



Національний університет
водного господарства
та природокористування

Міністерство освіти і науки України
Національний університет водного господарства
та природокористування

О.О. Лебедь, В.І. Гаращенко,
І.М. Григус



Національний університет
водного господарства
та природокористування

БІОЛОГІЧНА ТА МЕДИЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Рівне – 2016



Рецензенти:

Джунь Й. В., д-р фіз.-мат. наук, професор Міжнародного економіко-гуманітарного університету ім. акад. Степана Дем'янчука (м. Рівне);

Магльований А. В., д-р біологічних наук, професор Львівського національного медичного університету імені Данила Галицького (м. Львів);

Цьось А. В., д-р наук з фізичного виховання та спорту, професор Східноєвропейського національного університету імені Лесі Українки (м. Луцьк).

Лебедь О. О., Гаращенко В. І., Григус І. М.

ЛЗЗ Біологічна та медична механіка. Навч. посібник. – Рівне : НУВГП, 2016. – 186 с.

ISBN

Навчальний посібник призначено для вивчення механіки живих організмів, методик та приладів визначення їх фізичних та медичних характеристик на основі сучасних фізичних та біологічних методів діагностики. Використано зручний для засвоєння порядок викладення матеріалу: спочатку фізична сторона явища, яке вивчається, а потім його біологічне та медичне застосування.

Для студентів та аспірантів технічних вишів, які вивчають біологічну та медичну фізику. Навчальний посібник може бути корисним для студентів медичних вищих навчальних закладів.

УДК 681.518:53 (075.8)

ББК 32.98:22.3я7

ISBN

© Лебедь О. О., Гаращенко В. І., Григус І. М., 2016

© Національний університет водного господарства та природокористування, 2016



ПЕРЕЛІК СИМВОЛІВ, УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ ТА ПОЗНАЧЕНЬ

АТТ – абсолютно тверде тіло.

АШК – апарат штучного кругообертання крові.

ДАТ – діастолічний артеріальний тиск.

ДО – дихальний об'єм.

ЖЄЛ – життєва ємність легенів.

ЗЄЛ – загальна ємність легенів.

ЗО – залишковий об'єм повітря в легенях.

ККД – коефіцієнт корисної дії.

МТ – матеріальна точка.

H_b (або *HV*) – твердість по Брінеллю.

H_v (або *HV*) – твердість по Віккерсу.

Ht – гематокрит.

ПАР – поверхнево-активна речовина.

ПДСК – прямокутна декартова система координат.

ПШВ – пікова швидкість видиху.

РОВд – резервний об'єм вдиху.

РОВид – резервний об'єм видиху.

САТ – систолічний артеріальний тиск.

ХОД – хвилинний об'єм дихання.

ЦМ – центр мас.

ШОЕ – швидкість осідання еритроцитів.



Передмова

В основу навчального посібника покладено конспект лекцій спецкурсу «Фізика з основами біофізики» для студентів напрямів підготовки «Агрономія» та «Водні біоресурси та аквакультура» Національного університету водного господарства та природокористування.

Фізика є основною наукою про природу. Вона вивчає найпростіші і разом з тим найбільш загальні закономірності явищ природи, властивості і будову матерії, а також закони її руху. **Механіка** є історично першим розділом фізики, який почала вивчати людина. В її завдання входить вивчення законів механічного руху та взаємодії тіл під дією прикладених сил. Під **механічним рухом** тіла розуміють зміну його положення або взаємного положення його частин в просторі з часом. За майже 5-титисячний час свого розвитку в механіці вирізнилось багато наукових напрямків. Так, класична механіка (механіка Галілея-Ньютона) вивчає рух макроскопічних тіл з швидкостями значно меншими за швидкість світла. Релятивістська механіка вивчає рух і взаємодію тіл, швидкості яких близькі до швидкості світла. Квантова механіка описує рух мікрочастинок. Ці розділи, в свою чергу, розділились на десятки підрозділів. Прийнято класичну механіку поділяти на три основні підрозділи:

- **кінематику**, яка вивчає рух тіл, не торкаючись причин виникнення цього руху;
- **динаміку**, яка вивчає рух і взаємодію тіл під дією прикладених сил;
- **статику**, яка вивчає умови рівноваги тіл.

