(p,\ w_1,\ w_2)$, $x_2(p, w_1, w_2)$, де p — ціна продукції; $w_1,\ w_2$ — ціна ресурсів. Як зміниться випуск і попит на ресурси з підвищенням ціни продукції?

19. Виробнича функція фірми $Y = 10x_1^{\frac{1}{3}} x_2^{\frac{2}{3}}$. Закупівельна ціна ресурсів становить відповідно 5 і 10 грошових одиниць. Який економічний зміст має множник Лагранжа?

7.3. Моделі взаємодії споживачів і виробників

Розглянуті в попередніх підрозділах моделі поведінки споживачів і виробників показують, що головною метою кожного з цих учасників ринку є максимізація своїх інтересів. Споживачі намагаються за певних обмежень максимізувати свою функцію корисності, а виробники — максимізувати свій прибуток, маючи певну виробничу функцію. І споживачі, і виробники реалізують свої прагнення, зустрічаючись на ринку. Розглядатимемо ринок як деякий механізм, у межах якого відбуваються взаємодія, співробітництво, конкуренція та реалізація цілей споживача і виробника. Рушійна сила цього механізму — попит і пропозиція, а ціна є тим головним фактором, від якого залежить діяльність ринку.

Надалі розглядатимемо конкурентний ринок, де відсутні будь-які об'єднання виробників, що можуть диктувати ціну. Кожний учасник пасивно приймає наявну на ринку систему цін, не намагаючись впливати на неї. Вплив на ціну відбувається тільки через механізм попит — пропозиція.

Головним питанням у моделях взаємодії споживачів і виробників, а взагалі кажучи і в інших моделях економіки, є питання існування ***рівноважної ціни***. Під ***рівноважною*** розуміють таку ціну на продукти та початкові фактори, коли виробники і споживачі, що діють у найкращий для себе спосіб відповідно до своїх бюджетних можливостей, забезпечують такий стан речей на ринку, коли попит на кожний продукт і фактор не перевищує його пропозиції.

Далі в розглядуваних моделях головна увага приділяється наявності рівноважної ціни.

7.3.1. *Павутиноподібна модель, модель Еванса*

Однією з найпростіших моделей установлення рівноважної ціни є **павутиноподібна модель**. У попередніх підрозділах було показано, що функція попиту на товар, побудована на основі теорії корисності, є спадною функцією ціни p. У свою чергу, при розгляді поведінки виробника було показано, що функція пропозиції, здобута при максимізації прибутку, є зростаючою функцією ціни p.

Розглянемо ринок з одним єдиним продуктом. Тоді попит на нього характеризується спадною ***функцією попиту*** $x = \Phi(p)$, а пропозиція — зростаючою ***функцією пропозиції*** $y = \Psi(p)$.

Зрозуміло, що ці функції визначені і неперервні при всіх $p > 0$. Крім того, вважатимемо (це випливає з властивостей розглядуваних функцій), що

$$\lim_{p\to 0}\Phi(p)=\infty;\ \ \lim_{p\to \infty}\Phi(p)=0;\ \ \lim_{p\to 0}\Psi(p)=0;\ \ \lim_{p\to \infty}\Psi(p)=\infty.$$

Оскільки йдеться про ринок єдиного товару, то в положенні рівноваги $p \neq 0$, а отже, це положення характеризується рівністю

$$\Phi(p)=\Psi(p). \tag{7.48}$$

Згідно з умовами, накладеними на функції попиту і пропозиції, це рівняння має єдиний розв'язок, причому трійка чисел (p^*, x^*, y^*), де $x^* = \Phi(p^*) = \Psi(p^*) = y^*$, визначає єдиний стан рівноваги.

Графіки функцій попиту і пропозиції при зроблених обмеженнях наведено на рис. 7.12. Розглянемо один із варіантів пошуку рівноважної ціни p^*. Нехай у початковий момент на товар призначено ціну p_0. Якщо попит перевищує пропозицію $(\Phi(p_0) > \Psi(p_0))$, то ціна зростає до значення p_1, щоб $\Phi(p_1) = \Psi(p_0)$, тобто щоб попит у наступному періоді знизився до значення пропозиції в даному періоді. При новій ціні p_1 пропозиція перевищує попит, а отже, потрібно знижувати ціну до p_2, за якої $\Phi(p_2) = \Psi(p_1)$. Здійснюючи далі цей процес, дістаємо послідовність цін $\{p_t\}$, яка збігається до рівноважної ціни. Сам ітеративний процес побудови послідовності цін описується різницевим рівнянням

$$\Phi(p_t) = \Psi(p_{t-1}),\ t = 0, 1, 2, \dots .$$

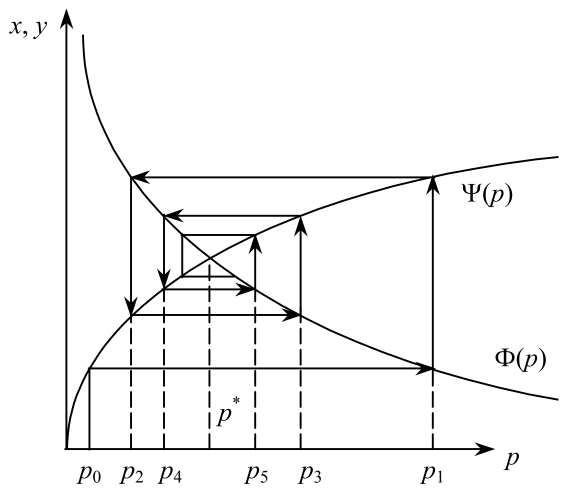


Рис. 7.12

Як випливає з рис. 7.12, положення рівноваги $p = p^*$ є стійким у тому розумінні, що починаючи практично з будь-якої ціни p_0 процес встановлення рівноважної ціни завжди приводить до одного й того самого значення p^*. Слід також зазначити, що в розглянутому випадку напрямів опуклості функцій $\Phi(p)$ і $\Psi(p)$ ітеративний процес побудови рівноважної ціни p^* буде збіжним. Якщо змінити напрям опуклості однієї з функцій, наприклад $\Psi(p)$, то хоча рівняння (7.48) і матиме єдиний розв'язок, але процес пошуку рівноважної ціни за таким методом буде зростаючим при $p_0 < p^*$, а при $p_0 > p^*$, $\frac{dp}{dt} < 0$ ціна досягатиме рівноважного значення спадаючи. Проте в будь-якому разі рівноважна ціна досягається. При цьому значення p^* не залежить від параметрів, що характеризують попит і пропозицію.

Дискретний аналог моделі Еванса, яка розглядається далі, наведено на рис. 7.13, де зображено прямі попиту $d = \Phi P(t) = -bp + a$ і пропозиції $s = \Psi(p) = \beta p + \alpha$ та зазначено механізм побудови послідовності $\{p_n\}$, яка зростає від початкової ціни p_0, за якої попит не дорівнює пропозиції, до рівноважної ціни p^*, за якої попит дорівнює пропозиції.

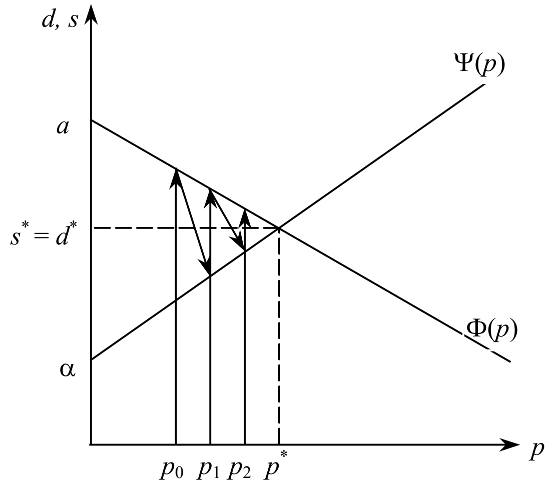


Рис. 7.13

Увесь проміжок часу розбивається на елементарні проміжки завдовжки Δt, причому ціна в момент часу $t = n\Delta t$ дорівнює

$$p_n = p_{n-1} + \gamma \Delta t \delta_{n-1},$$

де $\delta_{n-1} = (a - \alpha) - (b + \beta) p_{n-1}$.

Для загального випадку n товарів П. Самуельсон [3] запропонував схему моделювання динаміки цін на реальному ринку товарів. Розглянемо функцію $E(P) = \Phi(P) - \Psi(P)$, яку назвемо ***функцією надлишкового попиту***.

Із вимог, які накладаються на функції попиту і пропозиції, випливає, що $E(P)$ визначена і неперервна при всіх $P > 0$. Тоді, узагальнюючи дискретну модель Еванса, можна стверджувати, що ціна на j-й продукт має задовольняти системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_j}{dt} = \lambda_j E_j(P);\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7.49}$$

Тут λ_j — число, яке називають ***коефіцієнтом підстроювання ціни на j-й продукт***, $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ — вектор цін на продукти.

Система рівнянь (7.49) описує динамічний процес формування цін на продукти. Зокрема, якщо $E_j(P) > 0$, тобто попит на j-й продукт перевищує пропозицію, то ціна на нього зростає. Навпаки, якщо $E_j(P) < 0$, то ціна на j-й продукт знижується.

Теорію існування та єдиності розв'язку системи (7.49) із початковими умовами $p_j(0) = p_j^0 \quad j = 1, 2, \ldots, n$, викладено, наприклад, у [4]. Тут згадаємо тільки таке поняття, як ***глобальна стійкість процесу***, що описується системою рівнянь (7.49), а саме: процес формування ціни буде глобально стійким, якщо існує $\lim\limits_{t\to\infty} P(t) = P^*$ при $P_0 > 0$, де P^* — вектор рівновісних цін.

Якщо такої границі не існує, процес побудови рівноважної ціни P^* буде розбіжним, а положення P^* — нестійким.

У моделі Еванса, на відміну від павутиноподібної моделі, час розглядається як неперервна величина. У свою чергу, ціна товару $P = P(t)$ розглядається як функція часу.

Зауважимо, що модель Еванса можна розглядати для загального випадку n товарів [3], але ми, як і раніше, розглянемо ринок одного товару. Як і для дискретного аналога цієї моделі, введемо позначення $d = d(t) = \Phi(p(t))$; $s = s(t) = \Psi(p(t))$ — відповідно попит і пропозиція в момент часу t. У цій моделі також вважається, що попит і пропозиція є лінійними функціями ціни, тобто:

$\Phi(p) = a - bp$, якщо $a > 0,\ b > 0$ (попит із підвищенням ціни спадає);

$\Psi(p) = \alpha + \beta p$, якщо $\alpha > 0,\ \beta > 0$ (пропозиція з підвищенням ціни зростає).

Окрім того, вважатимемо $a > \alpha$ (при нульовій ціні попит переважає пропозицію).

Далі, при побудові моделі використовуватимемо той факт, що зміна ціни пропорційна до перевищення попиту над пропозицією:

$$\Delta p = \gamma(d - s)\Delta t. \tag{7.50}$$

Співвідношення (7.50) з економічного погляду можна тлумачити так: **взаємодія споживачів і виробників відбувається в такий спосіб, що ціна безперервно пристосовується до ситуації на ринку. У разі перевищення попиту над пропозицією ціна зростає, у протилежному разі — спадає**.

Підставивши у (7.50) запропоновані для розглядуваної моделі функції попиту і пропозиції, дістанемо диференціальне рівняння відносно ціни $p(t)$:

$$\frac{dp}{dt} = -(b+\beta)p + a + \alpha, \quad p(0) = p_0,$$

розв'язок якого

$$p(t) = \left(p_0 - \frac{a-\alpha}{b+\beta}\right)e^{-(b+\beta)t} + \frac{a-\alpha}{b+\beta}. \qquad (7.51)$$

Розглянувши $\lim\limits_{t\to\infty} p(t) = \dfrac{a-\alpha}{b+\beta}$, знайдемо рівноважне значення ціни $p^* = \dfrac{a-\alpha}{b+\beta}$. З вигляду розв'язку (7.51) випливає, що коли $p_0 < p^*$, $\dfrac{dp}{dt} > 0$, то ціна досягає рівноважного значення зростаючи.

Зрозуміло, що існування та єдиність розв'язку системи (7.49), а також існування вектора рівноважних цін P^* залежать від властивостей функції $E(P)$.

7.3.2. *Опис моделі Вальраса*

Модель Вальраса вивчає економіку в цілком дезагрегованому вигляді. Її вихідними компонентами є окремий виробник (завод, фабрика, фірма) і окремий споживач (фізична особа, домашнє господарство). Незважаючи на те, що модель є суто теоретичною, ідеї, закладені в ній, використовувались і досі використовуються при побудові моделей економічних процесів. Для нормального функціонування економіки потрібно, щоб індивідуальні дії різних її учасників — споживачів і виробників — узгоджувались між собою.

У моделі Вальраса таке узгодження досягається не примусово, а через конкурентний ринковий механізм, який ґрунтується на регулювальній дії системи цін. Вважається, що учасники процесу ринкових відносин не можуть впливати на ціни. Такий вплив здійснюється тільки через попит і пропозицію товарів на ринку.

Вважатимемо, що споживач має початкові фактори, які є його власністю і які він може продати з метою придбання товарів виробництва. При цьому, перебуваючи в рамках бюджетних обмежень, споживач намагається максимізувати свою функцію корисності й одержати максимальну користь від обраного набору товарів.

Поведінка виробників характеризується бажанням максимізувати прибуток виробництва, реалізувавши вироблений товар споживачеві за певною ціною.

Головна проблема, що ставиться в моделі Вальраса, — це існування рівноважних цін, які забезпечували б таке становище на ринку, коли попит на кожний продукт і фактор не перевищує його пропозиції.

За такої системи цін індивідуальні наміри учасників ринку стають сумісними. Це означає, що рівноважні ціни забезпечують розв'язання конфлікту розподілу ресурсів і товарів між учасниками. Таку ситуацію називатимемо ***конкурентною рівновагою***.

Перейдемо до формального запису моделі Вальраса. Вважатимемо, що розглядається модель взаємодії l споживачів із m виробниками на ринку n товарів. Продукти виробництва (товари) і початкові фактори на цьому рівні загальності розрізняти не будемо. Кожний споживач характеризується функцією доходу $K_i(P)$, де $P=(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n)$ — вектор цін на товари; і функцією попиту $\Phi_i(P)$; $i=1,2,\ldots,l.$ Виробника будемо характеризувати множиною виробничих функцій Y_k і функцією пропозиції $\Psi_k(P)$, $k=1,2,\ldots,m$. Множину Y_k виробничих функцій вважатимемо обмеженою (що рівносильно неможливості виробництва необмеженої кількості товарів). Припускаємо, що дохід $K_i(P)$ кожного споживача складається з двох компонентів: доходу від продажу його початкового запасу товарів $b=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$, вартість якого $bP=(b_i\cdot p_i)$, і деякого доходу $I_i(P)$, що виникає, скажімо, у результаті участі споживача в доходах виробництва (заробітна плата, дивіденди і т. ін.), тобто $K(P)=b\cdot P+I_i(P)$.

Сукупною технологічною множиною називатимемо суму $Y=\sum_{k=1}^{m}Y_k$, а суму $\Psi_0(P)=\sum_{k=1}^{m}\Psi_k(P)$ розумітимемо як *функцію сукупної пропозиції* виробництва. Можна показати, що **плани (виробничі функції), оптимальні з погляду всього виробництва, є оптимальними із погляду кожного виробника**. Звідси випливає, що весь виробничий сектор можна загалом схарактеризувати сукупною технологічною множиною Y і функцією сукупної пропозиції $\Psi_0(P)=\{y|y\in Y,\ Py=\max(P\cdot y^*)\}$, не розглядаючи окремого виробника.

Вважаємо, що весь дохід виробничого сектору поділяється між споживачами, тобто $\sum\limits_{i=1}^{l} I_i(P) = yP$ для довільного $y \in \Psi_0(P)$.

Означення. Набір $\left(y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*,\ x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*, P^*\right)$ невід'ємних векторів називається ***конкурентною рівновагою***, якщо

$$y_k^* \in \Psi_k\left(p^*\right),\quad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{7.52}$$

$$x_i^* \in \Phi_i\left(p^*\right),\quad i = 1, 2, \ldots, l. \tag{7.53}$$

При цьому мають виконуватись співвідношення балансу попиту і пропозиції

$$\sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b_i \geq \sum_{i=1}^{l} x_i^*, \tag{7.54}$$

$$\left(p^* \cdot \left(\sum_{k=1}^{m} y_k^* + \sum_{i=1}^{l} b_i\right)\right) = \left(p^* \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i^*\right). \tag{7.55}$$

Означення. Вектор $P^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*\right)$ називається **вектором рівноважних цін**.

Нехай $X(P) = \{x : x \in X \quad Px \leq K(P)\}$ — множина можливих наборів товарів, які може придбати споживач при цінах P. Тоді її можна розглядати як область визначення функції корисності $u(x)$, а ***функція сукупного попиту*** набирає вигляду:

$$\Phi(P) = \sum_{i=1}^{l} \Phi_i(P) = \begin{cases} x^* : x \in X(P),\ u = \left(x^*\right) = \max u(x), \\ 0, \text{ якщо максимум не досягається.} \end{cases}$$

Подавши функцію сукупності пропозиції $\Psi(P)$ у вигляді $\Psi(P) = b + \sum\limits_{k=1}^{m} \Psi_k(P)$, $b = \sum\limits_{i=1}^{l} b_i$, можна для функцій $\Phi(P)$ і $\Psi(P)$ записати співвідношення:

$$(P \cdot x) \leq (P \cdot y);\ x \in \Phi(P);\ y \in \Psi(P), \tag{7.56}$$

які виражають ***закон Вальраса в широкому розумінні***.

Справді, якщо $x \in \Phi(P)$, $x = \sum_{i=1}^{l} x_i$, $x_i \in \Phi_i(P)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, то з означення області визначення $X(P)$ функції корисності дістаємо:

$$(x_i \cdot P) \le K(P) = (b_i \cdot P) + I_i(P),$$

або, підсумовуючи за *i*, дістаємо:

$$(x \cdot P) \le (b \cdot P) + \sum_{i=1}^{l} I_i(P).$$

Проте, якщо $y \in \Psi(P)$, то $y = b + \sum_{k=1}^{m} y_k$, $y_k \in \Psi_k(P)$.

Нехай $y_0 = \sum_{k=1}^{m} y_k$, тоді $y_0 \in \Psi_0(P)$ і $\sum_{i=1}^{l} I_i(P) = (y_0 \cdot P)$, звідки $(y \cdot P) = (b \cdot P) + \sum_{i=1}^{l} I_i(P)$.

Отже, співвідношення (7.56) доведено.

Якщо в (7.56) нерівність замінимо рівністю, ***дістанемо закон Вальраса у вузькому розумінні*, який у вартісному виразі означає, що попит дорівнює пропозиції при цінах** $p \ge 0$. Таким чином, модель рівноваги Вальраса побудовано.

Вимоги закону Вальраса, записаного співвідношеннями (7.52) — (7.55), можна інтерпретувати з економічного погляду. Так, співвідношення (7.52) і (7.53) означають, що кожний з учасників ринку розглядає ціни P^* як задані, але діє в найвигіднішии для себе спосіб. Споживач вибирає ті набори товарів x^*, які забезпечують максимум функції корисності, а виробник обирає такі випуски, які гарантують максимальні прибутки.

Ліва частина співвідношення (7.54) являє собою сукупну пропозицію, а права — сукупний попит на товари. Зрозуміло, що в рамках розглядуваної моделі попит не повинен перевищувати пропозицію на ринку товарів.

Співвідношення (7.55) означає, що вартість куплених товарів дорівнює вартості проданих. Звідси випливає, що коли в (7.54) у якомусь компоненті *j* виконується строга нерівність, тобто пропозиція *j*-го товару перевищує попит на нього, то відповідний компонент p_j^* вектора рівноважних цін дорівнює нулю, а отже, *j*-й товар є вільним. З використанням понять функцій сукупного попиту і пропозиції означення конкурентної рівноваги можна переформулювати так:

ОЗНАЧЕННЯ. Набір $\left(y^*, x^*, P^*\right)$ називається ***конкурентною рівновагою***, якщо

$$y^* \in \Psi\left(P^*\right);\ x^* \in \Phi\left(P^*\right); \tag{7.57}$$

$$x^* \leq y^*;\ \left(P^* \cdot x^*\right) = \left(P^* \cdot y^*\right). \tag{7.58}$$

7.3.3. *Теорема та модель Ерроу—Дебре, модель Вальда—Касселя*

Основна відмінність моделі Ерроу—Дебре [3] від моделі Вальраса полягає в конкретизації функції доходу $I(P)$ споживачів і ряді додаткових обмежень щодо початкової власності та характеру поведінки споживачів.

У моделі Ерроу—Дебре також розглядається l споживачів, m виробників і n товарів на ринку. При цьому виконуються наведені далі умови.

1. $K_i(P) = (P \cdot b_i) + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\left(P \cdot y_j\right),$

де b_i — початковий запас товарів; α_{ij} — частка доходів *j*-го виробника, яку одержує *i*-й споживач; y_j — виробнича функція (план виробітку) *j*-го виробника; $\sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij} = 1$. Таким чином, капітал споживача складається з продажу початкового запасу та участі в прибутках виробництва (у ролі акціонера або найманого працівника).

2. Множина $X_i \in R_+^n$, $i = 1, 2, \ldots, l,$ на якій визначено функцію корисності u_i *i*-го споживача, опукла, замкнена і необмежена, причому з того, що в послідовності $\{x_k\} : x_k \in X_i$, $k = 1, 2, \ldots,$ якась із координат прямує до нескінченності, випливає, що всі інші також прямують до нескінченності. Це означає, що коли споживачеві потрібно дуже багато одного товару, то він має попит і на велику кількість решти товарів, що цікавлять його. Прийнявши цю гіпотезу, кажуть, що споживач ненаситний, а структура множини X_i стає такою, що для будь-якого ненульового вектора цін P і сталого доходу споживача $K(P)$ множина X_i обмежена і функція попиту $\Phi(P)$ визначена на всій множині цін $P \in R_+^n$, $P \neq 0$.

3. Функція $u_i(x)$ — функція корисності споживача на множині $x_i, i = 1, 2, \ldots, l,$ задовольняє відповідні властивості (див. підрозд. 5.2).

4. Для будь-якого i існує вектор $\overline{x_i} \in X_i$, такий що $\overline{x_i} < b_i$; $i = 1, 2, \ldots, l$. Із цього як частинний випадок випливає, що кожний споживач має ненульовий початковий запас всякого товару.

Стосовно виробника вважається, що виконуються умови, розглянуті в моделі Вальраса.

1. Сукупна технологічна множина $Y = \sum_{k=1}^{m} Y_k$ є опуклою.

2. Множина виробничих функцій (планів) Y_k k-го виробника компактна і $0 \in Y_k$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Для розглядуваної моделі Ерроу—Дебре ставиться задача існування рівноваги, тобто існування набору $\left(y^*, x^*, P^*\right)$, який дає точку конкурентної рівноваги.

***Теорема* (*Ерроу—Дебре*). У моделі Ерроу—Дебре існує стан рівноваги.**

Доведення цієї теореми базується на теоремі Какутани [7] про існування нерухомої точки при виконанні відображення, яке має певні властивості. Сам хід доведення можна знайти в [3], тут лише зазначимо, що теорема дає відповідь тільки на питання про існування конкурентної рівноваги в моделі Ерроу—Дебре. Питання про те, як досягти цієї рівноваги, залишається відкритим.

Тому в конкретних випадках необхідно дослідити, для яких станів ринку можливий перехід до стану конкурентної рівноваги, а для яких ні. Якщо перехід можливий, потрібно знати набір керівних правил, у разі виконання яких такий перехід відбувається.

Модель рівноваги Вальда—Косселя є також частинним випадком моделі Вальраса, в якій більша увага приділяється специфіці виробництва. У множині товарів розрізнятимемо продукти виробництва і початкові фактори. Маємо m видів початкових факторів, які є власністю споживачів, і n видів продуктів виробництва. Сукупний запас початкових факторів описується m-вимірним вектором $b > 0$. Виробничий сектор характеризується лінійною моделлю Леонтьєва з матрицею $A = \left(a_{ij}\right)$; $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$, де $a_{ij} \geq 0$ — кількість i-го ресурсу, необхідного для виробництва однієї одиниці j-го продукту. Вважатимемо, що в матриці A немає нульових рядків і нульових стовпців.

Нехай $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор інтенсивності роботи виробничого сектору, тоді сукупна пропозиція виробника також задається вектором X. Відповідно через вектори $P = (p_1, p_2, \ldots, p_n)$ і $V = (V_1, V_2, \ldots, V_m)$, позначимо ціни на продукти (товари) і ціни на початкові ресурси (фактори), тоді вектор (P, V) — ціни на товари, що обертаються на ринку.

Поведінка споживачів визначається функцією сукупного попиту $\Phi(P, V)$, яка вважається однозначною і $\Phi(P,\ V) = \{\Phi_1(P,\ V),$ $\Phi_2(P,\ V),\ \ldots,\ \Phi_n(P,\ V)\}$, де $\Phi_j(p, V)$ — функція попиту на *j*-й продукт.

Вважатимемо також, що функція $\Phi(P, V)$ задовольняє закон Вальраса у вузькому розумінні: $(P \cdot \Phi(P, V)) = (V \cdot b)$.

Додатково до загальних умов (7.57) і (7.58) вважатимемо, що попит на будь-який товар точно збігається з його пропозицією. Це означає, що виробництво придбає весь вектор b запасів початкових факторів. Таким чином, доходи виробників при цінах (P, V) дорівнюють $(P \cdot x) - (V \cdot b)$, де $(V \cdot b)$ не залежить від цін P. Зважаючи на це, оптимальна поведінка виробників полягає в максимізації добутку $(P \cdot x)$ при обмеженнях $Ax \le b,\ x \ge 0$.

Набір (x, P, V) є конкурентною рівновагою в моделі Вальда—Касселя, якщо виконуються такі умови:

а) вектор x є розв'язком стандартної задачі лінійного програмування

$$\max(P \cdot x);\ \ Ax \le b;\ \ x \ge 0, \tag{7.59}$$

яка описує поведінку виробників;

в) $x = \Phi(P, V)$ (7.60)

— умова, якою описується поведінка споживачів, що максимізують свою функцію корисності.

Розглянемо задачу, двоїсту до задачі (7.59):

$$\min(V \cdot b);\quad VA \ge P;\ \ V \ge 0. \tag{7.61}$$

Неважко встановити її економічний зміст: ціни V мають бути такими, щоб мінімізувати витрати $(V \cdot b)$ виробників і водночас не дозволити їм мати додатний прибуток. Як завжди, функція попиту $\Phi(P, V)$ вважається неперервною.

***Теорема (Вальда—Касселя)*. Для моделі Вальда—Касселя існує конкурентна рівновага (x^*, P^*, V^*), в якій вектор V^* є розв'язком задачі (7.61).**

Доведення теореми можна знайти в [3].

Із розглянутих моделей Ерроу—Дебре і Вальда—Касселя, в яких наголошується на особливостях поведінки на ринку споживачів і виробників, а також зі сформульованих теорем випливає факт існування конкурентної рівноваги. Однак теореми не дають відповіді на питання про єдиність точок $\left(y^*, x^*, P^*\right)$ рівноваги, а також про те, як цю точку знайти. Важливість із теоретичного погляду наявності положення рівноваги спонукає до вивчення різних його властивостей — єдності, стійкості, оптимальності і т. ін. З огляду на це спинимось на такому важливому понятті, як **оптимальність за Парето**.

Як і раніше маємо l споживачів; X_i, $i = 1, 2, \ldots, l$, — множина, на якій визначено функцію корисності $u_i(x)$ i-го споживача, $X = \prod_{i=1}^{l} X_i$ — декартовий добуток множин X_i. Окрім того, нехай на множині X виділено деяку підмножину $X_0 \subseteq X$, яку називатимемо ***припустимою множиною***. Набір векторів $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ де $x_i \in X_i$, $i = 1, 2, \ldots, l$, назвемо ***припустимим набором***, або ***розподілом***, якщо $x \in X_0$.

Означення. Розподіл $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ називається ***оптимальним за Парето***, якщо не існує розподілу $x' = \left\{x_1', x_2', \ldots, x_n'\right\}$, для якого $u_i(x_i') \geq u_i(x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, причому хоча б для одного споживача виконується строга нерівність.

Зміст поняття оптимальності за Парето наочний і полягає в тому, що добре діяти так, аби хоча б комусь стало краще і при цьому нікому не стало гірше.

Можливу інтерпретацію припустимої множини X_0 можна подати на прикладі моделі Вальраса, розглянувши множину $b + Y$, де Y — технологічна множина, а b — сукупний початковий запас. Тоді $b + Y$ являє собою множину всіх наборів товарів, які може виготовити виробник. Основною вимогою, яка забезпечує можливість функціонування ринку, описуваного моделлю Вальраса, є вимога, щоб попит не перевищував пропозиції. Зрозуміло, що неможливий будь-який розподіл, за якого сумарний обсяг товарів більший за обсяг, який у принципі можна виготовити. Тому для моделі Вальраса припустима множина X_0 має вигляд:

$$X_0 = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_l) \mid \exists y \in Y : \sum_{i=1}^{l} x_i \leq b + y \right\}. \qquad (7.62)$$

Відповідь на питання про зв'язок конкурентної рівноваги та оптимальності за Парето дає наведена далі теорема.

Теорема 1

Якщо $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*;\ y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*;\ P^*\}$ — конкурентна рівновага в моделі Ерроу—Дебре, то розподіл $\{x_1^*,\ x_2^*,\ \ldots,\ x_l^*\}$ оптимальний за Парето.

Доведення. Для доведення припустимо протилежне. Нехай знайдеться розподіл $\{x_1, x_2, \ldots, x_l;\ y_1, y_2, \ldots, y_m;\ P\}$, для якого $u_i(x_i) \geq u_i(x_i^*)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, причому хоча б одна з нерівностей (скажімо, при $i = i_0$) є строгою. Оскільки кожний споживач ненаситний, то знайдеться елемент $\omega_i \in X_i$, такий що $u_i(\omega_i) > u_i(x_i)$. Нехай $x_i(t) = (1-t)x_i + t\omega_i$. Функція корисності $u_i(x)$ опукла вниз, тому маємо $u_i(x(t)) \geq (1-t)u_i(x_i) + tu_i(\omega_i) > u_i(x_i)$ при $0 < t \leq 1$. Звідси дістанемо $u_i(x_i(t)) > u_i(x_i^*)$, $i = 1, 2, \ldots, l$, при $0 < t \leq 1$. Значення $u_i(x_i^*)$ є максимально можливим для *i*-го споживача згідно з його бюджетними обмеженнями $(x_i^* \in X_i;\ X_i(P) = \{x_i \mid x_i \in X_i, (x_i \cdot P) \leq K(P)\})$, а за даного вибору $y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*$ виробників здобута нерівність $u_i\left(x_i\left(t\right)\right) >$ $> u_i\left(x_i^*\right)$ означає, що $x_i(t) \notin X_i$, або $\left(P^* \cdot x(t) > \left(P^* \cdot b_i\right) + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\left(P^* \cdot y_j^*\right)\right)$. Переходячи до границі при $t \to 0$, остаточно дістаємо:

$$\left(P^* \cdot x_i \geq \left(P^* \cdot b_i\right) + \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\left(P^* \cdot y_j^*\right)\right). \tag{7.63}$$

Зауважимо, що принаймні одна з нерівностей (7.63) при $i = i_0$ виконується строго. Підсумовуючи нерівності (7.63) з урахуванням того, що $\sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_{ij} = 1,\ j = 1, 2, \ldots, m$, дістаємо:

$$\left(P^* \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i\right) > \left(P^* \cdot b\right) + \left(P^* \cdot \sum_{j=1}^{m} y_j^*\right). \tag{7.64}$$

Вектор $y^* = \sum\limits_{j=1}^{m} y_j^*$ є оптимальним для виробника і дає максимум прибутку при цінах P^*, а отже, $\left(P^* \cdot y^*\right) \geq \left(P^* \cdot y\right)$, де $y \in Y$ — довільний вектор технологічної множини. Тоді з (7.64) випливає, що

$$\left(P^* \cdot \sum_{1=1}^{l} x_i\right) > \left(P^* \cdot (b + y)\right). \tag{7.65}$$

Проте оскільки набір $\{x_1, x_2, \ldots, x_l\}$ є розподілом, він має задовольняти нерівність $\sum_{i=1}^{l} x_i \le b + y$ для деякого $y \in Y$. Помноживши останню нерівність скалярно на $P^* \ge 0$, дістанемо $\left(P^* \cdot \sum_{i=1}^{l} x_i\right) \ge$ $\ge \left(P^* \cdot (b + y)\right)$, що суперечить (7.65). Ця суперечність і доводить теорему.

Можна довести ще цікавіший факт: будь-який оптимальний за Парето розподіл може брати участь у конкурентній рівновазі, що підтверджує наведена далі теорема.

Теорема 2

Для розподілу $\{x_1^*, x_2^*, \ldots, x_l^*\}$, **оптимального за Парето, існує вектор цін** P^* **і набір** $\{y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*\}$, $y_j^* \in Y_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, **такий що:**

1) $\sum_{i=1}^{l} x_i^* \le b + \sum_{j=1}^{m} y_j^*$;

2) вектор y_j^* **максимізує** $\left(P^* \cdot y_j\right)$ **за всіма** $y_j \in Y_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$ **;**

3) вектор x_i^* **мінімізує** $\left(P^* \cdot x_i\right)$ **за всіма** $x_i \in X_i$, **такими що** $u_i(x_i) \ge u_i(x_i^*)$, $i = 1, 2, \ldots, l$ **.**

За доведенням можна звернутися до [3].

Отже, існує певний зв’язок між існуванням конкурентної рівноваги та оптимальністю набору за Парето. З теорем 1 і 2 випливає, що компонентами x_i^* точки рівноваги, принаймні в моделі Ерроу—Дебре, є розподіл, оптимальний за Парето і, навпаки, розподіли, оптимальні за Парето, можуть входити до складу точок конкурентної рівноваги.

7.3.4. *Моделі рівноваги з гарантованими та фіксованими доходами, бюджетний парадокс*

У [3] показано, що головним положенням при доведенні факту існування конкурентної рівноваги в моделі Ерроу—Дебре є вимога 4 (див. підрозд. 7.3.3). З економічного погляду ця вимога найбільш нереалістична, оскільки передбачає наявність початкової додаткової власності в кожного споживача.

Можна показати, що в разі невиконання цієї вимоги не можна побудувати моделі рівноваги типу Вальраса. Так, у моделі Ерроу—Дебре необхідність вимоги щодо додатного запасу будь-якого товару (наявність вектора $b, b > 0$) у кожного споживача диктується неможливістю забезпечити йому додатний дохід на виробництві (воно може бути збитковим, дивіденди відсутні і т. ін.).

Одним із варіантів розв'язання цієї проблеми є модель з гарантованим доходом. Цей дохід гарантується системою соціального забезпечення, яка передбачає наявність деякого центрального органу, котрий виконує частковий перерозподіл доходів на користь малозабезпечених верств населення.

Зауважимо, що таке явище спостерігається практично в будь-якій державі.

Розглянемо варіант моделі Ерроу—Дебре з таким гарантованим доходом. Введемо позначення

$$\Pi_j(P) = \max_{y \in Y_j}(P \cdot y),\ \ j = 1, 2, \ldots m,\ \Pi(P) = \sum_{j=1}^{m} \Pi_j(P) = \max_{y \in Y}(P \cdot y).$$

Величину $d = \dfrac{1}{l}\Pi(p)$ назвемо ***середнім рівнем доходів***, що припадає на одного споживача при цінах *P*. Виробництво j назвемо ***рентабельним при цінах P***, якщо $\Pi_j(P) > 0$. Позначимо через $I_1(P)$ множину номерів усіх рентабельних виробництв, а $I_2(p)d = \{1, 2, \ldots, m\} \setminus I_1(P)$. Після призначення цін $P \geq 0$ визначається значення d середнього рівня доходів і вибирається число $\mu,\ 0 < \mu \leq 1,$ для визначення μd — величини, яку назвемо ***мінімальним рівнем доходів***.

Щоб забезпечити кожному учасникові економічної системи мінімальний дохід у розмірі μd, держава збирає з кожного рентабельного виробника податок на прибуток у розмірі $(1 - \mu) \cdot 100\%$. З огляду на це реальний прибуток $\overline{\Pi}_i(P)$ кожного виробника, з якого буде виплачено відповідні суми споживачам, обчислюється за формулами

$$\overline{\Pi}_j(P) = \mu\Pi_j(P),\ j \in I_1;\ \overline{\Pi}_j(P) = 0,\ j \in I_2,$$

а сума доходу кожного споживача становитиме

$$K_i(P) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\overline{\Pi}_j(P) + \max\left\{0,\ \mu d - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\overline{\Pi}_j(P)\right\}.$$

Головною в даному разі є проблема правильного обчислення рівня мінімального доходу, що регулюється коефіцієнтом μ. Число μ слід вибирати в такий спосіб, щоб забезпечити фінансовий баланс — виконання закону Вальраса у вузькій формі:

$$\sum_{i=1}^{l} K_i(P) = \Pi(P).$$

Підставивши в це співвідношення вираз для $K_i(P)$ з урахуванням рівності $\sum_{i=1}^{l} \alpha_{ij} = 1$, дістанемо рівняння для визначення коефіцієнта $\mu = \mu(P)$:

$$\sum_{i=1}^{l} K_i(P) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\overline{\Pi}_j(P) + \sum_{i=1}^{l} \max\left\{0, \mu d - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\overline{\Pi}_j(P)\right\} =$$

$$= \mu \sum_{j\in I_1} \Pi_j(P) + \mu \sum_{i=1}^{l} \max\left\{0, d - \sum_{j\in I_1} \alpha_{ij}\Pi_j(P)\right\}.$$

Звідси знаходимо

$$\mu = \mu(P) = \Pi(P)\left[\sum_{j\in I_1} \Pi_j(P) + \sum_{i=1}^{l} \max\left\{0, d - \sum_{j\in I_1} \alpha_{ij}\Pi_j(P)\right\}\right]^{-1}.$$

Зауважимо, що соціальні виплати $\max\left\{0, \mu d - \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\overline{\Pi}_j(p)\right\}$ виплачуються такому споживачеві, чий дохід $\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\overline{\Pi}_j(p)$ від участі у прибутках виробництва менший за середній рівень доходу d.

Можна показати, що функція $\mu(P)$ є неперервною функцією свого аргументу. Функції сукупного попиту $\Phi(P)$ і пропозиції $\Psi(P)$ визначаються в такий самий спосіб, як і при побудові моделі Вальраса. Проте з огляду на особливості моделі з гарантованими доходами внесемо невелику зміну у вигляді функції $\Phi(P)$.

Нехай $\gamma(P) = 1 - \mu(P)$ — число, яке визначає значення податку на прибуток рентабельних виробництв. Тоді функцію сукупного попиту споживчого ринку, що залежатимемо від γ, позначимо $\Phi(P, \gamma(P))$.

У зв'язку з цим вважатимемо, що точка $(x^*, y^*, P^*, \gamma^*)$ визначає стан рівноваги в моделі з гарантованими доходами, якщо

$$x^* \in \Phi(P^*, \gamma^*),\ y^* \in \Psi(P^*),$$

$$x^* \le y^*,\ (P^* \cdot x^*) = (P^* \cdot y^*).$$

У такому разі при виконанні умов теореми Ерроу—Дебре можна стверджувати, що і в моделі з гарантованими доходами існує стан рівноваги $(x^*, y^*, P^*, \gamma^*)$, такий що $K_i(P^*) > 0,\ i = 1, 2, \ldots, l.$

Усі розглянуті раніше моделі рівноваги Ерроу—Дебре, Вальда—Касселя з гарантованими доходами базуються на моделі Вальраса, але докладніше вивчають той чи інший аспект ринкової реальності. Скажімо, у моделі Ерроу—Дебре головну увагу зосереджено на питанні залежність споживчого вибору від розміру відповідного доходу. У моделі Вальда—Касселя аналізується структура виробника, а в моделі з гарантованими доходами оцінюється, як соціальні виплати та податки на прибуток впливають на наявність конкурентної рівноваги на ринку.

Вивчимо тепер вплив доходу кожного споживача на стан рівноваги та ступінь забезпечення потреб усіх учасників ринку. При побудові такої моделі не будемо уточнювати спосіб формування доходу споживача, вважаючи, що дохід кожного учасника є величина стала, яка не залежить від ціни. Ця модель називається ***моделлю з фіксованими доходами***.

За побудовою модель із фіксованими доходами не є замкненою: у ній закон Вальраса для функцій сукупного попиту і сукупної пропозиції виконується не при всіх цінах *P*.

Розглядається ринок, на якому перебувають *n* типів товарів і l споживачів. Кожний споживач характеризується своєю функцією корисності u_i, визначеною на множині $X_i \subseteq R_+^n$, і фіксованим доходом K_i, $i = 1, 2, \ldots, l$. Виробництво задається сукупною технологічною множиною *Y*. Як і при побудові загальної моделі Вальраса, вважається, що кожний споживач прагне максимізувати свою функцію корисності з урахуванням бюджетних обмежень. Тобто функція попиту $\Phi_i(P)$ *i*-го споживача при заданих цінах $P \in R_+^n$ є множиною векторів, що являють собою розв'язки задачі

$$\max u_i(x);\ (p \cdot x) \le K_i,\ x \in X_i.$$

Функція пропозиції $\Psi(P)$ виробника визначається як множина розв'язків задачі

$$\max(P \cdot y);\ \ y \in Y.$$

Тоді для моделі рівноваги з фіксованими доходами справджується наведена далі теорема.

Теорема 3

Якщо:
1) функції u_i **опуклі вниз і неперервні на** X_i;
2) множини X_i замкнені й опуклі, $0 \in X_i \subseteq R_+^n$;
3) числа K_i **додатні,** $(K_i > 0)\ i = 1, 2, \ldots, l$;
4) технологічна множина Y опукла й обмежена, $Y \subseteq R_+^n$;
5) існує $\bar{y} > 0$**,** $\bar{y} \in Y$, **то стан рівноваги в моделі з фіксованими доходами існує**.

У [3] показано, що хоча модель рівноваги з фіксованими доходами дещо відмінна від моделі Ерроу—Дебре, її можна звести до останньої, проаналізувавши умови теореми Ерроу—Дебре та теореми 3 і спеціальним добором коефіцієнтів α_{ij}.

Але все ж таки розглядувана модель становить інтерес з погляду вивчення порівняльної статистики споживання. Наприклад, (x^*, y^*, P^*) — деякий стан рівноваги моделі, де

$$x^* = \sum_{i=1}^{l} x_i^*;\ \ x_i^* \in \Phi_i(p^*).$$

Тоді ступінь забезпечення інтересів *i*-го споживача можна вимірювати величиною $u_i^* = u_i(x^*)$. У тому разі, коли стан рівноваги єдиний, можна записати $u_i^* = u_i(K_1, K_2, \ldots, K_l)$ і вивчати поводження чисел u_i^* залежно від зміни параметрів $K_1, K_2, \ldots, K_l$.

Припустимо, що дохід K_1 першого споживача зріс до $\bar{K}_1 > K_1$, а доходи решти споживачів залишились незмінними $\bar{K}_i = K_i$, $i = 2,\ 3,\ \ldots,\ l.$ Тоді постає запитання: чи завжди справджується нерівність

$$u_1^*(\bar{K}_1, \bar{K}_2, \ldots, \bar{K}_l) > u_1^*(K_1, K_2, \ldots, K_l).$$

Інакше кажучи, чи завжди відносне зростання доходу веде до більш повного задоволення потреб?

Розглянемо приклад і покажемо, що в загальному випадку це не завжди так. Розглянемо двопродуктову модель із трьома споживачами, тобто $n=2;\ l=3$.

Сукупна технологічна множина Y складається з єдиного вектора $y=(y_1, y_2)$, де $y_1=10, y_2=3$. Функції корисності перших двох споживачів мають вигляд $u_1(x_1, x_2)=x_1;\ u_2(x_1, x_2)=x_2$, тобто кожного з них цікавить тільки один товар. Третій споживач характеризується функцією корисності, яка задається формулою $u_3(x_1, x_2)=28x_1+28x_2-2x_1^2-3x_1x_2-2x_2^2.$ Зауважимо, що $u_3(x_1, x_2)$ опукла вниз.

Нехай $K_1=4,\ K_2=K_3=12,$ якщо $P=(p_1, p_2)\geq 0$ — ціни на товари, то попит $\Phi_1(P), \Phi_2(P)$ перших двох споживачів визначається формулами

$$\Phi_1(P)=\left(\frac{K_1}{p_1}, 0\right);\ \Phi_2(P)=\left(0, \frac{K_2}{p_2}\right).$$

Відшукання функції попиту третього споживача при рівноважних цінах зводиться до розв'язування задачі

$$\max u_3(x_1x_2),\ p_1x_1+p_2x_2=K_3. \tag{7.66}$$

Розв'язування задачі (7.66) можна звести до відшукання екстремуму функції Лагранжа. У даному прикладі маємо:

$$L(x_1, x_2, \lambda)=u_3(x_1x_2)-\lambda(p_1x_1+p_2x_2-K_3).$$

Для відшукання критичної точки дістанемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial x_1}=28-4x_1-3x_2-\lambda p_1=0,\\ &\frac{\partial L}{\partial x_2}=28-3x_1-4x_2-\lambda p_2=0,\\ &\frac{\partial L}{\partial \lambda}=p_1x_1+p_2x_2-K=0. \end{aligned} \tag{7.67}$$

Зауважимо, що розв'язок системи (7.67) має задовольняти умови $p_1>0;\ p_2>0$, а також за законом Вальраса в точці рівноваги попит має дорівнювати пропозиції. Відповідно в даному прикладі для перших двох споживачів дістаємо:

$$\frac{K_1}{p_1}+x_1(p)=10;\ \frac{K_2}{p_2}+x_2(p)=3. \tag{7.68}$$

Неважко переконатись, що $p_1=1,\ p_2=6; x_1(p)=6, x_2(p)=1;\quad \lambda=1$ — це розв'язок системи (7.67), що задовольняє умову (7.68). Таким чином, один зі станів рівноваги розглядуваної моделі з фіксованими доходами подається рівноважним вектором цін $P^*=(1,6)$, причому попит першого споживача задається вектором (4, 0), другого — вектором (0, 2), а вектор (6, 1) характеризує попит третього споживача.

Доведемо, що знайдений стан рівноваги є єдиним у даній моделі. Для цього із (7.68) знайдемо змінні $x_1(p)$ і $x_2(p)$ через p_1, p_2, K_1, K_2 і підставимо відповідні вирази в рівняння системи (7.67). У результаті дістанемо таку систему рівнянь відносно p_1, p_2:

$$\begin{cases} 10p_1+3p_2=K_1+K_2+K_3, \\ \dfrac{4K_1}{p_1}+\dfrac{3K_2}{p_2}-\lambda p_1-21=0, \\ \dfrac{3K_1}{p_1}+\dfrac{4K_2}{p_2}-\lambda p_2-14=0. \end{cases} \tag{7.69}$$

Виключивши з цієї системи λ і p_2 і підставивши замість K_1, K_2, K_3 їхні числові значення, дістанемо для відшукання p_1 кубічне рівняння

$$45p_1^3-239p_1^2+418p_1-224=0,$$

яке, вочевидь, має єдиний корінь $p_1=1.$ А це свідчить про те, що й кожне з решти невідомих, які входять до системи (7.69), може набувати тільки єдиного значення.

У разі достатньо малої зміни, наприклад, K_1 рівняння (7.69) залишаються необхідними і достатніми умовами рівноважності цін (p_1, p_2), а оскільки корені кубічного рівняння неперервно залежать від коефіцієнтів, то внаслідок зазначеної зміни єдиність рівноваги зберігається.

Вивчимо поведінку функції корисності, наприклад, першого споживача залежно від зміни його доходу K_1. Позначивши його функцію корисності $u_1(K_1)$, достатньо встановити знак похідної $u_1'(K_1)$ у точці $K_1 = 4$. Оскільки

$$u_1(K_1) = \frac{K_1}{p(K_1)}, \text{ то } u_1'(K_1) = \frac{p_1(K_1) - K_1 p_1'(K_1)}{p_1^2(K_1)}.$$

Зокрема, при $K_1 = 4$ дістанемо $u_1'(4) = 1 - 4p_1'(4)$, оскільки $p_1(4) = 1$.

Покажемо, що умова $u_1'(4) < 0$ рівносильна умові $p_1'(4) > \frac{1}{4}$. Вважаючи, що змінні p_1, p_2, λ у системі (7.69) є функціями від K_1, продиференціюємо рівняння цієї системи за K_1 і підставимо значення $p_1 = 1, p_2 = 6, \lambda = 1$, які відповідають точці $K_1 = 4$. У результаті дістанемо таку лінійну систему рівнянь відносно похідних p_1', p_2', λ':

$$10p_1' + 3p_2' = 1,\ 17p_1' + p_2' + \lambda' = 4,\ 12p_1' + \frac{7}{3}p_2' + 6\lambda' = 3,$$

звідки $p_1' = \frac{89}{350}$, $p_2' = -\frac{18}{35}$.

Таким чином, знайдене значення $p_1' > \frac{1}{4}$ і, відповідно, $u_1'(4) < 0$. Аналогічно для похідних функцій $u_2(K_1), u_3(K_1)$, $x_1(K_1), x_2(K_1)$ маємо такі нерівності: $u_2' > 0,\ u_3' < 0;\ x_1' > 0, x_2' < 0$.

З останнього випливає, що зі збільшенням доходу й переходом до нового стану рівноваги споживання першого споживача так само, як і його функція корисності, спадає. Виграє в результаті тільки другий споживач $(u_2' > 0)$. Це явище в [3] названо ***бюджетним парадоксом***.

У даній моделі пояснення цього парадоксу випливає з поведінки третього споживача. Його попит на перший порівняно дешевий товар $(p_1 = 1, p_2 = 6)$ зростає з підвищенням ціни $(x_1' > 0; p_1' > 0)$. Це явище вже розглядалося, а товари, що мають таку властивість, було названо ***товарами Гріффіна***.

Отже, із розглянутого прикладу випливають такі висновки: зі збільшенням доходу першого споживача зростає попит на перший товар, що приводить до підвищення його ціни. Третій споживач, для якого перший товар є товаром Гріффіна, також підвищує свій попит на перший товар, скорочуючи попит на другий, що приводить до ще більшого зростання ціни на перший товар. У результаті такої поведінки перший споживач залишається у програші.

При дослідженні питань порівняльної статистики в моделях загальної рівноваги важливу роль відіграє поняття *валової замінності*, з яким ми стикалися раніше. Нехай $\Phi(p), \Psi(p)$ — функції відповідно сукупного попиту і сукупної пропозиції. Побудуємо означену в підрозд. 7.3.1, функцію надлишкового попиту $E(p) = \Phi(p) - \Psi(p)$.

Означення. Функція $E(p)$ надлишкового попиту має властивість ***валової замінності***, якщо з того, що $p = (p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n) > 0,\ \ g = (g_1,\ g_2,\ \ldots,\ g_n) > 0$ і $p \geq g$, а $p_j = g_j$, випливає нерівність

$$E_j(p) \geq E_j(g). \qquad (7.70)$$

Це означення можна тлумачити так: **якщо ціни на окремі товари зросли, то надлишковий попит на той товар, ціна якого залишилась незмінною, може тільки зрости**.

Якщо функція $E(p)$ диференційовна, то властивість валової замінності подається умовою:

$$\frac{\partial E_j}{\partial p_k} \geq 0 \ \text{ при } \ j \neq k. \qquad (7.71)$$

У [7] досліджено роль поняття валової замінності в разі застосування його в моделях загальної рівноваги, а також показано, що властивість валової замінності є однією з основних умов, які унеможливлюють бюджетний парадокс.

7.3.5. *Регулювання цін у моделі Ерроу-Дебре*

У підрозд. 7.3.1—7.3.4 основна увага приділялась факту існування станів конкурентної рівноваги. Проте сам механізм установлення такої рівноваги було розглянуто в підрозд. 7.3.1 на основі аналізу системи диференціальних рівнянь (7.52) у разі лінійної функції надлишкового попиту $E(p)$.

Сам Вальрас і його послідовники пропонували такий механізм встановлення рівноважних цін. Система початково заявлених цін породжує відповідно агреговану пропозицію і агрегований попит на кожний із продуктів. Така пропозиція і такий попит формуються як сукупний результат індивідуальної поведінки учасників економічної системи, котрі реагують на початкові ціни. Згідно з класичним законом попиту і пропозиції дістанемо, що ціни, які буде встановлено в наступний момент часу, залежать від початкових рівнів попиту і пропозиції в такий спосіб: **ціна на товар, що користується додатним надлишковим попитом, підвищиться, а ціна на товар, якому відповідає від'ємний надлишковий попит, знизиться**. Одержана як результат, нова змінена система цін породжує нові рівні надлишкового попиту на товари, які, у свою чергу, приводять до нової зміни цін. Зауважимо, що під час описаного процесу реальні угоди не укладаються доти, доки не буде досягнуто стану загальної рівноваги.

Як зазначалося в підрозд. 7.3.1, Самуельсону належить модель встановлення механізму рівноважних ринкових цін на основі аналізу розв'язків системи диференціальних рівнянь

$$\frac{dp_i}{dt} = \lambda_i E_i(p);\ (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{7.72}$$

де $p = (p_i)$ — вектор цін; $E_i(p)$ — функція надлишкового попиту на i-й продукт; λ_i — додатна стала, коефіцієнт підстроювання ціни на i-й продукт.

Порівняно недавно формалізацію процесу пошуку ціни за допомогою диференціального рівняння (7.72) узагальнилиЕрроу, Блок та Гурвіц, запропонувавши для опису цього процесу систему рівнянь вигляду

$$\frac{dp_i}{dt} = H_i(p),\ i = 1, 2, \ldots, n,. \tag{7.73}$$

де $H_i(p)$ — функції, визначені на множині P цін, які мають на P той самий знак, що й відповідні функції надлишкового попиту $E_i(p)$, тобто $\operatorname{sign} H_i(p) = \operatorname{sign} E_i(p)$.

Якщо серед усіх товарів виокремити один еталонний, який відіграє роль платіжної одиниці і ціна якого завжди дорівнює одиниці, то відповідні вимоги додатності λ_i, а також ті, які накладаються на функції $E_i(p)$ і $H_i(p)$ для еталонного товару, перейдуть у вимоги $\lambda_i = 0$ і $H_i(p) = 0$.

У цьому підрозділі основну увагу приділимо асимтотичним властивостям розв'язків систем рівнянь (7.72) або (7.73), тобто питання збіжності при $t \to \infty$ розв'язків $p(t)$ до рівноважного вектора цін $\overline{p}$.

Поняття стійкості розв'язків систем диференціальних рівнянь виду (7.72) або (7.73) щодо малих збурень ґрунтовно вивчається в курсах диференціальних рівнянь. Тут означимо поняття глобальної стійкості розв'язку $p(t)$ у такий спосіб.

Означення. Система диференціальних рівнянь (7.72) або (7.73) ***глобально стійка*** (її розв'язки $p(t)$ асимптотично наближаються до вектора рівноважних цін), якщо вона має такі три властивості:

1) для будь-якого початкового вектора цін p^0 існує локальний розв'язок $p(t)$ системи диференціальних рівнянь, визначений на деякому інтервалі [0; σ), σ > 0, і такий, що задовольняє початкові умови $p(0) = p^0$;

2) кожний локальний розв'язок $p(t)$ системи (7.72) або (7.73), визначений на [0; σ), можна подовжити до глобального розв'язку, визначеного на [0; ∞);

3) при $t \to \infty$ кожний глобальний розв'язок $p(t)$ системи (7.72) або (7.73) на [0; ∞) збігається до деякого рівноважного вектора цін $\overline{p}$.

Кожна з властивостей 1—3 має певний економічний зміст. Зокрема, умова 1 гарантує можливість пошуку рівноважної ціни. Якщо розв'язок не можна було б подовжити, як це гарантує властивість 2, то процес пошуку мав би припинитися в той момент, коли розв'язок $p(t)$ вийде за межі інтервалу [0; σ) і модель стане неефективною. Нарешті, властивість 3 гарантує, що процес пошуку неодмінно приведе до рівноваги.

Таким чином поняття глобальної стійкості стосується доволі специфічного динамічного явища, якого важко очікувати від довільних конкурентних ринкових економічних систем. Як показують конкретні приклади [6], нестійкість є швидше правилом, ніж винятком для економічних систем. Тому важливим є відшукання умов, які мають економічний зміст і гарантують глобальну стійкість. Останні дослідження показали, що наявність в економічних системах валової замінності дає змогу вказати умови глобальної стійкості розв'язків. Для ринкових систем, в яких немає валової замінності, досягти результатів у відшуканні умов, що гарантують глобальну стійкість, не вдається.

Розглянемо ринкову систему з валовою замінністю і дослідимо глобальну стійкість у цих системах динамічних процесів, описуваних диференціальними рівняннями (7.72). При цьому вважатимемо, що виконуються сформульовані далі умови.

1. Множина цін задається областю $P = \{p : p = (p_i) \geq 0,$ $p_i > 0,\ i \in M\}$, де M — задана підмножина множини індексів $\{1, 2, \ldots, n\}$.

2. Функція надлишкового попиту $E_i(p), i = 1, 2, \ldots, n$ однорідна степеня нуль $(m = 0)$.

3. Всюди в P виконується закон Вальраса у вузькому розумінні.

4. Функції $E_i(p)\,(i = 1, 2,\ \ldots,\ n)$ неперервні на P.

5. В області P виконується валова замінність.

6. В області P існує додатний рівноважний вектор цін $\overline{p} = (\overline{p_i})$, який завдяки закону Вальраса задовольняє умови

$$E_i(\overline{p}) = 0,\ \ i = 1, \ldots, n. \tag{7.74}$$

У разі виконання умов 1—6 справджується теорема.

Теорема

Якщо виконані умови (1—6), то система (7.74) глобально стійка як за наявності, так і за відсутності еталонного товару, для якого $\lambda_i = 0,\ E_i(p) = 0$, де індекс i набуває тільки одного значення з множини $\{1, 2,\ \ldots,\ n\}$.

Доведення теореми можна знайти в [7]. Зауважимо тільки, що теорема доводиться шляхом доведення властивостей 1—3 глобально стійкої системи при виконанні щойно сформульованих умов 1—6 для функції надлишкового попиту $E_i(p)$. У деяких випадках висуваються більш жорсткі вимоги, ніж 1—6.

Отже, можна стверджувати, що в ринкових економічних системах із властивістю валової замінності існує такий рівноважний вектор цін $p(\infty)$, при якому $E_i(p(\infty)) = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$ включаючи еталонний товар (гроші). Вигляд розв'язків системи рівнянь (7.73) встановлює механізм регулювання цін у моделях ринкової економіки, коли основним регулювальним фактором є співвідношення між попитом і пропозицією на ринку товарів.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Виконайте кілька ітерацій наближення до стану рівноваги для функції попиту $\Phi(p)=20-2p$ і пропозиції $\Phi(p)=-4+p$ у павутиноподібній моделі.

2. Доведіть, що стан рівноваги для функцій $\Phi(p)=10-p$ і $\Psi(p)=-5+2p$ нестійкий.

3. Попит задано таблицею

p	1	5	9	13
$\Phi(p)$	20	8	4	2

, а пропозицію — таблицею

p	1	5	9	13
$\Psi(p)$	2	5	7	8

. Апроксимуючи попит і пропозицію лінійними функціями, знайдіть наближено стан рівноваги та з'ясуйте його стійкість за допомогою павутиноподібної моделі.

4. Дані залежності попиту $\Phi(p)=100-10p$ і пропозиції $\Psi(p)=10+20p$ від ціни p. Знайдіть: рівноважну ціну та виторг при рівноважній ціні; ціну, при якій виторг максимальний. З погляду стійкості рівноважної точки поясніть результат.

РОЗДІЛ 8

МЕТОДИ АНАЛІЗУ ДИНАМІКИ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

8.1. Поняття часових рядів

Динамічні процеси, що відбуваються в економічних системах, найчастіше подаються рядом послідовно розміщених у хронологічному порядку значень того чи іншого показника, який відбиває перебіг розвитку досліджуваного явища в економіці. Ці значення можуть, зокрема, використовуватись для обґрунтування чи заперечення різних моделей соціально-економічних систем, а також бути основою для розробки прикладних моделей особливого виду — **трендових** моделей, які розглядаються далі.

Означення. Послідовність спостережень одного показника (ознаки), упорядкованих залежно від значень іншого показника (ознаки), які послідовно зростають чи спадають, називають ***динамічним рядом,*** або ***рядом динаміки.***

Означення. Якщо за ознаку, залежно від якої відбувається впорядкування, береться час, то такий динамічний ряд називається ***часовим рядом.***

В економічних процесах, як правило, упорядкування відбувається відповідно до часу, тому всі три наведені щойно терміни використовуються як рівнозначні.

Складовими елементами рядів динаміки є числові значення показника — **рівні** цих рядів і *моменти,* або інтервали часу, до яких належать рівні.

Розрізняють *моментні, інтервальні* та *похідні* часові ряди.

Означення. Часові ряди, утворені показниками, що характеризують економічне явище на певні моменти часу, називаються **моментними**.

Приклад

ОБЛІКОВА ЧИСЕЛЬНІСТЬ РОБІТНИКІВ ПІДПРИЄМСТВ

Дата	01.01	01.02	01.03	01.04	30.04
Облікова чисельність робітників	8100	8400	8200	8600	8800

Означення. Часові ряди, рівні яких утворюються агрегуванням за певний проміжок (інтервал) часу, називаються **інтервальними**.

Приклад

ФОНД ЗАРОБІТНОЇ ПЛАТИ РОБІТНИКІВ ПІДПРИЄМСТВ

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень
Фонд заробітної плати робітників, тис. грн	97187,5	98270,0	9380,0	82535,0

Означення. Часові ряди, утворені як з абсолютних, так і з середніх чи відносних значень економічних показників, називаються **похідними**.

