Кафедра фізики та методики викладання

Назва дисципліни – Основи векторного і тензорного аналізу

Викладач: Поплавській Омелян Павлович

1. М.А. Разумова, В. М. Хотяїнцев. Основи векторного і тензорного аналізу. К.: Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2011. – 216 с. – Розділ 1.
2. Нікулін О. В., Наконечна Т.В. Основи векторного та тензорного числення: теоретичні відомості та тести. Дніпропетровськ: Біла К. О., 2011р. – 72 с. Параграф 1-10, 15-16.
3. С.М. Гребенюк, Ю.М. Стреляєв, М.І. Клименко. Тензорний аналіз. – Запоріжжя: ЗНУ, 2015. – 90 с. – Розділ 2.

Розділ 1
Векторна алгебра

§ 1. Означення вектора та основні операції над векторами у безкоординатному підході

1.1 Означення вектора

Існує два основні підходи або два способи представлення векторів та операцій над ними – координатний та безкоординатний. Вектор a зазвичай позначають як $\vec{a}$.

Означення 1. Вектором у E_3 називається величина, яка характеризується: 1) невід'ємним числом (так званим модулем або абсолютним значенням), що визначає її у певних одиницях міри; 2) напрямком у просторі; 3) підкоряється певним правилам геометричного додавання (правилу паралелограма) та множення на число[1].

Отже, перший спосіб задання вектора $\vec{a}$ – через модуль $a = |\vec{a}|$ і напрямок. Якщо $\vec{e}$ – одиничний вектор ($|\vec{e}| = 1$), що задає напрям вектора $\vec{a}$, то $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\vec{a} = a\vec{e}, \qquad \vec{e} = \frac{\vec{a}}{a}.$$

Вектори є однаковими, якщо їх модулі та напрямки збігаються. Запис $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{a} = 0$ означає, що модуль $|\vec{a}| = 0$ і напрямок вектора невизначений.

Природа векторів (фізичних векторних величин) може бути різною. Прикладом найпростішого вектора є так званий геометричний вектор – напрямлений відрізок.

---

[1]Згадані правила додавання і множення векторів на число підкоряються аксіомам лінійного векторного простору (див. Вступ).

Довільний вектор – це не обов'язково напрямлений відрізок, але кожному вектору можна *поставити у відповідність* деякий напрямлений відрізок, який має напрямок розглядуваного вектора і довжину, що дорівнює числовому значенню його модуля (у певному масштабі). Це зручний спосіб зображення вектора. При цьому операціям із векторами відповідатимуть операції із відповідними напрямленими відрізками. Таким чином, в основі поняття вектора або векторної величини лежить поняття *геометричного вектора,* яке належить до основних понять простору. Саме з них зазвичай починають знайомство з векторами у школі та в курсі аналітичної геометрії.

Звідси випливає інше означення вектора.

Означення 2. Векторна фізична величина – це фізична величина, кожному значенню якої можна поставити у відповідність геометричний вектор так, щоб операціям із цими фізичними величинами відповідали операції із відповідними геометричними векторами.

Ідея векторного числення полягає у тому, щоб установити таку відповідність та геометризувати фізичне мислення: різної природи фізичним векторним величинам поставити у відповідність напрямлені відрізки і виконувати операції із ними наочно і за універсальними правилами.

Прикладом відмінного від напрямленого відрізка об'єкта геометричної природи, який можна розглядати як вектор, є векторний елемент площі – частина площини, обмежена контуром, на якому задано додатний напрямок обходу (форма контуру значення не має). Елемент площі зобразимо вектором, довжина якого дорівнює площі S, яка обмежена контуром, а напрямок збігається з напрямком додатної нормалі до площини. При цьому, за домовленістю, додатною вважається нормаль, із вістря якої обхід контуру в додатному напрямку виглядає як такий, що здійснюється проти руху годинникової стрілки[2]. Позначимо вектор, що зображає елемент площі, через $\vec{S} = S\,\vec{n}$, де $\vec{n}$ – одиничний вектор

[2]Такий вибір додатної нормалі відповідає також так званому правилу гвинта: гвинт (із правою різьбою), вісь якого перпендикулярна до площини, обертаючись у напрямку обходу контуру, поступально рухається в напрямку додатної нормалі.

у напрямку додатної нормалі (рис. 1.1). Виконання правила додавання векторів (третій пункт означення 1) для елементів площі забезпечує така теорема.

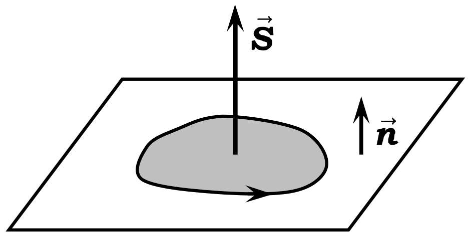


Рис. 1.1. Векторний елемент площі

Векторна сума елементів площі для замкненої поверхні (тобто вектор замкненої поверхні) дорівнює нулю.

Цю теорему достатньо довести для тетраедра (приклад 1 із п. 1.2), оскільки довільний багатогранник можна розбити на ряд тетраедрів. Застосувавши теорему до кожного із тетраедрів, а потім додавши результати, отримаємо: сума векторів усіх граней багатогранника плюс сума всіх векторів додаткових граней, які утворилися у результаті розбиття багатогранника на тетраедри, дорівнює нулю. Але оскільки кожна додаткова грань одночасно є гранню для двох тетраедрів, причому для першого тетраедра за зовнішню нормаль до неї ми повинні прийняти один напрямок нормалі, а для другого – протилежний напрямок, то сума векторів, кожен з яких відповідає додатковій грані, дорівнює нулю. І як результат, сума векторів усіх граней багатогранника, що власне і є вектором замкненого багатогранника, дорівнює нулю.

Оскільки у поверхню довільної форми можна вписати ряд нескінченно малих багатогранників із гранями, площі яких прямують до нуля, то для вектора її поверхні в результаті граничного переходу теж отримаємо нуль.

Уточнимо, що векторний елемент площі є псевдовектором (див. розд. 5, § 1).

1.2. Основні операції над векторами у безкоординатному підході та їх властивості

1. *Сума векторів* $\vec{a}+\vec{b}$ (рис. 1.2) знаходиться за правилом паралелограма (паралельним перенесенням до кінця першого вектора треба прикласти початок другого і з'єднати початок першого із кінцем другого). Правило паралелограма для геометричної суми векторів обмежує множину величин, що характеризуються напрямком, які можна назвати векторами.

Наприклад, поворот твердого тіла навколо будь-якої осі на скінченний кут, здавалося б, можна задати напрямленим відрізком, але це не буде вектор, тому що два послідовні повороти навколо різних осей складаються не за правилом паралелограма, а за більш складним правилом. При цьому результат поворотів залежить від послідовності їх виконання, у той час як при додаванні векторів $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$. Така відмінність пояснюється тим, що обертання твердого тіла на скінченний кут описується певною матрицею. Зазначимо, що нескінченно малі повороти можна представляти векторами, тому що для них правило паралелограма справедливе.

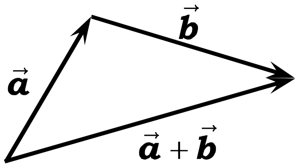


Рис. 1.2. Сума векторів

2. *Добуток вектора на дійсне число* $c\vec{a}$ – це вектор, що має напрямок $\vec{a}$, якщо $c>0$, і протилежний напрямок, якщо $c<0$, та $|c\vec{a}|=|c||\vec{a}|$.

3. *Проекція вектора на вісь* $\vec{u}$: $a_u = a\cos\alpha$ – це довжина відрізка (рис. 1.3), що відсікається на осі перпендикулярними до неї площинами, проведеними через кінці вектора $\vec{a}$, взята зі знаком "+" або "–", якщо напрямок вектора $\vec{a}_u$ (рис. 1.3) збігається з $\vec{u}$ або протилежний до $\vec{u}$, відповідно. Тут α – кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{u}$, $0 \le \alpha \le \pi$.

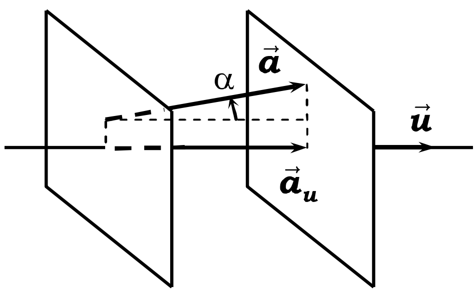


Рис. 1.3 до визначення проекції вектора на вісь

4. *Скалярний добуток* $\vec{a}\cdot\vec{b}$ є числом, вирахуваним за формулою

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha = a_b b = a b_a .$$

Тут $a_b = a\cos\alpha$, $b_a = b\cos\alpha$ – проекції векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ на напрямок іншого (рис. 1.4). Якщо вектор $\vec{u}$ – одиничний, то $\vec{a}\cdot\vec{u} = a_u$. У фізиці скалярний добуток векторів, наприклад, визначає роботу сили, потік вектора через поверхню тощо.

Основні властивості скалярного добутку[3]:

1) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) $\vec{a}\cdot\vec{a}=\left|\vec{a}\right|^2=a^2$;

3) $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$, якщо $\vec{a}=0$ або $\vec{b}=0$, або вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ перпендикулярні (ортогональні);

4) $\sum\limits_{i=1}^{p}\vec{a}_i\cdot\sum\limits_{j=1}^{r}\vec{b}_j=\sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{r}\vec{a}_i\cdot\vec{b}_j$;

5) $(m\vec{a}\cdot n\vec{b})=mn(\vec{a}\cdot\vec{b})=n(\vec{a}\cdot m\vec{b})=m(n\vec{a}\cdot\vec{b})$.

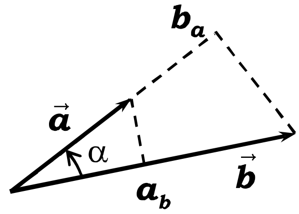


Рис. 1.4. Проекція одного вектора на напрямок іншого

Необхідною і достатньою умовою **ортогональності** ненульових векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є рівність нулю їх скалярного добутку $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

5. *Векторний добуток* $\vec{a}\times\vec{b}$ – це вектор, який дорівнює векторному елементу площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (рис. 1.5). Векторний добуток є перпендикулярним площині векторів-співмножників і утворює з $\vec{a}$, $\vec{b}$ так звану праву[4] трійку векторів. Його модуль дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ та $\vec{b}$, тобто $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\alpha$. Тут α – найменший кут між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, $0\le\alpha\le\pi$. Використовуватимемо для векторного добутку векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ позначення: $\vec{a}\times\vec{b}$, хоча в літературі зустрічаються й інші позначення, зокрема, $[\vec{a}\times\vec{b}]$, $[\vec{a},\vec{b}]$, $(\vec{a}\times\vec{b})$.

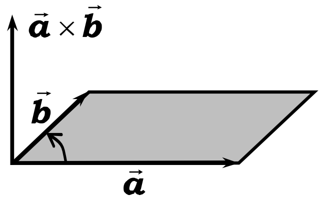


Рис. 1.5. Векторний добуток

Приклади векторних добутків: момент сили є добутком радіус-вектора точки її прикладання на вектор-силу $\vec{N}=\vec{r}\times\vec{F}$, лі-

[3]У літературі для скалярного добутку векторів використовується також позначення $(\vec{a}\cdot\vec{b})$ або $(\vec{a},\vec{b})$.

[4]Для правої (лівої) трійки векторів $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ поворот від $\vec{e}_1$ до $\vec{e}_2$ на менший кут ($\le\pi$) здійснюється проти годинникової стрілки (за годинниковою стрілкою), якщо дивитись із кінця вектора $\vec{e}_3$.

нійна швидкість точки тіла, що обертається, є векторним добутком кутової швидкості на радіус-вектор точки відносно нерухомого полюса $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Основні властивості векторного добутку:

1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$;

3) $\vec{a} \times \vec{b} = 0$, якщо $\vec{a} = 0$ або $\vec{b} = 0$, або вектори $\vec{a}$ та $\vec{b}$ колінеарні;

4) $\sum\limits_{i=1}^{p} \vec{a}_i \times \sum\limits_{j=1}^{r} \vec{b}_j = \sum\limits_{i=1}^{p} \sum\limits_{j=1}^{r} \vec{a}_i \times \vec{b}_j$;

5) $m\vec{a} \times n\vec{b} = mn(\vec{a} \times \vec{b}) = n(\vec{a} \times m\vec{b}) = m(n\vec{a} \times \vec{b})$.

Необхідною і достатньою умовою **колінеарності** відмінних від нуля векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$ є рівність нулю їх векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b} = 0$.

Приклад 1. Нехай у тетраедрі із площами граней s_1, s_2, s_3, s_4 проведено чотири вектори $\vec{S}_1$, $\vec{S}_2$, $\vec{S}_3$, $\vec{S}_4$ у напрямку зовнішніх нормалей до граней. Довжини векторів відповідно дорівнюють площам граней $\left|\vec{S}_i\right| = s_i$. Показати, що $\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4 = 0$, тобто векторна сума елементів площі для поверхні тетраедра дорівнює нулю.

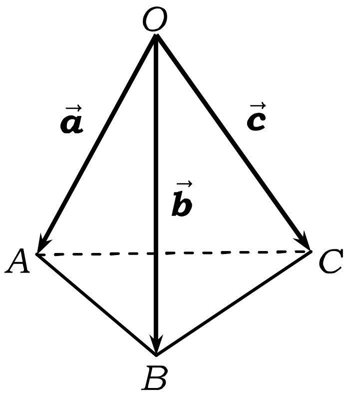


Рис. 1.6
до прикладу 1

Розв'язання. Із вершини тетраедра проведемо три допоміжні вектори (рис. 1.6). Векторні елементи площі виражаються через відповідні векторні добутки: для бічних граней $\vec{S}_1 = \vec{a} \times \vec{b}/2$, $\vec{S}_2 = \vec{b} \times \vec{c}/2$, $\vec{S}_3 = \vec{c} \times \vec{a}/2$; для трикутника ABC $\vec{S}_4 = (\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a})/2$. Тоді

$$2(\vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 + \vec{S}_4) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} + (\vec{c} - \vec{a}) \times (\vec{b} - \vec{a}) = 0 .$$

6. *Мішаний добуток* $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}$ і має такий геометричний зміст: він дорівнює об'єму паралелепіпеда (рис. 1.7), побудованого на векторах $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, узятому зі знаком "+", якщо $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів, та зі знаком "–", якщо ліву. Коли під знаком мішаного добутку зустрічаються два однакові вектори, то такий мішаний добуток дорівнює нулю (неможливо побудувати паралелепіпед на двох векторах).

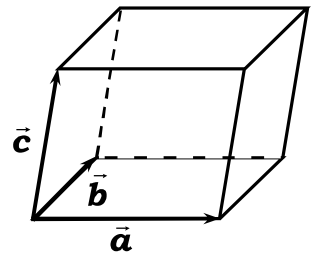


Рис. 1.7.
Мішаний добуток

Основні властивості мішаного добутку:

1) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = (\vec{b},\vec{c},\vec{a}) = (\vec{c},\vec{a},\vec{b})$;

2) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = -(\vec{c},\vec{b},\vec{a}) = -(\vec{a},\vec{c},\vec{b}) = -(\vec{b},\vec{a},\vec{c})$;

3) $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$, якщо $\vec{a} = \vec{0}$ або $\vec{b} = \vec{0}$, або $\vec{c} = \vec{0}$, або вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – компланарні, тобто лежать у паралельних площинах;

4) $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{d},\vec{b},\vec{c}) = \alpha(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) + \beta(\vec{d},\vec{b},\vec{c})$;

5) $(m\vec{a},n\vec{b},\vec{c}) = mn(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = n(\vec{a},m\vec{b},\vec{c}) = m(n\vec{a},\vec{b},\vec{c})$;

6) $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$, тобто в мішаному добутку можна міняти місцями знаки скалярного та векторного множення.

Необхідною та достатньою умовою **компланарності** трійки відмінних від нуля векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ та $\vec{c}$ є рівність нулю їх мішаного добутку $(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) = 0$.

7. *Подвійний векторний добуток* $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ – це вектор, який, з одного боку, є перпендикулярним до $\vec{a}$, а з іншого, є перпендикулярним до $\vec{b}\times\vec{c}$, тобто до нормалі площини, яка визначається векторами $\vec{b}$ та $\vec{c}$. Він є компланарним до векторів $\vec{b}$ і $\vec{c}$.

Оскільки вектор $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ перпендикулярний до $\vec{a}$ і лежить у площині векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$, то його можна розкласти за цими векторами так, що

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = n\vec{b} + m\vec{c}, \qquad (1.1)$$

де m, n – скалярні величини, які знайдемо далі.

Для знаходження m, помножимо (1.1) скалярно на вектор $\vec{b}'$ (рис. 1.8), який є перпендикулярним до $\vec{b}$ ($\vec{b}\cdot\vec{b}'=0$) і лежить у площині векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$ (вектор $\vec{c}$ – поміж векторами $\vec{b}$, $\vec{b}'$) так, що $\vec{b}$, $\vec{b}'$ та $\vec{b}\times\vec{c}$ утворюють праву трійку векторів. Тоді

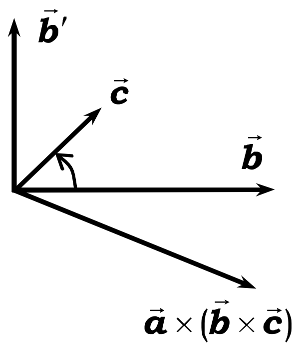


Рис. 1.8. Подвійний векторний добуток лежить у площині векторів $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$\vec{b}'\cdot(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))=m(\vec{b}'\cdot\vec{c})\,. \qquad (1.2)$$

Використаємо циклічну перестановку у мішаному добутку:

$$\vec{b}'\cdot(\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}))=\vec{a}\cdot((\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}') \qquad (1.3)$$

і безпосередньо обчислимо $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}'$.

Векторний добуток $\vec{b}\times\vec{c}$ перпендикулярний до площини, у якій лежить вектор $\vec{b}'$, а його довжина дорівнює $\left|\vec{b}\times\vec{c}\right|=bc\sin(\vec{b},\vec{c})$, тому

$$\left|(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}'\right|=bcb'\sin(\vec{b},\vec{c})\;=bcb'\cos(\vec{b}',\vec{c})=b(\vec{b}'\cdot\vec{c})$$

(оскільки $\vec{b}'$ та $\vec{b}$ – перпендикулярні, то $\sin(\vec{b},\vec{c})=\cos(\vec{b}',\vec{c})$), а

$$(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}'=-\vec{b}(\vec{b}',\vec{c}) \qquad (1.4)$$

(напрямок вектора $(\vec{b}\times\vec{c})\times\vec{b}'$ протилежний до напрямку вектора $\vec{b}$, оскільки вектори $\vec{b}$, $\vec{b}'$ та $\vec{b}\times\vec{c}$ за домовленістю утворюють праву трійку векторів). Із (1.2) з урахуванням (1.3), (1.4) знаходимо, що

$$m=-(\vec{a}\cdot\vec{b})\,. \qquad (1.5)$$

Щоб знайти n, перепишемо формулу (1.1) у вигляді

$$\vec{a}\times(\vec{c}\times\vec{b})=-m\vec{c}-n\vec{b}\,. \qquad (1.6)$$

Порівнюючи (1.6) із (1.1) та застосовуючи щойно знайдений результат (1.5), зразу отримуємо

$$n=(\vec{a}\cdot\vec{c})\,, \qquad (1.7)$$

так, що кінцева формула має вигляд

$$\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})=\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)-\vec{c}(\vec{a}\cdot\vec{b})\,. \qquad (1.8)$$

Ця формула залишається справедливою і при колінеарності векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$, коли права та ліва частини обертаються на нуль. Зазначимо, що у подвійному векторному добутку порядок множення є принциповим. Наприклад, обчислюючи $(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c}$, отримаємо зовсім інший вектор

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{c} = -\vec{c}\times(\vec{a}\times\vec{b}) = \vec{b}(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{a}(\vec{c}\cdot\vec{b}),$$

такий, який лежить у площині векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, на відміну від вектора $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$, що знаходиться у площині векторів $\vec{b}$ та $\vec{c}$.

Сформулюємо для запам'ятовування правило розкриття подвійного векторного добутку словами: *перший вектор внутрішнього векторного добутку множимо на скалярний добуток тих векторів, що залишились, і віднімаємо другий вектор внутрішнього векторного добутку, помножений на скалярний добуток тих векторів, що залишились.*

Формула (1.8) легко виводиться у координатному підході.

1.3. Розкладання вектора на поздовжню та поперечну складові відносно виділеного напрямку

Основним методом роботи з векторами є розкладання векторів на складові. Вибір складових має приводити до спрощення розв'язування задачі. Якщо у розглядуваній задачі є виділені напрямки, зручно складові вибирати паралельними до цих напрямків. Найпростіший варіант такого розкладання виникає тоді, коли в задачі є лише один виділений напрямок.

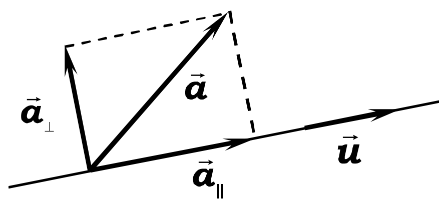


Рис. 1.9. Розкладання вектора на поздовжню та поперечну складові

Розкладання вектора на поздовжню та поперечну складові відносно виділеного напрямку, який задається одиничним вектором $\vec{u}$, виконується за формулою

$$\vec{a} = \vec{a}_{||} + \vec{a}_{\perp}.$$

Поздовжня складова вектора $\vec{a}$ – вектор $\vec{a}_{||}$ – напрямлений паралельно до $\vec{u}$, а його проекція (див. п. 1.2, операції 3, 4) визначається скалярним добутком $\vec{a}$ та $\vec{u}$, тому

$$\vec{a}_{\parallel} = (\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u} .$$

Поперечна складова вектора

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} = \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{u})\vec{u} = \vec{a}(\vec{u} \cdot \vec{u}) - \vec{u}(\vec{a} \cdot \vec{u}) .$$

Вираз праворуч є розкритим подвійним векторним добутком, тобто його можна переписати у вигляді

$$\vec{a}_{\perp} = \vec{u} \times (\vec{a} \times \vec{u}) .$$

Таким чином, довільний вектор у тривимірному просторі можна представити у вигляді такого розкладу:

$$\vec{a} = \vec{a}_{\parallel} + \vec{a}_{\perp} = \vec{u}(\vec{a} \cdot \vec{u}) + \vec{u} \times (\vec{a} \times \vec{u}), \quad |\vec{u}| = 1. \qquad (1.9)$$

Координатний (див. § 2) і безкоординатний підходи є взаємно доповнювальними. Переваги безкоординатного підходу полягають у тому, що *безкоординатна форма* задання та виконання операцій із векторами є більш компактною та наочною. Вона безпосередньо відображає зміст векторних величин та співвідношень між ними як інваріантних, тобто таких, що не залежать від конкретного вибору систем координат. До них належать, наприклад, такі:

$m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}$ – рівняння руху зарядженої частинки в електричному $\vec{E}$ та магнітному полях $\vec{B}$,

$(\vec{r} \cdot \vec{n}) = \alpha$ – рівняння площини, що перпендикулярна до одиничного вектора $\vec{n}$ і проходить на відстані α від початку координат.

Застосування координатного методу дозволяє вивчати геометричні об'єкти не безпосередньо, а досить розвиненими методами алгебри (в аналітичній геометрії) та аналізу (у диференціальній геометрії). Цим шляхом удається досить легко отримати ряд результатів, безпосереднє доведення яких у загальному випадку неможливе або надто громіздке. Однак у координатному методі кожний вектор задається своїми координатами, які залежать уже не тільки від самого вектора, але й від розглядуваної координатної системи (див. п. 2.4). Можна сказати, що вони є зображенням вектора у цій системі координат. Координатний метод дозволяє також вивчати більш складні об'єкти – *тензори*, які є узагальненням поняття вектора.

Властивості геометричних або фізичних об'єктів, що не залежать від вибору системи координат, у якій ці об'єкти вивчаються, називаються їх *інваріантними властивостями*. Саме такі властивості і є цікавими для вивчення. Основне завдання векторного та тензорного числення і полягає у тому, щоб навчитися відокремлювати результати, що відносяться до самих об'єктів, від тих, які привнесено вибором системи координат.

§ 2. Координатний метод

2.1. Координатний підхід

Координатний підхід вимагає використання певної системи координат, яка задається початком відліку та базисними векторами. На першому етапі (розділи 1–3) обмежимося лише прямолінійними декартовими (прямокутними) системами координат (ПДСК).

Зауважимо, що у векторному і тензорному численні широко застосовуються індексні позначення, тобто величини з індексами, верхніми та нижніми. У ПДСК немає необхідності розрізняти верхні та нижні індекси, тому використовуємо тільки нижні.