Біомеханіка (з грецької: *bios* – життя и *mechanē* – знаряддя) – це розділ біофізики, який знаходиться на стику біології та механіки і вивчає механічні властивості біологічних макромолекул, тканин, органів, систем органів і живих організмів в цілому. Курс біомеханіки як окремий розділ механіки відокремився в рамках біофізики у 1961 році (1-й Міжнародний біофізичний конгрес), в зв'язку з розвитком науково-технічної революції. Зі стрімким збільшенням швидкостей та прискорень технічних апаратів, вібрацій з великими інтенсивностями та інших чинників при освоєнні



людиною космосу та океанів, а також в зв'язку з новими умовами виробництва в багатьох галузях економіки постало питання про можливості адаптації людського організму або взагалі про його граничні можливості. На ці запитання і повинна була дати відповіді біомеханіка.

Біомеханіка характеризується застосуванням основних принципів механіки до живих організмів. Питання про застосовність інших наук в дослідженні живих організмів піднімали ще давньогрецькі вчені Аристотель, Демокрит та середньовічний вчений Гален. В роботі «Частини руху і переміщення тварин» Аристотель описує закономірності руху тварин і людини, мотивацію таких рухів, циклічність ходьби і бігу, здатність живих істот приводити себе в рух.

Гален в основній своїй праці «Про призначення частин людського тіла» експериментально показав, що кінцівка згинається за допомогою внутрішніх, а розгинається за допомогою зовнішніх м'язів.

Леонардо да Вінчі вперше описав механіку руху людини та тварин. Вивчаючи функції органів, він розглядав організм як зразок «природної механіки». Йому належить висловлювання, яке стало дуже важливим для розвитку біомеханіки: «Наука механіка тому настільки благородна і корисніша інших наук, що всі живі тіла, які мають здатність до руху, діють за її законами».

Відомі роботи Галілея по визначенню закономірностей серцебиття, і Декарта по вивченню механізму руху очей. Він же звернув увагу на подібність між людиною і механічним автоматом.

Знамениті фізіологи Хейліс, Пуазейль, Гельмгольц, Франк, Стерлінг застосовуючи принципи механіки, здійснили видатні відкриття при дослідженні окремих явищ та закономірностей живих організмів. Крох отримав Нобелівську премію за розвиток механіки мікроциркуляції, а Хілл – за розвиток механіки м'язів.

В даний час основними напрямками досліджень в біомеханіці є вивчення:

- механізмів та закономірностей руху клітин та субклітинних структур (мембран, цитоплазми тощо);
- механічної взаємодії клітин, біологічних рідин, м'язів і



твердих тканин, окремих органів і систем живих організмів;

- біологічних процесів, які забезпечують маніпуляційні рухи окремих органів людини та тварин, а також їх рух в цілому як відокремлених організмів;
- фізичних методів і приладів для проведення біомеханічних досліджень.

Окремими напрямками досліджень є вивчення:

- дихальної системи організму, кінематики і динаміки його дихальних рухів в цілому і складових частин (легенів, грудної клітини тощо);
- гемодинаміки (кровообігу), тобто пружних властивостей судин і серця, руху крові, роботи серця.

Біомеханіка як навчальний предмет у вищому навчальному закладі разом з курсами фізики, математики, хімії, біохімії і біології, відіграє роль фундаментальної природничої бази, на якій ґрунтується фахова підготовка спеціалістів агрономічного, біофізичного та медичного профілю. Вивчення цього курсу забезпечує формування в майбутнього спеціаліста сучасної наукової картини світу, закладає основи наукового мислення, виробляє навички абстрагування, ідеалізації, моделювання, аналізу і синтезу, тощо. Засвоєння суті і змісту фізичних законів, розуміння природи фізичних закономірностей, які мають місце в природних, техногенних та біологічних явищах і процесах, забезпечить можливість свідомо ставити і розв'язувати як теоретичні, так і прикладні задачі майбутньої діяльності фахівця.