Приклад

СЕРЕДНЬОМІСЯЧНА ЗАРОБІТНА ПЛАТА РОБІТНИКІВ ПІДПРИЄМСТВ

Місяць	Січень	Лютий	Березень	Квітень
Середня заробітна плата робітників, грн	5750	5900	5950	5050

Означення. ***Довжиною*** часового ряду називають час, що пройшов від початкового до кінцевого моменту спостереження.

Отже, довжина всіх часових рядів у наведених прикладах дорівнює чотирьом місяцям. Довжиною також ряду називають кількість рівнів, що входять у часовий ряд.

Якщо в часовому ряді виявляється тривала («вікова») тенденція зміни економічного показника, то говорять, що спостерігається тренд.

ОЗНАЧЕННЯ 1. Під ***трендом*** розуміються зміни, що визначають загальний напрямок розвитку, основну тенденцію часових рядів. Тому математична модель економічної системи, яка подається через тренд її основних показників, називається ***трендовою моделлю***.

ОЗНАЧЕННЯ 2. Під ***трендом*** розуміється стійка систематична зміна процесу протягом тривалого часу.

Структура часового ряду. У найзагальнішому випадку часовий ряд економічних показників, що складається з n рівнів:

$$y_1, y_2, y_3, ..., y_n,$$

можна розкласти на чотири структуроутворювальні елементи:

- тренд, компонент якого позначатимемо U_t, $t = 1, 2, ..., n$;
- сезонний компонент, що позначається V_t, $t = 1, 2, ..., n$;
- циклічний компонент, що позначається C_t, $t = 1, 2, ..., n$;
- випадковий компонент, що позначається ε_t, $t = 1, 2, ..., n$.

У часових рядах економічних процесів можуть відбуватися місце більш-менш регулярні коливання.

Якщо вони мають строго періодичний чи близький до нього характер і закінчуються протягом одного року, то їх називають ***сезонними коливаннями***.

У тих випадках, коли період коливань становить кілька років, кажуть, що в часовому ряді присутній *циклічний компонент*.

Тренд, сезонний і циклічний компоненти називаються ***регулярними компонентами*** часового ряду.

Складова частина часового ряду, що залишається після виділення з нього регулярних компонентів, є ***випадковою*** (нерегулярний компонент). Вона є неодмінною складовою частиною будь-якого часового ряду в економіці, бо випадкові відхилення неминуче супроводжують будь-яке економічне явище.

Якщо регулярні компоненти часового ряду визначено правильно, то випадковий компонент ряду має такі властивості:

- випадковий компонент є послідовністю випадкових величин;
- випадковий компонент відповідає нормальному закону розподілу;
- математичне сподівання випадкового компонента дорівнює нулю;
- рівні випадкової послідовності незалежні, тобто відсутня істотна автокореляція.

Поняття адекватності трендових моделей. Перевірка адекватності трендових моделей полягає у з'ясуванні відповідності випадкового компонента зазначеним чотирьом властивостям. Якщо не виконується хоча б одна з них, модель визнається неадекватною; при виконанні всіх чотирьох властивостей модель адекватна.

8.2. *Попередній аналіз часових рядів*

Попередній аналіз часових рядів економічних показників полягає:

1) у виявленні й усуненні аномальних значень рівнів ряду;

2) у визначенні наявності тренду в початковому часовому ряді.

ОЗНАЧЕННЯ. Під ***аномальним рівнем*** розуміється окреме значення рівня часового ряду, що не відповідає потенційним можливостям досліджуваної економічної системи, впливає на значення основних характеристик часового ряду, зокрема на відповідну трендову модель.

Причинами аномалій можуть бути:

1) помилки технічного порядку, або ***помилки першого роду***: помилки при агрегуванні і дезагрегуванні показників, при передаванні інформації тощо; помилки першого роду підлягають виявленню та усуненню;

2) помилки, що мають об'єктивний характер, але виявляються епізодично, дуже рідко — ***помилки другого роду***; вони усуненню не підлягають.

Метод Ірвіна для виявлення аномальних рівнів часових рядів

Алгоритм

1. Обчислюємо допоміжні розрахункові значення за формулою:

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y};\ \ t = 2, 3, ..., n, \tag{8.1}$$

де середньоквадратичне відхилення σ_y розраховується, у свою чергу, із використанням формули:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}\left(y_t - \overline{y}\right)^2}{n-1}};\quad \overline{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}.$$

2. Розрахункові значення λ_2, λ_3 і т. д. порівнюються з табличними значеннями критерію Ірвіна λ_α.

Значення критерію Ірвіна для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$, тобто з 5 %-ною помилкою, наведено в таблиці:

n	2	3	10	20	30	50	100
λ_α	2,8	2,3	1,5	1,3	1,2	1,1	1,0

3. Якщо ці значення більші від табличних, то відповідне значення y_t рівня ряду вважається аномальним.

4. Після виявлення аномальних рівнів ряду неодмінно з'ясовують причини їх виникнення: якщо точно встановлено, що йдеться про помилки першого роду, то вони усуваються або заміною аномальних рівнів простою середньою арифметичною двох сусідніх рівнів ряду, або заміною аномальних рівнів відповідними значеннями по кривій, яка апроксимує цей часовий ряд.

Для визначення *наявності тренду* в початковому часовому ряді застосовується кілька методів. Ми розглянемо два.

1. Метод перевірки різниць середніх рівнів

Алгоритм

1. Початковий часовий ряд

$$y_1, y_2, y_3, ..., y_n$$

розбивається на дві приблизно однакові за кількістю рівнів частини: у першій частині n_1 перших рівнів початкового ряду, у другій — n_2 інших рівнів $(n_1 + n_2 = n)$.

2. Для кожної з цих частин обчислюємо середні значення та дисперсії:

$$\overline{y}_1 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1} y_t}{n_1}; \quad \sigma_1^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n_1}\left(y_t - \overline{y_1}\right)^2}{n_1 - 1};$$

$$\overline{y}_2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n} y_t}{n_2}; \quad \sigma_2^2 = \frac{\sum_{t=n_1+1}^{n}\left(y_t - \overline{y_2}\right)^2}{n_2 - 1}.$$

3. Перевіряємо рівності дисперсій обох частин ряду за допомогою ***F-критерію* Фішера**, що ґрунтується на порівнянні розрахункового значення цього критерію:

$$F=\begin{cases}\sigma_1^2/\sigma_2^2, & \text{якщо } \sigma_1^2>\sigma_2^2;\\ \sigma_2^2/\sigma_1^2, & \text{якщо } \sigma_1^2<\sigma_2^2\end{cases}$$

з табличним (критичним) значенням критерію Фішера F_α *і*з заданим *рівнем значущості* (рівнем помилки) α. За α найчастіше беруть значення 0,1 (10 %-на помилка), 0,05 (5 %-на помилка), 0,01 (1 %-на помилка). Величина 1 – α називається ***надійною імовірністю***.

4. Якщо розрахункове значення F менше від табличного F_α, то гіпотезу про рівність дисперсій приймаємо й переходимо до кроку 5.

Якщо F більше чи дорівнює F_α, то гіпотезу про рівність дисперсій відхиляємо й доходимо висновку, що цей метод для визначення наявності тренду відповіді не дає.

5. Перевіряємо гіпотезу про відсутність тренду з використанням ***t-критерію Стьюдента***. Для цього визначаємо розрахункове значення критерію Стьюдента за формулою:

$$t=\frac{\left|\bar{y}_1-\bar{y}_2\right|}{\sigma\sqrt{\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}}}, \tag{8.2}$$

де σ — середньоквадратичне відхилення різниці середніх:

$$\sigma=\sqrt{\frac{(n_1-1)\sigma_1^2+(n_2-1)\sigma_2^2}{n_1+n_2-2}}.$$

6. Якщо розрахункове значення t менше від табличного значення статистики Стьюдента t_α із заданим рівнем значущості α, гіпотеза приймається, тобто тренду немає, у протилежному випадку тренд є.

Зауважимо, що в даному разі табличне значення t_α береться для кількості ступенів волі, яка дорівнює n_1+n_2-2, при цьому даний метод застосовуємо тільки для рядів із монотонною тенденцією.

2. Метод Фостера—Стьюарта

Алгоритм

1. Порівнюємо кожний рівень початкового часового ряду, починаючи з другого, з усіма попередніми, визначаючи при цьому дві числові послідовності:

$$k_t = \begin{cases} 1, \text{ якщо } y_t \text{ більше від усіх попередніх рівнів;} \\ 0, \text{ у протилежному випадку,} \end{cases}$$

$$l_t = \begin{cases} 1, \text{ якщо } y_t \text{ менше від усіх попередніх рівнів;} \\ 0, \text{ у протилежному випадку,} \end{cases}$$

$$t = 2, 3, ..., n .$$

2. Обчислюємо значення

$$s = \sum_{t=2}^{n} (k_t + l_t);$$

$$d = \sum_{t=2}^{n} (k_t - l_t).$$

Неважко помітити, що величина *s,* яка характеризує зміну часового ряду, набуває значень від нуля (усі рівні ряду рівні між собою) до $n-1$ (ряд монотонний). Величина d характеризує зміну дисперсії рівнів часового ряду і змінюється від $-(n-1)$ (ряд монотонно спадає) до $(n-1)$ (ряд монотонно зростає).

3. Перевіряємо гіпотези щодо того, чи можна вважати випадковими:

1) відхилення величини s від величини μ — математичного сподівання величини s для ряду, в якому рівні розміщені випадково;

2) відхилення величини d від нуля.

Ця перевірка проводиться з використанням розрахункових значень *t*-критерію Стьюдента для середньої та для дисперсії:

$$t_s = \frac{|s-\mu|}{\sigma_1}; \quad \sigma_1 = \sqrt{2\ln n - 3{,}4253};$$

$$t_d = \frac{|d-0|}{\sigma_2}; \quad \sigma_2 = \sqrt{2\ln n - 0{,}8456},$$

де μ — математичне сподівання величини s, визначеної для ряду, в якому рівні розміщенні випадково;

σ_1 — середньоквадратичне відхилення для величини s;

σ_2 — середньоквадратичне відхилення для величини d.

Для зручності існують табульовані значення величин μ, σ_1 і σ_2; фрагмент цих значень наведено в таблиці.

n	10	20	30	40
σ_1	3,858	5,195	5,990	6,557
σ_1	1,288	1,677	1,882	2,019
σ_2	1,964	2,279	2,447	2,561

4. Розрахункові значення t_s і t_d порівнюються з табличним значенням *t-критерію* Стьюдента із заданим рівнем значущості t_α. Якщо розрахункове значення менше від табличного, то гіпотеза про відсутність відповідного тренду приймається; у пролежному тренд існує. Наприклад, якщо t_s більше від табличного значення t_α, а t_d менше від t_α, то для даного часового ряду є тренд у середньому, а тренду дисперсії рівнів ряду немає.

Зауважимо, що другий метод має більші можливості, ніж перший, і дає надійніші результати. Крім тренду самого ряду (як говорять, тренду в середньому) він дає змогу встановити наявність тренду дисперсії часового ряду.

8.3. Згладжування часових рядів

Дуже часто рівні економічних рядів динаміки коливаються, при цьому тенденція розвитку економічного явища в часі зумовлюється випадковими відхиленнями рівнів у той чи інший бік. Щоб якомога чіткіше виявити тенденцію розвитку досліджуваного процесу, зокрема й для подальшого застосування методів прогнозування на основі трендових моделей, виконують *згладжування* (*вирівнювання*) часових рядів.

Методи згладжування часових рядів поділяються на дві основні групи:

1) аналітичне згладжування з використанням кривої, проведеної між конкретними рівнями ряду так, щоб вона відбивала тенденцію, притаманну ряду, і одночасно звільняла його від незначних коливань;

2) механічне згладжування окремих рівнів часового ряду з використанням фактичних значень сусідніх рівнів.

Методи аналітичного вирівнювання на основі кривих зростання докладніше розглянемо далі.

Алгоритм методів механічного згладжування

1. Розглядаються кілька перших рівнів часового ряду, які утворюватимуть ***інтервал згладжування***.

2. Для цих рівнів добирається поліном, степінь якого має бути меншим за кількість рівнів, що входять в інтервал згладжування.

3. За допомогою полінома визначаються нові, вирівняні значення рівнів у середині інтервалу згладжування.

4. Інтервал згладжування зсувається на один рівень ряду праворуч, обчислюється наступне згладжене значення і т. д.

Найпростішим методом механічного згладжування є ***метод простої ковзної середньої.***

Алгоритм методу простої ковзної середньої

1. Для часового ряду

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n$$

визначається інтервал згладжування $m(m<n)$. Якщо необхідно згладити дрібні безладні коливання, то інтервал згладжування беруть по змозі великим; інтервал згладжування зменшують, якщо потрібно зберегти дрібніші коливання. За інших однакових умов інтервал згладжування рекомендується брати непарним.

2. Для перших m рівнів часового ряду обчислюється їхня середня арифметична; це буде згладжене значення рівня ряду, що міститься в середині інтервалу згладжування. Потім інтервал згладжування зсувається на один рівень праворуч і повторюється обчислення середньої арифметичної і т. д.

3. Для обчислення згладжених рівнів ряду $\overline{y}_t$ застосовується формула:

$$\overline{y}_t = \frac{\sum\limits_{t=t-p}^{t+p} y_t}{m}, \quad t > p,$$

де $p = \dfrac{m-1}{2}$ (при непарному m); для парних m формула ускладнюється.

Зауваження. У результаті такої процедури утворюється $n-m+1$ згладжених значень рівнів ряду; при цьому перші p і останні p рівнів ряду відкидаються (не згладжуються). Інший недолік методу полягає в тому, що він застосовується лише для рядів, що мають лінійну тенденцію.

Метод зваженої ковзної середньої відрізняється від попереднього методу згладжування тим, що рівні, які входять в інтервал згладжування, підсумовуються з різними вагами. Це пов'язано з тим, що апроксимація ряду в межах інтервалу згладжування здійснюється з використанням полінома не першого степеня, як у попередньому випадку, а полінома степеня, починаючи з другого. Використовується формула середньої арифметичної зваженої:

$$\overline{y}_t = \frac{\sum_{t=t-p}^{t+p} \rho_t y_t}{\sum_{t=t-p}^{t+p} \rho_t},$$

причому ваги ρ_t визначаються за допомогою методу найменших квадратів. Ці ваги розраховано для різних степенів апроксимуючого полінома та різних інтервалів згладжування. Так, для поліномів другого і третього ступеня числова послідовність ваг при інтервалі згладжування $m=5$ має вигляд $\{-3;\ 12;\ 17;\ 12;\ -3\}$, а при $m=7$ має вигляд $\{-2;\ 3;\ 6;\ 7;\ 6;\ 3;\ -2\}$. Для поліномів четвертого і п'ятого степеня та при інтервалі згладжування $m=7$ послідовність ваг така: $\{5;\ -30;\ 75;\ 131;\ 75;\ -30;\ 5\}$.

До цієї самої групи методів згладжування часових рядів належить **метод експонентного згладжування.** Його особливість полягає в тому, що в процедурі перебування згладженого рівня використовуються значення тільки попередніх рівнів ряду, узяті з визначеною вагою, причому вага спостереження зменшується з віддаленням його від моменту часу, для якого визначається згладжене значення рівня ряду. Якщо для вихідного часового ряду

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ ...,\ y_n$$

відповідні згладжені значення рівнів позначити через S_t, $t = 1, 2, ..., n$, то експонентне згладжування здійснюється за формулою:

$$S_t = \alpha y_t + (1-\alpha) S_{t-1}, \tag{8.3}$$

де α — ***параметр згладжування*** $(0 < \alpha < 1)$; величина $1-\alpha$ називається ***коефіцієнтом дисконтування***.

Використовуючи наведене щойно рекурентне співвідношення для всіх рівнів ряду починаючи з першого і закінчуючи моментом часу t, доходимо висновку, що експонентна середня, тобто згладжене розглядуваним методом значення рівня ряду, є зваженою середньою всіх попередніх рівнів:

$$S_t = \alpha \sum_{i=0}^{t-1} (1-\alpha)^i y_{t-i} + (1-\alpha)^t S_0,$$

де S_0 — величина, що характеризує початкові умови.

У практичних задачах обробки економічних часових рядів рекомендується (необґрунтовано) вибирати значення параметра згладжування в інтервалі від 0,1 до 0,3. Інших точних рекомендацій для вибору оптимального значення параметра α поки немає. В окремих випадках Р. Браун пропонує визначати α виходячи з довжини ряду, що згладжується:

$$\alpha = \frac{2}{n+1}.$$

Що ж до початкового параметра S_0, то в конкретних задачах його беруть таким, що дорівнює значенню першого рівня ряду y_1 або середньому арифметичному значенню кількох перших членів ряду, наприклад членів y_1, y_2, y_3:

$$S_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

Такий порядок вибору значення S_0 забезпечує добре узгодження згладженого і початкового рядів для перших рівнів. Якщо у процесі підходу до правого кінця часового ряду згладжені цим методом значення при вибраному параметрі α починають значно відрізнятися від відповідних значень початкового ряду, необхідно перейти на інший параметр згладжування. Зауважимо, що згідно з цим методом згладжування не втрачаються ні початкові, ні кінцеві рівні часового ряду, що згладжується.

8.4. Розрахунок показників динаміки економічних процесів

Розрахунок виконуються на основі статистичного аналізу одновимірних часових рядів економічної динаміки. Для статистичного аналізу одновимірних часових рядів економічних показників виду

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$$

абсолютні рівні моментних та інтервальних рядів, а також рівні із середніх величин потрібно перетворити на відносні величини. Їх можна дістати зіставленням рівнів ряду з рівнем, узятим за базу (за базу порівняння найчастіше беруть початковий рівень часового ряду y_1) або послідовними зіставленням із попереднім рівнем. У першому випадку дістають ***базисні*** показники, у другому — ***ланцюгові***.

Часовий ряд тоді правильно відбиває об'єктивний процес розвитку економічного явища, коли рівні цього ряду складаються з однорідних, *порівнянних* величин. Причини непорівнянності рівнів часового ряду можуть бути різними. В економіці найчастіше такими причинами є ***непорівнянність***:

- за територією через зміну меж регіону, по якому збираються статистичні дані;
- за колом охоплюваних об'єктів, підпорядкуванням або формою власності;
- по часових періодах;
- рівнів, обчислених у різному масштабі виміру;
- рівнів ряду через розходження в структурі сукупності, для якої вони обчислені і т. п.

При аналізі часових рядів для визначення змін, що відбуваються в даному явищі, насамперед обчислюють швидкість розвитку цього явища в часі. Показником швидкості є ***абсолютний приріст,*** що обчислюється за формулою

$$\Delta y_i = y_i - y_{i-k}, \tag{8.4}$$

де y_i — i-й рівень часового ряду $(i = 2, 3, ..., n)$; індекс $k = 1, 2, ..., n-1$, що визначає початковий рівень. Значення k можна взяти довільно залежно від мети дослідження: при $k = 1$ маємо ланцюгові показники, при $k = i - 1$ — базисні показники з початковим рівнем ряду як базисного.

Абсолютний приріст виражає зміну показника за інтервал часу між порівнюваними періодами.

Означення. ***Швидкістю*** називають приріст за одиницю часу.

Означення. ***Середньою абсолютного приросту*** називається величина

$$\overline{\Delta y_i} = \frac{y_i - y_{i-k}}{k}. \tag{8.5}$$

Зокрема, середній абсолютний приріст за весь період спостереження для даного часового ряду подається у вигляді

$$\overline{\Delta y} = \frac{y_n - y_1}{n-1} \tag{8.6}$$

і характеризує середню швидкість зміни часового ряду.

Для визначення відносної швидкості зміни досліджуваного явища за одиницю часу використовують відносні показники: ***коефіцієнти зростання і приросту***. Якщо ці показники виражено у відсотках, то їх називають відповідно ***темпами зростання і приросту***.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Коефіцієнтом зростання*** для *i*-го періоду називається величина

$$K_{i(\text{зр})} = \frac{y_i}{y_{i-k}}. \tag{8.7}$$

При цьому $K_{i(\text{зр})} > 1$, якщо рівень підвищується; $K_{i(\text{зр})} < 1$, якщо рівень знижується; при $K_{i(\text{зр})} = 1$ рівень не змінюється.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Коефіцієнтом приросту*** називається величина

$$K_{i(\text{пр})} = K_{i(\text{зр})} - 1,$$

або

$$K_{i(\text{пр})} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}}. \tag{8.8}$$

ОЗНАЧЕННЯ. Показники ***темпу зростання*** і ***темпу приросту*** обчислюються за формулами

$$T_{i(\text{зр})} = \frac{y_i}{y_{i-k}} \cdot 100\ \%, \tag{8.9}$$

де $T_{i(\text{зр})}$ — темп приросту для *i*-го періоду;

$$T_{i(\text{пр})} = T_{i(\text{зр})} - 100\ \%,$$

або

$$T_{i(\text{пр})} = \frac{y_i - y_{i-k}}{y_{i-k}} \cdot 100\ \%, \tag{8.10}$$

де $T_{i(\text{пр})}$ — темп приросту для *i*-го періоду.

Зауваження. Темп приросту показує, на скільки відсотків рівень одного періоду збільшився (зменшився) порівняно з рівнем іншого періоду, тобто цей показник виражає відносне значення приросту у відсотках. Порівняння абсолютного приросту і темпу приросту за ті самі проміжки часу показує, що в реальних економічних процесах уповільнення темпу приросту часто не супроводжується зменшенням абсолютних приростів.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Абсолютне значення одного відсотка приросту*** визначається як відношення абсолютного приросту Δy_i до темпу приросту у відсотках $T_{i(\text{пр})}$.

Середню швидкість зміни досліджуваного явища за розглянутий період характеризує також *середній темп зростання*. Звичайно він розраховується за формулою середньої геометричної:

$$\overline{T}_{(\text{зр})} = \sqrt[n-1]{T_{1(\text{зр})} \cdot T_{2(\text{зр})} \cdot \ldots \cdot T_{n(\text{зр})}} = \sqrt[n-1]{\frac{y_n}{y_1}} \cdot 100\%, \qquad (8.11)$$

де $T_{1(\text{зр})}, \ldots, T_{n(\text{зр})}$ — середні темпи зростання за окремі інтервали часу.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Середній темп приросту*** визначається як

$$T_{(\text{пр})} = \overline{T}_{(\text{пр})} - 100\%. \qquad (8.12)$$

Зауваження. Показник середнього темпу зростання, що розраховується за наведеною вище формулою середньої геометричної, має істотні недоліки, оскільки ґрунтується на порівнянні кінцевого і початкового рівнів часового ряду, проміжні рівні до уваги не беруться.

Нині пропонуються інші способи розрахунку середнього темпу зростання. Наприклад, із цієї метою використовують таку формулу:

$$\overline{T}_{(\text{р})} = \sqrt[n-1]{\frac{\widehat{y}_n}{\widehat{y}_1}}, \qquad (8.13)$$

де $\widehat{y}_1$ і $\widehat{y}_n$ — згладжені за рівнянням тренду (рівнянням кривої зростання) початковий і кінцевий рівні часового ряду.

Важливою характеристикою часового ряду є також ***середній рівень ряду***. Так, в **інтервальному ряді динаміки з рівновід-**

даленими в часі рівнями середній рівень ряду обчислюють за формулою простої середньої арифметичної (тут і далі підсумовування ведеться по всіх періодах спостереження):

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t}{n}. \qquad (8.14)$$

Якщо інтервальний ряд має не рівновіддалені в часі рівні, то середній рівень ряду (***середня хронологічна***) обчислюється за формулою зваженої арифметичної середньої, де роль ваг відіграє проміжок часу (наприклад, кількість років), протягом якого рівень сталий:

$$\bar{y} = \frac{\sum y_t t}{\sum t}, \qquad (8.15)$$

де t — кількість періодів часу, упродовж яких значення рівня y_t не змінюється.

Для **моментного ряду з рівновіддаленими рівнями** середня хронологічна розраховується за формулою:

$$\bar{y} = \frac{1/2 y_1 + y_2 + y_3 + ... + y_{n-1} + 1/2 y_n}{n-1}, \qquad (8.16)$$

де n — кількість рівнів ряду.

Середня хронологічна для моментного часового ряду з різновідділеними в часі рівнями обчислюється за формулою:

$$\bar{y} = \frac{(y_1 + y_2)\, t_1 + (y_2 + y_3)\, t_2 + ... + (y_{n-1} + y_n)\, t_{n-1}}{2\sum t}. \qquad (8.17)$$

Тут n — кількість рівнів ряду; t_i — період часу, що відокремлює i-й рівень ряду від $(i+1)$-го рівня.

При статистичному аналізі часових рядів часто постає потреба не лише визначити основні характеристики ряду, а й оцінити залежність досліджуваного показника y_t від його значень, розглянутих із деяким загаюванням у часі.

Означення. Залежність значень рівнів часового ряду від попередніх (зсунених на один, два чи будь-яку іншу кількість кроків) рівнів того самого часового ряду називається ***автокореляцією*** в часовому ряді.

Для відшукання числової характеристики внутрішньої залежності обчислюють взаємну кореляційну функцію між вихідним рядом y_t і цим самим рядом, зсуненим у часі на величину τ.

ОЗНАЧЕННЯ. Функція називається ***автокореляційною***, якщо вона характеризує внутрішню структуру часового ряду і складається з множини коефіцієнтів автокореляції (нециклічних), що обчислюються за формулою:

$$r_\tau = \frac{(n-\tau)\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_t y_{t+\tau} - \sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_t \sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}}{\sqrt{\left[(n-\tau)\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_t^2 - \left(\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_t\right)^2\right]\left[(n-\tau)\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}^2 - \left(\sum\limits_{t=1}^{n-\tau} y_{t+\tau}\right)\right]}}. \qquad (8.18)$$

Задаючи різні значення $\tau = 1, 2, 3, ...,$ дістаємо послідовність значень $r_1, r_2, r_3, ...$. На практиці рекомендується обчислювати такі коефіцієнти в кількості від $n/4$ до $n/3$.

ОЗНАЧЕННЯ. Графік автокореляційної функції називається *корелограмом* і показує значення загаювання, за яким зміна показника y_t впливає на його наступні значення.

ОЗНАЧЕННЯ. Значення зсуву τ, якому відповідає найбільший коефіцієнт автокореляції, називається *часовим лагом.*

Формула для обчислення коефіцієнта автокореляції:

$$r_\tau = \frac{\frac{1}{n-\tau}\sum\limits_{t=1}^{n-\tau}(y_t - \bar{y})(y_{t+\tau} - \bar{y})}{\frac{1}{n}\sum\limits_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2}, \qquad (8.18)$$

де $\bar{y}$ — середній рівень ряду.

8.5. Тренд-сезонні економічні процеси і їх аналіз

ОЗНАЧЕННЯ. Під ***сезонними коливаннями*** розуміють регулярні, періодичні настання внутрішньорічних підйомів і спадів виробництва, вантажообігу і товарообігу тощо, пов’язаних зі зміною часу року, а під ***сезонністю*** — обмеженість річного періоду робіт під впливом того самого природного фактора.

ОЗНАЧЕННЯ. Процес, який піддається періодичним коливанням, що мають визначений і постійний період, який дорівнює річному проміжку, називається ***тренд-сезонним*** часовим рядом (сезонним часовим рядом).

Розглядатимемо тренд-сезонний часовий ряд $\{Y_t\}$, $t = \overline{1, T}$, породжуваний випадковим процесом:

$$Y_t = U_t + V_t + \varepsilon_t, \quad t = \overline{1, T}, \tag{8.19}$$

де U_t — тренд, що являє собою деяку гладку функцію, степінь гладкості якої заздалегідь невідомий;

V_t — сезонний компонент; сезонний компонент V_t має період T_0, тобто $V_{t+T_0} = V_t$;

ε_t — випадковий компонент;

T — кількість рівнів спостереження.

Відомо, що $T = mT_0$, де m — ціле число. Очевидно, що коли T_0 — кількість місяців чи кварталів у році, то m — кількість років, що входять до часового ряду $\{Y_t\}$. Часто вихідні дані тренд-сезонного часового ряду подаються у виді матриці $\{Y_{ij}\}$ розміру $\lfloor mT_0 \rfloor$. Тоді вираз (8.19) перепишеться з урахуванням уведення подвійної індексації:

$$Y_{ij} = U_{ij} + V_{ij} + \varepsilon_{ij}, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, T_0}\,. \tag{8.20}$$

Запишемо співвідношення, що встановлюють зв'язок між індексами t і $(i,\ j)$:

$$\begin{cases} i = \left[\dfrac{t}{T_0}\right] + 1, \\ j = t - (i-1) \times T_0, \end{cases} \tag{8.21}$$

де [] означає цілу частину

Перелічимо тепер задачі, що постають при дослідженні сезонних часових рядів:

1) визначення в часовому ряді тренду, а також степеня його гладкості;
2) виявлення в часовому ряді сезонних коливань;
3) фільтрація компонентів ряду;
4) аналіз динаміки сезонної хвилі;
5) дослідження факторів, що визначають сезонні коливання;
6) прогнозування тренд-сезонних процесів.

Означення. ***Під степенем гладкості тренду*** розумітимемо мінімальний степінь полінома, що адекватно згладжує компонент U_t.

Це поняття використовується в деяких ітераційних алгоритмах фільтрації при виділенні з часового ряду $\{Y_t\}$ його компонентів U_t, V_t, ε_t.

Виявлення в часовому ряді сезонних коливань зводиться до перевірки на випадковість залишкового ряду:

$$\{l_t\};\ l_t = Y_t - U_t.$$

Означення. Під ***фільтрацією*** компонентів ряду розуміється виділення з ряду $\{Y_t\}$ його складових U_t, V_t, ε_t.

Аналіз динаміки, чи еволюції, сезонної хвилі може розглядатися як процес розв'язування трьох взаємозалежних задач.

1. Аналіз динаміки амплітуди сезонної хвилі в кожному місяці (кварталі, тижні).

2. Аналіз динаміки точок екстремуму сезонної хвилі.

3. Дослідження змін форми хвилі.

Схему дослідження сезонних часових рядів наведено на рисунку.

Схема не визначає методів розв'язування кожної задачі, які можуть змінюватися, удосконалюватися, але вона подає сукупність і послідовність питань, які потрібно розв'язувати для повного дослідження сезонного часового ряду.

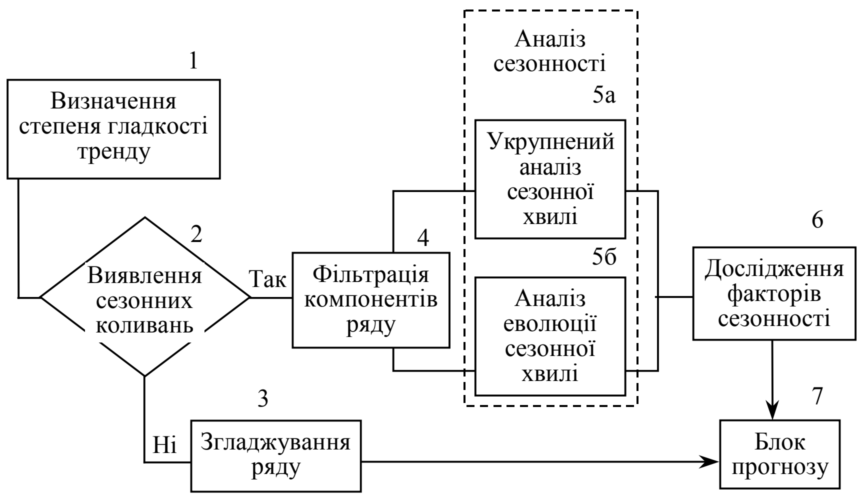


Схема дослідження тренд-сезонних часових рядів

Розглянемо насамперед деякі теоретичні питання виявлення і фільтрації сезонного компонента часового економічного ряду.

ОЗНАЧЕННЯ. Під ***згладжуванням*** тренд-сезонного часового ряду розумітимемо процес відшукання оцінок $\left(\widehat{U}_t + \widehat{U}_t\right)$, а під ***фільтрацією*** компонентів — процес відшукання оцінок U_t, V_t і ε_t.

Нині розвиваються **три основні напрямки** фільтрації компонентів часового ряду виду (8.19): ***регресійні****,* ***спектральні й ітераційні****.* Розглянемо останні докладніше.

При фільтрації компонентів часового ряду за допомогою тих чи тих методів неминуче постає питання про «чистоту» фільтрації, тобто питання про ступінь близькості оцінок $\widehat{U}_t$ і $\widehat{V}_t$ їхніх справжніх значень U_t, V_t. Зауважимо, що досі жодний із відомих методів не забезпечує необхідного ступеня чистоти фільтрації для часових рядів різної структури.

Ітераційні методи фільтрації складових часового ряду сформувалися свого часу як результат визнання неможливості виділення компонентів ряду прямими методами. ***Основна ідея ітераційних процедур*** полягає в багаторазовому застосуванні ковзної середньої:

$$Y_t = \frac{\dfrac{Y_{t-T_0/2}}{2} + Y_{t-T_0/2+1} + \ldots + Y_t + \ldots + Y_{t-T_0/2-1} + \dfrac{Y_{t+T_0/2}}{2}}{T_0} \tag{8.22}$$

й одночасному оцінюванні сезонного компонента в кожному циклі. При цьому перехід від одного кроку ітераційної процедури до іншого може супроводжуватися зміною параметрів ковзної середньої. Якщо формулу для ковзної середньої записати у вигляді

$$Y_t' = \frac{\sum\limits_{\tau=-q}^{q} \alpha_t Y_{t+\tau}}{T'}, \tag{8.23}$$

то при переході від однієї ітерації до іншої може відбуватися зміна довжини ділянки ковзання T' і закону зміни вагових коефіцієнтів α_τ. У деяких ітераційних методах використовується також регресія (як правило, лінійна) вихідного ряду Y_t на перетворений у першому кроці ряд $Y_t' \cong U_t$.

Зауваження. Ітераційні методи характеризуються простотою і задовільною «чистотою» фільтрації компонентів ряду, але мають істотний недолік. Застосування ковзної середньої (8.22) і (8.23) призводить до втрати частини інформації на кінцях часового ряду. Наприклад, якщо використовується ковзна середня вигляду (8.22), то на кожному кінці ряду втрачається по $T_0/2$ його членів.

Розглянемо два ітераційні методи: Четверикова і Шискіна—Ейзенпресса.

Алгоритм методу Четверикова (1928)

1. Емпіричний ряд $\{Y_t\}$ вирівнюється (згладжується) ковзною середньою (8.22) з періодом ковзання T_0, тобто беруться (T_0+1) членів вихідного ряду, з яких перший і останній — із половинною вагою: $\alpha_{-T_0/2}=\alpha_{T_0/2}=1/2$. При цьому $T_0/2$ членів ряду, що випадають, з обох його кінців або відновлюються екстраполюванням вирівняного ряду, або залишаються осторонь при наступній стадії робіт.

Відшукається попередня оцінка тренду

$$Y'_t=U'_t\,.$$

а також визначається відхилення емпіричного ряду від вирівняного

$$l_t=Y_t-Y'_t,\quad t=\overline{1,\,T},$$

або

$$l_{ij}=Y_{ij}-Y'_{ij}\ \left(i=\overline{1,\,m};\quad j=\overline{1,\,T_0}\right). \tag{8.24}$$

2. Для кожного року *і* обчислюється σ_i — середньоквадратичне відхилення, на яке діляться потім окремі місячні (квартальні) відхилення відповідного року:

$$\tilde{l}_{ij}=\frac{l_{ij}}{\sigma_i}, \tag{8.25}$$

де

$$\sigma_i=\left[\frac{\sum_{j=1}^{T_0}l_{ij}^2-\left(\sum_{j=1}^{T_0}l_{ij}\right)^2\Big/T_0}{T_0-1}\right]^{1/2}. \tag{8.26}$$

3. Із «нормованих» у такий *спосіб* відхилень обчислюється попередня середня сезонна хвиля:

$$V_j^1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} \tilde{l}_{ij}}{m}. \tag{8.27}$$

4. Середня попередня сезонна хвиля збільшується на середньоквадратичне відхилення кожного року і віднімається від емпіричного ряду:

$$U_{ij}^1 = Y_{ij} - V_j^1 \sigma_i . \tag{8.28}$$

5. Ряд, побудований у такий спосіб, позбавлений попередньої сезонної хвилі, знову вирівнюється ковзною середньою. У результаті утворюється нова оцінка тренду $U_t^{(2)}$.

6. Відхилення емпіричного ряду Y_t від ряду $U_t^{(2)}$, побудованого в п. 5,

$$l_t^{(2)} = Y_t - U_t^{(2)}, \tag{8.29}$$

знову піддаються аналогічній обробці згідно з п. 2 і 3 для виявлення остаточної середньої сезонної хвилі.

7. Виключення остаточної сезонної хвилі виконується після множення середньої сезонної хвилі на k_i — коефіцієнт напруженості сезонної хвилі:

$$k_i = \frac{\sum_{j=1}^{T_0} l_{ij}^{(2)} \varepsilon_{ij}}{\sum_{j=1}^{T_0} \varepsilon_{ij}^2}, \tag{8.30}$$

де l_{ij}^2 — вирівняні значення ряду; ε_{ij} — випадковий компонент.

$$\varepsilon_{ij} = l_{ij}^{(2)} - V_j^{(2)}.$$

Зауваження. У методиці Шискіна—Ейзенпресса крім ковзної середньої (8.22) на другому та наступному етапах ітераційної процедури застосовуються складніші п’ятнадцяти- і двадцятиодноточкові ковзні Спенсера. Вони мають відповідно такий вигляд:

$$Y'_{1t} = \frac{-3Y_{t-7} - 6Y_{t-6} - 5Y_{t-5} + 3Y_{t-4} + 21Y_{t-3} + 46Y_{t-2} + 67Y_{t-1}}{320} + \\ + \frac{74Y_t + 67Y_{t+1} + 46Y_{t+2} + 21Y_{t+3} + 3Y_{t+4} - 5Y_{t+5} - 6Y_{t+6} - 3Y_{t+7}}{320}; \tag{8.31}$$

$$Y_2' = \frac{-Y_{t-10} - 3Y_{t-9} - 5Y_{t-8} - 5Y_{t-7} - 2Y_{t-6} + 6Y_{t-5} + 18Y_{t-4}}{350} +$$

$$+ \frac{33Y_{t-3} + 47Y_{t-2} + 57Y_{t-1} + 60Y_t + 57Y_{t+1} + 47Y_{t+2}}{350} +$$

$$+ \frac{33Y_{t+3} + 18Y_{t+4} + 6Y_{t+5} - 2Y_{t+6} - 5Y_{t+7} - 5Y_{t+8} - 3Y_{t+9} - Y_{t+10}}{350},$$

або в цифровому запису Кендалла:

$$Y_{1t}' = \frac{1}{320}\left[4\right]^2 \left[5\right] \left[-3,\ \ 3,\ \ 4,\ \ 3,\ \ -3\right], \tag{8.32}$$

$$Y_{2t}' = \frac{1}{350}\left[5\right]^2 \left[7\right] \left[-1,\ \ 0,\ \ 1,\ \ 2\right]. \tag{8.33}$$

У (8.32) і (8.33) символи $\lfloor N \rfloor$ означають вирівнювання ряду ковзної середньої. Наприклад, якщо $N = 5$, то

$$Y_t' = \frac{Y_{t-2} + Y_{t-1} + Y_t + Y_{t+1} + Y_{t+2}}{5}. \tag{8.34}$$

Символ $\left[N\right]^2$ означає подвійне послідовне вирівнювання ряду $\{Y_t\}$ однієї і тієї самої ковзної середньої, тобто якщо $N = 5$, то спочатку дістаємо вирівняні оцінки Y_t' за (8.34), а потім застосовуємо до них ту саму ковзну середню (8.34):

$$Y_t'' = \frac{Y_{t-2}' + Y_{t-1}' + Y_t' + Y_{t+1}' + Y_{t+2}'}{5}.$$

Якщо розглядається двадцятиодноточкова ковзна середня (8.31), то потім ми мали б застосувати ще одне вирівнювання за сімома точками:

$$Y_t''' = \frac{Y_{t-3}'' + Y_{t-2}'' + Y_{t-1}'' + Y_t'' + Y_{t+1}'' + Y_{t+2}'' + Y_{t+3}''}{7}.$$

Остаточно маємо:

$$Y_t^{IV} = \frac{Y_{t-2}''' + Y_{t-1}''' + Y_t''' + Y_{t+1}''' + Y_{t+2}'''}{2}.$$

Зауваження. Чим пояснюється застосування ковзних середніх Спенсера в методі Шискіна—Ейзенпресса? Річ у тім, що ковзна середня із симетрично рівними вагами виду (8.22) дає змогу виділити лише лінійний тренд. Якщо ж тренд насправді не лінійний, то згладжування часового ряду, що містить нелінійний тренд, дає спотворені його значення. Ковзна середня Спенсера дає змогу діставати точні оцінки тренду, вираженого поліномами до третього степеня включно.

Алгоритм методу Шискіна—Ейзенпресса

1. Вихідний ряд $\{Y_t\}$ вирівнюється ковзною середньою (8.22). Виконується це, як і в методі Четверикова, з тією метою, щоб не зіпсувати сезонного компонента Y_t. Якби ми використовували ковзну середню з іншим періодом ковзання, то це привело б до зміни як амплітуди, так і форми сезонної хвилі.

2. Розраховуються залишкові значення:

$$l_t = Y_t - Y'_t ,$$

або

$$l_{ij} = Y_{ij} - Y'_{ij} .$$

Обчислюються середні значення залишкового ряду в цілому по ряду $\bar{l}$ і по місяцях (кварталах) $\bar{l}_j$:

$$\begin{cases} \bar{l}_j = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{m} l_{ij}}{m}, \\ \bar{l} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{T_0} \bar{l}_j}{T_0}. \end{cases} \tag{8.35}$$

3. Відшукається попередня оцінка середньої сезонної хвилі

$$\widehat{V}_j^1 = \bar{l}_j - \bar{l} \tag{8.36}$$

і будується новий ряд, порівняно вільний від сезонного компонента

$$\widehat{U}_{ij}^1 = Y_{ij} - \widehat{V}_j^1 . \tag{8.37}$$

4. До ряду U_{ij} застосовується згладжування ковзної середньої Спенсера:

$$\widehat{U}_t^2 = \frac{1}{350}[5]^2\,[7]\,[-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 1,\ 0,\ -1]\,U_t^1. \tag{8.38}$$

5. Відшукується поліпшена оцінка сезонного компонента:

$$\widehat{V}_j^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{m}\left(Y_{ij} - U_{ij}^2\right)}{m}. \tag{8.39}$$

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення часового економічного ряду і характеристику його структуроутворювальних елементів.
2. Що таке аномальний рівень часового ряду? Які методи виявлення та усунення аномальних рівнів ви знаєте?
3. Перелічіть основні етапи вивчених методів визначення наявності тренду.
4. Поясніть сутність методів механічного згладжування часових рядів. Дайте порівняльну характеристику цих методів.
5. Назвіть основні показники економічної динаміки, що розраховуються на основі часових рядів.
6. У чому сутність явища автокореляції в часових рядах? Що таке часовий лаг?
7. Дайте характеристику явища сезонності в економічних процесах. Які методи виявлення та фільтрації сезонного компонента часового ряду ви знаєте?
8. Поясніть сутність статистичних методів аналізу сезонності. Що таке сезонна хвиля?

Вправи для самостійного розв'язування

1. У таблиці наведено річні дані про трудомісткість виробництва 1 т цементу (нормо-змін).

Поточний номер року t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Трудомісткість 1 т цементу y_t	7,9	8,3	7,6	6,9	7,2	6,5	5,8	4,9	5,1	4,4

Визначте наявність тренду в часовому ряді:

а) методом перевірки різниці середніх рівнів;

б) методом Фостера—Стьюарта (табличні значення статистик Стьюдента і Фішера взяти такі: $t_\alpha = 2{,}23$; $F_\alpha = 3{,}07$; інші необхідні дані наведено в табл. 8.5.

2. Розгляньте часовий ряд, наведений у поданій далі таблиці, і виконайте його згладжування:

1) методом простої середньої;

2) методом експонентного згладжування, узявши параметр α таким, що дорівнює: а) 0,1; б) 0,3. Результати згладжування зобразіть на графіку. Візуально визначте, яке з цих значень α найбільше відповідає економічному процесу, заданому часовим рядом.

3. Для показника, заданого тим самим часовим рядом, знайдіть:

а) середній абсолютний приріст;

б) середні темпи зростання і приросту;

в) середній рівень ряду;

г) середньоквадратичне відхилення та дисперсію.

4. Для того самого часового ряду обчисліть перші коефіцієнти автокореляції і побудуйте графік автокореляційної функції. Знайдіть значення часового лагу.

Таблиця 8.6

ОБСЯГИ ПЕРЕВЕЗЕНЬ ВАНТАЖІВ МОРСЬКИМ ТРАНСПОРТОМ В УМОВНИХ ОДИНИЦЯХ $\left\{Y_{ij},\ i = \overline{1{,}13},\ j = \overline{1{,}12}\right\}$

Рік	Місяць					
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
1	7,62	6,80	9,02	9,67	10,76	11,48
2	8,50	8,11	9,93	10,70	11,24	11,98
3	9,40	9,00	11,44	11,73	13,05	13,09
4	8,84	10,18	11,64	12,49	13,28	13,63
5	9,15	8,02	10,87	12,01	13,96	14,39
6	10,8	10,24	12,63	13,50	15,03	15,33

Рік	Місяць					
	7	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*
7	11,86	11,47	12,81	14,34	15,54	15,61
8	10,84	11,55	13,31	14,78	16,08	16,60
9	12,19	12,48	14,84	15,65	16,85	17,32
10	13,21	12,46	15,33	16,40	17,44	17,26
11	14,08	13,19	15,26	16,30	17,78	18,07
12	14,73	13,66	17,59	17,74	19,97	19,28
13	14,29	14,32	17,50	18,10	19,82	19,71
1	11,43	11,68	11,20	10,77	9,34	9,55
2	12,38	12,73	11,84	12,19	10,97	10,63
3	13,74	13,74	12,41	12,69	10,68	10,45
4	13,88	13,82	13,11	12,96	12,01	10,75
5	14,41	14,45	13,56	13,39	12,40	12,05
6	15,24	15,02	14,51	14,12	13,09	12,35
7	15,22	15,83	15,46	14,83	13,93	14,00
8	16,41	16,72	16,65	15,68	14,67	14,75
9	17,69	17,62	16,39	16,37	15,19	14,17
10	17,89	17,76	16,97	16,85	15,78	14,86
11	18,31	18,71	18,25	17,70	15,87	16,47
12	19,44	19,95	19,58	18,23	17,41	16,87
13	19,94	20,94	19,96	19,31	18,52	17,85

РОЗДІЛ 9

ПРОГНОЗУВАННЯ ЕКОНОМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

9.1. Часові ряди та прогнозування

Прогнозування на основі часового ряду економічних показників належать до одновимірних методів прогнозування, що базуються на екстраполяції, тобто на пролонгуванні тенденції, що спостерігалася в минулому. За такого підходу передбачається, що прогнозований показник формується під впливом чисельних факторів, які виокремити неможливо або щодо яких немає жодної інформації. У цьому разі процес зміни того чи іншого показника пов'язують не з факторами, а з часом, що виявляється в утворенні одновимірних часових рядів. В основу методу екстраполяції покладено так звані ***криві зростання економічної динаміки***.

9.1.1. *Характеристики кривих зростання*

Багато аналітичних методів екстраполяції можна звести до вибору так званих *кривих зростання* та визначення їхніх параметрів.

Означення. Під ***кривою зростання*** розумітимемо деяку функцію, що апроксимує даний динамічний ряд.

Розробка прогнозу з використанням кривих зростання складається з таких кроків:

1) вибору однієї або кількох кривих, форма яких відповідає динаміці часового ряду;
2) оцінювання параметрів вибраних кривих;
3) перевірки адекватності вибраних кривих прогнозованому процесу та остаточного вибору кривої;
4) розрахунку точкового та інтервального прогнозів.

Криві зростання вибирають із трьох класів функцій.

1. До першого класу належать криві, що не мають межі зростання в досліджуваному періоді. Такі криві використовуються для опису процесів із монотонним характером розвитку та необмеженим зростанням.

2. До другого класу належать криві, що мають межу зростання в досліджуваному періоді. Такі криві називаються ***кривими насичення.***

3. До третього класу належать криві насичення, які мають точки перегину. Їх називають ***S*-подібними кривими.**

Найпростіші ***поліноміальні*** криві зростання мають такий вигляд:

$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$ (поліном першого степеня);

$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ (поліном другого степеня);

$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ (поліном третього степеня) і т. д.

Параметр a_1 називають ***лінійним приростом,*** параметр a_2 — ***прискоренням зростання,*** параметр a_3 — ***зміною прискорення зростання***.

Для полінома першого степеня характерний рівномірний закон зростання. Якщо розрахувати перші прирости за формулою $u_t = y_{t-1}$, $t = 2, 3, ..., n$, то вони будуть сталою величиною і дорівнюватимуть a_1.

Якщо перші прирости розрахувати для полінома другого степеня, то вони лінійно залежатимуть від часу, причому ряд із перших приростів $u_2, u_3, ...$ на графіку являтиме собою пряму лінію. Інші прирости $u_t^{(2)} = u_t - u_{t-1}$ для полінома другого степеня будуть постійними.

Для полінома третього степеня перші прирости — це поліноми другого степеня, другі прирости — лінійні функції часу, а треті прирости, що обчислюються за формулою $u_t^{(3)} = u_t^{(2)} - u_{t-1}^{(2)}$, — постійні величини.

Графіки зазначених поліномів наведено на рис. 9.1.

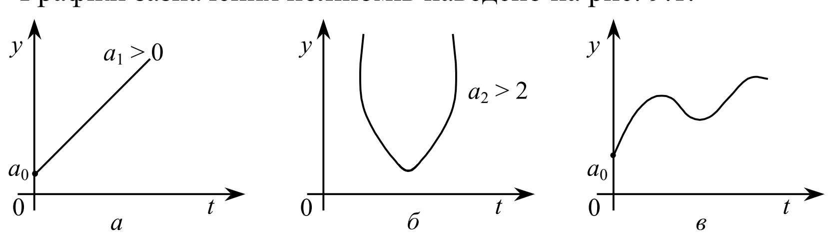


Рис. 9.1. Графіки поліномів:

а — першого степеня; *б* — другого степеня; *в* — третього степеня

З огляду на сказане можна відзначити такі властивості поліноміальних кривих зростання:

• від полінома високого порядку можна шляхом обчислення послідовних різниць (приростів) перейти до полінома нижчого порядку;

• значення приростів для поліномів будь-якого порядку не залежать від значень самої функції $\hat{y}_t$.

Висновок. Поліноміальні криві зростання можна використовувати для апроксимації (наближення) і прогнозування економічних процесів, в яких подальший розвиток не залежить від досягнутого рівня.

Використання ***експонентних*** кривих зростання на відміну від поліноміальних припускає, що подальший розвиток залежить від досягнутого рівня (наприклад, приріст залежить від значення функції). В економіці найчастіше застосовуються два різновиди експонентних (показникових) кривих: *проста експонента* і *модифікована експонента*.

Проста експонента подається у вигляді функції

$$\hat{y}_t = ab^t,$$

де a, b — додатні числа. При цьому якщо $b > 1$, то функція зі зростанням часу t зростає; якщо $b < 1$ — функція спадає (рис. 9.2, *а*, *б*).

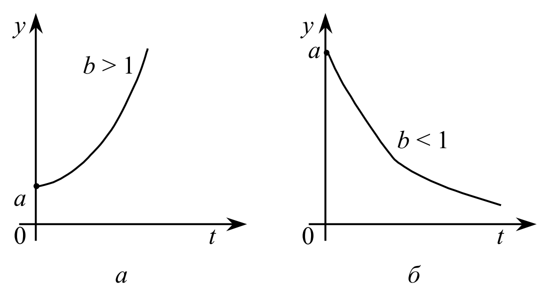


Рис. 9.2. Графіки простої експоненти

Зауважимо, що ордината даної функції змінюється з постійним темпом приросту. Якщо взяти відношення приросту до самої ординати, воно буде постійною величиною:

$$\frac{u_t}{y_t} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_t} = 1 - \frac{1}{b}.$$

Прологарифмуємо вираз для даної функції за будь-якою основою:

$$\log \hat{y}_t = \log a + t \log b.$$

Звідси можна помітити, що логарифми ординат простої експоненти лінійно залежать від часу.

Модифікована експонента подається у вигляді

$$\hat{y}_t = k + ab^t,$$

де k — деяка константа; $a < 0$, $0 < b < 1$ — постійні величини.

Константа k називається ***асимптотою*** цієї функції, тобто значення функції необмежено наближаються (знизу) до значення k (рис. 9.3).

Можливі й інші варіанти модифікованої експоненти, але на практиці найчастіше трапляється зазначена функція.

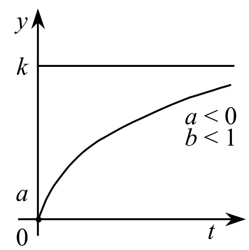


Рис. 9.3. Графік модифікованої експоненти

Прологарифмувши перші прирости цієї функції, дістанемо функцію, що лінійно залежить від часу, тоді як відношення двох послідовних приростів буде постійною величиною:

$$\frac{u_t}{u_{t-1}} = \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1} - y_{t-2}} = b.$$

В економіці доволі поширені процеси, що спочатку зростають повільно, потім прискорюються, а згодом знову сповільнюють зростання, прямуючи деякої межі. Як приклад можна навести процес уведення деякого об'єкта в промислову експлуатацію, процес зміни попиту на товари, що мають здатність досягати деякого рівня насичення, і т. ін. Для моделювання таких процесів використовуються згадувані вже *S-подібні криві зростання,* серед яких виокремлюють *криву Гомперца* і *логістичну криву*.

Крива Гомперца має аналітичний вираз

$$\widehat{y}_t = ka^{b^t},$$

де a, b — додатні параметри, причому $b < 1$; параметр k — асимптота функції (рис.9.4).

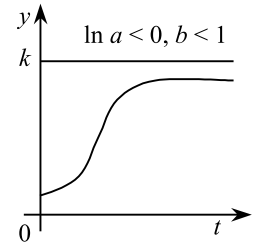


Рис. 9.4. Крива Гомперца

У кривої Гомперца виокремлюють чотири ділянки: на першій приріст функції незначний, на другій приріст збільшується, на третій ділянці приріст приблизно постійний, на четвертій відбувається уповільнення темпів приросту і функція необмежено наближається до значення k. У результаті конфігурація кривої нагадує латинську літеру S.

Логарифм цієї функції є експонентною кривою; логарифм відношення першого приросту до самої ординати функції — лінійна функція часу.

За допомогою кривої Гомперца описується, наприклад, динаміка показників рівня життя; модифікації цієї кривої використовуються в демографії для моделювання показників смертності і т. ін.

Логістична крива, або крива Перла—Ріда, — графік зростаючої функції, яка найчастіше подається у вигляді (рис. 9.5):

$$\widehat{y}_t = \frac{k}{1 + ae^{-bt}},$$

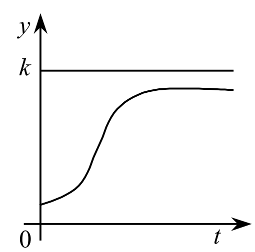


Рис. 9.5. Логістична крива

Застосовуються також інші види цієї кривої:

$$\widehat{y}_t = \frac{k}{1 + ab^{-t}}; \quad \widehat{y}_t = \frac{k}{1 + 10^{a-bt}}.$$

У цих виразах *a, b* — додатні параметри; *k* — граничне значення функції при нескінченному зростанні часу.

Узявши похідну розглядуваної функції, можна побачити, що швидкість зростання логістичної кривої в кожний момент часу пропорційна до досягнутого рівня функції та різниці між граничним значенням *k* і досягнутим рівнем. Логарифм відношення першого приросту функції до квадрата її значення (ординати) є лінійна функція від часу.

Логістична крива дуже схожа на криву Гомперца, але на відміну від останньої вона має точку симетрії, що збігається з точкою перегину.

Ця крива добре описує розвиток нового виробництва. На початку виробництва нового виду товару відповідні технічні засоби ще недостатньо розроблено, витрати на виробництво великі, а попит на товар низький. Далі з підвищенням попиту та вдосконаленням технології виробництва його зростання сповільнюється, відбувається насичення ринку цим товаром, а виробництво стабілізується на певному рівні.

Розглянуті криві зростання найчастіше використовуються в економічних дослідженнях. У виборі кривої зростання передусім допомагають статистичні методи, такі як метод послідовних різниць, метод характеристик приросту і т. ін.

Нерідко криву зростання вибирають, керуючись таким, скажімо, критерієм, як мінімальне значення суми квадратів відхилень фактичних значень рівня від розрахункових.

Проте часто виходять із наочних міркувань, беручи криву зростання, форма якої відповідає реальному процесу. Якщо на графіку часового ряду не досить чітко проглядається тенденція розвитку, то потрібно провести згладжування ряду, а далі дібрати криву, що відповідає новому ряду. При цьому є сенс використовувати сучасні персональні комп’ютери.

9.1.2. *Методи попереднього вибору кривої зростання*

Нехай маємо часовий ряд $y_1, y_2, y_3, ..., y_n$.

Щоб вибрати вид поліноміальної кривої зростання, можна скористатись **методом скінченних різниць** (метод Тінтнера), якщо, по-перше, рівні часового ряду складаються тільки з двох компонентів — тренду і випадкового компонента, і, по-друге, тренд є достатньо гладким, щоб його можна було апроксимувати поліномом деякого степеня.

Згідно з цим методом спочатку обчислюються різниці (прирости) до k-го порядку включно:

$$u_t = y_t - y_{t-1};$$
$$u_t^{(2)} = u_t - u_{t-1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$u_t^{(k)} = u_t^{(k-1)} - u_{t-1}^{(k-1)}.$$

Для апроксимації економічних процесів, як правило, скінченні різниці обчислюють до четвертого порядку.

Далі для вихідного і для кожного різницевого ряду обчислюємо дисперсії за такими формулами:
для вихідного ряду

$$\sigma_0^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{t-1}^{n} y_t\right)^2}{n-1};$$

для різницевого ряду k-го порядку $(k = 1, 2, \ldots)$

$$\sigma_k^2 = \frac{\sum_{t=k+1}^{n}\left(u_t^k\right)^2}{(n-k)C_{2k}^k},$$

де C_{2k}^k — біноміальний коефіцієнт.

Порівнюємо відхилення кожної наступної дисперсії від попередньої, обчислюючи значення

$$\left|\sigma_k^2 - \sigma_{k-1}^2\right|.$$

При цьому якщо для деякого k це значення не перевищує якогось наперед заданого додатного значення, тобто дисперсії одного порядку, то степінь апроксимуючого полінома має дорівнювати $k-1$.

Більш універсальним методом попереднього вибору кривих зростання, що дає змогу вибрати криву з широкого класу таких кривих, є ***метод характеристик приросту.*** Він ґрунтується на використанні окремих характерних властивостей кривих, розглянутих вище. Згідно з цим методом вихідний часовий ряд попередньо згладжується методом простої ковзної середньої. Наприклад, для інтервалу згладжування $m=3$ згладжені рівні розраховуються за формулою

$$\overline{y}_t = \frac{y_{t-1} + y_t + y_{t+1}}{3},$$

причому щоб не втратити першого і останнього рівнів, їх згладжують за формулами

$$\overline{y}_1 = \frac{5y_1 + 2y_2 - y_3}{6},$$

$$\overline{y}_n = \frac{-y_{n-2} + 2y_{n-1} - 5y_n}{6}.$$

Потім обчислюються перші середні приросту

$$\overline{u}_t = \frac{\overline{y}_{t+2} - \overline{y}_{t-1}}{2}; \quad t = 2, 3, ..., n-1;$$

другі середні приросту

$$\overline{u}_t^{(2)} = \frac{\overline{y}_{t+1} - \overline{y}_{t-1}}{2},$$

а також ряд похідних величин, пов'язаних з обчисленими середніми приростами та згладженими рівнями ряду:

$$\frac{\overline{u}_t}{\overline{y}_t}; \ \log \overline{u}_t; \ \log \frac{\overline{u}_t}{\overline{y}_t}; \ \log \frac{\overline{u}_t}{\overline{y}_t^2}.$$

Відповідно до характеру зміни середніх приростів і похідних показників вибирається вид кривої зростання для вихідного часового ряду, при цьому використовується табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Показник	Характер зміни показника в часі	Вид кривої зростання
Перший середній приріст $\overline{u}_t$	Приблизно однакові	Поліном першого порядку (пряма)
»	Змінюються лінійно	Поліном другого порядку (парабола)

Показник	Характер зміни показника в часі	Вид кривої зростання
Другий середній приріст $\overline{u}_t^{(2)}$	»	Поліном третього порядку (кубічна парабола)
$\dfrac{\overline{u}_t}{\overline{y}_t}$	Приблизно однакові	Проста експонента
$\log\overline{u}_t$	Змінюються лінійно	Модифікована експонента
$\log\dfrac{\overline{u}_t}{\overline{y}_t}$	»	Крива Гомперца
$\log\dfrac{\overline{u}_t}{\overline{y}_t^2}$	»	Логістична крива

На практиці при попередньому виборі добирають звичайно дві—три криві зростання для подальшого дослідження та побудови трендової моделі даного часового ряду.

9.1.3. *Методи визначення параметрів дібраних кривих зростання*

Параметри поліноміальних кривих оцінюються, як правило, ***методом найменших квадратів***, сутність якого полягає в тому, щоб сума квадратів відхилень фактичних рівнів ряду від відповідних вирівняних по кривій зростання значень була найменшою. Цей метод приводить до системи так званих ***нормальних рівнянь*** для визначення невідомих параметрів дібраних кривих.

Для полінома першого степеня

$$\hat{y}_t = a_0 + a_1 t$$

система нормальних рівнянь набирає вигляду

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t = \sum y_t, \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 = \sum y_t t, \end{cases}$$

де знак підсумовування поширюється на всі моменти спостереження (усі рівні) вихідного часового ряду.