Згідно з аксіомою розмірності у тривимірному просторі існує рівно три лінійно незалежні вектори. Виберемо їх одиничними та ортогональними:

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}, \tag{1.10}$$

де $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ – символ Кро́некера, корисне позначення, яке ввів у 1866 р. німецький математик Л. Кро́некер (1823–1891). Вектори $\vec{e}_i$ ($i = 1,2,3$ або $i = x, y, z$) називаються **ортами** системи координат і утворюють базис або репер. Вони ж задають напрямки осей ПДСК: Ox_1, Ox_2, Ox_3 (або Ox, Oy, Oz). Зауважимо, що у випадку декартової системи координат існує кілька способів позначення векторів базису. Вибір позначень мотивується зручністю використання у конкретній задачі $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\} \equiv \{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z\} \equiv \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$. Початок відліку – точка O, у якій перетинаються осі ПДСК, має значення лише для визначення радіус-вектора та декартових координат точки x_1, x_2, x_3 (або x, y, z). Оскільки всякий четвертий вектор $\vec{a}$ є лінійно залежним від $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, то довільний вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді розкладу за цим базисом[5]:

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3. \qquad (1.11)$$

Числа a_1, a_2, a_3 називають **координатами** вектора $\vec{a}$ у даній системі координат, а вектори $a_1\vec{e}_1$, $a_2\vec{e}_2$, $a_3\vec{e}_3$ – його **складовими** вздовж координатних осей. Зауважимо, що для векторів термін **компоненти** вживають також як синонім слова координати. Помножимо (1.11) скалярно на $\vec{e}_1$ і одержимо

$$\vec{a} \cdot \vec{e}_1 = a_1, \qquad (1.12)$$

де $a_1 = a\cos\alpha_1$ – проекція вектора $\vec{a}$ на вісь (Ox_1). Тобто компоненти вектора у ПДСК – це проекції на осі. Отже, із формул (1.11), (1.12) випливає, що у конкретній ПДСК вектор може бути повністю заданим набором своїх координат і, навпаки, набір координат у конкретній ПДСК повністю визначає вектор. Звичайно це записують як $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ або $\vec{a}(a_1, a_2, a_3)$, що є одне й те саме. Зауважимо, що перший запис не слід розуміти як тотожність лівої та правої частин, а лише як взаємно однозначну відповідність між вектором і набором його координат. Подібні записи читають так: "вектор $\vec{a}$ з набором координат a_1, a_2, a_3". Детальніше про це сказано у п. 2.5. В евклідовому просторі, вибравши певну точку O за початок відліку, можна кожній точці простору поставити у відповідність її радіус-вектор $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$. Тут x_1, x_2, x_3 – декартові координати точки у цій системі координат, для яких зазвичай використовують позначення x, y, z. Зауважимо, що у ПДСК індексами, які позначають компоненти вектора, можуть бути не цифри, а відповідні осям маленькі латинські букви: $\vec{a}(a_x, a_y, a_z)$.

---

[5]Термін "базис" є загальним для всіх лінійних просторів. Вважають, що множина векторів (базисних векторів) у цьому лінійному векторному просторі утворює базис, якщо довільний вектор із такого простору можна подати у вигляді лінійної комбінації базисних векторів. У нескінченновимірних та функціональних просторах лінійна комбінація заміняється рядом.

2.2. Правила запису індексних виразів. Вільні та німі індекси

Надалі приймемо таку угоду про підсумовування. *Якщо один і той самий латинський індекс під знаком суми зустрічається двічі, то знак суми опускаємо.* Наприклад:

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{e}_i \equiv a_i \vec{e}_i\,, \quad \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ii} \equiv \varepsilon_{ii}\,,$$

де n – розмірність простору. Якщо індекси, що повторюються, позначені грецькими літерами, то за умовчуванням (за відсутності знака суми) підсумовування немає.

Індекс, за яким здійснюється підсумовування, називається **німим індексом**. Назва "німий" тут означає буквально "той, що нічого не говорить". Тобто німий індекс не несе ніякої інформації. Він лише вказує, за якою саме парою індексів здійснюється підсумовування. Букву, котрою він позначається в цій парі індексів, можна замінити іншою:

$$a_i \vec{e}_i \equiv a_k \vec{e}_k \equiv a_j \vec{e}_j\,.$$

Індекс, який зустрічається один раз, називають **вільним індексом**. У будь-якому виразі кожен із доданків повинен мати одні й ті самі вільні індекси, а позначення вільних і німих індексів в одному виразі збігатися не можуть. Наприклад:

$$x_i = a_{ik} b_k + c_{jki} u_{jk}\,.$$

В іншому випадку такий вираз не має змісту.

Пізніше, при розгляді косокутних та криволінійних систем координат, ми введемо верхні та нижні індекси. Тоді в кожному доданку має бути один і той самий набір вільних індексів як за найменуваннями, так і за позиціями (вгорі або внизу), а пара німих індексів складатиметься із верхнього та нижнього індексів.

Букви, якими позначено вільні індекси, також можна довільно заміняти на інші, але в усіх доданках одночасно. Наприклад, останній вираз можна переписати у вигляді:

$$x_l = a_{lk} b_k + c_{jkl} u_{jk}\,. \tag{1.13}$$

Кожний вільний індекс набуває значень від 1 до n (n – розмірність простору). Таким чином, у (1.13) одночасно записано n співвідношень, а якщо вираз містить k вільних індексів, то в ньому, відповідно, – n^k співвідношень.

2.3. Операції над векторами у координатному підході

Усі операції з векторами, запроваджені в § 1, можна здійснювати і у координатному підході. При цьому координатний підхід вимагає, щоб усі вектори, які беруть участь у цій операції, були задані в одній і тій самій системі координат.

Маємо *рівність векторів* ($\vec{a} = \vec{b}$), якщо в деякій системі координат їх відповідні компоненти однакові: $a_i = b_i$.

Отримуємо *нуль-вектор* ($\vec{0}$ або 0) або вектор $\vec{a} = 0$, якщо всі його компоненти дорівнюють нулю.

Інші операції здійснюються таким чином:

$$\vec{a} + \vec{b} = \left(a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3\right). \tag{1.14}$$

$$\alpha\vec{a} = \left(\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3\right). \tag{1.15}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 . \tag{1.16}$$

Довжиною (нормою) дійсного вектора $\vec{a}$ називається число

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}},$$

яке визначається через скалярний добуток вектора самого на себе;

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = e_{ijk} a_i b_j c_k , \tag{1.17}$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = e_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k , \tag{1.18}$$

де e_{ijk} – символ Ле́ві-Чіві́та, визначений таким чином:

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1, \text{ якщо } i, j, k \text{ складають циклічний порядок;} \\ -1, \text{ якщо } i, j, k \text{ складають антициклічний порядок;} \\ \ 0, \text{ якщо серед } i, j, k \text{ є однакові значення.} \end{cases} \tag{1.19}$$

Приклади циклічних порядків із чисел 1, 2, 3: 123, 231, 312; антициклічних: 213, 321, 132; циклічних порядків із латинських букв: *x,y,z*: *xyz, yzx, zxy*; антициклічних: *yxz, zyx, xzy*. На практиці доцільно замість визначника (1.18) користуватися компактною формулою для знаходження конкретної компоненти векторного добутку:

$[\vec{a}\times\vec{b}]_i = a_j b_k - a_k b_j$, де i, j, k складають циклічний порядок, наприклад, $[\vec{a}\times\vec{b}]_x = a_y b_z - a_z b_y$.

Наведемо корисну векторну тотожність

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} & \vec{c}\cdot\vec{d} \\ \vec{a}\cdot\vec{e} & \vec{b}\cdot\vec{e} & \vec{c}\cdot\vec{e} \\ \vec{a}\cdot\vec{f} & \vec{b}\cdot\vec{f} & \vec{c}\cdot\vec{f} \end{vmatrix} \tag{1.20}$$

та її доведення.

Оскільки мішаний добуток векторів записується визначником матриці, компонентами якої є відповідні координати векторів (див. (1.17)), то використовуючи такі властивості визначників: $\det B = \det B^T \; (B^T_{ij} = B_{ji})$, $\det A \cdot \det B^T = \det(A\cdot B^T)$, знаходимо

$$(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f}) = \det A\cdot\det B = \det A\cdot\det B^T = \det(AB^T),$$

$$\det(AB^T) = \det\left(\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} d_1 & e_1 & f_1 \\ d_2 & e_2 & f_2 \\ d_3 & e_3 & f_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{a}\cdot\vec{e} & \vec{a}\cdot\vec{f} \\ \vec{b}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{e} & \vec{b}\cdot\vec{f} \\ \vec{c}\cdot\vec{d} & \vec{c}\cdot\vec{e} & \vec{c}\cdot\vec{f} \end{vmatrix}.$$

2.4. Циклічний базис

Циклічний базис є зручним для опису векторів, що обертаються, зокрема при розгляді руху заряджених частинок у магнітному полі, світла циркулярної поляризації тощо. Вираз для розкладання довільного вектора $\vec{a}$ за векторами циклічного базису

$$\vec{e}_\pm = \frac{\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y}{\sqrt{2}}, \quad \vec{e}_0 = \vec{e}_z \tag{1.21}$$

має вигляд

$$\vec{a} = a_-\vec{e}_+ + a_+\vec{e}_- + a_0\vec{e}_0. \tag{1.22}$$

Циклічні компоненти $a_\pm$, a_0 пов'язані з декартовими формулами:

$$a_\pm = \frac{a_x \pm i a_y}{\sqrt{2}}, \; a_0 = a_z, \; a_x = \frac{a_+ + a_-}{\sqrt{2}}, \; a_y = \frac{a_+ - a_-}{i\sqrt{2}}.$$

Для зарядженої частинки в постійному магнітному полі $\vec{B} = B\vec{e}_z$ векторне рівняння руху розпадається на три окремі рівняння для циклічних компонент вектора швидкості $\vec{v}$. Вектор $\vec{v}$ є дійсним, тому $v_- = v_+^*$ і декартові координати v_x, v_y знаходяться як $v_x = \sqrt{2}\,\mathrm{Re}\, v_+$, $v_y = \sqrt{2}\,\mathrm{Im}\, v_+$.

Розглянемо векторну монохроматичну плоску хвилю. Її поле

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{A}e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t} + \text{к.с.}$$

є дійсним (тут $\vec{k}$ і ω – дійсні величини, к.с. – комплексно-спряжений до першого доданка вираз), але вектор амплітуди $\vec{A}$ є комплексним, оскільки $\vec{A}$ несе інформацію не лише про амплітуди, а й про відносні фази всіх компонент поля. Нехай хвиля є поперечною, наприклад, світлова хвиля у вакуумі або в ізотропному прозорому середовищі. Тоді $\vec{A}$ має лише перпендикулярні до хвильового вектора $\vec{k}$ складові. Направимо вісь Oz паралельно $\vec{k}$. Відмінність ситуації від руху в магнітному полі полягає в тому, що відповідні циклічні компоненти комплексної амплітуди $\vec{A}$ тепер незалежні. Вектори поляризації, що відповідають циркулярно поляризованому світлу, зазвичай визначаються формулами $\vec{e}_{\vec{k},\pm} = (\vec{e}_x \pm i\vec{e}_y)\big/\sqrt{2}$. Нехай $\vec{A} = A\vec{e}_{\vec{k},+}$, тобто $\vec{A}$ не містить складової, пропорційної $\vec{e}_{\vec{k},-}$. Тоді декартові компоненти поля мають вигляд

$$E_x = \sqrt{2}A\cos(\omega t - kz)\,,\ E_y = \sqrt{2}A\sin(\omega t - kz)\,.$$

Тут для простоти A вважаємо дійсним. Таким чином, у фіксованій точці простору вектор $\vec{E}$ обертається у площині, перпендикулярній до вектора $\vec{k}$, причому обертається в напрямку проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися із кінця вектора $\vec{k}$. За означенням така хвиля відповідає правій круговій поляризації світла (або додатній спіральності фотона). Отже, вектор $\vec{e}_{\vec{k},-}$ відповідає лівій круговій поляризації.

Довільний комплексний вектор може бути поданий як лінійна комбінація дійсних векторів із комплексними коефіцієнтами (див., наприклад, (1.21)). Тобто комплексні вектори утворюють лінійний простір над полем комплексних чисел, але базис у цьому просторі може вибиратися дійсним. Комплексні вектори не мають напрямку і довжини у звичайному розумінні, як дійсні вектори. Тому поняття скалярного добутку і модуля вектора необхідно узагальнити, але так, щоб ключова ідея ортогональності працювала, а для дійсних векторів нові означення переходили у попередні.

Збережемо за позначенням $\vec{a} \cdot \vec{b}$ зміст, визначений зв'язком цього виразу із компонентами векторів у ПДСК:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Парадоксальна (із погляду дійсних векторів (див. § 5 розд. 4)) рівність $\vec{e}_+ \cdot \vec{e}_+ = 0$ показує, що для комплексних векторів величина $\vec{a} \cdot \vec{b}$ не може служити скалярним добутком. *Скалярний добуток* векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ (узагалі кажучи, комплексних) позначатимемо тепер через $(\vec{a},\vec{b})$, означивши його так: $(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}^* \cdot \vec{b}$. Звідси випливає несиметричність скалярного добутку для комплексних векторів $(\vec{b},\vec{a}) = (\vec{a},\vec{b})^*$ та інші властивості скалярного добутку. Квадрат модуля (він же *квадрат норми*) комплексного вектора означимо через скалярний добуток

$$a^2 \equiv |\vec{a}|^2 = (\vec{a},\vec{a}),$$

або іншими словами, $a^2 = \vec{a}^* \cdot \vec{a}$. Тоді завжди $a^2 \geq 0$, причому $a = 0$ тільки, якщо $\vec{a} = 0$. Такі означення забезпечують виконання всіх аксіом, яким мають задовольняти норма і скалярний добуток у нормованому векторному лінійному просторі зі скалярним добутком.

Поняття ортогональності в загальному випадку також визначається через скалярний добуток, а саме, ортогональними є вектори, скалярний добуток яких дорівнює нулю. Таким чином, умова ортогональності комплексних векторів набуває вигляду

$$(\vec{a},\vec{b}) = \vec{a}^* \cdot \vec{b} = 0 . \qquad (1.23)$$

Скалярні добутки векторів циклічного базису мають вигляд $(\vec{e}_-,\vec{e}_+)=\vec{e}_+\cdot\vec{e}_+=0$, $(\vec{e}_+,\vec{e}_-)=\vec{e}_-\cdot\vec{e}_-=0$, $(\vec{e}_0,\vec{e}_\pm)=0$, $(\vec{e}_-,\vec{e}_-)=(\vec{e}_+,\vec{e}_+)=\vec{e}_+\cdot\vec{e}_-=1$. Отже, циклічний базис (1.21) є ортонормованим. Пропонуємо читачеві самостійно виразити циклічні компоненти вектора через скалярні добутки з векторами циклічного базису. Для векторних добутків маємо $\vec{e}_-\times\vec{e}_+=i\vec{e}_0$, $\vec{e}_+\times\vec{e}_0=i\vec{e}_+$, $\vec{e}_0\times\vec{e}_-=i\vec{e}_-$.

2.5. Зауваження щодо філософії координатного методу

Із тензорами, особливо вищих порядків, доводиться працювати майже виключно у координатному підході, оскільки правила обчислень у ньому є універсальними.

У координатному підході ми працюємо не з об'єктом як таким (вектором, тензором), а з набором його компонент. У різних системах компоненти одного й того самого об'єкта різні. Тобто сам *об'єкт – інваріантний, а форма його представлення – ні*. У цьому полягає певний недолік координатного методу: потрібна інформація про об'єкт ускладнюється неістотною інформацією про окремий вибір координатної системи. Тому задача теорії полягає у тому, щоб навчитися відокремлювати те суттєве, що стосується самих досліджуваних тензорних величин, і відкидати те, що привнесено тим чи іншим вибором системи координат.

Необхідно зробити ще одне важливе зауваження. Конкретний вектор $\vec{a}$ відповідає деякому реальному об'єкту геометричної або фізичної природи, скажімо, переміщенню точки, швидкості, силі тощо. Цей об'єкт існує незалежно від того, у якій системі ми його розглядаємо, і чи розглядаємо взагалі. Але числа a_1, a_2, a_3 – координати вектора $\vec{a}$ – уже залежать не тільки від самого $\vec{a}$, але й від координатної системи, відносно якої ми його розглядаємо. Якщо вибрати іншу систему координат (рис. 1.10), то й компоненти будуть

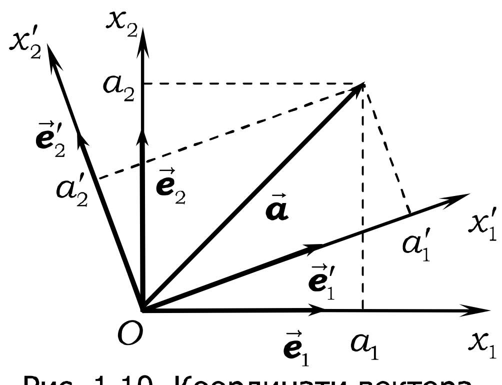


Рис. 1.10. Координати вектора на площині в різних системах координат

інші, хоча вектор – той самий, $(a_1,a_2,a_3)\to(a_1',a_2',a_3')$. Можна сказати, що компоненти вектора є зображенням вектора у цій системі координат. Те саме відноситься і до тензорів. Такої принципової позиції ми і дотримуємось. Проте в літературі існує й інша точка зору, згідно з якою набір координат вектора (набір компонент тензора) буквально ототожнюється із самим вектором (тензором). Наша позиція видається нам більш прийнятною з погляду фізики.

Водночас між вектором (тензором) і набором його компонент у даній системі координат існує взаємно однозначна відповідність. З урахуванням такої відповідності можна говорити про набір компонент як про сам об'єкт. Така термінологія є широко розповсюдженою і спрощує мову, тому вислови у подібному стилі вживаються і в цьому посібнику.

2.6. Типові ситуації вибору координатних осей

За координатного підходу вибір системи координат є важливим кроком у розв'язуванні кожної задачі. Вибирати систему координат треба так, щоб *максимально спростити* розв'язування задачі. Не слід прагнути непотрібної "загальної" системи координат. Вибір системи координат – це інструмент спрощення задачі. Розглянемо типові приклади.

1. У задачі є один виділений напрямок, що задається вектором $\vec{a}$. Систему координат слід вибрати так, щоб його координати були найпростіші: $\vec{e}_3$ паралельно до $\vec{a}$. Тоді $\vec{a}=(0,0,a)$, де $a=|\vec{a}|$, $\vec{a}=a\vec{e}_3$. Приклад – задача про просторовий рух тіла в однорідному полі тяжіння, $\vec{a}=\vec{g}$.

2. У задачі виділено два напрямки, пов'язані з векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, що утворюють кут α. Вибираємо, наприклад (рис. 1.11), $\vec{e}_3$ – напрямлений паралельно вектору $\vec{a}$; базисний вектор $\vec{e}_1$ –

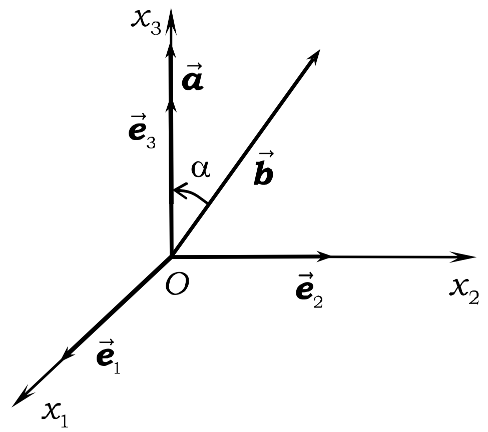


Рис. 1.11. Вибір системи координат для задачі, у якій виділено два напрямки

перпендикулярно до площини векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$; $\vec{e}_2$ – у площині векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$. Тоді $\vec{a} = (0,0,a)$, $\vec{b} = (0, b\sin\alpha, b\cos\alpha)$. Перемноживши $\vec{a}$ та $\vec{b}$ у компонентах, зокрема, одержимо відомі результати: $\vec{a}\cdot\vec{b} = ab\cos\alpha$, $\vec{b}\times\vec{a} = ba\sin\alpha\,\vec{e}_1$.

Приклад – рух зарядженої частинки в непаралельних однорідних електричному та магнітному полях, $\vec{a} = \vec{B}$, $\vec{b} = \vec{E}$.

Контрольні запитання

1. Означення вектора та основні операції над векторами в безкоординатному підході.

2. Координати вектора в декартовій системі координат.

3. Розкладання вектора на поздовжню та поперечну складові відносно заданого напрямку.

4. Операції над векторами у координатному підході.

5. Геометричний зміст скалярного, векторного та мішаного добутків векторів.

6. Правило розкриття подвійного векторного добутку векторів.

7. Правила запису індексних виразів. Вільні та німі індекси.

Задачі

1.1. Знайти проекції $[\vec{a}\times\vec{b}]_y$, $[\vec{d}\times\vec{f}]_z$ на осі декартової системи координат.

1.2. Обчислити добутки ортів прямокутної системи координат:

а) $(\vec{e}_x\times\vec{e}_y)\times(\vec{e}_z\times\vec{e}_y)$; б) $((\vec{e}_z\times\vec{e}_x)\times\vec{e}_x)\times((\vec{e}_y\times\vec{e}_z)\times\vec{e}_y)$.

У задачах 1.3–1.9 довести векторні тотожності:

1.3. $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot(\vec{c}\times\vec{d}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} \\ \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} \end{vmatrix}$.

1.4. $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{c}\times\vec{d}) = \vec{b}(\vec{a},\vec{c},\vec{d}) - \vec{a}(\vec{b},\vec{c},\vec{d}) = \vec{c}(\vec{a},\vec{b},\vec{d}) - \vec{d}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

1.5. $(\vec{a}\times\vec{b})\times(\vec{a}\times\vec{c}) = \vec{a}(\vec{a},\vec{b},\vec{c})$.

1.6. $(\vec{a}\times\vec{b},\ \vec{b}\times\vec{c},\ \vec{c}\times\vec{a}) = (\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2$.

1.7. $\vec{a}\times(\vec{b}\times(\vec{c}\times\vec{d})) = (\vec{a},\vec{c},\vec{d})\vec{b} - (\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{c}\times\vec{d})$.

1.8. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})(\vec{d},\vec{e},\vec{f}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{d} & \vec{b}\cdot\vec{d} & \vec{c}\cdot\vec{d} \\ \vec{a}\cdot\vec{e} & \vec{b}\cdot\vec{e} & \vec{c}\cdot\vec{e} \\ \vec{a}\cdot\vec{f} & \vec{b}\cdot\vec{f} & \vec{c}\cdot\vec{f} \end{vmatrix}$.

1.9. $(\vec{a},\vec{b},\vec{c})^2 = \begin{vmatrix} \vec{a}\cdot\vec{a} & \vec{b}\cdot\vec{a} & \vec{c}\cdot\vec{a} \\ \vec{a}\cdot\vec{b} & \vec{b}\cdot\vec{b} & \vec{c}\cdot\vec{b} \\ \vec{a}\cdot\vec{c} & \vec{b}\cdot\vec{c} & \vec{c}\cdot\vec{c} \end{vmatrix}$.

1.10. Дано вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ і кути між ними: $\alpha = \angle(\vec{b},\vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a},\vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a},\vec{b})$. Знайти кут між площинами $(\vec{a}\vec{b})$ і $(\vec{b}\vec{c})$.

1.11. Знайти кут між радіус-векторами $\vec{r}$ та $\vec{r}'$, напрямки яких відповідно задано сферичними кутами (θ,φ) та (θ',φ').

1.12. Вивести теорему косинусів сферичної тригонометрії

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma\cos A,$$

де $\alpha = \angle(\vec{b},\vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a},\vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a},\vec{b})$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – одиничні вектори зі спільним початком; $A = \angle((\vec{a},\vec{b}),(\vec{a},\vec{c}))$ – двогранний кут при векторі $\vec{a}$.

1.13. Вивести теорему синусів сферичної тригонометрії

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma}.$$

де $\alpha = \angle(\vec{b},\vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{a},\vec{c})$, $\gamma = \angle(\vec{a},\vec{b})$; $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ – одиничні вектори зі спільним початком; $A = \angle((\vec{a},\vec{b}),(\vec{a},\vec{c}))$, $B = \angle((\vec{b},\vec{a}),(\vec{b},\vec{c}))$, $C = \angle((\vec{c},\vec{a}),(\vec{c},\vec{b}))$ – двогранні кути при векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, відповідно.

1.14. Задано одиничні вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ зі спільним початком і кути між ними: $\alpha = \angle(\vec{b},\vec{c})$, $\beta = \angle(\vec{c},\vec{a})$, $\gamma = \angle(\vec{a},\vec{b})$. Знайти кут між вектором $\vec{c}$ і площиною $(\vec{a}\vec{b})$.

1.15. Дано призму об'єму V. Обчислити мішаний добуток векторів $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CD})$ (рис. 1.12).

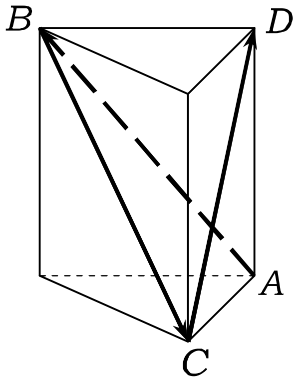


Рис. 1.12
до задачі 1.15

1.16. Дано куб зі стороною a. Обчислити мішаний добуток векторів $(\vec{p},\vec{q},\vec{r})$. Виконати аналогічне обчислення, якщо замість куба дано паралелепіпед об'єму V (рис. 1.13).