Вивчення біомеханіки має велике значення для формування наукового уявлення про явища і процеси, які відбуваються у живій природі.

Загалом можна сформулювати роль курсу біомеханіки у технічному вузі:

а) біомеханіка має велике загальнонаукове значення при вивченні механічних процесів, які протікають в живій природі. Вона формує сучасне світосприйняття та світорозуміння, дає уявлення про фізичну картину світу;

б) біомеханіка є базовою дисципліною для багатьох загальноінженерних, агрономічних, біологічних, медичних та



спеціальних дисциплін;

в) багато галузей сучасного сільського господарства, тваринництва та медицини тісно переплітається з біомеханікою, тому інженер та лікар повинні володіти даною наукою в такій мірі, щоб бути у змозі зі знанням справи застосовувати фізичні знання у своїй виробничій діяльності.

Головною метою даного навчального посібника є засвоєння студентами загальних закономірностей природних (в тому числі і біологічних) явищ, що дозволить їм застосовувати фізичні знання у майбутній виробничій діяльності.

Основними завданнями вивчення дисципліни «Біологічна та медична механіка» є навчання студентів теоретичним основам і методам загальної фізики та застосуванню цих методів для розв'язання різноманітних задач теоретичного та практичного характеру в області біофізики, а також використання їх в наукових біологічних та медичних дослідженнях.

Для вивчення даної дисципліни необхідно, щоб студенти були знайомі з курсами вищої математики, загальної біології та загальної хімії в обсязі стандартної програми для технічних університетів. Особливий акцент потрібно зробити на курси фізичної та біологічної хімії, а також розділу математичного моделювання біологічних процесів курсу вищої математики.

У всіх розділах після подання основного матеріалу з механіки розглядаються питання біомеханіки, які відносяться до даного розділу. Такий спосіб подання матеріалу авторам здається найбільш ефективним в плані засвоєння знань студентами в даній області.

Автори спільно розробляли план і обговорювали зміст усіх розділів навчального посібника. Автори висловлюють подяку колегам А. В. Рибалку, О. Ю. Дейнеці за цінні зауваження при обговоренні книги, а також В. О. Мислінчуку – за обговорення та якісні ілюстрації до посібника.



Розділ 1. Кінематика механічного руху

1.1. Основні поняття кінематики

Основною задачею механіки є визначення положення тіла в просторі в будь-який момент часу.

Для розв'язку цієї задачі часто необхідно абстрагуватися від реальних фізичних тіл і використати замість них ідеалізовані об'єкти, коли це не впливає на розв'язок, але спрощує його пошук. Поняттями ідеальних об'єктів в механіці є поняття матеріальної точки та абсолютно твердого тіла.

Матеріальна точка (МТ) – це тіло, розмірами і формою якого за даних умов можна знехтувати.

Абсолютно твердим тілом (АТТ) називається тіло, деформаціями якого в даних умовах можна знехтувати. У АТТ відстань між будь-якими його точками з часом не змінюється.

Розв'язок основної задачі механіки також не можливий без використання поняття системи відліку.

Система відліку – це сукупність тіла відліку, зв'язаної з ним системи координат і приладу для вимірювання часу. За тіло відліку часто беруть АТТ, а в якості системи відліку найчастіше використовують прямокутну, декартову систему координат (ПДСК).

Якщо в деякій системі відліку тіло не може вважатись матеріальною точкою, то його можна подумки розбити на ряд дрібних частин, що взаємодіють між собою, кожна з яких може вважатись МТ.

Довільний механічний рух можна представити як поєднання двох видів руху – поступального та обертального.

Поступальний рух – це такий рух, при якому будь-яка пряма, що з'єднує дві довільні точки тіла, зміщується, залишаючись паралельною своєму початковому напрямку. При поступальному русі всі точки тіла описують однакові траєкторії.

Обертальний рух – це такий рух, при якому всі точки рухаються по колах, центри яких перебувають на осі обертання.