Аналогічна система для полінома другого степеня

$$\widehat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

має вигляд

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 = \sum y_t \,, \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 = \sum y_t t \,, \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 = \sum y_t t^2 \,. \end{cases}$$

Для полінома третього степеня

$$\widehat{y}_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

система нормальних рівнянь записується в такий спосіб:

$$\begin{cases} a_0 n + a_1 \sum t + a_2 \sum t^2 + a_3 \sum t^3 = \sum y_t \,, \\ a_0 \sum t + a_1 \sum t^2 + a_2 \sum t^3 + a_3 \sum t^4 = \sum y_t t, \\ a_0 \sum t^2 + a_1 \sum t^3 + a_2 \sum t^4 + a_3 \sum t^5 = \sum y_t t^2, \\ a_0 \sum t^3 + a_1 \sum t^4 + a_2 \sum t^5 + a_3 \sum t^6 = \sum y_t t^3. \end{cases}$$

Для відшукання параметрів експонентних і S-подібних кривих застосовують складніші методи. Для простої експоненти

$$\widehat{y}_t = ab^t$$

попередньо логарифмують вирази за певною основою (наприклад, десятковою чи натуральною):

$$\log \widehat{y}_t = \log a + t \log b,$$

тобто для логарифмічної функції дістають лінійний вираз, а потім для невідомих параметрів $\log a$ і $\log b$ складають за методом найменших квадратів систему нормальних рівнянь, аналогічну системі для полінома першого степеня. Розв'язуючи цю систему, знаходять логарифми параметрів, а потім і самі параметри моделі.

Визначаючи параметри кривих зростання, що мають асимптоти (модифікована експонента, крива Гомперца, логістична крива), розрізняють два випадки. Якщо значення асимптоти k відоме заздалегідь, то за допомогою нескладного модифікування формули та подальшого логарифмування зводять визначення параметрів до розв'язування системи нормальних рівнянь, невідомими якої є логарифми параметрів кривої.

Якщо значення асимптоти заздалегідь невідоме, то для обчислення параметрів зазначених кривих зростання використовуються наближені методи: метод трьох точок, метод трьох сум тощо.

Таким чином, при моделюванні економічної динаміки, заданої часовим рядом, шляхом згладжування вихідного ряду, визначення наявності тренду, добору однієї чи кількох кривих зростання і визначення їхніх параметрів за наявності тренду дістають одну чи кілька трендових моделей для вихідного часового ряду. Постає питання, наскільки ці моделі близькі до економічної реальності, відбитої в часовому ряді, наскільки обґрунтоване застосування цих моделей для аналізу та прогнозування досліджуваного економічного явища.

9.2. Оцінювання адекватності та точності трендових моделей

9.2.1. *Основні поняття*

Незалежно від виду та способу побудови математичної або економіко-математичної моделі питання про можливість її застосування з метою аналізу й прогнозування економічного явища можна розв’язати тільки після встановлення *адекватності,* тобто відповідності моделі досліджуваному процесу чи об’єкту. Оскільки повної відповідності моделі реальному процесу чи об’єкту бути не може, адекватність — поняття певною мірою умовне. При моделюванні ідеться про адекватність не взагалі, а за тими властивостями моделі, що вважаються істотними для дослідження.

Означення. Трендова модель $\hat{y}_t$ конкретного часового ряду y_t вважається ***адекватною,*** якщо вона правильно відбиває систематичні компоненти часового ряду. Ця вимога еквівалентна вимозі, щоб залишковий компонент $\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t$ $(t = 1, 2, ..., n)$ задовольняв властивості випадкового компонента часового ряду: випадковість коливань рівнів залишкової послідовності, відповідність розподілу випадкового компонента нормальному закону розподілу, рівність математичного сподівання випадкового компонента нулю, незалежність значень рівнів випадкового компонента. Розглянемо, якими методам здійснюється перевірка цих властивостей залишкової послідовності.

Перевірка випадковості коливань рівнів залишкової послідовності означає перевірку гіпотези про правильність вибору виду тренду. Для дослідження випадковості відхилень від тренду маємо у своєму розпорядженні набір різниць

$$\varepsilon_t = y_t - \hat{y}_t \quad (t = 1, 2, ..., n).$$

Характер цих відхилень вивчається за допомогою ряду непараметричних критеріїв. Одним з таких критеріїв є ***критерій серій***, що ґрунтується на медіані вибірки. Ряд із величин ε_t розміщують у порядку зростання їхніх значень і знаходять медіану ε_m утвореного варіаційного ряду, тобто середне значення при непарному n чи середнє арифметичне з двох середних значень при n парному. Повертаючись до вихідної послідовності ε_t і порівнюючи значення цієї послідовності з ε_m, ставимо знак «плюс», якщо значення ε_t перевищує медіану, і знак «мінус», якщо воно менше за медіану; у разі рівності порівнюваних величин відповідне значення ε_t опускаємо. Таким чином, утворюється послідовність, що складається з плюсів і мінусів, загальна кількість яких не перевищує n.

Означення. Послідовність плюсів чи мінусів, що йдуть підряд один за одним, називається ***серією***. Для того щоб послідовність ε_t була випадковою вибіркою, довжина найдовшої серії не повинна бути занадто великою, а загальна кількість серій — занадто малою.

Позначимо довжину найдовшої серії через $K_{\max}$, а загальну кількість серій — через ν.

Означення. Вибірка називається **випадковою**, якщо для 5 %-ного рівня значущості виконуються такі нерівності:

$$K_{\max} < [3{,}3(\lg n + 1)],$$

де квадратні дужки означають цілу частина числа.

Якщо хоча б одна з цих нерівностей порушується, то гіпотеза про випадковий характер відхилень рівнів часового ряду від тренду відкидається, а отже, трендова модель визнається неадекватною.

Іншим критерієм для такої перевірки може бути ***критерій піків (точок повороту).***

Означення. Рівень послідовності ε_t називається ***максимумом***, якщо він більший від двох рівнів, що містяться поруч із ним, тобто $\varepsilon_{t-1} < \varepsilon_t > \varepsilon_{t+1}$, і ***мінімумом***, якщо він менший від обох сусідніх рівнів, тобто $\varepsilon_{t-1} > \varepsilon_t < \varepsilon_{t+1}$. В обох випадках ε_t називається ***точкою повороту.*** Загальну кількість точок повороту для залишкової послідовності ε_t позначимо через *p*.

У випадковій вибірці математичне сподівання кількості точок повороту $\overline{p}$ і дисперсія σ_p^2 подаються формулами:

$$\overline{p} = \frac{2}{3}(n-2); \quad \sigma_p^2 = \frac{16n-29}{90}.$$

Критерієм випадковості з 5 %-ним рівнем значущості, тобто з надійною ймовірністю 95 %, є виконання нерівності

$$p > \left[\overline{p} - 1{,}96\sqrt{\sigma_p^2}\right],$$

де квадратні дужки означають цілу частину числа. Якщо ця нерівність не виконується, трендова модель вважається неадекватною.

Перевірку відповідності розподілу випадкового компонента нормальному закону розподілу можна виконати лише наближено за допомогою дослідження показників ***асиметрії*** γ_1 та ***ексцесу*** γ_2, оскільки часові ряди, як правило, не дуже великі. При нормальному розподілі показники асиметрії та ексцесу деякої генеральної сукупності дорівнюють нулю. Ми припускаємо, що відхилення від тренду являють собою вибірку з генеральної сукупності, тому можна визначити тільки вибіркові характеристики асиметрії та ексцесу і відповідної помилки:

$$\widehat{\gamma}_1 = \frac{\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^3}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^3}}; \quad \sigma_{\widehat{\gamma}_1} = \sqrt{\frac{6(n-2)}{(n+1)(n+3)}};$$

$$\widehat{\gamma}_2 = \frac{\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^4}{\sqrt{\left(\frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2\right)^2}} - 3; \quad \sigma_{\widehat{\gamma}_2} = \sqrt{\frac{24n(n-2)(n-3)}{(n+1)^2(n+3)(n+5)}}.$$

Тут $\widehat{\gamma}_1$ — вибіркова характеристика асиметрії; $\widehat{\gamma}_2$ — вибіркова характеристика ексцесу; $\sigma_{\widehat{\gamma}_1}$ і $\sigma_{\widehat{\gamma}_2}$ — відповідні середньоквадратичні помилки.

Якщо одночасно виконуються нерівності

$$\left|\widehat{\gamma}_1\right| < 1{,}5\sigma_{\widehat{\gamma}_1}; \quad \left|\widehat{\gamma}_2 + \frac{6}{n+1}\right| < 1{,}5\sigma_{\widehat{\gamma}_2},$$

то гіпотеза про нормальний характер розподілу випадкового компонента приймається.

Якщо виконується хоча б одна з нерівностей

$$\left|\widehat{\gamma}_1\right| < 2\sigma_{\widehat{\gamma}_1}; \quad \left|\widehat{\gamma}_2 + \frac{6}{n+1}\right| \geq 2\sigma_{\widehat{\gamma}_2},$$

то гіпотеза про нормальний характер розподілу відкидається, трендова модель визнається неадекватною. Інші випадки вимагають додаткової перевірки за допомогою складніших критеріїв.

Відомі й інші методи перевірки нормальності закону розподілу випадкової величини, такі як метод Вестергарда, *RS*-критерій. Розглянемо найпростіший із них, що ґрунтується на ***RS*-критерії**. Цей критерій чисельно дорівнює відношенню розмаху варіації випадкової величини *R* до стандартного відхилення *S*. У нашому випадку $R = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min}$, а $S = S_{\widehat{y}} = \sqrt{\sum \varepsilon_t^2 / n-1}$. Обчислене значення *RS*-критерію порівнюють із табличними (критичними) нижньою і верхньою межами даного відношення і, якщо це значення не потрапляє в інтервал між критичними межами, то із заданим рівнем значущості гіпотезу про нормальність розподілу відкидають; у протилежному випадку цю гіпотезу приймають.

Для ілюстрації наведемо кілька пар значень критичних меж *RS*-критерію для рівня значущості $\alpha = 0{,}05$. Так, при $n = 10$ нижня межа дорівнює 2,67, а верхня — 3,685; при $n = 20$ ці значення становлять відповідно 3,18 і 4,49; при $n = 30$ вони дорівнюють 3,47 і 4,89.

Перевірку рівності математичного сподівання випадкового компонента нулю, якщо він розподілений за нормальним законом, виконують на основі *t*-критерію Стьюдента. Розрахункове значення цього критерію задається формулою

$$t = \frac{\overline{\varepsilon} - 0}{S_{\varepsilon}} \sqrt{n},$$

де $\overline{\varepsilon}$ — середнє арифметичне значення рівнів залишкової послідовності ε_t;

S_ε — стандартне (середньоквадратичне) відхилення для цієї послідовності.

Якщо розрахункове значення t менше від табличного значення t_α статистики Стьюдента із заданим рівнем значущості α і кількістю ступенів волі $n-1$, то гіпотеза про рівність нуля математичного сподівання випадкової послідовності приймається; у протилежному випадку ця гіпотеза відкидається і модель вважається неадекватною.

Перевірку незалежності значень рівнів випадкового компонента, тобто відсутності істотної автокореляції в залишковій послідовності, можна здійснювати за кількома критеріями, найбільш поширеним із яких є ***d*-критерій Дарбіна—Уотсона**. Розрахункове значення цього критерію визначається за формулою

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2}.$$

Зауважимо, що розрахункове значення критерію Дарбіна—Уотсона в інтервалі від 2 до 4 свідчить про від'ємний зв'язок; у цьому разі його потрібно перетворити за формулою $d' = 4 - d$ і надалі використовувати значення d'.

Розрахункове значення критерію d (чи d') порівнюється з верхнім d_2 і нижнім d_1 критичними значеннями статистики Дарбіна—Уотсона. Фрагмент відповідних табличних значень для різної кількості n рівнів ряду і різних заданих параметрів k моделі наведено в табл. 9.2 (рівень значущості 5 %).

Таблиця 9.2

n	$k=1$		$k=2$		$k=3$	
	d_1	d_2	d_1	d_2	d_1	d_2
15	1,08	1,36	0,95	1,54	0,82	1,75
20	1,20	1,41	1,10	1,54	1,00	1,68
30	1,35	1,49	1,28	1,57	1,21	1,65

Якщо розрахункове значення критерію d більше від верхнього табличного значення d_2, то гіпотеза про незалежність рівнів залишкової послідовності, тобто про відсутність у ній автокореляції, приймається. Якщо значення d менше від нижнього табличного значення d_1, то ця гіпотеза відкидається і модель неадекватна. Якщо значення d міститься між значеннями d_1 і d_2, включаючи самі ці значення, то вважається, що немає достатніх підстав для того чи іншого висновку, а тому необхідні подальші дослідження, наприклад за більшою кількістю спостережень.

Висновок про адекватність трендової моделі робиться, якщо *всі* зазначені чотири перевірки властивостей залишкової послідовності дають позитивний результат.

9.2.2. Точність аналізу

Для адекватних моделей є сенс ставити задачу щодо оцінювання їхньої ***точності***. Точність моделі характеризується значенням відхилення виходу моделі від реального значення модельованої змінної (економічного показника). Для показника, поданого часовим рядом, точність визначається як різниця між значенням фактичного рівня часового ряду і його оцінкою, здобутою розрахунковим шляхом з використанням моделі. При цьому як статистичні показники точності застосовуються:

середнє квадратичне відхилення

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n-k}\sum_{t=1}^{n}(y_t - \widehat{y}_t)^2},$$

середня відносна помилка апроксимації

$$\overline{\varepsilon}_{\text{відн}} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t - \widehat{y}_t}{y_t}\right| \cdot 100\%,$$

коефіцієнт збіжності

$$\varphi^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \widehat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y}_t)^2},$$

коефіцієнт детермінації

$$R^2 = 1 - \varphi^2.$$

У наведених формулах n — кількість рівнів ряду; k — кількість заданих параметрів моделі; $\hat{\gamma}_t$ — оцінка рівнів ряду за моделля, $\bar{y}$ — середнє арифметичне значення рівнів ряду.

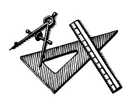
На підставі наведених показників можна з кількох адекватних трендових моделей економічної динаміки вибрати найточнішу, хоча може статися, що за деяким показником точніша одна модель, а за іншим — інша.

Ці показники точності моделей розраховуються на основі всіх рівнів часового ряду і тому відбивають лише точність апроксимації. Для оцінювання прогнозних властивостей моделі доцільно використовувати так званий ***ретроспективний прогноз.*** Він полягає у виділенні з вихідного часового ряду перевірної ділянки, що складається з останніх його рівнів у кількості, скажімо, n_2. Що ж до самої трендової моделі, то її в цьому разі варто будувати за першими точками, кількість яких $n_1 = n - n_2$. Тоді для розрахунку показників точності моделі за прогнозом застосовуються ті самі формули, але підсумовування в них виконуватиметься не за всіма, а лише за останніми n_2 спостереженнями. Наприклад, формула для середнього квадратичного відхилення матиме вигляд:

$$\sigma_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{n_2 - k} \sum_{t=n_1+1}^{n} \left(y_t - \hat{y}_t\right)^2},$$

де $\hat{\gamma}_t$ — значення рівнів ряду за моделлю, побудованою для перших n_1 рівнів.

Оцінювання прогнозних властивостей моделі на ретроспективній ділянці дуже корисне, особливо при зіставленні різних моделей прогнозування з-поміж адекватних. Проте слід пам'ятати, що оцінки ретропрогнозу — лише наближена міра точності прогнозу і моделі в цілому, оскільки прогноз на період передбачення робиться за моделлю, побудованою за всіма рівнями ряду.



Приклад 1. Для часового ряду, поданого в перших двох графах табл. 9.3, побудовано трендову модель у вигляді полінома першого степеня (лінійна модель):

$$\hat{\gamma}_t = 87{,}8 - 3{,}4t.$$

Оцінити адекватність і точність побудованої моделі.

Розв'язання. Спочатку побудуємо залишкову послідовність (ряд залишків), для чого від фактичних значень рівнів ряду віднімемо відповідні розрахункові значення за моделлю. Утворену залишкову послідовність наведено в графі 4 табл. 9.3.

Таблиця 9.3

t	Фактичне y_t	Розрахункове $\widehat{y}_t$	Відхилення ε_t	Точки піків	ε_t^2	$\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$	$(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2$	$\lvert\varepsilon_t\rvert : y_t \times$ $\times 100$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	85	84,4	0,6	—	0,36	—	—	0,71
2	81	81,0	0,0	1	0,00	– 0,6	0,36	0,00
3	78	77,6	0,4	1	0,16	0,4	0,16	0,49
4	72	74,1	– 2,1	1	4,41	– 2,5	6,25	2,69
5	69	70,7	– 1,7	0	2,89	0,4	0,16	2,46
6	70	67,3	2,7	1	7,29	4,4	19,36	3,86
7	64	63,8	0,2	1	0,04	–2,5	6,25	0,31
8	61	60,4	0,6	1	0,36	0,4	0,16	0,98
9	56	57,0	– 1,0	—	1,00	–1,6	2,56	1,79
45	636	636,3	– 0,3	6	15,51		35,26	13,29

Перевірку випадковості рівнів ряду залишків проведемо згідно з критерієм піків (точок повороту). Точки піків зазначено в графі 5 табл. 9.3; їхня кількість дорівнює шести $(p = 6)$. Права частина нерівності $p > \left[\overline{p} - 1{,}96\sqrt{\sigma_p^2}\right]$ дорівнює в цьому разі 2, тобто ця нерівність виконується. Отже, властивість випадковості ряду залишків підтверджується.

Результати попередньої перевірки дають змогу перевірити відповідність залишкової послідовності нормальному закону розподілу. Скористаємося *RS*-критерієм. У нашому випадку розмах варіації $R = \varepsilon_{\max} - \varepsilon_{\min} = 2{,}7 - (-2{,}1) = 4{,}8$, а середнє квадратичне відхилення $S_{\hat{y}} = \sqrt{\varepsilon_t^2 : (n-1)} = \sqrt{15{,}51 : 8} = 1{,}39$. Отже, критерій $RS = 4{,}8 : 1{,}39 = 3{,}45$, і це значення потрапляє в інтервал між нижньою і верхньою межами табличних значень даного критерію (ці межі для $n = 10$ і рівня значущості $\alpha = 0{,}05$ дорівнюють відповідно 2,7 і 3,7). Звідси доходимо висновку, що властивість нормальності розподілу виконується.

Переходячи до перевірки рівності (близькості) нулю математичного сподівання ряду залишків, помічаємо, що за результатами обчислень у табл. 9.3 це математичне сподівання дорівнює (– 0,3): 9 ≈ – 0,03, а отже, можна підтвердити виконання даної властивості, не вдаючись до статистики Стьюдента.

Для перевірки незалежності рівнів ряду залишків (відсутності автокореляції) обчислимо значення критерію Дарбіна—Уотсона. Результати розрахунків, наведені в графах 6, 7, 8 табл. 9.3, дають таке значення цього критерію: d = 35,26: 15,51 = 2,27. Це значення перевищує 2, що свідчить про від'ємну автокореляцію, тому критерій Дарбіна—Уотсона необхідно перетворити: $d' = 4 - d = 4 - 2{,}27 = 1{,}73$. Дане значення порівнюємо з двома критичними табличними значеннями критерію, які для лінійної моделі в нашому випадку можна взяти такими: $d_1 = 1{,}08$ і $d_2 = 1{,}36$. Оскільки розрахункове значення потрапляє в інтервал від d_2 до 2, то доходимо висновку про незалежність рівнів залишкової послідовності.

Зі сказаного випливає, що залишкова послідовність задовольняє всі властивості випадкового компонента часового ряду, а отже, побудована лінійна модель є адекватною.

Для характеристики точності моделі скористаємося показником середньої відносної помилки апроксимації: $\bar{\varepsilon}_{\text{отн}} = 13{,}29 : 9 = 1{,}48\ (\%)$. Це значення засвідчує достатньо високий рівень точності побудованої моделі (помилка менш як 5 % розглядається як задовільний рівень точності; помилка в 10 і більш відсотків вважається дуже великою).

9.3. Прогнозування економічної динаміки

9.3.1. *Основні поняття*

Прогнозування економічних показників на основі трендових моделей, як і більшість інших методів економічного ґрунтується на ідеї екстраполяції. Як уже зазначалося, під екстраполяцією звичайно розуміють поширення закономірностей, зв'язків і співвідношень, що діють у досліджуваному періоді, за його межі. У ширшому розумінні її розглядають як створення уявлень про майбутнє на підставі інформації, що стосується до минулого і сьогодення. У процесі побудови прогнозних моделей у їхню структуру іноді закладаються елементи майбутнього передбачуваного стану об'єкта чи явища, але в цілому ці моделі відбивають закономірності, що спостерігаються в минулому і сьогоденні, тому вірогідний прогноз можливий лише щодо таких об'єктів і явищ, які значною мірою детермінуються минулим і сьогоденням.

Існують дві основні форми детермінації: внутрішня і зовнішня. Внутрішня детермінація, або самодетермінація, більш стійка, її простіше ідентифікувати з використанням математичних моделей. Зовнішня детермінація визначається великою кількістю факторів, тому врахувати їх усіх практично неможливо. Якщо деякі методи моделювання, наприклад адаптивні, відбивають загальний сукупний вплив на економічну систему зовнішніх факторів, тобто відбивають зовнішню детермінацію, то методи, що базуються на використанні трендових моделей економічних процесів, поданих одновимірними часовими рядами, відбивають внутрішню детермінацію об'єктів і явищ.

При екстраполяційному прогнозуванні економічної динаміки на основі часових рядів виконуються такі основні етапи:

1) попередній аналіз даних;
2) формування набору моделей (наприклад, набору кривих зростання), які називають ***функціями-кандидатами***;
3) чисельне оцінювання параметрів моделей;
4) визначення адекватності моделей;
5) оцінювання точності адекватних моделей;
6) вибір кращої моделі;
7) побудова точкового та інтервального прогнозів;
8) верифікація прогнозу.

9.3.2. *Точковий та інтервальний прогноз*

Прогноз на підставі трендових моделей (кривих зростання) містить два елементи: точковий і інтервальний прогнози.

Означення. ***Точковий прогноз*** — це прогноз, згідно з яким подається єдине значення прогнозованого показника.

Це значення визначається підставленням у рівняння вибраної кривої зростання значення часу t, що відповідає періоду спостередження: $t = n + 1$; $t = n + 2$ і т. д. Такий прогноз називається точковим, оскільки на графіку його можна зобразити у виді точки.

Очевидно, що точний збіг фактичних даних у майбутньому і прогностичних точкових оцінок малоймовірний. Тому точковий прогноз має супроводжуватися двосторонніми межами, тобто зазначенням інтервалу значень, в якому з достатньою впевненістю можна очікувати на появу прогнозованої величини. Установлення такого інтервалу називається ***інтервальним прогнозом***.

Інтервальний прогноз на базі трендових моделей здійснюється шляхом розрахунку ***надійного інтервалу***.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Надійним інтервалом*** називається інтервал, в якому з визначеною ймовірністю можна очікувати на появу фактичного значення прогнозованого економічного показника.

Розрахунок надійних інтервалів при прогнозуванні з використанням кривих зростання спирається на висновки та формули теорії регресій. Перенесення висновків теорії регресій на часові економічні ряди не зовсім правомірне, оскільки динамічні ряди відрізняються від статистичних сукупностей. Тому до оцінювання надійних інтервалів для кривих зростання варто підходити з відомою часткою обережності.

Методи, розроблені для статистичних сукупностей, дають змогу визначити надійний інтервал, що залежить від стандартної помилки оцінки прогнозованого показника, часу складання прогнозу, кількості рівнів у часовому ряді та рівня значущості (помилки) прогнозу.

Стандартна (середня квадратична) помилка оцінки прогнозованого показника $S_{\hat{y}}$ визначається за формулою:

$$S_{\hat{y}} = \sqrt{\frac{\sum (y_t - \hat{y}_t)}{n-k}},$$

де y_t — фактичне значення рівня часового ряду для часу *t;* $\hat{y}_t$ — розрахункова оцінка відповідного показника за моделлю (наприклад, за рівнянням кривої зростання); *n* — кількість рівнів у вихідному ряді; *k* — кількість параметрів моделі.

У разі прямолінійного тренду для розрахунку надійного інтервалу можна використовувати аналогічну формулу для парної регресії. Тоді надійний інтервал прогнозу

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\varepsilon S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{3(n+2L-1)^2}{n(n^2-1)}},$$

де L — період передбачення; $\hat{y}_{n+L}$ — точковий прогноз за моделлю на $(n+L)$-й момент часу; *n* — кількість спостережень у часовому ряді; $S_{\hat{y}}$ — стандартна помилка оцінки прогнозованого показника, розрахована раніше наведеною формулою для кількості параметрів моделі, що дорівнює двом; t_α — табличне значення критерію Стьюдента для рівня значущості α і для кількості ступенів волі, що дорівнює $n-2$.

Формулу для надійного інтервалу

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm S_{\hat{y}} K.$$

Значення K для оцінювання надійних інтервалів прогнозу щодо лінійного тренду табульовано. Фрагмент такої таблиці для рівня значущості $\alpha = 0{,}20$ наведено в табл. 9.4.

Таблиця 9.4

Кількість n рівнів у ряді	Період передбачення L					
	1	2	3	4	5	6
7	1,932	2,106	2,300	2,510	2,733	2,965
10	1,692	1,774	1,865	1,964	2,069	2,180
13	1,581	1,629	1,682	1,738	1,799	1,863
15	1,536	1,572	1,611	1,653	1,697	1,745

Іноді для розрахунку надійних інтервалів прогнозу щодо лінійного тренду застосовують наведену раніше формулу в перетвореному вигляді:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(t_L - \bar{t})^2}{\sum (t - \bar{t})^2}}.$$

Тут t — порядковий номер рівня ряду $(t = 1, 2, ..., n)$; $t_L = n + L$ — час, для якого робиться прогноз; $\bar{t}$ — час, що відповідає середині періоду спостережень для вихідного ряду, наприклад, $\bar{t} = (n+1):2$; підсумовування ведеться за всіма спостереженнями.

Цю формулу можна спростити, якщо, як часто робиться на практиці, перенести початок відліку часу на середину періоду спостережень $(\bar{t} = 0)$:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum t^2}}.$$

Формула для розрахунку надійних інтервалів прогнозу стосовно тренду, що має вигляд полінома другого чи третього порядку, набирає такого вигляду:

$$U_y = \hat{y}_{n+L} \pm t_\alpha S_{\hat{y}} \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{t_L^2}{\sum t^2} + \frac{\sum t^4 - 2t_L^2 \sum t^2 - nt_L^4}{n\sum t^4 - \left(\sum t^2\right)^2}}.$$

Аналогічно обчислюються надійні інтервали для експонентної кривої зростання, а також для зростання, що мають асимптоту (модифікована експонента, крива Гомперца, логістична крива), якщо значення асимптоти відоме.

Зауваження. Незважаючи на громіздкість деяких формул, розрахунок точкових та інтервальних прогнозів на основі трендових моделей у формі кривих зростання технічно є до простою процедурою. Проте не слід надто захоплюватися технічною простотою процедури екстраполяції і намагатися заглянути занадто далеко — це неминуче призведе до грубих помилок. Оптимальна довжина періоду передбачення визначається окремо для кожного економічного явища з урахуванням статистичного коливання досліджуваних даних на основі змістовного судження про стабільність явища. Ця довжина для рядів річних спостережень однієї, як правило, не перевищує третини обсягу даних, а для квартальних і місячних рядів — двох років.

При вирівнюванні часових рядів з використанням кривих зростання потрібно розв'язувати питання про те, якої довжини має бути ряд, вибраний для прогнозування. Очевидно, що коли період ряду економічної динаміки занадто короткий, можна не знайти тенденції його розвитку. Проте дуже тривалий часовий ряд може охоплювати періоди з різними трендами, і його опис за допомогою однієї кривої зростання не дасть позитивних результатів. Тому рекомендовано діяти так:

якщо немає ніяких міркувань якісного порядку, варто брати якомога більший проміжок часу;

якщо розвиток має циклічний характер, варто брати період від середини першого до середини останнього періоду циклу;

якщо ряд охоплює періоди з різними трендами, краще скоротити ряд, відкинувши найбільш ранні рівні, що стосуються періоду з іншою тенденцією розвитку.

9.3.3. Верифікація прогнозу

При екстраполяційному прогнозуванні економічної динаміки з використанням трендових моделей дуже важливим є заключний етап — **верифікація прогнозу.**

ОЗНАЧЕННЯ. ***Верифікація*** зводиться до зіставлення розрахункових результатів за моделлю з відповідними даними дійсності — масовими фактами та закономірностями економічного розвитку. Верифікація прогнозної моделі являє собою сукупність критеріїв, способів і процедур, що дають змогу на основі всебічного аналізу оцінювати якість одержуваного прогнозу. Проте найчастіше на етапі верифікації передусім оцінюється метод прогнозування, за допомогою якого було здобуто результат, а не якість самого результату. Це пов'язано з тим, що досі не знайдено ефективного підходу до оцінювання якості прогнозу до його реалізації.

Навіть у тих випадках, коли прогноз не справдився, не можна категорично стверджувати, що він був марний, оскільки користувач, якщо він хоча б частково контролює хід подій і може впливати на економічний процес, може використовувати прогнозну інформацію в бажаний для себе спосіб. Так, одержавши прогноз подій, що визначають небажаний напрям перспективного розвитку, користувач може вжити заходів, щоб прогноз не справдився; такий прогноз називається ***самодеструктивним***. Якщо прогноз пророкував перебіг подій, що влаштовує користувача, то він може використовувати свої можливості для підвищення ймовірності правильного прогнозу; такий прогноз називається *саморегулювальним.* Таким чином, показником цінності прогнозу є не тільки його ймовірність, а й корисність для користувачів.

Про точність прогнозу прийнято судити за розміром помилки прогнозу — різниці між фактичним значенням досліджуваного показника і його прогнозним значенням. Очевидно, що визначити зазначену різницю можна лише в двох випадках: або якщо період передбачення вже закінчився і відоме фактичне значення прогнозованого показника (відома його реалізація), або якщо прогнозування здійснювалося для деякого моменту часу в минулому, для якого відомі фактичні дані.

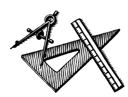
У другому із зазначених випадків інформація поділяється на дві частини. Частина, що охоплює більш ранні дані, слугує для оцінювання параметрів прогностичної кривої зростання, інша, більш пізня, розглядається як реалізація прогнозу. Отримані в такий спосіб помилки прогнозу якоюсь мірою характеризують точність застосовуваної методики прогнозування.

Перевірка точності одного прогнозу недостатня для оцінювання якості прогнозування, оскільки вона може бути результатом випадкового збігу. Найбільш простою мірою якості прогнозів за умови, що існують дані про їх реалізацію, є відношення кількості випадків, коли фактична реалізація охоплювалася інтервальним прогнозом, до загальної кількості прогнозів. Таку міру якості прогнозів k можна обчислити за формулою

$$k = \frac{p}{p+q},$$

де p — кількість прогнозів, підтверджених фактичними даними; q — кількість прогнозів, не підтверджених фактичними даними.

Проте у практичній роботі проблему якості прогнозів найчастіше доводиться розв'язувати, коли період передбачення ще не закінчився і фактичне значення прогнозованого показника невідоме. У цьому разі більш точною вважається модель, що дає вужчі надійні інтервали прогнозу. На практиці не завжди вдається відразу побудувати достатньо добру модель прогнозування, тому описані в цьому підрозділі побудови трендових моделей економічної динаміки виконуються неодноразово.



Приклад 2. Нехай для тимчасового ряду, наведеного в табл. 9.3, потрібно дати прогноз на два кроки вперед (t = 10 і t = 11) на основі адекватної лінійної моделі $\hat{y}_t = 87{,}8 - 3{,}4t$.

Розв'язання. Точкові прогнози дістаємо, підставляючи в рівняння моделі значення $t = 10$ і $t = 11$:

$$\hat{y}_{10} = 87{,}8 - 3{,}4 \cdot 10 = 53{,}8;$$

$$\hat{y}_{11} = 87{,}8 - 3{,}4 \cdot 11 = 50{,}4.$$

При розрахунку надійних інтервалів прогнозу візьмемо до уваги, що в процесі розв'язування згаданої задачі попереднього підрозділу було знайдено значення середньої квадратичної помилки оцінки прогнозованого показника $S_{\hat{y}} = 1{,}39$, а значення величини K для ряду з дев'яти рівнів можна дістати для рівня значущості $\alpha = 0{,}20$ з табл. 9.4 шляхом лінійної інтерполяції наведених значень при $n = 7$ і $n = 10$: для $t = 10$ $(L = 1)$ $K = 1{,}77$; для $t = 11(L = 2)$ K = 1,88. Результати розрахунку наведено в табл. 9.5.

Таблиця 9.5

Час t	Крок L	Точковий прогноз $\hat{y}_{n+L}$	Надійний інтервал прогнозу	
			Нижня межа	Верхня межа
10	1	53,8	51,3	56,3
11	2	50,4	47,8	53,0

Оскільки модель, на основі якої здійснювався прогноз, визнано адекватною, то з узятим рівнем значущості 0,20, тобто з надійною ймовірністю 0,80 (або 80 %) можна стверджувати, що при збереженні сформованих закономірностей розвитку прогнозована величина потрапить в інтервал, утворений нижньою і верхньою межами.

9.4. Адаптивні моделі прогнозування

9.4.1. *Основні поняття*

ОЗНАЧЕННЯ. ***Адаптивними моделями прогнозування*** називаються моделі дисконтування даних, здатні швидко пристосовувати свою структуру і параметри до зміни умов. Інструментом прогнозу в адаптивних моделях, як і в кривих зростання, є математична залежність від часу.

При оцінюванні параметрів адаптивних моделей на відміну від розглянутих раніше моделей кривих зростання спостереженням (рівням ряду) присвоюються різні ваги залежно від того, наскільки сильним визнається їхній вплив на поточний рівень. Це дає змогу враховувати зміни в тенденції, а також будь-які коливання, в яких відстежується закономірність. Усі адаптивні моделі базуються на двох схемах: **ковзного середнього (СС-моделі) і авторегресій (АР-моделі).**

Відповідно до схеми ковзного середнього оцінкою поточного рівня є зважене середнє всіх попередніх рівнів, причому ваги при спостереженнях спадають із видаленням від останнього рівня, тобто інформаційна цінність спостережень визнається тим більшою, ніж ближчі вони до кінця інтервалу спостережень. Такі моделі добре відбивають зміни, що відбуваються в тенденції, але в чистому вигляді не дають змоги відстежувати коливання.

Реакція на помилку прогнозу і дисконтування рівнів часового ряду в моделях, що базуються на схемі СС, визначається за допомогою параметрів згладжування (адаптації), значення яких можуть змінюватися від нуля до одиниці. Високе значення цих параметрів (понад 0,5) означає надання більшої ваги останнім рівням ряду, а низьке (менш 0,5) — попереднім спостереженням. Перший випадок відповідає швидкозмінюваним динамічним процесам, другий — більш стабільним.

В авторегресійній схемі оцінкою поточного рівня є зважена сума не всіх, а кількох попередніх рівнів, при цьому вагові коефіцієнти при спостереженнях не ранжовані. Інформаційна цінність спостережень визначається не їхньою близькістю до модельованого рівня, а тіснотою зв'язку між ними.

Загальну схему побудови адаптивних моделей можна подати в такий спосіб. За кількома першими рівнями ряду оцінюються значення параметрів моделі. За наявною моделлю будується прогноз на один крок уперед, причому його відхилення від фактичних рівнів ряду розцінюється як помилка прогнозування, що враховується відповідно до прийнятої схеми коригування моделі. Далі за моделлю зі скоригованими параметрами розраховується прогнозна оцінка на наступний момент часу і т. д. Таким чином, модель постійно «вбирає» нову інформацію і до кінця періоду навчання відбиває тенденцію розвитку процесу, що існує в даний момент.

У практиці статистичного прогнозування найчастіше використовуються дві базові СС-моделі — Брауна і Хольта, які подають процес розвитку як лінійну тенденцію з постійно змінюваними параметрами.

9.4.2. *Модель Брауна (модель експонентного згладжування)*

Модель Брауна може відбивати розвиток у вигляді не тільки лінійної тенденції, а й випадкового процесу, що не має тенденції, або у вигляді параболічної тенденції, що змінюється. Відповідно розрізняють моделі Брауна:

- ***нульового порядку,*** що описує процеси, які не мають тенденції розвитку. Ця модель має один параметр A_0 (оцінка поточного рівня). Прогноз розвитку на k кроків уперед здійснюється відповідно до формули $Y(t+k)=A_0$. Така модель також називається «наївною» («буде, як було»);
- ***першого порядку*** $\left(Y(t+k)=A_0+A_1^*k\right)$. Коефіцієнт A_0 — значення, близьке до останнього рівня, що являє собою, так би мовити, закономірну складову цього рівня. Коефіцієнт A_1 визначає приріст, що сформувався в основному до кінця періоду спосте-

режень, але відбиває також (щоправда, меншою мірою) швидкість зростання на більш ранніх етапах;

• ***другого порядку,*** що відбиває розвиток у вигляді параболічної тенденції зі змінювальними «швидкістю» і «прискоренням». Вона має три параметри (A_2 — оцінка поточного приросту, або «прискорення»). Прогноз здійснюється за формулою: $Y(t+k) = A_0 + A_1 k + A_2 k^2$.

Порядок моделі звичайно визначають або апріорно на основі візуального аналізу графіка процесу (чи існує тренд і чи близький він до лінійної функції), знань законів розвитку характеру зміни досліджуваного явища або методом спроб — порівнянням статистичних характеристик моделей різного порядку на ділянці ретроспективного прогнозування.

Алгоритм побудови лінійної адаптивної моделі Брауна

1. За першими п’ятьма точками часового ряду оцінюємо початкові значення A_0 і A_1 параметрів моделі за допомогою методу найменших квадратів для лінійної апроксимації:

$$Y_p(t) = A_0 + A_1 t\,(t = 1,\ 2,\ ...,\ 5).$$

2. Із використанням параметрів A_0 і A_1 за моделлю Брауна знаходимо прогноз на один крок $(k = 1)$:

$$Y_p(t,\ k) = A_0(t) + A_1(t)k.$$

3. Розрахункове значення $Y_p(t,\ k)$ економічного показника порівнюємо з фактичним $Y(t)$ і обчислюємо значення їхньої розбіжності (помилки). При $k = 1$ маємо:

$$\mathrm{e}(\mathrm{t}+1) = Y(t+1) - Y_p(t,\ 1).$$

4. Відповідно до цього значення коригуємо параметри моделі. У моделі Брауна модифікація здійснюється в такий спосіб:

$$A_0(t) = A_0(t-1) + A_1(t-1) + (1-\beta)^2 e(t);$$
$$A_1(t) = A_1(t-1) + (1-\beta)^2 e(t),$$

де β — коефіцієнт дисконтування даних, змінюваний у межах від 0 до 1 $(\alpha + \beta = 1)$, що характеризує знецінення даних за одиницю часу й відбиває ступінь довіри більш пізнім спостереженням. Оптимальне значення β знаходимо ітеративним шляхом, тобто багаторазовою побудовою моделі при різних β і вибором найкращої, або за формулою:

$$\beta = (N-3)/(N-1),$$

де N — довжина часового ряду, α — параметр згладжування $(\alpha = 1-\beta)$;

$e(t)$ — помилка прогнозування рівня $Y(t)$, обчислена в момент часу $(t-1)$ на один крок уперед.

5. За моделлю зі скоригованими параметрами A_0 і A_1 знаходимо прогноз на наступний момент часу. Повертаємось до п. 3, якщо $t < N$.

Якщо $t = N$, то побудовану модель можна використовувати для прогнозування на майбутнє.

6. Інтервальний прогноз будуємо як для лінійної моделі кривої зростання.

У моделях Брауна і Хольта параметри згладжування характеризують ступінь адаптації моделі до зміни ряду спостережень. Вони визначають швидкість реакції моделі на зміни, що відбуваються в розвитку. Чим значення цих параметрів більші, тим швидше реагує модель на зміни. Звичайно для стійких рядів їхні значення великі, а для нестійких — малі. У різних методах прогнозування використовується різний підхід до визначення цих параметрів. Їх можна взяти фіксованими, а найдоцільніше значення визначити методом добору, щоб помилка прогнозу на один крок уперед була найменшою. У разі використання комп'ютера це не становить труднощів.

Альтернативу цьому підходу становить динамічна зміна параметрів згладжування. У методах еволюції та симплекс-планування параметри адаптації змінюються на кожному кроці. Для кожного параметра згладжування формується кілька значень.

9.4.3. *Моделі і методи авторегресії*

В авторегресійних (АР) моделях поточне значення процесу подається як лінійна комбінація попередніх його значень і випадкового компонента.

Ідентифікація АР моделі полягає у визначенні її порядку *p*. Однією з передумов побудови моделей цього типу є застосування їх до стаціонарного процесу. Тому в більш широкому сенсі ідентифікація моделі передбачає також вибір способу трансформації вихідного ряду спостережень, що, як правило, має деяку тенденцію у стаціонарний (чи близький до нього) ряд. Один з найпоширеніших способів розв'язання цієї проблеми — послідовне взяття різниць, тобто перехід від вихідного ряду до ряду перших, а потім і других різниць.

«Чисті» авторегресійні процеси мають плавно загасаючу автокореляційну функцію (АКФ). У цьому разі як порядок моделі вибирається лаг, після якого всі частки автокореляційних функції (ЧАКФ) мають незначну величину. Але на практиці рідко трапляються процеси, які легко було б ідентифікувати. Тому порядок моделі звичайно визначається методом спроб із кількох альтернатив. З-поміж кандидатів розглядаються моделі, в яких порядок відповідає ЧАКФ, що перевищує стандартне відхилення $1/N$. При обробці різницевих рядів іноді орієнтуються на АКФ, вибираючи моделі, в яких порядок відповідає максимальному значенню АКФ, за умови, що воно перевищує стандартне відхилення.

Ряди без тенденції не цікавлять економістів. АР-моделі взагалі не призначені для опису процесів з тенденцією, однак вони добре описують коливання, що дуже важливо для відображення розвитку хитливих показників.

Щоб уможливити застосування АР-моделей до процесів із тенденцією, на першому кроці формують стаціонарний ряд, тобто виключають тенденцію шляхом переходу від вихідного часового ряду до ряду $Z(t)$ $(t=1, 2, ..., N-d)$ перших чи других різниць (d = 1 або 2):

$$\begin{aligned} &Z(t)=Y(t), && t=1, 2, ..., N \text{ при } && d=0; \\ &Z(t)=Y(t+1)-Y(t), && t=1, 2, ..., N-1 \text{ при } && d=1; \\ &Z(t)=Z(t+1)-Z(t), && t=1, 2, ..., N-2 \text{ при } && d=2. \end{aligned}$$

Параметри цієї моделі обчислюються за МНК з урахуванням складності моделі або методом адаптивної фільтрації (МАФ). В обох випадках необхідно попередньо ідентифікувати модель, тобто правильно визначити порядок різницевого ряду d і порядок моделі p.

Найпростішим способом визначення найбільш придатного різницевого ряду є обчислення для кожного ряду (d = 0, 1, 2) його дисперсії, тобто усередненої суми квадратів розбіжностей його рівнів із середнім значенням $Z_{\text{ср}}$. Для подальшої обробки вибирається ряд, в якого значення цього показника мінімальне.

Для ідентифікації порядку моделі звичайно використовується автокореляційна функція, значення якої визначаються за формулою:

$$r(m) = \sum_{t=1}^{n-m}\left\{\left(Z(t) - Z_{\text{ср}}\right)\left(Z(t-m) - Z_{\text{ср}}\right)\right\} \Big/ \sum_{t=1}^{n}\left(Z(t) - Z_{\text{ср}}\right)^2,$$

де n — кількість рівнів стаціонарного ряду $(n = N - d)$;

m — номер коефіцієнта автокореляції $(m < n/3)$.

Як порядок моделі береться номер коефіцієнта автокореляції $r(m)$, який має максимальне значення. Отже, у моделі використовуються p рівнів, що найбільше впливають на поточний рівень. Відповідно до МНК формується система з p рівнянь, що в компактній формі має вигляд:

$$\sum_{t=p+1}^{n} Z(t-j)\left(Z(t) - \sum_{j=1}^{p} A_j Z(t-j)\right) = 0 .$$

Наприклад, для $p = 2$ система набирає вигляду:

$$A_1 \sum Z(t-1)^2 + A_2 \sum Z(t-1)Z(t-2) = \sum Z(t-1)Z(t),$$

$$A_1 \sum Z(t-1)Z(t-2) + A_2 \sum Z(t-2)^2 = \sum Z(t-2)Z(t).$$

У ній підсумовування проводиться за t у межах від 3 до $n = N - d$.

Розв'язавши цю систему рівнянь, дістають числове значення A_1, A_2, ..., A_p. Оцінка вільного члена випливає зі співвідношення:

$$A_0 = Z_{\text{ср}}\left[1 - \left(A_1 + A_2 + \ldots + A_p\right)\right].$$

На основі побудованої моделі обчислюють прогнозне значення різницевого ряду $Z(n+k)$ на k кроків уперед, а від нього переходять до прогнозної оцінки вихідного ряду.

Так, для $d = 1$ маємо:

$$Y(N+1) = Y(N) + Z(n+1) \quad \text{при} \quad k = 1,$$
$$Y(N+2) = Y(N+1) + Z(n+2) \quad \text{при} \quad k = 2.$$

Отже, прогнозні оцінки базуються як на фактичних, так і на здобутих прогнозних рівнях ряду. Надійний інтервал прогнозу розраховується на основі точкового прогнозу:

верхня межа прогнозу дорівнює $Z(N+k) + U(k)$,

нижня границя прогнозу дорівнює $Z(N+k) - U(k)$.

Значення $U(k)$ розраховується за формулою:

$$U(k) = S_{\hat{y}} t_{\alpha} \sqrt{\sum_{j=0}^{k-1} C(j)^2},$$

де $S_{\hat{y}}$ — СКО, обчислене з урахуванням складності АР-моделі; t_{α} — коефіцієнт, що відповідає табличному значенню статистики Стьюдента з вибраним рівнем значущості α; коефіцієнт під квадратним коренем розраховується рекурентно, причому при $j = 0$ значення $C(0) = 1$, а при $j > 0$

$$C(j) = \sqrt{A_1 C(j-1) + A_2 C(j-2) + \ldots + A_p (j-p)}.$$

У методі адаптивної фільтрації використовується АР-модель без вільного члена. Її параметри коригуються на j-й ітерації в кожний момент часу t у такий спосіб:

$$A(t,i) = A(t-1,\, i) - 2we(t)Z(t-i),$$

де $A(t,i)$ і $A(t-1,\, i)$ — вектори нових і старих значень параметрів (ваг) моделі;

w — константа навчання, що визначає швидкість адаптації параметрів моделі $(w > 0)$;

$e(t)$ — помилка прогнозування рівня $Y(t)$.

Алгоритм побудови моделі прогнозування

1. На першій ітерації $(j = 1)$ на основі початкового набору ваг і перших p рівнів ряду обчислюється $Z_p(t)$ і його розбіжність із фактичним рівнем, тобто $e(t) = Z(t) - Z_p(t)$, $t = p + 1$. Підставляючи значення помилки в рівняння коригування ваг, дістають новий набір ваг для наступного моменту часу $t = p + 2$.

2. Ця процедура повторюється для наступних p наборів $Z(t-i)$ $(i = 1, \ldots, p;\ t = p + 2, \ldots, n)$, кожний з який утворено з попереднього виключенням першого і додаванням одного нового рівня ряду.

3. Якщо на ітерації j оптимальні ваги не знайдено, то на наступній ітерації потрібно повернутися до першого набору рівнів ряду $Z(p+1-i)$ $(i=1, ..., p)$, але вже з новими початковими вагами, узятими від попередньої ітерації.

Початкові ваги визначаються розв’язанням рівняння Юла—Уокера, складеного на основі коефіцієнтів автокореляції. Процедура коригування параметрів закінчується, коли середньоквадратична помилка перестає істотно спадати або при досягненні заданої максимальної кількості ітерацій.

Питання для самоперевірки

1. У чому суть прогнозування економічних процесів на основі методу екстраполяції?
2. Дайте характеристику основних типів кривих зростання, найчастіше використовуваних при побудові трендових моделей прогнозування.
3. Назвіть методи попереднього вибору кривої зростання. Як відшукуються параметри цих кривих?
4. Як оцінювання адекватність трендових моделей? Які статистичні критерії при цьому використовуються?
5. Назвіть статистичні критерії оцінювання точності моделей прогнозування в економіці.
6. Перелічіть основні етапи прогнозування економічної динаміки на основі одновимірних часових рядів із використанням трендових моделей.
7. Опишіть порядок одержання точкового і інтервального прогнозу економічного показника на основі трендових моделей. Від яких факторів залежить ширина надійного інтервалу прогнозу?
8. Поясніть сутність адаптивних методів прогнозування. Які типи адаптивних моделей ви знаєте?
9. Назвіть етапи побудови і використання адаптивної моделі Брауна. Як впливає параметр згладжування на швидкість адаптації моделей цього типу до змін у прогнозованому процесі?
10. Дайте коротку характеристику авторегресійних моделей прогнозування. Для яких економічних процесів застосовні методи авторегресії?

Вправи для самостійного розв'язування

1. Часовий ряд задано таблицею:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_t	43	47	50	48	54	57	61	59	65	62

Зробіть попередній вибір найкращої кривої зростання:

а) методом скінченних різниць (Тінтнера);

б) методом характеристик приросту.

2. Для ряду, наведеного у вправі 1, побудуйте лінійну модель $\widehat{y}_t = a_0 + a_1 t$, визначивши її параметри методом найменших квадратів;

3. Для часового ряду з вправи 1 побудуйте адаптивну модель Брауна з параметром згладжування $\alpha = 0{,}4$ і $\alpha = 0{,}7$; виберіть найкращу модель Брауна $\widehat{y}(k) = a_0 + a_1 k$, де k — період попередження (кількість кроків уперед).

4. Оцініть адекватність моделей, побудованих у вправах 2 і 3, на основі дослідження:

а) близькості математичного сподівання залишкового компонента нулю; критичне значення статистики Стьюдента взяти $t_\alpha = 1{,}09$ (для надійної імовірності 0,70);

б) випадковості відхилень залишкового компонента за критерієм піків;

в) незалежності (відсутності автокореляції) рівнів ряду залишків або за критерієм Дарбіна—Уотсона (як критичні використовуйте рівні $d_1 = 1{,}08$ і $d_2 = 1{,}36$), або за першим коефіцієнтом автокореляції (за критичний рівень візьміть $r_1 = 0{,}36$);

г) нормальності закону розподілу залишкового компонента на основі *RS*-критерію (як критичні рівні візьміть інтервал 2,7—3,7).

5. Оцініть точність моделей, побудованих у вправах 2 і 3, використовуючи показники середнього квадратичного відхилення і середньої відносної помилки апроксимації.

6. На основі порівняльного аналізу адекватності і точності моделей за результатами вправ 4 і 5 виберіть найкращу модель, за якою побудуйте точковий та інтервальний прогнози на два кроки вперед $(t_\alpha = 1{,}09)$. Результати прогнозування подайте графічно.

РОЗДІЛ 10

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ РИНКОВОЇ ЕКОНОМІКИ

У цьому розділі розглядаються різні підходи до прогнозування та регулювання ринкової економіки, зокрема прогнозування фінансових ризиків і валютних криз, що нині вкрай актуально.

10.1.Класичний аналіз ринкової економіки

10.1.1. Основні поняття

Аналіз ринкової економіки можна звести до аналізу системи взаємозалежних моделей, кожна з який виражає поводження одного з трьох ринків: ***робочої сили, грошей і товарів.***

1. Ринок робочої сили

Ринок робочої сили, як і інші, описується за допомогою трьох залежностей: функції попиту, функції пропозиції та умови рівноваги. У класичній моделі функція попиту на робочу силу виводиться з двох гіпотез:

1) фірми цілком конкурентні при пропозиції товарів і найманні робочої сили;

2) за інших однакових умов граничний продукт праці знижується зі зростанням робочої сили.

Із цих гіпотез випливає, що в стані рівноваги граничний продукт праці у вартісному виразі дорівнює ставці заробітної плати w:

$$p\frac{\partial F}{\partial L} = w\,, \qquad (10.1)$$

де p — ціна продукту; $F = F\,(K, L)$, при цьому K — капітал, L — кількість зайнятих.

Справді, якби це було не так, скажімо, $p\frac{\partial F}{\partial L} > w,$ то фірми намагалися б збільшити найм, оскільки з кожною додатковою одиницею праці одержували б прибуток $p\frac{\partial F}{\partial L} - w$; а якщо $p\frac{\partial F}{\partial L} < w,$ то фірми зазнають збитків, тому намагаються скоротити найм.

Зі співвідношення (10.1), а отже, із гіпотез 1 і 2, випливає, що зі зниженням ставки заробітної плати граничний продукт також зменшується доти, доки знову не буде досягнуто рівноваги.

Доведемо це строго математично.

Позначимо через П прибуток, тоді за припущення, що всі фактори виробництва, крім праці, фіксовані, дістанемо:

$$\Pi = p\mathrm{F}(K, L) - wL - rK, \tag{10.2}$$

необхідна умова максимуму прибутку:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial L} = p\frac{\partial F}{\partial L} - w = 0,$$

але оскільки

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial L^2} = p\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0,$$

то справді умова (10.1) — це умова максимуму прибутку.

Перепишемо співвідношення (10.1) у вигляді

$$\frac{\partial F}{\partial L} = \frac{w}{p}$$

і продиференціюємо його за реальною заробітною платою $\frac{w}{p}$:

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial L^2}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial (w/p)}\right) = 1.$$

Оскільки $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$, то $\frac{\partial L}{\partial (w/p)} < 0$, тобто з підвищенням реальної заробітної плати попит на робочу силу знижується.

Пропозиція робочої сили також є функцією реальної заробітної плати. Приймається постулат: *чим більша реальна заробітна плата, тим більша пропозиція робочої сили*.

Ці гіпотези класичної теорії про ринок робочої сили наведено на рис. 10.1, де L^D — крива попиту; L^S — крива пропозиції.

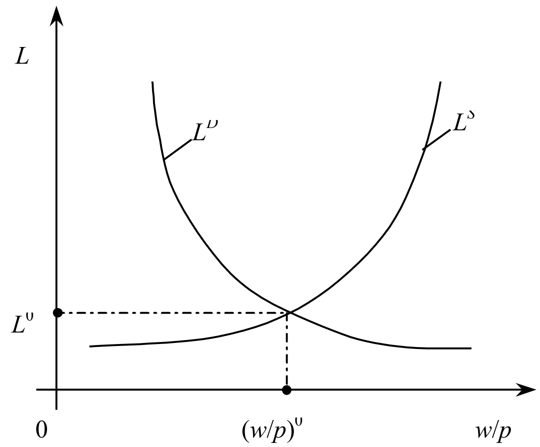


Рис. 10.1. Рівновага на ринку робочої сили

У рівновазі реальна заробітна плата дорівнює $(w/p)^0$, а зайнятість — L^0.

Якби реальна заробітна плата перевищила рівноважне значення, тобто $\frac{w}{p} > \left(\frac{w}{p}\right)^0$, то виникло б перевищення пропозиції над попитом на робочу силу $L^S\left(\frac{w}{p}\right) > L^D\left(\frac{w}{p}\right)$, тому надлишкова пропозиція призвела б до зниження заробітної плати w під впливом вимушеного безробіття, при цьому ціни p знизяться, але меншою мірою, так що реальна заробітна плата знизиться до $\left(\frac{w}{p}\right)^0$.

Якби виявилося $\frac{w}{p} < \left(\frac{w}{p}\right)^0$, то брак робочої сили змусив би підприємців збільшити оплату праці і знову було б досягнуто динамічної рівноваги.

2. Ринок грошей

Теорія попиту на гроші (без інших фінансових активів) у класичній моделі ґрунтується на гіпотезі, що сукупний попит на гроші — це функція грошового доходу (тобто функція від *Yp*, де *Y* — валовий внутрішній продукт у натуральному виразі), причому прямо пропорційна до грошового доходу:

$$M^D = \kappa Yp\,. \tag{10.3}$$

Пропозиція грошей M^S розглядається як задана величина. На рис. 10.2 наведено криві попиту та пропозиції грошей. Для кожного *Y своя* крива попиту .

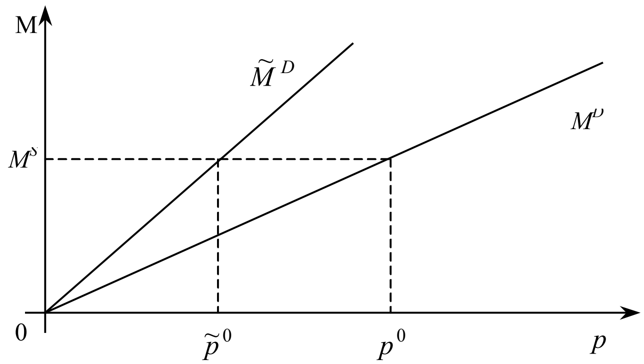


Рис. 10.2. Рівновага на ринку грошей

Якщо при даному *Y* ціна $p < p^0$, то існує надлишкова пропозиція грошей $M^S - M^D(p)$, у цьому разі постулюється, що ціни зростуть до рівня p^0.

3. Ринок товарів

Попит на товари (плановані витрати) — це сума попиту на споживчі й інвестиційні товари $E = C + I$. Відповідно до моделі $C = C(r)$, $I = I(r)$, причому $C(r)$, $I(r)$ як функції норми відсотка *r* спадають зі зростанням *r*.

Справді, чим більше *r*, тим більший дохід від заощаджень, а отже, уся велика частина доходу буде зберігатися і вся менша частина витрачатися на споживчі товари. Якщо ідеться про інвестиції, то чим вище *r*, тим нижчою буде сьогоднішня оцінка будь-якого даного інвестиційного проекту. Проекти, що дають прибуток при низьких дисконтних ставках, при більш високих ставках стають невигідними і відкидаються інвестором, що намагається отримати великий прибуток.

У класичній моделі пропозиція товарів є функцією рівня зайнятості, що існує на ринку робочої сили $Y = Y(L^0)$.

Умова рівноваги полягає в тому, що пропозиція товарів $Y(L^0)$ дорівнює попиту на товари $E = C(r) + I(r)$.

Поєднуючи рівняння й умови, що задають ринки робочої сили, грошей і товарів, дістаємо класичну модель у повному обсязі.

Ринок робочої сили:

$$L^S = L^S(w/p),\ L^D = L^D(w/p), \tag{10.4}$$

$$L^S\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right] = L^D\left[\left(\frac{w}{p}\right)^0\right] = L^0. \tag{10.5}$$

Ринок грошей:

$$M^S = M^S,\ M^D = \kappa p Y, \tag{10.6}$$

$$M^S = M^D = \kappa p^0 Y. \tag{10.7}$$

Ринок товарів:

$$Y = Y(L^0),\ E = C(r) + I(r), \tag{10.8}$$

$$Y(L^0) = C(r^0) + I(r^0) = Y^0. \tag{10.9}$$

Таким чином, кожний ринок задається кривими попиту та пропозиції і точкою рівноваги. Достатньо одному з ринків вийти зі стану рівноваги, як і всі інші ринки вийдуть з цього стану і далі прямуватимуть до деякого нового стану динамічної рівноваги.

10.1.2. Модель Кейнса

Праця Кейнса «Загальна теорія зайнятості, процента і грошей» побачила світ 1936 року як відповідь на проблеми, що виникли в зв’язку з кризою надвиробництва і масовим безробіттям у період Великої депресії 1929—1933 років. Класична модель, розглянута раніше, давала відповідь на задачу пошуку рівноваги в економіці в умовах повної зайнятості. Але як прийти до рівноваги, якщо економіка за певного збігу обставин далеко відійшла від рівноважного стану і характеризується масовим безробіттям?

Кейнс бачив своє завдання в тому, аби показати, що рівновага при повній зайнятості не є загальним випадком. Загальний випадок — це рівновага за наявності безробіття, а повна зайнятість — лише особливий випадок. Щоб досягти бажаного стану повної зайнятості, держава зобов'язана проводити особливу політику з її досягнення, оскільки ринкові сили, які діють автоматично, без цієї підтримки не гарантують її досягнення.

Передбачається, що існує ринок грошей, відмінний від ринку облігацій. Усього розглядається три види активів: гроші, облігації, фізичний капітал. Відносна ціна грошей, виражена в облігаціях, — це процентна ставка відсотка по облігаціях. Передбачається, що в умовах рівноваги норма прибутку на фізичний капітал (тобто на наявний запас інвестиційних товарів) дорівнює ставці доходу по облігаціях.

Таким чином, інша відмінність моделі — можливість простежити, як грошово-кредитна політика впливає на виробництво. Наприклад, збільшення грошової маси шляхом друкування нових грошей змінює пропорції обміну між грошима й облігаціями. Якщо грошей стане більше, їх будуть зберігати тільки при зниженні норми відсотка на облігації (альтернативний вид активів), при цьому норма прибутку також має знизитися, оскільки облігації і капітал — близькі субстанції.

Розглянемо тепер критерій максимуму прибутку стосовно капіталу (фондам) при фіксованому рівні зайнятості. Прибуток $\Pi = pF(K, L) - rK - wL$, тому необхідна умова екстремуму $\frac{\partial \Pi}{\partial K} = p\frac{\partial F}{\partial K} - r = 0$, оскільки $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial K^2} < 0$, то справді дістаємо умову максимуму:

$$p\frac{\partial F}{\partial K} = r, \tag{10.10}$$

тобто гранична продуктивність фондів у вартісному виразі дорівнює нормі прибутку (процентній ставці).

Таким чином, зниження норми прибутку згідно з (10.10) означає зменшення граничного продукту капіталу (якщо вважати, що ціни не зміняться), а оскільки граничний продукт зменшується зі зростанням K, то зниження норми прибутку з необхідністю припускає збільшення попиту на інвестиційні товари, а отже, і на товари в цілому. Отже, простеживши весь причинно-наслідковий ланцюжок, бачимо, що порівняно невелике збільшення грошової маси приводить до підвищення попиту на товари, відповідно, до зростання пропозиції товарів, тобто до збільшення кінцевого продукту.

Розглянемо більш докладно ринок праці в моделі Кейнса.