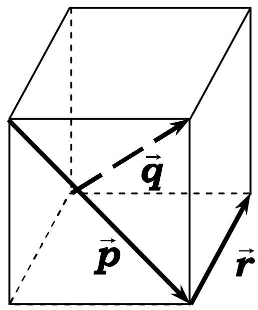


Рис. 1.13
до задачі 1.16

1.17. Дано тетраедр $ABCD$ об'єму V. Знайти мішаний добуток векторів $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC})$.

1.18. Довести формулу розкладання вектора $\vec{a}$ на поздовжню та поперечну складові відносно напрямку, заданого одиничним вектором $\vec{n}$: $\vec{a}=\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})+\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})$ або $\vec{a}=\vec{a}_{\|}+\vec{a}_{\perp}$, де $\vec{a}_{\|}=\vec{n}(\vec{a}\cdot\vec{n})$, $\vec{a}_{\perp}=\vec{n}\times(\vec{a}\times\vec{n})$.

1.19. Знайти вектор, який є результатом дзеркального відображення вектора $\vec{a}$ у площині, перпендикулярній одиничному вектору $\vec{n}$.

1.20. Вираз $|\vec{r}-\vec{r}'|$ розвинути в ряд Тейлора за r'/r із точністю до $(r'/r)^2$, якщо $r'\ll r$.

1.21. Вираз $1/|\vec{r}-\vec{r}'|$ розвинути в ряд Тейлора за r'/r із точністю до $(r'/r)^2$, якщо $r'\ll r$.

1.22. Записати рівняння площини, що проходить через точку із радіус-вектором $\vec{r}_1$ перпендикулярно до заданого вектора $\vec{n}$.

1.23. Записати рівняння площини, що проходить через дві точки з радіус-векторами $\vec{r}_1$ та $\vec{r}_2$ паралельно до заданого вектора $\vec{a}$.

1.24. Записати рівняння площини, що проходить через точку з радіус-вектором $\vec{r}_1$ паралельно до заданих векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

1.25. Записати рівняння площини, що проходить через задані точки з радіус-векторами $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ і $\vec{r}_3$, що не належать одній прямій.

1.26. Записати рівняння площини, яка перпендикулярна одиничному вектору $\vec{n}$ і проходить на відстані d від початку координат.

1.27. Записати рівняння площини, що проходить через задану точку $\vec{r}_1$ паралельно заданій площині $\vec{r}\cdot\vec{n}=\alpha$.

1.28. Записати рівняння прямої, що проходить через точку з радіус-вектором $\vec{r}_1$ паралельно до заданого вектора $\vec{a}$.

1.29. Знайти довжину перпендикуляра, опущеного із початку координат на пряму $(\vec{r}-\vec{r}_1)\times\vec{a}=0$.

1.30. Знайти найкоротшу відстань між двома непаралельними прямими, заданими рівняннями $\vec{r}\times\vec{a}=\vec{A}$ та $\vec{r}\times\vec{b}=\vec{B}$, якщо $\vec{a}\cdot\vec{A}=0$, $\vec{b}\cdot\vec{B}=0$, $\vec{a}\times\vec{b}\neq\vec{0}$. Знайти умову перетину цих прямих.

1.31. Знайти відстань від заданої точки $\vec{r}_1$ до площини $\vec{r}\cdot\vec{N}=\alpha$.

1.32. Розв'язати рівняння відносно невідомого вектора $\vec{x}$:

а) $\alpha\vec{x}+\beta(\vec{a}\times\vec{x})=\vec{b}$; б) $\vec{a}+\vec{b}\times\vec{x}=\vec{x}$.

1.33. Розв'язати систему рівнянь відносно вектора $\vec{x}$:

$$\begin{cases}\vec{x}\cdot\vec{a}=p,\\ \vec{x}\times\vec{b}=\vec{q}.\end{cases}$$

Установити геометричний зміст розв'язку.

1.34. Розв'язати системи рівнянь відносно невідомих x, y та z:

а) $x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}=\vec{d}$; б) $x(\vec{b}\times\vec{c})+y(\vec{c}\times\vec{a})+z(\vec{a}\times\vec{b})=\vec{d}$.

1.35. Використовуючи векторні тотожності, розв'язати відносно невідомого вектора $\vec{x}$ систему рівнянь:

$$\begin{cases}\vec{x}\cdot\vec{a}=\alpha,\\ \vec{x}\cdot\vec{b}=\beta,\\ \vec{x}\cdot\vec{c}=\gamma.\end{cases}$$

§1. Застосування тензорів у фізиці

Математичний опис процесів та явищ ґрунтується на використанні поняття величини. Відомо, що за своєю математичною природою величини бувають трьох типів: скаляри, вектори, тензори. Такий підхід до застосування величин при моделюванні дозволяє сформулювати фізичні закони в інваріантному виді. Інваріантність розуміється в такий спосіб — якщо в просторі змінити систему координат (для фізики це пов'язане з можливістю зміни системи відліку), то це приводить до відповідних змін в описі процесів й явищ, але форма запису не повинна змінюватися. Тому представляється доцільним використати скалярні, векторні й тензорні величини, які при таких перетвореннях не змінюють запису законів. Наприклад, відстань між точками M_1 і M_2 — інваріант при переході від системи Oxy до системи $O^1x^1y^1$ (рис.1).

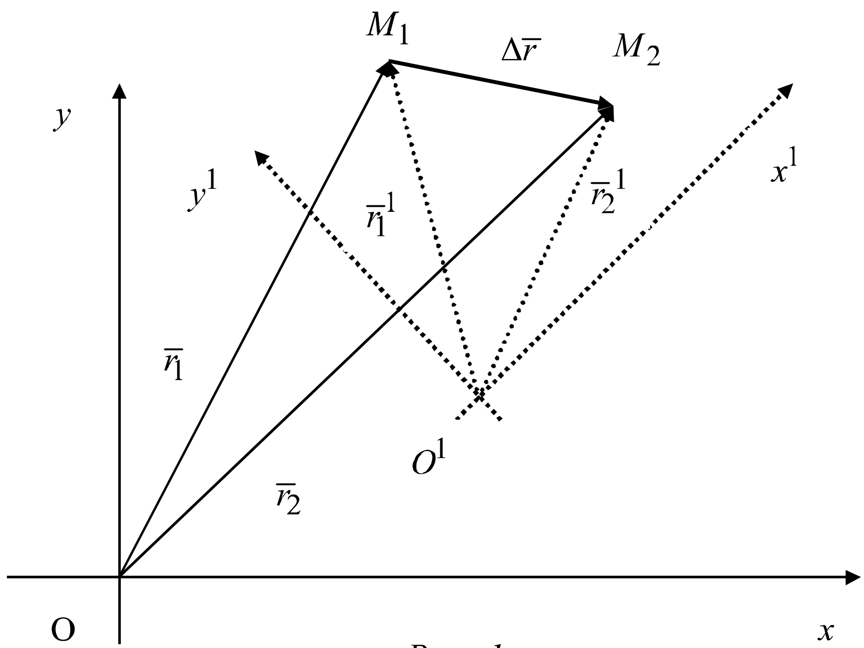


Рис. 1

Нехай в системі $Oxy: M_1(x_1, y_1); M_2(x_2, y_2)$, $O^1x^1y^1 : M_1(x_1^1, y_1^1); M_2(x_2^1, y_2^1)$. Величина $\Delta S = d(M_1, M_2)$ не змінюється тому, що $\Delta S = \sqrt{\Delta\overline{r}^2}$, де $\Delta\overline{r} = \overline{r}_2 - \overline{r}_1 =$ $= \overline{r}_2^{\,1} - \overline{r}_1^{\,1}$. Скаляри (густина, температура, маса тощо) характеризуються одним числом (функцією), що не змінюється при перетворенні координат. Вектори — спрямовані відрізки, характеризуються величинами і напрямами у просторі та не залежать від вибору системи координат. Тензори є величинами більш складної природи. Наприклад, тензор другого рангу можна визначити в тривимірному просторі трійкою векторів або таблицею дев'яти компонентів.

Використання векторного та тензорного аналізу для моделювання фізичних явищ зумовлене не лише наочністю і зручністю математичних формул. Застосування тензорів в фізиці обумовлено властивостями та структурою фізичного світу, яки відображаються у математичних моделях.

§ 2. Взаємні базиси векторів. Контраваріантні і коваріантні компоненти

Розглянемо тривимірний векторний простір R^3. Будь-яка трійка некомпланарних векторів із загальним початком утворюють базис: $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$, який будемо називати *основним*. Будь який вектор $\overline{b} \in R^3$ можна розкласти по цьому базису (рис. 2), тобто

$$\overline{b} = B^1\overline{e}_1 + B^2\overline{e}_2 + B^3\overline{e}_3. \tag{2.1}$$

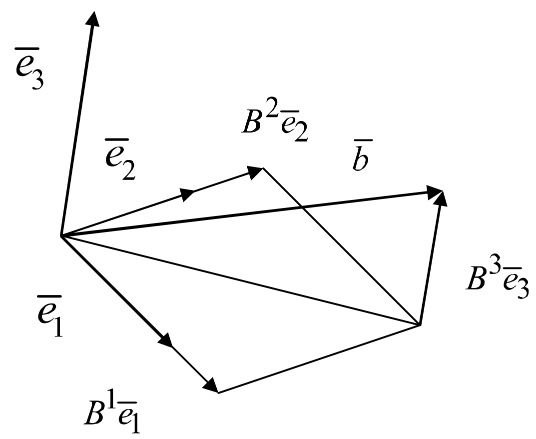


Рис. 2

Коефіцієнти розкладу (2.1) B^1, B^2, B^3 по основному базису називаються ***контраваріантними*** компонентами вектора $\overline{b}$ (індекси зверху). Для того, щоб визначити контраваріантні компоненти аналітично необхідно ввести взаємний базис. Базиси $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ й $\overline{e}^1, \overline{e}^2, \overline{e}^3$ — називаються *взаємними*, якщо виконуються наступні співвідношення [2]:

$$\overline{e}^i \cdot \overline{e}_j = \delta^i_j = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad i, j = 1,2,3 \tag{2.2}$$

де δ^i_j — *символ Кронекера.*

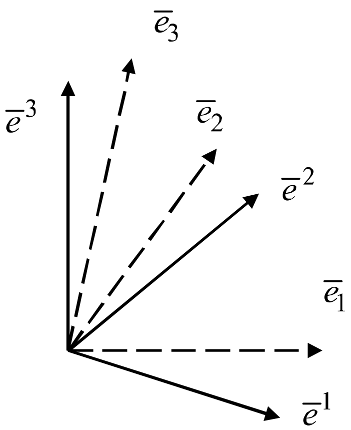


Рис. 3

Вектори взаємного базису, як видно із властивостей скалярного добутку, перпендикулярні до векторів основного базису з незбіжними індексами і утворюють гострий кут з вектором основного базису з таким же індексом (рис. 3), тобто

$$\overline{e}^i \perp \overline{e}_j, \ \cos(\overline{e}^i, \overline{e}_i) > 0 \ (i \neq j; i, j = 1,2,3).$$

Якщо взяти базис декартової прямокутної системи кос ні вектори взаємно перпендикулярні), то взаємний базис збігається з ним. Якщо в афінних (косокутних) системах координат розкладання по взаємних базисах не збігаються $B^i \neq B_i$, (рис. 4), то в декартових системах через збіг базисів контраваріантні й коваріантні компоненти співпадають, тому в написанні індексів не роблять розходження.

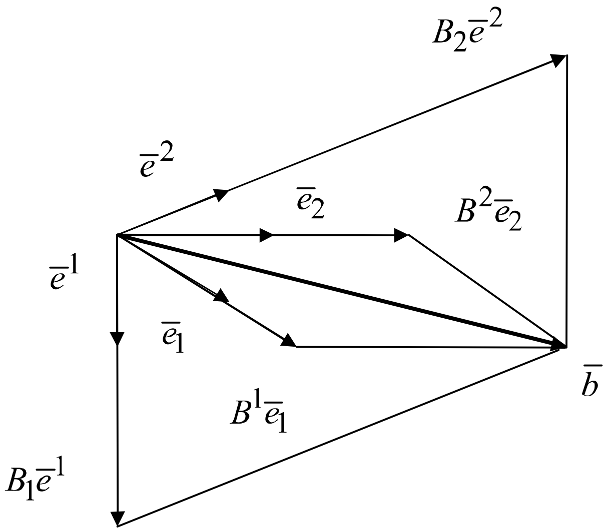


Рис. 4

Аналітично компоненти векторів знаходять за допомогою скалярного добутку. Якщо $\bar{b} = B^1\bar{e}_1 + B^2\bar{e}_2 + B^3\bar{e}_3 = B_1\bar{e}^1 + B_2\bar{e}^2 + B_3\bar{e}^3$, то $B^i = \bar{b}\cdot\bar{e}^i$ — ***контраваріантні*** компоненти, $B_j = \bar{b}\cdot\bar{e}_j$ — ***коваріантні*** компоненти.

Для скорочення запису в тензорній алгебрі та тензорному аналізі приймається правило Ейнштейна або умова про підсумовування:

$$\bar{b} = B^1\bar{e}_1 + B^2\bar{e}_2 + B^3\bar{e}_3 = \sum B^i\bar{e}_i = B^i\bar{e}_i.$$

Якщо використані повторювані індекси (один зверху, інший знизу), то мається на увазі, (якщо не обговорене протилежне), підсумовування.

Визначимо тепер аналітично вектори взаємного базису по векторах даного базису. Нехай даний базис $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, тоді

$$\bar{e}^1 \perp \bar{e}_2, \quad \bar{e}^1 \perp \bar{e}_3, \qquad \bar{e}^1 = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\bar{e}_1\cdot\left(\bar{e}_2\times\bar{e}_3\right)},$$

тому, що за визначенням $\bar{e}^1\cdot\bar{e}_1 = 1$,

$$k\,(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)\cdot\bar{e}_1 = 1, \qquad k = \frac{1}{(\bar{e}_2\times\bar{e}_3)\cdot\bar{e}_1},$$

$$\bar{e}^2 = \frac{\bar{e}_3\times\bar{e}_1}{\bar{e}_2\cdot\left(\bar{e}_3\times\bar{e}_1\right)}, \qquad \bar{e}^3 = \frac{\bar{e}_1\times\bar{e}_2}{\bar{e}_3\cdot\left(\bar{e}_1\times\bar{e}_2\right)}.$$

Аналогічно визначаються вектори основного базису, якщо задано взаємний базис (міняємо індекси верхній на нижній і навпаки у формулах).

§3. Тензори n-го рангу (n = 0, 1, 2, …)

Розглянемо простір R^3, у ньому скалярні, векторні й тензорні величини визначаються відповідними впорядкованими наборами компонентів. Кількість компонентів $n = 3^N$, де N — ранг тензора. Маємо:

1) скаляр - тензор нульового рангу $n = 3^0 = 1$.

2) вектор - тензор першого рангу $n = 3^1 = 3$.

3) тензор другого рангу $n = 3^2 = 9$, тощо.

Геометрично до поняття тензорної величини і числа компонентів приходимо з використанням базису в просторі. Тензор нульового рангу виходить, якщо при утворенні поліадних добутків вектори базису ми беремо нуль разів.

Тензори 1 рангу, якщо вектори базису ми беремо по одному разу.

Тензори 2 рангу, якщо — по два рази, тощо.

Для того, щоб пояснити одержання тензора другого рангу введемо спочатку поняття *діади* [3].

Діадою або невизначеним добутком двох базисних векторів будемо називати добутки виду $\overline{e}_i\overline{e}_j$: $\overline{e}_1\overline{e}_1, \overline{e}_1\overline{e}_2, ..., \overline{e}_3\overline{e}_3$, інші позначення $\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$.

Тензором другого рангу або *діадиком* називається будь-яка лінійна комбінація діад:

$$D = \alpha\overline{e}_1\overline{e}_1 + \beta\overline{e}_1\overline{e}_2 + ... + \omega\overline{e}_3\overline{e}_3. \tag{3.1}$$

Коефіцієнти в лінійних комбінаціях діад є компонентами тензора. Так як нами використаний основний базис, то це будуть контраваріантні компоненти

$$D^{11} = \alpha, \quad D^{12} = \beta, \quad ..., \quad D^{33} = \omega.$$

Якщо брати тріади базисних векторів виду $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3, \overline{e}_3\overline{e}_2\overline{e}_3, \overline{e}_2\overline{e}_2\overline{e}_2$ і т. ін., то їхня лінійна комбінація визначає тензор третього рангу або *тріадик*. Використовуючи невизначені добутки базисних векторів по чотирьох (тетради) $\overline{e}_1\overline{e}_2\overline{e}_3\overline{e}_4$, $(\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_2 \otimes \overline{e}_3 \otimes \overline{e}_4)$ при розгляді їх усіляких лінійних комбінацій приходимо до *тетрадиків* або тензорів четвертого рангу. Процес можна продовжувати по індукції, одержуючи тензори 5-го, 6-го та вищих рангів.

§4. Перетворення компонентів тензора. Метричний тензор. Піднімання й опускання (перекидання) індексів

Розглянемо перетворення системи координат, вважаючи даними основний $\overline{e}_i$ і взаємний $\overline{e}^j$ базиси, де $i, j = 1,2,3$. Можна зробити перехід до нового основного й взаємного базисів $\overline{e}_k{}'$ і $\overline{e}^{s\prime}$:

$$\overline{e}_i = \alpha_i^k \overline{e}_k{}' = \sum \alpha_i^k \overline{e}_k{}' \tag{4.1}$$

$$\overline{e}^j = \beta_s^j \left(\overline{e}^s\right)' = \sum \beta_s^j \left(\overline{e}^s\right)' \tag{4.2}$$

Якщо розглядається $p-$вимірний простір , то підсумовування ведеться до p. При переході до нових базисів компоненти тензорів, взагалі кажучи, змінюються. Для простоти розглянемо зміни компонентів векторів (тензорів першого рангу). Отримаємо:

$\overline{b} = B^j \cdot \overline{e}_j = B^j \cdot \alpha_j^k \cdot \overline{e}_k{}' = \left(B^k\right)' \cdot \overline{e}_k{}'$ тобто $\left(B^k\right)' = \alpha_j^k \cdot B^j$ — закон зміни контраваріантних компонентів вектора.

$\overline{b} = B_i \cdot \overline{e}^i = B_i \cdot \beta_l^i \cdot \overline{e}^{l\prime} = B_l' \cdot \overline{e}^{l\prime}$, тобто $B_l' = \beta_l^k \cdot B_k$ — закон зміни коваріантних компонентів вектора.

Перейдемо до тензора другого рангу $\mathrm{T}_{ij}\overline{e}^i \otimes \overline{e}^j$, який можна представити, як діадик по основному, взаємному й змішаному базисам:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^{ji}\overline{e}_i\overline{e}_j, \quad \mathrm{T} = \mathrm{T}_i^j\,\overline{e}^i\,\overline{e}_j = \mathrm{T}_{ij}\beta_k^i\,\overline{e}^{k\prime}\beta_l^j\,\overline{e}^{l\prime} = \mathrm{T}'_{kl}\overline{e}^{k\prime}\,\overline{e}^{l\prime}\,,\ \textbf{\textit{де}}$$

$\mathrm{T}'_{kl} = \beta_k^i \beta_l^j \mathrm{T}_{ij}$ ***— закон зміни коваріантних компонентів тензора ІІ-го рангу.***

$\mathrm{T}^{kl\prime} = \alpha_i^k \alpha_j^l \mathrm{T}^{ij}$ — закон зміни контраваріантних компонентів.

$\mathrm{T}_k^{l\,\prime} = \alpha_i^l\,\beta_k^j\,\mathrm{T}_j^i$ — закон зміни змішаних компонентів.

У сучасній науково-технічній літературі використовується два підходи до визначення тензора. Перший (більш традиційний) підхід заснований на використанні закону перетворення його компонентів. Якщо дано якийсь набір величин (з верхніми й нижніми індексами), які при перетворенні базисів змінюються як коваріантні, контраваріантні й змішані компоненти, то говорять, що такий набір визначить відповідний тензор. Наприклад, тензор другого рангу визначається як набір дев'яти компонентів (коваріантних, контраваріантних або змішаних).

Другий підхід є геометричним. Тензори розглядаються як полілінійні добутки (діадики, тріадики, тетрадики) векторів базису. Тоді закони перетворення компонентів задаються перетворенням векторів базису.

Якщо в просторі уведено скалярний добуток, тобто простір є евклідовим, то між коваріантним, контраваріантним і змішаним компонентами тензора можна встановити зв'язок. Нехай у просторі дані основний і взаємний базиси $\overline{e}_i$ та $\overline{e}^j$ $(i, j = 1,2,3)$. Розглянемо добуток базисних векторів

$$g_{ik} = \overline{e}_i \cdot \overline{e}_k$$
$$g^{jk} = \overline{e}^j \cdot \overline{e}^k$$

Якщо розглянути повні набори величин $g_s^r = \overline{e}^r \cdot \overline{e}_s$, то вони будуть змінюватися при зміні базису як компоненти відповідного тензора. По цьому їхній повний набори розглядаються як тензор (дивися підхід 1). Цей тензор називається метричним:

$$G = g^{jl} \overline{e}_j \otimes \overline{e}_l$$
$$G = g_s^r \overline{e}_r \otimes \overline{e}^s$$
$$G = g_{ik} \overline{e}^i \otimes \overline{e}^k$$

Природно розглянути G як той самий тензор, але при використанні векторів основного або взаємного базису.

Метрика простору це:

$$dS^2 = d\overline{r} \cdot d\overline{r} = dx_i \cdot \overline{e}^i \cdot dx_j \cdot \overline{e}^j = g^{ij} \cdot dx_i \cdot dx_j = dx^k \cdot \overline{e}_k \cdot dx^l \cdot \overline{e}_l = g_{kl} \cdot dx^k \cdot dx^l .$$

Користуючись компонентами метричного тензора встановлюємо зв'язок між коваріантними й контраваріантними компонентами.

Якщо дано основний і взаємний базиси, то:

$$B = B^j \cdot \overline{e}_j = B_k \cdot \overline{e}^k \ , \tag{4.3}$$

$$\overline{e}_j \cdot \overline{e}^k = \delta_j^k = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases} .$$

Якщо обидві частини (4.3) помножити на $\overline{e}^s$, то $B^j \overline{e}_j \cdot \overline{e}^s = B_k \overline{e}^k \cdot \overline{e}^s$,

отже, $B^s = B_k g^{ks}$ — зв'язок між контраваріантними й коваріантними компонентами (перекидання індексів). Аналогічно можна встановити, що $B_r = g_{rt} B^t$.

Для тензора другого й вище рангу компоненти метричного тензора можна використати кілька разів $\mathrm{T}_{ij} = g_{ik} g_{jl} \mathrm{T}^{kl}$, тощо.

***<u>Зауваження</u>**: по формулі перетворення компонентів тензора при переході від старого основного до нового основного схожа на перетворення компонентів при переході від основного до взаємного базису й навпаки. Збіг має місце для базисів у декартових прямокутних системах координат. (Основний і взаємний базиси збігаються). Компоненти метричного тензора в декартовому базисі* $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

§5. Операції з тензорами

Лінійні операції (додавання або віднімання, множення на скаляр) виконуються з тензорами одного рангу. Для визначеності будемо використовувати тензори другого рангу. Для тензора більш високого рангу міркування проводиться по індукції. Для визначеності також будемо використовувати декартові базиси [4], коли контраваріантні, коваріантні й змішані компоненти не розрізняються. *Сума, різниця* (додавання і віднімання) тензорів: $C = A \pm B$, де

$$A = A_{ij} \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j = A_{11} \overline{e}_1 \overline{e}_1 + \ldots + A_{12} \overline{e}_1 \overline{e}_2 + \ldots + A_{33} \overline{e}_3 \overline{e}_3 ,$$

$$B = B_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j = B_{11}\overline{e}_1\overline{e}_1 + \ldots + B_{33}\overline{e}_3\overline{e}_3 .$$

Тоді $C = A \pm B$ теж буде тензором другого рангу $C = (A_{ij} \pm B_{ij})\overline{e}_i\overline{e}_j$.

Компоненти суми (різниці) тензорів знаходяться підсумовуванням або відніманням компонентів цих тензорів.

При *множенні тензора на скаляр* виходить тензор того ж рангу: $D = \lambda A$; $D_{ij} = \lambda A_{ij}$, зв'язок додавання й множення на скаляр, наприклад, $2A = A + A$.

Якщо розглядати тензори другого рангу, то їх можна характеризувати матрицями компонентів. Уведені лінійні операції з тензорами зводяться до відповідних операцій з матрицями їхніх компонентів.