Положення тіла (МТ) в ПДСК (рис. 1.1) можна задати через радіус-вектор, тобто вектор, що з'єднує початок координат з точкою простору, де перебуває тіло (МТ) в даний момент часу.



В подальшому викладенні будемо розглядати МТ, переходячи до розгляду тіла, коли це важливо.

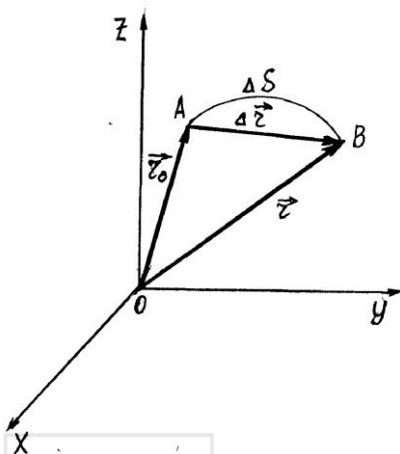


Рис. 1.1. Точка А – початкове положення МТ, Точка В – кінцеве положення МТ під час її руху, \vec{r}_0 – початковий радіус-вектор МТ, \vec{r} – кінцевий радіус-вектор, ΔS – шлях, $\Delta \vec{r}$ – переміщення

З рис. 1.1 видно, що для руху МТ можна ввести поняття траєкторії та переміщення.

Траєкторією руху називається уявна лінія, в кожній точці якої перебуває МТ під час свого руху.

Шлях – це відстань, яку проходить МТ вздовж траєкторії.

Переміщенням називається вектор, який сполучає початкове і кінцеве положення МТ.

З рис. 1.1 видно, що

$$\Delta \vec{r} = \vec{r} - \vec{r}_0. \quad (1.1)$$

У тому випадку, коли рух МТ починається з початку координат і $\vec{r}_0 = 0$, отримаємо

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}.$$

В подальшому будемо вважати, що МТ починає рух з початку координат системи відліку.

Також з рис. 1.1 можна зробити висновок, що завжди $\Delta S \geq |\Delta \vec{r}|$. У тому випадку, коли $\Delta S = |\Delta \vec{r}|$, рух МТ на даному відрізку траєкторії називається *прямолінійним*. Якщо $\Delta S > |\Delta \vec{r}|$, то рух – *криволінійний*.

Розв'язати основне рівняння – це значить знайти залежність

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.2)$$

Радіус-вектор \vec{r} є функцією трьох координат (x, y, z) , тобто

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}, \quad (1.3)$$

де \vec{i} , \vec{j} і \vec{k} – одиничні вектори, напрямлені відповідно вздовж



осей OX , OY і OZ , а x , y , і z – відповідні проекції \vec{r} на ці осі.

Звідси рівняння (1.2) рівнозначне знаходженню залежностей

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \\ z = z(t). \end{cases} \quad (1.3)$$

1.2. Кінематичні характеристики поступального та обертального рухів

Фізичні поняття швидкості та прискорення є основними в кінематиці. В загальному випадку, для будь-яких видів руху, **швидкість** – це векторна величина, яка характеризує зміну радіуса-вектора рухомої МТ з часом. Найчастіше в розрахунках використовують поняття середньої швидкості за переміщенням та миттєвої швидкості.

Вектор середньої швидкості за переміщенням дорівнює відношенню переміщення $\Delta \vec{r}$ рухомої МТ до часу Δt , протягом якого відбулося дане переміщення

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (1.4)$$

Вектор миттєвої швидкості дорівнює першій похідній радіуса-вектора рухомої МТ за часом і напрямлений вздовж дотичної до траєкторії в будь-якій її точці.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (1.5)$$

Вимірюється швидкість в $[м/с]$. Швидкість МТ з часом може змінюватись як за модулем так і за напрямком.

Для характеристики стрімкості зміни швидкості вводять поняття вектора середнього прискорення та вектора миттєвого прискорення.