Припустимо тепер, що з певних причин попит E (на продукцію) виявився меншим від пропозиції Y при повній зайнятості.

У цьому разі, як вважав Кейнс, фактично вироблений кінцевий продукт Y дорівнюватиме попиту ($Y = E$), тобто $Y < Y^0$. Це негайно вплине на ринок робочої сили, оскільки за інших однакових умов менший обсяг продукту можна виробити за допомогою меншої кількості робітників, тобто $L < L^0$. Таким чином, якщо в класичній моделі реальна заробітна плата $(w/p)^0$ визначала кількість зайнятих $L^0 = L\left(\frac{w}{p}\right)^0$, то в моделі Кейнса попит на товари E визначає рівень зайнятості L, при цьому $L^0 - L$ і є той рівень безробіття, що диктується ринками грошей і товарів.

Річ у тім, що виробники не можуть продати стільки, скільки вони хотіли б, але виробляють і продають тільки в обсязі попиту. Тому крива попиту на робочу силу, що виводилася за припущення максимізації прибутку, не може бути застосована.

Основні елементи моделі Кейнса:

1) рівновага на ринку товарів досягається при рівності планованого попиту та фактичної пропозиції;

2) фактичний попит на робочу силу визначається фактично затребуваним продуктом, а отже, рівноваги на ринку робочої сили можна досягти тоді, коли ринок товарів перебуває в рівновазі.

У цілому модель Кейнса записується в такому вигляді ($Lq(r)$ — попит на облігації залежно від процентної ставки):

ринок робочої сили:

$$L^S = L^S(w/p),\ L^D = L^D(Y^0); \tag{10.11}$$

ринок грошей:

$$M^S = M^S;\ M^D = \kappa pY + Lq(r),\ \frac{dLq}{dr} < 0, \tag{10.12}$$

$$M^S = M^D; \tag{10.13}$$

ринок товарів:

$$Y = Y(L),\ E = C(Y) + I(r),\ \frac{dC}{dY} > 0,\ \frac{dI}{dr} < 0, \tag{10.14}$$

$$Y = E. \tag{10.15}$$

Розглянемо рівновагу на ринку товарів за припущення, що залежності $C(Y)$, $I(r)$ лінійні, тобто попит на споживчі товари зростає лінійно зі зростанням пропозиції товарів $C(Y) = a + bY$, $a > 0$, $0 < b < 1$, а попит на інвестиційні товари лінійно спадає зі зростанням норми процента $I(r) = d - fr$, $d > 0$, $f > 0$. Тоді умова рівноваги (10.15) запишеться в такій формі:

$$Y^G = a + bY^G + d - fr.$$

Звідси

$$Y^G = \left(\frac{a+d}{1-b}\right) - \left(\frac{f}{1-b}\right) r, \tag{10.16}$$

тобто крива рівноваги на ринку товарів (крива IS на рис. 10.3) є лінійно спадною функцією r, а отже, при фіксованому значенні r існує єдине рівноважне значення $Y^G(r)$.

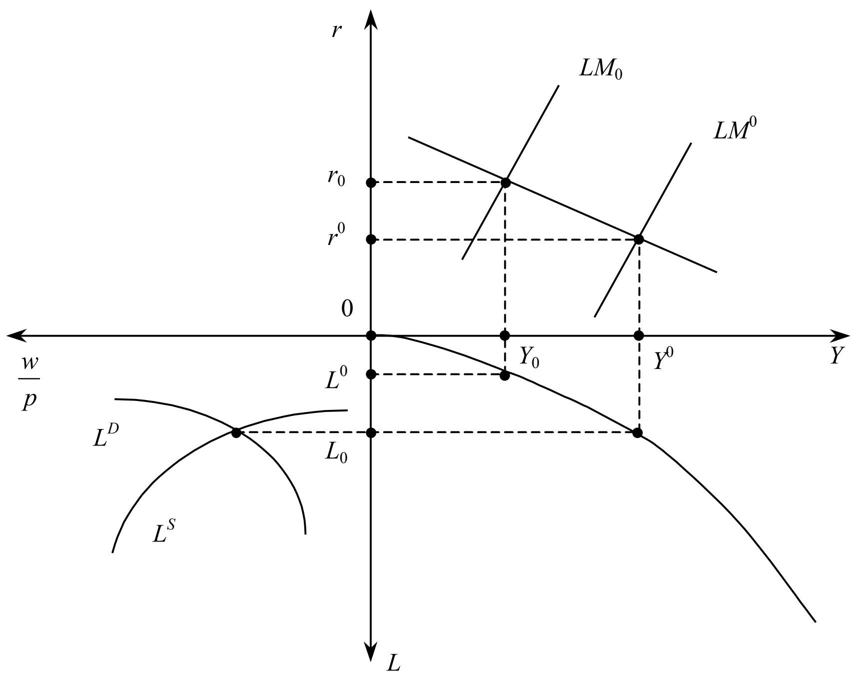


Рис. 10.3. Рівновага в моделі Кейнса

Розглянемо тепер рівновагу на ринку грошей за припущення, що попит на облігації $Lq(r)$ лінійний, тобто $Lq(r) = h - jr$. Умова рівноваги (10.13) при цьому запишеться у вигляді

$$Y^M = \frac{M^S - h}{\kappa p} + \frac{ir}{\kappa p}, \qquad (10.17)$$

тобто крива рівноваги на ринку грошей (крива LM) є зростаючою лінійною функцією r, а отже, при фіксованому значенні r існує єдине рівноважне значення $Y^M(r)$.

Загальна рівновага на ринках грошей і товарів досягається при $Y^G(r_0) = Y^M(r_0) = Y_0$, причому точка рівноваги (Y_0, r_0) (точка перетину кривих IS і LM) єдина. Сукупна рівновага на ринках грошей і товарів однозначно визначає фактичну потребу в робочій силі $Y_0 = F(K, L_0)$.

Загальну картину встановлення рівноваги ілюструє рис. 10.3. У першому квадранті зображено криві IS, LM, у четвертому квадранті — виробнича функція економіки ПФ як функція L, у третьому квадранті — криві попиту та пропозиції на робочу силу. Як бачимо, причинні зв'язки спрямовані від ринків товарів і грошей до ринку робочої сили через ПФ, причому ринок праці не є визначальним.

Якщо класична модель припускає автоматичну тенденцію до повної зайнятості, то в моделі Кейнса такого немає. Справді, нехай рівновага встановилася при зайнятості $L_0 < L^0$. Тоді, для того щоб домогтися повної зайнятості L^0, потрібно збільшити випуск продукції до $Y^0 = F(K, L^0)$, що потребувало б зміщення кривої LM у положення LM^0. Як це випливає з (10.17), такий зсув можна забезпечити при заданій пропозиції грошей M^S і фіксованих коефіцієнтах κ, h тільки шляхом зниження цін p, але ніякого механізму зниження цін при фіксованій ставці заробітної плати w_0 у моделі Кейнса не закладено. Отже, для переходу до повної зайнятості потрібна спеціальна державна політика.

Якщо крива LM нелінійна і при цьому має горизонтальну ділянку, то виникає ліквідна пастка. При зазначеній формі кривої існує рівновага на фінансовому ринку поза залежністю від зниження цін, пов'язаного з надлишковою пропозицією товарів і робочої сили.

І ще одна особливість: рівень планованих витрат E буває настільки високим, що виробництво Y не може досягти цього рівня. Це відбувається тоді, коли точка перетину кривих IS і LM має від'ємне значення норми процента.

10.2. Математичний аналіз фінансового ринку

10.2.1. Основні поняття

Означення. **Фінансовий ринок** — це ринок, на якому товарами виступають гроші, банківські кредити і цінні папери.

До цінних паперів відносять: *облігації, акції, ф'ючерси* (ф'ючерс — зобов'язання продавця поставити до визначеного терміну визначену кількість товару у визначене місце), опціони (опціон — право на купівлю в майбутньому визначеної кількості товару за фіксованою ціною).

Відповідно до виду товарів фінансовий ринок поділяється на грошовий, кредитний і фондовий. Останні два утворять ринок капіталу.

У ринковій економіці, що нормально функціонує фінансовий ринок обслуговує виробничу систему, сприяє просуванню продуктів виробництва, що стали товарами, до споживачів. Вироблений товар продається іншим організаціям або оптовим торговцям, після чого через роздрібну торгівлю потрапляє до споживачів.

Перехід товару від одного власника до іншого супроводжується зустрічним потоком грошових виплат. Ці виплати, як правило, здійснюються в безготівковій формі за посередництвом банків.

Банки обслуговують сферу звертання: у них накопичується наявний виторг роздрібної торгівлі і сфери обслуговування, що повертається на підприємства й у систему соціального захисту для виплати зарплати, пенсій, грошової допомоги. У банках також акумулюються заощадження населення (відкладений попит). Банки обслуговують і виробничу систему, оскільки надають виробникам кредити. Кредити необхідні підприємствам, оскільки матеріальні витрати відбуваються раніше, ніж буде вироблено і продано продукцію, а також для підтримки, модернізації і розширення виробничих потужностей.

При нестачі власних засобів комерційні банки беруть у борг в інших банків, насамперед державних. Державні банки утворять державну резервну систему. Крім того, вони акумулюють податкові надходження від населення, підприємств і організацій, через них здійснюється виплата зарплати працівникам бюджетної сфери, пенсій, грошової допомоги.

При нестачі засобів у державних банках держава проводить додаткову грошову емісію (у разі нестачі грошей в обігу це нормально, а в разі надлишку — призводить до інфляції) або випускає державні позики.

1. Фінансові операції

Найпростіший вид фінансової операції (угоди) — надання в борг деякої суми $S(0)$ з умови, що через час T (вимірюваний, як правило, у роках) буде повернуто суму $S(T)$.

У результаті цієї операції позикодавець (кредитор) отримає прибуток $S(T) - S(0)$, а в розрахунку на одиницю кредиту

$$r_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(0)}. \tag{10.18}$$

Величина r_T, що є в статистичному сенсі темпом приросту, називається ***ефективністю операції*** (з погляду кредитора), процентною ставкою, ставкою відсотка або просто інтересом, зростанням (адже гроші віддані в зростання).

Іншим показником ефективності операції (також з погляду кредитора) є ***дисконт*** — відношення прибутку до суми, що повертається:

$$d_T = \frac{S(T) - S(0)}{S(T)}. \tag{10.19}$$

Інтерес r_T і дисконт d_T звичайно вимірюються у процентах, однак при практичних розрахунках і розв'язуванні задач необхідно використовувати їхні звичайні значення.

Зазначені величини знаходяться в таких співвідношеннях:

$$r_T = \frac{d_T}{1 - d_T}; \; d_T = \frac{r_T}{1 + r_T}; \tag{10.20}$$

$$S(T) = S(0)(1 + r_T); \; S(0) = S(T)(1 - d_T).$$

Позначимо інтерес і дисконт за рік через r і d, тоді розрахунок r_T і d_T може здійснюватися за схемою простих чи складних процентів або за їх комбінацією.

Форма розрахунку за простими процентами:

$$r_T = Tr. \tag{10.21}$$

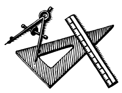
При розрахунку за довгостроковими кредитами на цілу кількість років застосовується схема складних процентів: на вкладену гривню через рік буде отримано $1 + r$, віддавши в зростання цю нову суму, ще через рік (тобто через два роки з початку відліку) одержимо $(1 + r)^2$, ..., через T років —

$$1 + r_T = (1 + r)^T. \tag{10.22}$$

При розрахунках за неповну кількість років іноді застосовується комбінована схема (складні проценти — за цілу кількість років, прості — за остачу), що приводить до такої формули:

$$1+r_T=(1+r)^{[T]}(1+r\{T\}), \qquad (10.23)$$

де $[T]$ — ціла частина T (ціла кількість років, що містяться в T); $\{T\}$ — дробова частина T; $T = [T] + \{T\}$.



Приклад 1. Клієнт помістив у банк 100 тис. марок. Щомісяця на цю суму виплачується 1,6 %. Наприкінці місяця клієнт хотів би одержувати по 2 тис. марок. Скільки місяців йому доведеться чекати?

Розв'язання. У цьому випадку норма процента задана не за рік, а за місяць: $r = 0{,}016$, а отже, T виміряються в місяцях. Згідно з умовою задачі потрібно знайти таке T, при якому $[100\,(1 + r)^T]\,r = 2$.

З останнього співвідношення знаходимо

$$(1 + 0{,}016)^T = 1{,}25,$$

або

$$T\ln 1{,}016=\ln 1{,}25,$$

звідки

$$T=\frac{\ln 1{,}25}{\ln 1{,}016}=\frac{0{,}2231}{0{,}0159}=14,$$

тобто клієнту доведеться чекати 14 місяців. За цей час сума його внеску досягне 125 тис. марок, і дохід із цієї суми при місячній нормі 1,6 % досягне 2 тис. марок. Часто використовується також ***дисконт-фактор***

$$V_T=\frac{1}{1+r_T}=1-d_T. \qquad (10.24)$$

При розрахунку за складними процентами за цілу кількість років T

$$V_T=\frac{1}{(1+r)^T}=(1-d)^T=V^T, \qquad (10.25)$$

де V — річний дисконт-фактор.

Означення. ***Ефективною ставкою*** називається річна ставка складних процентів, що забезпечує задане співвідношення між сумою $S(T)$, що перебуває в обігу, і кредитом $S(0)$

$$\left(1+r_{ef}\right)^{T}=\frac{S(T)}{S(0)}, \tag{10.26}$$

звідки

$$r_{ef}=\left[\frac{S(T)}{S(0)}\right]^{\frac{1}{T}}-1 .$$

У більш складному випадку фінансова операція розглядається як потік платежів. Одержання кредиту може бути розподілене в часі точно так само, як і виплати за ним. Те можна сказати і про операції з цінними паперами.

Якщо розглядати потік платежів із позицій одного з учасників, то природно вважати всі надходження додатними, а всі виплати від'ємними. Результат такої розподіленої операції можна виміряти шляхом приведення всіх платежів (з урахуванням знака) до початкового моменту часу. Ця величина називається ***чистою зведеною величиною NPV*** (*net present value*):

$$NPV=\sum_{k=1}^{N}S_kV_{t_k}=\sum_{k=1}^{N}S_k\frac{1}{\left(1+r\right)^{t_k}}, \tag{10.27}$$

де t_1, ..., t_N — моменти платежів S_1, ..., S_N; V_{t_k} — дисконт-фактор у момент t_k. При цьому $t_1 = 0$, тобто момент першої виплати береться за початок відліку.

Приклад 2. Контракт між фірмою A и банком B передбачає, що банк надає фірмі кредит протягом 3 років щорічними платежами 1 млн грн на початку кожного року при ставці 10 % річних. Фірма повертає борг: наприкінці третього року — 1 млн грн, четвертого року — 2 млн грн, п'ятого року — 1 млн грн. Чи прийнятна ця операція для банку?

Розв'язання. За формулою (10.27) ($t_1 = 0$, $t_2 = 1$, $t_3 = 2$, $t_4 = 3$, $t_5 = 4$, $t_6 = 5$):

$$\mathrm{NPV}=-1\frac{1}{1+0{,}1}-\frac{1}{\left(1+0{,}1\right)^2}+\frac{1}{\left(1+0{,}1\right)3}+$$

$$+\frac{2}{\left(1+0{,}1\right)^4}+\frac{1}{\left(1+0{,}1\right)^5}=0{,}003\text{ млн дол.}>0,$$

тобто ця операція прийнятна для банку.

Для порівняння різних фінансових операцій між собою використовується ефективна ставка операції, що забезпечує мінімальне з прийнятних значень NPV = 0, тобто є коренем рівняння

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{S_k}{\left(1+r_{ef}\right)^{t_k}} = 0, \quad t_1 = 0\,. \tag{10.28}$$

Зокрема, для найпростішої фінансової операції

$$-S(0) + \frac{S(T)}{\left(1+r_{ef}\right)^{T}} = 0,$$

звідки

$$r_{ef} = \left[\frac{S(T)}{S(0)}\right]^{\frac{1}{T}} - 1,$$

що збігається з (10.26).

Якщо платежі відбуваються щодня і багато разів за день, зручно розглядати накопичену суму таких платежів $S(t)$ (конкретної фінансової установи) як функцію неперервного часу. Тоді можна говорити про миттєву швидкість зростання:

$$\frac{dS}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$$

і силу зростання (силу інтересу)

$$\delta = \frac{dS}{dt} / S(t) = \frac{d}{dt}\left[\ln S(t)\right]. \tag{10.29}$$

Якщо $\delta(t)$ задано, то можна знайти накопичену суму $S(t)$, розв'язавши диференціальні рівняння (10.29):

$$S(T) = S(0) e^{\int_0^T \delta(t) dt}. \tag{10.30}$$

Порівнюючи (10.20) і (10.30), дістанемо

$$I + r_T = e^{\int_0^T \delta(t) dt}.$$

Таким чином, при $\delta(t) = \delta = \text{const}$

$$I + r_T = e^{\delta T},$$

або

$$\delta = \frac{1}{T}\ln\left(1 + r_T\right).$$

Якщо зростання r_T обчислюється за формулами складних процентів із річною ставкою r, то

$$\delta = \frac{1}{T}\ln\left(1 + r\right)^T,$$

у цьому разі

$$\delta = \ln\left(1 + r\right),$$

при малих значеннях r

$$\delta \approx r.$$

2. Фінансовий ризик

Раніше було розглянуто деякі фінансові операції і показники їхньої ефективності, причому останні розглядалися як детерміновані величини. Насправді більшість фінансових операцій — ризиковані в тому сенсі, що їхня ефективність не детермінована, тобто не цілком відома на момент укладання угоди. Особливо це стосується до операцій купівлі і продажу цінних паперів, насамперед акцій.

Ступінь невизначеності, ризикованості фінансових операцій можна виміряти, якщо прийняти гіпотезу, що ефективність кожної з них R є випадковою величиною, а спостерігаються насправді її значення r — лише окремі реалізації цієї випадкової ефективності.

У такому разі під ризиком розуміється ймовірність будь-якої небажаної для інвестора події, наприклад імовірність розоритися. Певною мірою невизначеність, а отже, і ризик характеризує дисперсія ефективності. Чим менша дисперсія, тим менша невизначеність. З двох альтернативних фінансових операцій R_1, R_2 з $MR_i =$ $= m_i$, $DR_i = \sigma_i^2$, $i = 1, 2$, $m_i < m_2$, $\sigma_1 < \sigma_2$, інвестор, схильний до ризику, вибере другу, оскільки в середньому вона більш ефективна ($m_2 > m_1$), тоді як більш обережний інвестор вибере першу, оскільки вона менш ризикована ($\sigma_1 < \sigma_2$), хоча й менш ефективна.

Означення. Будь-яка система заходів, спрямованих на зниження ризику, називається ***хеджуванням***.

Далі розглянемо математичну модель, що дає змогу виконати хеджування шляхом оптимізації портфеля цінних паперів.

Купуючи акції однієї компанії, інвестор ставить свій добробут у залежність від курсових коливань акцій цієї компанії. Якщо ж він вкладе свій капітал в акції кількох компаній, то ефективність сформованого в такий спосіб портфеля цінних паперів залежатиме від усередненого курсу кількох компаній, а ступінь невизначеності буде задаватися усередненою дисперсією. Якщо усереднена дисперсія менша від окремих дисперсій чи навіть дорівнює нулю (у виняткових випадках), виконуючи цю операцію, ми зменшуємо невизначеність.

10.2.2. Оптимізація портфеля цінних паперів

Нехай існує n видів цінних паперів, з яких інвестор може сформувати портфель. Ці папери характеризуються ефективностями R_1, R_2, ..., R_n, що є випадковими величинами з відомими математичними сподіваннями $MR = m_i$ і відомою коваріаційною матрицею $B = \left\| \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right) \right\|$, зокрема $\operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right) = DR_i = \sigma_i^2$.

Якщо інвестор розподілив свій капітал частками θ_i, $0 \le \theta_i \le 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i = 1$, у різні цінні папери, то ефективність сформованого портфеля

$$R_p = \sum_{i=1}^{n} \theta_i R_i, \tag{10.31}$$

причому ця випадкова ефективність має такі математичне сподівання та дисперсію:

$$MR_p = M\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i R_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \theta_i MR_i = \sum_{i=1}^{n} \theta_i m_i,$$

$$\sigma_p^2 = DR_p = D\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i R_i \right) = \operatorname{cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \theta_i R_i, \sum_{j=1}^{n} \theta_j R_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \theta_i \theta_j \operatorname{cov}\left(R_i, R_j\right).$$

Розподіл $\left(\theta_1, ..., \theta_n\right)$, $0 \le \theta_1 \le 1$, $\sum\limits_{i=1}^{n} \theta_i = 1$ назвемо ***структурою портфеля цінних паперів***.

Залишивши за інвестором вибір середньої ефективності і допомагаючи йому мінімізувати в цьому випадку невизначеність, дістаємо таку задачу оптимізації портфеля цінних паперів:

$$\min \sum_{i=1}^{n} b_{ij}\theta_i\theta_j,\ b_{ij} = \operatorname{cov}(R_i, R_j), \tag{10.32}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\theta_i = m_p,$$

$$\theta_1 \geq 0, .., \theta_n \geq 0,$$

де m_p — вибране інвестором значення середньої ефективності портфеля.

Це задача на мінімізацію квадратичної форми від n змінних $\theta_1, ..., \theta_n$, пов'язаних двома співвідношеннями $\sum_{i=1}^{n} \theta_i = 1$, $\sum_{i=1}^{n} m_i\theta_i = m_p$, а також умовами $\theta_i \geq 0$, $i = 1, ..., n$, тобто задача квадратичного програмування. Опустивши умови невід'ємності змінних, дістанемо задачу Марковитца.

Приклад 3. Оптимізація портфеля цінних паперів. Інвестор може скласти портфель із трьох видів цінних паперів, ефективності яких R_1 R_2, R_3 є некорельованими випадковими величинами, що мають такі математичні сподівання і стандартні відхилення:

$$MR_1 = 11,\ \sigma_1 = 4;\ MR_2 = 10,\ \sigma_2 = 3;\ MR_3 = 9,\ \sigma_3 = 1$$

(усі дані у процентах до ціни покупки).

Визначити оптимальний портфель при $m_p = 10$.

Розв'язання. Щоб проілюструвати методику виконання теоретичних розрахунків у конкретних умовах, наведемо розв'язання повністю.

Відповідно до умови задачі необхідно знайти таку структуру портфеля $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $\theta_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{3} \theta_i = 1$, при якій ефективність портфеля $R_p = \sum_{i=1}^{3} \theta_i R_i$ має математичне сподівання

$$MR_p = \sum_{i=1}^{3} \theta_i MR_i = 11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 = 10$$

і мінімальну (із усіх можливих при зазначених умовах) дисперсію

$$\sigma_p^2 = DR_p = D\left(\sum_{i=1}^{3} \theta_i R_i\right) = \sum_{i=1}^{3} \theta_i^2 DR_i = 16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2 .$$

Таким чином, приходимо до такої задачі

$$\min_{\theta}\left(16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2\right),$$

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = 1,$$

$$11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 = 10,$$

$$\theta_1 \geq 0, \ \theta_2 \geq 0, \ \theta_3 \geq 0 .$$

Спочатку розв'яжемо «урізану» задачу (без урахування умов невід'ємності елементів структури):

$$\min_{\theta}\left(16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2\right),$$

$$1 - \left(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3\right) = 0,$$

$$10 - \left(11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3\right) = 0 .$$

Це звичайна задача на умовний екстремум. Складаємо функцію Лагранжа:

$$L(\theta_1, \theta_2, \theta_3, \lambda, \mu) = 16\theta_1^2 + 9\theta_2^2 + \theta_3^2 + \lambda(1 - \theta_1 - \theta_2 - \theta_3) + \\ + \mu(10 - 11\theta_1 - 10\theta_2 - 9\theta_3).$$

Необхідною умовою її екстремуму є рівність нулю похідних:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 32\theta_1 - \lambda - 11\mu = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 18\theta_2 - \lambda - 10\mu = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \theta_3} = 2\theta_3 - \lambda - 9\mu = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = -(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - 1) = 0,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = -(11\theta_1 + 10\theta_2 + 9\theta_3 - 10) = 0.$$

Як бачимо, останні два рівняння відтворюють умови задачі.

Розв'язно перші три рівняння щодо елементів структури:

$$\theta_1 = \frac{1}{32}(\lambda + 11\mu),$$

$$\theta_2 = \frac{1}{18}(\lambda + 10\mu),$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2}(\lambda + 9\mu).$$

Підставивши цей розв'язок в умови задачі, дістанемо рівняння для $\frac{\lambda}{2}$, $\frac{\mu}{2}$:

$$\begin{cases} 1{,}1736\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 10{,}7986\left(\frac{\mu}{2}\right) = 1, \\ 10{,}7986\left(\frac{\lambda}{2}\right) + 99{,}6736\left(\frac{\mu}{2}\right) = 10, \end{cases}$$

з яких визначаємо

$$\frac{\lambda}{2} = -22{,}6434\,; \ \frac{\mu}{2} = 2{,}5535.$$

Підставивши ці значення у вираз для θ, дістанемо таку структуру оптимального портфеля:

$$\theta_1^* = 0{,}3404; \ \theta_2^* = 0{,}3214; \ \theta_3^* = 0{,}3382.$$

Дисперсія оптимального портфеля

$$\left(\sigma_p^*\right)^2 = \left(\theta_1^*\right)^2 \sigma_1^2 + \left(\theta_2^*\right)^2 \sigma_2^2 + \left(\theta_3^*\right)^2 \sigma_3^2 = 2{,}8981.$$

Як бачимо, це набагато менше за дисперсію $\sigma_p^2 = 9$ для випадку, коли у портфель входять тільки папери іншого виду.

10.3. Прогнозування валютних криз і фінансових ризиків

10.3.1. Основні поняття

Валютна криза — це стрибкоподібне падіння курсу національної валюти (чи кількох взаємозалежних валют) нижче деякого граничного значення (наприклад, збільшення ціни гривнях у гривнях більш ніж на 10 %).

Валютна криза — це прояв слабкості національної економіки, що виражається в падінні ВВП, скороченні золотовалютних резервів, негативному сальдо зовнішньої торгівлі, зростанні зовнішнього боргу. Усі ці негативні зміни фіксуються суб'єктами фінансового ринку і, зрештою, виявляються через зниження курсу національної валюти (і цінних паперів).

Механізм валютної кризи можна порівняти з механізмом землетрусу, що дозріває в результаті поступового переміщення тектонічних плит. Коли останні приходять у стан нестійкої рівноваги, то починаються слабкі високочастотні коливання земної поверхні, які вловлюються деякими видами тварин, що дає їм шанс на порятунок. Своєчасне одержання сигналу про валютну кризу, що насувається, дає змогу державі заздалегідь вжити необхідних заходів зі стабілізації економічної ситуації, а інвесторам уникнути великих збитків.

Але валютний ринок — це сегмент фінансового ринку, а фінансовий ринок — усього лише частина національної економіки. Тому, як уже зазначалося вище, валютна криза визначається загальним станом економіки, що певною мірою відстежується через ціни фінансових активів.

З огляду на сказане в цьому підрозділі спочатку описується модель прогнозування цін фінансових активів (і фінансових ризиків), потім наводиться модель прогнозування валютних криз.

10.3.2. Прогнозування фінансових ризиків

Класичне означення ефективності фінансової операції (процентної ставки, норми прибутку на фінансовий актив):

$$\frac{S_1 - S}{S} = r,\ \ S_1 = S(1+r),\ \ S_t = S(1+r)^t,$$

де $S = S_0$ — початкова сума, вкладена інвестором (кредитором) у даний фінансовий актив (інструмент); S_1 — сума, що перебуває в обігу через один період (рік, місяць); S_t — сума, що перебуває в обігу через *t* періодів.

Якщо операція ризикована, то її ефективність *R* стає випадковою величиною, а отже, існує ймовірність $P\{R < 0\}$, що інвестор зазнає втрат. У нашому розумінні ця ймовірність і є ризик. Непрямою характеристикою ризику є дисперсія $DR = \sigma^2$: чим менша дисперсія, тим менший ризик. Для зменшення ризику вживаються заходи з хеджування, у тому числі складається портфель активів (θ_i — частка *i*-го активу в портфелі).

$$R_p = \theta_i R_i, \quad \theta_i = \frac{S_i}{S}, \quad S = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Раніше згадувався метод Марковитца — метод вибору оптимального портфеля, що характеризується мінімальною дисперсією $DR_p \to \min,$ при заданій середній ефективності $MR_p = m_p.$ Якщо ціни (отже, і ризики) окремих активів змінюються, то портфель потрібно відповідним чином коригувати. Тому прогнозування цін активів дає змогу раціонально керувати структурою портфеля.

Аналіз фінансового ринку спирався на припущення класичної теорії ефективного ринку про однорідність поводження його учасників. У сучасній теорії фінансового ринку фундаментальним є припущення про фрактальність (неоднорідність) поводження його учасників. Більш активно поводяться власники «коротких грошей», більш пасивно — власники «довгих грошей». Це приводить до того (як це випливає з теоретичних і прикладних досліджень), що щільності розподілу ймовірностей характеристик ризикованих фінансових операцій мають «важкі хвости» і більш гостроверхі, ніж нормальна щільність.

Якщо платежі з фінансових операцій відбуваються щодня і багато разів за день, то, як уже зазначалося, зручніше розглядати накопичену суму таких платежів $S(t)$ як функцію неперервного часу t, тоді можна говорити про швидкість зростання платежів $S'(t)$ і про відносну швидкість зростання $\frac{S'}{S} = \delta,$ при постійній сталості відносної швидкості зростання:

$$S(t) = S(0)e^{\delta t}, \quad S(1) = S(0)e^{\delta} \text{ або } 1 + R = e^{\delta}, \text{ де } R = \frac{S(1) - S(0)}{S(0)}.$$

Разом з тим δ — це питомий логарифмічний прибуток (P_0, P_1 — ціни активу в початковий і перший моменти часу):

$$\delta = \ln(1+R) = \ln\left(1 + \frac{P_1 - P_0}{P_0}\right) = \ln P_1 - \ln P_0.$$

Останнє співвідношення можна розглядати в будь-який момент часу

$$\delta_t = \ln P_t - \ln P_{t-1} = \ln(1 + R_t), \tag{10.36}$$

де R_t — процентна ставка в момент t (але не за t періодів).

На підставі аналізу зарубіжних досліджень і тестування різних моделей за даними російських фінансових ринків (грошового, валютного, фондового, товарного і деривативного) було запропонована таку теоретико-ймовірнісну модель для аналізу та прогнозування логарифмічного прибутку (у розрахунку на день) фінансових активів:

$$\delta^t = \xi_t + \xi_t^e,\ t = 0, 1, ..., \tag{10.37}$$

$$\xi_t = \mu + \sigma_t \varepsilon_t,\ \xi_t^e = \eta_t J_t,$$

$$\ln \sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \ln \sigma_{t-1}^2 + \alpha_2 \left| \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} \right| + \alpha_3 \frac{\varepsilon_{t-1}}{\sigma_{t-1}} + \xi_t, \tag{10.38}$$

$$\varepsilon_t \sim N(0,1),\ \operatorname{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0 \ \text{при}\ t \neq t',\ \eta_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix},$$

$$J_t \sim N(y, \gamma),\ M\xi_t = 0.$$

Відповідно до цієї моделі логарифмічний прибуток має у своєму складі дві складові: регулярну ξ_t, породжену «довгими грошима», і стрибкоподібну ξ_t^e, породжену «короткими грошима».

У регулярної складової середнє близьке до нуля $\mu \approx 0$; стандартне відхилення σ_t визначається зі статистичного співвідношення (10.38), установленого за минулими даними, при цьому ε_t, $t = 0, 1, 2, ...$, — послідовність некорельованих стандартних нормальних величин. Таким чином, регулярна складова є сумішшю нормальних розподілів.

У будь-який момент часу t з імовірністю $1-p$ стрибкоподібна складова не виявляється, а з імовірністю p відбувається стрибок середньої величини y зі стандартним відхиленням y.

Параметри моделі μ, α_0, α_1, α_2, α_3, ρ, y, γ визначаються за допомогою методу максимуму правдоподібності й інших математико-статистичних методів за фактичними даними: μ, α_0, α_1, α_2, α_3, — за динамічними рядами δ_t, σ_t, $t = 1$, T; p, θ, γ — за підмножиною моментів часу $\widetilde{T}$, в яких мали відбувалися стрибки, за такими формулами:

$$\widehat{p} = \frac{T^e}{T},\ \widehat{y} = \frac{1}{T^e} \sum_{t \in \widetilde{T}} \theta_t,\ \widehat{\gamma}^2 = \frac{1}{T^e - 1} \sum_{t \in \widetilde{T}} \left(\theta_t - \widehat{\theta}\right)^2,$$

де T^e — кількість тих моментів часу, в які відбувалися стрибки.

Якщо в момент часу t сформовано портфель $V = V_t$, з n активів $\left(\theta_i = \frac{V_i}{V},\ \sum_{i=1}^{n} V_i = V\right)$, то логарифмічний прибуток портфеля в наступний момент часу буде

$$\hat{\delta}_{t+1} = \sum_{i=1}^{n} \theta_i \hat{\delta}_{t+1}^{i},$$

де $\hat{\delta}_{t+1}^{i}$ — прогнозне значення логарифмічного прибутку i-го активу.

Оскільки $\hat{\delta}_{t+1}^{i}$ — випадкові величини, то і $\hat{\delta}_{t+1}$ — також випадкова величина: тому, загалом кажучи, існує ймовірність $P(\hat{\delta}_{t+1} < 0)$ того, що інвестор зазнає збитків. Як ризик розглядається критичне (потенційне) значення збитку L_{t+1}, яке відповідає квантілі K_q, що, у свою чергу, відповідає ймовірності q:

$$L_{t+1} = -V_t K_q \sqrt{\theta \Sigma \theta'} > 0,$$

$$P\{\hat{\delta}_{t+1} < K_q\} = q,\ K_q < 0,$$

де $\theta = (\theta_1,\ ...,\ \theta_n)$ — вектор структури портфеля; $\sum$ — коваріаційна матриця логарифмічних прибутків активів.

Керування структурою портфеля θ здійснюється таким чином, щоб мінімізувати критичний (потенційний) збиток. Іншими словами, на основі прогнозів $\hat{\delta}_{t+1}^{i}$, $i = 1, ..., n$ складаємо новий портфель $V_t = \sum \theta_i^* V_t$, де $\theta_i^* (i = 1, ..., n)$ визначаються в результаті розв'язання задачі

$$\min_{\theta}\left(-V_t K_q \sqrt{\theta \Sigma \theta'}\right),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \hat{R}_i \theta l = m_p,\ \theta_i \geq 0.$$

10.3.3. *Прогнозування валютних криз*

Постановка задачі: спрогнозувати такий момент t^*, в який може відбутися від'ємний стрибок курсу національної валюти (стрибок логарифмічного прибутку національної валюти відносно однієї з твердих валют), причому цей стрибок за модулем має перевищити деяке граничне значення, після чого відбувається девальвація національної валюти (державі стає не під силу підтримувати колишній курс, тому встановлюється новий).

У багатьох дослідженнях цю задачу розв'язано за допомогою побудови математичної моделі індикатора валютного ризику. Це модель, в якій прогнозованою величиною є ймовірність $\hat{p}_t$, того, що в даний момент значення модуля від'ємного стрибка курсу національної валюти перевищить задане граничне значення.

У розглянутій моделі час змінюється з кроком в один місяць, усі змінні моделі мають лаг в один місяць для того, щоб випереджати дані щодо кризи.

З узагальнення результатів досліджень валютних криз у країнах, що розвиваються, за останні кілька десятків років випливає, що основними факторами — провісниками кризи є реальний курс національної валюти, розмір золотовалютних резервів, розмір зовнішнього боргу, обсяг ВВП, ступінь залежності країни від країн—партнерів з торгівлі, схильність інвесторів до ризику.

В основу моделі покладено регресійну залежність частки p_t кризових місяців до загальної кількості розглянутих місяців від зазначених (але трохи перетворених) факторів:

$$p_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_{ti} + \varepsilon_t, \qquad (10.39)$$

де x_1 — відношення золотовалютних резервів до державного боргу;

x_2 — показник, залежний від обсягу і змінності ВВП;

x_3 — тримісячне поточне середнє індексу цін акцій;

x_4 — шестимісячне поточне середнє схильності до ризику;

x_5 — шестимісячне поточне середнє схильності до ризику з лагом у 6 місяців;

x_6 — номер класу «кризовості», до якого віднесено дану національну економіку.

Розрахунки коефіцієнтів регресійної моделі було виконано за даними близько 30 валютних криз, що відбулися за останні кілька десятиліть (включаючи валютні кризи в Південно-Східній Азії, Латинській Америці, РФ у 1995 і 1998 роках).

Значення залежної змінної p_t у моделі (10.39) для конкретної кризи в конкретній країні визначалося як відношення кризових місяців до загальної кількості розглянутих за визначену кількість років місяців (кризових і спокійних). Значення незалежних змінних усереднювалися (або накопичувалися) по розглянутих місяцях.

Знаючи оцінки параметрів регресії $\hat{\alpha}_i$ і знаходячи прогнози значень незалежних змінних $x_i(t+1)$, визначаємо прогноз залежної змінної $\hat{p}_{t+1}$.

Саме рішення про валютну кризу в майбутньому місяці $(t+1)$ приймається за логістичною функцією від цього прогнозу:

$$\widehat{P}_{t+1} = \frac{1}{1+e^{-\widehat{p}_{t+1}}}. \qquad (10.40)$$

Здобута величина $\widehat{P}_{t+1}$ інтерпретується як індекс імовірності девальвації (індикатор девальвацій). Наступний місяць оцінюється як кризовий, якщо $\widehat{P}_{t+1} > 0{,}4$.

Як індикатор використовується абсолютний темп приросту ентропії H_t (t виміряються в днях):

$$V_t = \left| \frac{H_t - H_{t-1}}{H_t} \right|,$$

а сама ентропія визначається за допомогою методу «падаючих прямокутників» за часовим рядом валютних курсів.

Цей метод більш простий, потребує для реалізації тільки даних про обмінні курси. У цьому ж полягає і його недолік, адже валютні кризи — це результат нестійкості всієї економічної системи, стан якої визначається багатьма макроекономічними показниками. Для більшої надійності прогнозу варто застосовувати відразу кілька моделей (включаючи викладені раніше).

10.4. Аналіз інфляції

ОЗНАЧЕННЯ. ***Під інфляцією*** розуміється знецінювання грошей, коли на ту саму суму згодом можна купити менше товару. Інфляція виникає при порушенні балансу між товарним і грошовим потоками. Зовнішньою ознакою інфляції є безупинне зростання загального рівня цін, що охоплює всі ринки і всі товари, протягом доволі тривалого проміжку часу.

Для забезпечення балансу товарів і грошей загальна сума грошей у країні з урахуванням їх оборотності за рік має бути така, щоб можна було викупити зроблені за рік інвестиційні та споживчі товари (вартість матеріалів, що витрачаються, входить у вартість згаданих товарів), тобто валовий суспільний продукт (ВСП). Саме це положення реалізується в основному макроекономічному рівнянні:

$$Mv = PY, \qquad (10.41)$$

де M — загальна маса грошей, що перебувають в обігу;

v — швидкість обороту грошей за рік;

P — загальний рівень цін (наприклад, індекс цін відносно цін базового року);

Y — натуральне значення ВВП (наприклад, ВВП у незмінених цінах базового року).

Зрозуміло, необхідно враховувати випуск облігацій, стан ринку цінних паперів, зовнішню торгівлю. Співвідношення (10.41) звичайно записується у формі

$$M = \kappa PY, \tag{10.42}$$

де κ — коефіцієнт, що залежить (обернено пропорційно) від швидкості обороту грошей і від інших перелічених факторів.

При аналізі інфляції звичайно користуються основним макроекономічним рівнянням у формі (10.41). Для включення інфляційних процесів досить, щоб сукупний попит перевищував сукупну пропозицію. За джерелами цього перевищення інфляції поділяються на інфляцію попиту та інфляцію пропозиції.

Інфляція попиту виникає тоді, коли темпи зростання сукупного попиту перевищують темпи зростання ВВП. Збільшення сукупного попиту може відбутися за рахунок зростання ряду показників, головними з яких є фонд споживання, інвестиції, державні витрати, чистий експорт. З рівняння (10.41) випливає, що при збільшенні лівої частини (як за рахунок зростання швидкості обороту грошей, так і за рахунок збільшення грошової маси) права частина при фіксованому обсязі випуску товарів Y може зрости лише за рахунок підвищення цін.

Відомий монетарист М. Фрідман з цього приводу писав, що інфляція — «грошовий феномен, викликаний надлишком грошей стосовно випуску продукції». За уявленнями іншого монетариста А. Мельтцера, «середній темп інфляції встановлюється залежно від середнього темпу зростання грошової маси, як це відбувається нині і як завжди було в минулому».

Інфляція пропозиції викликається зростанням витрат виробництва і як наслідок — скороченням сукупної пропозиції. Два найважливіші джерела зростання витрат: підвищення номінальної заробітної плати і збільшення цін на сировину й енергоносії. Якщо грошова маса чи обсяг випуску товарів залишилися незмінними, то єдиним засобом для забезпечення рівності (10.41) є підвищення цін.

У реальній економіці ці два типи інфляції розділити не можна, вони присутні одночасно. Більшість економістів додержують такого погляду на ці два типи інфляції. Інфляція попиту існує доти, доки існують надмірні загальні витрати. Інфляція, викликана зростанням витрат, сама себе обмежує і поступово сходить нанівець, оскільки супроводжується скороченням випуску товарів і зайнятості, що зменшує можливості подальшого збільшення витрат.

Щодо впливу інфляції на виробництво існує дві точки зору. Кейнсіанці вважають, що контрольована інфляція — джерело зростання. Монетаристи мають інший погляд: контрольована інфляція викликає короткострокове зростання виробництва, що потім сходить нанівець. В основу обох підходів покладено положення про те, що поводження цін трохи запізнюється відносно зміни грошової маси.

Міркування кейнсіанців базується на рівнянні, що випливає з умови максимуму прибутку на національному рівні:

$$p\frac{\partial F}{\partial K}=r, \tag{10.43}$$

де p — рівень цін;

$F(K, L)$ — виробнича функція національної економіки;

r — норма прибутку, що наближено дорівнює процентній ставці.

Якщо грошей стало більше, то процентна ставка має зменшитися, а отже, при гіпотезі щодо інертності цін має згідно з (10.43) зменшитися граничний продукт капіталу $\frac{\partial F}{\partial K}$, а для неокласичних виробничих функцій граничний продукт зменшується, якщо капітал зростає.

Таким чином, зниження норми прибутку призводить до зменшення граничного продукту капіталу, що з необхідністю припускає підвищення попиту на інвестиційні товари. Отже, порівняно невелике збільшення грошової маси (таке, що якийсь час зберігається колишній рівень цін) приводить до підвищення попиту на інвестиційні товари, а тим самим — до зростання виробництва і скороченню безробіття.

Міркування монетаристів базуються на основному макроекономічному рівнянні (10.41) і рівнянні ціноутворення (ціни визначаються обсягом продукції, випущеної місяць назад):

$$\pi-\pi_{-1}=\lambda\left(y_{-1}-y^{E}\right), \tag{10.44}$$

де π, π_{-1} — темпи приросту цін (рівень інфляції) у поточний і в минулий моменти часу;

$$y = \log Y,\ y^E = \log Y^E,$$

де Y, Y^E — поточний і сталий обсяги ВВП.

У логарифмах рівняння (10.41) набирає такого вигляду $(p = \log P$, $m = \log M,\ \ y = \log Y)$:

$$p = m - y + \text{const}.$$

Узявши різницю цих рівнянь у суміжні моменти часу, дістанемо

$$p - p_{-1} = m - m_{-1} - (y - y_{-1}),$$

або

$$\pi = m - (y - y_{-1}), \tag{10.45}$$

де $\pi = (p - p_{-1})$ — темп зростання цін чи рівень інфляції;

$m = (m - m_{-1})$ — темп зростання грошової маси.

Система рівнянь відносно π, y при $\lambda = 1$ (10.44), (10.45) має такий розв'язок:

$$\pi = \frac{1}{2}\left(\pi_{-1} + m + y_{-1} - y^E\right), \tag{10.46}$$

$$y = \frac{1}{2}\left(m - \pi_{-1} + y_{-1} + y^E\right).$$

Для дослідження поводження економічної системи на предмет впливу інфляції на виробництво зазначена система рівнянь розглядається в такому вигляді:

$$\begin{cases} \pi = \pi_{-1} + y - y^E; \\ \pi = \dfrac{1}{2}\left(m + \pi_{-1} + y_{-1} - y^E\right). \end{cases} \tag{10.47}$$

У сталому стані $m = 0$, $y = y_{-1} = y^E$, $\pi = 0$.

Нехай тепер $m \neq 0$, тобто щомісяця друкується mM_{-1} грошей, де M_{-1} — обсяг грошової маси в попередньому місяці.

Результати послідовного розв'язування рекурентної системи (10.47) наведено в табл. 10.1.

Таблиця 10.1

ВИПУСК ПРОДУКЦІЇ І РІВЕНЬ ІНФЛЯЦІЇ ЗА ПОСТІЙНОГОТЕМПУ ПРИРОСТУ ГРОШОВОЇ МАСИ *T*

Номер періоду	$\dot{m}$	π_{-1}	y_{-1}	π	y
0	0	0	y^E	0	y^E
1	$\dot{m}$	0	y^E	$\frac{\dot{m}}{2}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{2}$
2	$\dot{m}$	$\frac{\dot{m}}{2}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{2}$	$\dot{m}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{2}$
3	$\dot{m}$	$\dot{m}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{2}$	$\frac{5\dot{m}}{4}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{4}$
4	$\dot{m}$	$\frac{5\dot{m}}{4}$	$y^E + \frac{\dot{m}}{4}$	$\frac{5\dot{m}}{4}$	y^E
У підсумку	$\dot{m}$	$\dot{m}$	y^E	$\dot{m}$	y^E

Таким чином, якщо виходити з основного макроекономічного рівняння (10.41) і рівняння ціноутворення (10.44), то збільшення грошової маси з постійним темпом приросту $\dot{m}$ спочатку приведе до короткострокового зростання виробництва і розсмоктуванню безробіття на тлі поступово зростаючої інфляції, після чого обсяг виробництва повернеться на колишній сталий рівень так само, як і безробіття, а рівень інфляції стануть зрівняється з приростом грошової маси.

10.5. Аналіз зовнішньої торгівлі

10.5.1. *Основні поняття*

Аналіз зовнішньої торгівлі передбачає дослідження:

умов можливості і доцільності зовнішньої торгівлі при обміні своїх товарів стандартної якості на інші закордонні товари такої самої якості. У рамках трисекторної моделі, в якій розглядаються три агреговані товари (матеріали, інвестиційні і споживчі товари), це відбувається в такий спосіб: 1) власне виробництво та імпорт агрегованого товару можна додавати як частини однакової стандартної якості, хоча насправді виробляються одні види товарів, а ввозяться інші; 2) кожний агрегований товар може або ввозитися, або вивозитися, хоча насправді одні товари, що входять в агрегований товар, увозяться, інші — вивозяться, але по агрегованому товару має місце або чистий ввіз, або чистий вивіз;

впливу зовнішньої торгівлі на національну економіку (виявляється «золоте» правило зовнішньої торгівлі, відповідно до якого при заданому технологічному укладі існує найбільш раціональний обсяг зовнішньої торгівлі);

впливу зовнішньої торгівлі на національну економіку.

При формуванні моделі відкритої трисекторної економіки поряд із припущеннями, покладеними в основу замкненої трисекторної економіки, використовуються також такі зміни в моделі: 1) у прибутковій частині інвестиційного балансу з'явиться доданок Y_1 — ввіз інвестиційних товарів; 2) у видатковій частині матеріального балансу додасться доданок Y_0 — вивіз матеріалів; 3) на споживчий ринок поряд із власним виробництвом X_2 надійде також імпорт предметів споживання Y_2; 4) додасться зовнішньоторговельний баланс.

У результаті модель має такий вигляд.

Технологічний устрій у формі лінійно-однорідних виробничих функцій (ВФ):

$$X_i = F_i(K_i, L_i),\ i = 0, 1, 2\,.$$

Динаміка загальної кількості зайнятих:

$$L = L(0)e^{\nu t}.$$

Динаміка ОПФ секторів:

$$\frac{dK_i}{dt} = -\mu_i K_i + I_i\,,\ K_{i|t=0} = K_i(0),\ i = 0, 1, 2\,.$$

Трудовий баланс:

$$L = L_0 + L_1 + L_2\,.$$

Інвестиційний баланс:

$$X_1 + Y_1 = I_0 + I_1 + I_2\,.$$

Матеріальний баланс:

$$(1 - a_0)X_0 = a_1 X_1 + a_2 X_2 + Y_0\,.$$

Зовнішньоторговельний баланс:

$$q_0 Y_0 = q_1 Y_1 + q_2 Y_2 ;$$

де q_0, q_1, q_2 — світові ціни на продукцію матеріального, фондо-утворювального і споживчого секторів.

Зауваження. Зовнішньоторговельний баланс складено для країни із сировинною спрямованістю економіки. Однак його можна використовувати для моделювання економіки будь-якої країни, що має у своєму складі матеріальні та обробні галузі, якщо припустити можливість від'ємності показників зовнішньої торгівлі. Так, $Y_0 < 0$ означає імпорт матеріалів, $Y_1 < 0$ — експорт інвестиційних товарів, $Y_2 < 0$ — експорт споживчих товарів.

Уведемо такі відносні показники:

$\theta_i = \dfrac{L_i}{L}$, $s_i = \dfrac{I_i}{X_1 + Y_1}$ — частки i-го сектора в розподілі трудових і інвестиційних ресурсів;

$f_i(k_i) = \dfrac{F_i(K_i, L_i)}{L_i}$ — галузева продуктивність i-го сектора;

$x_i = \dfrac{X_i}{L}$ — народногосподарська продуктивність i-го сектора;

$k_i = \dfrac{K_i}{L_i}$ — фондоозброєність одного зайнятого в i-му секторі;

$y_0 = \dfrac{Y_0}{L}$ — чистий увіз матеріалів у розрахунку на одного зайнятого;

$y_1 = \dfrac{Y_1}{L}$ — чистий ввіз інвестиційних товарів у розрахунку на одного зайнятого;

$y_2 = \dfrac{Y_2}{L}$ — чистий увіз споживчих товарів у розрахунку на одного зайнятого.

Тоді модель відкритої трисекторної економіки у відносних показниках запишеться в такий спосіб:

$$x_i = \theta_i f_i(k_i), \ i = 0, 1, 2 ;$$

$$\frac{dk_i}{dt} = -\lambda_i k_i + \frac{s_i}{\theta_i}(x_1 + y_1), \ \lambda_i = \mu_i + v ;$$

$$k_i(0)=\frac{K_i(0)}{\theta_i L(0)},\ i=0,1,2;$$

$$\theta_0+\theta_1+\theta_2=1,\ \theta_i\geq 0,\ i=0,1,2; \tag{10.46}$$

$$s_0+s_1+s_2=1,\ s_i\geq 0,\ i=0,1,2;$$

$$(1-a_0)x_0=a_1x_1+a_2x_2+y_0,\ y_0\geq 0;$$

$$q_0y_0=q_1y_1+q_2y_2,\ y_1\geq 0,\ y_2\geq 0.$$

У наведеному запису моделі внутрішні вартісні баланси не розглядаються, оскільки їхня форма залежить від типу поводження секторів: чи діють вони в співробітництві чи конкурують один з одним.

Рівняння (10.46) мають стаціонарний розв'язок:

$$k_i^E=\frac{s_i\left(x_1^E+y_1\right)}{\lambda_i\theta_i},\ i=0,1,2,$$

де $x_1^E=\theta_1 f_1\left(k_1^E\right)$.

Якщо виробничі функції секторів є функціями Кобба—Дугласа:

$$F_i(K_i,L_i)=A_iK_i^{\alpha_i}L_i^{1-\alpha_i},$$

то цей розв'язок набирає вигляду:

$$k_1^E-\frac{s_1}{\lambda_1}A_1\left(k_1^E\right)^{\alpha_1}=\frac{s_1y_1}{\lambda_1\theta_1},\ x_1^E=\theta_1A_1\left(k_1^E\right)^{\alpha_1};$$

$$k_i^E=\frac{s_i\left(x_1^E+y_1\right)}{\lambda_1\theta_1},\ i=0,2.$$

При цьому питомі випуски секторів запишуться в такий спосіб (індекс стаціонарного розв'язку опущено):

$$x_i=B_i\theta_i^{1-\alpha_i}s_i^{\alpha_i}(x_1+y_1)^{\alpha_i},\ B_i=\frac{A_i}{\lambda^{\alpha_i}},\ i=0,1,2. \tag{10.47}$$

Варто зазначити, що константи B_i у співвідношенні (10.47) відрізняються від констант B_i, використаних у замкненій трисекторній економіці.

Для країни з достатньо розвиненою обробною промисловістю, але із сировинною спрямованістю економіки основним компонентом є y_1 — ввіз інвестиційних товарів (здебільшого машин і устаткування). У відповідь вивозяться матеріали (здебільшого паливо, електроенергія, сировина) в обсязі y_0. Увіз споживчих товарів можна розглядати як навантаження на ввіз інвестиційних товарів.

Уведемо параметр навантаження:

$$\gamma = \frac{q_2 y_2}{q_1 y_1}$$

— увіз споживчих товарів (у доларах) на 1 дол. ввозу інвестиційних товарів, тоді

$$y_2 = \gamma \frac{q_1}{q_2} y_1 ,$$

тому із зовнішньоторговельного балансу випливає:

$$y_0 = (1+\gamma)\frac{q_1}{q_0} y_1 .$$

Таким чином, при фіксованому значенні параметра навантаження γ усі компоненти зовнішньої торгівлі виражаються через компонент y_1 як провідний.

10.5.2. *Прогнозування умов входження національної економіки у світовий ринок*

Під можливістю зовнішньої торгівлі розуміється здатність економіки надати еквівалентний обсяг палива, електроенергії, сировини й інших матеріалів у світових цінах в обмін на закуповувані за рубежем інвестиційні і споживчі товари.

Доцільність торгівлі розглядається в таких двох формах: 1) посилення індустріального розвитку при збереженні чи збільшенні питомого споживання;

2) збільшення питомого споживання при збереженні чи посиленні індустріального розвитку.

У випадку, коли обсяги зовнішньої торгівлі невеликі, це з математичного погляду, означає, що можна лінеаризувати нелінійні залежності, відкидаючи квадратичні члени і члени вищого порядку малості (відносно $y_i, i = 0,1,2$).

Оскільки y_0, y_2 входять у модель лінійно, то потрібно лінеаризувати тільки питомі випуски секторів, що залежать від y_1, нелінійно.

Здавалося б, можливі два варіанти входження національної економіки у світовий ринок: 1) без зміни сформованого розподілу ресурсів, тобто тільки за рахунок регулювання складових зовнішньої торгівлі; 2) зі зміною сформованого розподілу ресурсів.

У першому випадку (тобто при сталості θ_i, s_i) знаходимо, використовуючи похідні питомих випусків секторів за y_1:

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = \frac{\alpha_i x_i}{(1-\alpha_1)x_1 + y_1}, \; i = 0,\ 1,\ 2,$$

тому при малих значеннях y_1 питомі випуски секторів набирають такого вигляду:

$$x_1 = x_1^0 + \frac{\alpha_1 y_1}{1-\alpha_1}, \; x_i = x_i^0 + \frac{\alpha_i x_i^0 y_1}{(1-\alpha_1)x_1^0}, \; i = 0,\ 2.$$

Підставимо останні вирази в рівняння матеріального балансу:

$$(1-a_0)\left[x_0^0 + \frac{\alpha_0 x_0^0 y_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right] = a_1\left[x_1^0 + \frac{\alpha_1 y_1}{1-\alpha_1}\right] + a_2\left[x_2^0 + \frac{\alpha_2 x_2^0 y_1}{(1-\alpha_1)x_1^0}\right] + y_0,$$

$$(1-a_0)x_0^0 = a_1 x_1^0 + a_2 x_2^0,$$

звідки

$$y_0 = \frac{y_1}{(1-\alpha_1)x_1^0}\left[\alpha_0(1-a_0)x_0^0 - \alpha_1 a_1 x_1^0 - \alpha_2 a_2 x_2^0\right].$$

Оскільки $\alpha_0 < \alpha_1$, $\alpha_0 < \alpha_2$, то вираз у квадратних дужках від'ємний, тому $y_0 < 0$, іншими словами, малий ввіз машин та устаткування в обсязі y_1 не може бути компенсований відповідним вивозом матеріалів $y_0 > 0$ (виявилося, що $y_0 < 0$), отже, перший випадок неможливий.

Таким чином, входження сировинної національної економіки на світовий ринок підсилює її сировинну спрямованість, оскільки потребує перекачування додаткових ресурсів у матеріальний сектор.

10.5.3. *Золоте правило зовнішньої торгівлі*

Під «золотим правилом зовнішньої торгівлі» розуміється такий вибір структурних і зовнішньоторговельних параметрів (θ, s, y), при якому виконані всі баланси і питоме споживання максимальне. Питоме споживання формується як сума власного виробництва та імпорту споживчих товарів у розрахунку на одного зайнятого. Задача ставиться і в стаціонарному стані й у питомих показниках.

Модель відкритої трисекторної економіки в стаціонарному стані з виробничими функціями Кобба—Дугласа та в питомих показниках записується в такий спосіб:
народногосподарська продуктивність секторів:

$$x_i = B_i \theta_i^{1-\alpha_i} s_i^{\alpha_i} s_i^{\alpha_i} \left(x_1 + y_1\right)^{\alpha_i}, \;\; B_i = A_i \lambda_i^{-\alpha_i}, \;\; i = 0, 1, 2; \qquad (10.48)$$

трудовий баланс:

$$\theta_0 + \theta_1 + \theta_2 = 1, \;\; \theta_i \geq 0;$$

інвестиційний баланс:

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1, \;\; s_i \geq 0;$$

матеріальний баланс:

$$(1 - a_0) x_0 = a_1 x l + a_2 x_2 + y_0;$$

зовнішньоторговельний баланс:

$$q_0 y_0 = q_1 y_1 + q_2 y_2,$$

де y_0 — питомий вивіз матеріалів;

y_1, y_2 — питомий ввіз інвестиційних і споживчих товарів;

q_0, q_1, q_2 — піни світового ринку на матеріали, інвестиційні та споживчі товари;

a_0, a_1, a_2 — коефіцієнти прямих матеріальних витрат матеріального, фондоутворювального і споживчого секторів.

Зазначені дев'ять змінних пов'язані чотирма балансовими співвідношеннями, тому в їхній зміні існує п'ять ступенів волі. Ці ступені волі можна використовувати для такого вибору змінних, котрий забезпечує максимум питомого споживання $c(\theta, s, y) = x_2(\theta, s, y) + y_2$.

Отже, приходимо до такої задачі нелінійного програмування:

$$\max_{(\theta,s,y)}\left[B_2\theta_2^{1-\alpha_2}s_2^{\alpha_2}\left(x_1+y_1\right)^{\alpha_2}+y_2\right]$$

при виконанні обмежень, в яких $x_i=x_i(\theta,s,y)$ задаються співвідношеннями (10.48).

За допомогою введення п'яти вільних змінних (за кількістю ступенів волі) зведемо задачу нелінійного програмування до задачі відшукання безумовного максимуму функції п'яти перемінних.

У зв'язку з провідною роллю інвестицій у розвитку економіки до вільних змінних доцільно включити θ_1, s_1 (визначають власне виробництво інвестиційних товарів) і y_1 (питомий імпорт інвестиційних товарів).

Якщо встановлені частки ресурсів θ_1, s_1 спрямовуються у фондоутворювальний сектор, то при виконанні (10.48) матеріальному і споживчому секторам залишається $(1-\theta_1)$ трудових і $(1-s_1)$ інвестиційних ресурсів. Уведемо змінні *h*, *l*, що характеризують розподіл цих залишкових ресурсів між матеріальним і споживчим секторами:

$$\theta_0=(1-lh)(1-\theta_1),\ \theta_2=lh(1-\theta_1),$$
$$s_0=(1-h)(1-s_1),\ s_2=h(1-s_1), \qquad (10.49)$$

де *lh*, *h* частки споживчого сектора в розподілі трудових і інвестиційних ресурсів, що дісталися матеріальному і споживчому секторам, причому *l* можна інтерпретувати як відносну трудозабезпеченість інвестиційних ресурсів, що спрямовуються у споживчий сектор.

При будь-яких значеннях l, та $h(0\le h\le 1)$ заданий ними розподіл ресурсів задовольняє трудовий та інвестиційний баланси, при цьому питомі випуски матеріального і споживчого секторів перетворюються до вигляду:

$$x_0=B_0\ \ (1-lh)^{1-\alpha_0}(1-h)^{\alpha_0}(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0}(x_1+y_1)^{\alpha_0},$$
$$x_2=B_2\ \ l^{1-\alpha_2}h\ \ (1-\theta_1)^{1-\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2}(x_1+y_1)^{\alpha_2}, \qquad (10.50)$$

тому матеріальний баланс набирає форми:

$$\begin{aligned}(1-a_0)B_0(1-lh)^{1-\alpha_0}(1-h)^{\alpha_0}(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0}(x_1+y_1)^{\alpha_0}&=\\=a_1x_1+a_2B_2\,l^{1-\alpha_2}h(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2}(x_1+y_1)^{\alpha_2}+y_0,&\end{aligned} \qquad (10.51)$$

де $x_1=x_1(\theta,s_1,y_1)$ — розв'язок рівняння $x_1=B_1\theta_1^{1-\alpha_1}s_1^{\alpha_1}(x_1+y_1)^{\alpha_1}$.