Крім того, уводяться спеціальні тензорні операції. *Тензорний добуток* (множення) тензорів: $M = AB = A \otimes B$, де $A = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$, $B = B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l$. Тоді

$$M = A_{ij}B_{kl}\, \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \otimes \overline{e}_k \otimes \overline{e}_l = M_{ijkl}\, \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \otimes \overline{e}_k \otimes \overline{e}_l .$$

Тензорним добутком є тензор, ранг якого дорівнює сумі рангів співмножників, а компоненти визначаються за законом:

$$M_{ijkl} = A_{ij} \cdot B_{kl}, \text{ де } i, j, k, l = 1,2,3 .$$

Згортання тензора.

Якщо по парі будь-яких індексів компонентів тензора зробити підсумовування, то така операція називається згортанням тензора. У результаті одержуємо тензор, ранг якого на дві одиниці менше. Згортання можна розглянути як результат скалярного множення тензорів.

Візьмемо, наприклад, тензор другого рангу:

$A = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$; $\quad B = B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l$;

$C = A \cdot B = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \cdot B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l = \mathrm{A}_{ij}B_{kl}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \cdot \overline{e}_k \otimes \overline{e}_l =$

$= C_{ijkl}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \cdot \overline{e}_k \otimes \overline{e}_l = D_{il}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_l$

$C_{ijkl}\delta_{jk} = D_{il}, \quad \overline{e}_j \cdot \overline{e}_k = \delta_{jk}.$

Якщо дозволяє ранг тензорів, то операцію скалярного множення можна повторити кілька разів. Результат еквівалентний згортці по декількох параметрах індексів. Наприклад, тензори другого рангу можна двічі скалярне перемножувати.

Векторний добуток.

Можна ввести векторний добуток тензорів, маючи на увазі, що при цьому векторне перемножуються сусідні вектори поліад.

Наприклад:

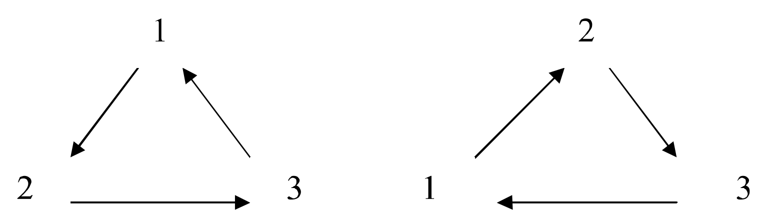
$$A = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j; \qquad B = B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l;$$

$$A \times B = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \times B_{kl}\overline{e}_k \otimes \overline{e}_l = A_{ij}B_{kl}\overline{e}_i \otimes \left(\overline{e}_j \times \overline{e}_k\right) \otimes \overline{e}_l$$

Векторний добуток базисних векторів зручно описати за допомогою тензора Леві-Чівіта $\overline{e}_j \times \overline{e}_k = E_{jkm}\overline{e}_m$, де E_{jkm} — компоненти тензора Леві-Чівіта визначаються в такий спосіб:

$$E_{jkm} = \begin{cases} 1 & , j,k,m - \text{права перестановка}, \\ -1 & , j,k,m - \text{ліва перестановка}, \\ 0 & , j,k,m - \text{співпадає деяка пара індексів}. \end{cases}$$

На рисунку 5 наведені випадки правої та лівої перестановок



права перестановка ліва перестановка

Рис. 5

Таким чином,

$$A \times B = A_{ij}B_{kl}E_{jkm}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_m \otimes \overline{e}_l.$$

У результаті тензорного добутку двох тензорів одержимо тензор, ранг якого дорівнює сумі рангів співмножників. У результаті векторного добутку виходить тензор, ранг якого на одиницю менше суми рангів співмножників. У результаті скалярного добутку виходить тензор , ранг якого на дві одиниці менше, ніж сума рангів співмножників.

§6. Тензори другого рангу

Крім скалярів і векторів в механіці суцільного середовища і ФТТ найбільше поширення одержали тензори другого рангу. Тензор другого рангу це діадик. Він записується у вигляді

$$A = A_{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j = A_{11}\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_1 + A_{12}\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_2 + A_{13}\overline{e}_1 \otimes \overline{e}_3 + A_{21}\overline{e}_2 \otimes \overline{e}_1 + \ldots + A_{33}\overline{e}_3 \otimes \overline{e}_3$$

Передбачається, що використовується базис, у якому контраваріантні і коваріантні компоненти збігаються, тому тензор A представляється матрицею

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

складеною з компонентів тензора.

Не можна ототожнювати тензор другого рангу і матрицю.

Кажуть, що тензор симетричний, якщо при перестановці індексів він не змінюється, тобто $A_{ij} = A_{ji}$, у цьому випадку тензор має тільки 6 незалежних компонентів, його матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Таким чином, матриця компонентів симетрична відносно головної діагоналі.

Зауваження. Якщо дано тензор вище другого рангу, то узагальненням симетричного тензора є тензор симетричний по парі індексів.

Наприклад: якщо $B_{ijl} = B_{ilj}$, то говорять що тензор B симетричний по парі останніх індексів.

Кажуть, що тензор є кососиметричним або антисиметричним, якщо при перестановці індексів змінюється знак компонента:

$$A_{ij} = -A_{ji}.$$

Кососиметричний тензор другого рангу має три незалежних компоненти, тому що діагональні компоненти повинні обертатися в нуль.

$$A_{ii} = -A_{ii} \Rightarrow \; 2\, A_{ii} = 0 \Rightarrow A_{ii} = 0 \;,$$

а між компонентами, симетричними щодо головної діагоналі, розходження тільки в знаках.

Кососиметричний тензор має вигляд: $\begin{pmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} \\ -A_{12} & 0 & A_{23} \\ -A_{13} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}.$

Деякий тензор другого рангу можна розкласти на симетричну й антисиметричну частини $A = A_+^* + A_-^*$

$$A_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right) + \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right),$$

де $\left(A_+^*\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} + A_{ji}\right)$ — симетрична частина тензора,

$\left(A_-^*\right)_{ij} = \frac{1}{2}\left(A_{ij} - A_{ji}\right)$ — кососиметрична частина тензора.

Виділення симетричної частини тензора називається його *симетруванням*, а виділення антисиметричної частини — *альтернуванням* тензора.

Зауваження. Якщо дано тензор високого рангу $(n > 2)$, то говорять про його *антисиметричність* або *кососиметричність* по парі індексів.

§7. Власні вектори і власні значення тензора

Нехай даний тензор Т і вектор $\overline{a}$. Їхній скалярний добуток буде вектором $\overline{b} = \mathrm{T} \cdot \overline{a}$. Взагалі кажучи, вектор $\overline{b}$ відрізняється від вектора $\overline{a}$ величиною і напрямком.

Наприклад, якщо $\mathrm{T}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 6 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}$ і $\overline{a}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, тоді дістаємо, що

$$\mathrm{T}\cdot\overline{a}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 6 & 2 & 3\\ 0 & 4 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\25\\13\end{pmatrix}.$$

Маємо, що $\overline{a}=(3;\ 2;\ 1)$ та $\overline{b}=(3;\ 25;\ 13)$. Тоді $\left|\overline{a}\right|=\sqrt{14}$, $\left|\overline{b}\right|=\sqrt{803}$ і

$$\cos\left(\overline{a}^{\wedge}Ox\right)=\frac{3}{\sqrt{14}},\qquad \cos\left(\overline{b}^{\wedge}Ox\right)=\frac{3}{\sqrt{803}}.$$

Розрізняються модулі векторів $\overline{a}$ й $\overline{b}$ і направляючі косинуси, тобто вектори не збігаються ні по величині, ні по напрямку. Однак існують такі напрямки в просторі, які під дією тензора не змінюються. Такі напрямки в просторі називаються головними. Якщо взяти вектор головного напрямку, то під дією тензора він переходить у колінеарний. Вектор $\mathrm{T}\cdot\overline{n}=\lambda\cdot\overline{n}$, тобто напрямок у просторі зберігається. Коефіцієнт λ, що характеризує зміну модуля вектора головного напрямку під дією тензора, називається *власним значенням*. Головні напрямки тензора і відповідні власні значення визначаються в такий спосіб:

$\lambda\cdot\overline{n}=\lambda\cdot\mathrm{E}\cdot\overline{n}$ — по властивостях одиничного тензора.

Тоді дістаємо рівняння $(\mathrm{T}-\lambda\mathrm{E})\,\overline{n}=0$, де

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}\mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} & \mathrm{T}_{13}\\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} & \mathrm{T}_{23}\\ \mathrm{T}_{31} & \mathrm{T}_{32} & \mathrm{T}_{33}\end{pmatrix},\qquad \mathrm{E}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Якщо перейти до скалярної форми, то для визначення власних значень і власних напрямків одержуємо однорідну лінійну систему виду:

$$\begin{cases}(\mathrm{T}_{11}-\lambda)\,n_1+\mathrm{T}_{12}n_2+\mathrm{T}_{13}n_3=0\\ \mathrm{T}_{21}n_1+(\mathrm{T}_{22}-\lambda)\,n_2+\mathrm{T}_{23}n_3=0\\ \mathrm{T}_{31}n_1+\mathrm{T}_{32}n_2+(\mathrm{T}_{33}-\lambda)\,n_3=0\end{cases}.$$

Однорідна система завжди має тривіальний (нульовий) розв’язок, але нульовий вектор ніякого напрямку в просторі не визначає. Тому шукаємо ненульові розв’язки системи. У цьому випадку система буде невизначеною (не одне, а кілька рішень). Тоді визначник системи дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} T_{11}-\lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22}-\lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33}-\lambda \end{vmatrix} = 0 .$$

Розкриваючи визначник, отримаємо алгебраїчне рівняння третього степеня, що називається *характеристичним рівнянням*, і приводимо його до виду: $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, де a_1, a_2, a_3 — коефіцієнти рівняння та

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= f_1\left(T_{ij}\right) \\ a_2 &= f_2\left(T_{ij}\right) \\ a_3 &= f_3\left(T_{ij}\right) \end{aligned}\right\}$$ — різні функції від компонентів тензора T_{ij} $(i, j = 1,2,3)$.

Рівняння третього степеня (або з непарним степенем) має хоча б один дійсний корінь. Якщо два інші корені комплексно – спряжені, то цим власним значенням у просторі ніякі напрямки не відповідають. Багато із застосовуваних у механіці суцільних середовищ і фізиці твердого тіла тензорів симетричні. Установлено, що для симетричних тензорів характеристичне рівняння має вигляд: $\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0$, де $I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33}$;

$$I_2 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}; \quad I_3 = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}.$$

Коефіцієнти I_1, I_2, I_3 називаються *головними інваріантами тензора*. ***Інваріант*** – це величина, яка не змінюється при перетворенні координат, наприклад, якщо змінити систему координат, то компоненти вектора змінюються, а його довжина, хоча і є функцією компонентів - не змінюється, тобто є інваріантною. Для симетричних тензорів завжди є три дійсних власних значення.

Вибираємо власні значення $\lambda_{(i)}$ ((i) – не індекс, а номер), йому відповідає $\overline{n}^{(i)}$— власний вектор, компоненти якого знаходяться як розв’язок системи:

$$\begin{cases} (\mathrm{T}_{11}-\lambda_{(i)})n_1^{(i)}+\mathrm{T}_{12}n_2^{(i)}+\mathrm{T}_{13}n_3^{(i)}=0 \\ (\mathrm{T}_{21}n_1^{(i)}+(\mathrm{T}_{22}-\lambda_{(i)})n_2^{(i)}+\mathrm{T}_{23}n_3^{(i)}=0 \\ \mathrm{T}_{31}n_1^{(i)}+\mathrm{T}_{32}n_2^{(i)}+(\mathrm{T}_{33}-\lambda_{(i)})n_3^{(i)}=0 \end{cases}$$

Система невизначена, тому незалежних рівнянь менше ніж число невідомих, тобто менше трьох. Для одержання відповідей до визначимо систему. Можна, наприклад, зажадати, щоб всі вектори мали одиничний модуль $|\overline{n}^{(i)}|=1$.

Отже, умова нормування $\left(n_1^{(i)}\right)^2+\left(n_2^{(i)}\right)^2+\left(n_3^{(i)}\right)^2=1$.

Якщо ж серед власних значень $\lambda_{(j)}$ є кратні (тобто якісь корні можуть збігатися), то додаткова умова ортогональності (взаємної перпендикулярності) векторів головних напрямків має вигляд

$$\lambda_{(i)},\overline{n}^{(i)}=\left(n_1^{(i)}n_2^{(i)}n_3^{(i)}\right);\quad \lambda_{(j)},\overline{n}^{(j)}=\left(n_1^{(j)}n_2^{(j)}n_3^{(j)}\right);\qquad \lambda_{(i)}=\lambda_{(j)}$$

$$n_1^{(i)}n_1^{(j)}+n_2^{(i)}n_2^{(j)}+n_3^{(i)}n_3^{(j)}=0.$$

§8. Приведення тензора до діагонального виду

Нехай дано симетричний тензор другого рангу:

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} & \mathrm{T}_{13} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{22} & \mathrm{T}_{23} \\ \mathrm{T}_{31} & \mathrm{T}_{32} & \mathrm{T}_{33} \end{pmatrix},\quad \mathrm{T}_{ij}=\mathrm{T}_{ji}.$$

Тоді характеристичне рівняння $\left| T_{ij} - \lambda\delta_{ij} \right| = 0$ має три дійсних корені

$$\lambda_{(1)} \geq \lambda_{(2)} \geq \lambda_{(3)}.$$

Потім можна знайти три вектори головних напрямків $\overline{n}^{(1)}, \overline{n}^{(2)}, \overline{n}^{(3)}$. Ці вектори взаємно перпендикулярні. Якщо серед коренів є кратні $\lambda_{(1)} > \lambda_{(2)} = \lambda_{(3)}$, то взаємної перпендикулярності власних напрямків ми добиваємося за умови $\overline{n}^{(2)} \cdot \overline{n}^{(3)} = 0$. У цьому випадку ми маємо, що вектори $\overline{n}^{(2)}, \overline{n}^{(3)}$ належать площині π, $\overline{n}^{(2)} \perp \overline{n}^{(3)}$ та $\overline{n}^{(1)} \perp \pi$ (рис. 6).

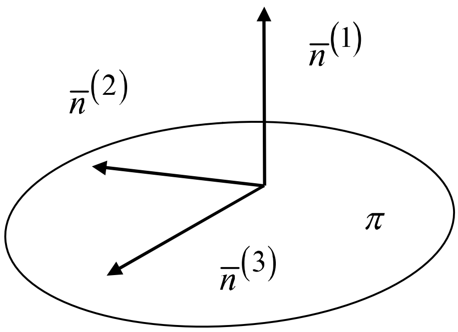


Рис. 6

У площині π будь-який напрямок є головним. Тому вибираємо два будь-яких $\overline{n}^{(2)} \perp \overline{n}^{(3)}$ (рис. 6).

У тривимірному просторі три взаємно перпендикулярних вектори лінійно незалежні і їх можна використати як базис у просторі. Якщо перейти від даної системи координат до базису із власних векторів, то матриця компонентів тензора істотно спрощується і приводиться до діагонального виду.

$$T = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix}.$$

Тоді інваріанти будуть мати такий вид:

$$I_1 = T_{12} + T_{22} + T_{33} = \lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \lambda_{(3)};$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_{(1)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(3)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & \lambda_{(3)} \end{vmatrix} = \lambda_{(1)}\lambda_{(2)} + \lambda_{(1)}\lambda_{(3)} + \lambda_{(2)}\lambda_{(3)};$$

$$I_3 = \lambda_{(1)} \cdot \lambda_{(2)} \cdot \lambda_{(3)}.$$

Розглянемо тепер цілі ступені тензора:

$$\mathrm{T} \cdot \mathrm{T} = \mathrm{T}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^2 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^3 = \mathrm{T} \cdot \mathrm{T}^2 = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^3 \end{pmatrix}.$$

За допомогою математичної індукції приходимо до загальної формули

$$\mathrm{T}^n = \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^n \end{pmatrix}.$$

Кожне із власних значень задовольняє характеристичному рівнянню:

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0.$$

Теорема Гамільтона –Келлі. Усякий симетричний тензор другого рангу є розв’язком свого характеристичного рівняння:

$$\mathrm{T}^3 - I_1\mathrm{T}^2 + I_2\mathrm{T} - I_3\mathrm{E} = 0. \tag{8.1}$$

Доведення. Дійсно,

$$\begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^3 \end{pmatrix} - I_1 \begin{pmatrix} \lambda_{(1)}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)}^2 \end{pmatrix} + I_2 \begin{pmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{pmatrix} - I_3 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Після переходу до базису із власних векторів цей тензор приводить до системи рівнянь

$$\begin{cases} \lambda_{(1)}^3 - I_1\lambda_{(1)}^2 + I_2\lambda_{(1)} - I_3 = 0 \\ \lambda_{(2)}^3 - I_1\lambda_{(2)}^2 + I_2\lambda_{(2)} - I_3 = 0 \\ \lambda_{(3)}^3 - I_1\lambda_{(3)}^2 + I_2\lambda_{(3)} - I_3 = 0 \end{cases},$$

кожне з яких перетворюється у тотожність, тому що ми обрали головні значення $\lambda_{(1)}, \lambda_{(2)}, \lambda_{(3)}$.

Наслідок. Скориставшись цією теоремою зводимо визначення будь-якого натурального степеня тензора Т до лінійної комбінації одиничного тензора Е, а також першого та другого степенів тензора T, T^2.

Отже $\mathrm{T}^0 = \mathrm{E}, \mathrm{T}^1 = \mathrm{T}, \mathrm{T}^2 = \mathrm{T}^2$, (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) — комбінації коефіцієнтів по тензорах $\mathrm{E}, \mathrm{T}, \mathrm{T}^2$.

Маємо $\mathrm{T}^3 = I_1\mathrm{T}^2 - I_2\mathrm{T} + I_3\mathrm{E}$, де $I_1; -I_2; I_3$ — коефіцієнти розкладання. Помножимо обидві частини рівняння (8.1) на Т : $\mathrm{T}^4 - I_1\mathrm{T}^3 + I_2\mathrm{T}^2 - I_3\mathrm{T} = 0$.

Звідси маємо

$$\begin{aligned} \mathrm{T}^4 &= I_1\mathrm{T}^3 - I_2\mathrm{T}^2 + I_3\mathrm{T} = I_1(I_1\mathrm{T}^2 - I_2\mathrm{T} + I_3\mathrm{E}) - I_2\mathrm{T}^2 + I_3\mathrm{T} = \\ &= (I_1{}^2 - I_2)\mathrm{T}^2 + (I_3 - I_1I_2)\mathrm{T} + I_1I_3\mathrm{E}, \end{aligned} \tag{8.2}$$

де $(I_1{}^2 - I_2); (I_3 - I_1I_2); I_1I_3$ — коефіцієнти розкладання. Далі можна діяти з індукцією для $\mathrm{T}^5, \mathrm{T}^6$ тощо.

§9. Вектори і тензори в n-мірному просторі

Досить часто при описі фізичних процесів й явищ необхідно використати факторні багатовимірні простори. Наприклад, у теорії відносності використовується чотиривимірний простір подій, з інтервалом

$$ds^2 = C^2dt^2 - dx_1{}^2 - dx_2{}^2 - dx_3{}^2 .$$

У класичній механіці для опису руху матеріальної точки використовується шестимірний вектор $\left(x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3\right)$, де x_1, x_2, x_3 — координати точки, v_1, v_2, v_3 — компоненти швидкості. Тому природно розглянути алгебру векторів і тензорів у деякому $n-$мірному просторі. З фізичних міркувань ці простори повинні бути лінійними, з операціями додавання й множення на число. .

Якщо взяти два елементи із простору векторів або тензорів, то в результаті додавання також виходить елемент простору. Наприклад $n-$мірні вектори
$\overline{a} = \left(a_1, a_2, ..., a_n\right)$ та $\overline{b} = \left(b_1, b_2, ..., b_n\right)$ при додаванні дають $n-$мірний вектор:

$$\overline{c} = \overline{a} + \overline{b} = \left(a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n\right).$$

Крім того вводитися операція множення на число або скаляр, у результаті якого виходить елемент простору $\lambda\overline{a} = \left(\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n\right)$.

Потім переходимо до розгляду систем лінійно залежних і лінійно-незалежних векторів. Максимальна по кількості система лінійно-незалежних векторів утворює базис простору. Зручно використати простір, коли його розмірність збігається з кількістю векторів базису. Наприклад, якщо розглянути множину компланарних векторів , то у звичайному тривимірному просторі вони мають три компоненти, а базис – дві. Тому переходимо до двокомпонентного запису, у який входять коефіцієнти розкладання по базису.

Далі, як правило, у просторі вводиться метрика. Наприклад, для того, щоб порівнювати вектори по модулю. Найпростіший випадок евклідовий простір, коли вводиться скалярний добуток: $\overline{a} \cdot \overline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = a_i b_i$ (декартових базис), та $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_i \cdot a^i}$, $\left|\overline{b}\right| = \sqrt{b_i \cdot b^i}$.

Не завжди в просторі доцільно використовувати евклідову метрику, наприклад простір подій у теорії відносності неевклідовий (простір Мінковського). Проте до використовуваних величин пред'являється вимога тензорності, тобто при припустимих перетвореннях координат компоненти повинні перетворюватися як компоненти тензорів відповідного рангу. Це необхідно для того, щоб закони, записані за допомогою цих величин мали інваріантну форму тобто незалежну від зміни системи координат.

У природній формі цій вимозі відповідає запис тензорів:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^{ij}_{\ldots ks} \qquad \overline{e}_i \otimes \overline{e}_j \ldots . \overline{e}^k \otimes \overline{e}^s$$

компоненти i, j — контраваріантні базис $\overline{e}_i, \overline{e}_j$ — основний

k, s — коваріантні $\overline{e}^k, \overline{e}^s$ — взаємний

Перетворення систем координат задаються виразом вектора старого базису через лінійну комбінацію нового базису або навпаки. Підставляючи відповідний вираз в покомпонентний запис тензора, одержуємо відповідний закон зміни компонентів. Саме так повинна змінюватися відповідна тензорна величина.

§10. Тензорні поля

При описі і дослідженні фізичних явищ і процесів у просторі виділяється деяка область V, що має певні властивості й потім розглядається її динаміка: тобто як із часом змінюється як сама область так й її властивості. Властивість описується скалярною, векторною або тензорною величиною. Для того, щоб підкреслити, що ця величина розглядається в деякій області простору, говорять про відповідне тензорне поле [5]. Якщо в кожній точці області V простору задана скалярна функція $\varphi = \varphi(\overline{r}, t)$, де $\overline{r}$ — радіус-вектор, t — час, то говорять, що в цій області задано скалярне поле.

Методами математичного аналізу зміна поля описується за допомогою повної похідної функції φ

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \mathrm{grad}\,\varphi\cdot\overline{v}$$

Повна похідна від функції за часом ще іноді називається матеріальною похідною, тому що другий доданок ураховує найшвидшу зміну функції (по частках), а також швидкості самих часток.

Часто розглядають стаціонарні поля, які не змінюється із часом, вони описуються законами виду $\varphi = \varphi(r)$. Зміна поля характеризується зміною градієнта функції й похідній по напрямку (рис.7). Наприклад, поле температур – скалярне поле.

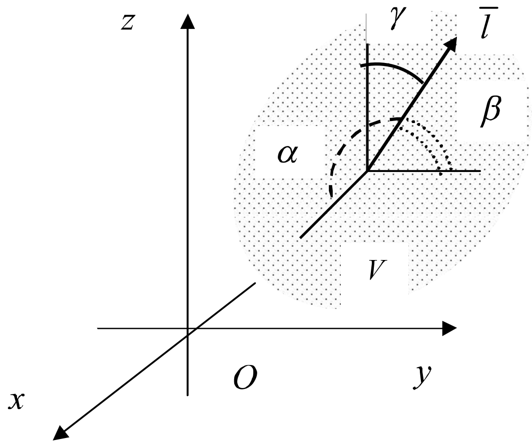


Рис. 7

Маємо,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial l} = \mathrm{grad}\varphi \cdot \overline{l}^{0} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos\gamma$$

$$\overline{l}^{0} = (\cos\alpha\ ; \cos\beta\ ; \cos\gamma), \quad \mathrm{grad}\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\overline{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\overline{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\overline{k}$$

Якщо в кожній точці області V задана деяка вектор-функція $\overline{a}$ то говорять, що задано векторне поле. Наприклад, поле швидкостей і прискорень часток суцільного середовища, поле сил тяжіння, електромагнітне поле, коли задані дві нерозривно зв'язані величини (рівняння Максвелла). Для простоти зупинимося на випадку стаціонарних векторних полів: $\overline{a} = \overline{a}(\overline{r})$.

Зміна стаціонарного векторного поля описується за допомогою дивергенції і ротора векторного поля $\left(\nabla = \overline{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \overline{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \overline{k}\,\frac{\partial}{\partial z}\right)$:

$$\mathrm{div}\overline{a} = \nabla \cdot \overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\,,$$

Нехай дане скалярне поле $p = p(x,y,z)$.