Вектор середнього прискорення дорівнює відношенню зміни вектора швидкості МТ до проміжку часу, за який вона відбулася

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}. \quad (1.6)$$

Вектор миттєвого прискорення дорівнює першій похідній



миттєвої швидкості МТ за часом або другій похідній її радіуса-вектора за часом

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (1.7)$$

Вимірюється прискорення в $[м/с^2]$.

Розглянемо окремо прямолінійний та обертальний рухи. Оскільки при прямолінійному русі $\Delta S = |\Delta \vec{r}|$ і шлях S співпадає з довжиною вектора переміщення \vec{r} , то направивши вісь ОХ вздовж вектора \vec{r} , з (1.5) отримаємо

$$v = \frac{dS}{dt}, \quad (1.8)$$

звідки інтегруванням можемо знайти

$$S = \int v dt. \quad (1.9)$$

Введемо поняття рівномірного руху. Під *прямолінійним рівномірним рухом* МТ розуміють її рух із сталою швидкістю ($\vec{v} = const$). Тоді для такого виду руху в (1.9) можна винести швидкість з під знака інтеграла і взявши його знайти

$$S = S_0 + v \cdot t, \quad (1.10)$$

де S_0 – шлях, який пройшла МТ до моменту часу $t = 0$.

З рівняння (1.7) видно, що при рівномірному прямолінійному русі $\vec{a} = 0$.

Введемо поняття рівнозмінного руху. Під *прямолінійним рівнозмінным рухом* МТ розуміють її рух із сталим прискоренням ($\vec{a} = const$). З рівняння (1.7) можна знайти швидкість при такому русі

$$v = \int a dt = v_0 + at, \quad (1.11)$$

де v_0 – швидкість МТ в момент часу $t = 0$.

Підставивши (1.11) в (1.9) отримаємо формулу шляху для рівнозмінного руху

$$S = S_0 + v_0 \cdot t + \frac{at^2}{2}. \quad (1.12)$$

Якщо прискорення МТ менше нуля ($a < 0$), то такий рух



називається *прямолінійним рівносповільненням* і для нього рівняння (1.11, 1.12) запишуться у вигляді

$$\begin{cases} v = v_0 - at, \\ S = S_0 + v_0 \cdot t - \frac{at^2}{2}. \end{cases} \quad (1.13)$$

Якщо прискорення МТ більше нуля ($a > 0$), то такий рух називається *прямолінійним рівноприскоренням* і для нього справедливі рівняння (1.11) та (1.12).

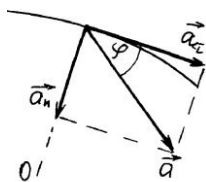


Рис.1.2.
Прискорення МТ
при
криволінійному
русі

Коли МТ рухається по криволінійній траєкторії, то у неї може змінюватись і модуль швидкості, і її напрямок. У цьому випадку вектор прискорення \vec{a} напрямлений під деяким кутом φ до дотичної до траєкторії (рис. 1.2) і його можна розкласти на дві складові

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau, \quad (1.14)$$

\vec{a}_n називається нормальним прискоренням, а \vec{a}_τ – тангенціальним прискоренням.

Нормальне прискорення характеризує зміну швидкості за напрямком і напрямлене вздовж радіуса до центра кривизни траєкторії. *Тангенціальне прискорення* характеризує зміну швидкості за модулем і напрямлене вздовж дотичної до траєкторії. Числові значення цих прискорень рівні

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} \quad \text{та} \quad a_n = \frac{v^2}{R}. \quad (1.15)$$

З (1.14) і (1.15) маємо

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{v^2}{R}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2} \quad (1.16)$$

та

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_n}{a_\tau}. \quad (1.17)$$

Для обертового руху МТ за аналогією до поступального руху також вводять фізичні поняття, які характеризують її



переміщення по колу – вектор кута повороту $\Delta\vec{\varphi}$, вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ та вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ (рис. 1.3).