Ліва частина (10.50) є спадною функцією h, що перетворюється на в нуль при $h = 1$, а права частина — лінійною зростаючою функцією h, тому (10.52) має єдиний розв’язок $h = h(l, \theta_1, s_1, y_0, y_1)$, якщо

$$(1 - a_0)B_0(1 - \theta_1)^{1-\alpha_0}(1 - s_1)^{\alpha_0}(x_1 + y_1)^{\alpha_0} > a_1 x_1 + y_0 . \qquad (10.53)$$

Таким чином, якщо умова (10.53) виконується, то вибором h можна забезпечити виконання матеріального балансу при будь-яких невід’ємних значеннях l. Тому до вільних змінних доцільно включити l.

Питомі значення ввозу—вивозу y_0, y_1, y_2 пов’язані зовнішньоторговельним балансом, при цьому до вільних змінних уже введено питомий ввіз інвестиційних товарів y_1. Оскільки кінцева мета економіки полягає у виробництві споживчих товарів, то ще однією вільною змінною є сенс взяти ввіз споживчих товарів у доларах на 1 дол. ввозу інвестиційних товарів (або у гривнях на 1 грн)

$$\gamma = \frac{q_2 y_2}{q_1 y_1} .$$

Тоді питомий експорт матеріалів і питомий імпорт предметів споживання будуть у такий спосіб виражені через вільні змінні y_1, γ:

$$y_0 = b_0(1 + \gamma)y_1 ,$$

$$y_2 = b_2 \gamma y_1 ,$$

де $b_0 = \dfrac{q_1}{q_0}$ — коефіцієнт, що показує, на скільки гривень потрібно продати матеріалів, щоб купити на 1 грн інвестиційних товарів;

$b_2 = \dfrac{q_1}{q_2}$ — коефіцієнт, що показує, на скільки гривень потрібно продати предметів споживання, щоб купити на 1 грн інвестиційних товарів.

При переході до вільних змінних розв’язання задачі нелінійного програмування зводиться до відшукання безумовного екстремуму функції від п’яти вільних змінних:

$$\max_{(l, \theta_1, s_1, y_1, \gamma)} B_2 l^{1-\alpha_2} h(1 - \theta_1)^{1-\alpha_2}(1 - s_1)^{\alpha_2}(x_1 y_1)^{\alpha_2} + b_2 \gamma y_1 ,$$

де $h = h(l, \theta_1, s_1, y_1, \gamma)$ — розв’язок рівняння

$$(1-a_0)B_0(1-lh)^{1-\alpha_0}(1-h)^{\alpha_0}(1-\theta_1)^{1-\alpha_0}(1-s_1)^{\alpha_0}(x_1+y_1)^{\alpha_0}=$$
$$=a_1x_1+a_2B_2\,l^{1-\alpha_2}h(1-\theta_1)^{1-\alpha_2}(1-s_1)^{\alpha_2}(x_1+y_1)+b_0(1+\gamma)y_1; \qquad (10.52)$$

$x_1=x_1(\theta_1,s_1,y_1)$ — розв'язок рівняння

$$x_1=B_1\theta_1^{1-\alpha_1}s_1^{\alpha_1}(x_1+y_2)^{\alpha_1},$$

$$0<l<\infty,\ 0<\theta_1\le 1,\ 0<s_1\le 1,\ 0\le y_1<\infty,\ 0<\gamma<\infty.$$

У цій постановці можна оптимізувати питоме споживання за будь-яким набором вільних змінних. Далі розглянемо найбільш раціональний вибір структурної політики та обсягу й структури зовнішньої торгівлі.

2. Золоте правило розподілу ресурсів

У цьому контексті під ресурсами маємо на увазі живу працю в обсязі L та інвестиційні ресурси в обсязі $X_1 + Y_1$. Якщо вільні змінні $(l,\theta_1,s_1,y_1,\gamma)$ задані, то рівняння (10.51) однозначно визначають розподіл ресурсів між секторами.

Для визначення золотого правила знаходимо і прирівнюємо до нуля похідні питомого споживання $c=x_2+b_2\gamma y_1$ за вільними змінними l,θ_1,s_1:

$$\frac{\partial c}{\partial l}=\frac{\partial x_2}{\partial l}+\frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial l}=0;$$

$$\frac{\partial c}{\partial \theta_1}=\frac{\partial x_2}{\partial \theta_1}+\frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial \theta_1}=0;$$

$$\frac{\partial c}{\partial s_1}=\frac{\partial x_2}{\partial s_1}+\frac{\partial x_2}{\partial h}\cdot\frac{\partial h}{\partial s_1}=0.$$

Похідні h знаходимо диференціюванням співвідношення (10.52) за відповідною змінною:

$$\frac{\partial h}{\partial l}=-\frac{h(1-h)\left[(1-\alpha_0)lh(1-a_0)x_0+(1-\alpha_2)(1-lh)a_2x_2\right]}{l\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0+(1-h)(1-lh)a_2x_2\right]},$$

$$\alpha=\alpha_0+(1-\alpha_0)l;$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta_1} = (1-\alpha_1)h(1-h)(1-lh)\cdot\left\{\left[\alpha_0 - \left(1+\frac{(1-\alpha_0)y_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right)\theta_1\right](1-a_0)x_0 + \right.$$

$$+\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)(1-\theta_1)a_1x_1 - \left[\alpha_2 - \left(1+\frac{(1-\alpha_2)y_1}{(1-\alpha_1)x_1}\right)\theta_1\right]a_2x_2\Bigg\}\Big/$$

$$\Big/\theta_1(1-\theta_1)\left(1-\alpha_1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0 + (1-h)(1-lh)a_2x_2\right];$$

$$\frac{\partial h}{\partial s_1} = \frac{h(1-h)(1-lh)\left[\alpha_0 b(1-a_0)x_0 - \alpha_1\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)(1-s_1)a_1x_1 - \alpha_2 b a_2 x_2\right]}{s_1(1-s_1)\left(1-\alpha_1+\frac{y_1}{x_1}\right)\left[h(\alpha-lh)(1-a_0)x_0 + (1-h)(1-lh)a_2x_2\right]},$$

де $b = \alpha_1 - \left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)s_1$.

Після виконання всіх викладок остаточно знаходимо неявні рівняння для визначення оптимальних значень вільних змінних (золоте правило):

$$l^* = \frac{\alpha_0(1-\alpha_2)}{\alpha_2(1-\alpha_0)-(\alpha_2-\alpha_0)h};$$

$$\theta_1^* = \frac{[\alpha_2 h(\alpha-lh)+\alpha_0(1-h)(1-lh)] - (1-h)(1-lh)\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\delta_1}{\left(1+\frac{1-\alpha_2}{1-\alpha_1}\cdot\frac{y_1}{x_1}\right)h(\alpha-lh) + \left(1+\frac{1-\alpha_0}{1-\alpha_1}\cdot\frac{y_1}{x_1}\right)h(1-h) - (1-h)(1-lh)\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)\delta_1};$$

$$s_1^* = \alpha_1\frac{[\alpha_2 h(\alpha-lh)+\alpha_0(1-h)(1-lh)]\left(1+\frac{y_1}{x_1}\right)^{-1} - \delta_1}{[\alpha_2 h(\alpha-lh)+\alpha_0(1-h)(1-lh)] - \alpha_1\delta_1}, \qquad (10.53)$$

де $\delta_1 = \frac{a_1x_1}{(1-a_0)x_0}$ — частка фондоутворювального сектору в розподілі товарної продукції матеріального сектору.

Рівняння (10.53) є справді неявними для відповідних змінних, оскільки x_1, h, δ_1, що містяться в правій частині цих рівнянь є функціями вільних змінних. Кожне з рівнянь можна розв’язувати методом послідовних наближень.

Принципове значення цих рівнянь полягає в тому, що саме їхнє існування показує безперспективність надмірного розвитку одних секторів на збиток іншим. Так, перетікання ресурсів у фондоутворювальний сектор спочатку приводить до зростання випуску предметів споживання, але по досягненні оптимальних значень θ_1^*, s_1^* подальше «підживлення» сектора ресурсами приводить до скорочення випуску споживчих товарів, хоча випуск інвестиційних товарів, як і раніше, зростатиме.

З рівнянь (10.53) можна безпосередньо вивести різні макроекономічні рекомендації. Розглянемо, наприклад, дві з них:

1) якщо $\alpha_0 < \alpha_2$ (матеріальний сектор менш технологічно розвинений, чим споживчий), то $l^* < 1$, що означає меншу частку споживчого сектору в трудових ресурсах порівняно з його часткою в інвестиційних ресурсах, тоді як на практиці спостерігається зовсім протилежний феномен;

2) оптимальні частки фондостворюючого сектора в трудових та інвестиційних ресурсах прямо залежать від $\frac{y_1}{x_1} = \frac{Y_1}{X_1}$, тобто від співвідношення імпорту і власного випуску інвестиційних товарів.

3. Золоте правило зовнішньої торгівлі

З-поміж вільних змінних безпосередньо зовнішню торгівлю характеризують два: y_1 (ввози інвестиційних товарів у розрахунку на одного зайнятого чи рівень зовнішньої торгівлі) і γ (навантаження — увіз предметів споживання в доларах (гривня) у розрахунку на 1 дол. (1 грн) ввозу інвестиційних товарів чи показник структури зовнішньої торгівлі).

Викладки, подібні до наведених раніше, приводять до такого рівняння для визначення оптимального рівня зовнішньої торгівлі:

$$y_1^* = \frac{\left[\alpha_1\delta_1 - \left(\alpha_0 + \alpha_2 \frac{\varepsilon}{1-h}\right)\right]x_2}{\left(\beta_2 - \frac{\beta_0}{a_2}\right)\delta_2 + \beta_2\varepsilon} - (1-\alpha_1)x_1, \qquad (10.54)$$

де $\varepsilon = \frac{h(\alpha - lh)}{(1-h)(1-lh)}$ — безрозмірна величина, $0 \le \varepsilon < \infty$, $\alpha = \alpha_0 + (1-\alpha_0)l$;

$h = h(l, \theta_1, s_1, y_1, \gamma)$ — розв'язок рівняння матеріального балансу;

δ_1, δ_2 — частки фондостворюючого і споживчого секторів у витраті товарної продукції матеріального сектору;

$\beta_0 = \frac{q_1}{q_0}(1+\gamma)$ — коефіцієнт, який показує, на скільки гривень потрібно вивезти матеріалів, щоб купити на світовому ринку на 1 грн інвестиційних товарів (при навантаженні γ);

$\beta_2 = \frac{q_1}{q_2}\gamma$ — коефіцієнт, що показує, на скільки гривень можна придбати на світовому ринку предметів споживання (при навантаженні γ) на 1 грн купівлі інвестиційних товарів.

Досліджуємо вираз (10.54) для оптимального питомого ввозу інвестиційних товарів. Насамперед зосередимо увагу на різниці

$$\beta_2 - \frac{\beta_0}{a_2},$$

яка має такий сенс: зменшуване β_2 — увіз предметів споживання в гривнях на 1 грн ввозу інвестиційних товарів, від'ємник $\frac{\beta_0}{a_2}$ — недоодержання предметів споживання на 1 грн ввозу інвестиційних товарів, викликане вивозом матеріалів в обсязі β_0. Для того щоб торгівля була доцільною, ця різниця має бути невід'ємною. Тому знаменник у першому члені вираження (10.54) додатний.

Знак чисельника першого члена визначається знаком виразу у фігурних дужках. Останній додатний за умови

$$\alpha_1\delta_1 > \alpha_0 + \alpha_2\varepsilon,$$

тобто технологічний рівень α_1 і частка фондоутворювального сектору у витраті матеріалів δ_1 мають бути достатньо великими, що означає доволі високий ступінь розвитку власного фондоутворювального виробництва.

З виразу (10.54) також випливає, що оптимальний рівень питомого ввозу інвестиційних товарів існує не тільки при високому рівні власного фондоутворювального виробництва, а й при порівняно високому розвитку власного виробництва предметів споживання, що визначається нерівністю

$$\frac{x_2}{x_1} > \frac{(1-\alpha_1)\left[\left(\beta_2 - \frac{\beta_0}{a_2}\right)\delta_2 + \beta_2\varepsilon\right]}{\alpha_1\delta_1 - (\alpha_0 + \alpha_2\varepsilon)}.$$

У протилежному випадку оптимального значення y_1^* не існує і природним обмежувачем для зростання обсягів торгівлі є технологічні можливості матеріального сектору.

Оптимального значення навантаження γ не існує.

Справді $\left(c = x_2 + b_2\gamma y_1\right)$:

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = \frac{\partial x_2}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial \gamma} + b_2 y_1 ;$$

$$\frac{\partial h}{\partial y_1} = -\frac{h(1-h)(1-lh)b_0 y_1}{h(\alpha - lh)(1-a_0)x_0 + (1-h)(1-lh)a_2 x_2} < 0 ,$$

тому

$$(D_0 = B_0 (1-\theta_1)^{1-\alpha_0} (1-s_1)^{\alpha_0} (x_1 + y_1)^{\alpha_0}$$
$$D_2 = B_2 (1-\theta_1)^{1-\alpha_2} (1-s_1)^{\alpha_2} (x_1 + y_1)^{\alpha_2}):$$

$$\frac{\partial c}{\partial \gamma} = b_0 y_1 \left[-\frac{1}{1 + \frac{(\alpha - lh)(1-a_0)D_0}{(1-h)^{1-\alpha_0}(1-lh)^{\alpha_0} a_2 D_2}} + \frac{a_2 b_2}{b_0} \right] > 0 ,$$

оскільки $a_2 b_2 > b_0$.

Отже, навантаження, загалом кажучи, доцільно збільшувати. Однак існує верхня межа навантаження, задана рівнянням

$$h(\overline{\gamma}) = 0,$$

при цьому рівняння матеріального балансу набирає вигляду:

$$(1-a_0)D_0 = a_1 x_1 + (1+\vec{\gamma})\, b_0 y_1 ,$$

$$x_1 = B_1 \theta_1^{1-\alpha_1} s_1^{\alpha_1} (x_1 + y_1)^{\alpha_1} ,\ x_1 = x_1(\theta_1, s_1, y_1) ,$$

звідки $\overline{\gamma}(l, \theta_1, s_1, y_1) = \dfrac{(1-a_0)D_0 - a_1 x_1 - b_0 y_1}{b_0 y_1}$.

Отже, доходимо таких висновків.

1. Якщо виходити з критерію максимізації стаціонарного питомого споживання в разі заданого технологічному устрою, то для країн із недостатньо розвиненою обробною промисловістю

доцільно вивозити стільки сировини та матеріалів, скільки дозволяють технологічні можливості матеріального сектору. Проте з вичерпанням сировинних ресурсів у недалекому майбутньому перед цими країнами все одно постане проблема переходу до нового, вищого технологічного устрою.

2. Для країн із достатньо розвиненою обробною промисловістю та сировинною спрямованістю економіки існує критичний рівень вивозу сировини та інших матеріалів (в обмін на інвестиційні та споживчі товари), перевищувати який недоцільно. Чим більш розвинена обробна промисловість, тим нижчий цей критичний рівень.

3. Вирішальну роль у розвитку економіки відіграє фондоутворювальний сектор. При фіксованому рівні зовнішньої торгівлі питомі випуски всіх секторів зростають при збільшенні вкладень ресурсів у фондоутворювальний сектор аж до досягнення критичного рівня. У разі перевищення критичного рівня виробництво інвестиційних товарів, як і раніше, зростатиме, а виробництво споживчих товарів — скорочуватиметься.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Дебітор уклав договір на 100 тис. марок. Процентна ставка — 3 %, щорічне повернення кредиту та відповідних процентів — 6 тис. марок. Через скільки років клієнт поверне 40 % кредиту?

2. Інвестор, що розпоряджується сумою в 300 тис. марок, може вкласти свій капітал в акції автомобільного концерну A та будівельного підприємства B. Щоб зменшити ризик, акцій A необхідно придбати принаймні в 2 рази більш, ніж акцій B, причому останніх — не більш ніж на 100 тис. марок. Дивіденди за акціями A становлять 8 % на рік, а за акціями B — 10 %. Який максимальний можливий прибуток можна одержати за перший рік?

3. Інвестор, що має 300 тис. марок, може вкласти свій капітал в акції A, B, C. Процентні ставки за акціями є незалежними випадковими величинами R_A, R_B, R_c з математичними сподіваннями $MR_A = 8$ %; $MR_B = 10$ %; $MR_C = 12$ % і стандартними відхиленнями $\sigma_A = 1$ %, $\sigma_B = 2$ %, $\sigma_C = 4$ %. Як потрібно скомбінувати купівлю різних акцій, щоб за перший рік одержати в середньому 30 тис. марок дивідендів при мінімальній дисперсії?

4. Чим відрізняється модель Кейнса від класичної моделі ринкової економіки?

5. У чому подібність і відмінність між кейнсіанським і монетаристським підходами до керування економікою?

6. Які умови рівноваги на фінансовому ринку?

7. Довести, що функція попиту на робочу силу в конкурентній економіці є спадною функцією реальної заробітної плати.

8. Укладено кредитний договір на 200 тис. марок. Наприкінці кожного року клієнт повинен виплачувати постійну суму E (повернення частини кредиту і відповідних процентів). Знайти E, якщо процентна ставка дорівнює 2,5 % і до кінця п'ятого року клієнт повинен повернути 40 % кредиту.

9. Довести, що за відсутності кореляції і при

$$m_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} m_i \left(m_i - r_0\right)}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_i^2} \left(m_i - r_0\right)} = \overline{m}_p\left(r_0\right)$$

структура ризикованої частини портфеля цінних паперів, знайдена за наявності неризикованих цінних паперів з ефективністю r_0, збігається зі структурою портфеля, що не містить неризикованої частини (при виборі $m_p = \overline{m}_p\left(r_0\right)$).

10. Який економічний зміст умов виникнення і самопідтримання інфляції?

11. Які, на ваш погляд, інтервали зміни параметра θ_2 характерні для реальної економіки?

12. В яких випадках інфляція впливає на економіку?

13. В яких випадках, на ваш погляд, можна переносити висновки щодо стаціонарних станів економіки на перехідні її стани?

14. Знайдіть умови можливості та доцільності входження зовнішньої торгівлі у світову економіку при комбінації першого варіанта (перекачування в матеріальний сектор ресурсів зі споживчого сектору) і другого варіанта (перекачування ресурсів із фондоутворювального сектору).

15. У чому відмінність золотого правила розподілу ресурсів у відкритій трисекторній економіці від відповідного правила в замкненій трисекторной економіці?

16. Знайдіть золоте правило зовнішньої торгівлі при $\theta_1 = s_1$, $l = 1$, $\gamma = 1$.

Як у золотому правилі зовнішньої торгівлі відбито кон'юнктуру світового ринку?

РОЗДІЛ 11

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ДЕРЖАВНОГО РЕГУЛЮВАННЯ ЕКОНОМІКИ

11.1. Основні поняття

Основне завдання державного регулювання економіки полягає в тому, щоб формувати й підтримувати на ринках праці, капіталу, товарів і послуг такі правила взаємодії суб'єктів економіки, згідно з якими економіка функціонувала й розвивалася б ефективно. Під ефективністю тут розуміється рух у напрямку досягнення визначених соціально-орієнтованих результатів за якомога менших витрат.

Це можливо коли проводиться така економічна політика держави, яка забезпечує погоджені соціально-економічні очікування суспільства з виробничими та фінансово-інвестиційними можливостями економіки

Найважливішим важелем державного регулювання є податки.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Податки*** — це обов'язкові збори, стягнуті державними органами із суб'єктів, господарювання та громадян за ставками, установленими законом. Загальний розмір податкового тягаря визначається сумою витрат держави на виконання його функцій (керування, оборона, суд, охорона порядку і т. ін.). У цьому полягає фіскальна функція податків.

Державні витрати мають тенденцію зростання в зв'язку з ускладненням економіки й ускладненням управлінських завдань, тоді як конкретні суб'єкти оподатковування (юридичні і фізичні особи) зацікавлені в зменшенні податкового тягаря. Для кожного суб'єкта господарювання в конкретній економічної ситуації існує граничне значення податкового навантаження, перевищення якого призводить до різкого зниження ділової активності, а при значному перевищенні — і до часткового чи навіть повного згортання виробництва . Це явище добре відбиває крива Лаффера (рис. 11.1).

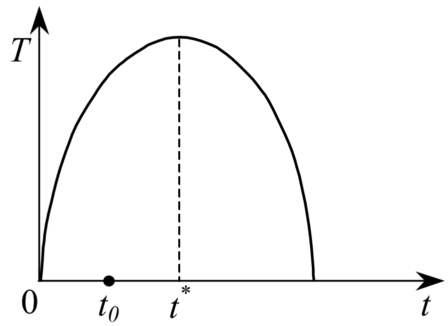


Рис. 11.1. Залежність збору податків T від податкової ставки t

В основу побудови цієї кривої покладено припущення, що випуск продукції фірми (податкова база) при $t \geq t_0$ починає скорочуватися, тобто $X'(t) < 0$ при $t \geq t_0$. Тому бюджетні надходження (збір податків) як функція податкової ставки t

$$T = tX(t),$$

поводяться так, як це показано на рис 11.1, при цьому податкова ставка t, що забезпечує максимум надходження податків, визначається з умови:

$$T'(t^*) = 0,$$

або

$$t^* = -\frac{X}{X'},\ t^* > t_0.$$

Зауважимо, що при $t < t^*$ фірма діє за критерієм максимуму прибутку, а при $t \geq t^*$ — за критерієм виживання, тобто збереження своєї ніші на ринку.

Доречно навести висловлення А. Сміта: «У разі якоїсь особливої крайності народ під впливом сильної суспільної наснаги може зробити велике зусилля і віддати навіть частину свого капіталу, щоб прийти на допомогу державі, але зовсім немислимо, щоб він діяв так упродовж більш чи менш тривалого часу; а якби він робив це, податок би незабаром розорив його такою мірою, що він узагалі втратив би здатність підтримувати державу».

Зі сказаного випливає регулювальна функція податків: послаблюючи податковий тягар, держава може посилювати ділову активність, у протилежному випадку — гальмувати її.

Пряму антиінфляційну властивість має ціновий податок з базовою ціною. Якщо фактична ціна перевищує базову, звичайний податок зростає пропорційно до відношення фактичної ціни до базового (ціновий податок дорівнює збільшенню звичайного податку); якщо дорівнює, — то ціновий податок дорівнює нулю; якщо вона менша за базову, — то звичайний податок відносно фактичної ціни зменшується пропорційно до базового. Тому до переліку базових товарів варто включати продукцію підприємств-монополістів. Нині дуже поширеним явищем стало приховування податкової бази для уникнення податків (бартер, розрахунок наявними з контрагентами, заниження фонду оплати праці тощо). Тому багато податків виконують функцію подолання цього явища.

Основні податки на суб'єкти господарювання можна розбити на дві групи:

1) податки з капіталу (15—30 % загальних зборів із підприємств);

2) податки на валовий дохід і його частини (головна складова зборів із підприємств).

Податки з капіталу лише побічно залежать від результатів господарської діяльності, зате стимулюють підприємства рятуватися від неефективних фондів і з максимальною вигодою використовувати капітальні ресурси, що залишилися. Відхід від сплати цих податків украй скрутний.

Податки, що утворюють другу групу, добре відстежуються з рис. 11.2. Податкова база для кожного наступного податку зменшується за рахунок виробничо-господарських витрат і виплат за попередніми податками.

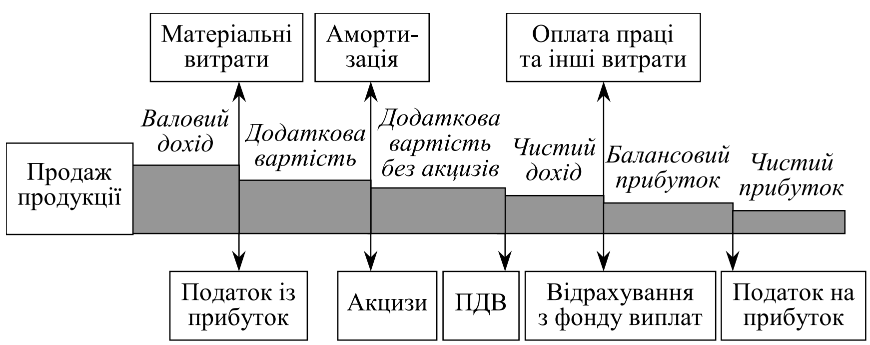


Рис. 11.2. Податки на вихідний фінансовий потік підприємства

При збільшенні ставок податку з виторгу підприємства припиняють випуск тих видів продукції, виробництво яких пов'язане з великими витратами. Податок на додану вартість забирає у виробника частину коштів, які можна було б надалі використати для розвитку виробництва. Ще більшою мірою це стосується до податку на прибуток: податок на інвестиційну частину прибутку скорочує інвестиції і тим самим сповільнює майбутнє зростання, а податок на споживану частину прибутку знижує інтерес виробника до розвитку.

Загалом, податки на вихідний фінансовий потік підприємства виконують фіскальну функцію, збільшення цих податків призводить до зростання цін і зниження обсягів виробництва. Зі зниженням цих податків прискорюється економічний розвиток, що спочатку може супроводжуватися бюджетним дефіцитом і, отже, додатковою емісією грошей. Проте грошова маса, що збільшилася, потім може бути поглинена за рахунок зростання виробництва.

При переході від мікрорівня (підприємство, організація) на макрорівень усі показники (включаючи податки) мають бути у природний спосіб агреговані. Основою математичного аналізу на макрорівні є подання результату функціонування всієї економіки (або її великого підрозділу) у вигляді виробничої функції від витрачених агрегованих ресурсів:

$$X = F(K, L), \tag{11.1}$$

де X — агрегований випуск продукції (наприклад, у незмінних цінах базового року);

K — капітал (або його найважливіша частина — основні виробничі фонди у незмінних цінах базового року);

L — кількість зайнятих, млн осіб.

Отже, усі податки мають бути зведені до податків на випуск, працю та капітал. Проте податок на ресурс призводить до зменшення цього ресурсу, а зрештою — до відповідного зменшення випуску. Це зменшення можна обчислити за виробничою функцією, а тому такий податок також можна перевести в податок на випуск.

Звідси випливає, що при аналізі оподаткування на макрорівні всі податки необхідно звести до податків на випуск.

Перерахування податків нітрохи не суперечить завданням удосконалення системи оподаткування на мікрорівні: кожна зміна в цій системі приводить до відповідної зміни ставок податків на випуски великих підрозділів економіки. Водночас порівняльний аналіз ваги оподаткування великих підрозділів економіки дає змогу робити висновки про перерозподіл податкового тягаря між цими підрозділами, тобто визначити можливі напрямки вдосконалення системи оподаткування. Саме про це йтиметься далі.

11.2. Прогнозування податкової політики в трисекторній економіці

Розглянемо математичний аналіз замкненої трисекторної економіки, в якій існують три види діяльності, розміри яких (випуски секторів у натуральному виразі) становлять X_0, X_1, X_2. Якщо ставки податків на одиницю діяльності дорівнюють відповідно t_0, t_1, t_2, то збори податків із зазначених секторів дорівнюють відповідно t_0X_0, t_1X_1, t_2X_2. Тому загальний збір такий:

$$T = t_0X_0 + t_1X_1 + t_2X_2. \qquad (11.2)$$

Оскільки економіка розглядається як замкнена, то валовий дохід кожного сектора витрачається за такими чотирма основними напрямками: на придбання матеріалів (палива, електроенергії, сировини й інших матеріалів), на придбання інвестиційних товарів (для амортизації та розширення виробництва, зокрема за рахунок прибутку); на виплату заробітної плати і стимулювальних надбавок за рахунок прибутку; на виплату податків.

Тому баланси доходів і витрат секторів запишуться так:

$$p_0X_0 = p_0a_0X_0 + p_1s_0X_1 + w_0L_0 + t_0X_0, \qquad (11.3)$$

$$p_1X_1 = p_0a_1X_1 + p_1s_1X_1 + w_1L_1 + t_1X_1,$$

$$p_2X_2 = p_0a_2X_2 + p_1s_2X_1 + w_2L_2 + t_2X_2,$$

де p_i — ціна продукції i-го сектору;

w_i — заробітна плата з надбавками в розрахунку на одного зайнятого в i-му секторі;

s_i — частка i-го сектору в розподілі продукції фондоутворювального сектору;

t_i — ставка податку на одиницю випуску i-го сектору.

Беручи до уваги товарну продукцію секторів, перетворюємо вартісні баланси (11.3) до вигляду:

$$p_0(1 - a_0)X_0 = p_1s_0X_1 + w_0L_0 + t_0X_0;$$

$$p_1(1 - s_1)X_1 = p_0a_1X_1 + w_1L_1 + t_1X_1; \qquad (11.4)$$

$$p_2X_2 = p_0a_2X_2 + p_1s_2X_1 + w_2L_2 + t_2X_2.$$

Додамо ці три баланси почленно і перенесемо в ліву частину всі члени, що містять як множник ціни на продукцію секторів:

$$p_0[(1-a_0)X_0 - a_1X_1 - a_2X_2] +$$
$$+ p_1X_1(1-s_0-s_1-s_2) + p_2X_2 = \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i.$$

Оскільки виконуються матеріальний та інвестиційний баланси:

$$(1-a_0)X_0 = a_1X_1 + a_2X_2;$$

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1,$$

то коефіцієнти при цінах p_0, p_1 дорівнюють нулю; тому в підсумку дістаємо баланс пропозиції та попиту на предмети споживання:

$$p_2X_2 = \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i.$$

Тому систему вартісних балансів (11.4) можна замінити на еквівалентну їй систему:

$$p_0(1-a_0)X_0 = p_1s_0X_1 + w_0L_0 + t_0X_0;$$

$$p_1(1-s_1)X_1 = p_0a_1X_1 + w_1L_1 + t_1X_1;$$

$$p_2X_2 = \sum_{i=0}^{2} w_iL_i + \sum_{i=0}^{2} t_iX_i.$$

Ця система після ділення лівої і правої частин на L набере такого вигляду:

$$p_0(1-a_0)x_0 = p_1s_0x_1 + w_0\theta_0 + t_0x_0;$$

$$p_1(1-s_1)x_1 = p_0a_1x_1 + w_1\theta_1 + t_1x_1;$$

$$p_2x_2 = \sum_{i=0}^{2} w_i\theta_i + \sum_{i=0}^{2} t_ix_i,$$

де $\theta_i = \dfrac{L_i}{L}$ — частка i-го сектору у витратах трудових ресурсів;

$x_i = \dfrac{X_i}{L}$ — народногосподарська продуктивність (питомий випуск) i-го сектору.

Далі спрогнозуємо перерозподіл податкового тягаря, маючи на меті проілюструвати можливості математичного аналізу при дослідженні важелів державного впливу на економіку.

Економіка досліджується як збалансована трисекторна система, що перебуває в сталому режимі. Оскільки розглядаються малі зміни податкових ставок, те перехідними процесами в економічній системі можна знехтувати. Окрім того, вважатимемо, що при малих змінах податкових ставок ставки заробітної плати (w_0, w_1, w_2), а отже, і поділ праці між секторами $(\theta_0, \theta_1, \theta_2)$ лишаються незмінними.

У такому разі згідно з наведеними щойно результатами збалансований стан трисекторної економіки в сталому режимі описується такими натурально-вартісними балансами в розрахунку на одного зайнятого у виробничій сфері (баланс поділу праці опущено відповідно до зроблених припущень):
баланс розподілу інвестицій —

$$s_0 + s_1 + s_2 = 1,\ s_i > 0,\ i = 0, 1, 2; \qquad (11.5)$$

матеріальний баланс —

$$(1 - a_0)x_0 = a_1 x_1 + a_2 x_2; \qquad (11.6)$$

баланс доходів і витрат матеріального сектора —

$$p_0(1 - a_0)x_0 = p_1 s_0 x_1 + w_0 \theta_0 + t_0 x_0; \qquad (11.7)$$

баланс доходів і витрат фондоутворювального сектору —

$$p_1(1 - s_1)x_1 = p_0 a_1 x_1 + w_1 \theta_1 + t_1 x_1; \qquad (11.8)$$

баланс пропозиції та попиту на предмети споживання —

$$p_2 x_2 = \sum_{i=0}^{2} (w_i \theta_i + t_i x_i). \qquad (11.9)$$

У вартісних балансах (11.5) — (11.9) використано ставки податку на одиницю продукції t_0, t_1, t_2. Якщо розрахунковим шляхом перейти до подушного принципу числення податків, то розрахункові ставки податків на одного зайнятого по секторах наберуть вигляду:

$$\widehat{t_i} = \frac{t_i X_i}{L_i} = \frac{t_i X_i}{\theta_i L} = \frac{t_i x_i}{\theta_i},$$

де X_i, L_i, K_i — випуск продукції, кількість зайнятих та основні виробничі фонди *i*-го сектора, при цьому випуск X_i задається як лінійно-однорідна виробнича функція $X_i = F_i(K_i, L_i)$; L — загальна кількість зайнятих у виробничій сфері.

Загальний обсяг збору податків

$$T=\sum_{i=0}^{2}t_iX_i=L\sum_{i=0}^{2}t_ix_i;$$

середній збір податків на одного зайнятого

$$\widehat{t}=\frac{T}{L}=\sum_{i=0}^{2}t_ix_i=\sum_{i=0}^{2}\widehat{t}_i\theta_i.$$

Керівний вплив держави в податковій політиці полягає у зміні податкових ставок — переході від початкових значень t_0, t_1, t_2 до нових значень $t_0+\Delta t_0$, $t_1+\Delta t_1$, $t_2+\Delta t_2$. Далі прирости Δt_0, Δt_1, Δt_2 розглядатимемо як нескінченно малі, тобто у формі диференціалів dt_0, dt_1, dt_2. Зміни в економічній системі внаслідок керівного впливу (dt_0, dt_1, dt_2) досліджуватимуться в питомих показниках.

Означення. Назвемо ***псевдоприростом (брутто-приростом) податкового тягаря*** на одного зайнятого його приріст за рахунок приросту податкових ставок при початкових питомих випусках:

$$d\widehat{t}^{\,p}=\sum_{i=0}^{2}x_idt_i.$$

У відповідь на керівний вплив держави dt_0, dt_1, dt_2 сектори змінять свої питомі випуски на dx_0, dx_1, dx_2.

Означення. Назвемо ***базисом-приростом податкового тягаря*** (на одного зайнятого) його приріст за рахунок зміни випусків при незмінних податкових ставках:

$$d\widehat{t}^{\,b}=\sum_{i=0}^{2}t_idx_i.$$

Означення. Справжній приріст надходжень податків до бюджету (у розрахунку на одного зайнятого) назвемо нетто-приростом. Нетто-приріст дорівнює сумі брутто- і базисів-приростів:

$$d\widehat{t}=\sum_{i=0}^{2}x_idt_i+\sum_{i=0}^{2}t_idx_i=d\widehat{t}^{\,p}+d\widehat{t}^{\,b}.$$

Аналогічно нетто-приріст податкових надходжень на одного зайнятого по секторах дорівнює сумі брутто- і базисів-приростів:

$$d\hat{t}_i = x_i dt_i + t_i dx_i = d\hat{t}_i^{\,p} + d\hat{t}_i^{\,b}.$$

Відомо, що при квадратичній функції прибутку фірми її відповідь на збільшення податкової ставки однозначне: скорочення випуску. Наведене далі дослідження показує, що реакція секторів збалансованої економіки на приріст податкових ставок не така однозначна. Уся річ в ефекті системи: адже розглядається збалансована трисекторна економіка, кожний сектор якої виробляє не стільки, скільки йому заманеться, а стільки, скільки диктує попит.

Умови збереження в зміненому стані натурально-вартісної збалансованості трисекторної економіки з математичного погляду означають, що продиференціювавши баланси (11.5) — (11.9), дістанемо такі п'ять рівнянь для $ds_0,\ ds_1,\ ds_2,\ dp_0,\ dp_1,$ dp_2 (диференціалів частки секторів в інвестиціях і диференціалів цін на їхню продукцію, при цьому $dx_0,\ dx_1,\ dx_2$ є функціями $ds_0,\ ds_1,\ ds_2$):

$$\begin{cases} ds_0 + ds_1 + ds_2 = 0; \\ (1-a_0)dx_0 - a_1 dx_1 - a_2 dx_2 = 0; \\ (1-a_0)x_0 dp_0 - s_0 x_1 dp_1 + p_0(1-a_0)dx_0 - p_1 s_0 dx_1 - t_0 dx_0 = x_0 dt_0; \\ -a_1 x_1 dp_0 + (1-s_1)x_1 dp_1 - p_0 a_1 dx_1 + p_1(1-s_1)dx_1 - t_1 dx_1 = x_1 dt_1; \\ p_2 dx_2 + dp_2 x_2 - \sum_{i=0}^{2} t_i dx_i = \sum_{i=0}^{2} x_i dt_i. \end{cases} \qquad (11.10)$$

Таким чином, для шести невідомих складено тільки п'ять рівнянь. Відсутнє шосте рівняння випливає з певного припущення про реакцію секторів на зміну податкових ставок.

Загалом, можливі такі три випадки:

1) $d\hat{t} > 0$ (посилення податкового тягаря);
2) $d\hat{t} < 0$ (ослаблення податкового тягаря);
3) $d\hat{t} = 0$ (перерозподіл податкового тягаря).

Згідно з нашим припущенням про незмінність ставок заробітної плати найбільш реалістичною гіпотезою про поводження секторів є їхнє намагання зберегти статус-кво, тобто так змінити свої випуски, щоб рівень оподаткування залишився незмінним, створивши передумови для збереження ставок заробітної плати.

Таким чином, повну модель перерозподілу податкового тягаря дістаємо додаванням до рівнянь (11.10) умови збереження рівня оподаткування:

$$d\widehat{t} = \sum_{i=0}^{2} x_i dt_i + \sum_{i=0}^{2} t_i dx_i = 0. \qquad (11.11)$$

Умова (11.11) означає, що суто фіскальні наміри держави, спрямовані на збільшення обсягу збору податків шляхом підвищення податкових ставок $\left(\sum_{i=0}^{2} x_i dt_i > 0 \right)$, можуть бути еліміновані відповідними змінами (в основному скороченнями) обсягів виробництва:

$$\sum_{i=0}^{2} t_i dx_i = -\sum_{i=0}^{2} x_i dt_i < 0.$$

Зауваження. Як впливає зі сказаного, зниження податкових ставок для одних секторів за одночасного їх підвищення для інших зовсім не обов’язково приводить до перерозподілу податкового тягаря.

Далі досліджуємо розв’язки системи (11.10), (11.11) у тому разі, коли виробничі функції секторів є функціями Кобба—Дугласа:

$$X_i = F_i(K_i, L_i) = A_i K_i^{\alpha_i} L^{1-\alpha_i},$$

Тоді стаціонарна фондоозброєність секторів подається виразами

$$k_1^* = \left(\frac{s_1 A_1}{\lambda_1} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}}, \;\; k_i = \frac{\theta_1 s_i}{\lambda_i \theta_i} A_1 k_1^{\alpha_1}, \;\; i = 0, 2,$$

питомі випуски секторів — виразами

$$x_1 = B_1 s_1^{\frac{\alpha_1}{1-\alpha_1}}, \;\; B_1 = \left(\frac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \theta_1,$$

$$x_2 = B_i s_i^{\alpha_i} s_1^{\frac{\alpha_1 \alpha_i}{1-\alpha_1}}, \;\; B_1 = \frac{A_i}{\lambda_i^{\alpha_i}} \left(\frac{A_1}{\lambda_1^{\alpha_1}} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_1}} \theta_i^{1-\alpha_i}, \;\; i = 0, 2,$$

тому диференціали питомих випусків набирають вигляду

$$dx_1 = \frac{\alpha_1 x_1}{1-\alpha_1} \cdot \frac{ds_1}{s_1}, \tag{11.12}$$

$$dx_i = x_i \left(\alpha_i \frac{ds_i}{s_i} + \frac{\alpha_1 \alpha_i}{1-\alpha_1} \cdot \frac{ds_1}{s_1} \right), \quad i = 0, 2.$$

Отже, прогнозувати перерозподіл податкового тягаря будемо на підставі аналізу

$$\begin{cases} ds_0 + ds_1 + ds_2 = 0; \\ (1-a_0)dx_0 - a_1 dx_1 - a_2 dx_2 = 0; \\ (1-a_0)x_0 dp_0 - s_0 x_1 dp_1 + [p_0(1-a_0) - t_0]dx_0 - p_1 s_0 dx_1 = x_0 dt_0; \\ -a_1 x_1 dp_0 + (1-s_1)x_1 dp_1 - p_0 a_1 dx_1 + [p_1(1-s_1) - t_1]dx_1 = x_1 dt_1; \\ x_2 dp_2 + p_2 dx_2 = 0; \\ \sum\limits_{i=0}^{2} t_i dx_i = -\sum\limits_{i-0}^{2} x_i dt_i, \end{cases} \tag{11.13}$$

де (dx_0, dx_1, dx_2) визначаються виразами (11.12).

Оскільки (dx_0, dx_1, dx_2) згідно з (11.12) лінійно виражаються через (ds_0, ds_1, ds_2), шість лінійних рівнянь (11.13) містять шість невідомих ds_0, ds_1, ds_2, dp_0, dp_1 dp_2, які можна, як буде показано далі, однозначно виражати через керівний вплив (dt_0, dt_1, dt_2).

Розв'язки перших двох рівнянь (11.13) подаються у вигляді:

$$\frac{ds_0}{s_0} = \frac{(1-\alpha_1)\alpha_2 s_1 \delta_2 - \alpha_1 s_2 (\delta_1 + \alpha_2\delta_2 - \alpha_0)}{\alpha_1 s_0 (\delta_1 + \alpha_2 \delta_2 - \alpha_0) + (1-\alpha_1)\alpha_0 s_1} \cdot \frac{ds_2}{s_2} = \frac{q_0}{q_2} \cdot \frac{ds_2}{s_2};$$

$$\frac{ds_1}{s_1} = \frac{(1-\alpha_1)(\alpha_2 s_0 \delta_2 + \alpha_0 s_2)}{\alpha_1 s_0 (\delta_1 + \alpha_2 \delta_2 - \alpha_0) + (1-\alpha_1)\alpha_0 s_1} \cdot \frac{ds_2}{s_2} = -\frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{ds_2}{s_2}, \tag{11.14}$$

де $\delta_i = \dfrac{a_i x_i}{(1-a_0)x_0} = \dfrac{a_i X_i}{(1-a_0)X_0}$ — частка i-го сектору (i = 1, 2) у витраті товарної продукції матеріального сектору, при цьому

$$\delta_1 + \delta_2 = 1,$$

$$q_0 = (1-\alpha_1)\alpha_2 s_1 \delta_2 - \alpha_1 s_2 (\delta_1 + \alpha_2 \delta_2 - \alpha_0);$$

$$q_1 = (1-\alpha_1)(\alpha_2 s_0 \delta_2 + \alpha_0 s_2);$$

$$q_2 = \alpha_1 s_0 (\delta_1 + \alpha_2 \delta_2 - \alpha_0) + (1-\alpha_1)\alpha_0 s_1.$$

Рівняння (11.14) характеризують перерозподіл інвестиційних товарів в умовах збалансованого розподілу продукції матеріального та фондоутворювального секторів, тобто при виконанні перших двох рівнянь (11.14). За такої зміни s_0, s_1, s_2 залишається тільки один ступінь волі. Якщо взяти за вільну змінну s_2, то всі коефіцієнти при ds_2 у (11.15) стають функціями тільки s_2.

Змінна s_2 (частка споживчого сектору в розподілі інвестиційних товарів), задовольняє такі нерівності:

$$0 < s_2 < 1,$$

де $s_2 = 0$ означає ситуацію «виробництво для виробництва», а $s_2 = 1$ — ситуацію «деіндустріалізація, повний колапс фондоутворювального виробництва» ($s_1 = 0$).

Тепер знайдемо, як змінюються питомі випуски секторів при зміні s_2 від 0 до 1.

Підставивши (11.14) у (11.13), дістаємо такі вирази для диференціалів питомих випусків:

$$dx_0 = -\alpha_0 x_0 \frac{v_0}{v} \cdot \frac{ds_2}{s_2};$$

$$dx_1 = -\alpha_1 x_1 \frac{v_1}{v} \cdot \frac{ds_2}{s_2}; \qquad (11.15)$$

$$dx_2 = -\alpha_2 x_2 \frac{v_2}{v} \cdot \frac{ds_2}{s_2},$$

де

$$v = \alpha_1 s_0 (\delta_1 + \alpha_2 \delta_2 - \alpha_0) + (1 - \alpha_1)\alpha_0 s_1 \quad (v = q_2);$$

$$v_0 = \alpha_1 \alpha_2 \delta_2 + s_2 \alpha_1 \delta_1 - s_1 \alpha_2 \delta_2;$$

$$v_1 = \alpha_2 s_0 \delta_2 + \alpha_0 s_2;$$

$$v_2 = \alpha_1 \alpha_0 - \alpha_1 s_0 \delta_1 - \alpha_0 s_1.$$

Досліджуємо $v(s_2)$ і $v_i(s_2)$, $i = 0, 1, 2$, як функції від s_2 (нагадаємо, що $s_0^0 = s_0(0)$, що $s_1^0 = s_1(0)$):

$$v(0) = \alpha_1 (1 - \alpha_0) s_0^0 + (1 - \alpha_1)\alpha_0 s_1^0 > 0, \; v(1) = \alpha_1 (\alpha_2 - \alpha_0) > 0;$$

$$v_0(0)=0\,,\ v_0(1)=\alpha_1\alpha_2>0;$$

$$v_1(0)=0\,,\ v_1(1)=\alpha_0>0;$$

$$v_2(0)=\alpha_1\alpha_0-\alpha_1 s_0^0-\alpha_0 s_1^0<0\,,\ v_2(1)=\alpha_1\alpha_0>0.$$

Отже, значення v, v_0, v_1 зберігають додатний знак при $0<s_2<1$, тому питомі випуски матеріального і фондоутворювального секторів скорочуються зі зростанням s_2 від 0 до 1, тоді як v_2 змінює знак «мінус» на «плюс» у деякій проміжній точці s_2^*:

$$v_2(s_2^*)=\alpha_1\alpha_0-\alpha_1 s_0(s_2^*)\delta_1(s_2^*)-\alpha_0 s_1(s_2^*)=0,$$

тому в цій точці питомий випуск предметів споживання $x_2(s_2^*)$ досягає максимуму ($dx_2>0$ при $0<s_2<s_2^*$; $dx_2<0$ при $s_2^*<s_2<\bar{s}_2$).

Підставивши (11.15) в останнє рівняння (11.13), дістанемо таке рівняння для $\dfrac{ds_2}{s_2}$:

$$\left(\sum_{i=0}^{2}\alpha_i\frac{v_i}{v}t_i x_i\right)\frac{ds_2}{s_2}=\sum_{i=0}^{2}x_i dt_i,$$

звідки

$$\tilde{v}\frac{ds_2}{s_2}=v\,d\hat{t}^{\,p}, \qquad (11.16)$$

де $\tilde{v}=\sum_{i=0}^{2}\alpha_i v_i t_i x_i$; $d\hat{t}^{\,p}=\sum_{i=0}^{2}x_i dt_i$,
тобто в ситуації «перерозподіл податкового тягаря» збільшення частки інвестування споживчого сектору пропорційне псевдоприросту податкового тягаря.

Із (11.16) випливає, що псевдозміни оподаткування $d\hat{t}^{\,p}=\sum_{i=0}^{2}x_i dt_i$ справді визначають зміну стану трисекторної економіки: якщо брутто-змін немає, тобто $\sum_{i=0}^{2}x_i dt_i=0,$ то й $ds_2=0,$ а отже, ніяких змін у випусках і структурі не відбувається, а якщо $\sum_{i=0}^{2}x_i dt_i\neq 0$, то й $ds_2\neq 0,$ тому випуски й інвестиції змінюються.

11.3. Прогнозування впливу підвищення податків на виробництво та споживання

Оскільки досліджується замкнена економіка, то єдиним джерелом споживання є власне виробництво предметів споживання споживчим сектором. Тому саме поводження питомих випусків секторів визначає споживання.

Регулювальний вплив держави полягає у зміні податкових ставок на dt_0, dt_1, dt_2. Математично результат цього впливу подається у формі псевдоприросту податкового тягаря:

$$\widehat{dt}^{\,p} = \sum_{i=0}^{2} x_i dt_i .$$

Означення. Будемо говорити, що ***відбулося підвищення податків***, якщо псевдоприріст додатний: $\widehat{dt}^{\,p} > 0$. Зокрема, таку ситуацію маємо в разі звичайного підвищення податків: $dt_0 > 0,\ \ dt_1 > 0,\ \ dt_2 > 0.$

Оскільки $v > 0$, $\widehat{dt}^{\,p} > 0$, то з виразу (11.16) випливає, що знак ds_2 визначається знаком виразу

$$\tilde{v}(s_2) = \sum_{i=0}^{2} \alpha_i v_i(s_2) t_i x_i(s_2), \tag{11.17}$$

при цьому $\tilde{v}(0) = 0,\ \ \tilde{v}(1) = 0,$ а для $s_2 \geq s_2^*$, $\tilde{v}(s_2) > 0.$

При дослідженні знака $\tilde{v}(s_2)$ для $0 < s_2 < s_2^*$ необхідно взяти до уваги, що зі зростанням s_2 усі функції $v_i(s_2)$ зростають, причому $v_2(s_2) < 0$, $s_2 < s_2^*$, $v_2(s_2^*) = 0$; питомий випуск $x_0(s_2)$ при $s_1^0 > \alpha_1$ спочатку зростає, а потім, досягнувши максимуму при $s_2 = \tilde{s}_2^*$, спадає; $x_2(s_2)$ зростає. Тому в околі $s_2 = 0$, загалом кажучи, можливо $\tilde{v}(s_2) < 0$. Проте в більшості практично цікавих випадків s_2 істотно відрізняється від нуля (адже ситуація $s_2 = 0$ є «виробництво для виробництва»), тому $\tilde{v}(s_2) > 0$ при $s_2 > \underline{s_2}\left(\tilde{v}\left(\underline{s_2}\right) = 0\right)$.

Отже, при $\tilde{v} > 0$ з підвищенням податків $\left(\sum_{i=0}^{2} x_i dt_i > 0\right)$ інвестиційні ресурси перетікають у споживчий сектор $\left(ds_2 > 0\right)$, і внаслідок цього при $s_2 < s_2^*$ виробництво споживчих товарів розширюється, а при $s_2 > s_2^*$ — скорочується.

Виробництво інвестиційних товарів із підвищенням податків скорочується, оскільки перетікання інвестиційних ресурсів у споживчий сектор $(ds_2 > 0)$ відбувається насамперед за рахунок фондоутворювального сектору $\left(\frac{ds_1}{s_1} = -\frac{q_1}{q_2} \cdot \frac{ds_2}{s_2};\ q_1 > 0,\ q_2 > 0\right)$. Виробництво матеріалів при $s_2 > \tilde{s}_2^*$ також скорочується, хоча податкове навантаження на сектори, що виробляють засоби виробництва, може і зменшитися.

Справді, ситуація «перерозподілу податкового тягаря» характеризується рівністю

$$(x_0 dt_0 + t_0 dx_0) + (x_1 dt_1 + t_1 dx_1) + (x_2 dt_2 + t_2 dx_2) = 0, \qquad (11.18)$$

де в кожній із дужок — справжня зміна податкового тягаря на відповідний сектор.

Нехай, наприклад, збільшення податків $\left(\sum_{i=0}^{2} x_i dt_i > 0\right)$ відбулося головним чином за рахунок підвищення податкової ставки на випуск споживчого сектору $dt_2 > 0$ (при цьому dt_0, dt_1 можуть бути навіть від'ємними!). Тоді при $s_2 < s_2^*$ також і $dx_2 > 0$, а отже,

$$x_2 dt_2 + t_2 dx_2 > 0.$$

З огляду на це для виконання рівності (11.18) має стверджуватись

$$(x_0 dt_0 + t_0 dx_0) + (x_1 dt_1 + t_1 dx_1) < 0,$$

тобто податковий тягар на сектори, які виробляють засоби виробництва, має послабитися, хоча виробництво цих секторів (як зазначалося раніше) скоротилося.

Розглянемо прогнозування ситуації, коли враховується зміни цін. Почнемо зі зміни ціни споживчого сектору. Із п'ятого рівняння системи (11.13) знаходимо

$$dp_2 = -p_2 \frac{dx_2}{x_2},$$

звідки випливає, що при зростанні випуску предметів споживання і при $s_2 < s_2^*$ ціна на них знижується.

Зміни цін на продукцію матеріального та фондоутворювального секторів визначаємо, розв'язуючи систему лінійних відносно dp_0 і dp_1 рівнянь (третє і четверте рівняння (11.13)):

$$dp_0 = \frac{(1-s_1)x_1[-(1-a_0)x_0 + t_0]dx_0 + s_0 x_1(a_1 p_0 + t_1)dx_1 + (1-s_1)x_1 x_0 dt_0 + s_0 x_1^2 dt_1}{(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1 x_1 \cdot s_0 x_1};$$

$$dp_1 = \frac{a_1 x_1[-(1-a_0)p_0 + t_0]dx_0 + [(1-a_0)x_0(-(1-s_1)p_1 + a_1 p_0 + t_1) + a_1 x_1 p_1 s_0]dx_1}{(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1 x_1 \cdot s_0 x_1} +$$
$$+ \frac{a_1 x_1 x_0 dt_0 + (1-a_0)x_0 x_1 dt_1}{(1-a_0)x_0(1-s_1)x_1 - a_1 x_1 \cdot s_0 x_1}.$$

Знаменник в обох рівностях (11.19) додатний, оскільки $(1-a_0)x_0 > > a_1 x_1$ і $(1-s_1) > s_0$, тому знаки змін цін визначаються знаками чисельників.

Із (11.19) випливає, що найчастіше відбувається зростання цін на продукцію матеріального та фондоутворювльного секторів, але можлива також ситуація, коли в одному з цих секторів (чи навіть відразу в обох) ціна спадає.

Справді, оскільки $dx_0 < 0$, $dx_1 < 0$, то перші доданки чисельників, що містять множник $dx_0 < 0$, завжди невід'ємні, оскільки

$$-(1-a_0)p_0 + t_0 = -\left(p_1 s_0 + \frac{\theta_0 w_0}{x_0}\right) \le 0,$$

а другі доданки, що містять множник $dx_1 < 0,$ можуть бути як додатними, так і від'ємними. Останні доданки, що містять dt_0 і dt_1, можуть бути й додатними.

Висновок про ситуацію «посилення (послаблення) податкового тягаря». Насамперед зауважимо, що тип ситуації визначається не рішенням підвищити чи знизити податки, але станом економіки. Якщо економіка недовантажена, то підвищення податків призводить до посилення податкового тягаря, а якщо економіка повністю завантажена, — до перерозподілу податкового тягаря; і, нарешті, якщо економіка перевантажена, то вона реагує на підвищення податків різким зниженням виробництва і відходом від податків: у результаті податковий тягар послаблюється, а тим часом відбувається скорочення бюджетних надходжень замість очікуваного їх підвищення. Таким чином, рішення про збільшення податків — лише сигнал до того, щоб з'ясувати, в якій саме реальній ситуації перебуває економіка.

Як же моделювати ситуацію «підвищення» податкового тягаря? На наш погляд, можна ввести коефіцієнт β, $0 < \beta < 1$ бюджетних очікувань, що показує, яка частина брутто-приросту податків виправдалася:

$$d\hat{t} = \sum_{i=0}^{2}\left(x_i dt_i + t_i dx_i\right) = \beta\sum_{i=0}^{2} x_i dt_i.$$

Звідси випливає, що

$$\sum_{i=0}^{2} t_i dx_i = (1-\beta)\sum_{i=0}^{2} x_i dt_i,$$

тому всі викладки, наведені вище за припущення, що розподіл трудових ресурсів незмінний і $\beta = 0$ («перерозподіл податкового тягаря»), приведуть зрештою до такого співвідношення:

$$\frac{\tilde{v}}{v}\frac{ds_2}{s_2} = (1-\beta)\sum_{i=0}^{2} x_i dt_i.$$

Як бачимо, останнє співвідношення при $\beta = 1$ (усі «бюджетні очікування» виправдалися) приводить до $ds_2 = 0$, що означає відсутність переливу ресурсів і змін у виробництві.

Усі наведені вище міркування завдяки співвідношенню (11.14) залишаються в силі при $\beta < 1$.

Питання для самоперевірки

1. В якому співвідношенні перебувають псевдоприріст, базисприріст і справжній приріст податкового тягаря?

2. Які умови зростання випуску предметів споживання при збільшенні податкових ставок у трисекторній економіці?

11.4. Математичний аналіз корупції

11.4.1. *Основні поняття*

Державна корупція визначається як продаж державними службовцями державної власності в приватних цілях. Корупція — загальний термін, що позначає корисливе використання свого положення в суспільстві в особистих цілях. Це може бути *бюрократична* чи *політична* корупція. Корупція на приватному ринку звичайно не регулюється законодавством, і представник однієї фірми може підкуповувати представника іншої, хоча самі фірми мають право звільняти службовців, які провинилися.

Економічні дослідження феномена корупції фактично почалися не пізніш як 1975 року з праці С. Троянда-Аккермана, де корупція розглядалася як економічне поводження в умовах ризику, пов'язаного зі здійсненням злочину і можливим покаранням за нього.

У літературі можна знайти багато число математичних моделей корупції. Умовно можна виокремити математичні моделі двох напрямів — вивчення актів зовнішньої корупції та корумпування організації зсередини. Третій напрямок стосується дослідження таких спостережуваних явищ, як неподинокість рівноважних корупційних станів, циклічність виникнення і т.п.

11.4.2. *Базовий аналіз корупції*

1. Якщо товари різні і зниження витрат при укладанні контракту буде істотним або товар не продається на ринку, то у фірм є стимул підкупити бюрократа. Зауважимо, що в цьому разі всі фірми пропонують на вибір чиновника товари, однакові з погляду співвідношення **ціна—якість**, оскільки всі фірми намагатимуться поставити себе в один ряд із домінуючим продавцем. Отже, бюрократ може вибрати кожного з конкурентів, оскільки будь-яке рішення з усього спектра **ціна—якість** має для держави однакову корисність. У цій ситуації фірми можуть спробувати одержати контракт за допомогою хабара. Передбачається, що бюрократ організує ринок хабарів, повідомляючи кожній фірмі про найбільший з уже запропонованих.

Нехай G — прибуток бюрократа; π_i — прибуток продавця i, тоді

$$G\left(X^i\right)=X^i-J\left(X^i\right)-R\left(X^i\right); \qquad (11.19)$$

$$\pi_i\left(X^i\right)=P^i\left(X^i\right)-T^i\left(X^i\right)-D^i\left(X^i\right)-N^i\left(X^i\right), \qquad (11.20)$$

де X^i — розмір загального хабара, заплаченої продавцем i; P^i — ціна одиниці продукту продавця i; q — кількість продукту, необхідна державі (передбачається заданою); $J\left(X^i\right)$ — середній штраф для бюрократа; $J>0$; $R\left(X^i\right)$ — моральні витрати для бюрократа при прийнятті хабара X^i у грошовому виразі, $R' \geq 0$; T^i — загальні витрати на виробництво q одиниць для продавця i; $D^i\left(X^i\right)$ — середній штраф для продавця, $D^i > 0$; $N^i\left(X^i\right)$ — моральні витрати для продавця при дачі хабара X^i у грошовому виразі, $N^i > 0$.

Величину $J\left(X^i\right)$, що характеризує очікуваний штраф для бюрократа, можна визначити множенням середнього штрафу, стягнутого в разі осуду, на об'єднану ймовірність арешту й осуду. Аналогічну процедуру можна використати для визначення очікуваного штрафу для продавця $D^i\left(X^i\right)$.

У термінах прибутку бюрократа і продавців виокремлюється та множина хабарів X^i, яка задовольняє і бюрократа, і фірм-продавців. У цій області можна вибирати оптимальну (у тому чи іншому сенсі) точку (чи розмір) хабара.

Для бюрократа прийнятні всі хабарі: $X \geq J(X) + R(X)$. Розглядаються чотири можливі випадки.

1. Не існує прийнятних хабарів.
2. Усі хабарі прийнятні, тому, наприклад, що $I' + R' < 1$ і $J(0) + R(0) = 0$.
3. Прийнятні всі хабарі, що не перевищують деякого максимального рівня, оскільки граничні моральні витрати і/або граничні штрафи збільшуються зі збільшенням X.
4. Прийнятні ті хабарі, які менші чи рівні деякого мінімуму, оскільки $\left(J_{xx} + R_{xx}\right) \leq 0$ і $J(0) + R(0) = 0$.

Найбільш правдоподібний випадок 4, коли приймаються всі хабарі, які дорівнюють деякому рівню $X_{\min}$ чи перевищують його.

Припустима область продавця i визначається співвідношенням $X^i \leq P^i q - T^i - D^i\left(X^i\right) - N^i\left(X^i\right)$. Таким чином, щоб хабар був можливий, необхідне виконання умови $P^i q - T^i > 0$. Це означає, що якщо не кожна фірма на ринку є корумпованою, то потенційно корумпована фірма має заробляти надлишковий прибуток — або тому, що вона працює більш ефективно, ніж гранично ефективна фірма, або через «бар'єр входу» на ринок, що приносить вигоду всім фірмам-продавцям. Для кожного продавця i можна знайти максимально можливий хабар X_0^i, на який він здатний. Якщо $\max\left\lfloor X_0^i \right\rfloor = X_0^m$, то фірма m одержує контракт. За таким правилом бюрократ вибирає фірму-переможця.

Якщо припустити, що очікувані штрафи для всіх фірм будуть однаковими, то фірмою-переможцем буде та, в якої буде найбільшою різниця між доходами і сумою виробничих і моральних витрат при хабарі X_0^i. Оскільки виробничі та моральні витрати розглядаються аналогічно, то розміри максимального хабара, що його фірма готова заплатити, можуть зменшитись — або внаслідок підвищення витрат виробництва, або через те, що представниками фірми стали більш педантичні люди.