Диференціальний оператор Лапласа визначається формулою:

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}. \qquad (14.1)$$

Подання оператора Лапласа в декартових координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

З урахуванням можливості використання криволінійних координат знайдемо інваріантне подання оператора Лапласа: $\Delta p = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, p) = \nabla^2 p$, тому що в декартових координатах

$$\mathrm{grad}\, p = \frac{\partial p}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial p}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial p}{\partial z}\bar{k}; \quad \mathrm{div}\,\bar{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

Далі $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, p) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = \Delta p$,

тобто приходимо до оператору Лапласа.

У криволінійних координатах:

$$\bar{b} = \mathrm{grad}\, p = \bar{e}_u \underbrace{\frac{1}{H_u}\frac{\partial p}{\partial u}}_{b_u} + \bar{e}_v \underbrace{\frac{1}{H_v}\frac{\partial p}{\partial v}}_{b_v} + \bar{e}_w \underbrace{\frac{1}{H_w}\frac{\partial p}{\partial w}}_{b_w}. \qquad (14.2)$$

Тоді

$$\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, p) = \mathrm{div}\bar{b} = \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(b_u H_v H_w\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(b_v H_u H_w\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(b_w H_u H_v\right)\right)$$

$$= \frac{1}{H_u H_v H_w}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial p}{\partial u}\cdot\frac{H_v H_w}{H_u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial p}{\partial v}\cdot\frac{H_u H_w}{H_v}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial p}{\partial w}\cdot\frac{H_u H_v}{H_w}\right)\right) \qquad (14.3)$$

У циліндричній системі координат маємо: $H_u = H_\rho = 1$; $H_v = H_\varphi = \rho$; $H_w = H_z = 1$. Тоді дістанемо, що

$$\Delta p = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\cdot\rho\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial p}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial p}{\partial z}\cdot\rho\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\rho\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2}+\frac{\partial p}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\rho\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right]=\frac{\partial^2 p}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{\partial p}{\partial\rho}$$

Отже, запис оператора Лапласа в циліндричних координатах такий:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}. \qquad (14.4)$$

У сферичних координатах $u=r, v=\varphi, w=\theta$. Звідси маємо

$$H_u = H_r = 1; \quad H_v = H_\varphi = r\sin\varphi; \quad H_w = H_\theta = r,$$

$$\Delta p = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\cdot r^2\sin\theta\right)+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial p}{\partial\varphi}\cdot\frac{1}{\sin\theta}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial p}{\partial\theta}\cdot\sin\theta\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}\cdot r^2\sin\theta+2r\sin\theta\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}\cdot\sin\theta+\cos\theta\frac{\partial p}{\partial\theta}\right]=$$

$$=\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\cdot\frac{\partial p}{\partial r}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 p}{\partial\theta^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial p}{\partial\theta}\cdot ctg\theta$$

Отже, запис оператора Лапласа в сферичних координатах має вид:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{2}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\cdot ctg\theta\cdot\frac{\partial}{\partial\theta}. \qquad (14.5)$$

§15. Інтегральні теореми векторного й тензорного аналізу

15.1. Циркуляція вектора. Теорема Стокса

Нехай в області V простору задане векторне поле: $\overline{a}=\overline{a}(\overline{r},t)$, де момент часу t виступає як параметр і $\overline{r}=x\cdot\overline{i}+y\cdot\overline{j}+z\cdot\overline{k}$. Нехай усередині області V розташований контур L і поверхня S, обмежена цим контуром (рис. 11).

Розглянемо також контур $l\subset L$.

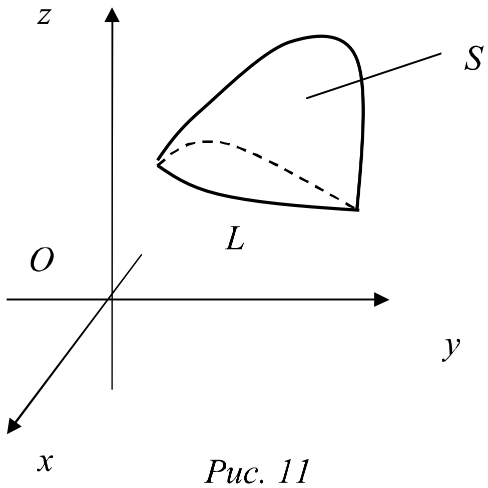


Рис. 11

Циркуляцією вектора $\overline{a}$ по контуру l називається криволінійний інтеграл

$$\int_l \overline{a} \cdot d\overline{r} = \int_l a_x dx + a_y dy + a_z dz. \qquad (15.1)$$

Відома теорема векторного аналізу, що встановлює зв'язок між поверхневими і криволінійними інтегралами.

Теорема Стокса: Циркуляція вектора $\overline{a}$ по замкненому контуру L дорівнює потоку $\mathrm{rot}\,\overline{a}$ даного вектора через поверхню S із границею – контуром L (рис 11):

$$\int_L \overline{a} \cdot d\overline{r} = \iint_S \overline{n} \cdot \left(\nabla \times \overline{a}\right) ds = \iint_S \overline{n} \cdot \mathrm{rot}\,\overline{a} ds\,. \qquad (15.2)$$

Окремий випадок: коли контур і поверхня плоскі (рис. 12). Тоді $\overline{a} = a_x \overline{i} + a_y \overline{j} = P(x, y)\overline{i} + Q(x, y)\overline{j}$, $\overline{n} = \overline{k}$ — зовнішня нормаль.

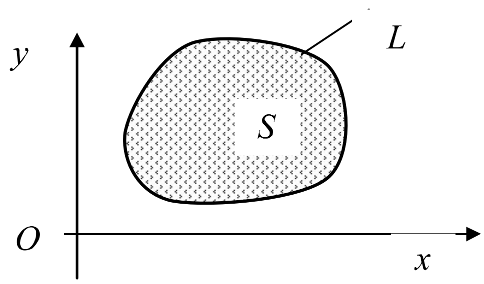


Рис. 12

Отже,

$$\int\limits_L \overline{a}\cdot d\overline{r} = \oint\limits_L Pdx + Qdy\,. \tag{15.3}$$

Обчислимо у цьому випадку ротор векторного поля. Маємо

$$\nabla\times\overline{a} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \underbrace{-\frac{\partial Q}{\partial z}}_{0}\cdot\overline{i} + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z}}_{0}\cdot\overline{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\overline{k}.$$

Тоді $\mathrm{rot}\,\overline{a} = \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}\right)\cdot\overline{k}, \quad ds = dx\,dy$. Теорема Стокса для площини

$$\iint\limits_S \overline{n}\cdot\mathrm{rot}\,\overline{a}\;ds = \iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy.$$

Для плоскої області S й її контуру L з теореми Стокса випливає

формула Гріна:
$$\oint\limits_L Pdx + Qdy = \iint\limits_S\left(\frac{dQ}{dx}-\frac{dP}{dy}\right)dx\,dy. \tag{15.4}$$

15.2. Теорема Остроградського - Гаусса

Нехай усередині області V простору з поверхнею S задане векторне поле: $\overline{a} = \overline{a}(\overline{r},t)$ (рис.13).

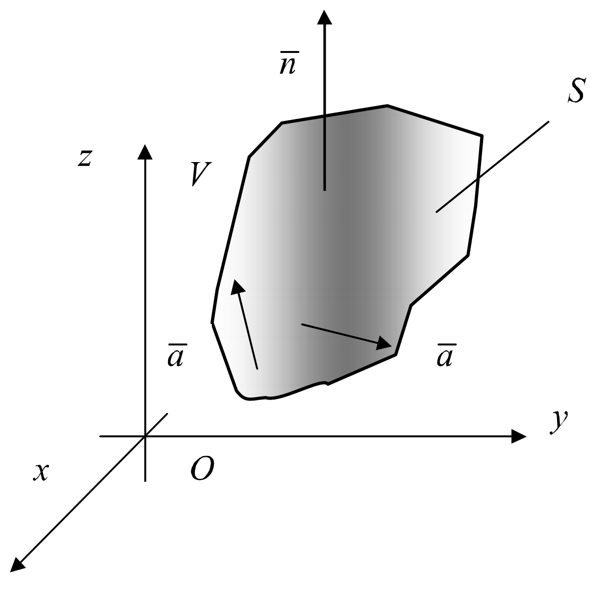


Рис. 13

Буде вірною наступна теорема.

Теорема Остроградського – Гаусса.

Інтеграл від дивергенції вектора $\overline{a}$ по об'єму V дорівнює потоку вектора $\overline{a}$ через поверхню S, що обмежує об'єм V ($\overline{n}$ – вектор зовнішньої нормалі).

$$\iiint\limits_V div\overline{a}\, dv = \oiint\limits_S \overline{n}\cdot\overline{a}\, ds. \tag{15.5}$$

Якщо розписати формулу (15.5) більш докладніше, вона прийме вид

$$\iiint\limits_V \left(\frac{da_x}{dx}+\frac{da_y}{dy}+\frac{da_z}{dz}\right) dx\, dy\, dz = \oiint\limits_S \left(a_x n_x + a_y n_y + a_z n_z\right) ds.$$

Зауваження.

Теорема Остроградського – Гаусса поширюється й на тензори більш високого рангу (чим вектори).

Нехай, наприклад, усередині об'єму V задане тензорне поле, тензора другого рангу:

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}(\overline{r}, t)$$

$$\mathrm{T} = \mathrm{T}^{ij}\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$$

Тоді формулювання теореми Остроградського – Гаусса має вигляд:

$$\iiint\limits_V \underbrace{\nabla\cdot \mathrm{T} dv}_{\mathrm{divT}} = \oiint\limits_S \overline{n}\cdot \mathrm{T} ds. \tag{15.5}$$

§16. Приклади розв'язування задач

Приклад 1. Дано тензор напружень матрицею компонентів

$$\mathrm{T}_\sigma = \begin{pmatrix} 15 & -8 & 10 \\ -8 & -10 & 5 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix}, \text{ МПа.}$$

Знайти кульову T_0 та девіаторну D_σ складові тензора.

Розв'язання: Розклад тензора на кульову та девіаторну складові має вигляд $\mathrm{T}_\sigma = \mathrm{T}_0 + \mathrm{D}_\sigma$, де $\mathrm{T}_0 = \sigma_0 \mathrm{E}$, $\sigma_0 = \frac{1}{3}\sigma_{ii} = \frac{1}{3}(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})$, та

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11}-\sigma_0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{11}-\sigma_0 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Тоді маємо $\sigma_0 = \frac{1}{3}(15-10+25)=10$, МПа.

$T_0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$ — кульовий тензор, $D_\sigma = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & -20 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$ — девіатор.

Наведемо тепер розв'язок цієї задачі за допомогою пакету MathCAD.

$\mathrm{ORIGIN} := 1$

$i := 1..3 \qquad j := 1..3$

Тензор напружень

Середня напруга

$$T\sigma := \begin{pmatrix} 15 & -8 & 10 \\ -8 & -10 & 5 \\ 10 & 5 & 25 \end{pmatrix} \qquad T\sigma 0 := \frac{1}{3}\cdot\sum_{i=1}^{3} T\sigma_{i,i} \qquad T\sigma 0 = 10$$

Девіатор напружень (тензорний запис)

$$DT\sigma_{i,j} := T\sigma_{i,j} - \delta(i,j)\cdot T\sigma 0 \qquad DT\sigma = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & -20 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Кульовий тензор (матричний запис)

$$T0_{i,j} := \delta(i,j)\cdot T\sigma 0 \qquad T0 = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Девіатор напружень (матричний запис)

$$DT\sigma := T\sigma - T0 \qquad DT\sigma = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 10 \\ -8 & -20 & 5 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

З прикладу видно, що тензорний запис більш коротший та простіший, ніж матричний. Існує багато посібників до роботи з пакетом MathCAD, наприклад [6].

Приклад 2. У точці M тіла тензор напружень має матрицю компонентів

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} 18 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ МПа.}$$

Для площадки, що задана нормаллю $\bar{n} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}$, знайти: а) вектор напруження $\bar{\sigma}$, б) нормальну σ_{nn} і дотичну $\sigma_{n\tau}$ складові $\bar{\sigma}$, повне напруження σ_n.

Розв'язання: Вектор напруження на обраній площадці обчислюється за формулою $[7]$ $\bar{\sigma} = \mathrm{T} \cdot \bar{n}$, або за співвідношеннями Коші

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \mathrm{T}_{11}n_1 + \mathrm{T}_{12}n_2 + \mathrm{T}_{13}n_3 \\ \sigma_2 &= \mathrm{T}_{21}n_1 + \mathrm{T}_{22}n_2 + \mathrm{T}_{23}n_3 \, . \\ \sigma_3 &= \mathrm{T}_{31}n_1 + \mathrm{T}_{32}n_2 + \mathrm{T}_{33}n_3 \end{aligned}$$

Маємо

$$\sigma_1 = 18 \cdot 0 + 6 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -3\sqrt{2}, \text{ МПа.}$$

$$\sigma_2 = 6 \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}, \text{ МПа.}$$

$$\sigma_1 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ МПа.}$$

Вектор напруження

$$\bar{\sigma} = -3\sqrt{2}\,\bar{i} - \sqrt{2}\,\bar{j} + \frac{\sqrt{2}}{2}\bar{k}, \text{ МПа.}$$

Нормальне напруження на площадці

$$\sigma_{nn} = \bar{\sigma} \cdot \bar{n} = \sigma_1 n_1 + \sigma_2 n_2 + \sigma_3 n_3 \, .$$

Повне напруження на площадці

$$\sigma_n = |\overline{\sigma}| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}\,.$$

Дотичне напруження на площадці

$$\sigma_{n\tau} = \sqrt{\sigma_n^2 - \sigma_{nn}^2}\,.$$

Остаточно маємо

$$\sigma_{nn} = \frac{3}{2} = 1{,}5\,\text{МПа},\ \sigma_n = \sqrt{20{,}5} \approx 4{,}53\,\text{МПа},\ \sigma_{n\tau} = \sqrt{18{,}25} \approx 4{,}27\,\text{МПа}.$$

$$\mathrm{T} := \begin{pmatrix} 18 & 6 & 0 \\ 6 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\mathrm{MPa} \qquad \mathrm{n} := \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$

$$\sigma := \mathrm{T}\cdot\mathrm{n} \qquad \sigma \rightarrow \begin{pmatrix} -3\cdot\sqrt{2}\cdot\mathrm{MPa} \\ -\sqrt{2}\cdot\mathrm{MPa} \\ \frac{\sqrt{2}\cdot\mathrm{MPa}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\sigma\mathrm{nn} := \sigma\cdot\mathrm{n} = 1.5\,\mathrm{MPa} \qquad \sigma\mathrm{n} := |\sigma| = 4.528\,\mathrm{MPa}$$

$$\sigma\mathrm{n}\tau := \sqrt{\sigma\mathrm{n}^2 - \sigma\mathrm{nn}^2} = 4.272\,\mathrm{MPa}$$

Приклад 3. Тензор питомої електропровідності кристала дорівнює (в одиницях $10^{-7}\,Ом^{-1}м^{-1}$):

$$\mathrm{T} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix}.$$

Для орта вектора напруженості електричного поля $\overline{n} = \frac{1}{2}\overline{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\overline{k}$ (E = 2В/м) знайти: а) вектор $\overline{j}$ густини струму та тензор питомого опору P.

Розв'язання. Вектор напруженості електричного поля

$$\overline{E} = E \cdot \overline{n} = 2\left(\frac{1}{2}; 0; \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(1; 0; \sqrt{3}\right), \text{ або } \overline{E} = \overline{i} + \sqrt{3}\,\overline{k}\,.$$

Вектор густини струму $\overline{j} = \mathrm{T} \cdot \overline{E}$, тоді

$$\mathrm{T} \cdot \overline{E} = \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 8\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

або $\overline{j} = 15\overline{i} + 9\overline{j} + 8\sqrt{3}\overline{k}$ (в одиницях $10^{-7}\,ам^{-2}$).

Тензор питомого опору $P = \mathrm{T}^{-1}$ за умови $P \cdot \mathrm{T} = E$, тоді

$$P = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}, \quad \text{де } \Delta = \begin{vmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 8 \end{vmatrix} = 1245$$

(в одиницях $10^{-21}Ом^{-3}м^{-3}$). Знайдемо елементи A_{ij} матриці P:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ -3\sqrt{3} & 8 \end{vmatrix} = 83; \quad A_{12} = 0; \quad A_{13} = 0; \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -3\sqrt{3} & 8 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{22} = \begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 120; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & -3\sqrt{3} \end{vmatrix} = 45\sqrt{3}; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 7 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 3\sqrt{3} \end{vmatrix} = -45\sqrt{3}; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 15 & 0 \\ 0 & 7 \end{vmatrix} = 105$$

в одиницях $10^{-4}Ом^{-2}м^{-2}$.

Остаточно маємо $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8}{83} & -\frac{3\sqrt{3}}{83} \\ 0 & \frac{3\sqrt{3}}{83} & \frac{7}{83} \end{bmatrix}$ в одиницях $10^{7}\,Ом \cdot м$.

$$\mathrm{Tk} := \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 3\sqrt{3} \\ 0 & -3\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix} 10^{-7}\mathrm{ohm}^{-1}\mathrm{m}^{-1} \qquad \mathrm{n} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} \qquad \mathrm{E0} := 2\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$\mathrm{E} := \mathrm{E0}\cdot\mathrm{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1.732 \end{pmatrix} \frac{\mathrm{m}\cdot\mathrm{kg}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}^3}$$

$$\mathrm{j} := \mathrm{Tk}\cdot\mathrm{E} \qquad \mathrm{j} = \begin{pmatrix} 1.5\times 10^{-6} \\ 9\times 10^{-7} \\ 1.386\times 10^{-6} \end{pmatrix} \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$$

$$\mathrm{P} := \mathrm{Tk}^{-1}$$

$$\mathrm{P} \to \begin{pmatrix} \frac{2\times 10^{6}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{8\times 10^{7}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{83} & -\frac{3\times 10^{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{83} \\ 0 & \frac{3\times 10^{7}\cdot\sqrt{3}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{83} & \frac{7\times 10^{7}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{ohm}}{83} \end{pmatrix}$$

Приклад 4. Дано $|\overline{e}_1| = 1{,}5;$ $|\overline{e}_2| = \sqrt{2}$ та кут $\varphi = \pi/4$ основного базису (рис. 14), розклад вектора $\overline{b} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2$ в основному базисі. Знайти: 1) взаємний базис $\overline{e}^1, \overline{e}^2$; 2) метричний тензор. Встановити зв'язок контра- і коваріантних компонентів вектора $\overline{b}$.

Розв’язання. За умовами задачі $\overline{b} = \overline{e}_1 + 2\overline{e}_2 = B^1\overline{e}_1 + B^2\overline{e}_2$. Тобто $B^1 = 1;$ $B^2 = 2$. У взаємному базисі маємо $\overline{b} = B_1\overline{e}^1 + B_2\overline{e}^2$, причому $\overline{e}^1 \perp \overline{e}_2$, $\widehat{\overline{e}^1\overline{e}_1} = \pi/4$, $\overline{e}^2 \perp \overline{e}_1$, $\widehat{\overline{e}^2\overline{e}_2} = \pi/4$. Тоді

$$\left|\overline{e}^1\right| = \frac{1}{|\overline{e}_1|\cdot\cos\frac{\pi}{4}} \approx \frac{1}{1{,}5\cdot 0{,}707} \approx 0{,}94 \text{ та } \left|\overline{e}^2\right| = \frac{1}{|\overline{e}_2|\cdot\cos\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2} = 1.$$

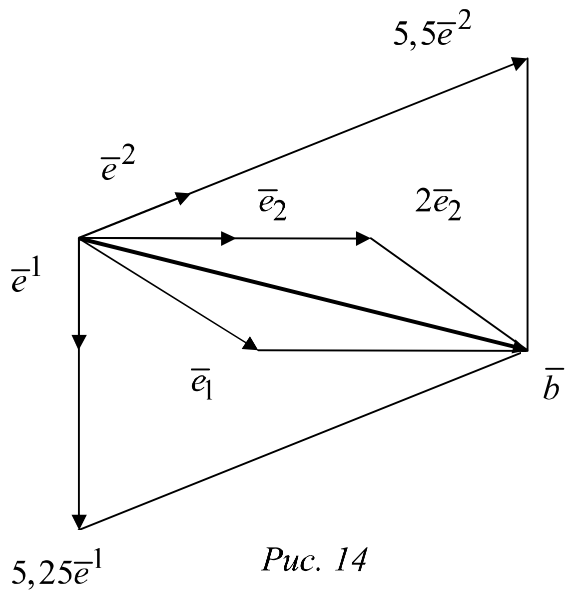


Рис. 14

Знаходимо компоненти метричного тензора

$$g_{11} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_1 = |\bar{e}_1|^2 = 1{,}5^2 = 2{,}25;$$

$$g_{12} = g_{21} = \bar{e}_1 \cdot \bar{e}_2 = |\bar{e}_1| \cdot |\bar{e}_2| \cos\frac{\pi}{4} =$$

$$= 1{,}5 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}5;$$

$$g_{22} = \bar{e}_2 \cdot \bar{e}_2 = |\bar{e}_2|^2 = \sqrt{2}^2 = 2.$$

Коваріантні компоненти вектора $\bar{b}$ знаходимо за формулами:

$$B_1 = g_{11}B^1 + g_{12}B^2; \quad B_2 = g_{21}B^1 + g_{22}B^2.$$

Після підстановки відповідних значень маємо:

$$B_1 = 2{,}25 \cdot 1 + 1{,}5 \cdot 2 = 5{,}25; \quad B_2 = 1{,}5 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 5{,}5.$$

Остаточно отримаємо

$$\bar{b} = B_1\bar{e}^1 + B_2\bar{e}^2 = 5{,}25\bar{e}^1 + 5{,}5\bar{e}^2.$$

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 1

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}^3$ взаємного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}_2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2\times\vec{e}_1}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}^2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{2j}\cdot A_{ij}$

а	б	в	г
$A_{11}+A_{22}-A_{33}$	$A_{11}+A_{22}+A_{33}$	A_{i2}	$-A_{11}-A_{22}-A_{33}$

3. Піднімання індексів компонентів T_{ik} тензору другого рангу **T** виконується за формулами

а	б	в	г
$\mathrm{T}^{ml}=g^{ik}\mathrm{T}_{ik}$	$\mathrm{T}^{ij}=g^{im}g_{jk}\mathrm{T}_{mk}$	$\mathrm{T}^{jm}=g^{ji}g^{mk}\mathrm{T}_{ik}$	$\mathrm{T}^{ij}=g^{ik}\mathrm{T}_{jk}$

4. Знайти компоненту T'_{11} тензору **T** з матрицею $\begin{bmatrix}1&3&2\\3&5&1\\-2&1&4\end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
2	$2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	6

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $4C_{1122}-3C_{2121}$ добутку $A\otimes B$ тензорів з матрицями $A=\begin{bmatrix}3&2&3\\-1&0&1\\1&10&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&3&2\\-1&0&1\\2&6&-1\end{bmatrix}$

а	б	в	г
0	12	– 10	– 18 ?

6. Згорнути тензор T_{ijkl} за останніх двох індексів.

а	б	в	г
$T_{i1k1}+T_{i2k2}-T_{i3k3}$	$T_{i111}+T_{i222}+T_{i333}$	$T_{ij11}+T_{ij22}+T_{ij33}$	$T_{11}+T_{22}+T_{33}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot\mathrm{grad}\,u$

а	б	в	г
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T=\begin{bmatrix}5&6&3\\-1&0&1\\1&2&-1\end{bmatrix}$, $k=-2$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a}=2x\vec{i}+(3-y)\vec{j}+4z\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами: $x=0$; $x=a$; $y=0$; $y=c$; $z=0$; $\dfrac{y}{c}+\dfrac{z}{d}=1$.

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=x_1^2\vec{e}_1+2x_1x_2\vec{e}_2+x_1x_3^2\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 2

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}^1$ взаємного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}_2\times\vec{e}_3}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2\times\vec{e}_3}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2\times\vec{e}^3}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{i1}\cdot\delta_{j2}\cdot A_{ij}$

а	б	в	г
A_{21}	$A_{11}+A_{12}+A_{13}$	$A_{12}+A_{13}+A_{11}$	A_{12}

3. Опускання індексів компонентів T^{ij} тензору другого рангу Т виконується за формулами

а	б	в	г
$\mathrm{T}_{ij}=g_{ik}\mathrm{T}^{ij}$	$\mathrm{T}_{ij}=g^{ik}g_{jm}\mathrm{T}^{mk}$	$\mathrm{T}_{km}=g_{ki}g_{mj}\mathrm{T}^{ij}$	$\mathrm{T}_{ij}=g^{ik}\mathrm{T}^{jk}$

4. Знайти компоненту T'_{13} тензору Т з матрицею $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 1\\ -2 & 1 & 4\end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
$1{,}5\sqrt{2}$	2	$-\sqrt{2}$	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $C_{2112}-3C_{2333}$ добутку $A\otimes B$ тензорів з матрицями $A=\begin{bmatrix}3 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 10 & -1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & 2\\ -1 & 0 & 1\\ 2 & 6 & -1\end{bmatrix}$

а	б	в	г
10	0	– 15	23

6. Згорнути тензор T^{klm} за останніх двох індексів.