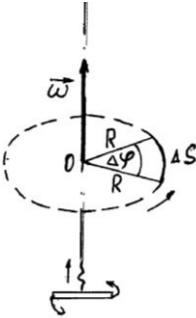


Рис.1.3. Фізичні
величини

обертового руху

Кут повороту $\Delta\vec{\varphi}$ – це вектор, який за величиною дорівнює куту, на який повертається радіус-вектор МТ при обертанні її навколо деякої нерухомої осі, і напрямком $\Delta\vec{\varphi}$ визначається за правилом свердлика. Вектор кута повороту немає точки прикладання.

Вектор середньої кутової швидкості дорівнює відношенню вектора кута повороту $\Delta\vec{\varphi}$ до часу обертання МТ Δt

$$\langle \vec{\omega} \rangle = \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t}. \quad (1.18)$$

Миттєвою кутовою швидкістю називають величину, яка є першою похідною кута повороту радіуса-вектора по часу

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \quad (1.22)$$

Як і $\Delta\vec{\varphi}$ вектор $\vec{\omega}$ немає точки прикладання і його напрямком визначається за правилом свердлика. Вимірюється кутова швидкість в $[rad/c]$.

Крім кутової швидкості, рух тіла по колу ще можна описувати за допомогою лінійної швидкості \vec{v} , модуль якої визначається з (1.8).

Вектор середнього кутового прискорення дорівнює відношенню зміни вектора кутової швидкості МТ до проміжку часу, за який вона відбулася

$$\langle \vec{\varepsilon} \rangle = \frac{\Delta\vec{\omega}}{\Delta t}. \quad (1.23)$$

Миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ дорівнює першій похідній кутової швидкості по часу

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d^2\vec{\varphi}}{dt^2}. \quad (1.24)$$



Вектор кутового прискорення напрямлений вздовж осі обертання і співпадає з напрямком $\vec{\omega}$, якщо кутова швидкість зростає, і протилежний до напрямку $\vec{\omega}$, якщо кутова швидкість зменшується. Вимірюється кутове прискорення в $[rad/c^2]$.

Введемо поняття обертального рівномірного руху. Під *обертальним рівномірним рухом* (рівномірний рух по колу) МТ розуміють її рух із сталою кутовою швидкістю ($\vec{\omega} = const$). З рівняння (1.22) виконавши аналогічні математичні операції при виведенні (1.10) можна отримати закон зміни кута повороту радіус-вектора МТ при обертальному рівномірному русі

$$\varphi = \varphi_0 + \omega \cdot t, \quad (1.25)$$

де φ_0 – кут, на який повернувся радіус-вектора МТ навколо осі до моменту часу $t = 0$. При обертальному рівномірному русі $\vec{\varepsilon} = 0$.

При рівномірному русі по колу використовують поняття *періоду* T та *частоти* ν . Період – це час одного повного оберту, а частота – кількість обертів за одиницю часу. Кутову та лінійну швидкості можна виразити через період або частоту

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (1.26)$$

та

$$\nu = \frac{2\pi R}{T} = 2\pi\nu R. \quad (1.27)$$

Звідси
$$\nu = \omega \cdot R \text{ або } \omega = \frac{\nu}{R}, \quad (1.28)$$

де R – радіус колової траєкторії МТ. У векторній формі

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{R}, \quad (1.29)$$

де « \times » – це знак векторного добутку.

Введемо поняття обертального рівнозмінного руху (рівнозмінного руху по колу). Під *обертальним рівнозмінним рухом* МТ розуміють її рух із сталим кутовим прискоренням ($\vec{\varepsilon} = const$). З (1.22) та (1.24) виконавши аналогічні математичні операції при виведенні (1.11) та (1.12) можна отримати закони рівнозмінного руху по колу



$$\begin{cases} \omega = \omega_0 \pm \varepsilon \cdot t, \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t \pm \frac{\varepsilon \cdot t^2}{2}, \end{cases} \quad (1.30)$$

де знак «+» відноситься до прискореного руху, «-» – до сповільненого.

Між прискореннями поступального та обертального рухів існує залежність

$$\vec{a}_\tau = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}, \quad (1.31)$$

де \vec{R} – вектор, який з'єднує вісь обертання з МТ, а « \times » – знак векторного добутку.