2. У ситуації з неточно сформульованими перевагами держави модель ускладнюється за рахунок уведення ще одного параметра Y^i — рівня якості. Підвищення ціни чи зниження якості продукту просто збільшує ймовірність покарання учасників угоди. Передбачається, що

$$J = J\left(P^i,\, Y^i,\, X^i\right),\ J_p \geq 0,\ J_y \leq 0,\ J_x \geq 0,\ J\left(0,\, Y^i,\, X^i\right) = 0, \qquad (11.21)$$

$$D = D\left(P^i,\, Y^i,\, X^i\right),\ D_p \geq 0,\ D_y \leq 0,\ D_x \geq 0,\ D\left(0,\, Y^i,\, X^i\right) = 0. \quad (11.22)$$

Тепер можливо, що фірми захочуть давати хабара, навіть тоді, коли в них немає ніякого надлишкового прибутку, оскільки одержувані ними більш високі ціни можуть перевищити додаткові моральні витрати і витрати від покарання. Якщо припустити, що кожна фірма i поставляє продукт певної якості Y^i і що кожна фірма може варіювати P^i, то для кожної фірми припустима множина включає такі розміри хабарів, при яких загальний «прибуток» більший чи дорівнює нулю:

$$0 \leq P^i q - T^i - X^i - D^i\left(P^i,\, Y^i,\, X^i\right) - N^i\left(X^i\right).$$

Функція $X_0^i\left(P^i\right)$ на рис. 11.3 являє собою комбінацію ціни і хабара, що дає нульовий прибуток для кожної фірми, а заштрихована площа та функція $X_0^i\left(P^i\right)$ — одну з можливих форм припустимої множини хабарів. Для кожного продавця i максимально можливий хабар $X_0^i\left(P^i\right)$, при якому прибуток дорівнює нулю. У ситуації конкуренції, коли фірми діють незалежно одна від одної, визначити фірму-переможця можна за допомогою такої триступінчастої процедури: спочатку визначити функції $X_0^i\left(P^i\right)$, далі визначити комбінації ціна—якість, що максимізують прибуток $G^i = X_i - J\left(P^i,\, Y^i,\, X^i\right) - R\left(X^i\right)$ бюрократа, $G_{\max}^i$, за умови, що прибуток фірми дорівнює нулю, а на закінчення бюрократ вибирає фірму, максимизуючий його прибуток, $G_{\max}$.

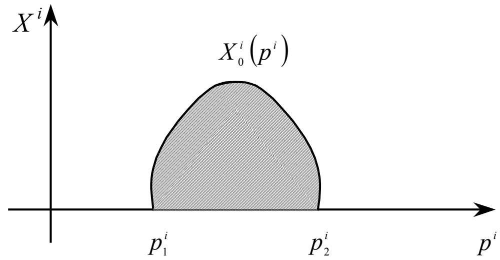


Рис. 11.3.

Можлива форма області припустимих значенні хабарів для фірми масштаби корупції, а також випадок двоїстої монополії не розглядається.

Можливо, що оскільки фірми, що не виграли контракт, можуть повідомити владі про хабар, в інтересах фірми-переможця поділитися з конкурентами-невдахами прибутком від висновку контракту і, можливо, розділити з ними матеріальні витрати на підтримку корупції. У кінцевому рахунку це приводить до заміни конкурентної боротьби змовою — утворенням картелю з колишніх конкурентів, а власне конкуренція заміняється двоїстою монополією.

Основні висновки. Аналіз акцентує увагу на таких аспектах:

- який ринок корупційних благ — монопольний, олігопольний чи достатньо конкурентний з боку фірм;
- які витрати учасників такої угоди, чи є вони матеріальними, моральними, від чого залежать їхні розміри і як вони пов'язані з інституціональною системою — законодавством, нормами суспільства, традиціями і т. ін.;
- які суспільні витрати пов'язані з корупцією і як їх зменшити.

11.4.3. *Аналіз обмеження корупції*

Розглянемо динамічну модель Ф. Т. Місяців, яка являє собою просту модель з поколіннями, що перекриваються. Вона дає змогу пояснити, чому, наприклад, рівень корупції в країні може серйозно зрости порівняно з деякими періодами в минулому, тоді як параметри схеми покарання не занадто змінилися. Водночас, вона пояснює, чому в сильно корумпованому суспільстві звичайні заходи щодо боротьби з корупцією (наприклад, посилене стеження за бюрократами) є надто дорогим «задоволенням» для суспільства, ефект від якого не вартий витрачених коштів і зусиль.

В економіці в кожний період існують два покоління бюрократів, що перекриваються, — молоде і старе. Кількість бюрократів в обох поколіннях однакова. У кожний період кожному бюрократу пропонується одиниця доходу у вигляді хабара, і він вирішує, приймати її чи ні. Якщо молодий бюрократ приймає хабар і його згодом перевіряють, то з імовірністю одиниця він має заплатити грошовий штраф у C одиниць. Його робота може тривати наступний період. Однак якщо він знову візьме хабар і буде пійманий, то новий штраф дорівнюватиме вже C' одиниць. При цьому розмір C' настільки великий, що бюрократ, покараний ще молодим, не прийматиме іншого хабара доти, доки ймовірність перевірки — додатна величина. Імовірність $p(t)$ перевірки бюрократа під час t однакова для кожного.

Бюрократи в одному поколінні різняться тільки за ступенем їхньої чесності h. Якщо бюрократ із чесністю h приймає хабар, то він просто оцінює її в $1-h$ одиницю. Передбачається, що h — випадкова величина з рівномірною функцією розподілу $F(h)$, $h \in [0;\ 1/f]$. Функція розподілу $F(h)$ — однакова для кожного покоління. Передбачається також, що всі бюрократи нейтрально ставляться до ризику.

У момент t старий бюрократ, що раніше не був покараний, прийме хабар тоді і тільки тоді, коли його очікуваний прибуток становитиме

$$1-h-p(t)C \geq 0.$$

Нехай $W_0(t)=1-p(t)C.$ Старий бюрократ із чесністю h належить до групи, що буде корумпованою тоді і тільки тоді, коли

$$W_0(t) \geq h\,.$$

У момент t молодий бюрократ має брати до уваги свій очікуваний прибуток у момент $t+1$, коли він стане старим. Нехай імовірність перевірки в момент $t+1$, очікуваної в t, дорівнює $p^e(t+1)$. А оскільки покараний молодий бюрократ насправді втратить можливість прийняти хабар у майбутньому, молодий бюрократ з чесністю h у момент t прийме хабар тоді і тільки тоді, коли

$$1 - h - p(t)\left[c + \max\left[1 - h - p^e(t+1)c,\ 0\right]\right] \geq 0. \qquad (11.23)$$

Оскільки $\max\left[1 - h - p^e(t+1)c,\ 0\right] \geq 0,$ то можлива вартість хабара для молодого бюрократа не більша, ніж у старого бюрократа. Це означає, що останній більш чутливий до корупції, ніж молодий, оскільки старого бюрократа раніше не карали.

Нехай $W_0(t+1) = 1 - p^e(t+1)C.$ Молодий бюрократ чесністю h у момент t припускає, що він прийме хабар у момент $t+1$ тоді і тільки тоді, коли

$$W_0(t+1) \geq h. \qquad (11.24)$$

Якщо (11.23) виконується, то нерівність (11.24) еквівалентна нерівності

$$1 - \frac{p(t)C\left[1 - p^e(t+1)\right]}{1 - p(t)} \geq h\,.$$

Уведемо позначення:

$$\overline{W_y}(t) = 1 - \frac{p(t)C\left[1 - p^e(t+1)\right]}{1 - p(t)}\,.$$

Молодий бюрократ з чесністю h прийме хабар тоді і тільки тоді, коли

$$\overline{W_y}(t) \geq h\,.$$

Якщо (11.24) не виконується, то молодий бюрократ у момент t, не припускає приймати хабар у період $t+1$. Тоді умова (11.23) еквівалентна $1 - h - p(t)C \geq 0.$.

Нехай $W_y(t) = 1 - p(t)C.$ Молодий бюрократ з чесністю h прийме хабар тоді і тільки тоді, коли

$$W_y(t) \geq h\,.$$

При цьому $\overline{W_Y}(t) \leq W_Y(t) \leq W_0(t+1)$ тоді і тільки тоді, коли $p(t) > p^e(t+1)$.

Можна довести, що при $p(t) > p^e(t+1)$ частка молодих корумпованих бюрократів у t задається функцією $F\left(\overline{W}_Y(t)\right)$, а при $p(t) \leq p^e(t+1)$ частка молодих корумпованих бюрократів у момент t задається $F(W_Y(t))$. Передбачається, що $p^e(t) \geq p(t-1)$ тоді і тільки тоді, коли $p(t) \geq p(t-1)$, іншими словами, припущення щодо очікуваної зміни ймовірності перевірки виявляється правильним. Доводиться, що при $p^e(t) \geq p(t-1)$ пропорція страху корумпованих бюрократів у момент t подається у вигляді $(1-p)(t-1)F(W_0(t))$, а при $p^e(t) < p(t-1)$ пропорція старих корумпованих бюрократів у t задається у вигляді $F(W_0)(t) - -p(t-1)F\left(\overline{W}_Y(t-1)\right)$.

Нехай $B(t)$ — частка корумпованих серед усіх бюрократів покоління в момент часу t. $B(t)$ є середнім арифметичним між частками старих і молодих корумпованих бюрократів, що приймають хабара в момент t. Ця величина використовується для вимірювання рівня корупції в економіці в момент часу t. Попередні результати можуть бути представлені наступними чотирма випадками:

$$B(t) = \begin{cases} (1/2)[F(W_Y(t)) + (1-p(t-1))(F(W_o(t)))], \\ \text{якщо } p(t) \leq p^e(t+1), p(t) \leq p^e(t+1); \\ (1/2)\left[F(\overline{W}_Y(t)) + \left(F(W_o(t)) - p(t-1)F(\overline{W}_Y(t-1))\right)\right], \\ \text{якщо } p(t-1) > p^e(t),\ p(t) > p^e(t+1); \\ (1/2)\left[F(W_Y(t)) + F(W_o(t)) - p(t-1)F\left(\overline{W}_Y(t-1)\right)\right], \\ \text{якщо } p(t-1) > p^e(t),\ p(t) > p^e(t+1); \\ (1/2)[F(W_Y(t)) + (1-p(t-1))(F(W_o(t)))], \\ \text{якщо } p(t-1) \leq p^e(t),\ p(t) > p^e(t+1). \end{cases} \tag{11.25}$$

Якщо всі пропорції $F(\bullet)$ менші від одиниці, то відповідні вирази для значень W можна підставити у вираз (11.25). Тоді дістанемо

$$B(t)W = (f/2)[(2-p(t-1))(1-p(t)C) - J_1 + J_2], \tag{11.26}$$

де функції J_1 і J_2 залежать від $p(t-1)$, $p(t)$, C, $p^e(t)$, $p^e(t+1)$. З (11.26) випливає, що $B(t)$ залежить від імовірностей перевірки, що визначаються далі.

При вищому $B(t)$ витрати на ефективну перевірку більші. Щоб урахувати цю обставину в моделі, потрібно зробити такі припущення.

Упродовж кожного періоду уряд витрачає R одиниць ресурсів на перевірку. Ресурси, необхідні для ефективної перевірки однієї людини в момент часу *t*, становлять $r(t)$. Передбачається, що

$$r(t) = 1/(m - nB(t)), \text{ де } m > n > 0. \quad (11.27)$$

Нехай N — загальна кількість бюрократів. Тоді

$$p(t) = A - kB(t), \text{ де } A = Rm/N, \ k = Rn/N. \quad (11.28)$$

Підставивши (11.28) у (11.26), можна дістати закономірність зміни $B(t)$. Зроблені припущення дозволяють показати, що, задавши те чи інше значення *R*, можна знайти кілька стійких рівноважних рівнів корупції. Нехай початковий рівень корупції в економіці малий. Через невеликі витрати на перевірку кожної людини суму *R* можна витратити на більшу кількість людей. Отже, менше людей виберуть стати корумпованими. Вочевидь, усе навпаки в разі високого платного рівня корупції.

Передбачається також, що $1 > A > k > 0$, $C > 1 > AC$, $f > 1$. Існують три стаціонарні рівноважні рівні корупції $B^* = B(t)$ для всіх *t*. Згідно з (11.27) $p(t) = p^*$ для всіх t, де p^* — імовірність перевірки, що відповідає B^*. Стаціонарні рівні можливі тільки тоді, коли $p(t) \le p^e(t+1)$ і $p(t-1) \le p^e(t)$. Саме цей випадок розглядається далі. Оскільки $F(W_Y(t)) = F(W_0(t)) = f(1 - p(t))C$, якщо $f(1 - p(t))C \le 1$, і $F(W_Y(t)) = F(W_0(t)) = 1$, якщо $f(1 - p(t))C > 1$, то

$$B(t) = \begin{cases} (f/2)(2 - p(t-1))(1 - p(t)c), \text{ якщо } f(1 - p(t)C) \le 1, & (11.29) \\ 1 - (1/2)p(t-1), \text{ якщо } f(1 - p(t)C) > 1. & (11.30) \end{cases}$$

Розв’язок можна подати на фазовій діаграмі. На рис. 11.4, *а* зображено діаграму зміни $B(t)$ від $B(t-1)$. Крива *ABCD* відповідає (11.29). Вона перетинає лінію *OM* (ця лінія має нахил 45°) у двох точках *B* і *C*. Пряма *DF*, що подається рівнянням (11.30), перетинає лінію *OM* у точці *E.* Таким чином, існують три точки рівноваги, і легко можна показати, що тільки в точках *B* і *E* рівновага є стійка.

Якщо змінити припущення про співвідношення ймовірностей перевірки і їхніх очікуваних значень, то замість рис. 11. 4, *а* дістанемо рис. 11.4, *б*, з якого бачимо, що коли початкове значення змінної $B(t-1)$ більше, ніж B_2, або якщо значення $B(t-1)$ настільки мале, що $B(t)$ вище від точки *C*, то $B(t)$ збігатиметься до точки *E*. В інших випадках $B(t)$ збігається до точки *B*.

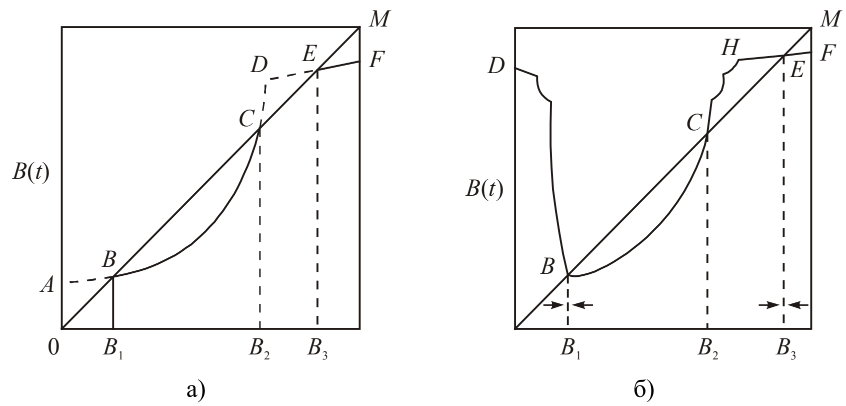


Рис. 11.4. Фазова діаграма

У різних працях досліджується, як залежать рівноважні рівні корупції від параметрів моделі, і наголошується на відмінностях різниця між малими і значними змінами в параметрах, оскільки відповідні наслідки різні.

Алгебраїчно більш зручно мати справу зі стаціонарною ймовірністю перевірки p^*, а не зі значенням B^*. Згідно з рівнянням (11.28) p^* пов'язана зі стаціонарним рівноважним рівнем корупції B^* таким рівнянням:

$$p^* = A - kB^*. \qquad (11.31)$$

Із рис. 11.4, *б* випливає, що існують три можливі стани рівноваги для $B(t)$. Це — *B*, *C* і *D*. Перші два визначаються з рівняння

$$Cfkp^* 2 - [fk(2C+1)]p^*(2fk - A) = 0.$$

Як випливає з (11.31), значення B^* від'ємно пов'язане з p^*, а отже, результати, здобуті з останнього рівняння, можна інтерпретувати в такий спосіб. Якщо штраф *C* чи ресурси *R* на перевірку зростають незначно, то B^* падає. З іншого боку, якщо середній рівень чесності h в економіці падає, те f і B^* підвищуються, що представляється природним.

Тому що крім точки *D* точка *E* також є стаціонарним рішенням, цікаво досліджувати її залежність від параметрів. З (11.12) випливає, що в точці *E*

$$B^* = (2 - A)/(2 - k).$$

Цей рівень B^* не залежить від розміру штрафу *C*. Однак коли ресурси на перевірку *R* підвищуються, то й *A*, і k ростуть в однакових пропорціях, тому B^* падає. Отже, для економіки з високим рівнем корупції зміни *R* можуть знизити рівень корупції, а невеликі зміни *C* — не можуть.

Особливий інтерес викликає питання про перехід економіки з одного рівня корупції на інший. Дослідження такого питання говорить про те, що коли суспільство стає більш поблажливим до корумпованих бюрократів, то можливо різке підвищення рівня корупції. Більш того, один раз з'явившись, високий рівень корупції залишається, навіть якщо параметри обмежувальної схеми повернуться на колишній рівень. Це пояснює існування суспільств із різко відмінними рівнями корумпованості за однакових обмежувальних схем. Інтуїтивне пояснення цього факту полягає в тому, що, один раз виникнувши, корупція вимагає більш високих витрат на перевірку і стримування. Зусилля уряду стають менш ефективними.

Крім того, з аналізу випливає, що через можливість переходу від одного рівноважного стану до іншого іноді важка обмежувальна схема, яка здавалась неоптимальною в короткий період, стає оптимальною в довгостроковий. У той же час у низці випадків груба схема (наприклад, уведення високих штрафів *З*) може викликати зворотний ефект, перевівши економіку, що знаходиться на низькому рівні корупції (у точці *B*), на високий рівень (у точку *E*). Це відбудеться, якщо корупція «проскочить» у якийсь момент хитливий стаціонарний стан (точку *C*) через коливання, що виникли в процесі переходу.

РОЗДІЛ 12

МАТЕМАТИЧНИЙ СПОСІБ МИСЛЕННЯ МЕНЕДЖЕРА ТА МАРКЕТОЛОГА

У цьому розділі подаються основні задачі прикладної математики, які виникають в менеджменті та маркетингу, а також математичні моделі, за допомогою яких подається формалізований опис цих задач.

Матеріал, що пропонується, сприяє формуванню певного підходу до справи, тобто такого способу мислення, коли людина розмірковує про ціни та варіанти реалізації продукції математичними методами в економічних категоріях: швидше, дешевше, більше, якісніше, прибуток—витрати.

Припускаємо, що математичний спосіб мислення допоможе майбутнім менеджерам, маркетологам оптимізувати роботу всього колективу.

Попри всю різноманітність розглянутих задач ми розуміємо, що їх не вистачить на всі життєві ситуації, але вони чітко показують, настільки важливо сучасному фахівцеві володіти математичним апаратом та математичним стилем роботи.

12.1. Задача про керування запасами

12.1.1. *Основні поняття*

Усупереч відомій приказці «Запас кишеню не тягне» підприємцю потрібно дбати про те, щоб витрати на зберігання продукції були в розумних межах.

Розглядають такі види запасів продукції: буферний запас, запас готової продукції.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Буферний запас*** — це запас, створюваний між постачальником і виробником з метою компенсації затримок у постачаннях, послаблення залежності споживача від постачальника та налагодження виробництва продукції партіями оптимального розміру. *Запас готової продукції* — це запас, створюваний для виробництва продукції партіями оптимального розміру, задоволення очікуваного попиту та компенсації відхилення фактичного попиту від прогнозованого (гарантійний запас).

Можливі різні постановки задачі керування запасами. Наприклад, визначити обсяг замовлень, вважаючи моменти виробництва замовлень фіксованими; визначити як обсяг, так і моменти замовлень.

ОЗНАЧЕННЯ. Під ***оптимальним*** звичайно розуміють розв'язок, що мінімізує суму всіх витрат, пов'язаних зі створенням запасів.

Витрати бувають трьох типів:

1) витрати на оформлення та одержання замовлення;

2) вартість зберігання продукції;

3) штрафи при виснаженні запасів за недопоставлену продукцію.

Доводиться такожураховувати характеристики попиту (відомий — не відомий, постійний — залежить від часу, виникає в певні моменти — існує безперервно і т. ін.) та замовлень (виконуються негайно — протягом якогось часу, приймаються в будь-який час — у певні моменти, надходить замовлене рівномірно — нерівномірно і т. ін.).

12.1.2. Найпростіша задача керування запасами

Постановка задачі. Введемо позначення: q — обсяг замовлення; q_0 — оптимальний обсяг замовлення; S_i — рівень запасів до початку i-го інтервалу; t_S — інтервал часу між двома замовленнями; S_0 — оптимальний рівень запасів до початку деякого інтервалу; t_{S0} — оптимальний інтервал часу між замовленнями; T — період часу, для якого шукається оптимальна стратегія; R — повний попит за час T; C_1 — вартість зберігання одиниці продукції за одиницю часу; C_2 — штраф за нестачу одиниці продукції; C_S — вартість замовлення (*вартість запуску партії у виробництво*); Q — очікувані сумарні витрати.

1. Нехай фірма має поставляти своїм клієнтам R виробів рівномірно протягом інтервалу T. Нестача не припускається, тобто штраф C_2 нескінченно великий. Потрібно знайти оптимальний інтервал часу замовлень.

Розв'язання. Змінні витрати виробництва складаються з витрат на зберігання готового продукту і витрат на запуск у виробництво чергової партії виробів. Очевидно, що кількість потрібних партій R/q (позначення згідно з постановою задачі), $t = (Tq/R)$. Якщо на початку інтервалу на складі q виробів, наприкінці — нуль, а відвантаження відбувається рівномірно, то середній запас становить $q/2$; витрати на зберігання: $0{,}5Cqt$; загальна вартість створення запасів у інтервалі t буде $0{,}5C_1qt + C_S$, а за час T повна вартість

$$Q = \left(0{,}5C_1qt_S + C_S\right)\cdot R/q = \left(0{,}5C_1qTq/R + C_S\right)\cdot R/q = 0{,}5C_1Tq + C_SR/q\,.$$

Графік залежності Q від наведено на q рис. 12.1.

Розв'язок дістаємо з рівняння $\dfrac{dq}{dQ} = 0$:

$$q_0 = \sqrt{2RC_S/TC_1}\,.$$

Відразу ж визначаємо $t_{S0} = \sqrt{2TC_S/RC_1}$ і $Q_0 = \sqrt{2RTC_1/C_S}$.

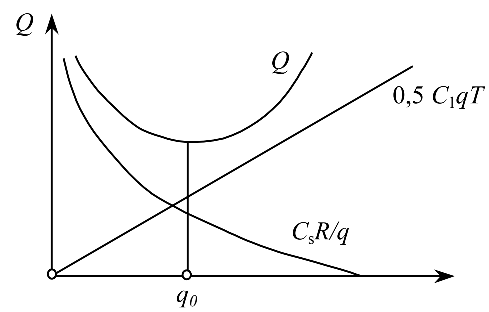


Рис. 12.1. Залежність витрат від обсягу партії, що замовляється

2. Нехай дефіцит припустимий, тобто штраф має якесь більш-менш прийнятне скінченне значення C_2. Процес відвантаження продукції на t_1 ілюструє рис. 12.2.

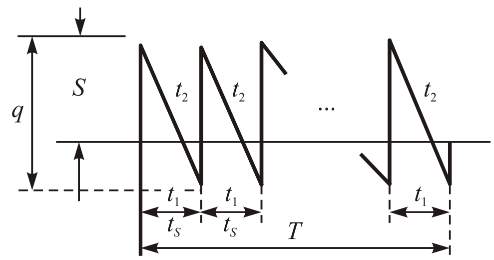


Рис. 12.2. Схема відвантаження в разі припустимості дефіциту

Із подібності трикутників маємо: $t_1 = \frac{St_S}{q}$, $t_2 = \frac{q-S}{q} t_S$.

Протягом t_1 середній запас $S/2$, а витрати на зберігання за t_1 становитимуть $0{,}5SC_1t_1$. Середня нестача (перевищення попиту над пропозицією) за t_2 буде $(q — S)/2$, штраф за t_2 становитиме $0{,}5(q-S)C_2t_2$. Отже, сумарні витрати за час T будуть:

$$Q(q, S) = \left(0{,}5SC_1t_1 + 0{,}5(q-S)C_2t_2 + C_S\right) \cdot R/q =$$
$$= \frac{S^2C_1T}{2q} + \frac{(q-S)^2C_2T}{2q} + \frac{C_SR}{q}.$$

Оптимальні значення q і S визначимо з рівнянь:

$$\frac{\partial Q}{\partial S} = \frac{SC_1T}{q} - \frac{(q-S)C_2T}{q} = 0;$$

$$\frac{\partial Q}{\partial q} = -\frac{S^2C_1T}{2q^2} + \frac{4q(q-S) - 2(q-S)^2}{4q^2}C_2T - \frac{C_SR}{q^2} = 0.$$

Дістанемо:

$$q_0 = \sqrt{\frac{2RC_S}{TC_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} \text{ і } S_0 = \sqrt{\frac{2RC_S}{TC_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}},$$

а далі знаходимо

$$t_{SO} = \sqrt{\frac{2TC_S}{RC_1}} \cdot \sqrt{\frac{C_1 + C_2}{C_2}} \text{ і } Q_0 = \sqrt{2RTC_1C_S} \cdot \sqrt{\frac{C_2}{C_1 + C_2}}.$$

Цікаво, що результати попереднього випадку, коли дефіцит був неприпустимий, випливають з останніх результатів, якщо C_2 прямує до нескінченності $(C_2 \to \infty)$. Далі маємо:

$$Q(C_2,\ C_1,\ C_S) = \sqrt{2RTC_1C_S\frac{C_2}{C_1+C_2}} < \sqrt{2RTC_1C_S} = Q(C_1,\ C_S),$$

тобто очікувані сумарні витрати в разі припустимості дефіциту менші, ніж у разі його неприпустимості.

12.1.3. *Задача керування запасами при двох рівнях цін*

Модифікуємо умову попередньої задачі.

Введемо додаткові позначення: k — витрати на придбання одиниці продукції; P — вартість складування, виражена в частках від ціни продукції.

Тепер ситуація відрізняється від попередньої тим, що в ціні є «знижка за кількість». Дефіцит вважається неприпустимим.

Розв'язання. За аналогією з попередніми міркуваннями можна знайти, що запаси в розрахунку на всю партію становлять $0,5qt_S = 0,5q(Tq/R) = 0,5Tq^2/R$, а в розрахунку на один виріб — $0,5Tq/R$.

Для кожного замовлення витрати визначатимуться такими величинами: C_S; qk; $C_S(Tq/2R)P$ — додатковими витратами при оформленні замовлення, що утворить запас протягом періоду t_S; $qk(Tq/2R)P$ — накладними витратами при купівлі виробів, що утворять запас протягом періоду t_S. Тоді сумарні витрати протягом t_S становлять: $C_S + qk + C_S\frac{Tq}{2R}P + qk\frac{Tq}{2R}P$, а загальні витрати для всього періоду T набирають вигляду:

$$Q = \left(C_S + qk + C_S\frac{Tq}{2R}P + qk\frac{Tq}{2R}P\right)\frac{R}{q} = \frac{C_SR}{q} + kR + \frac{C_STP}{2} + k\frac{TP}{2}q.$$

Мінімум загальних витрат можна знайти з рівняння

$$\frac{dQ}{dq} = -\frac{C_SR}{q^2} + \frac{1}{2}kTP = 0, \text{ звідки } q_0 = \sqrt{\frac{2C_SR}{kTP}}.$$

Знаючи q_0, знаходимо $Q_0 = \sqrt{2kTPC_SR} + kR + 0,5C_STP$.

Нехай тепер при обсязі закупівель $q < b$ ціна продукту буде k_1, а при $q \geq b$ ціна буде k_2, причому $k_2 < k_1$. Тоді дістаємо:

$$Q_1 = \frac{C_S R}{q} + k_1 R + \frac{C_S TR}{2} + k_1 \frac{TP}{2} q \text{, якщо } q < b,$$

$$Q_2 = \frac{C_S R}{q} + k_2 R + \frac{C_S TR}{2} + k_2 \frac{TP}{2} q \text{, якщо } q \geq b.$$

Із рівнянь для Q_1 і Q_2 можна знайти, що при $k_2 < k_1$ мінімум для Q_2 буде меншим за мінімум для Q_1.

Позначимо через q_{10} і q_{20} ті значення, при яких досягаються місце мінімуми Q_1 і Q_2.

Отже, доходимо таких висновків.

Якщо $q_{20} \geq b$, то оптимальний розмір закупівель буде q_{20}.

А коли щойно обчислений оптимальний розмір закупівель $\sqrt{2C_S R / kTP}$ при $k = k_2$ менший від b, то поступок у ціні не буде, купувати доведеться за ціною k_1. Проте коли $Q(q_{10}) > Q(b)$, тобто купуємо за ціною k_1 такий обсяг, який забезпечує мінімум витрат, витрачаємо більше, ніж у разі купівлі обсягу b (уже за ціною k_2, хоча це й не гарантує мінімальних витрат). Таким чином, при $q_{20} < b$ потрібно порівняти $Q_0(k_1, q_{10})$ і $Q(k_2, b)$. Якщо $Q_0(k_1, q_{10}) < Q(k_2, b)$, то оптимальний розмір закупівлі q_{10}, інакше оптимальний розмір закупівлі b.

12.1.4. *Класична задача керування запасами*

Означення. Під ***задачею керування товарними запасами*** розуміється така оптимізаційна задача, в якій задано інформацію:
- про постачання товару;
- про попит на товар;
- про витрати й умови зберігання товарних запасів;
- критерій оптимізації.

Постановка задачі (*класична*)

Візьмемо за одиничний інтервал часу один день. Нехай до кінця дня t – 1 на складі зберігається запас товару в обсязі $x_{t-1} \geq 0$. Склад робить замовлення на поповнення запасу товару в обсязі h_t. Це поповнення надходить до початку наступного дня t, так що запас товару на початку наступного дня становить $x_{t-1}+h_t$. Нехай s_t — обсяг товару, запитуваний споживачем (чи споживачами) у день t (обсяг заявки).

Якщо $s_t \le x_{t-1}+h_t$, то склад задовольняє заявку споживача цілком, а залишки товару $x_t = x_{t-1}+h_t-s_t$ переносяться наступного дня $t+1$, причому витрати зберігання цього запасу пропорційні до його обсягу й подаються так:

$$cx_t = c\left(x_{t-1}+h_t-s_t\right).$$

Якщо обсяг заявки $s_t > x_{t-1}+h_t$, то склад цілком віддає свій запас, а за недопоставлений товар зазнає втрат (наприклад, штрафується за дефіцит), пропорційних до обсягу дефіциту, які дорівнюють $k(s_t - x_{t-1}-h_t) = -k(x_{t-1}+h_t-s_t)$.

Таким чином, повні витрати $\varphi(x_{t-1},\, h_t,\, s_t)$ складу можна записати у вигляді:

$$\varphi(x_{t-1},\, h_t,\, s_t) = \max\{c(x_{t-1}+h_t-s_t);\, -k(x_{t-1}+h_t-s_t)\}, \qquad (12.1)$$

при цьому залишок товару $x_t = \max\{0;\, x_{t-1}+h_t-s_t\}$.

Із (12.1) випливає:

якщо $x_t > 0$, то $\varphi(x_t) = cx_t$;
якщо $x_t < 0$, то $\varphi(x_t) = -kx_t$;
якщо $x_t = 0$, то $\varphi(x_t) = 0$.

У класичній постановці задачі керування запасами передбачається, що сам обсяг попиту s_t невідомий, але відомо, що він є незалежною випадковою величиною і має заданий закон розподілу.

Нехай розподіл імовірностей величини s_t задається неперервною функцією розподілу $F(x)$ зі щільністю розподілу $f(x)$. Тоді середні повні витрати $\Phi(x_{t-1}+h_t)$ задаються формулою:

$$\Phi(x_{t-1}+h_t) = M\varphi(x_{t-1},\, h_t,\, s_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_{t-1},\, h_t,\, s_t)\, dF(s_t),$$

де M — математичне сподівання.

Задача ставиться в такий спосіб: визначити обсяг замовлення на поповнення h_t, який мінімізує середні повні витрати, тобто $\Phi(x_{t-1}+h_t) \to \min$, де $h_t \ge 0$.

Розглянемо розв'язання класичної задачі керування товарними запасами у статичній постановці. Позначимо $y = \left(x_{t-1} + h_t\right)$ й опустимо через статичність задачі індекс t у запису обсягу попиту і поповнення. Розглянемо таку задачу:

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \max\{c(y-s) - k(y-s)\} dF(s) \to \min \tag{12.2}$$

Перепишемо функцію $\Phi(y)$ у зручнішому вигляді:

$$\Phi(y) = c\int_{-\infty}^{+\infty}(y-s)dF(s) + k\int_{-\infty}^{+\infty}(s-y)dF(s)$$

і обчислимо її першу похідну:

$$\Phi'(y) = cF(y) - k(1 - F(y)) = (c+k)F(y) - k. \tag{12.3}$$

Зауважимо, що друга похідна цієї функції невід'ємна (тобто функція опукла вниз):

$$\Phi''(y) = (c+k)F'(y) = (c+k)f(y) \geq 0,$$

тому, прирівнявши першу похідну до нуля, дістанемо рівняння для мінімізуючого запасу y^*:

$$F\left(y^*\right) = \frac{k}{c+k}. \tag{12.4}$$

Розв'язок (12.4) задачі (12.2) визначає стратегію оптимального поповнення запасів. Значення поповнення запасів h_t^*, що мінімізує середні повні витрати, задається таким правилом:

$$h_t^* = \begin{cases} 0, & \text{якщо} \quad x_{t\text{-}1} \geq y^*, \\ y^* - x_{t-1}, & \text{якщо} \quad x_{t\text{-}1} \leq y^*. \end{cases} \tag{12.5}$$

Конкретні числові характеристики системи керування запасами залежать від виду функції щільності розподілу $f(x)$ випадкової величини попиту. Як приклад розглянемо випадок симетричного «трикутного» розподілу попиту, коли функція щільності розподілу має графік, наведений на рис. 12.3 Очевидно, цей графік утворюється паралельним рівнобіжним перенесенням праворуч (заміною x на $x - a$) графіка функції (рис. 12.4)

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le -b,\\ \dfrac{x+b}{b^2}, & \text{якщо} \quad -b\le x\le 0,\\ -\dfrac{x+b}{b^2}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le b,\\ 0, & \text{якщо} \quad x\ge b.\end{cases} \tag{12.6}$$

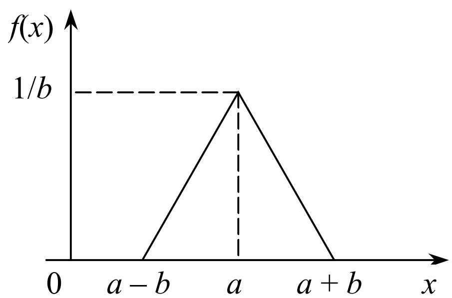


Рис. 12.3

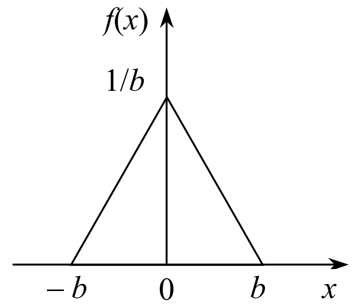


Рис. 12.4

Обчислимо числові характеристики для функції щільності розподілу, заданої виразом (12.5). У цьому випадку функція розподілу $F(x)$ задається формулою:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{якщо} \quad x\le -b,\\ \dfrac{(x+b)^2}{2b^2}, & \text{якщо} \quad -b\le x\le 0,\\ 1-\dfrac{(x+b)^2}{2b^2}, & \text{якщо} \quad 0\le x\le b,\\ 1, & \text{якщо} \quad x\ge b.\end{cases} \tag{12.7}$$

Випадкова величина попиту s має такі числові характеристики: математичне сподівання $Ms=0$; математичне сподівання квадрата $Ms^0=b^2/6$; дисперсія $Ds=b^2/6$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(s)=b\big/\sqrt{6}$.

Безпосередні обчислення з використанням функції середніх повних витрат у вигляді (12.2) показують, що при $x\le -b$

$$\Phi(x)=-k\int_{-\infty}^{+\infty}(x-s)f(s)ds=-kx\int_{-\infty}^{+\infty}f(s)ds+ \\ +k\int_{-\infty}^{+\infty}sf(s)ds=-kx+kMs=-kx. \tag{12.8}$$

Використовуючи вирази для першої похідної $\Phi'(x)$ у вигляді (12.3) і вирази (12.6) для функції щільності розподілу $F(x)$, визнаємо, що при $-b \le x \le 0$

$$\Phi(x) = (c+k)\frac{(x+b)^3}{6b^2} - kx + C_1. \tag{12.9}$$

Тут константа інтегрування C_1 визначається прирівнюванням виразів (12.8) і (12.9) при $x = -b : kb = kb + C_1$, звідки $C_1 = 0$.

Аналогічно при $0 \le x \le b$ дістанемо:

$$\Phi(x) = -(c+k)\frac{(x-b)^3}{6b^2} + cx, \tag{12.10}$$

а при $x \ge b$:

$$\Phi(x) = cx. \tag{12.11}$$

Вирази (12.8) — (12.11) задають у різних інтервалах шукану функцію середніх повних витрат. Замінюючи в ній *x* на *x – a*, дістаємо функцію середніх повних витрат, якщо функція щільності розподілу попиту має вигляд, зображений на рис. 12.3. Графік функції середніх повних витрат для такої функції попиту при $k > c$ наведено на рис. 12.5, де оптимальний рівень запасу $y^* = a + b -$ $-\sqrt{\frac{2c}{c+k}} \cdot b.$

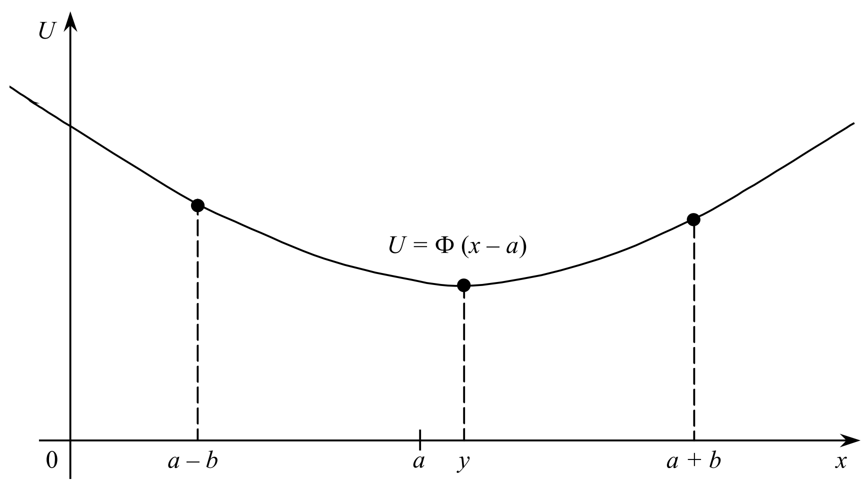


Рис. 12.5

У загальному вигляді для даної функції щільності розподілу попиту оптимальний рівень запасу задається формулами:

$$y^* = \begin{cases} a - b + \sqrt{\dfrac{2k}{c+k}} \cdot b, & \text{якщо} \quad c > k, \\ a, & \text{якщо} \quad c = k, \\ a + b - \sqrt{\dfrac{2c}{c+k}} \cdot b, & \text{якщо} \quad c < k. \end{cases} \tag{12.12}$$

а значення $\Phi = \Phi\left(y^*\right)$ мінімуму середніх повних витрат має вигляд:

$$\Phi^* = \begin{cases} bk\left(1 - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2k}{c+k}}\right), & \text{якщо} \quad c > k, \\ b \cdot k/3 = b \cdot c/3, & \text{якщо} \quad c = k, \\ bc\left(1 - \dfrac{2}{3}\sqrt{\dfrac{2c}{c+k}}\right) \cdot b, & \text{якщо} \quad c < k. \end{cases} \tag{12.13}$$

Із формул (12.12) і (12.13) для цієї моделі випливає, що оптимальний рівень запасу при $c \neq k$ і мінімум середніх повних витрат при всіх c, k лінійно залежать від значення b, тобто від довжини інтервалу розкиду значень попиту на товар.

12.1.5. *Принципи прогнозування товарних запасів*

Зауваження. У практичній діяльності організацій і служб маркетингу використовуються прості принципи прогнозування товарних запасів, що ґрунтуються на різних стратегіях їх поповнення, тобто на певних правилах цього поповнення, виражених у доволі загальній формі. Як параметри в цих системах розглядаються обсяг наявних на складі запасів, припустимі коливання рівня запасів, розміри замовлення на поповнення запасів, його періодичність тощо. Системи розрізняють залежно від того, які з параметрів узято як регулювальні. Дамо стислий огляд цих систем.

1. Система з фіксованим розміром замовлення. Це найпоширеніша система, в якій розмір замовлення на поповнення запасів — постійна величина, а постачання чергової партії товару здійснюється при зменшенні наявних запасів до певного критичного рівня, названого ***точкою замовлення***. Тому регулювальними параметрами системи з фіксованим розміром замовлення є:

1) точка замовлення, тобто фіксований рівень запасу, з наближенням до якого організується заготівля чергової партії товару; 2) розмір замовлення, тобто обсяг партії постачання. Таку систему часто називають *двобункерною*, оскільки запас зберігається неначе у двох бункерах: у першому бункері для задоволення попиту протягом періоду між фактичним поповненням запасу і датою наступного найближчого замовлення, а у другому — для задоволення попиту протягом періоду від моменту подачі замовлення до надходження чергової партії товару, тобто в другому бункері зберігається запас на рівні точки замовлення.

2. Система з **фіксованою періодичністю замовлення.** У цій системі замовлення на чергове постачання товарного запасу повторюються через однакові проміжки часу. Наприкінці кожного періоду перевіряється рівень запасів і відповідно визначається розмір партії, що замовляється; при цьому запас поповнюється щоразу до певного рівня, який не перевищує максимального запасу. Отже, регулювальні параметри цієї системи такі: 1) максимальний рівень запасів, до якого здійснюється їх поповнення; 2) тривалість періоду повторення замовлень. Система з фіксованою періодичністю замовлення ефективна, коли є змога поповнювати запас у різних розмірах, причому витрати на оформлення замовлення будь-якого розміру невеликі. Однією з переваг цієї системи можна вважати можливість періодично перевіряти залишки на складі, не здійснюючи систематичного обліку руху залишків. Недолік системи полягає в тому те, що вона не виключає можливості нестачі товарних запасів.

3. Система з двома фіксованими рівнями запасів та фіксованою періодичністю замовлення. У цій системі припустимий рівень запасів регламентується як зверху, так і знизу. Крім максимального верхнього рівня запасу встановлюється нижній рівень (точка замовлення). Якщо розмір запасу знижується до нижнього рівня ще до настання фіксованого часу поповнення запасу, то робиться позачергове замовлення. В інших випадках система функціонує як система з фіксованою періодичністю замовлення. У цій системі існують три регулювальні параметри: 1) максимальний рівень запасу; 2) нижній рівень запасу (точка замовлення); 3) тривалість періоду між замовленнями. Перші два параметри постійні, третій — частково змінний. Ця система складніша за попередню, але вона дає змогу виключити нестачу товарного запасу. Недоліком системи є те, що поповнення запасів до максимального рівня не може здійснюватись незалежно від фактичної витрати запасів.

4. Система з двома фіксованими рівнями запасів без постійної періодичності замовлення, або **(*s*, *S*)-стратегія керу-**

вання запасами. Цю систему називають також (S-s)-системою, або системою «максимум-мінімум».

Розглянемо (s, S)-стратегію керування запасами докладніше. Вона усуває недолік попередньої системи і є її модифікацією. У цій системі — два регулювальні параметри: 1) нижній (критичний) рівень запасу s і 2) верхній рівень запасу S.

Якщо через x позначити обсяг запасів до ухвалення рішення про їх поповнення, через p — обсяг поповнення, а через $y = x + p$ — обсяг запасів після поповнення, то (s, S)-стратегія керування запасами задається функцією

$$y(x) = \begin{cases} x, & \text{якщо} \quad x > s, \\ S, & \text{якщо} \quad x \le s, \end{cases} \tag{12.14}$$

тобто поповнення не відбувається, якщо наявний рівень запасів перевищує критичний рівень s; якщо наявний рівень менший або дорівнює s, то приймається рішення про поповнення запасу неодмінно до верхнього рівня S, так що обсяг поповнення дорівнює $p = S - x$.

5. Саморегулювальні системи. Розглянуті раніше системи регулювання запасів припускають відносну незмінність умов їх функціонування. На практиці така сталість умов трапляється рідко, що пояснюється змінами потреби в товарних запасах, умовами їх постачання і т. ін. У зв'язку з цим постає потреба створювати комбіновані системи з можливістю саморегулювання (адаптації до умов, що змінилися). Створюються системи зі змінюваними періодичністю та розміром замовлень, що враховують стохастичні (недетерміновані) умови. У кожній такій системі встановлюється певна цільова функція, яка слугує критерієм оптимальності функціонування системи в рамках відповідної економіко-математичної моделі керування запасами.

Як цільову функцію в задачах керування запасами найчастіше розглядають мінімум витрат, пов'язаних із заготівлею та зберіганням запасів, а також утрати від дефіциту. Приклад такої цільової функції в загальному вигляді розглянуто раніше при вивченні класичної задачі керування запасами.

Одним з елементів цільової функції при побудові саморегулювальних систем керування запасами є витрати, пов'язані з організацією замовлення та його реалізацією, починаючи з пошуку постачальника і закінчуючи оплатою всіх послуг з доставлення товарних запасів на склад. Частина витрат, пов'язаних з організацією замовлень, не залежить від розміру замовлення, але залежить від кількості таких організаційних заходів за рік. Витрати, пов'язані з реалізацією замовлення, залежать від розміру замовленої партії, причому витрати в розрахунку на одиницю товару зменшуються зі збільшенням розміру партії.

Інший елемент цільової функції — витрати, пов'язані зі зберіганням запасу. Частина витрат на зберігання має добовий характер (плата за оренду приміщень, за опалення тощо), решта прямо залежить від рівня запасів (витрати на складську переробку товарних запасів, утрати від псування, витрати обліку тощо). При розрахунках на основі економіко-математичних моделей керування запасами звичайно використовують питомі витрати на зберігання, які дорівнюють витратам на одиницю товару, що зберігається, за одиницю часу. При цьому припускають, що витрати на зберігання за календарний період пропорційні до розміру запасів і тривалості періоду між замовленнями й обернено пропорційні до кількості замовлень за цей період.

Нарешті, третім елементом розглядуваної цільової функції є втрати через дефіцит, коли постачальницько-збутова організація несе матеріальну відповідальність за незадоволення потреби споживачів через відсутність запасів.

Наприклад, при незадоволеному попиті постачальницько-збутова організація може зазнавати збитків у вигляді штрафу за зрив постачання. Імовірність дефіциту — це очікувана відносна частота появи випадків нестачі товарної продукції протягом більш-менш тривалого інтервалу часу. Часто ймовірність дефіциту визначається як частка від ділення кількості днів, коли товар на складі відсутній, на загальну кількість робочих днів, наприклад у році.

12.1.6. Задача прогнозованої роботи складу

Розглянемо роботу складу, на якому зберігаються товарні запаси, що витрачаються для постачання споживачів. Робота реального складу супроводжується безліччю відхилень від ідеального режиму: замовлено партію одного обсягу, а прибула партія іншого обсягу; за планом партія має прибути, скажімо, через два тижні, а вона прийшла через десять днів; за норми розвантаження в одну добу розвантаження партії тривало три доби тощо. Урахувати всі ці відхилення практично неможливо, тому при моделюванні роботи складу звичайно робляться такі припущення:

- швидкість витрати запасів зі складу — постійна величина, яку позначимо M (одиниць товарних запасів за одиницю часу); відповідно до цього графік зміни обсягу запасів із плином часу є відрізком прямої;

• обсяг партії поповнення Q є постійна величина, так що система керування запасами — це система з фіксованим розміром замовлення;

• час розвантаження прибулої партії поповнення запасів малий, тому вважатимемо, що він дорівнює його рівним нулю;

• час від ухвалення рішення про поповнення до приходу замовленої партії є постійна величина Δt, так що можна вважати, що замовлена партія приходить миттєво: якщо потрібно, аби вона прийшла точно у визначений момент, то її варто замовити в момент часу на Δt раніше;

• на складі не відбувається систематичного нагромадження або перевитрати запасів. Якщо через T позначити час між двома послідовними постачаннями, то має виконуватись рівність: $Q = MT$. Зі сказаного випливає, що робота складу відбувається однаковими циклами тривалістю T, і за час циклу обсяг запасу змінюється від максимального рівня S до мінімального рівня s;

• нарешті, вважатимемо неодмінним виконання вимоги щодо неприпустимості відсутності запасів на складі, тобто виконання нерівності $s \geq 0$. З погляду зменшення витрат складу на зберігання звідси випливає, що $s = 0$, а отже, $S = Q$.

Графік «ідеальної» роботи складу у вигляді залежності обсягу запасів y від часу t наведено на рис. 12.6.

Витрати, що не залежать від обсягу партії, називають ***накладними***. Сюди входять поштово-телеграфні витрати, витрати на відрядження, деяка частина транспортних витрат і т. ін. Накладні витрати позначатимемо через K. Витрати на зберігання запасів вважатимемо пропорційними до обсягу запасів, що зберігаються, та часу їх зберігання. Витрати на зберігання однієї одиниці запасів протягом однієї одиниці часу називаються ***питомими витратами зберігання***; позначатимемо їх через h.

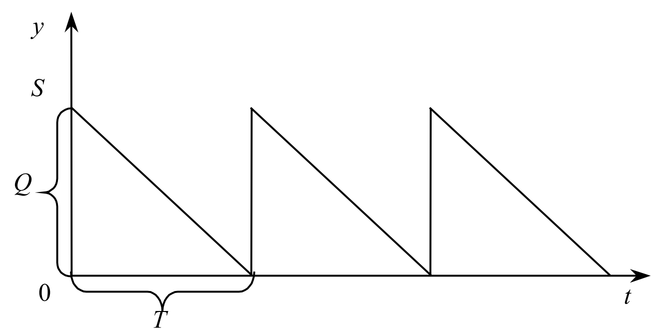


Рис. 12.6

У разі змінюваного обсягу величині запасів, що зберігаються, витрати на зберігання за деякий час T дістають множенням добутку h і T на середнє значення обсягу запасів протягом цього часу T. Таким чином, витрати складу за час T при розмірі партії поповнення Q у разі ідеального режиму роботи складу (див. рис. 12.6) набираються вигляду:

$$Z_T(Q) = K + h \cdot T \cdot Q / 2.$$

Поділивши цю функцію на постійну величину T і врахувавши рівності $Q = MT$, дістанемо вираз для витрат на поповнення та зберігання запасів за одиницю часу:

$$Z_1(Q) = Z_T(Q)/T = K/T + h \cdot Q/2 = K \cdot M/Q + h \cdot Q/2 \,. \quad (12.15)$$

Це й буде цільовою функцією, мінімізація якої дасть змогу знайти оптимальний режим роботи складу.

Знайдемо обсяг Q партії, що замовляється, при якому мінімізується функція середніх витрат складу за одиницю часу, тобто функція $Z_1(Q)$. На практиці Q часто набуває дискретних значень, зокрема через використання транспортних засобів визначеної вантажопідйомності; у цьому разі оптимальне значення Q знаходять перебором припустимих значень Q. Вважаючи, що обмежень на значення, яких може набувати Q, немає, можемо задачу на відшукання мінімуму функції $Z_1(Q)$ розв'язувати методами диференціального числення:

$$\frac{dZ_1}{dQ} = -\frac{KM}{Q^2} + \frac{h}{2} = 0\,,$$

звідки знаходимо точку мінімуму:

$$Q_{\text{опт}} = \sqrt{\frac{2KM}{h}}\,. \quad (12.16)$$

Ця формула називається ***формулою Уїлсона*** на честь англійського вченого-економіста, який вивів її у 1920-х роках.

Оптимальний розмір партії, обчислюваний за формулою Уїлсона, має характеристичну властивість: розмір партії Q оптимальний тоді і тільки тоді, коли витрати зберігання за час циклу T дорівнюють накладним витратам K.

Справді, якщо $Q = \sqrt{2KM / h}$, то витрати зберігання за цикл

$$h\frac{Q}{2}T = h\frac{Q}{2}\frac{Q}{M} = h\frac{2KM}{2Mh} = K.$$

А якщо витрати зберігання за цикл дорівнюють накладним витратам, тобто

$$h\frac{Q}{2}T = h\frac{Q}{2}\frac{Q}{M} = K,$$

то $Q = \sqrt{2KM / h}$.

Характеристичну властивість оптимального розміру партії ілюструє рис. 12.7, де показано, що мінімальне значення функції досягається $Z_1(Q)$ при тому значенні Q, при якому рівні між собою значення двох інших функцій, її складових.

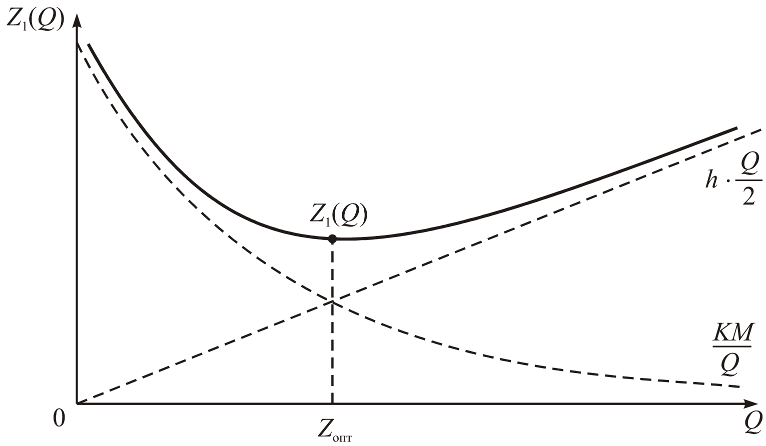


Рис. 12.7

Використовуючи формулу Уїлсона згідно зі зробленими раніше припущеннями про ідеальну роботу складу можна дістати такі розрахункові характеристики роботи складу в оптимальному режимі:
оптимальний середній рівень запасу

$$\overline{Q}_{опт} = Q_{опт}/2 = \sqrt{KM/2h}\ ;$$

оптимальна періодичність поповнення запасів

$$T_{опт} = Q_{опт}/M = \sqrt{2K/Mh}\ ;$$

оптимальні середні витрати зберігання запасів за одиницю часу

$$\overline{H}_1 = \overline{Q}_{опт}h = \sqrt{KM\,h/2}\ .$$

12.2. Задачі про торги

Розглянемо два види торгів: закриті і відкриті (аукціон). У першому випадку учасники торгів незалежно пропонують ціни, причому, як правило, кожний учасник торгів має право зробити це тільки один раз. Той, хто веде торги, приймає вищу чи нижчу ціну. У другому випадку учасники торгів відкрито, у присутності один одного, називають ціну і можуть робити це неодноразово. Перемагає той, хто останнім назве ціну.

Постановка задачі (*відкритий торг*). Нехай на аукціоні продаються два об'єкти, пропоновані для продажу один після одного, і є два покупці *A* і *B*, що розповсюджується сумами S_A і S_B, причому метою покупця *A* є максимізація свого прибутку. Передбачається також, що відомо ціни V_1 і V_2, за якими куплені об'єкти потім можуть бути продані. Вважається, що $S_A < V_1 + V_2$, $S_B < V_1 + V_2$, $0{,}5 < S_A / S_B < 2$ і що *A* знає значення S_B. Оскільки шукається оптимальний розв'язок для *A*, то немає потреби (у даній задачі) робити припущення щодо поінформованості *B* про значення S_A.

Розв'язання. Нехай *B* запропонував за перший об'єкт ціну *X*. Покупцеві *A* варто пропонувати за перший об'єкт $X + a$, якщо очікуваний при цьому його прибуток $V_1 - (X + a)$ буде не менший від прибутку, який він одержить, дозволивши *B* купити перший об'єкт за ціну *X*. Якщо *B* купив перший об'єкт за *X*, то в нього залишилося $S_B - X$ і більше від цієї суми він за другий об'єкт запропонувати не може. Тому покупець *A* може виграти торг за другий об'єкт, запропонувавши за нього ціну $S_B - X + a$. У цьому випадку (тобто давши виграти *B* торг за перший об'єкт) *A* одержує прибуток $V_2 - (S_B - X + a)$. Отже, для *A* доцільно підвищувати ціну з *X* до $X + a$ при торзі за перший об'єкт тільки тоді, коли $V_1 - (X + a) \ge V_2 - (S_B - X + a)$, тобто при $X \le (V_1 - V_2 + S_B)/2$. Міркуючи аналогічно, доходимо висновку, що покупець *B*, намагаючись максимізувати свій прибуток, запропонує ціну $X + a$, коли $X \le (V_1 - V_2 + S_A)/2$.

Якщо *A* і *B* торгуються коректно, то події розвиваються так. У тому випадку, коли запропонована ціна *X* така, що $X < (V_1 - V_2 + S_B)/2$ і $X < (V_1 - V_2 + S_A)/2$, обидва покупці готові оголосити ціну $X + a_1$. Якщо $X + a_1$ задовольняє обидві останні строгі нерівності, то обидва покупці готові підняти ціну до $X + a_2$, $a_2 > a_1$ і т. д. Нарешті, настане такий момент торгу, коли

$X + a_n$ дорівнюватиме меншому зі значень $(V_1 - V_2 + S_A)/2$ і $(V_1 - V_2 + S_B)/2$. У цьому випадку один із покупців більше вже не підніматиме ціну, і тому інший покупець, запропонувавши за перший товар ціну $\frac{V_1 - V_2 + S_B}{2} + a$ (при $S_B < S_A$) чи $\frac{V_1 - V_2 + S_A}{2} + a$ (при $S_A < S_B$), виграє торг за цей товар.

Тепер можна знайти прибуток покупця *A*. Якщо $S_A > S_B$, то перший товар буде куплений за ціною $\frac{V_1 - V_2 + S_B}{2} + a$, причому купить його *B*. Отже, прибуток *A* становитиме:

$$V_2 - \left(S_B - \frac{V_1 - V_2 + S_B}{2} + a \right) = \frac{V_1 + V_2 - S_B}{2} - a\,,$$

причому йому дістанеться в цьому разі другий товар. Якщо ж $S_A < S_B$, то *A* купує перший товар, оскільки в цьому разі *B* вже не піднімає ціни, причому прибуток *A* буде

$$V_1 - \left(\frac{V_1 - V_2 + S_A}{2} + a \right) = \frac{V_1 + V_2 - S_A}{2} - a\,.$$

Постановка задачі (*закритий торг*). Нехай двоє покупців *A* і *B* беруть участь одночасно у двох закритих торгах за право придбання двох об'єктів, наступні доходи від яких V_1 і V_2. У цій ситуації для простоти вважається, що кожний покупець має однакову суму грошей *S*, причому $S < V_1 + V_2$. При рівності пропозицій переможця виявляє жеребкування.

Розв'язання. Нехай A_1 і A_2 — ціни, пропоновані покупцем *A* відповідно за перший і другий об'єкт; d_1, d_2 — прибутки покупця *A* при купівлі першого чи другого об'єкта, які відшукуються просто: $d_k = V_k - A_k$, $k = 1, 2$. Оскільки торг закритий, то покупцеві *A* є сенс запропонувати ціни A_1 і A_2 так, щоб було $d_1 = d_2$, у цьому разі він «не програє» за будь-якої покупки. При $d_1 = d_2 = d$, $A_1 + A_2 = S$ маємо: $d = V_1 - A_1$, $d = V_2 - A_2$ відповідно для першого і другого об'єкта; $2d = V_1 + V_2 - (A_1 + A_2) = V_1 + V_2 - S$, а отже, $d = 0{,}5 \times \times (V_1 + V_2 - S)$. Тоді $A_1 = V_1 - d = 0{,}5(V_1 - V_2 + S)$, $A_2 = V_2 - d = 0{,}5 \times \times (V_2 - V_1 + S)$. Якщо виявиться, що одна з останніх рівностей для A_1 чи A_2 дає від'ємне значення, то потрібно замість цієї від'ємної ціни взяти ціну, яка дорівнює нулю, тобто запропонувати всю суму *S* за інший об'єкт. Ця сама стратегія є кращою і для *B*, тому пропоновані обома покупцями ціни будуть однакові. І кому який об'єкт дістанеться, визначиться жеребкуванням. Однаковим буде й прибуток кожного з покупців, а саме *d*.

Якщо ж покупець *B* діятиме інакше, запропонувавши, скажімо, за перший об'єкт $V_1 - d + p$, за другий $V_1 - d - p$, то він одержить перший об'єкт, *A* одержить другий об'єкт, але прибуток в *A* і *B* буде різним: в *A* прибуток, як і раніше, дорівнюватиме *d* (адже він, як і раніше, дає ціну A_2), а в *B* прибуток буде $V_1 - (V_1 - d + p) = = d - p < d$. Таким чином, покупець *A*, використовуючи ціни A_1 і A_2, одержує дохід не менш як *d* і перешкоджає покупцеві *B* одержати дохід понад *d*.

Звичайно, обидва розглянуті випадки торгів — найпростіші. Реальні торги та їх аналіз набагато складніші.

12.3. Задача про календарне планування

12.3.1. *Основні поняття*

Будь-яка діяльність відбувається в часі, тому здебільшого доводиться визначати, коли що робити, тобто складати ***календарний план*** виконання робіт. Календарний план узгоджує в часі дії, спрямовані на досягнення мети, причому таке узгодження, природно, має поліпшувати план у найстисліші терміни.

Специфіка задач календарного планування, їхній обсяг та їх складність зумовили розвиток особливої групи задач і спеціальних методів їх розв'язування, що вивчаються в розділі прикладної математики — ***теорії розкладу.***

Приклад 1. Розглядається шлюз, здатний пропускати тільки по одному кораблю. Простій суден призводить до штрафів, розмір яких залежить від типу затримуваного корабля і часу простою. Знаючи розклад прибуття суден, потрібно визначити порядок шлюзування, що мінімізує загальну суму штрафів.