а	б	в	г
$\mathrm{T}^{k11}+\mathrm{T}^{k22}+\mathrm{T}^{k33}$	$\mathrm{T}^{k11}+\mathrm{T}^{k22}-\mathrm{T}^{k33}$	$\mathrm{T}^{111}+\mathrm{T}^{222}+\mathrm{T}^{333}$	$\mathrm{T}^{11k}-\mathrm{T}^{22k}+\mathrm{T}^{33k}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot\mathrm{grad}\,u$

а	б	в	г
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора Т з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $\mathrm{T}=\begin{bmatrix}1 & -3 & 3\\ -2 & -6 & 13\\ -1 & -4 & 8\end{bmatrix}$, $k=1$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a}=5\vec{i}+2y\vec{j}-3z\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами:

$x=0$; $x=a$; $y=0$; $y=b$; $z=0$; $\dfrac{x}{a}+\dfrac{z}{c}=1$.

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=(x_1+x_2)\vec{e}_1+\sqrt{x_1x_2}\,\vec{e}_2+x_3^3\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 3

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}_1$ основного базису визначається за формулою

а	**б**	**в**	**г**
$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}_2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2\times\vec{e}^3}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}^2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{ij}\cdot A_{ijk}$

а	**б**	**в**	**г**
$A_{11k}+A_{22k}+A_{33k}$	$A_{1kk}+A_{2kk}+A_{3kk}$	$A_{12k}+A_{23k}+A_{31k}$	$A_{11k}-A_{22k}-A_{33k}$

3. Перекидання індексів компонентів $T_m^{\cdot k}$ тензору другого рангу T виконується за формулами

а	**б**	**в**	**г**
$T^i_{\cdot j}=g^{ik}T^{\cdot k}_j$	$T^i_{\cdot j}=g^{im}g_{jk}T^{\cdot k}_m$	$T^i_{\cdot j}=g^{ik}g^{jm}T^{\cdot k}_m$	$T^i_{\cdot j}=g^{ik}T^{\cdot j}_k$

4. Знайти компоненту T'_{22} тензору T з матрицею $\begin{bmatrix}1&3&2\\3&5&1\\-2&1&4\end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	**б**	**в**	**г**
2	$2\sqrt{2}$	0	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $\alpha C_{1133}+\beta C_{1223}$ добутку $A\otimes B$ тензорів з матрицями $A=\begin{bmatrix}3&2&3\\-1&0&1\\1&10&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&3&2\\-1&0&1\\2&6&-1\end{bmatrix}$.

а	**б**	**в**	**г**
$-\alpha+2\beta$	$3\alpha-2\beta$	$-3\alpha+\beta$	$-3\alpha+2\beta$

6. Згорнути тензор T_{ij} за останніх двох індексів.

а	б	в	г
$T_{i11}+T_{i22}+T_{i33}$	$T_{11}-T_{22}+T_{33}$	$T_{i1}+T_{i2}+T_{i3}$	$T_{11}+T_{22}+T_{33}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot \mathrm{grad}\,u$

а	б	в	г
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T=\begin{bmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{bmatrix}$, $k=0$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a}=(2+3x)\vec{i}+6\vec{j}+(z-2)\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами: $x=a$; $x=b$; $y=0$; $y=c$; $z=0$; $\dfrac{y}{c}+\dfrac{z}{d}=1$.

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=(x_1^2+x_2^2)\vec{e}_1-x_2\vec{e}_2+x_3\sqrt{x_1}\,\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 4

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}^2$ взаємного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}^1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2 \times \vec{e}_1}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_3 \times \vec{e}_1}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{ij} \cdot a_i \cdot a_j$

а	б	в	г
$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1$	$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$	$a_1a_2 - a_2a_3 + a_3a_1$	$a_1{}^2 - a_2{}^2 + a_3{}^2$

3. Опускання індексів компонентів T^{km} тензору другого рангу T виконується за формулами

а	б	в	г
$\mathrm{T}_{ij} = g^{ik}\mathrm{T}^{jk}$	$\mathrm{T}_{ij} = g_{ik}g_{jm}\mathrm{T}^{mk}$	$\mathrm{T}_{ij} = g^{ik}g^{jm}\mathrm{T}^{km}$	$\mathrm{T}_{ij} = g_{ik}\mathrm{T}^{jk}$

4. Знайти компоненту T'_{31} тензору T з матрицею $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox_1'x_2'x_3'$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
2	$-0{,}5\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $3C_{1212} + 4C_{2112}$ добутку $A \otimes B$ тензорів з матрицями $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

а	б	в	г
– 30	6	12	– 10

6. Згорнути тензор $T_{ij}^{\cdot\cdot k}$ за останніх двох індексів.

а	б	в	г
$T_{i1}^{\cdot 1} + T_{i2}^{\cdot 2} + T_{i3}^{\cdot 3}$	$T_{i1}^{\cdot 1} - T_{i2}^{\cdot 2} + T_{i3}^{\cdot 3}$	$T_{i11} + T_{i22} + T_{i33}$	$T_{21}^{\cdot 1} + T_{22}^{\cdot 2} + T_{23}^{\cdot 3}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a} = u \cdot \operatorname{grad} u$

а	б	в	г
$(\nabla u)^2 + 0{,}5u \cdot \Delta u$	$(\nabla u)^2 - u \cdot \Delta u$	$(\nabla u)^2 + u \cdot \Delta u$	$(\nabla u)^2 - 2u \cdot \Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{bmatrix}$, $k = 7$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a} = -x\vec{i} + 2(x+y)\vec{j} + 3z\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами: $x = 0$; $x = a$; $y = 0$; $z = c$; $z = 0$; $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\vec{a} = \vec{a}(x_1, x_2, x_3)$ знайти градієнт $\nabla \otimes \vec{a}$, дивергенцію $\nabla \cdot \vec{a}$ і ротор $\nabla \times \vec{a}$ векторного поля $\vec{a} = \sqrt[3]{x_1}\,\vec{e}_1 + (x_1^2 - x_2^2)\vec{e}_2 - x_3^2\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Варіант № 5

Перший рівень. У завданнях 1 — 7 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку(листі) відповідей.

1. Вектор $\vec{e}_3$ основного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}^1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^2 \times \vec{e}_1}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1 \times \vec{e}^2}{\vec{e}^1 \cdot (\vec{e}^2 \times \vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1 \times \vec{e}_2}{\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{ij} \cdot a_i \cdot b_j$

а	б	в	г
$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$	$3a_ib_i$	$a_1b_1 - a_2b_2 + a_3b_3$	$a_1b_3 + a_2b_2 + a_3b_1$

3. Перекидання індексів компонентів $T^{k}_{.m}$ тензору другого рангу Т виконується за формулами

а	б	в	г
$T_i^{\cdot j} = g^{ik} T^{j}_{.k}$	$T_i^{\cdot j} = g^{ik} g_{jm} T^{k}_{.m}$	$T_i^{\cdot j} = g_{ik} g^{jm} T^{k}_{.m}$	$T^{i}_{\cdot j} = g^{ik} T_k^{\cdot j}$

4. Знайти компоненту T'_{33} тензору Т з матрицею $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
4	$1{,}2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $-C_{2233} + 3C_{3113}$ добутку $A \otimes B$ тензорів з матрицями $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

а	б	в	г
4	12	–3	6

6. Згорнути тензор $T^{i}_{.jk}$ за останніх двох індексів.

а	**б**	**в**	**г**
$T_{i11}+T_{i22}+T_{i33}$	$T^{i}_{.11}+T^{i}_{.22}+T^{i}_{.33}$	$T^{i}_{.11}-T^{i}_{.22}+T^{i}_{.33}$	$T^{1}_{.11}+T^{2}_{.22}+T^{3}_{.33}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot\operatorname{grad}u$

а	**б**	**в**	**г**
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні та математичні дії з поясненнями. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами. Перенесіть відповідь до бланку(листу) відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $T=\begin{bmatrix}5 & 6 & 3\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 2 & -1\end{bmatrix}$, $k=2$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса знайти потік векторного поля $\vec{a}=2x\vec{i}+(3-y)\vec{j}+4z\vec{k}$ через поверхню призми, яка обмежена площинами:

$$x=0\,;\ x=a\,;\ y=0\,;\ y=c\,;\ z=0\,;\ \frac{y}{c}+\frac{z}{d}=1.$$

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\vec{a}=\vec{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=\sqrt{x_1}\,\vec{e}_1+(x_1+x_2^2)\vec{e}_2+x_2\sqrt{x_3}\,\vec{e}_3$.

Модульна контрольна робота

Основи векторного та тензорного аналізу

Тестове завдання № 6

Перший рівень. У завданнях 1 — 6 виберіть одну вірну на вашу думку відповідь та позначте її у бланку відповідей.

1. Вектор $\overline{\mathrm{e}}_2$ основного базису визначається за формулою

а	б	в	г
$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}_2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$	$\dfrac{\vec{e}^3\times\vec{e}^1}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}^1\times\vec{e}^2}{\vec{e}^1\cdot(\vec{e}^2\times\vec{e}^3)}$	$\dfrac{\vec{e}_1\times\vec{e}_2}{\vec{e}_1\cdot(\vec{e}_2\times\vec{e}_3)}$

2. Знайти значення $\delta_{ij}\cdot A_{ij}$

а	б	в	г
$A_{11}+A_{22}-A_{33}$	$A_{11}+A_{22}+A_{33}$	$A_{12}+A_{23}+A_{31}$	$-A_{11}-A_{22}-A_{33}$

3. Піднімання (опускання) індексів компонентів T_{km} тензору другого рангу Т виконується за формулами

а	б	в	г
$\mathrm{T}^{ij}=g^{ik}\mathrm{T}_{jk}$	$\mathrm{T}^{ij}=g^{ik}g_{jm}\mathrm{T}_{km}$	$\mathrm{T}^{ij}=g^{ik}g^{jm}\mathrm{T}_{km}$	$\mathrm{T}^{ij}=g^{ik}\mathrm{T}_{jm}$

4. Знайти компоненту T'_{12} тензору Т з матрицею $\begin{bmatrix}1&3&2\\3&5&1\\-2&1&4\end{bmatrix}$, якщо система координат $Ox'_1x'_2x'_3$ повернута відносно $Ox_1x_2x_3$ на кут $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$ відносно осі Ox_1.

а	б	в	г
2	$2\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	3

5. Знайти алгебраїчну суму компонентів $\lambda C_{1221}+\mu C_{1122}$ добутку $A\otimes B$ тензорів з матрицями $A=\begin{bmatrix}3&2&3\\-1&0&1\\1&10&-1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5&3&2\\-1&0&1\\2&6&-1\end{bmatrix}$

а	**б**	**в**	**г**
-2λ	$-2\lambda+3\mu$	$2\lambda+3\mu$	7μ

6. Згорнути тензор T_{ijk} за останніх двох індексів.

а	**б**	**в**	**г**
$\mathrm{T}_{i11}+\mathrm{T}_{i22}-\mathrm{T}_{i33}$	$\mathrm{T}_{111}+\mathrm{T}_{222}+\mathrm{T}_{333}$	$\mathrm{T}_{i11}+\mathrm{T}_{i22}+\mathrm{T}_{i33}$	$\mathrm{T}_{111}-\mathrm{T}_{222}+\mathrm{T}_{333}$

7. Обрати формулу для знаходження дивергенції векторного поля $\vec{a}=u\cdot\mathrm{grad}\,u$

а	**б**	**в**	**г**
$(\nabla u)^2+0{,}5u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2+u\cdot\Delta u$	$(\nabla u)^2-2u\cdot\Delta u$

Розв'язання задач 8-10 повинно мати обґрунтування. Запишіть послідовні логічні дії та пояснення. Якщо потрібно проілюструйте розв'язання завдань схемами, графіками, таблицями. Перенесіть відповідь до бланку відповідей.

Другий рівень.

8. Знайти головний напрямок $\vec{n}$ тензора T з матрицею T_{ij}, який відповідає власному значенню k: $\mathrm{T}=\begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{bmatrix}$, $k=1$.

9. Використовуючи теорему Остроградського – Гаусса, знайти потік векторного поля $\bar{a}=2x\bar{i}-(3y+5)\bar{j}+(4z-3)\bar{k}$ через поверхню призми , яка обмежена площинами: $x=0$; $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$; $y=0$; $y=b$; $z=0$; $z=c$.

Третій рівень.

10. Для векторного поля $\bar{a}=\bar{a}(x_1,x_2,x_3)$ знайти градієнт $\nabla\otimes\vec{a}$, дивергенцію $\nabla\cdot\vec{a}$ і ротор $\nabla\times\vec{a}$ векторного поля $\vec{a}=x_1\vec{e}_1+x_1x_2\vec{e}_2+x_1^2x_3^2\vec{e}_3$.

КОМЕНТАР ДО РОЗВ'ЯЗАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ

Завдання 1. Правильна відповідь: б.

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: основний та взаємний базиси .)

Завдання 2. Правильна відповідь: б.

$$\delta_{ij}A_{ij} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}.$$

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: правило А. Ейнштейна запису сум).

Завдання 3. Правильна відповідь: в.

Розв'язання. Піднімання індексів виконується за допомогою основного метричного тензора $T^{mn} = g^{mi}g^{nk}T_{ik}$. Так само можна опускати індекси.

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: перекидання індексів.)

Завдання 4. Правильна відповідь: а.

Розв'язання. На підставі відомих формул маємо

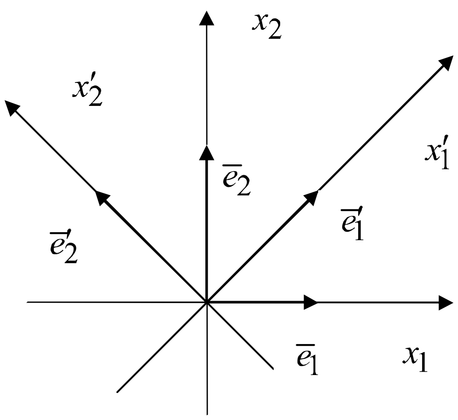


Рис.15

$$T = T'_{ik}\,\bar{e}'_i\,\bar{e}'_k = T_{mn}\,\bar{e}_m\,\bar{e}_n = T_{mn}\alpha^i_m\alpha^k_n\bar{e}'_i\,\bar{e}'_k,$$

де $\bar{e}_m = \alpha^i_m\bar{e}'_m$; $\bar{e}_n = \alpha^k_n\bar{e}'_k$.

Так як $T'_{ik} = \alpha^i_m\alpha^n_k T_{mn}$, тоді

$$T'_{12} = \alpha^1_m\alpha^2_n T_{mn} = \alpha^1_1\alpha^2_1 T_{11} + \alpha^1_1\alpha^2_2 T_{12} +$$
$$+\alpha^1_1\alpha^2_3 T_{13} + \alpha^1_2\alpha^2_1 T_{21} + \alpha^1_2\alpha^2_2 T_{22} + \alpha^1_2\alpha^2_3 T_{23} +$$
$$+\alpha^1_3\alpha^2_1 T_{31} + \alpha^1_3\alpha^2_2 T_{32} + \alpha^1_3\alpha^2_3 T_{33}$$

Маємо

$$\bar{e}_1 = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\alpha^1_1}e'_1 - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\alpha^2_1}e'_2 + \underbrace{0}_{\alpha^3_1}\cdot e'_3;\quad \bar{e}_2 = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\alpha^1_2}e'_1 + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\alpha^2_2}e'_2 + \underbrace{0}_{\alpha^3_2}\cdot e'_3;\quad \bar{e}_3 = \underbrace{0}_{\alpha^1_3}e'_1 + \underbrace{0}_{\alpha^2_3}e'_2 + \underbrace{1}_{\alpha^3_3}\cdot e'_3$$

$$\alpha^1_1 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha^2_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha^3_1 = 0;\ \alpha^1_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha^2_2 = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \alpha^3_2 = 0;\ \alpha^1_3 = \alpha^2_3 = 0;\ \alpha^3_3 = 1.$$

Отже,

$$\mathrm{T}'_{12} = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot 3 + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 5 = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 2$$

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: зміна компонентів тензора при перетворенні координат)

Завдання 5. Правильна відповідь: а.

Розв'язання. Для заданих матриць $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 10 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & -1 \end{bmatrix}$

маємо: $C_{1221} = A_{12}B_{21} = 2\cdot(-1) = -2; C_{1122} = A_{11}B_{22} = 3\cdot 0$. Таким чином,

$$\lambda C_{1221} + \mu C_{1122} = -2\lambda .$$

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: правило тензорного множення тензорів)

Завдання 6. Правильна відповідь: в.

Розв'язання. $\mathrm{T}_{ijj} = \mathrm{T}_{i11} + \mathrm{T}_{i22} + \mathrm{T}_{i33}$.

(*Компоненти програмових вимог, що перевіряються завданням*: знаходження згортки тензорів)

Завдання 7. Правильна відповідь: в.

Розв'язання. Для векторного поля $\overline{a} = u\cdot\mathrm{grad}u$ маємо

$$\mathrm{div}\overline{a} = \nabla\cdot(u\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 +$$

$$+u\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \left(\mathrm{grad}u\right)^2 + u\cdot\Delta u = \left(\nabla u\right)^2 + u\cdot\Delta u$$

Завдання 8.

Розв'язання. Для вектора $\overline{n} = \left(n_1; n_2; n_3\right)$ маємо

$$\begin{cases} -n_1 + 7n_2 + 4n_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ n_1 + 13n_2 - n_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 20n_2 + 3n_3 = 0 \\ n_2 = n_2 \\ n_1 = 7n_2 + 4n_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 59 \\ n_2 = -3 \\ n_3 = 20 \end{cases}.$$

Перевірка: $\begin{bmatrix} 0 & 7 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 13 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 59 \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -21+80 \\ -3 \\ 59-39 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ -3 \\ 20 \end{pmatrix}$, тобто $\mathrm{T}\cdot\overline{n} = k\cdot\overline{n}$.

Відповідь: $\overline{n} = \left(59; -3; 20\right)$

Завдання 9.

Розв'язання. За формулою Остроградського-Гаусса маємо

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\overline{a}dV = \oiint\limits_S \overline{a}\cdot\overline{n}dS .$$

Знайдемо дивергенцію поля $\overline{a} = 2x\overline{i} - (3y+5)\overline{j} + (4z-3)\overline{k}$.

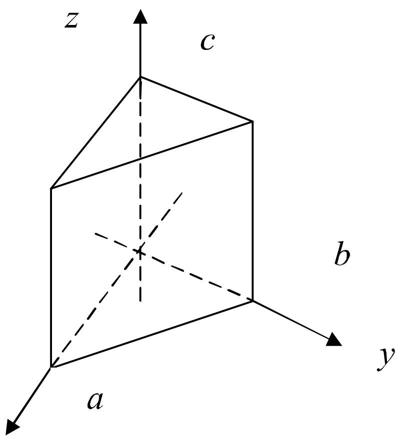


Рис. 16

$$\mathrm{div}\overline{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}(2x) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(-5-3y) + \frac{\partial}{\partial z}(4z-3) = 2-3+4 = 3$$

Тоді

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\overline{a}dV = 3\iiint\limits_V dV = 3V = 3\cdot\frac{abc}{2} = \frac{3}{2}abc$$

<u>Відповідь</u>: $\frac{3}{2}abc$.

Завдання 10.

Розв'язання. Складаємо таблицю компонентів та їх похідних.

$a_1 = x_1$	$a_2 = x_1x_2$	$a_3 = x_1^2x_3^2$
$\frac{\partial a_1}{\partial x_1} = 1$	$\frac{\partial a_2}{\partial x_1} = x_2$	$\frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 2x_1x_3^2$
$\frac{\partial a_1}{\partial x_2} = 0$	$\frac{\partial a_2}{\partial x_2} = x_1$	$\frac{\partial a_3}{\partial x_2} = 0$
$\frac{\partial a_1}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial a_2}{\partial x_3} = 0$	$\frac{\partial a_3}{\partial x_3} = 2x_1^2x_3$

Знайдемо градієнт поля

$$\nabla\otimes\overline{a} = \left(\overline{e}_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \overline{e}_2\frac{\partial}{\partial x_2} + \overline{e}_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\otimes\left(a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3\right) =$$

$$= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_2 +$$

$$+\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_2+\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_3+\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_3+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_3=\frac{\partial a_1}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_1+$$

$$+\frac{\partial a_2}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_2+\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\overline{e}_1\otimes\overline{e}_3+\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_1+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_2+\frac{\partial a_3}{\partial x_2}\overline{e}_2\otimes\overline{e}_3+$$

$$+\frac{\partial a_1}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_1+\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_2+\frac{\partial a_3}{\partial x_3}\overline{e}_3\otimes\overline{e}_3=\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\overline{e}_i\otimes\overline{e}_j=\overline{e}_1\otimes\overline{e}_1+x_2\overline{e}_2\otimes\overline{e}_1+$$

$$+x_1\overline{e}_2\otimes\overline{e}_2+2x_1x_3^2\overline{e}_3\otimes\overline{e}_1+2x_1^2x_3\overline{e}_3\otimes\overline{e}_3,$$

його дивергенцію $\nabla\cdot\overline{a}=\dfrac{\partial a_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial a_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial a_3}{\partial x_3}=1+x_1+2x_1^2x_3$ та його ротор

$$\nabla\times\overline{a}=\mathrm{rot}\,\overline{a}=\begin{vmatrix}\overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ a_1 & a_2 & a_3\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2}-\frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right)\overline{e}_1+\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3}-\frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right)\overline{e}_2+$$

$$+\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1}-\frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right)\overline{e}_3=(0-0)\overline{e}_1+(0-2x_1x_3^2)\overline{e}_2+(x_2-0)\overline{e}_3=-2x_1x_3^2\overline{e}_2+x_2\overline{e}_3.$$

БЛАНК ВІДПОВІДЕЙ

1) ☐ **2)** ☐ **3)** ☐ **4)** ☐

5) ☐ **6)** ☐ **7)** ☐

Завдання 8

Розв'язання

***Відповідь* :** ____________________

Завдання 9

Розв'язання

***Відповідь* :** ____________________

2 ТЕНЗОРНА АЛГЕБРА

2.1 Поняття тензора

На початку зупинимося на окремих випадках тензорів у тривимірному просторі.

Скаляр

Тензор нульового рангу (скаляр) – це об'єкт, який повністю визначається в будь-якій системі координат одним числом, яке не змінюється при зміні системи координат.

Вектор

Тензор першого рангу (вектор) – це об'єкт, який у будь-якій системі координат визначається трьома числами a^i, які при зміні системи координат перетворюються згідно із законом

$$a^{i'} = \alpha_k^{i'} a^k . \tag{2.1}$$

Приклад 2.1. Нехай задано два лінійно незалежних вектори в системі координат із базисом $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. З компонент цих векторів a^i і b^i утворимо всілякі добутки, позначимо їх $A^{ik} = a^i b^k$, всього отримаємо 9 чисел. Знайти закон перетворення цих чисел при переході до іншої системи координат із базисом $\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'}$.

Розв’язання: Використовуючи закон перетворення компонент вектора (2.1), отримаємо

$$a^{i'} = \alpha_l^{i'} a^l ,\ b^{k'} = \alpha_m^{k'} b^m \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A^{i'k'} = a^{i'} b^{k'} = \alpha_l^{i'} a^l \alpha_m^{k'} b^m = \alpha_l^{i'} \alpha_m^{k'} a^l b^m = \alpha_l^{i'} \alpha_m^{k'} A^{lm} .$$

Величини A^{ik} представляють приклад якісно нового, в порівнянні з вектором і скаляром, об'єкта, що має назву тензор другого рангу.

Тензор другого рангу

Тензор другого рангу – це об'єкт, який визначається в будь-якій системі координат 9 числами, які при зміні системи координат перетворюються згідно із законом

$$a^{i'k'} = \alpha_l^{i'} \alpha_m^{k'} a^{lm} . \tag{2.2}$$

Прикладами тензорів другого рангу можуть служити тензор напружень σ^{ij}, тензор деформацій ε^{ij}, тензор моментів інерції I^{ij}, метричний тензор g^{ij}.

Відзначимо, що вектор (тензор першого рангу) ми визначили трьома його контраваріантними компонентами, але вектор також однозначно визначається і за допомогою трьох його коваріантних компонент a_i, які перетворюються згідно із законом $a_{i'} = \alpha_{i'}^{k} a_k$.

Для тензорів другого рангу також можна розглядати компоненти різного роду. Так a^{ik} – *контраваріантні компоненти*, a_{ik} – *коваріантні компоненти*, $a_i^{\cdot k}, a_{\cdot k}^{i}$ – мішані компоненти тензора другого рангу. *Закони перетворення* для різних видів компонент тензора виглядатимуть таким чином:

$$a_{i'k'} = \alpha_{i'}^{l} \alpha_{k'}^{m} a_{lm}; \quad a^{i'k'} = \alpha_{l}^{i'} \alpha_{m}^{k'} a^{lm};$$
$$a_{i'}^{\cdot k'} = \alpha_{i'}^{l} \alpha_{m}^{k'} a_{l}^{\cdot m}; \quad a_{\cdot k'}^{i'} = \alpha_{l}^{i'} \alpha_{k'}^{m} a_{\cdot m}^{l}.$$

Нагадаємо, що $\alpha_{i'}^{k}, \alpha_{i}^{k'}$ це коефіцієнти прямого й зворотного перетворення векторів базисів $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ і $\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'}$, тобто $e_{i'} = \alpha_{i'}^{k} e_k$, $e_i = \alpha_{i}^{k'} e_{k'}$.