1.3. Поняття ступенів вільності тіла

Положення МТ в просторі задається трьома координатами: x , y , z . Якщо точка не вільна, а рухається, наприклад по деякій поверхні, то для визначення її положення необхідно не три, а дві координати. Нехай рух матеріальної точки відбувається на поверхні сфери радіусом R . Рівняння сфери

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2. \quad (1.32)$$

Тоді, якщо ми знаємо координати точки x і y , то її координату z ми завжди знайдемо із (1.32)

$$z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (1.33)$$

тобто координата z є залежною від x і y , які називаються незалежними. Так само, якщо вважати незалежними координати x і z , то в цьому випадку буде залежною координата y .

Незалежні змінні, які характеризують положення механічної системи називаються **ступенями вільності**.

Положення двох точок в просторі характеризує 6 координат: x_1 , y_1 , z_1 , x_2 , y_2 , z_2 , але якщо ці

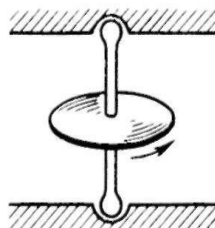


Рис.1.4. Шарнірне з'єднання з одним ступенем вільності



точки між собою жорстко зв'язані тонким циліндром довжиною l , то зв'язок між ними можна описати рівнянням

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l^2, \quad (1.34)$$

тобто існує один зв'язок між точками, а це означає, що така система з двох жорстко зв'язаних точок має 5 ступенів вільності.

Три матеріальні точки мають відповідно 9 незалежних координат, але якщо вони жорстко зв'язані між собою, тобто мають три зв'язки, що описуються рівнянням (1.34), то кількість ступенів вільності для них дорівнює 6.

Оскільки положення будь-якого твердого тіла однозначно задається трьома його точками, які не лежать на одній прямій, то і тверде тіло має 6 ступенів вільності.

Кількість ступенів вільності тіла визначає не тільки кількість незалежних змінних, які визначають його положення в просторі, а й кількість його незалежних переміщень. Три ступеня вільності матеріальної точки означають, що вона може незалежно переміщатись по трьох осях координат. Будь-який складний рух точки (коловий, спіральний, тощо) можна описати накладанням таких трьох рухів вздовж трьох координат. Такі три ступеня вільності точки називають *поступальними ступенями вільності*. Якщо точка рухається по площині – вона має 2 поступальних ступеня вільності, якщо вздовж прямої – 1 поступальний ступінь вільності.

Якщо матеріальна точка або тверде тіло може лише

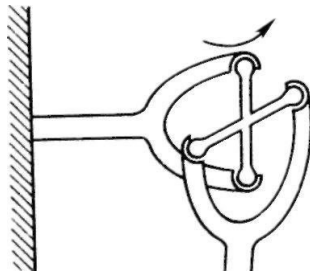


Рис.1.5. Шарнірне з'єднання з двома ступенями вільності

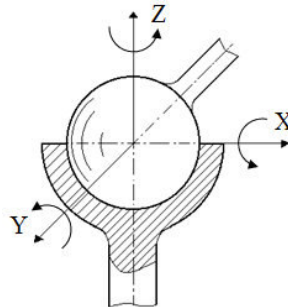


Рис.1.6. Шарнірне з'єднання з трьома ступенями вільності



обертатися навколо однієї нерухомої осі обертання, то така точка чи тіло має один *обертальний ступінь вільності*. Колесо машини, яка рухається по прямій, має два ступені вільності: один обертальний – навколо осі колеса і один поступальний – переміщення осі колеса вздовж дороги.

Абсолютно тверде тіло має 6 ступенів вільності: три – поступального руху центру мас по трьом осям системи координат і три – обертального руху відносно цих же осей, які проходять через центр мас.

На рис. (1.4) показане шарнірне з'єднання з одним ступенем вільності, на рис. (1.5) – з двома, на (1.6) – з трьома. Кулястий шарнір (1.6), зокрема, здійснений в тазостегновому суглобі людини.