Приклад 2. (***класична задача про комівояжера***). Комівояжер повинний відвідати кілька міст, відстань між якими відомо, і повернутися додому. Треба вибрати маршрут, мінімізуючий загальний шлях.

Приклад 3. Задача визначення порядку запуску деталей у виробництво. У цій задачі є виробничий план у вигляді переліку деталей, які необхідно виготовити за зазначеною технологією. Відомі також кількість деталей кожного найменування, трудомісткість обробки деталей на кожному верстаті і, можливо, ще якісь дані. Потрібно скласти календарний план, що мінімізує загальний час виготовлення всіх деталей.

Якщо розмірність задачі (кількість змінних) не дуже велика, то можна використати графічні чи табличні методи складання календарного плану. Розглянемо дві задачі складання календарного плану.

12.3.2. *Задача С. Джонсона для двох верстатів*

Постановка задачі. Нехай є два верстати A і B, кожна деталь має бути оброблена і на верстаті A (причому в першу чергу), і на верстаті B (у другу чергу). Вважається відомою тривалість обробки кожному деталі на кожнім верстаті: $t_i A$ —тривалість (час) обробки i-ї деталі на верстаті A; $t_i B$ — тривалість (час) обробки деталі на верстаті B. Для різних деталей тривалість, узагалі кажучи, різна.

Важливими обмеженнями (крім обмеження на послідовність обробки) є такі умови: на кожному з верстатів можна одночасно обробляти тільки одну деталь; кожна деталь може оброблятися тільки на одному верстаті; процес обробки деталі не може перериватися. Потрібно визначити варіант плану запуску деталей, при якому загальний час їх обробки буде мінімальним.

Алгоритм розв'язування задачі

1. Записують тривалість робіт (в одиницях часу):

Номер деталі	1	2	3	4	5
Верстат A	3	4	2	3	1
Верстат B	2	1	3	5	4

2. Проглядають усі значення часу обробки (і для A, і для B) і знаходять мінімальне з них ($t_2 B = 1$ і $t_5 A = 1$).

3. Якщо мінімальний час стосується до першого верстата (тобто час $t_i A$, у прикладі $t_5 A = 1$), то деталь із відповідним номером ставиться на обробку першою (деталь 5 буде першою оброблятися на *A,* а отже, і на *B*).

4. Якщо мінімальний час стосується другого верстата (тобто це час $t_i B$), то деталь з відповідним номером ставиться на обробку останньою (деталь 1 буде оброблятися останньою).

5. «Забувають» обрану деталь.

6. Повторюють усе сказане з деталями, що залишилися.

7. Якщо час обробки двох різних деталей на одному верстаті однаковий і менший від часу обробки на іншому верстаті, то порядок обробки цих деталей довільний.

Для наведеного прикладу оптимальна послідовність обробки: 5—3—4—1—2; загальна тривалість обробки — 16 одиниць часу. Для порівняння: обробка в послідовності 1—2—3—4—5 потребує 21 одиницю часу.

Якщо розглядати роботу трьох верстатів, то ситуація набагато складніша.

12.3.3. *Задача розподілу замовлень*

У разі великого виробництва, коли ті самі вироби можна обробляти на різних верстатах, постає проблема розподілу замовлень між верстатами, оскільки потрібно мінімізувати загальні витрати на все виробництво. Задача складна, але якщо витрати на виріб пропорційні до часу обробки цього виробу, то можна використовувати метод, названий ***індикаторним***.

Постановка задачі. Нехай потрібно виконати чотири замовлення:

замовлення 1—100 виробів;
замовлення 2—200 виробів;
замовлення 3—50 виробів;
замовлення 4—75 виробів.

Виріб будь-якого замовлення можна обробляти на кожному з чотирьох верстатів *A*, *B*, *C*, *D*, але час виконання замовлень буде різним. Кожний із верстатів має свій обмежений час для виконання замовлень. Усю інформацію зведено в табл. 12.1, де N — номер замовлення; V — обсяг замовлення (задається); t_{ik} — норматив обробки виробу *i*-го замовлення на *k-му* верстаті, шт./год (задається), T_{ik} — загальні витрати часу на *i*-те замовлення при його виконанні на *k-му* верстаті, год; I_{ik} — індикатор для *i*-го замовлення і *k*-го верстата; R_k — ресурс часу *k*-го верстата, год (задається); P_k — використаний час *k*-го верстата, год.

Правила обчислення значень індикатора I_{ik} такі. Верстату, що має найбільшу продуктивність обробки виробів даного замовлення (тобто найбільший норматив), присвоюється значення індексу, яке дорівнює 1. Для замовлення 1 верстат D — найкращий, тому I_{1D} — 1,00.

Наступному за продуктивністю верстату приписується оцінка, яка дорівнює відношенню загальної кількості годин роботи розглянутого верстата до загального числа годин роботи з виконання даного замовлення верстатом з максимальною продуктивністю. Для верстата A маємо $I_{1A} = 1{,}33$ і т. д. Усі дані прикладу наведено в табл. 12.1 (дані округлені).

Таблиця 12.1

N	V	t_{iA}	T_{iA}	I_{iA}	t_{iB}	T_{iB}	I_{iB}	t_{iC}	T_{iC}	I_{iC}	t_{iD}	T_{iD}	I_{iD}
1	**100**	**1**	100	1,33	**0,67**	150	2,00	**0,8**	125	1,67	**1,33**	75	1,00
2	**200**	**2**	100	1,00	**1**	200	2,00	**0,9**	220	2,20	**1,7**	120	1,20
3	**50**	**2**	25	1,25	**1,33**	37,5	1,88	**1**	50	2,50	**2,5**	20	1,00
4	**75**	**1**	75	1,25	**0,8**	93,75	1,56	**0,67**	112,5	1,87	**1,25**	60	1,00
R_k			**80**			**150**			**250**			**100**	
P_k			75			0			220			95	

Замовлення потрібно розподіляти між верстатами відповідно до мінімальних значень індикатора за умови, що верстати мають достатній ресурс часу.

Деякі варіанти розподілу замовлень неприпустимі, якщо замовлення не можна подрібнювати (тобто замовлення необхідно виконати на одному верстаті). У розглянутому прикладі замовлення 1 і 2 не можуть виконуватися на верстаті A, замовлення 2 нездійсненне на верстатах B і D. Тому замовлення 2 доводиться виконувати на верстаті $З$, хоча це найменш вигідний варіант (індикатор цього варіанта максимальний). Замовлення 1 має значення індикатора, що дорівнює 1, на верстаті D, і проходить за обмеженням щодо ресурсу часу цього верстата, тому закріплюється за цим верстатом. Замовлення 3 також має індикатор, що дорівнює 1, для верстата D, і вкладається в обмеження щодо цього верстата (у решту обмежень після закріплення замовлення 1 за верстатом D), тому замовлення 3 закріплюється за верстатом D. Замовлення 4 можна закріпити як за верстатом A, так і за верстатом B. Оскільки $I_{4A} < I_{4B}$, замовлення 4 потрібно закріпити за верстатом A. Наприкінці потрібно визначити використаний час роботи верстатів.

12.4. Задачі менеджменту, що припускають ігровий підхід

12.4.1. *Основні поняття теорії ігор*

Теорію ігор можна визначити як теорію математичного аналізу, застосовуваного до прийняття рішень в умовах конфлікту або невизначеності.

Задачі, що потребують застосування теорії ігор:

♦ аналіз конфліктних ситуацій у військових та економічних галузях (простим економічним прикладом конфліктної ситуації, для опису якої застосовується теорія ігор, є конкурентна боротьба торговельних фірм чи промислових підприємств);

♦ обмінні та торговельні операції;

♦ аналіз і проектування ієрархічних структур керування та економічних механізмів;

♦ аналіз доцільності права першого ходу, взаємної інформованості, можливості шахрайства;

♦ аналіз коаліційного поводження;

♦ низка інших задач.

Означення. Під ***грою*** можна розуміти взаємодію кількох осіб (гравців), що має кінцевий стан (виграш), якого домагається кожний гравець, але не кожний може домогтися.

Прикладом гри може слугувати боротьба кількох фірм за державне замовлення. Кожний гравець має безліч можливих ходів. Вибрати один з них — зробити хід.

Означення. Послідовність ходів, що приводить гру до кінцевого стану, називають ***партією***.

Досягнення мети супроводжується певним виграшем. При різних рішеннях учасників можуть бути різні розміри виграшів. Якщо учасників двоє, то сукупність усіх виграшів можна подати у вигляді таблиці — матриці виграшів, або платіжної матриці, що визначає, який платіж має зробити один учасник іншому.

Означення. ***Гра двох осіб із нульовою сумою*** — це така гра, в якій сума виграшів учасників після кінця гри дорівнює нулю.

Якщо ж один із гравців, який, наприклад, програв, має ще платити в «банк», то гра буде з ненульовою сумою.

ОЗНАЧЕННЯ. ***Стратегія*** — це встановлений гравцем метод вибору ходів протягом гри. Можна розуміти стратегію як план проведення гри, причому цей план настільки вичерпний, що він не може бути порушений діями супротивника.

ОЗНАЧЕННЯ. Матрична гра — це гра з нульовою сумою двох осіб, у кожного з яких існує скінчена множина стратегій, яка подається у вигляді матриці виграшів одного з гравців (виграші іншого протилежні за знаком), які є елементами матриці і показують, що одержує цей гравець при кожній комбінації своєї стратегії і стратегії супротивника.

Вважається, що рядки матриці відповідають стратегіям першого гравця, стовпці — стратегія іншого, перший вибирає рядок, другий — стовпець, на перетинанні — виграш першого гравця (можливо, що він негативний, тобто перший гравець у програші). Якщо розмір матриці $m \times n$, то гра називається *грою* $m \times n$, тобто розмірність гри визначається кількістю стратегій.

ПРИКЛАД 1. Нехай двоє гравців одночасно (не знаючи вибору супротивника) кладуть на стіл по монеті. При збігу результатів (одночасно герб чи цифра) обидві монети забирає перший гравець, при розбіжності обидві монети забирає другий гравець. У кожного з гравців по дві стратегії $\{Г, Ц\}$ і $\{Г, Ц\}$. Кількість можливих ситуацій — чотири. Нехай виграш першого гравця (+ 1), його програш (– 1). Тоді матриця гри має вигляд:

$$\begin{array}{c} \\ Г \\ Ц \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} Г & Ц \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

де ліворуч виписано стратегії першого гравця, над матрицею — стратегії другого.

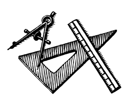
ПРИКЛАД 2. У місто можна ввійти тільки по двох мостах. Місто обороняють 3 роти, на місто нападають 2 роти, місто буде взято, якщо на одному з мостів нападники матимуть кількісну перевагу. Потрібно побудувати матрицю гри для тих, які обороняються, вважаючи, що успішна оборона дає виграш (+ 1), утрата міста дає (– 1). Стратегії першого гравця такі: виділити на захист першого моста 0, 1, 2, 3 роти (решту відправити захищати другий міст); стратегії другого гравця: атакувати перший міст силами 0, 1, 2 рот (решту відправити атакувати другий міст). Матриця гри матиме вигляд:

$$\begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

де ліворуч від матриці — стратегії захисників, над матрицею — стратегії нападників.

Розглянемо виграш захисників при виборі ними третьої стратегії, а нападниками — їхньої першої стратегії (0 рот атакують перший міст). У цьому разі на першому мосту перевага сил на боці тих, що обороняються, і супротивник по цьому мосту в місто не пройде. Але на другому мосту, який обороняє тільки одна рота, а нападають дві, тому нападники в місто ввірвуться, а отже виграш оборонців становить (– 1).

Означення. Стратегії, які зазначено в наведених прикладах ліворуч від платіжної матриці і над нею, називаються ***чистими*** (кожний гравець застосовує в грі тільки одну зі своїх можливих стратегій).



Приклад 3. На той самий ринок перша фірма може поставляти якісь три свої продукти a_1, a_2, a_3, друга — чотири продукти b_1, b_2, b_3, b_4. З огляду на деякі обставини, зокрема через небажання влаштовувати конкуренцію між власними продуктами, кожна з фірм збирається поставляти на цей ринок тільки якийсь один зі своїх продуктів. Платіжна матриця для першої фірми має вигляд:

$$\begin{array}{c} \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -5 & -1 & 1 & 20 \\ 18 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Елементи матриці — розмір виграшу 1-ї фірми для всіх комбінацій продуктів обох фірм.

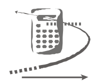
Прийняття рішення кожною фірмою про те, який продукт поставляти на ринок, і є вибір певної чистої стратегії. Очевидно, що першій фірмі хотілося б поставляти на ринок продукт a_1, але вона побоюється, що друга фірма поставить продукт b_1 і тоді за-місць виграшу в 20 одиниць фірмі загрожує програш у 5 одиниць. Вочевидь, друга фірма хотіла б поставляти на ринок або b_1, або b_4, бо при цьому перша фірма мала б максимальний програш, що означає максимальний виграш другої фірми. Але для другої фірми очевидна ризикованість цих рішень: продукт b_1 чи b_4, зустрівшись на ринку з продуктом a_1 чи a_2 першої фірми (який дає цій фірмі виграш у 20 чи 18 одиниць), принесе другій фірмі 20 чи 18 одиниць збитків. Навіть у ситуації, коли друга фірма тільки освоює новий ринок, вона, природно, хоче мати ці втрати найменшими.

Отже, логічним буде таке обережне поводження кожної з фірм. Перша фірма дивиться, який мінімальний виграш вона одержує при кожній зі своїх стратегій: a_1 дає (– 5), a_2 дає (0), a_3 дає (– 5). Вибравши стратегію a_2 (вона дає максимальний виграш серед мінімально можливих), перша фірма одержує не менше ніж (0). Більш того, якщо друга фірма вибере, наприклад, четверту стратегію, то перша виграє (+ 6). Бачимо, що обережне поводження для першої фірми диктує їй таке поводження: серед виграшів V_{ij} у кожному рядку знайти виграш $V_i = \min\limits_j V_{ij}$, а потім вибрати стратегію з таким номером *i*, для якого виграш $V(1) = \max\limits_i V_i$. Остаточно виходить, що при розумній обережності перша фірма може одержати не менш як $V(1) = \max\limits_i \min\limits_j V_{ij}$. Оскільки платіжну матрицю складено як матрицю виграшів першої фірми, то друга фірма, діючи з розумною обережністю, буде міркувати так. У кожному стовпці (адже вона «контролює» стовпці, вибираючи, який товар відправити на ринок) міститься максимальний програш цієї фірми, тобто максимальний виграш першої фірми, $V_j = \max\limits_i V_{ij}$, потім вибирається той стовпець, тобто та стратегія, для якої $V(2) = \min\limits_j V_j$. У цьому випадку друга фірма втратить не більше ніж $V(2) = \min\limits_j \max\limits_i V_{ij}$.

Доволі просто доводиться, що завжди

$$V(1) = \max_i \min_j V_{ij} \le \min_j \max_i V_{ij} = V(2).$$

Справді, нехай $V_{rs} = \max\limits_i \min\limits_j V_{ij}$, $V_{qp} = \min\limits_j \max\limits_i V_{ij}$. Ясно, що V_{rs} — мінімальний елемент *r*-го рядка, а отже, $V_{rs} \le V_{rp}$; елемент V_{qp} — максимальний у *p*-му стовпці, тому $V_{rp} \le V_{qp}$; отже, $V_{rs} \le V_{rp} \le V_{qp}$, що й потрібно було довести.



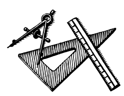
Означення. Ситуація, коли $\max_i \min_j V_{ij} = \min_j \max_i V_{ij}$, тобто коли існують чисті стратегій гравців, які гарантують кожному з них результат, не нижчий від деякого одного й ж того самого значення, величини називається ситуацією з наявності **сідлової точки** (оскільки існує мається максимум за однією зі змінних і мінімум за іншою). Значення виграшу для відповідних стратегій називають **ціною гри,** а елемент, що відповідає сідловій точці, є одночасно найменшим у своєму рядку і найбільшим у своєму стовпці.

Алгоритм перевірки платіжної матриці на наявність сідлової точки:

♦ у кожному рядку знаходять мінімальний елемент, а далі серед усіх мінімальних елементів беруть максимальний;

♦ у кожному стовпці знаходять максимальний елемент, а далі серед усіх максимальних беруть мінімальний;

♦ якщо ці два елементи збігаються, то матриця має сідловую точку, у протилежному випадку вона сідлової точки не має.



Приклад. Знайдемо сідлові точки у трьох наведених далі матрицях.

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & 2 & 9 \\ 6 & 4 & 8 \\ 7 & 3 & 1 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}\right\} \to 4,$$

$$\left.\begin{matrix} 7 & 4 & 9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4.$$

Сідлова точка $(i_0,\ j_0) = (2,\ 2)$, ціна грн $V = 4$.

$$\left.\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2 \\ -2 \end{matrix}\right\} \to -2,$$

$$\left.\begin{matrix} 2 & 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2.$$

Сідлової точка немає $(2 \neq -2)$.

$$\left.\begin{pmatrix} 12 & 13 & 12 \\ 10 & 31 & 9 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 12 \\ 9 \end{matrix}\right\} \to 12,$$

$$\left.\begin{matrix} 12 & 31 & 12 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 12.$$

Дві сідлові точки (1, 1), (1, 3), ціна гри $V = 4$.

За наявності в платіжної матриці сідлової точки, природно, вибирають стратегії, що відповідають цій точці. Такий розв'язок гарантує одному з гравців «виграш», не менший від певного значення — ***ціни гри*** V, іншому «програш», не більший від цього значення. Відхилення від цих стратегій може дати одному з гравців виграш як більший, так і менший за ціну гри (ніяких гарантій немає), а іншому — програш як більший, так і менший за ціну гри.

Задача

Нехай змагаються гравці A та B. Гравець A вибирає стратегію x, гравець B вибирає стратегію y, цільова функція A має вигляд $f(x, y) \to \max_{x \in X}$, цільова функція B: $f(x, y) \to \min_{y \in Y}$ (тобто ситуація антагоністична).

Нехай є дві сідлові точки (x_1, y_1), (x_2, y_2) для даної гри. Оскільки в сідловій точці виконується рівність

$$f^* \to \max_{x \in X} \min_{y \in Y} f(x, y) = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} f(x, y),$$

то $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, більш того:

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = f^*.$$

Справді, для $\forall x \in X, \forall y \in Y$ справджуються нерівності:

$$f(x, y_2) \le f(x_2, y_2) \le f(x_2, y) \text{ і } f(x, y_1) \le f(x_1, y_1) \le f(x_1, y).$$

Отже, $f^* = f(x_1, y_1) \le f(x_1, y_2) \le f(x_2, y_2) = f^*$.

Звідси випливає, що $f(x_1, y_2) = f^*$.

Водночас маємо:

$$f(x_1, y_2) = f(x_1, y_1) \le f(x_1, y) \text{ і } f(x_1, y_2) = f(x_2, y_2) \ge f(x, y_2).$$

Ці співвідношення в сукупності означають, що (x_1, y_2) — сідлова точка. Аналогічно доводиться, що (x_2, y_1) — сідлова точка. Якщо сідлових точок кілька, то кожна сторона може вибрати кожну зі стратегій, що визначає сідлову точку, і одержати результат, не гірший від деякого гарантованого. Відхилятися від таких стратегій невигідно, тому вони ***стійкі.***

Нехай тепер змагається N суб'єктів, кожний з яких вибирає свою стратегію $x_i \in X_i$, намагаючись максимізувати свою цільову функцію f_i, причому значення f_i залежить і від вибору інших суб'єктів.

Означення. Точку $\hat{x} = \{\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n\}$ називають ***ситуацією рівноваги***, якщо для $\forall i$ виконуються рівності:

$$\max_{x_i} f(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_{i-1}, \hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, ..., \hat{x}_n) = f_i(\hat{x}_1, \hat{x}_2, ..., \hat{x}_{i-1}, \hat{x}_i, \hat{x}_{i+1}, ..., \hat{x}_n).$$

Важливо, що поодинці нікому від свого рівноважного значення $\hat{x}_i$, $i = 1, ..., N$, відступати невигідно. Такий тип рівноваги називають ***рівновагою за Нешем***, і ця рівновага стійка в тому сенсі, що ніхто поодинці від нього відхилятися не захоче (назву дано на честь математика й економіста, який здобув важливі результати в цій галузі знань).

Для двох суб'єктів розумним є вибір рішень, що відповідають сідловим точкам (якщо вони існують).

Приклад (Ю. Б. Гермейр). Нехай $f_i = x_i + \sum_{i \neq j} (1 - x_j)$, $x_i \in [0; 1]$, $i = 1, ..., N$. Точкою рівноваги буде $\hat{x}_i = 1$, $i = 1, ..., N$, $f_i(\hat{x}_1, ..., \hat{x}_n) = 1$, причому ця точка рівноваги стійка. Справді, нехай $x_i = 1 - \sigma$, $\sigma \in (0; 1)$, $x_j = 1$ для $j \neq i$, тоді $f_i = 1 - \sigma < 1$, $f_j = 1 + \sigma$. І, отже, i-му гравцеві не вигідно лише самому відхилятися від $x = (1, ..., 1)$. Але якщо для $\forall i = 1, ..., N$ взяти $x_i = 0$, то буде $f_i = N - 1 > 1$ при $N > 2$, $i = 1, ..., N$, тобто при зазначених стратегіях гравців тобто можна дістати значення цільових функцій, більші за рівноважне, причому відразу для всіх гравців. Це означає, що зазначене раніше рівноважне рішення не є ефективним. Якщо $x_i = 1, x_j = 0$ для всіх інших $j \neq i$, то значення цільових функцій будуть: $f_i = N < N - 1$ і $f_j = N - 2 < N - 1$, тобто тепер i-му гравцеві вигідно лише самому відхилитися від обраної стратегії $x_i = 0, i = 1, ..., N$. Ця стратегія нестійка. Важливо, що обидві стратегії $x_i = 0, i = 1, ..., N$, та $x_i = 1, x_j = 0$, $j \neq i$, ефективні, а стратегія $x_i = 1, i = 1, ..., N$ — неефективна. Таким чином, наведений приклад показує, що стійкий вибір може не належати до ефективних (оптимальних за Парето), а ефективний вибір може бути нестійким.

Системи, для яких стійкі розв'язки виявляються одночасно й ефективними, трапляються рідко, але мають велике практичне значення. До них належать, скажімо, еколого-економічні системи глобального характеру.

Нехай змагаються N суб'єктів, що мають цільові функції $f_i(x_i)$, $i = 1, ..., N$ (кожна з яких залежить тільки від ресурсу x_i, що перебуває в розпорядженні одного гравця) і загальну цільову функцію $F(y_1, ..., y_n)$. Значення загальної цільової функції F залежить від усіх учасників, а саме від того, який ресурс y_i виділяє *i*-й суб'єкт. Системи статичні, f_i та F не змінюються в часі; $x_i + y_i = a_i$ — загальний ресурс *i*-го суб'єкта; x_i виділяється на досягнення «особистих» цілей; y_i — на забезпечення суспільних інтересів.

Теорема Гермейра—Вателя

Якщо f_i та F **— монотонно зростаючі функції своїх змінних, тоді існують стійкі розв'язки, серед яких щонайменше один ефективний**.

Автори теореми запропонували й спосіб визначення ситуації рівноваги.

У теорії ігор існують правила стосовно того, як потрібно діяти за відсутності сідлової точки, коли для кожного гравця не можна дістати сприятливий розв'язок у вигляді однієї чистої стратегії. Виявляється, що в цьому разі для кожного з гравців існує **«мішана стратегія»,** яка є «найкращою» у тому розумінні, що дає змогу одному гравцеві діяти краще в сенсі максимізації свого виграшу, а іншому діяти краще в сенсі мінімізації свого програшу.

Мішана стратегія дає змогу визначити, яку саме з чистих стратегій потрібно вибрати в даній грі, коли відома її платіжна матриця. Мішані стратегії можна подати у вигляді двох векторів: $x = (x_1, x_2, ..., x_m)$ $i = 1, ..., m,$ $\sum_i x_i = 1;$ $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ для першого гравця, що контролює рядки матриці, в якій виписано його виграші, $x_i \in [0;1)$, для другого гравця, що контролює стовпці матриці, $y_j \in [0;1)$, $j = 1, ..., n,$ $\sum_j y_j = 1$. Виграш першого гравця визначається як $V(1) = \sum_{i=1}^{m}\left(x_i \sum_{j=1}^{n}(V_{ij} y_j)\right)$. Наприклад, для платіжної матриці

$$\begin{Vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \end{Vmatrix}$$

при $x=(1/2,1/2,0)$ і $y=(0,2/3,1/3)$ виграш першого гравця $V(1)=$
$=1/2(3\cdot 0+4\cdot 2/3+2\cdot 1/3)+1/2(1\cdot 0+6\cdot 2/3+0\cdot 1/3)+ +0(2\cdot 0+3\times$
$\times 2/3+4\cdot 1/3)=11/3.$

12.4.2. *Ситуації в практиці менеджера, що припускають ігровий підхід*

Розглянемо приклади використання теорії ігор при розв'язуванні економічних задач, які можуть виникнути в практиці менеджера.

> ***Задача 1***
>
> Дві фірми *A* та *B* торгують одним і тим самим товаром, що користується попитом протягом *N* одиниць часу. Нехай *C* — дохід від продажу товару за одиницю часу, причому продаж товару за заниженою ціною законодавчо заборонений. При цьому якість товару залежить від часу надходження на ринок: чим пізніше товар надходить на ринок, тим якість вища, до того ж реалізується тільки товар вищої якості. Нарешті, нехай фірма *B* намагається розорити фірму *A,* не дбаючи про свої доходи. Фірма *B* як законний чинник впливу може використовувати тільки момент надходження свого товару на ринок. Нехай *i* — момент надходження товару на ринок від фірми *A; j* — момент надходження товару від фірми *B*, вибір моментів — єдино можливі управлінські рішення; фірма *A* намагається максимізувати свій дохід, фірма *B* — мінімізувати дохід фірми *A.*

Розв'язання. Знайдемо функцію виграшу, тобто дохід фірми *A*. Якщо *A* випустить товар у момент *i,* а *B* — у момент $j>i$ (скажімо, $i=2,\ j=5$), то *A* не матиме конкурентів протягом $j-i$ одиниць часу й одержить за цей час дохід $c(j-i)$. Починаючи з моменту $j,$ на ринку буде більш «свіжий» товар фірми *B,* тому з моменту j фірма *A* втрачає свій дохід. Якщо $j<i,$ тобто фірма *B* раніше за *A* викидає на ринок свій товар, то дохід фірми *A* дорівнює $c(n+1-i)$. Якщо, нарешті, $i=j$, то товари обох фірм мають однаковий попит і кожна з фірм одержує дохід $c(n+1-i)/2$. Дістаємо функцію виграшу фірми *A* (вона ж функція програшу *B*):

$$V(i,j)=\begin{matrix} c(j-i), & j>i, \\ c(n+1-i)/2, & i=i, \\ c(n+1-j), & j<i. \end{matrix}$$

Нехай, наприклад, $n = 4$. Тоді платіжна матриця гри має вигляд:

$$\begin{Vmatrix} 2c & c & 2c & 3c \\ 3c & 1{,}5c & c & 2c \\ 2c & 2c & c & c \\ c & c & c & 0{,}5c \end{Vmatrix}.$$

1. Вочевидь, що величину c в запису матриці можна опустити.

2. Розмір матриці можна зменшити: для фірми B, що контролює стовпці, перший стовпець, як наперед відомо, гірший за другий, оскільки перша стратегія цієї фірми завдає їй більшого програшу, ніж друга. Фірма B свою першу стратегію використовувати не буде, тому можна перейти до матриці

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1{,}5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}5 \end{Vmatrix}.$$

Фірма A не використовуватиме своєї четвертої стратегії, оскільки в разі вибору цією фірмою третьої стратегії її виграш може бути лише більшим чи дорівнювати виграшу, що відповідає четвертій стратегії.

Тому можна перейти до матриці

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1{,}5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Тепер бачимо, що фірмі B не варто використовувати третю зі стратегій, що залишилися, оскільки вона домінується другою, при виборі якої програш цієї фірми менший.

Тому переходимо до матриці

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}5 & 1 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Нарешті, бачимо, що фірма A не стане використовувати свою другу зі стратегій, що залишилися, оскільки виграш згідно з нею менший, ніж згідно з третьою. У підсумку дістанемо матрицю

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix},$$

яка не має сідлової точки, тобто розв'язок потрібно шукати не в чистих, а в мішаних стратегіях.

Для останньої матриці оптимальні частоти вибору стретегій можна визначити, наприклад, графічно й дістати для A: $x^* = (0{,}5;\ 0{,}5)$, для B: $y^* = (0{,}5;\ 0{,}5)$, що для вихідної матриці (з урахуванням відкидання другої і четвертої стратегій для A та першої і четвертої стратегій для B) дає: $X^* = (0{,}5;\ 0;\ 0{,}5;\ 0)$, $Y^* = (0;\ 0{,}5;\ 0{,}5;\ 0)$. Ціна гри (виграш, дохід A чи програш B):

$$V = \sum_{i=1}^{4}\left(X_i \sum_{j=1}^{4}\left(V_{ij} Y_j\right)\right) = 0{,}5(1\times 0{,}5 + 2\times 0{,}5) + 0{,}5(2\times 0{,}5 + 1\times 0{,}5) = 1{,}5\ ,$$

тобто, повертаючись до справжньої вартості, дістаємо $V = 1{,}5c$. Здобутий результат можна тлумачити так: фірма A має з однаковими ймовірностями випускати товар у перший чи третій момент (відкрили таблицю випадкових чисел, подивилися навмання: якщо число менше за 50, то в перший момент, якщо не менше за 50, то в третій), а фірма B — у другий чи третій. При цьому очікуваний виграш A дорівнює $1{,}5c$ (чи розорить A такий рівень доходу, — це вже інше питання).

Задача 2

Магазин може завезти товар n типів ($i = 1, .., n$; i — номер типу товару). Якщо товар користуватиметься попитом, то прибуток від його реалізації буде p_i, якщо товар не користуватиметься попитом, то збиток становитиме l_i. Прогноз попиту відсутній. Перший гравець — магазин, другий — купівельний попит, що відіграє роль «природного фактора», а не розумного супротивника. Товари вважаються такими, що попит на один з них означає відсутність попиту на інші.

Розв'язання. Платіжна матриця має вигляд:

$$\begin{Vmatrix} p_1 & -l_1 & -l_i & \dots & -l_1 \\ -l_2 & p_2 & -l_2 & \dots & -l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -l_n & -l_n & -l_n & \dots & p_n \end{Vmatrix}.$$

За відсутності прогнозу попиту гарантований для магазину результат досягається в разі орієнтації на найгірший попит. Нехай, наприклад, відома така вихідна інформація:

Тип товару	Дохід	Збиток
1	32	16
2	32	8
3	32	4
4	32	4
5	32	2

Платіжна матриця

$$\begin{Vmatrix} +32 & -16 & -16 & -16 & -16 \\ -8 & +32 & -8 & -8 & -8 \\ -4 & -4 & +32 & -4 & -4 \\ -4 & -4 & -4 & +32 & -4 \\ -2 & -2 & -2 & -2 & +32 \end{Vmatrix}.$$

Вважатимемо, що розв'язок цієї гри $X^* = (0{,}16; 0{,}19; 0{,}21; 0{,}21; 0{,}23)$ відомий, оскільки тепер важливіше усвідомити його зміст, а не формально дістати цей розв'язок. Магазин має скористатися мішаною стратегією з частотами вибору $X^* = (0{,}16; 0{,}19; 0{,}21; 0{,}21; 0{,}23)$, його очікуваний виграш $V = 1{,}4$. Зміст цього результату полягає в тому, що магазину доцільно закупити товар усіх типів у пропорціях: 16 % — 1-го типу, 19 % — 2-го типу, 21 % — 3-го типу, 21 % — 4-го типу і 23 % — 5-го типу. При цьому, що «здоровий глузд» рекомендує завезти товар 5-го типу «побільше» і не завозити товару 1-го типу зовсім.

Зауваження. На практиці часто трапляються випадки, коли інтереси сторін не є антагоністичними, тобто виграш однієї сторони не означає такий самий програш іншої. У ситуації, коли, наприклад, що продають на одному ринку аналогічні товари, гра вже не матиме нульової що конкурують фірми, суми. Таку гру можна описати за допомогою двох матриць, тому її називають ***біматричною.***

Задача 3

Нехай перший гравець має m чистих стратегій, другий гравець — n чистих стратегій. Якщо перший гравець вибирає свою i-ту стратегію, другий гравець — свою j-ту стратегію, то виграш першого — a_{ij}^1, виграш другого — a_{ij}^2. Біматричну гру цілком визначено, коли задано пару матриць $A_1 = \left\| a_{ij}^1 \right\|$ і $A_2 = \left\| a_{ij}^2 \right\|$, $i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n$.

Наприклад, нехай є дві фірми, кожна з який випускає по два типи прасок, які ці фірми продають на одному ринку. Нехай собівартість і продажна ціна всіх видів товару однакові, а фахівці з маркетингу провели дослідження щодо того, якими буде збут кожного типу прасок для кожної з фірм при тій чи іншій стратегії фірми-конкурента. Результатом цього дослідження стали матриці A_1 і A_2:

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 600 & 300 \\ 300 & 900 \end{Vmatrix},$$

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 500 & 1500 \\ 2000 & 500 \end{Vmatrix}.$$

Розв’язки в чистих стратегіях у біматричних іграх існують доволі рідко, як правило, ці ігри розв’язуються у мішаних стратегіях. Мішана стратегія першого гравця — це вектор $X = (x_1, ..., x_m)$, такий що $x_i \ge 0 \sum_{i=1}^{m} x_i = 1,$ котрий задає частоти вибору першим гравцем своїх чистих стратегій (x_1 задає частоту вибору i-ї стратегії першим гравцем, тобто при $x_2 = 1/3$ друга стратегія вибирається в третині випадків). Аналогічно мішана стратегія другого гравця — це вектор $Y = (y_1, ..., y_n)$, такий що $y_i \ge 0 \sum_{j=1}^{n} y_i = 1.$ Очікувані виграші гравців становлять відповідно $V_1 = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^1,\ x_i y_i$ і $V_2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2,\ x_i y_i.$ На відміну від матричних ігор, де є один критерій оптимальності поводження гравців, у біматричних іграх таких критеріїв кілька. Назвемо тільки два з них: критерій, що виділяє ситуації, оптимальні за Парето (про цей критерій ішлося раніше), і критерій, що виділяє ситуації рівноваги за Нешем.

Ситуація рівноваги за Нешем у біматричній грі — це така пара мішаних стратегій $\left(X^0, Y^0\right)$, що для будь-яких інших змішаних стратегій (X, Y) справджуються такі нерівності:

$$V_1\left(X^0, Y^0\right) \geq V_1\left(X, Y^0\right),$$
$$V_2\left(X^0, Y^0\right) \geq V_2\left(X^0, Y\right).$$

Зміст ситуації рівноваги (чи будуть стратегії чистими чи мішаними) полягає в тому, що нікому з гравців поодинці не вигідно від неї відхилятися, його виграш при цьому не збільшиться. У біматричній грі ситуацій рівноваги може бути кілька, причому в різних ситуаціях рівноваги виграші кожного з гравців різні. Існування хоча б однієї ситуації рівноваги в будь-який біматричній грі гарантує теорема Неша. Пошук мішаних стратегій здійснюється за допомогою спеціальних доволі складних алгоритмів. Застосувавши один із цих алгоритмів до матриць наведеного щойно прикладу з метою з'ясування доцільності комбінування типів виробів, що випускаються, дістанемо $X^0 = (3/5;\ 2/5)$; $Y^0 = (2/3;\ 1/3)$. Змістовно цей результат означає, що першій фірмі доцільно з-поміж усієї кількості вироблених нею прасок випускати 3/5 прасок першого типу і 2/5 прасок другого типу. Другій фірмі потрібно 2/3 усієї кількості прасок випускати першого типу, а решту — другого типу. Очікувані доходи підраховуються за наведеними раніше формулами:

$$V_1 = 3/5\left(600 \cdot 2/3 + 300 \cdot 1/3\right) + 2/5\left(300 \cdot 2/3 + 900 \cdot 1/3\right) = 500,$$
$$V_2 = 3/5\left(500 \cdot 2/3 + 1500 \cdot 1/3\right) + 2/5\left(2000 \cdot 2/3 + 500 \cdot 1/3\right) = 1100.$$

Реальні ситуації, вочевидь, набагато складніші, але, будемо сподіватися, наведений приклад дає певне уявлення про суть застосування теоретичних результатів на практиці.

Означення. ***Позиційні ігри*** — це ігри, в яких задається послідовність прийняття рішень гравцями (їх може бути 2, 3 і т. д.). У таких іграх гравці приймають рішення, знаючи про всі попередні рішення партнерів. **Прикладом позиційної гри можуть бути шахи.**

Задача 4

Нехай існує фірма *A*, що одноосібно домінує на ринку деякого товару, маючи 20 одиниць прибутку за якийсь інтервал. Фірма *B* хотіла б продавати той самий товар на цьому ринку, для чого їй потрібно вдатись до деяких початкових витрат. При вторгненні фірми *B* на ринок фірма *A* може й не скоротити обсягу свого виробництва. Тоді на ринку товару буде занадто багато, ціна на нього впаде, а прибуток фірм становитиме: у фірми *A* (+ 8) одиниць, у фірми *B* (– 3) одиниці, тобто фірма *B* зазнає збитків. Якщо фірма *A* поступить фірмі *B* половиною ринку, то прибутку в них буде будуть по (+ 10) одиниць. Якщо фірма *A*, очікуючи виходу фірми *B* на ринок, скоротить виробництво, а фірма *B* на ринок не вийде, то прибуток фірми *A* буде (+12) одиниць. У фірми *B* не буде ні витрат, ні доходів, її прибуток буде нульовим. Позиційну гру зручніше подавати не матрицею, а деревом рішень (у загальному випадку графом рішень), яке приводить гравців з вихідної позиції в кінцеву (рис. 12.8).

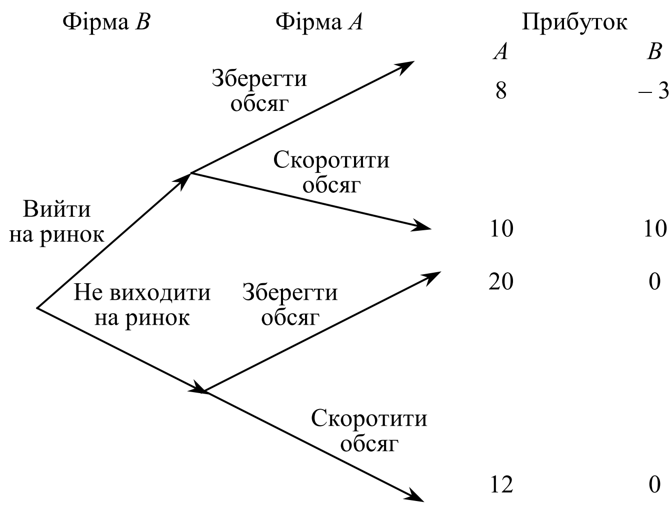


Рис. 12.8. Схема позиційної гри

Можна перевірити, що в даній грі існують пари стратегій, рівноважних за Нешем:

1) фірма *B* — утриматися від вступу на ринок;
   фірма *A* — зберегти обсяг виробництва;
2) фірма *B* — вступити на ринок;
   фірма *A* — знизити обсяг виробництва.

Перевірка проста, у першому випадку вона виконується так. Нехай фірма *B* додержує даної стратегії, а фірма *A* змінює свою стратегію. Тоді фірма *A* замість виграшу (+20) одиниць одержить тільки (+12). Якщо фірма *A* додержує обраної стратегії, а фірма *B* змінює свою стратегію, то вона замість виграшу (0) одиниць одержує виграш (–3) одиниці. Аналогічно виконує перевірка і в другому випадку.

У непозиційній грі, коли гравці одночасно і незалежно приймають рішення, немає підстав очікувати, що якийсь із цих двох результатів має перевагу. У позиційній грі потрібно враховувати, що фірма *A* приймає рішення, уже знаючи про рішення фірми *B*, яка робить перший хід. Згідно з принципом максимізації свого мінімального виграшу, тобто діючи обережно, фірма *B* має утриматися від виходу на ринок. Але в позиційній грі, коли є послідовні ходи, ситуація складніша.

Фірма *B*, звичайно, виходить з того, що фірма *A* поводитиметься раціонально, намагаючись максимізувати свій виграш. Раціональною відповіддю фірми *A* на вторгнення фірми *B* є зменшення свого виробництва, оскільки при цьому її прибуток більший, ніж при збереженні колишнього обсягу випуску. Тому для фірми *B* розумно вторгатися на ринок, вважаючи погрозу фірми *A* (збереження нею колишнього обсягу виробництва) неправдоподібною.

Зовсім інше рішення буде в тому разі, коли дерево рішень гри має вигляд, показаний на рис. 12.9.

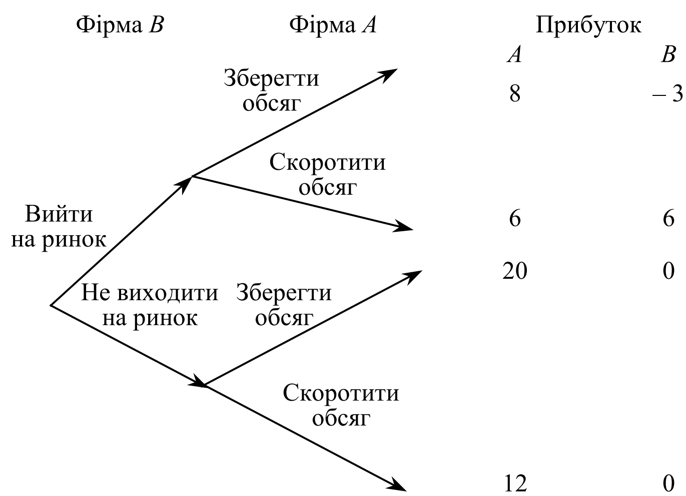


Рис. 12.9. Схема позиційної гри

Ясно, що фірмі *A* не вигідно скорочувати обсяг свого виробництва при будь-якому рішенні фірми *B*. Тому погроза фірми *A* (зберегти колишній обсяг виробництва) стає реальною, і для фірми *B* є сенс відмовитися від вступу на ринок. Ця ситуація — випадок так званої ***стійкої монополії***, коли фірма-монополіст може реалізувати погрозу придушення потенційних конкурентів. Причини такої стійкості можуть бути різними. Теорія ігор, звичайно, не аналізує цих причин, але вона дає змогу виявляти й досліджувати такі ситуації.

12.5. Задача формування портфеля інвестицій

12.5.1. *Основні поняття*

Далі оперуватимемо такими поняттями теорії ймовірностей:

випадкова величина — величина, яка в результаті випробування набуває одного можливого значення, заздалегідь не відомого, яке змінюється від випробування до випробування і залежить від випадкових обставин;

дискретні випадкові величини — величини, які набувають скінченної множини значень;

розподіл випадкової величини — сукупність усіх можливих значень і відповідних імовірностей реалізації кожного з цих значень;

закон розподілу випадкової величини — відповідність між можливими значеннями випадкової величини та ймовірностями, що відповідають їм.

Дві випадкові величини ***незалежні,*** якщо закон розподілу однієї з них не залежить від того, яких можливих значень набуває інша величина. У протилежному разі випадкові випадку величини ***залежні.***

Для двох дискретних величин можна записати спільний розподіл у вигляді, наприклад табл. 12.2, де подано можливі значення пар величин і відповідних імовірностей.

Таблиця 12.2

СПІЛЬНИЙ РОЗПОДІЛ ДВОХ ВИПАДКОВИХ ВЕЛИЧИН

X	Y				
	y_1	y_2	…..	y_j	…..
x_1	p_{11}	p_{12}	…..	p_{1j}	…..
x_2	p_{21}	p_{22}	…..	p_{2j}	…..
…..	…..	…..	…..	…..	…..
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…..	p_{ij}	…..

Важливими числовими характеристиками випадкової величини є математичне сподівання, дисперсія та середнє квадратичне відхилення.

Математичне сподівання $M(X)$ (якщо воно існує) для дискретної випадкової величини обчислюється так:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{n} x_k p_k, \text{ або } M(X)=\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k.$$

Дисперсію обчислюємо за формулою $\sigma^2 = M(X - M(X))^2$.

Для обчислень зручно використовувати формули:

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - M(X))^2 p_k \text{ , або } \sigma^2 = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Зауважимо, що дисперсія має квадратичну розмірність відносно математичного сподівання (якщо дохід подається в гривнях, то математичне сподівання — також у гривнях, а дисперсія — у гривнях у квадраті). З огляду на це для характеристики розкиду значень випадкової величини навколо математичного сподівання зручніше використовувати ***стандартне відхилення*** $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$, зазначаючи не тільки центр розподілу, а й діапазон розкиду значень: $M(X) \pm \sigma$. Зазвичай ще потрібно вказувати й частку значень, які потрапляють у цей діапазон.

Для зазначених характеристик відомі такі результати.

1. Якщо $c = \text{const}$, то $M(cX) = cM(X)$, $M(c) = c$.

2. $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$.

3. Для незалежних випадкових величин X, Y маємо: $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$.

4. Для незалежних випадкових величин X, Y маємо: $\sigma^2(X+Y) = \sigma^2(X) + \sigma^2(Y)$.

5. Якщо $c = \text{const}$, то $\sigma^2(cx) = c^2\sigma^2(x)$, $\sigma^2(c) = 0$.

6. Для вибірки $x_1, ..., x_n$ незалежних спостережень обсягу n середня арифметична $\overline{X} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right) / n$ є «доброю» оцінкою математичного сподівання для генеральної сукупності, з якої взято вибірку.

7. Розраховувана за вибіркою обсягу n виправлена вибіркова дисперсія $S^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} (x_k - \overline{x})^2\right) / (n-1)$ є «доброю» оцінкою для дисперсії генеральної сукупності.

Для двох наведених раніше випадкових величин X і Y, які мають спільний розподіл, також визначають ряд характеристик.

Знаючи спільний розподіл випадкових величин X і Y, можна знайти розподіл для кожної з них: значення x_i береться з імовірністю $p_j = \sum_i^j p_{ij}$, а значення y_j береться з імовірністю $P_j = \sum_i^j p_{ij}$. Відповідно маємо:

$$M(X) = \sum_i x_i p_i, \; M(Y) = \sum_j y_j p_j;$$

$$\sigma^2(X) = \sum_i \sum_j (x_i - M(X))^2 p_{ij} = \sum_i x_i^2 p_i - (M(X))^2;$$

$$\sigma^2(Y) = \sum_i \sum_j \left(y_j - M(Y)\right)^2 p_{ij} = \sum_j y_j^2 p_j - (M(Y))^2.$$

Для спільно розподілених випадкових величин існують крім перелічених також інші характеристики. Одна з них, що є мірою зв'язку між випадковими величинами, називається ***коваріацією*** і визначається так:

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M\{[X - M(X)][Y - M(Y)]\}.$$

Відомо, що

$$\operatorname{cov}(X, Y) = M(X, Y) - M(X)M(Y),$$

де

$$M(X, Y) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij}.$$

Коваріація може набувати будь-яких значень. Якщо випадкові величини незалежні, то, як сказано раніше, $M(XY) = M(X)M(Y)$. Отже, для незалежних випадкових величин x, y маємо $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$. Зокрема, для $c = \text{const}$ також $\operatorname{cov}(c, y) = 0$, оскільки константа і випадкова величина — незалежні величини. Для однакових випадкових величин маємо: $\operatorname{cov}(x, x) = M\left(x^2\right) - \left(M(x)\right)^2 = \sigma^2(x)$. Нарешті, $\operatorname{cov}(x, y) = \operatorname{cov}(y, x)$.

На коваріацію «впливають» не тільки зв'язок між випадковими величинами, а й дисперсії цих величин. Щоб виокремити міру власне зв'язку між випадковими величинами, нормують коваріацію, дістаючи ***коефіцієнт кореляції***:

$$\operatorname{cor}(X, Y) = \operatorname{cov}(X, Y) / \sigma(X)\sigma(Y).$$

Відомо, що

$$|\mathrm{cor}(X,\ Y)| \le 1,\ \ \mathrm{cor}(X,\ Y) = \mathrm{cor}(Y,\ X),\ \ \mathrm{cor}(X,\ X) = 1.$$

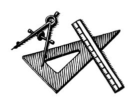
Для розрахунку коваріації потрібна знати спільний розподіл випадкових величин, тобто в найпростішому випадку дискретних величин потрібно знати таблицю виду табл. 12.2. Якщо відомий лише тільки розподіл кожної з величин, то коваріацію розрахувати не можна.

Як для незалежних, так і для спільно розподілених випадкових величин X і Y маємо:

$$\begin{aligned}\sigma^2(X+Y) &= M[(X+Y)-M(X+Y)]^2 = M\{[X-M(X)]+[Y-M(Y)]^2\} = \\ &= M[X-M(X)]^2 + M\{2[X-M(X)][Y-M(Y)]\} + M[Y-M(Y)]^2 = \\ &= \sigma^2(X) + 2\,\mathrm{cov}(X,\ Y) + \sigma^2(Y).\end{aligned}$$

У загальному випадку для n як спільно розподілених, так і незалежних випадкових величин $R_1, ..., R_n$ та чисел $x_1, ..., x_n$ справджується такий результат:

$$\begin{aligned}\sigma^2(x_1R_1 + ... + x_nR_n) &= x_1^2\sigma^2(R_1) + ... + x_n^2\sigma^2(R_n) + \\ &+ 2x_1x_2\,\mathrm{cov}(R_1,\ R_2) + ... + 2x_{n-1}x_n\,\mathrm{cov}(R_{n-1},\ R_n) = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} x_ix_k\,\mathrm{cov}(R_i,\ R_k).\end{aligned}$$



Приклад. Нехай ринок може перебувати в одному з трьох станів — підйом, стаціонарний, спад. Імовірності цих станів і прибутковості R_1, R_2 і R_3 (у відсотках) відповідних активів наведено в таблиці.

Стан	Імовірність	Прибутковість, %		
		R_1	R_2	R_3
Підйом	0,3	20	30	– 10
Стаціонарний	0,6	20	5	15
Спад	0,1	5	– 20	15

Записати кореляційну матрицю.

Розв'язання. Знайдемо значення $c_{ij} = \operatorname{cov}(R_i,\ R_j)$, для чого насамперед обчислюємо математичні сподівання:

$$M(R_1) = 20 \times 0{,}3 + 20 \times 0{,}6 + 5 \times 0{,}1 = 18{,}5;$$
$$M(R_2) = 30 \times 0{,}3 + 5 \times 0{,}6 - 20 \times 0{,}1 = 10;$$
$$M(R_3) = -10 \times 0{,}3 + 15 \times 0{,}6 + 15 \times 0{,}1 = 7{,}5.$$

Далі дістанемо:

$$c_{11} = \operatorname{cov}(R_1,\ R_1) = \sigma^2(R_1) = (20 - 18{,}5)^2 \times 0{,}3 + (20 - 18{,}5)^2 \times 0{,}6 + \\ + (5 - 18{,}5)^2 \times 0{,}1 = 20{,}25;$$

$$c_{12} = \operatorname{cov}(R_1,\ R_2) = (20 - 18{,}5)(30 - 10)0{,}3 + \\ + (20 - 18{,}5)(5 - 10)0{,}6 + (5 - 18{,}5)(-20 - 10)0{,}1 = 44{,}5;$$

$$c_{13} = \operatorname{cov}(R_1,\ R_3) = (20 - 18{,}5)(-10 - 7{,}5)0{,}3 + \\ + (20 - 18{,}5)(15 - 7{,}5)0{,}6 + (5 - 18{,}5)(15 - 7{,}5)0{,}1 = -11{,}25;$$

$$c_{23} = \operatorname{cov}(R_2,\ R_3) = (30 - 10)(-10 - 7{,}5)0{,}3 + \\ + (5 - 10)(15 - 7{,}5)0{,}6 + (-20 - 10)(15 - 7{,}5)0{,}1 = -150.$$

Аналогічно знаходимо $c_{22} = \operatorname{cov}(R_2,\ R_2) = \sigma^2(R_2) = 225$, $c_{33} = 131{,}25$. Решту значень дістанемо без обчислень із міркувань симетрії. Здобуті результати зручно звести в одну матрицю, названу ***коваріаційною***:

$$C = \begin{pmatrix} 20{,}25 & 44{,}5 & -11{,}25 \\ 44{,}5 & 225 & -150 \\ -11{,}25 & 150 & 131{,}25 \end{pmatrix}.$$

Можна також знайти стандартні відхилення $\sigma(R_1) = 4{,}5$, $\sigma(R_2) = 15$, $\sigma(R_3) \approx 11{,}45$ та коефіцієнти кореляції:

$$\rho_{11} = \rho_{22} = \rho_{33} = 1,\ \rho_{12} = \operatorname{cor}(R_1,\ R_2) = 44{,}5/(4{,}5 \cdot 15) \approx 0{,}66;$$

$$\rho_{13} = -11{,}25/(4{,}5 \cdot 11{,}45) \approx -0{,}22;\quad \rho_{23} = -150/15 \cdot 11{,}45 \approx -0{,}87.$$

Коефіцієнти кореляції зручно зібрати в кореляційну матрицю:

$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}66 & -0{,}22 \\ 0{,}66 & 1 & -0{,}87 \\ -0{,}22 & -0{,}87 & 1 \end{pmatrix}.$$

Далі користуватимемось такими поняттями теорії інвестицій, як ***актив, ризик інвестицій, портфель*** — набір активів.

Теорія інвестицій кількісно враховує не лише прибутковість та ризик щодо окремих активів і для портфеля в цілому, а й недетермінований, імовірнісний характер майбутніх значень розглядуваних величин. Завдяки цьому вдається знизити ризик портфеля порівняно з ризиком включених до нього активів. Більш того, уможливлюються постановка та розв’язання задачі про оптимальний портфель.

Існує кілька відповідних підходів:

1. Відшукується не «найкращий» розв’язок (такого розв’язку, «найкращого» відразу за всіма критеріями, може й не бути), а ефективні, поліпшувані не відразу за всіма критеріями розв’язки.

2. Якийсь критерій розглядається як головний, за іншими критеріями задаються граничні значення, і ці критерії стають критеріальними обмеженнями (скажімо, ризик мінімізується, а прибутковість має бути не нижчою за певне значення).

3. Усі критерії певним чином перетворюються в один.

Як один із критеріїв природно взяти ***прибутковість***. Прибутковість деякого активу звичайно визначається як величина $r = (D + W_1 - W_0)/W_0$, де D — поточний дохід, одержуваний від активу протягом визначеного періоду; W_0 — вартість активу на початку цього періоду; W_1 — вартість активу наприкінці періоду.

Далі вважається, що інвестиційний період задано й існує набір активів, які утворюють портфель; витрати на придбання активів i-го типу становлять W_i^0; очікуваний дохід цього активу наприкінці періоду дорівнює W_i^1; початкова вартість портфеля

$$W^0 = \sum_{i=1}^{n} W_i^0.$$

Кінцева очікувана вартість портфеля $W^1 = \sum_{i=1}^{n} W_i^1$ (доходу немає). Частка коштів, вкладених в актив i-го типу, $x_i = W_i^0 / W^0$,

$\sum_i x_i = 1.$ Оскільки майбутній дохід — величина, значення якої не відоме точно й однозначно, а може бути тільки очікуваним, то прибутковість як окремого активу, так і портфеля в цілому стає величиною випадковою, яка може набувати тих чи тих значень із певними ймовірностями.

Позначатимемо розглядувані випадкові величини так: R — дохідність; R_i — прибутковість i-го активу; R_π — прибутковість портфеля.

Прибутковість портфеля:

$$R_\pi = \left(W^1 - W^0\right)/W^0 = \left(\sum_i W_i^1 - \sum_i W_i^0\right)/W^0 =$$
$$= \sum_i \left(W_i^1 - W_i^0\right)/W_i^0\left(W_i^0/W^0\right) = \sum_i R_i x_i\,.$$

Як поняття ***очікуваний дохід*** використовують математичне сподівання, оскільки воно є середнім значенням випадкової величини, навколо якого групується решта її значень. За ***міру ризику*** беруть або дисперсію, або стандартне відхилення, яке має ту саму розмірність, що й дохід, і математичне сподівання доходу. Такий підхід було започатковано працею Гаррі Марковіца, опублікованої в 1952 році.

Перелічимо основні постулати теорії Г. Марковіца.

1. Ринок складається зі скінченої кількості активів, прибутковості яких для заданого фіксованого періоду вважаються випадковими величинами.

2. Інвестор може одержати оцінку очікуваних (середніх) значень дохідностей і їхніх попарних коваріацій (тобто інвестор, скажімо, на підставі статистичних даних, знає потрібні спільні розподіли).

3. Інвестор може формувати будь-які припустимі для даної моделі портфелі, прибутковості яких — також випадкові величини.

4. Портфелі порівнюються за двома критеріями: за математичним сподіванням прибутковості (як мірою прибутковості) і за дисперсією (як мірою ризику).

5. Індивідуальні переваги інвестора задаються згорткою критеріїв в один критерій, що є деякою функцією корисності інвестора. Функція корисності залежить тільки від прибутковості та ризику.

6. Інвестор не схильний до ризику: із двох портфелів з однаковою прибутковістю він вибирає портфель із меншим ризиком.

Якщо інвестор згідно з наведеними припущеннями — розпоряджається необхідною статистичною інформацією, то він може знайти характеристики портфеля:

$$M\left(R_\pi\right)=\sum_i x_i M\left(R_i\right) \text{ і } \sigma^2\left(R_\pi\right)=\sum_i \sum_j x_i x_j \operatorname{cov}\left(R_i,\, R_j\right),$$

які він намагається поліпшити, складаючи портфель з активів у рамках деяких обмежень (фінансових, обмежень на обсяг закупівель деяких активів і т. ін.).

Зручно пов'язувати з портфелем вектор $x=\left(x_i, \ldots, x_n\right)$, де x_i — частка засобів, що виділяються на придбання *і*-го активу. ***Оцінкою портфеля*** називають пару чисел $\left(M(x), \sigma^2(x)\right)$, яку можна зобразити точкою Q_π на площині $\left(M, \sigma^2\right)$.

Площину $\left(M, \sigma^2\right)$ називають ***критеріальною.*** Змінюючи портфель π, тобто змінюючи вектор *x,* дістають різні оцінки, а для них різні точки на критеріальній площині. Множину всіх оцінок (тобто множину пар $\left(M, \sigma^2\right)$, а не множину портфелів) припустимих портфелів називають ***критеріальною множиною***. Якщо критеріальна множина не зводиться до однієї точки, то постає проблема вибору. Нехай π_0 — деякий портфель, а $Q_0=\left(M_0, \sigma_0^2\right)$ — оцінка для π_0.

Критеріальну площину можна поділити на чотири квадранти. Якщо якийсь інший портфель π_1 має оцінку в четвертому квандранті, то π_1 кращий за π_0, оскільки $M_1 \geq M_0$ і $\sigma_1^2 \leq \sigma_0^2$. Якщо оцінка для π_1 потрапляє в другий квандрант, то портфель π_1 гірший за π_0, оскільки $M_1 \leq M_0$ і $\sigma_1^2 \geq \sigma_0^2$ (причому для обох цих квандрантів хоча б одна нерівність у наведених парах нерівностей — строга). Якщо ж оцінка Q_1 портфеля π_1 міститься всередині (не на межі відповідної області) першого чи третього квандранта, то маємо два такі портфелі, в яких один показник кращий, ніж в іншого, але зате другий — гірший.

Означення. Портфель π_0 називають ***ефективним* за одним і тим самим критерієм у *множині припустимих портфелів*,** якщо немає кращого портфеля за цим самим критерієм, тобто немає портфеля π_1, такого що $M_1 > M_0$ і $\sigma_1^2 < \sigma_0^2$.

Властивість ефективності ілюструє рис. 12.10. Для деякого портфеля π_0 за його оцінкою Q_0 будується «четвертий квадрант». Портфель π_0 ефективний тоді і тільки тоді, коли в цьому квадранті немає інших припустимих точок. На рис. 12.10 портфель π_0 ефективний, а π_1 — не ефективний, оскільки π_2 кращий за π_1 відразу за двома критеріями. Ефективні портфелі даної множини припустимих портфелів утворюють **ефективну межу** множини (ефективні портфелі можуть лежати тільки на межі!). Ефективні портфелі називають також оптимальними за Парето. Оцінки ефективних портфелів також називають ***ефективною межею.***

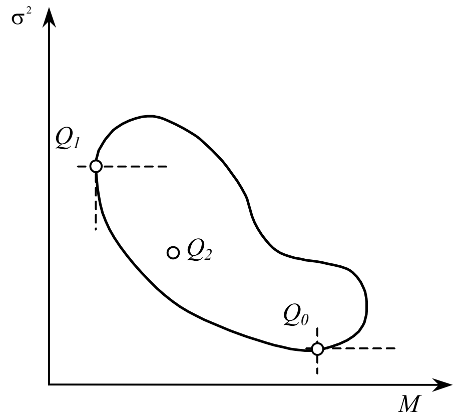


Рис. 12.10. Геометричне подання ефективного портфеля

Якщо вибрати якийсь фіксований рівень прибутковості, скажімо M_0, то можна шукати портфелі з цим рівнем прибутковості і з мінімальним ризиком. Для різних рівнів прибутковості будуть свої значення мінімального ризику. Такі портфелі називають ***мінімальними за ризиком***. Їхні оцінки утворюють ***мінімальну межу*** критеріальної множини. Сукупність відповідних точок на графіку дає мінімальну межу критеріальної множини. На рис. 12.11 мінімальна межа — крива $Q'Q_0Q_*Q''$. Як показав Марковіц, мінімальну межу на площині (M, σ^2) можна подати графіком неперервної функції $\sigma^2 = f_{\min}(M)$, що дає мінімум ризику при заданій прибутковості.

Цінність мінімальної межі та зазначеного результату Марковіца полягає в тому, що можна реалізувати один із підходів до розв'язування оптимізаційної задачі: маючи нижній поріг прибутковості, шукати портфель із мінімальним ризиком.