Тензор n-го рангу

Тензором n-го рангу r-раз контраваріантним і s-раз коваріантним $(n = r + s)$ називається об'єкт, який у будь-якій системі координат визначається 3^n числами (компонентами) $a_{k_1 k_2 .. k_s}^{i_1 i_2 .. i_r}$, що перетворюються при зміні системи координат згідно із законом

$$a_{k_1' k_2' .. k_s'}^{i_1' i_2' .. i_r'} = \alpha_{k_1'}^{l_1} \alpha_{k_2'}^{l_2} .. \alpha_{k_s'}^{l_s} \alpha_{m_1}^{i_1'} \alpha_{m_1}^{i_1'} .. \alpha_{m_r}^{i_r'} a_{l_1 l_2 .. l_s}^{m_1 m_2 .. m_r}. \qquad (2.3)$$

Тензор такого вигляду називають тензором типу $\begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}$.

Приклад 2.2. Задано коваріантні компоненти тензора другого рангу $a_{11} = 1,\ a_{12} = -2,\ a_{13} = 3,\ a_{21} = 2,\ a_{22} = -4,\ a_{23} = 6,\ a_{31} = 5,\ a_{32} = 1,\ a_{33} = 4$ і матриця переходу від старої системи координат до нової

$$\left\| \alpha_{i'}^{k} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \end{Vmatrix}.$$

Знайти $a_{i'k'}$ – коваріантні компоненти того ж тензора в новій системі координат.

Розв'язання: За законом $a_{i'k'} = \alpha_{i'}^{l} \alpha_{k'}^{m} a_{lm}$ перетворення коваріантних компонент тензора маємо

$$a_{1'1'} = \alpha_{1'}^{1} \alpha_{1'}^{1} a_{11} + \alpha_{1'}^{1} \alpha_{1'}^{2} a_{12} + \alpha_{1'}^{1} \alpha_{1'}^{3} a_{13} + \alpha_{1'}^{2} \alpha_{1'}^{1} a_{21} + \alpha_{1'}^{2} \alpha_{1'}^{2} a_{22} + \alpha_{1'}^{2} \alpha_{1'}^{3} a_{23} +$$
$$+ \alpha_{1'}^{3} \alpha_{1'}^{1} a_{31} + \alpha_{1'}^{3} \alpha_{1'}^{2} a_{32} + \alpha_{1'}^{3} \alpha_{1'}^{3} a_{33} = 33,$$
$$a_{1'2'} = \alpha_{1'}^{l} \alpha_{2'}^{m} a_{lm} = 93, \ a_{1'3'} = \alpha_{1'}^{l} \alpha_{3'}^{m} a_{lm} = 37, \ a_{2'1'} = \alpha_{2'}^{l} \alpha_{1'}^{m} a_{lm} = 116,$$

$$a_{2'2'} = \alpha_{2'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm} = 131,\ a_{2'3'} = \alpha_{2'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm} = -60,\ a_{3'1'} = \alpha_{3'}^{l}\alpha_{1'}^{m}a_{lm} = 92,$$
$$a_{3'2'} = \alpha_{3'}^{l}\alpha_{2'}^{m}a_{lm} = 79,\ a_{3'3'} = \alpha_{3'}^{l}\alpha_{3'}^{m}a_{lm} = -95.$$

2.2 Зв'язок між різними компонентами тензора

Різні види компонент тензора 2-го рангу, у системі координат із метрикою $ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$, зв'язані між собою формулами

$$a^{ik} = g^{il}g^{km}a_{lm},\ a_{ik} = g_{il}g_{km}a^{lm},$$
$$a_{ik} = g_{kl}a_i^{\cdot l} = g_{il}a_{\cdot k}^{l},\quad a_i^{\cdot k} = g^{kl}a_{il},\quad a_i^{\cdot k} = g_{il}a^{lk}, \tag{2.4}$$
$$a_{\cdot k}^{l} = g^{il}a_{ik},\ a_{\cdot k}^{l} = g_{ki}a^{li},\ a^{ik} = g^{il}a_l^{\cdot k} = g^{kl}a_{\cdot l}^{i}.$$

Крапка у формулах (2.4) підкреслює порядок індексів, так у записі $a_i^{\cdot k}$ перший індекс – нижній (коваріантний), а другий – верхній (контраваріантний).

Правило (2.4) одержання одних компонент тензора через інші за допомогою метричного тензора називають *операцією підняття (опускання) індексів* у компонент тензора.

Це правило полягає в тому, що індекс, який піднімається (опускається) переходить у метричний тензор, а на те місце, куди він повинен бути піднятий (опущений), ставиться «німий» індекс підсумовування; другим «німим» індексом підсумовування є вільний індекс метричного тензора.

Наприклад,

$$A_{ikl} = g_{im}A_{\cdot kl}^{m} = g_{im}g_{kn}A_{\cdot\cdot l}^{mn} = g_{km}A_{i\cdot l}^{\cdot m} = g_{im}g_{kn}g_{lr}A^{mnr} = g_{im}g_{ln}A_{\cdot k\cdot}^{m\cdot n}.$$

Приклад 2.3. Показати, що величини $g_{ik}, g^{ik}, g_i^{\cdot k}$ в системі координат з основним базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ є різними видами компонент одного й того ж тензора 2-го рангу.

Розв’язання: Знайдемо закони перетворення цих компонент при переході до нової системи координат з основним базисом $(\bar{e}_{1'}, \bar{e}_{2'}, \bar{e}_{3'})$.

$$g_{i'k'} = \bar{e}_{i'} \cdot \bar{e}_{k'} = \alpha_{i'}^{l}\bar{e}_l\alpha_{k'}^{m}\bar{e}_m = \alpha_{i'}^{l}\alpha_{k'}^{m}\bar{e}_l\bar{e}_m = \alpha_{i'}^{l}\alpha_{k'}^{m}g_{lm},$$
$$g^{i'k'} = \bar{e}^{i'} \cdot \bar{e}^{k'} = \alpha_l^{i'}\bar{e}^l\alpha_m^{k'}\bar{e}^m = \alpha_l^{i'}\alpha_m^{k'}g^{lm},$$
$$g_{i'}^{\cdot k'} = \bar{e}_{i'} \cdot \bar{e}^{k'} = \alpha_{i'}^{l}\bar{e}_l\alpha_m^{k'}\bar{e}^m = \alpha_{i'}^{l}\alpha_m^{k'}\bar{e}_l\bar{e}^m = \alpha_{i'}^{l}\alpha_m^{k'}g_l^{\cdot m}.$$

Закон перетворення для всіх видів компонент виконується. Покажемо, що це компоненти одного тензора. Для цього перевіримо чи задовольняють вони формулам зв'язку або правилу підняття, опускання індексів. Відомо, що $\bar{e}_i = g_{il}\bar{e}^l$, тоді

$$g_{ik} = \bar{e}_i \cdot \bar{e}_k = g_{il}\bar{e}^l g_{km}\bar{e}^m = g_{il}g_{km}g^{lm},$$
$$g_{ik} = g_{il}\bar{e}^l\bar{e}_k = g_{il}g_{\cdot k}^{l} = g_{kl}g_i^{\cdot l} = \bar{e}_i g_{kl}\bar{e}^l.$$

Видно, що правило (2.4) виконується, значить це компоненти одного тензора.

Відзначимо, що для змішаних компонент метричного тензора справедливі співвідношення

$$g_i^{\cdot k} = g_{\cdot i}^{k} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, \qquad (2.5)$$

де δ_{ik} – символ Кронекера.

Приклад 2.4. В декартовій системі координат $K(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \bar{i}_3)$ задано компоненти тензора другого рангу

$$\left\| A^{ik} \right\| = \left\| A_i^{\cdot k} \right\| = \left\| A_{\cdot k}^{i} \right\| = \left\| A_{ik} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Базисні вектори системи координат $K'(\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3)$ виражаються через орти декартової системи координат за співвідношеннями

$$\bar{e}_1 = \bar{i}_1, \; \bar{e}_2 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2, \; \bar{e}_3 = \bar{i}_1 + \bar{i}_2 + \bar{i}_3.$$

Визначити коваріантні, змішані й контраваріантні компоненти даного тензора в системі координат K'.

<u>Розв'язання</u>: Випишемо коефіцієнти $\alpha_{i'}^{k}$ прямого перетворення системи координат K у K', скориставшись формулами (1.7),

$$\begin{aligned} &\alpha_{1'}^{1} = 1, \quad &&\alpha_{1'}^{2} = 0, \quad &&\alpha_{1'}^{3} = 0, \\ &\alpha_{2'}^{1} = 1, \quad &&\alpha_{2'}^{2} = 1, \quad &&\alpha_{2'}^{3} = 0, \\ &\alpha_{3'}^{1} = 1, \quad &&\alpha_{3'}^{2} = 1, \quad &&\alpha_{3'}^{3} = 1. \end{aligned}$$

За законом $A_{i'k'} = \alpha_{i'}^{m} \alpha_{k'}^{n} A_{mn}$ перетворення коваріантних компонент тензора, одержимо

$$A_{1'1'} = \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{1}A_{11} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{2}A_{12} + \alpha_{1'}^{1}\alpha_{1'}^{3}A_{13} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{1}A_{21} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{2}A_{22} + \alpha_{1'}^{2}\alpha_{1'}^{3}A_{23} +$$
$$+ \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{1}A_{31} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{2}A_{32} + \alpha_{1'}^{3}\alpha_{1'}^{3}A_{33} = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 2.$$

Аналогічно знайдемо інші компоненти

$A_{1'2'} = 3$, $A_{1'3'} = 6$, $A_{2'1'} = 4$, $A_{2'2'} = 8$, $A_{2'3'} = 15$, $A_{3'1'} = 5$, $A_{3'2'} = 11$, $A_{3'3'} = 19$.

Відповідь запишемо у вигляді матриці

$$\left\| A_{i'k'} \right\| = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 4 & 8 & 15 \\ 5 & 11 & 19 \end{Vmatrix}.$$

Інші види компонент тензора знайдемо за формулами (2.4).

Для цього знайдемо коваріантні компоненти метричного тензора

$$\|g_{ik}\| = \|\bar{e}_i \cdot \bar{e}_k\| = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Знайдемо тепер контраваріантні компоненти

$$g^{ik} = \frac{G^{ik}}{G}, \; G = \det\|g_{ik}\| = 1.$$

$$G^{11} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 2, \; G^{12} = -1, \; G^{13} = 0, \; G^{21} = -1, \; G^{22} = 2,$$

$$G^{23} = -1, \; G^{31} = G^{13} = 0, \; G^{32} = G^{23} = -1, \; G^{33} = 1.$$

Звідси

$$g^{ik} = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Далі скористаємось формулами (2.4).

$A^{ik} = g^{il} g^{km} A_{lm} \Rightarrow$

$A^{11} = g^{11}g^{11}A_{11} + g^{11}g^{12}A_{12} + g^{11}g^{13}A_{13} + g^{12}g^{11}A_{21} + g^{12}g^{12}A_{22} +$

$+ g^{12}g^{13}A_{23} + g^{13}g^{11}A_{31} + g^{13}g^{12}A_{32} + g^{13}g^{13}A_{33} = 2,$

$A^{12} = -1, \; A^{13} = -1, \; A^{21} = 0, \; A^{22} = -2, \; A^{23} = 3, \; A^{31} = -1, \; A^{32} = 1, \; A^{33} = 1.$

Звідси

$$\|A^{i'k'}\| = \begin{Vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \end{Vmatrix}.$$

$A_i^{\cdot k} = g^{kl} A_{il} \;\; \Rightarrow \;\; A_1^{\cdot 1} = g^{11}A_{11} + g^{12}A_{12} + g^{13}A_{13} = 1, \;\; A_1^{\cdot 2} = -2, \;\; A_1^{\cdot 3} = 3,$
$A_2^{\cdot 1} = 0, \; A_2^{\;2} = -3, \; A_2^{\;3} = 7, \; A_3^{\;1} = -1, \; A_3^{\cdot 2} = -2, \; A_3^{\;3} = 8.$

Звідси

$$\|A_{i'}^{\cdot k'}\| = \begin{Vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 7 \\ -1 & -2 & 8 \end{Vmatrix}.$$

$A^i{}_{\cdot k} = g^{im} A_{mk} \;\; \Rightarrow \;\; A^1{}_{\cdot 1} = g^{11}A_{11} + g^{12}A_{21} + g^{13}A_{31} = 0, \;\; A^2{}_{\cdot 1} = 1, \;\; A^3{}_{\cdot 1} = 1,$
$A^1{}_{\cdot 2} = -2, \; A^2{}_{\cdot 2} = 2, \; A^3{}_{\cdot 2} = 3, \; A^1{}_{\cdot 3} = -3, \; A^2{}_{\cdot 3} = 5, \; A^3{}_{\cdot 3} = 4.$

Звідси

$$\|A^{i'}_{\cdot k'}\| = \begin{Vmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{Vmatrix}.$$

Приклад 2.5. Задано мішані компоненти тензора четвертого рангу в системі координат з базисом $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ і метричний тензор g_{ij},

$$A^{11}_{\cdot\cdot ik} = 1,\ A^{12}_{\cdot\cdot ik} = 4,\ A^{21}_{\cdot\cdot ik} = 5,\ A^{22}_{\cdot\cdot ik} = 4,\ \forall i,k = 1,2$$

$$g_{11} = 6,\ g_{12} = g_{21} = 5,\ g_{22} = 2.$$

Підняти індекс i.

<u>Розв'язання</u>: Для того щоб підняти нижній індекс i, знайдемо контраваріантні компоненти метричного тензора $g^{ij} = \dfrac{G^{ij}}{G}$, $G = \det\|g_{ij}\| = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -13$, $G^{11} = 2, G^{21} = -5, G^{21} = -5, G^{22} = 6.$

$$\|g^{ij}\| = \begin{vmatrix} -\dfrac{2}{13} & \dfrac{5}{13} \\ \dfrac{5}{13} & -\dfrac{6}{13} \end{vmatrix}.$$

За правилом (2.4), враховуючи, що $A^{jl}_{\cdot\cdot 1k} = A^{jl}_{\cdot\cdot 2k} = A^{jl}_{\cdot\cdot nk}$, отримаємо

$$A^{jli}_{\cdot\cdot\cdot k} = g^{im} A^{jl}_{\cdot\cdot mk} = g^{i1} A^{jl}_{\cdot\cdot 1k} + g^{i2} A^{jl}_{\cdot\cdot 2k} = (g^{i1} + g^{i2}) A^{jl}_{\cdot\cdot nk} \Rightarrow$$

$$A^{111}_{\cdot\cdot\cdot k} = (g^{11} + g^{12}) A^{11}_{\cdot\cdot nk} = (-\frac{2}{13} + \frac{5}{13}) \cdot 1 = \frac{3}{13},\ A^{112}_{\cdot\cdot\cdot k} = -\frac{1}{13},\ A^{121}_{\cdot\cdot\cdot k} = \frac{12}{13},\ A^{122}_{\cdot\cdot\cdot k} = -\frac{4}{13},$$

$$A^{211}_{\cdot\cdot\cdot k} = \frac{15}{13},\ A^{212}_{\cdot\cdot\cdot k} = -\frac{5}{13},\ A^{221}_{\cdot\cdot\cdot k} = \frac{12}{13},\ A^{222}_{\cdot\cdot\cdot k} = -\frac{4}{13}.$$

2.3 Розклад тензора за векторами

Покажемо, що будь-який тензор 2-го рангу може бути розкладений у суму попарних добутків компонент трьох векторів. Уведемо трійку взаємно ортогональних ортів $(\bar{u}_{(1)}, \bar{u}_{(2)}, \bar{u}_{(3)})$, позначимо через $u_{(\alpha)i}, u^i_{(\alpha)}$ коваріантні й контраваріантні компоненти вектора $\bar{u}_{(\alpha)}$ в тій системі координат, у якій задані компоненти тензора, наприклад, коваріантні T_{ik}.

Розглянемо скаляри

$$T_{(\alpha\beta)} = T_{ik} \cdot u^i_{(\alpha)} u^k_{(\beta)}.$$

Помножимо кожний з них на $u_{(\alpha)p} \cdot u_{(\beta)q}$ і підсумуємо по α, β:

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{3} T_{(\alpha\beta)} u_{(\alpha)p} u_{(\beta)q} = \sum_{i,k}^{3} T_{ik} \sum_{\alpha,\beta=1}^{3} u^i_{(\alpha)} u^k_{(\beta)} u_{(\alpha)p} u_{(\beta)q}. \tag{2.6}$$

З іншого боку, $\delta_{\alpha\beta} = \bar{u}_\alpha \cdot \bar{u}_\beta = \sum\limits_{i=1}^{3} u^i_{(\alpha)} u_{(\beta)i}$.

Помножимо цю рівність на $u_{(\beta)}^{\alpha}$ і підсумуємо по β:

$$\sum_{\beta=1}^{3}\delta_{\alpha\beta}u_{(\beta)}^{\alpha}=\sum_{i=1}^{3}u_{(\alpha)}^{i}\sum_{\beta=1}^{3}u_{(\beta)i}u_{(\beta)}^{\alpha}\;\Rightarrow\;u_{(\alpha)}^{\alpha}=\sum_{i=1}^{3}u_{(\alpha)}^{i}\sum_{\beta=1}^{3}u_{(\beta)i}u_{(\beta)}^{\alpha}\,.$$

З іншого боку $u_{(\alpha)}^{\alpha}=\sum_{i=1}^{3}g_{i}^{\cdot\alpha}u_{(\alpha)}^{i}$.

Звідси, одержимо

$$g_{i}^{\cdot\alpha}=\sum_{\beta=1}^{3}u_{(\beta)i}u_{(\beta)}^{\alpha}\,.$$

Тоді права частина рівності (2.6) перетвориться в такий спосіб

$$\sum_{i,k}^{3}T_{ik}\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}u_{(\alpha)}^{i}u_{(\beta)}^{k}u_{(\alpha)p}u_{(\beta)q}=\sum_{i,k}^{3}T_{ik}\,g_{p}^{\cdot i}g_{q}^{\cdot k}=T_{pq}\;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\;T_{pq}=\sum_{\alpha,\beta=1}^{3}T_{(\alpha\beta)}u_{(\alpha)p}u_{(\beta)q}\,.$$

Таким чином, отримали розклад тензора за векторами.

2.4 Фізичні компоненти

Слід зазначити, що розмірність векторних і тензорних величин залежить від задачі, і якщо задача заздалегідь приведена до безрозмірного вигляду, то і компоненти є безрозмірними. При розв’язуванні задачі з фізичними величинами базис можна задати безрозмірним. Тоді компоненти векторів і тензорів зберігають розмірність розглянутих величин. З іншої сторони основному базису можна приписати розмірність, що відповідає розглянутим величинам, тоді контраваріантні компоненти векторів і тензорів будуть мати іншу розмірність, можливо позбавлену фізичного змісту. Щоб уникнути такої ситуації, варто розглянути, так звані, «фізичні компоненти». Для цього визначимо векторний базис $\bar{e}_i^{\,*}$ і відповідний йому взаємний $\bar{e}^{i^{*}}$ за допомогою співвідношень

$$\bar{e}_i^{\,*}=\frac{\bar{e}_i}{|\bar{e}_i|}\,,\;\bar{e}^{i^{*}}=\bar{e}^{i}|\bar{e}_i|\,,$$

тоді

$$\bar{a}=a^{*i}\bar{e}_i^{\,*}=a_i^{\,*}\bar{e}^{i^{*}}\,. \tag{2.7}$$

Компоненти a^{*i}, $a_i^{\,*}$ в розкладах (2.7) називають *фізичними компонентами вектора* $\bar{a}$. Зв'язок фізичних компонент з коваріантними і контраваріантними компонентами визначається співвідношеннями

$$a_i^{\ *} = \frac{a_i}{|\bar{e}_i|},\ a^{i^*} = a^i |\bar{e}_i|.$$

Враховуючи, що $|\bar{e}_i| = \sqrt{\bar{e}_i \cdot \bar{e}_i} = \sqrt{g_{ij}}$, отримаємо

$$a^{i*} = a^i \sqrt{g_{ii}} \text{ (немає суми по } i\text{)},$$

$$a_i^{\ *} = \frac{a^i}{\sqrt{g_{ii}}} \text{ (немає суми по } i\text{)}.$$

Поняття «фізичні компоненти» векторів природно узагальнюються й на компоненти тензорів другого рангу

$$a^{ik*} = a^{ik} \sqrt{g_{ii} g_{kk}} \text{ (немає суми по } i,\ k\text{)},$$

$$a_{ik}^{\ *} = \frac{a_{ik}}{\sqrt{g_{ii} g_{kk}}} \text{ (немає суми по } i,\ k\text{)}.$$

2.5 Дії над тензорами

Додавання тензорів

Додавання визначається тільки для тензорів однакового рангу й будови. Сумою $A+B$ двох тензорів називається тензор C того ж рангу й будови що й A, B, компоненти якого в будь-якій системі координат дорівнюють сумам відповідних компонент тензорів A, B.

$$C^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 ... j_s} = A^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 ... j_s} + B^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 ... j_s}. \qquad (2.8)$$

Приклад 2.6 Нехай компоненти $A_{i\cdot j}^{\cdot k}, B_{i\cdot j}^{\cdot k}$ двох тензорів задано у системі координат $K(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Знайти суму цих тензорів у тій самій системі координат .

$A_{1\cdot 1}^{\cdot 1} = A_{1\cdot 2}^{\cdot 1} = 1$, $A_{1\cdot 1}^{\cdot 2} = 0, A_{1\cdot 2}^{\cdot 2} = 2$, $A_{2\cdot 1}^{\cdot 1} = -3, A_{2\cdot 2}^{\cdot 1} = 5$, $A_{2\cdot 1}^{\cdot 2} = A_{2\cdot 2}^{\cdot 2} = -2$;

$B_{1\cdot 1}^{\cdot 1} = 0, B_{1\cdot 2}^{\cdot 1} = 8$, $B_{1\cdot 1}^{\cdot 2} = B_{1\cdot 2}^{\cdot 2} = 4$, $B_{2\cdot 1}^{\cdot 1} = -6, B_{2\cdot 2}^{\cdot 1} = 0$, $B_{2\cdot 1}^{\cdot 2} = -7, B_{2\cdot 2}^{\cdot 2} = 3$.

Розв'язання: За формулою (2.8) знайдемо суму відповідних координат заданих тензорів

$C_{1\cdot 1}^{\cdot 1} = A_{1\cdot 1}^{\cdot 1} + B_{1\cdot 1}^{\cdot 1} = 1 + 0 = 1$.

Аналогічно

$C_{1\cdot 2}^{\cdot 1} = 9$, $C_{1\cdot 1}^{\cdot 2} = 4$, $C_{1\cdot 2}^{\cdot 2} = 6$, $C_{2\cdot 1}^{\cdot 1} = -9$, $C_{2\cdot 2}^{\cdot 1} = 5$, $C_{2\cdot 1}^{\cdot 2} = -9$, $C_{2\cdot 2}^{\cdot 2} = 1$.

Відзначимо, що операція додавання тензорів інваріантна, тобто не залежить від того, у якій системі координат задано тензори.

Множення тензора на скаляр

Добутком тензора A на скаляр λ називається тензор $B = \lambda A$, компоненти якого в деякій системі координат дорівнюють добутку компонент тензора А на скаляр λ.

Множення двох тензорів

Ця операція визначається для будь-яких двох тензорів, не залежно від їхнього рангу й будови. Добутком тензора A рангу n_1 на тензор B рангу n_2 з компонентами $A^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 ... j_s}$, $B^{k_1 k_2 .. k_p}_{l_1 l_2 .. l_q}$ називається тензор $C = A \otimes B$ рангу $n_1 + n_2$ з компонентами

$$C^{i_1 i_2 .. i_r k_1 .. k_p}_{j_1 j_2 ... j_s l_1 .. l_q} = A^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 ... j_s} \cdot B^{k_1 k_2 .. k_p}_{l_1 l_2 .. l_q}. \tag{2.8}$$

Приклад 2.7. Нехай задано два тензори з компонентами A^i, B_{jk} в деякій системі координат $K(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$. Знайти $A \otimes B$, і $B \otimes A$, якщо $A^1 = 1, A^2 = 0$, $\|B_{ik}\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{Vmatrix}$.

Розв'язання: Знайдемо компоненти $C = A \otimes B$ за формулою (2.8)

$$C^{i}_{\cdot jk} = A^i \cdot B_{jk}.$$

Звідси $C^1_{\cdot 11} = A^1 \cdot B_{11} = 1$, $C^1_{\cdot 12} = 0$, $C^1_{\cdot 21} = 0$, $C^1_{\cdot 22} = 2$, $C^2_{\cdot jk} = A^2 \cdot B_{jk} = 0$.