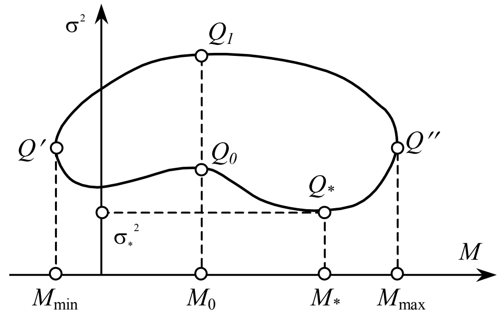


Рис. 12.11. Критеріальна множина та її мінімальна межа

12.5.2. *Різні задачі*

Задача Марковіца

У цій задачі — величина $x_i = W_i^0 / W^0$ — частка витрат на i-й актив у загальній вартості портфеля W^0 невід'ємна для всіх активів, тому припустимі портфелі описуються так: $x_i \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1$.

Особливість розглядуваних припустимих портфелів полягає в тому, що, як уже зазначалося, для кожного портфеля очікувана прибутковість $M(R_\pi) = \sum_i x_i M(R_i)$. Нехай $M_* = \max M(R_i)$, тоді $M(R_\pi) = \sum_i x_i M(R_i) \leq \sum_i x_i M_* = M_*$, тобто прибутковість портфеля не перевищує прибутковості найкращого з активів, що входять до портфеля. Природно, постає запитання: навіщо ж потрібний портфель активів, чому не обмежитися одним найкращим активом? Відповідь на це запитання вже було дано: портфель дає змогу знизити ризик.

Задача Блека

Нехай інвестор заради майбутніх доходів, бажаючи збільшити свій інвестований капітал W^0, бере в борг (чи одержує в результаті продажу деякого товару) додаткову суму $W^{\text{в}}$. Тоді в разі купівлі різних активів на суми $W_i^0, ..., W_n^0$ дістанемо:

$$W^0 + W^{\text{в}} = \sum_{i=1}^{n} W_i^0,$$

або поділивши обидві частини цієї рівності на W_0, запишемо

$$1 + y^{\text{в}} = \sum_i x_i,$$

де $y^{\text{в}} = W^{\text{в}} / W^0$.

Нехай $x_{n+1} = -y^{\text{в}}$. Тоді, як і раніше, маємо $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$, але одна з величин x_i уже від'ємна. Ясно, що у складніших ситуаціях від'ємних компонентів, що відповідають позиковим коштам, може бути більш як одна. Прибутковість портфеля в цьому разі обчислюється за аналогією до наведеного раніше правила:

$$r_\pi = \left(W^1 - W^0 - W^{\text{в}}\right) / \left(W^0 + W^{\text{в}}\right).$$

На більшості фондових бірж Заходу дії, що математично формалізуються у вигляді $x_i < 0$, припустимі і часто використовуються. Але з огляду на особливу ризикованість таких дій зазвичай існують щодо них додаткові обмеження, а стосовно деяких видів цінних паперів і повна заборона. Портфелі, що задовольняють умови даного ринку, називаються ***припустимими***. У задачі Блека припустимі будь-які портфелі, тобто єдине обмеження $\sum_i x_i = 1$.

Особливість задачі Блека полягає в тому, що уможливлюється реалізація кожної як завгодно великої прибутковості (але за рахунок швидко зростаючого ризику!) Справді, нехай є два активи з очікуваними дохідностями $M_1 = 1$ і $M_2 = -1$. Для портфеля $x_1 = u$, $x_2 = -u$ прибутковість

$$M_\pi = 1 \cdot (1 + u) + (-1) \cdot (-u) = 1 + 2u \to \infty \text{ при } u \to \infty .$$

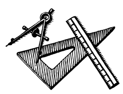
Задача Тобіна—Шарпа—Лінтнера

Ця задача більшою мірою стосується до структури ринку, а не структури портфеля. Вважається, що існує неризикований актив, прибутковість якого не залежить від стану ринку (звичайно це — державні цінні папери чи внески у великі банки). Якщо прибутковість неризикованого активу (нехай він на ринку один, його номер — нуль) R_0, то очікувана прибутковість $M(R_0) = R_0$, $\sigma^2(R_0) = 0$ і $\operatorname{cov}(R_0, R_i) = 0$ для всіх $i \neq 0$ (останнє означає, що в коваріаційній матриці ринку є нульовий рядок і нульовий стовпець). Усі активи, крім нульового, — ризиковані, тобто $\sigma^2(R_i) > 0$ для $i = 1, ..., n$.

У даній задачі портфель із вектором $x = (x_0, x_1, ..., x_n)$ при $x_0 \neq 1$ можна подати у вигляді лінійної комбінації неризикованого і ризикованого портфелів: $x = x_0 e_0 + (1 - x_0) y_0$, де $e_0 = (1, 0, 0, ..., 0)$ — неризикований портфель, що збігається з неризикованим активом, а $y_0 = (0, \ x_1 / (1 - x_0),$ $..., \ x_n / (1 - x_0))$ — суто ризикований портфель. Наприклад, для $n = 2$ і $x = (0{,}6;\ 0{,}1;\ 0{,}3)$ відповідний розклад матиме вигляд:

$$x = 0{,}6(1;\ 0;\ 0) + 0{,}4(0;\ 0{,}25;\ 0{,}75).$$

Такий розклад відіграє важливу роль при оцінюванні фіксованих активів.



Приклад. Розглянемо наочні ситуації, коли є два активи, тобто ринок описується вектором очікуваних дохідностей $M = (M_1, M_2)$ і матрицею коваріації

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix},$$

в якій $c_{11} = \sigma_1^2$, $c_{22} = \sigma_2^2$, $c_{12} = c_{21} = \rho\sigma_1\sigma_2$, $\rho = \rho_{12}$ — коефіцієнт кореляції дохідностей активів; σ_1, σ_2 — стандартні відхилення.

Для задачі Блека, коли припустимі будь-які значення x_1 і x_2, аби $x_1 + x_2 = 1$, маємо в двовимірному випадку пряму на площині x_1, x_2, утвореній з множини припустимих пар. Зручно подано цю пряму в параметричному вигляді: $x_1 = t,\ x_2 = 1 - t$. Тоді кожний портфель описується так: $x = (t, 1 - t)$, де t набуває будь-яких дійсних значень (зокрема й від'ємних).

Прибутковість портфеля $M_\pi = M_1 t + M_2(1 - t) = M_2 + (M_1 - M_2)t$, ризик портфеля

$$\sigma_\pi^2 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} x_i x_k \operatorname{cov}(R_i,\ R_k) = c_{11} t^2 + 2c_{12} t(1 - t) + c_{22}(1 - t)^2 =$$
$$= (\sigma_1^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2) t^2 + 2(\rho\sigma_1\sigma_2 - \sigma_2^2) t + \sigma_2^2 .$$

На площині (M, σ^2) маємо параметрично задану криву, яка має проходити через точки $Q_1(M_1, \sigma_1^2)$; $Q_2(M_2, \sigma_2^2)$. Вигляд цієї кривої залежить не тільки від ризику активів, а й від коефіцієнта кореляції, що характеризує міру статистичного зв'язку між дохідностями активів. Розглянемо три частинні цікаві випадки: $\rho = 1,\ 0,\ -1$.

Випадок $\rho = 1$. Рівняння для ризику портфеля

$$\sigma_\pi^2 = (\sigma_1 t + \sigma_2(1-t))^2 = (\sigma_2 + (\sigma_1 - \sigma_2)t)^2.$$

З виразу для M_π знайдемо, що $t = (M_\pi - M_2)/(M_1 - M_2)$, а потім після підставлення цього значення *t* у вираз для σ_π^2 дістанемо:

$$\sigma_\pi^2 = \left(\frac{\sigma_2 M_1 - \sigma_1 M_2}{M_1 - M_2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{M_1 - M_2} M_\pi\right)^2 \geq 0 .$$

Отже, у невиродженому випадку $(M_1 \neq M_2, \sigma_1 \neq \sigma_2)$ критеріальна множина — це парабола на площині (M, σ^2).

Оскільки $\sigma_\pi^2 \geq 0$, то маємо портфель, в якого ризик нульовий. При $\sigma_\pi^2 = 0$ дістаємо:

$$M^* = \frac{\sigma_2 M_1 - \sigma_1 M_2}{\sigma_2 - \sigma_1},\ t^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1},\ x^* = \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_1 - \sigma_2}\right).$$

Нульовий ризик — це, звичайно, прекрасно, але один із компонентів (а саме x^*) від'ємний, тобто йдеться про кошти позикові. Більш того, може бути $M^* < 0$, якщо або $1 > \sigma_2/\sigma_1 > M_2/M_1$, або $1 < \sigma_2/\sigma_1 < M_2/M_1$. Таке усунення ризику безглузде, оскільки означає гарантований збиток.

Звичайно, у задачі Блека (тобто за наявності позикових коштів, що рівносильно від'ємності компонента вектора *x*) можливий бути випадок, коли $M^* > 0$, причому можливо, що прибутковість портфеля як знизиться, так і підвищиться порівняно з дохідностями використовуваних активів.

Випадок $\rho = 0$. У такому разі $M_\pi = M_2 + (M_1 - M_2)t$, $\sigma_\pi^2 = \sigma_1^2 t^2 + \sigma_2^2 (1-t)^2 > 0$. Можна знову виразити *t* через M_π, підставити в σ_π^2 і дістати залежність σ_π^2 від M_π. Ця залежність, як і в попередньому випадку, буде квадратичною. Для відшукання $\min \sigma_\pi^2$ (тепер $\sigma_\pi^2 > 0$ строго!) розв'яжемо рівняння $\frac{d\sigma_\pi^2}{dt} = 0$:

$$\frac{d\sigma_\pi^2}{dt} = 2\left(\sigma_1^2 t - \sigma_2^2(1-t)\right) = 0 \rightarrow t^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \in (0;1),$$

звідки:

$$\sigma_\pi^2\left(t^*\right)=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}+\sigma_2^2,\ 0<\sigma_\pi^2\left(t^*\right)<\min\left\{\sigma_1^2;\ \sigma_2^2\right\},$$

$$\text{і } M_\pi\left(t^*\right)=\frac{M_1\sigma_2^2+M_2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\in\left(M_1;\ M_2\right).$$

Ризик портфеля менший від ризику кожного з активів, але усунути його цілком не можна. Як і в попередньому випадку, мінімальна межа збігається з критеріальною множиною.

Випадок $\rho=-1$. При $\rho=-1$ маємо:

$$M_\pi=M_2+(M_1-M_2)t,\ \sigma_\pi^2=\left(\sigma_1 t-\sigma_2(1-t)\right)^2,\ \sigma_\pi=\left|\sigma_1 t-\sigma_2(1-t)\right|,$$

тобто в деякому сенсі ситуація симетрична відносно випадку $\rho=1$.

Сутність цього факту в тому, що ризик можна цілком усунути без залучення позикових коштів $(x_1,\ x_2>0)$. Мінімальна межа знову збігається з критериальною множиною.

Аналогічний аналіз можливий для будь-яких значень ρ. Можна довести, що при $\rho\neq\pm1$ цілком усунути ризик не вдається.

12.5.3. *Задача вибору оптимального портфеля*

У сучасній літературі прийнято вважати, що переваги інвестора можна охарактеризувати за допомогою ***кривих байдужності***. Кожною такою кривою на критеріальній площині подається множина портфелів, еквівалентних з погляду інвестора. Наприклад, на рис. 12.12 це крива $\pi-\pi'-\pi''$. Криві байдужності заповнюють усю критеріальну площину і не перетинаються.

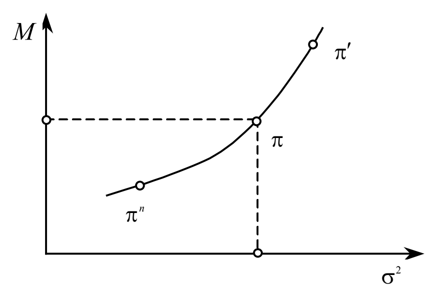


Рис. 12.12. Крива байдужності інвестора

Розглянемо дві криві байдужності L_1 і L_2 (рис. 12.13). Портфелі π_1 і π_2 мають однакову прибутковість, але ризик для π_1 менший, ніж для π_2, тому π_1 кращий, ніж π_2. Це означає, що всі портфелі, еквівалентні π_1, кращі за π_2 і кращі за всі портфелі, еквівалентні π_2 (тому криві L_1 і L_2 не перетинаються).

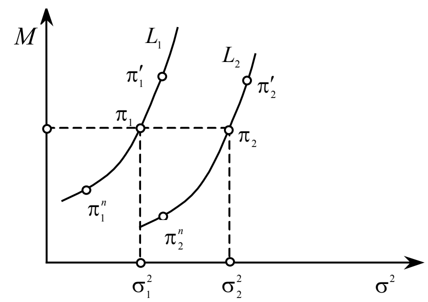


Рис. 12. 13. Порівняння портфелів за їхніми кривими байдужості

Доволі часто криві байдужності набирають вигляду ліній рівня для тієї чи іншої функції корисності, тобто для деякої числової функції параметрів M, σ^2 чи M, σ. Задати функцію корисності означає, по-перше, перейти до скалярного критерію і, по-друге, увести єдиний критерій порівняння портфелів.

Якщо переваги інвестора описуються функцією корисності $U(M, \sigma)$, то вибір оптимального портфеля означає вибір такого вектора розподілу коштів x^*, при якому інвестор одержує $\max\ U$.

Розрахунки, які потрібно виконати для відшукання x^*, доволі серйозні, але геометрично ситуація проста (рис. 12.14): функція корисності подається якоюсь лінією рівня, причому чим вища лінія рівня, тим більше значення функції корисності. Шукати розв'язок потрібно серед точок ефективної межі, тому розв'язком буде та лінія рівня, яка дотикається до цієї межі.

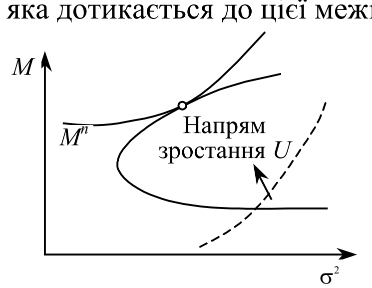


Рис. 12.14. Геометричне подання розв'язку інвестора

12.6. Задачі теорії систем масового обслуговування

12.6.1. *Основі поняття*

Означення. **Системи масового обслуговування** (СМО) — це такі системи, в яких, з одного боку, виникають масові запити (вимоги) на виконання деяких послуг, а з другого боку — відбувається задоволення цих запитів.

До складу СМО входять такі елементи: *джерело потоку вимог*, що надходять на обслуговування; *черга вимог*, *які очікують на обслуговування; обслуговувальні пристрої (канали обслуговування)*, що приймають потік вимог. Дослідженням таких систем займається **теорія масового обслуговування**.

Методами теорії масового обслуговування можна розв'язати багато задач дослідження процесів, що відбуваються в економіці. Так, в організації торгівлі ці методи дають змогу визначити оптимальну кількість торговельних точок даного профілю, чисельність продавців, частоту завезення товарів та інші параметри. Іншим характерним прикладом СМО можуть бути склади чи бази постачальницько-збутових організацій, і задача теорії масового обслуговування в цьому разі зводиться до того, щоб установити оптимальне співвідношення між кількістю вимог на обслуговування, що надходять на базу, і кількістю обслуговувальних пристроїв, при якому сумарні витрати на обслуговування та збитки від простою транспорту були б мінімальними. Теорія масового обслуговування може знайти застосування і при розрахунку площі складських приміщень, при цьому складська площа розглядається як обслуговувальний пристрій, а прибуття транспортних засобів під вивантаження — як вимога.

Системи масового обслуговування можна класифікувати за різними ознаками.

1. Залежно від *умов очікування початку обслуговування* розрізняють:

- СМО *з утратами* (відмовами);
- СМО *з очікуванням.*

У СМО з відмовами вимоги, що надходять у момент, коли всі канали обслуговування зайняті, отримують відмову і втрачаються. Класичним прикладом системи з відмовами є телефонна станція. Якщо викликуваний абонент зайнятий, то вимога на з'єднання з ним отримує відмову і втрачається.

У СМО з очікуванням вимога, заставши всі обслуговувальні канали зайнятими, стає в чергу й очікує, поки не звільниться один з обслуговувальних каналів.

СМО, що припускають чергу, але з обмеженою кількістю вимог у ній, називаються ***системами з обмеженою довжиною черги***.

СМО, що припускають чергу, але з обмеженим терміном перебування кожної вимоги в ній, називаються ***системами з обмеженим часом очікування***.

2. За кількістю каналів обслуговування СМО поділяються:

- на *одноканальні;*
- *багатоканальні.*

3. *За місцем перебування джерела вимог* СМО поділяються:

- на *розімкнені*, коли джерело вимоги перебуває поза системою;
- *замкнені*, коли джерело перебуває в самій системі.

Прикладом розімкненої системи може бути майстерня з ремонту телевізорів. Тут несправні телевізори — джерело вимог на їх обслуговування — перебувають поза самою системою, причому кількість вимог можна вважати необмеженою. До замкнених СМО належать, наприклад, верстатна дільниця, де верстати є джерелом несправностей, а отже, джерелом вимог на обслуговування, у цьому разі, бригадою налагоджувачів.

Можливі й інші ознаки класифікації СМО, наприклад за дисципліною обслуговування, одно- та багатофазні СМО тощо.

Методи та моделі, що застосовуються в теорії масового обслуговування, можна умовно поділити на аналітичні та імітаційні.

Аналітичні методи теорії масового обслуговування дають змогу відшукувати характеристики системи як деякі функції параметрів її функціонування. Завдяки цьому уможливлюється проводити якісний аналіз впливу окремих факторів на ефективність роботи СМО. ***Імітаційні методи*** ґрунтуються на моделюванні процесів масового обслуговування на ЕОМ і застосовуються, тоді коли застосування аналітичних моделей неможливе.

Нині теоретично найбільш розроблені й зручні у практичному застосуванні методи розв’язування таких задач масового обслуговування, в яких вхідний потік вимог є ***найпростішим — пуассонівським.***

Для найпростішого потоку частота надходження вимог у систему підпорядковується закону Пуассона, тобто ймовірність надходження за час t рівно k вимог подається формулою:

$$P_k(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}. \qquad (12.17)$$

Найпростіший потік характеризується трьома основними властивостями: ординарністю, стаціонарністю та відсутністю післядії.

Ординарність потоку означає практичну неможливість одночасного надходження двох і більше вимог. Наприклад, доволі малою є ймовірність того, що з групи верстатів, обслуговуваних бригадою ремонтників, одночасно вийдуть з ладу відразу кілька верстатів.

Стаціонарним називається потік, для якого математичне сподівання кількості вимог, які надходять у систему за одиницю часу (позначимо λ), не зміняються в часі. Таким чином, імовірність надходження в систему певної кількості вимог протягом заданого проміжку часу Δt залежить від його тривалості і не залежить від початку його відліку на осі часу.

Відсутність післядії полягає в тому, що кількості вимог, які надійшли в систему до моменту t, не визначає того, скільки вимог надійде в систему за проміжок часу від t до $t + \Delta t$.

Наприклад, якщо на ткацькому верстаті в даний момент відбувся обрив нитки, який ткаля усунула, то це не визначає, відбудеться новий обрив на даному верстаті в наступний момент чи ні, тим більше це не впливає на ймовірність виникнення обриву на інших верстатах.

Важлива характеристика СМО — час обслуговування вимог у системі. Час обслуговування однієї вимоги є, як правило, випадковою величиною і, отже, може бути описаний законом розподілу. Найбільшого поширення в теорії, а особливо у практичному застосуванні, набув одержав *експонентний закон розподілу часу обслуговування.* Функція розподілу для цього закону має вигляд:

$$F(t) = 1 - e^{-\mu t}, \tag{12.18}$$

тобто ймовірність того, що час обслуговування не перевищує деякої величини t, визначається формулою (12.18), де μ — параметр експонентного закону розподілу часу обслуговування вимог у системі, тобто величина, обернена до середнього часу обслуговування $\bar{t}_{об}$:

$$\mu = 1/\bar{t}_{об},$$

Розглянемо аналітичні моделі найбільш поширених СМО з очікуванням, тобто таких СМО, в яких вимоги, що надійшли в момент, коли всі обслуговувальні канали зайняті, ставляться в чергу й обслуговуються в міру звільнення каналів.

Загальна постановка задачі полягає ось у чому. Система має n обслуговувальних каналів, кожний з яких може одночасно обслуговувати тільки одну вимогу.

У систему надходить найпростіший (пуассонівський) потік вимог із параметром λ. Якщо в момент надходження чергової вимоги в системі на обслуговуванні вже перебуває не менш як n вимог (тобто всі канали зайняті), то ця вимога стає в чергу і очікує на початок обслуговування.

Час обслуговування кожної вимоги $t_{об}$ — випадкова величина, що підпорядковується експонентному закону розподілу з параметром μ.

СМО з очікуванням можна розбити на дві великі групи: замкнені і розімкнуті. До ***замкнених*** належать системи, в яких потік вимог, що надходить, виникає в самій системі і є обмеженим. Наприклад, майстер, завданням якого є налагодження верстатів у цеху, має періодично їх обслуговувати. Кожний налагоджений верстат стає потенційним джерелом вимог на налагодження. У таких системах загальна кількість вимог, що циркулюють здебільшого постійно.

Якщо джерело має нескінченну кількість вимог, то СМО називаються ***розімкненими***. Прикладами таких систем можуть бути магазини, каси вокзалів, портів і т. ін. Для цих систем потік вимог, що надходить, можна вважати необмеженим.

Зазначені особливості функціонування систем цих двох видів накладають певні умови на використовуваний математичний апарат. Розрахунок характеристик роботи СМО різного виду можна виконати на основі розрахунку ймовірностей станів СМО (так звані ***формули Ерланга***).

Розглянемо ***алгоритми розрахунку показників якості функціонування розімкненої СМО з очікуванням***.

Розглянемо параметр $\alpha = \lambda / \mu$. Зауважимо, що коли $\alpha / n < 1$, то черга не може зростати необмежено. Ця умова має такий сенс: λ — середня кількість вимог, що надходять за одиницю часу; $1/\mu$ — середній час обслуговування одним каналом однієї вимоги; тоді $\alpha = \lambda \cdot 1/\mu$ — середня кількість каналів, необхідних для обслуговування за одиницю часу всіх вимог, що надходять. Тому умова $\alpha / n < 1$ означає, що кількість обслуговувальних каналів має бути більшою за середню кількість каналів, необхідних для того, щоб за одиницю часу обслужити всі вимоги, що надійшли. Найважливіші характеристики роботи СМО такі.

1. Імовірність того, що всі обслуговувальні канали вільні

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\alpha^k}{k!} + \frac{\alpha^n}{n!(1-\alpha/n)} \right]^{-1}. \qquad (12.19)$$

2. Імовірність того, що зайнято рівно k обслуговувальних каналів за умови, що загальна кількість вимог, що перебувають на обслуговуванні, не перевищує кількості обслуговувальних каналів:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{k!} P_0 \quad \text{при} \quad 1 \le k \le n\ . \qquad (12.20)$$

3. Імовірність того, що в системі перебуває k вимог у разі, коли їхня кількості перевищує кількості обслуговувальних каналів:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!\, n^{k-n}} p_0 \quad \text{при} \quad k \ge n. \qquad (12.21)$$

4. Імовірність того, що всі обслуговувальні канали зайняті:

$$P_k = \frac{\alpha^k}{n!\left(1-\alpha/n\right)} P_0 \quad \left(\alpha/n < 1\right). \qquad (12.22)$$

5. Середній час очікування вимогою початку обслуговування в системі:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{P_n}{\mu\left(n-\alpha\right)} P_0 \quad \left(\alpha/n < 1\right). \qquad (12.23)$$

6. Середня довжина черги:

$$\overline{L}_{\text{оч}} = \frac{\alpha P_n}{n\left(1-\alpha/n\right)} = \frac{\alpha^{n+1}}{n!\, n\left(1-\alpha/n\right)^2} P_0 \quad \left(\alpha/n < 1\right). \qquad (12.24)$$

7. Середня кількість вільних від обслуговування каналів:

$$\overline{N}_0 = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{n-k}{k!} \alpha^k P_0. \qquad (12.25)$$

8. Коефіцієнт простою каналів:

$$K_{\text{пр}} = \frac{\overline{N}_0}{n}. \qquad (12.26)$$

9. Середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів:

$$\overline{N}_з = n - N_0. \quad (12.27)$$

10. Коефіцієнт завантаження каналів

$$K_з = \frac{\overline{N}_з}{n}. \quad (12.28)$$

Перейдемо до розгляду алгоритмів розрахунку характеристик функціонування замкнених СМО. Оскільки система замкнена, то до постановки задачі варто додати умови: потік вимог, що надходять, обмежений, тобто в системі обслуговування одночасно не може перебувати більш як *m* вимог (*m* — кількість обслуговувальних об’єктів).

За критерій, що характеризує якість функціонування розглядуваної системи, виберемо відношення середньої довжини черги до найбільшої кількості вимог, які перебувають одночасно в обслуговувальній системі, — коефіцієнт простою об’єкта, що обслуговується. Як інший критерій візьмемо відношення середньої кількості незайнятих обслуговувальних каналів до їхньої загальної кількості — коефіцієнт простою каналу, що обслуговується.

Перший із названих критеріїв характеризує втрати часу через очікування початку обслуговування; другий показує повноту завантаження обслуговувальної системи.

Очевидно, що черга може виникнути лише тоді, коли кількість каналів менша за найбільшу кількість вимог, які перебувають одночасно в обслуговувальній системі $(n < m)$.

Наведемо послідовність розрахунків характеристик замкнених СМО і необхідні формули.

1. Визначимо параметр $\alpha = \lambda / \mu$ — показник завантаження системи, тобто математичне сподівання кількості вимог, що надходять у систему за час, який дорівнює середній тривалості обслуговування $(1/\mu = \bar{t}_{об})$.

2. Імовірність того, що зайнято *k* обслуговувальних каналів за умови, що кількість вимог, які перебувають у системі, не перевищує кількості обслуговувальних каналів системи:

$$P_k = \frac{m!}{k!(m-k)!}\alpha^k P_0 \quad (1 \le k \le m). \quad (12.29)$$

3. Імовірність того, що в системі перебуває k вимог, для випадку, коли їхня кількість перевищує кількість обслуговувальних каналів:

$$P_k = \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} \alpha^k P_0 \quad (n \le k \le m). \qquad (12.30)$$

4. Імовірність того, що всі обслуговувальні канали вільні, визначимо, скориставшись очевидною умовою:

$$\sum_{k=0}^{m} P_k = 1, \quad \text{звідки} \quad P_0 = 1 - \sum_{k=1}^{m} P_k.$$

Значення P_0 можна знайти також підставленням у рівність $\sum_{k=0}^{m} P_k = 1$ значень $P_1, P_2, ..., P_m$, в які P_0 входить співмножником. Підставляючи їх, дістаємо таке рівняння для визначення P_0:

$$P_0 \left[\sum_{k=0}^{m} \frac{m!}{k!(m-k)!} \alpha^k + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} \alpha^k \right] = 1,$$

звідки

$$P_0 = \left[\sum_{k=0}^{n} \frac{m!}{k!(m-k)!} \alpha^k + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} \alpha^k \right]^{-1}. \qquad (12.31)$$

5. Середня кількість вимог, що очікують початку обслуговування (середня довжина черги), подається формулою:

$$M_{\text{оч}} = \sum_{k=n+1}^{m} (k-n) P_k,$$

або

$$M_{\text{оч}} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(k-n) m!}{n^{k-n} n!(m-k)!} \alpha^k P_0. \qquad (12.32)$$

6. Коефіцієнт простою вимоги, що обслуговується (об’єкта), визначається так:

$$K_{\text{пр.об}} = \frac{M_{\text{оч}}}{m} = \frac{1}{m} \sum_{k=n+1}^{m} (k-n) P_k. \qquad (12.33)$$

7. Середня кількість вимог, що перебувають в обслуговувальній системі (обслуговується й очікує на обслуговування):

$$M = \sum_{k=1}^{n} kP_k + \sum_{k=n+1}^{m} kP_k , \qquad (12.34)$$

або

$$M = \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{m!}{(k-1)!(m-k)!} \alpha^k + \sum_{k=n+1}^{m} \frac{km!}{n^{k-n} n!(m-k)!} \alpha^k \right] P_0 .$$

8. Середня кількість вільних обслуговувальних каналів

$$\overline{N}_0 = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k) P_k = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k)m!}{k!(m-k)!} \alpha^k P_0 . \qquad (12.35)$$

9. Коефіцієнт простою обслуговувального каналу

$$K_{\text{пр. кан}} = \frac{N_0}{n} = \sum_{k=0}^{n-1} P_k - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} kP_k . \qquad (12.36)$$

12.6.2. *Задачі з практики маркетологів*

Задача 1
Нехай філія фірми з ремонту радіоапаратури має $n = 5$ досвідчених майстрів. У середньому протягом робочого дня від населення надходить у ремонт $\lambda = 10$ радіоапаратів. Загальна кількість радіоапаратів, що перебувають в експлуатації в населення, дуже велика, і вони незалежно один від одного в різний час виходять із ладу. Тому є всі підстави вважати, що потік заявок на ремонт апаратури є випадковим, пуассонівським. У свою чергу, кожний апарат залежно від характеру несправності також потребує різного випадкового часу на ремонт. Час на проведення ремонту багато в чому залежить від серйозності отриманого ушкодження, кваліфікації майстра та багатьох інших причин. Нехай статистика показала, що час ремонту підпорядковується експонентному закону; при цьому в середньому протягом робочого дня кожний із майстрів устигає відремонтувати $\mu = 2{,}5$ радіоапарата. Потрібно оцінити роботу філії фірми з ремонту радіоапаратури, розрахувавши низку основних характеристик даної СМО.

Розв’язання. За одиницю часу візьмемо один робочий день (7 годин).

1. Визначимо параметр

$$\alpha = \lambda \frac{1}{\mu} = 10 \cdot 1/2{,}5 = 4.$$

Оскільки $\alpha < n,$ то черга не може зростати необмежено.

2. Імовірність того, що всі майстри вільні від ремонту апаратури, згідно з (12.31) обчислюється так:

$$P_0 = \frac{1}{1 + 4 + 4^2/2! + 4^3/3! + 4^4/4! + 4^5/5!(1 - 4/5)} = 0{,}013\,.$$

3. Імовірність того, що всі майстри зайняті ремонтом, знаходимо згідно з (12.20):

$$P_n = \frac{4^5 \cdot 0{,}013}{5!(1 - 4/5)} = 0{,}554\,.$$

Це означає, що 55,4 % часу майстри цілком завантажені роботою.

4. Середній час обслуговування (ремонту) одного апарата згідно (12.   ):

$$\bar{t}_{\text{об}} = 1/\mu = 7/2{,}5 = 2{,}8 \text{ год/апарат.}$$

5. У середньому час очікування кожного несправного апарата початку ремонту згідно з (12.23) визначається

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0{,}554 \cdot 2{,}8}{5 - 4} = 1{,}55 \text{ год.}$$

6. Дуже важливою характеристикою є середня довжина черги, оскільки саме вона визначає, скільки місця необхідно для зберігання апаратури, яка потребує ремонту. Знаходимо середню довжину черги згідно з (12.24):

$$\overline{L}_{\text{оч}} = \frac{0{,}554 \cdot 4}{5(1 - 4.5)} \approx 2{,}2 \text{ апарата.}$$

7. Визначаємо середню кількість майстрів, вільних від роботи, згідно з (12.25):

$$\overline{N}_0 = 0{,}013\left[\frac{5-0}{1} \cdot 1 + \frac{5-1}{1!} \cdot 4 + \frac{5-2}{2!} \cdot 4^2 + \frac{5-3}{3!} \cdot 4^3 + \frac{5-4}{4!} \cdot 4^4\right] \approx 0{,}95.$$

Таким чином, у середньому протягом робочого дня ремонтом зайняті четверо майстрів із п’яти.

Задача 2

Робітник обслуговує групу автоматів, що складається з трьох верстатів. Потік вимог, що надходять на обслуговування верстатів, є пуассонівським із параметром $\lambda = 2$ верстатів/год. Обслуговування одного верстата займає в робітника в середньому 12 хв, а час обслуговування підпорядковується експонентному закону. Тоді $1/\mu = 0{,}2$ год/верстат, тобто $\mu = 5$ верстатів/год, а $\alpha = \lambda/\mu = 0{,}4$.

Необхідно визначити середню кількість автоматів, що очікують на обслуговування, коефіцієнт простою автомата, а також коефіцієнт простою робітника. Обслуговувальним каналом тут є робітник; оскільки верстати обслуговує один робітник, то $n = 1$. Загальна кількість вимог не може перевищувати кількість верстатів, тобто $m = 3$.

Система може перебувати в чотирьох різних станах: 1) усі верстати працюють; 2) один не працює та обслуговується робітником, а два працюють; 3) два не працюють, один обслуговується, один очікує на обслуговування; 4) три не працюють, з них один обслуговується, а два чекають черги.

Щоб відповісти на поставлені запитання можна скористатися формулами (12.29) і (12.30):

$$P_1 = \frac{3!}{1!(3-1)!} \cdot 0{,}4 P_0 = 1{,}2 P_0\,;$$

$$P_2 = \frac{3!}{1^{2-1} 1!(3-1)!} \cdot 0{,}4^2 P_0 = 0{,}96 P_0\,;$$

$$P_3 = \frac{3!}{1^{3-1} 1!(3-3)!} \cdot 0{,}4^3 P_0 = 0{,}384 P_0\,.$$

Зведемо обчислення в таблицю.

k	$k-n$	P_k/P_0	P_k	$(k-n)P_k$	kP_k
1	2	3	4	5	6
0	0	1,0000	0,2822	0	0
1	0	1,2000	0,3386	0	0,3386
2	1	0,9600	0,2709	0,2709	0,5418
3	2	0,3840	0,1083	0,2166	0,3249
	$\sum$	3,5440	1,0000	0,4875	1,2053

У цій таблиці першою обчислюється третя графа, тобто відношення p_k / P_0 при $k = 0,\ 1,\ 2,\ 3$. Далі, підсумовуючи значення по цій графі і беручи до уваги, що $\sum\limits_{k=0}^{3} P_k = 1,$ дістанемо

$$\sum_{k=0}^{3} \frac{P_k}{P_0} = \frac{1}{P_0} \sum_{k=0}^{3} P_k = \frac{1}{P_0} = 3{,}544,$$

звідки $P_0 = 0{,}2822$.

Множачи значення, подані у третій графі, на P_0, дістаємо значення четвертої графи. Значення $P_0 = 0{,}2822$ являє собою ймовірність того, що всі автомати працюють, тобто ймовірність того, що робітник вільний. Бачимо, що в розглядуваному випадку робітник буде вільним більш як 1/4 усього робочого часу. Проте це не означає, що завжди не буде «черги» верстатів, які очікують на обслуговування. Математичне сподівання кількості автоматів, які перебувають у черзі, набирає вигляду:

$$M_{\text{оч}} = \sum_{k=2}^{3} (k-1) P_k \ \ (\text{оскільки } n = 1).$$

Підсумовуючи значення п’ятої графи, дістанемо $M_{\text{оч}} = 0{,}4875$. Отже, у середньому з трьох верстатів 0,49 верстата буде простоювати, очікуючи на звільнення робітника.

Підсумовуючи значення шостої графи, дістаємо математичне сподівання кількості верстатів, що простоюють (ремонтуються й очікують ремонту):

$$M = \sum_{k=1}^{3} k P_k = 1{,}2053,$$

тобто в середньому 1,2 верстата не видаватиме продукції. Коефіцієнт простою верстата дорівнює $K_{\text{пр.в}} = M_{\text{оч}} / 3 = 0{,}1625,$ тобто кожний верстат простоює приблизно 0,16 робочого часу, очікуючи коли робітник звільниться.

Коефіцієнт простою робітника (каналу) в даному разі $K_{\text{пр.кан}} = \dfrac{N_0}{n} = 0{,}2822$.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Альсевич В. В.* Математическая экономика. — М., 1998.
2. *Ашманов С. А.* Введение в математическую экономику. — М.: Наука, 1984.
3. *Ашманов С. А.* Математические модели и методы в экономике. — М.: Изд-во МГУ, 1980.
4. *Береснева Н. А., Комарова А. В.* Математические модели экономики: Учеб.-метод. пособие. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 2002.
5. *Береснева Н. А., Рубинштейн А. Г., Суслов В. И.* Сборник задач и упражнений по курсу математических моделей экономики. — Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1997.
6. *Береснева Н. А., Желободько Е. В., Камарова А. В.* Сборник задач и упражнений по курсу «Математические модели экономики». — Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1997.
7. *Кубониева М, Табата М., Табата С., Хасэбэ Ю.* Математическая экономика на персональном компьютере. — М.: Финансы и статистика, 1991.
8. *Ланкастер Р.* Математическая экономика. — М.: Сов. радио, 1972.
9. *Макаров В. Л., Рубинов А. М.* Математическая теория экономической динамики и равновесия. — М.: Наука, 1973.
10. *Моисеев Н. Н.* Математические модели экономической науки. — М.: Знание, 1973.
11. *Петров А. А.* Экономика. Модель. Вычислительный эксперимент. — М.: Наука, 1996.
12. *Черемных Ю. Н.* Качественное исследование оптимальных траекторий динамических моделей экономики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1975.
13. *Колемаев В.* Математическая єкономика. — М.: Изд-во МГУ, 2002.
14. *Аллен Р.* Математическая экономика. — М., 1963.
15. *Гейл Д.* Замкнутая линейная модель производства // Сб. «Линейные неравенства и смежные вопросы». — М., 1953.
16. *Гейл Д.* Теория линейных экономических моделей. — М., 1963.

17. *Ефимов М. Н., Мовшович С. М.* Анализ сбалансированного роста в динамической модели народного хозяйства // Экономика и математические методы. — 1973. — 9. — № 1.

18. *Лебедев В. В.* Математическое моделирование социально-экономических процессов. — М.: Изограф, 1997.

19. *Леонтьев В. В.* Исследование структуры американской экономики. — М.: Госстатиздат, 1958.

20. *Маршалл А.* Принципы экономической науки: В 3 т. — М.: Прогресс, 1993.

21. *Моришима М.* Равновесие, устойчивость, рост. — М.: Наука, 1972.

22. *Нейман Дж. Фон, Моргенштерн О.* Теория игр и экономическое поведение. — М.: Наука, 1970.

23. *Солодовников А. С. и др.* Математика в экономике. — М.: Финансы и статистика, 1998.

24. *Самуэльсон П.* Экономика. — М.: Прогресс, 1964.

25. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. — М.: Физматгиз, 1962.

26. *Райфа Г.* Анализ решений: Пер. с англ. — М.: Мир, 1972.

27. *Кремер Н. Ш., Путко Б. А. и др*. Высшая математика для экономистов. — М.: ЮНИТИ, 2000.

28. *Пиндайк Р., Рубинфельд Д*. Микроэкономика: Пер. с англ. — М.: Мир, 1992.

29. *Дрейпер Н., Смит Г.* Прикладной регрессионный анализ. — М.: Финансы и статистика, 1986.

30. *Замков О. О., Толстопятенко А. В., Черемных Ю. Н.* Математические методы в экономике: Учебник. — М.: МГУ: Изд-во «ДИС», 1998.

31. *Федосеев В. В., Гармаш А. Н., Дайитбегов Д. М. и др*. Экономико-математические методы и прикладные модели. — М.: ЮНИТИ, 2002.

32. *Колемаев В. А.* Математическая экономика в примерах и задачах. — М.: ГАУ им. С. Орджоникидзе, 1995.

33. *Вентцель Е. С.* Исследование операций. — М., 1972.

34. *Трояновский В. М.* Математическое моделирование в менеджменте. — М.: РДЛ, 2003.

ЗМІСТ

Навчальне видання

БЛУДОВА Тетяна Володимирівна
ДЖАЛЛАДОВА Ірада Агаверді кизи
МАКАРЕНКО Олександр Іванович
ШУКЛІН Герман Вікторович

МАТЕМАТИЧНА ЕКОНОМІКА

Навчальний посібник

Редактор *О. Бондаренко*
Художник обкладинки *Т. Зябліцева*
Технічний редактор *О. Бабич*
Коректор *В. Антонюк*
Верстка *С. Намовлюк*

Підп. до друку 25.05.08. Формат 60 84/16. Папір офсет. № 1.
Гарнітура Тип Таймс. Друк офсет. Ум. друк. арк. 26,97.
Обл.-вид. арк. 30,69. Наклад 185 пр. Зам. № 06-3277.

Державний вищий навчальний заклад
«Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана»
03680, м. Київ, проспект Перемоги, 54/1
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
суб'єктів видавничої справи (серія ДК, № 235 від 07.11.2000)
Тел./факс (044) 537-61-41; тел. (044) 537-61-44
E-mail: publish@kneu.kiev.ua

Видавництво Державного вищого навчального закладу
«Київський національний економічний
університет імені Вадима Гетьмана»

Гарантія відмінних знань

Видавництво КНЕУ, створене 1996 року, є провідним видавцем економічної літератури в Україні.

Видання КНЕУ — це книжки високої якості для студентів та викладачів вищих навчальних закладів, науковців та підприємців.

Видавництво вже випустило у світ понад 1000 найменувань підручників і посібників та регулярно забезпечує своїх читачів новими виданнями.

Якість понад усе

Літературу видавництва КНЕУ розроблено відповідно до затверджених Міністерством освіти і науки України навчальних програм та вимог Болонської декларації.

Процес випуску літератури видавництва включає повний цикл підготовки книжок — від розміщення заявки автором до отримання надрукованих примірників. Це гарантує актуальність матеріалів, адекватність їх сучасним умовам ведення бізнесу та перевірку на практиці.

Видання КНЕУ дають змогу комплексно забезпечити навчальний процес і науковий розвиток студентів, аспірантів та викладачів. Оптимальне поєднання теоретичних матеріалів з практичними прикладами робить видання корисними для працівників підприємств та підприємців.

Видавництво пропонує

- підручники
- навчальні посібники
- навчально-методичні посібники
- курси лекцій
- тренінгові технології
- монографії
- збірники наукових праць
- освітньо-кваліфікаційні характеристики
- освітньо-професійні програми

Основні напрями видань

Міжнародна економіка
Економіка підприємства
Статистика
Менеджмент. Маркетинг
Бухгалтерський облік. Аудит
Фінанси
Банківська справа. Інвестування
Економіка агробізнесу
Право
Точні науки
Суспільні та гуманітарні науки

Видавництво КНЕУ імені Вадима Гетьмана
04053, м. Київ, пл. Львівська, 14
тел.: (044) 537-61-44, e-mail: publish@kneu.kiev.ua
Реалізація книжок
ТОВ «Міжнародний інститут бізнес-освіти КНЕУ ім. В. Гетьмана»
Тел./факс: (044) 537-61-71, 537-61-77
e-mail:andrushko@icbe.com.ua
www.icbe.com.ua

ОПТОВИЙ ПРОДАЖ

Як придбати літературу

Замовити літературу

За телефоном: 8 (044) 537-61-71, 537-61-77, 238-63-19
Електронною поштою: andrushko@icbe.com.ua
Надіслати листа:
ТОВ «Міжнародний інститут бізнес-освіти КНЕУ ім. В. Гетьмана»
пл. Львівська, 14, м. Київ, Україна, 04053

Дані замовлення

Повна назва та абревіатура організації замовника	Автор
	Кількість примірників
Контактна особа	Телефон, факс
Повна назва книги	Поштова адреса з індексом

Перерахувати кошти

ТОВ «Міжнародний інститут бізнес-освіти КНЕУ ім. В. Гетьмана», р/р 260050398600, АБ «Брокбізнесбанк» м. Київ, МФО 300249, Код ЄДРПОУ 32961034.

Отримати літературу

В офісі ТОВ «Міжнародний інститут бізнес-освіти КНЕУ ім. В. Гетьмана», м. Київ, пл. Львівська, 14
Кур'єрською службою «МІБО КНЕУ» по м. Києву
Через службу «Київські відомості» по регіонах України

Пропонуємо гнучку систему знижок та вигідні умови співпраці.

Забезпечуємо щотижневе розсилання прайсів та інформації про нові надходження електронною поштою.

Роздрібний продаж літератури в Києві

- пл. Львівська, 14
- просп. Перемоги, 54/1
- вул. Мельникова, 79/81
- вул. Дегтярівська, 49 Г

- Книжковий магазин «Знання», вул. Хрещатик, 44, тел.: 234-22-91
- Книжковий магазин «Сяйво», вул. Червоноармійська, 6, тел.: 235-43-66
- Книжковий магазин «Урожай», просп. 40-річчя Жовтня, 128, тел.: 258-31-87
- Книжковий магазин «Академкнига», вул. Стрітенська, 17, тел.: 272-35-82

Видавництво КНЕУ імені Вадима Гетьмана
04053, м. Київ, пл. Львівська, 14
тел.: (044) 537-61-44, e-mail: publish@kneu.kiev.ua
Реалізація книжок
ТОВ «Міжнародний інститут бізнес-освіти КНЕУ ім. В.Гетьмана»
Тел./факс: (044) 537-61-71, 537-61-77
e-mail:andrushko@icbe.com.ua
www.icbe.com.ua

АРК
ВАТ «Кримкнига»
м. Сімферополь,вул. Горького, 5
тел.: (0652) 27-54-87
Книжковий магазин «Буква»
м. Сімферополь, вул. Севастопольська, 6
тел.: (0652) 27-31-53
м. Євпаторія, вул. Фрунзе, 42
тел.: (06569) 331-44
м. Ялта, вул. Гоголя, 24
тел.: (0654) 32-37-41
ВІННИЦЬКА ОБЛ.
Магазин «Кобзар»
м. Вінниця, вул. Привокзальна, 2/1
ВОЛИНСЬКА ОБЛ.
ТОВ «Знання»
м. Луцьк, пр. Волі, 41
тел./факс: (03322) 423-98
Книгарня «Дім книги»
м. Луцьк, вул. Конякіна, 37-а
тел./факс: (0332) 73-01-59
ДНІПРОПЕТРОВСЬКА ОБЛ.
Бібколектор обласний
м. Дніпропетровськ, вул. Кірова, 22
тел.: (056) 778-38-39-ф, 778-25-37
Магазин «Ера»
м. Кривий Ріг, вул. Косіора, 42
тел.: (0564) 712367
Книжковий магазин «Дар»
м. Кривий Ріг, вул. Пухачевського, 75
тел.: (0564) 66-41-88
тел./факс: (0564) 66-01-68
ДОНЕЦЬКА ОБЛ.
ПП Ярошенко Н. М.
м. Донецьк, вул. Артема, 84
(приміщення обласної бібліотеки
ім. Н. Крупської)
тел.: (062) 343-88-07
СПД Дротенко
м. Донецьк, вул. Артема, 160
Книжковий ринок, м.Донецьк,
торговий комплекс «Маяк», місце 113
тел./факс: (0622) 22-68-79

ЖИТОМИРСЬКА ОБЛ.
«Світ книги»
м. Житомир, вул. Київська, 17/1
тел.: (0412) 47-27-52
ЗАКАРПАТСЬКА ОБЛ.
Книгарня «Книги»
м. Ужгород, пр. Свободи, 3
тел. : (0312) 61-36-95
Книгарня «Кобзар»
м. Ужгород, пл. Корятовича, 1
тел. : (03122) 3-35-16
ТОВ «Букініст»
м. Ужгород, вул. Л. Толстого, 4
тел.: (03122) 3-72-18
ЗАПОРІЗЬКА ОБЛ.
ТОВ «ЛЕКТОС» ЛТД
м. Запоріжжя, пр. Леніна, 142
тел.: (0612) 13-85-53, (061) 220-09-96
ІВАНО-ФРАНКІВСЬКА ОБЛ.
Книгарня
м. Івано-Франківськ, пл. Ринок, 14
тел. : (03422) 2-47-82
ТОВ «Арка»
м. Івано-Франківськ, Вічевий майдан, 3
тел./факс: (0342) 50-14-02, (03422) 3-04-60
КІРОВОГРАДСЬКА ОБЛ.
«Книжковий світ»
м. Кіровоград, вул. Набережна, 11
ЛУГАНСЬКА ОБЛ.
Глобус-книга
м. Луганськ, вул Совецкая, 58
тел./факс : (0642) 53-62-30
ФОП Гречишкін С. І.
м. Луганськ, вул. Леніна, 149-а
тел./факс: (0642) 58-95-28, 59-63-37
ЛЬВІВСЬКА ОБЛ.
Книгарня «Глобус»
м. Львів, пл. Галицька, 12
тел.: (0322) 74-01-77
ДКП «Бібліотечний колектор»
м. Львів, вул. Лисенка, 21
тел./факс: (0322) 75-79-86
ТОВ «Ноти»
м. Львів, пр. Шевченка, 16
тел./факс: (0322) 72-67-96

МИКОЛАЇВСЬКА ОБЛ.
Книгарня «Книги»
м. Миколаїв, пр. Жовтневий, 338
тел.: (0512) 25-20-41
ТОВ «Ноу-Хау»
м. Миколаїв, вул. Фалєєвська, 35А
тел.: (0512) 47-47-97
Книгарня «Книголюб»
м. Миколаїв, пр. Миру, 3
тел.: (0512) 56-72-65
Книгарня «Світ книги»
м. Миколаїв, вул. Б. Морська, 51
тел.: (0512) 67-01-38
АІРП «Миколаїв книга»
м. Миколаїв, пр. Леніна, 122
тел.: (0512) 55-20-93
ОДЕСЬКА ОБЛ.
ПП Петров О. Є.
м. Одеса, вул. Гайдара, 66, кв. 99
тел./факс: (0482) 49-23-41;
(0482) 66-17-64
Книжковий магазин «Дім книги»
вул. Дерибасівська, 27
тел.: (048) 728-40-13
ПОЛТАВСЬКА ОБЛ.
«Планета»
м. Полтава, вул. Жовтнева, 60А
тел./факс: (05322) 72-019
Книжковий магазин «Роксолана»
м. Кременчук, вул. Перемоги, 26
тел./факс: (0536) 79-85-95, 3-20-64
РІВНЕНСЬКА ОБЛ.
ОККП «Рівнекнига»
м. Рівне, вул. Островського, 16
тел.: (0362) 22-41-05
СУМСЬКА ОБЛ.
ТОВ «Прометей»
м. Суми, вул. Інтернаціоналістів, 18
ТЕРНОПІЛЬСЬКА ОБЛ.
СМП «Карт-бланш»
вул. Дорошенка, 16
тел./факс: (0352) 43-55-44
ХАРКІВСЬКА ОБЛ.
АВІОНІКА-Харків
м. Харків, вул. Сумська, 51
тел.: (057) 714-26-75
ПП Антаков А. П.
Книжковий ринок «Райский уголок»
м. Харків, пр. Кравцова, 19, 2 ряд, 22 м.
тел.: (067) 390-62-82, 8(050) 594-5840
Книжковий парк «Центральний»
м. Харків, пл. Р. Люксембург, 10,
тел.: (057) 759-02-99, 754-33-01
ХЕРСОНСЬКА ОБЛ.
Магазин «Учбова книга»
м. Херсон, вул. Декабристів, 22
тел.: (0552) 26-22-10
вул. Кулика, 135, тел.: (0552) 55-54-01
Книгарня «Книжковий ряд»
м. Херсон, вул. Леніна, 14/16
тел.: (0552) 22-14-56
ХМЕЛЬНИЦЬКА ОБЛ.
ТОВ «Книжковий світ»
м. Хмельницький, вул. Подільська, 25
тел.: (0382) 65-60-73, 26-60-73
ХОП «Школяр»
м. Хмельницький, вул. Щербакова, 4
тел.: (03822) 3-03-90
ЧЕРКАСЬКА ОБЛ.
«Будинок книги»
вул. Хрещатик, 200
тел.: (0472) 45-99-20
ДТП«Світоч»
вул. Байди Вишневецького, 38
тел.: (0472) 32-92-78
Магазин «Інтелектуальної книги»
м. Черкаси, вул. Леніна, 31\1
тел.: (0472) 32-14-53
ЧЕРНІВЕЦЬКА ОБЛ.
«Чернівецький обласний бібколектор»
вул. Шептицького, 23
тел.: (0372) 52-62-10
КП «Чернівцікнига»
м. Чернівці, вул. Шептицького, 23
тел.: (0372) 52-23-13
КП «Технічна книга»
вул. О. Кобилянської, 45
тел.: (03722) 2-74-96, факс: 2-71-64
ЧЕРНІГІВСЬКА ОБЛ.
КТП «Будинок книги»
м. Чернігів, пр. Миру, 45

Тип книги	Назва	Автор	Кількість сторінок	Рік видання
ЕКОНОМІКА				
НП	Економіка праці	Завіновська Г. О.	304	2007
НП	Економіка державного сектора	Малий І.Й., Галубарда М.К.	280	2007
НП	Політична економія	Кривенко К.Т., Савчук В.С., Бєляєв О.О.	512	2008
П	Страхові послуги	Осадець С.С.	464	2007
МІЖНАРОДНА ЕКОНОМІКА				
М	Управління міжнародною конкурентоспроможністю в умовах глобалізації економічного розвитку. Т.1. У 2-х томах	Лук'яненко Д.Г., Поручник А.М. та ін.	816	2006
М	Управління міжнародною конкурентоспроможністю в умовах глобалізації економічного розвитку. Т.2. У 2-х томах	Лук'яненко Д.Г., Поручник А.М. та ін.	592	2006
НМП	Міжнародна інвестиційна діяльність	Руденко Л.В. та ін.	168	2008
НМП	Міжнародний менеджмент	Панченко Є.Г.	468	2007
ЕКОНОМІКА ПІДПРИЄМСТВ, ЕКОНОМІЧНИЙ АНАЛІЗ				
НП	Бізнес-діагностика підприємства	Швиданенко Г. О. та ін.	344	2007
М	Управління підприємствами: сучасні тенденції розвитку	Гончарова Н.П. та ін.	288	2006
НП	Бізнес-тренінги для економістів	Бутенко Н.Ю. та ін.	306	2007
НП	Антикризове управління підприємством	Шершньова З. Є.	680	2007
М	Інноваційне підприємництво у трансформаційній економіці України	Павленко І. А.	248	2007
НП	Потенціал підприємства	Федонін О.С., Рєпіна І.М., Олексюк О.І.	316	2007
НП	Управління конкурентоспроможністю підприємства	Клименко С.М. та ін.	520	2008
НП	Управління капіталом підприємства	Швиданенко Г.О. та ін.	440	2007
ЕКОНОМІКА АГРОБІЗНЕСУ				
М	Капіталізація сільського господарства: стан та економічне регулювання розвитку	Андрійчук В.Г.	216	2007
ДЕРЖАВНЕ УПРАВЛІННЯ				
НП	Державне регулювання економіки	Чистов С. М. та ін.	440	2006
НМП	Ціни та цінова політика	Тормоса Ю.Г.	92	2006
П	Макроекономіка	Савченко А. Г	448	2007
НМП	Макроекономіка	Савченко А.Г., Євдокімова Д.	256	2008
МЕНЕДЖМЕНТ				
НМП	Управління якістю	Вакуленко А.В.	167	2006
НМП	Операційний менеджмент.	Задорожна Н. В., Омельяненко Т.В.	236	2006
НП	Збірник ситуаційних вправ з дисциплін управлінського спрямування	Вакуленко А. В. та ін.	200	2006
НП	Менеджмент персоналу	Данюк В. М., Петюх В. М.	398	2006
НП	Організація праці менеджера	Данюк В.М	276	2006

Тип книги	Назва	Автор	Кількість сторінок	Рік видання
УПРАВЛІННЯ ПЕРСОНАЛОМ				
НМП	Ринок праці	Васильченко В. С., Петюх В.М., Щетіна Л.В.	228	2006
П	Мотивація персоналу	Колот А. М.	337	2006
НМП	Інформаційні системи в управлінні персоналом та економіки праці	Писаревська Т. А. та ін.	284	2006
НМП	Управління персоналом	Петюх В.М. та ін	320	2006
МАРКЕТИНГ				
НП	Маркетинг послуг	Мальченко В.М.	360	2007
НМП	Інфраструктура товарного ринку	Савощенко А.С., Полонець В.М.	376	2007
П	Маркетингові дослідження	Войчак А.В., Федорченко А.В.	408	2007
П	Логістика	Кальченко А. Г.	284	2007
НП	Рекламний креатив	Примак Т. О.	328	2006
НМП	Інфраструктура товарного ринку	Савощенко А.С., Полонець В.М.	376	2007
ФІНАНСИ				
НП	Фінансовий менеджмент у малому бізнесі	Буряк Л.Д	432	2007
НМП	Фінансовий ринок	Суторміна В. М. та ін.	176	2008
НМП	Фінанси	Романенко О.Р., Огородник С.Я., Зязюн М.С.	388	2007
НП	Фінанси страхових організацій	Гаманкова О. О.	328	2007
НП	Фінанси	Опарін В. М.	240	2007
П	Страхування	Осадець С.С.	604	2006
П	Фінанси підприємств	Поддєрьогін А. М. та ін	552	2007
БАНКІВСЬКА СПРАВА, ІНВЕСТИЦІЇ				
П	Фінансовий та управлінський облік у банках	Кіндрацька Л.М.	816	2008
НП	Управління банківськими ризиками	Примостка Л.О.	600	2007
НП	Маркетинг у банку	Нікітін А. В., Бортніков Г.П., Федорченко А.В.	432	2006
НМ	Збірник задач з аналізу банківської діяльності	Герасимович А.М.	504	2006
НМП	Грошово-кредитні системи зарубіжних країн	Шамова І.В.	160	2007
НП	Аналіз фінансово-господарської діяльності бюджетних установ	Болюх М. А.	344	2008
П	Аналіз банківської діяльності	Герасимович А.М.	600	2006
П	Гроші та кредит	Савлук М.І. та ін.	744	2008
НП	Ситуаційне моделювання банківської справи	Нікітін А.В.	152	2006
БУХГАЛТЕРСЬКИЙ ОБЛІК, АУДИТ				
НП	Організація та методика аудиту підприємницької діяльності	Петрик О.А., Савченко В.Я.	472	2008
НП	Управлінський облік	Добровський В.М., Гнилицька Л.В. та ін.	278	2008
НП	Аудит	Савченко В.Я.	328	2006
НП	Облік діяльності суб’єктів малого підприємництва	Свідерський Д.Є., Свідерський Є.І.	472	2008
НП	Бухгалтерський облік для економістів і правознавців	Кузьмінський Ю.А	648	2007
НП	Збірник задач з курсу «Звітність бюджетних установ»	Ткаченко І.Т.	232	2007
НП	Фінансовий облік	Бабич В. В., Сагова С. В.	288	2007

Тип книги	Назва	Автор	Кількість сторінок	Рік видання
НП	Бухгалтерський облік в управлінні підприємством	Сопко В. В.	526	2006
М	Бухгалтерський облік в бюджетних установах: методологія та організація	Свірко С. В.	244	2006
П	Облік і аудит в банках	Герасимович А.М.	536	2006
П	Облік міжнародних операцій	Кузьмінський Ю.А., Козак В.Г., та ін.	336	2006
М	Облік фінансових інвестицій: методологія та проблеми міжнародної уніфікації	Лук'яненко Л.І., Небильцова О.В., Коршикова Р.С.	172	2006
НП	Організація бухгалтерського обліку в бюджетних установах	Свірко С. В.	380	2006
М	Оцінка в бухгалтерському обліку	Ловінська Л. Г.	256	2006
НП	Податковий облік і звітність	Коцупатрий М.М. та ін.	312	2006
ПРАВО				
НП	Основи правознавства	Опришко В.Ф.	232	2007
НП	Земельне право	Мачуська І.Б.	280	2007
НМП	Міжнародне право	Фастовець А. С.	240	2007
НМП	Митне право	Діхтієвський П.В., Шаповалов Д.В.	160	2008
НП	Правові основи місцевого самоврядування	Куколевська Ж. Д.	166	2006
НП	Судово-бухгалтерська експертиза	Мумінова-Савіна Г. Г.	204	2006
М	Теоретичні і практичні проблеми правового забезпечення соціально-економічного та політичного розвитку суспільства і держави	Опришко В.Ф., Шульженко Ф.П., Гайдулін О.О. та ін.	702	2006
М	Уголовно-правовые проблемы трансплантации органов и тканей человека и донорства крови в Украине	Чеботарьова Г. В.	180	2006
НП	Цивільне і торгове право зарубіжних країн	Шимон С.І.	240	2006
ВИЩА МАТЕМАТИКА, ІНФОРМАТИКА, ІНФОРМАЦІЙНІ СИСТЕМИ І ТЕХНОЛОГІЇ				
НП	Інженерна та комп'ютерна графіка	Сидоренко В.М.	336	2007
НП	Інтелектуальний аналіз даних	Ситник В.Ф., Краснюк М.Т.	376	2007
НМП	Інформаційні системи і технології в статистиці	Орленко Н. С.	288	2008
НМП	Інформаційні системи і технології на підприємстві	Гужва В.М.	368	2008
НП	Проектування автоматизованих інформаційних систем	Кравченко В.Г.	360	2008
НП	Ризикологія в зовнішньоекономічній діяльності	Вітлінський В.В., Маханець Л.Л.	432	2008
НП	Теорія ймовірності і математична статистика. У 2 ч. Ч.1. 2-ге вид. без змін	Жлуктенко В. І., Наконечний С.І.	304	2007
НП	Теорія ймовірності і математична статистика. У 2 ч. Ч.2. 2-ге вид. без змін	Жлуктенко В.І., Наконечний С.І.	368	2007
СТАТИСТИКА				
НП	Статистика: структурно-логічні схеми та задачі	Єріна А.М., Захожай В.Б., Манцуров І.Г. та ін.	304	2007
СУСПІЛЬНІ ТА ГУМАНІТАРНІ НАУКИ				
НП	Етика. Естетика	Волошко І. Є. та ін.	152	2007
НП	Історія української суспільно-політичної думки	Морозов В.В.	180	2006
НП	Історія економіка та економічних учень	Проскурін П.В,	372	2007
НМП	Історія держави і права зарубіжних країн	Шульженко Ф.П, Гайдулін О.О., Перепадя О.В.	192	2007