Аналогічно для $D = B \otimes A$ отримаємо

$$D^{\cdot\cdot i}_{jk} = B_{jk} \cdot A^i.$$

Звідси $D^{\cdot\cdot 1}_{11} = 1$, $D^{\cdot\cdot 1}_{12} = 0$, $D^{\cdot\cdot 2}_{11} = 0$, $D^{\cdot\cdot 2}_{12} = 0$, $D^{\cdot\cdot 1}_{21} = 0$, $D^{\cdot\cdot 2}_{21} = 0$, $D^{\cdot\cdot 1}_{22} = 2$, $D^{\cdot\cdot 2}_{22} = 0$.

Помітимо, що $A \otimes B \neq B \otimes A$, тобто добуток тензорів не комутативний.

Операція перестановки індексів, або утворення ізомеру.

Два тензори A і B одного рангу й будови називаються рівними, якщо рівні відповідні координати цих тензорів у деякій системі координат.

$$A = B \Leftrightarrow A^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 ... j_s} = B^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 ... j_s}.$$

Відзначимо, що з рівності координат тензорів у деякій системі координат випливає їхня рівність у будь-якій іншій системі координат.

Ізомер утворюється при зміні порядку проходження верхніх або нижніх індексів. Наприклад,

$$A^{ij}_{\cdot\cdot pqr} = B^{ji}_{\cdot\cdot pqr}.$$

По суті, ця операція є формальною.

Її значення виявляється тоді, коли вона комбінується з визначеними вище операціями.

Згортання мішаного тензора (згортка)

Згортанням називається підсумовування компонент тензора по двох різнойменним («верхній», «нижній») індексах. Згортання застосовується тільки до змішаних компонент тензора.

Властивості:

1) Згортання можна проводити для тензорів рангу $n \geq 2$;
2) При згортанні тензора рангу n по двох індексах одержимо тензор рангу $n-2$;
3) Операцію згортання можна проводити декілька разів.

Приклад 2.8. Знайти вектор, що утворюється множенням тензора T^{ij} на вектор A_k з наступним згортанням по першому (другому) індексу тензора й індексу вектора, якщо $\left\|T^{ij}\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{matrix}\right\|$, $\left\|A_k\right\| = \left\|\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\right\|$.

Розв'язання: При множенні тензора на вектор одержуємо тензор 3-го рангу $C^{ij}_{\cdot\cdot k} = T^{ij} A_k$, щоб не знаходити усі 27 компонент цього тензору, проведемо згортку по його першому верхньому індексу й нижньому індексу, замінивши ці індекси на індекс підсумовування l.

$$B^j = C^{lj}_{\cdot\cdot l} = T^{lj} A_l = T^{1j} A_1 + T^{2j} A_2 + T^{3j} A_3.$$

$$B^1 = T^{11} A_1 + T^{21} A_2 + T^{31} A_3 = 10,$$

$$B^2 = T^{12} A_1 + T^{22} A_2 + T^{32} A_3 = 17,$$

$$B^3 = T^{13} A_1 + T^{23} A_2 + T^{33} A_3 = 16.$$

Якщо провести згортку по другому верхньому і нижньому індексах тензора C одержимо інший результат

$$D^i = C^{il}_{\cdot\cdot l} = T^{il} A_l = T^{i1} A_1 + T^{i2} A_2 + T^{i3} A_3.$$

$$D^1 = T^{1l} A_l = T^{11} A_1 + T^{12} A_2 + T^{13} A_3 = 7,$$

$$D^2 = T^{2l} A_l = T^{21} A_1 + T^{22} A_2 + T^{23} A_3 = 14,$$

$$D^3 = T^{3l} A_l = T^{31} A_1 + T^{32} A_2 + T^{33} A_3 = 19.$$

Зауваження. Множення з наступним згортанням називають *скалярним добутком* тензорів.

Симетрування

Поняття симетрії відносять до тензорів рангу не менш двох, що мають пару однойменних індексів.

Тензор $A^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 ... j_s}$ називається симетричним по парі верхніх (нижніх) індексів, якщо компоненти , що виходять при перестановці цих індексів, рівні один одному. Наприклад, $A_{ik} = A_{ki}$.

Тензор $A^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 ... j_s}$ називається кососиметричним (антисиметричним) по парі верхніх (нижніх) індексів, якщо в результаті їхньої перестановки знак відповідних компонент міняється на протилежний. Наприклад, $A_{ik} = -A_{ki}$.

Властивість симетрії інваріантна, тобто не залежить від вибору системи координат.

Операція симетрування по n верхнім (нижнім) індексам полягає в утворенні $n!$ ізомерів, у яких ці індекси розташовуються всіма можливими способами, із наступним додаванням і діленням суми на $n!$.

Симетрування позначається парою круглих дужок, у яких розташовуються індекси, що беруть участь в операції. Наприклад,

$$A_{(ij)} = \frac{1}{2}(A_{ij} + A_{ji}),$$

$$B^{(ijk)} = \frac{1}{3!}(B^{ijk} + B^{ikj} + B^{jki} + B^{jik} + B^{kij} + B^{kji}),$$

$$T_{(ij|k|)} = \frac{1}{2}(T_{ijk} + T_{jik})$$

(індекс k , що не бере участь в операції позначають $|k|$).

У результаті операції симетрування одержуємо новий тензор того ж рангу й будови, що має властивість симетрії по даному набору однойменних індексів.

<u>Альтернування</u>

Операція альтернування здійснюється аналогічно симетруванню, але при цьому кожний з $n!$ ізомерів береться з додатним знаком при парній перестановці індексів, і з від'ємним – при непарній.

Індекси, що беруть участь в альтернуванні позначають квадратними дужками. Наприклад,

$$A_{[ij]} = \frac{1}{2}(A_{ij} - A_{ji}).$$

У результаті альтернування по парі індексів одержимо кососиметричний тензор.

Приклад 2.9 Для заданого тензора третього рангу з компонентами $T^1_{11} = \sin x^1 + \cos x^2$, $T^1_{12} = x^1$, $T^1_{21} = (x^1)^2$, $T^1_{22} = x^1 x^2$, $T^2_{11} = \sin x^1 - \cos x^2$, $T^2_{12} = x^2$, $T^2_{21} = (x^2)^2$, $T^2_{22} = \dfrac{x^1}{x^2}$ виконати операції симетрування й альтернування по нижніх індексах. Додати отримані тензори.

<u>Розв'язання:</u> Виконаємо симетрування за формулою

$$S^k_{ij} = T^k_{(ij)} = \frac{1}{2}(T^k_{ij} + T^k_{ji}).$$

Одержимо

$$S^1_{11} = \frac{1}{2}(T^1_{11} + T^1_{11}) = T^1_{11} = \sin x^1 + \cos x^2,$$

$$S_{11}^2 = \frac{1}{2}(T_{11}^2 + T_{11}^2) = T_{11}^2 = \sin x^1 - \cos x^2,$$
$$S_{12}^1 = \frac{1}{2}(x^1 + (x^1)^2),$$
$$S_{12}^2 = \frac{1}{2}(x^2 + (x^2)^2),$$
$$S_{21}^1 = \frac{1}{2}(x^1 + (x^1)^2),$$
$$S_{21}^2 = \frac{1}{2}(x^2 + (x^2)^2),$$
$$S_{22}^1 = x^1 x^2,$$
$$S_{22}^2 = \frac{x^1}{x^2}.$$

Потім альтернуємо тензор за формулою $A^k{}_{ij} = T_{[ij]}^k = \frac{1}{2}\left(T_{ij}^k - T_{ji}^k\right).$

$$A_{11}^1 = \frac{1}{2}\left(T_{11}^1 - T_{11}^1\right) = 0,$$
$$A_{11}^2 = 0,$$
$$A_{12}^1 = \frac{1}{2}\left(x^1 - (x^1)^2\right),$$
$$A_{12}^2 = \frac{1}{2}\left(x^2 - (x^2)^2\right),$$
$$A_{21}^1 = \frac{1}{2}\left((x^1)^2 - x^1\right),$$
$$A_{21}^2 = \frac{1}{2}\left((x^2)^2 - x^2\right),$$
$$A_{22}^1 = 0,$$
$$A_{22}^2 = 0.$$

Помітимо, що в сумі ці тензори дають тензор T_{ij}^k

$$S_{ij}^k + A_{ij}^k = \frac{1}{2}(T_{ij}^k + T_{ji}^k) + \frac{1}{2}(T_{ij}^k - T_{ji}^k) = T_{ij}^k.$$

Таким чином, будь-який тензор, що має хоча б пару однойменних індексів можна представити у вигляді суми симетричного й кососиметричного тензорів.

<u>Одиничний тензор</u>

Відомий з алгебри символ Кронекера δ_k^i є тензором другого рангу з матрицею

$$\left\|\delta_k^i\right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \delta_k^i = \alpha_k^{j'} \alpha_{j'}^i = \begin{cases} 0, i \neq k, \\ 1, i = k. \end{cases}$$

Компоненти одиничного тензора однакові у всіх координатних системах.

Множення на δ_k^i з наступним згортанням часто використовується в алгебраїчних виразах.

Приклад 2.10. Спростити вирази: $\delta_k^i \cdot A_{kj}$; $\delta_i^l \delta_k^m b^i b^k - b^l \delta_j^m a^j$; $A_i^{\cdot k} B_k - B^i$.

Розв'язання:

1) $\delta_k^i \cdot A_{kj} = A_{ij}$ – тотожне перетворення (перейменування індексу);

2) $\delta_i^l \delta_k^m b^i b^k - b^l \delta_j^m a^j = b^l b^m - b^l a^m = b^l (b^m - a^m)$;

3) $A_i^{\cdot k} B_k - B^i = A_i^{\cdot k} B_k - \delta_i^{\cdot k} B_k = (A_i^{\cdot k} - \delta_i^{\cdot k}) B_k = T_i^{\cdot k} B_k$.

Діадний добуток векторів

Якщо розглянути всілякі добутки компонент двох векторів $A^i B^k = C^{ik}$ $(i,k = 1,2,3)$, то одержимо дев'ять чисел, що утворюють тензор другого рангу, який називається *діадним добутком векторів* $\overline{A}, \overline{B}$. Діадний добуток є тензорним добутком $\overline{A} \otimes \overline{B}$ векторів $\overline{A}, \overline{B}$.

Діадний добуток не комутативний $\overline{A} \otimes \overline{B} \neq \overline{B} \otimes \overline{A}$. Але матриця $\overline{B} \otimes \overline{A}$ є транспонована матриця $\overline{A} \otimes \overline{B}$. Аналогічно із записом вектора $\overline{A} = A^i \overline{e}_i$ тензор C можна записати так

$$C = A^i B^k \overline{e}_i \overline{e}_k = C^{ik} \overline{e}_i \overline{e}_k.$$

Узагальнюючи цей спосіб запису на випадок тензора будь-якого рангу, одержимо

$$T = T_{j_1 \ldots j_s}^{i_1 \ldots i_p} \overline{e}^{j_1} \ldots \overline{e}_{i_1} \ldots .$$

У цьому виразі вектори $\overline{e}^{j_1}, \ldots, \overline{e}^{j_s}, \overline{e}_{i_1}, \ldots, \overline{e}_{i_p}$ мають визначений порядок, підсумовування проводиться за всіма індексами $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_s$.

2.6 Головні осі тензора

Розглянемо мішані компоненти тензора 2-го рангу $T_{\cdot k}^i$ і деякий вектор з компонентами A^k. Якщо цей тензор помножити на вектор і зробити згортку за індексом вектора і нижнім індексом тензора, в результаті одержимо новий вектор із компонентами $B^i = T^i_{\cdot k} A^k$.

Таким чином, тензор при скалярному множенні на вектор змінює довжину цього вектора і його напрямок.

Знайдемо для даного тензора $T^i_{\cdot k}$ всі вектори, що змінюються тільки за довжиною. Для цього розв'яжемо відносно компонент A^k рівняння

$$T^i_{\cdot k} A^k = \lambda A^i, \tag{2.9}$$

де λ – скаляр.

Якщо розв'язок цього рівняння існує, то вектори, що йому задовольняють, називаються *власними векторами тензора* $T^i_{\cdot k}$, напрямки цих векторів – *головними напрямами тензора*, осі цих напрямків – *головними осями тензора*.

Значення компонент тензора в координатній системі головних осей називаються *головними значеннями*.

Знайдемо розв'язок рівняння (2.9).

$$T^i_{\cdot k} A^k - \lambda A^i = (T^i_{\cdot k} A^k - \lambda \delta^i_{\cdot k} A^k) = (T^i_{\cdot k} - \lambda \delta^i_{\cdot k}) A^k = 0.$$

Таким чином, для знаходження компонент A^k необхідно розв'язати однорідну систему з трьох лінійних рівнянь. Як відомо з алгебри, однорідна система має нетривіальний розв'язок, якщо її визначник дорівнює нулеві

$$\begin{vmatrix} T^1_{\cdot 1} - \lambda & T^1_{\cdot 2} & T^1_{\cdot 3} \\ T^2_{\cdot 1} & T^2_{\cdot 2} - \lambda & T^2_{\cdot 3} \\ T^3_{\cdot 1} & T^3_{\cdot 2} & T^3_{\cdot 3} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.10}$$

Це рівняння третього степеня називається *характеристичним*.

Спростимо задачу, і будемо розглядати тільки тензори із симетричними коваріантними компонентами $T_{ik} = T_{ki}$. Тоді матриця системи є симетричною і характеристичне рівняння має тільки дійсні корені. Нехай $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ – корені рівняння (2.10), тоді компоненти шуканих векторів, відповідні власним значенням λ_s, визначаються з точністю до сталого дійсного множника. Їх можна визначити з трьох систем рівнянь

$$(T^i_{.k} - \lambda_s \delta^i_{.k}) A^k = 0$$

звідси одержимо

$$\frac{A^1_{(s)}}{\begin{vmatrix} T^2_{.2} - \lambda_s & T^2_{.3} \\ T^3_{.2} & T^3_{.3} - \lambda_s \end{vmatrix}} = \frac{A^2_{(s)}}{\begin{vmatrix} T^2_{.3} & T^2_{.1} \\ T^3_3 - \lambda_s & T^3_{.1} \end{vmatrix}} = \frac{A^3_{(s)}}{\begin{vmatrix} T^2_{.1} & T^2_{.2} - \lambda_s \\ T^3_1 & T^3_{.2} \end{vmatrix}}, \quad s = 1,2,3. \tag{2.11}$$

Відзначимо, що три вектори $\overline{A}_{(s)}$ взаємно перпендикулярні, а вихідний тензор у системі координат, осі якої є головними осями тензора, буде мати компоненти

$$\left\|T_{i'k'}\right\| = \left\|T^{i'}_{.k'}\right\| = \left\|T^{i'k'}\right\| = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix}.$$

Якщо $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$, то головні напрями тензора єдині.

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, то двократному кореневі $\lambda_1 = \lambda_2$ відповідає власна площина, яка перпендикулярна третьому головному напряму. У цій площині будь-який напрям буде головним.

Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то будь-який напрям буде головним. Такий тензор називається *кульовим*.

Тензорна поверхня

Будь-якому симетричному тензору $T_{ik} = T_{ki}$ можна поставити у відповідність поверхню другого порядку $T_{ik}x^i x^k = 1$. Ця поверхня називається тензорною. Головні осі тензора є головними осями тензорної поверхні, яка у системі головних осей має рівняння

$$\frac{(x^1)^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{(x^2)^2}{\frac{1}{\lambda_2}} + \frac{(x^3)^2}{\frac{1}{\lambda_3}} = 1.$$

Якщо всі $\lambda_s > 0$, то тензорна поверхня – еліпсоїд. Головні осі тензора – головні осі еліпсоїда. У випадку $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ маємо сферу радіуса $\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$, у цьому випадку матриця тензора в головних осях має вигляд

$$\left\|T_{i'k'}\right\| = \lambda \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \lambda\delta_{ik}$$

У випадку $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ маємо еліпсоїд обертання.

Приклад 2.11. Знайти головні значення й головні напрями тензора $T_i^{.k}$, якщо

$$T_i^{.k} = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}.$$

Визначити вид тензорної поверхні.

Розв’язання: Розв’яжемо характеристичне рівняння (2.10)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (3-\lambda)\left(\lambda^2 - 3\lambda - 2\right) = 0,$$

звідси $\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{17}}{2}$, $\lambda_3 = 3$.

З співвідношення (2.11) знайдемо власні вектори, що відповідають кожному значенню λ.

1) $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$,

$$\frac{E^1_{(1)}}{\begin{vmatrix} 2-\frac{3+\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & 3-\frac{3+\sqrt{17}}{2} \end{vmatrix}} = \frac{E^2_{(1)}}{\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 3-\frac{3+\sqrt{17}}{2} & 0 \end{vmatrix}} = \frac{E^3_{(1)}}{\begin{vmatrix} 2 & 2-\frac{3+\sqrt{17}}{2} \\ 0 & 0 \end{vmatrix}},$$

$$\frac{E^1_{(1)}}{5-\sqrt{17}} = \frac{E^2_{(1)}}{-3+\sqrt{17}} = \frac{E^3_{(1)}}{0},$$

$$\overline{E}_{(1)} = \left(5-\sqrt{17}; -3+\sqrt{17}; 0\right).$$

2) $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$, $\overline{E}_{(2)} = \left(-3-\sqrt{17}; \dfrac{7+\sqrt{17}}{2}; 0\right)$.

3) $\lambda_3 = 3$, $\overline{E}_{(3)} = (0;0;-2)$.

Вектори $\overline{E}_{(1)}$, $\overline{E}_{(2)}$, $\overline{E}_{(3)}$ визначають головні напрями тензора.

В ортонормованому базисі $\overline{e}_{1'}, \overline{e}_{2'}, \overline{e}_{3'}$, де $\overline{e}_{i'} = \dfrac{\overline{E}_{(i)}}{\left|\overline{E}_{(i)}\right|}$, компоненти тензора матимуть вигляд $T_{i'k'} = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{3+\sqrt{17}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{17}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{Vmatrix}$.

Тензорна поверхня в цьому базисі матиме рівняння

$$T_{ik}x^i x^k = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(x^1\right)^2}{\frac{2}{3+\sqrt{17}}} + \frac{\left(x^2\right)^2}{\frac{2}{3-\sqrt{17}}} + \frac{\left(x^3\right)^2}{\frac{1}{3}} = 1.$$ Це однопорожнинний гіперболоїд.

<u>Інваріанти тензора</u>

Виконаємо елементарні перетворення у характеристичному рівнянні (2.10).

$$\begin{vmatrix} T^1_{.1}-\lambda & T^1_{.2} & T^1_{.3} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2}-\lambda & T^2_{.3} \\ T^3_{.1} & T^3_{.2} & T^3_{.3}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda^3 - \lambda^2\left(T^1_{.1} + T^2_{.2} + T^3_{.3}\right) + \lambda\left(\begin{vmatrix} T^2_{.2} & T^3_{.3} \\ T^2_{.3} & T^3_{.3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^2_{.1} \\ T^1_{.2} & T^2_{.2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^3_{.1} \\ T^1_{.3} & T^3_{.3} \end{vmatrix}\right) - \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^1_{.2} & T^1_{.3} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2} & T^2_{.3} \\ T^3_{.1} & T^3_{.2} & T^3_{.3} \end{vmatrix} = 0.$$

Зауважимо, що λ_1, λ_2, λ_3 – скаляри, які не залежать від системи координат. Звідси випливає, що коефіцієнти цього рівняння також не повинні змінюватись при зміні системи координат.

Величини, які не змінюються при зміні системи координат називаються *інваріантами*.

Таким чином, для тензора другого рангу *інваріантами* є

$$I_1 = T^1_{.1} + T^2_{.2} + T^3_{.3} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = inv,$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} T^2_{.2} & T^3_{.3} \\ T^2_{.3} & T^3_{.3} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^2_{.1} \\ T^1_{.2} & T^2_{.2} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^3_{.1} \\ T^1_{.3} & T^3_{.3} \end{vmatrix} = \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 = inv, \qquad (2.12)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} T^1_{.1} & T^1_{.2} & T^1_{.3} \\ T^2_{.1} & T^2_{.2} & T^2_{.3} \\ T^3_{.1} & T^3_{.2} & T^3_{.3} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = inv.$$

Тензор, у якого інваріант $I_1 = 0$ називають *девіатором*.

Будь-який тензор можна розкласти на девіатор і кульовий тензор

$$T_i^{.k} = T_i^{.k} - \frac{1}{3}T_l^{.l} g_i^{.k} + \frac{1}{3}T_l^{.l} g_i^{.k} = D_i^{.k} + \frac{1}{3}T_l^{.l} g_i^{.k}.$$

Тензор

$$D_i^{.k} = T_i^{.k} - \frac{1}{3}T_l^{.l} g_i^{.k} \qquad (2.13)$$

є девіатором, тому що $D_i^{.i} = T_i^{.i} - \frac{1}{3}T_l^{.l} \cdot 3 = 0$.

Тензор $\frac{1}{3}T_{l}^{.l}g_{i}^{.k}$ – кульовий.

Коваріантні й контраваріантні компоненти девіатора мають вигляд

$$D_{ik} = T_{ik} - \frac{1}{3}T_{l}^{.l}g_{ik}, \; D^{ik} = T^{ik} - \frac{1}{3}T_{l}^{.l}g^{ik}.$$

Приклад 2.12. Тензор $\left\| T_{i}^{.k} \right\| = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix}$ представити у вигляді суми девіатора і кульового тензора. Знайти інваріанти тензора I_1, I_2, I_3.

<u>Розв'язання</u>: Знайдемо девіатор тензора $\left\| T_{i}^{.k} \right\|$ за формулою (2.13)

$$D_{i}^{.k} = T_{i}^{.k} - \frac{1}{3}T_{l}^{.l}g_{i}^{.k} = T_{i}^{.k} - \frac{7}{3}g_{i}^{.k} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{Vmatrix} - \frac{7}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} -\frac{4}{3} & 0 & 4 \\ 5 & \frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \end{Vmatrix}.$$

$$B_{i}^{.k} = \frac{1}{3}T_{l}^{.l}g_{i}^{.k} = \frac{7}{3}\begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{7}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{Vmatrix} \text{ – кульовий тензор,}$$

$$T_{i}^{.k} = D_{i}^{.k} + B_{i}^{.k}.$$

Знайдемо інваріанти тензора $T_{i}^{.k}$ за формулами (2.12)

$I_1 = 1 + 3 + 3 = 7$,

$$I_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 13,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 27.$$

<u>Ознака тензорності</u>

Нехай A^{i}, A_{i}, B^{i}, B_{i} – контраваріантні й коваріантні компоненти двох векторів $\overline{A}$, $\overline{B}$. Якщо за допомогою величин T^{ik}, T_{ik}, T_{i}^{k} можна скласти інваріанти вигляду

$$T^{ik}A_{i}A_{k} = inv,$$

$$T_{ik}A^iA^k = inv, \qquad (2.13)$$
$$T_i^k A^i B_k = inv,$$

тоді ці величини є, відповідно, контраваріантними, коваріантними і мішаними компонентами тензора другого рангу.

2.7 Псевдотензори

Псевдотензор є об’єктом близьким до тензора за написанням й природою, його компоненти мають такі властивості:

1) при перетворенні системи координат, закон перетворення компонент псевдотензора є таким самим як і у тензора;

2) при перетворенні координат, що переводить праву систему в ліву і навпаки, закон перетворення псевдотензора відрізняється від закону перетворення тензора знаком

$$\Pi^{i_1' i_2' .. i_r'}_{k_1' k_2' .. k_s'} = -\alpha^{l_1}_{k_1'}\alpha^{l_2}_{k_2'}..\alpha^{l_s}_{k_s'}\alpha^{i_1'}_{m_1}\alpha^{i_1'}_{m_1}..\alpha^{i_r'}_{m_r}\Pi^{m_1 m_2 .. m_r}_{l_1 l_2 .. l_s}.$$

Прикладом одиничного псевдотензора третього рангу можуть служити величини ε_{ijk} (символи Леві-Чівіта), які задаються співвідношеннями

$$\varepsilon_{ijk} = \left(\bar{i}_i \times \bar{i}_j\right)\cdot \bar{i}_k,$$

де $\bar{i}_m$ – орти прямокутної декартової системи координат, тобто ε_{ijk} дорівнюють нулеві, одиниці або мінус одиниці, в залежності від того які значення приймають індекси i, j, k.

За допомогою символів Леві-Чівіта можна утворювати псевдотензори будь-якого рангу. Наприклад, $\Pi = \varepsilon_{ijk}T^{ijk}$ – псевдоскаляр, якщо T^{ijk} – тензор. $\Pi^i = \varepsilon^{ijk}T_{jk}$ – псевдовектор. Якщо A_j, B_k – компоненти векторів $\overline{A}, \overline{B}$, то величини $\Pi^i = \varepsilon^{ijk}A_jB_k$ є компонентами їх векторного добутку $\overline{A}\times\overline{B}$.

<u>Основні властивості псевдотензорів</u>

1) Сума двох псевдотензорів одного рангу є псевдотензором того ж рангу.

2) Добуток двох псевдотензорів є тензором, ранг якого дорівнює сумі рангів співмножників.

3) Добуток псевдотензора й тензора – псевдотензор.