1.4. Кінематичні характеристики живих організмів

Можливість механічних рухів біологічних об'єктів, таких як їх поступальний рух як МТ, скорочення різноманітних м'язів ссавців і комах, рух листя, гілок, стовбурів рослин, биття війок і рух джгутиків бактерій, поділ клітин і рух протоплазми, є відмінною рисою живих організмів. Живі організми, від найпростіших до людей, характеризуються широким діапазоном швидкостей при переміщеннях.

Пересування у водному середовищі (плавання) найкраще вивчено у водних хребетних (риб і ссавців), оскільки їх рухи, пов'язані зі зміною форми тіла і достатньо добре вивчені за допомогою математичних методів. За формою тіла риби суттєво відрізняються (рис. 1.7). Пересування їх у воді значно відрізняється і пов'язане з умовами середовища і швидкістю плавання. Так, торпедоподібна форма забезпечує найбільш швидке пересування у відкритій воді, сплюснена з боків – можливість плавання у водоймах з густою рослинністю, але цей тип форми тіла зустрічається і серед риб, що живуть в товщі води (і серед придонних і донних).



Змієподібний тип тіла характерний для риб, що живуть серед водоростей і зариваються в мул. Найменшу швидкість мають риби зі стрічкоподібною, кулястою і плоскою формою тіла.

Серед зазначених типів риб особливо відрізняються летючі риби, які можуть з великою швидкістю рухатися у воді і завершати цей руховий акт своєрідним польотом в повітрі. Риба розганяється у воді до швидкості 30 км/год, різко збільшуючи її на поверхні (при відриві від води) до (60-65) км/год. Після цього велике значення набувають не тільки змієподібні рухи їх тулуба, але і великі бічні плавники, що забезпечують своєрідне паріння в повітрі. У повітрі летюча риба тримається близько 10 с, пролітаючи за цей час близько 200 м, інколи, навіть, – до 400 м.

Швидкість руху риб у воді дуже відрізняється. Найбільшу швидкість мають деякі акули, тунці, меч-риби, лососеві. Так, тунець переміщається зі швидкістю 20 м/с, блакитна акула – 10 м/с, лосось – 5 м/с.

Експериментально визначено, що швидкість прямолінійного рівномірного руху риб залежить від довжини їх тіла. Для порівняння швидкості руху риб різного розміру введено коефіцієнт швидкості прямолінійного рівномірного руху риб

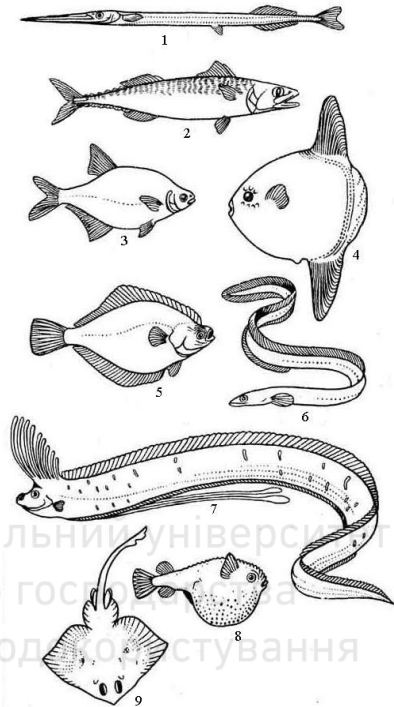


Рис. 1.7. Типи форми тіла риб (за Нікольським): 1 – стріловидна (сарган), 2 – торпедоподібна (скупбрія), 3 – сплюснена з боків (лящ звичайний), 4 – тип риби-місяця (риба-місяць), 5 – тип камбали (річкова камбала), 6 – змієвидна (вугор), 7 – стрічкоподібна (оселедцевий король), 8 – куляста (козубенька), 9 – плоска (скат).



$$K = \frac{v}{\sqrt{l}}, \quad (1.35)$$

де v – середня швидкість даного виду риб (в $м/с$), l – їх середня довжина (в $м$).

Значення коефіцієнта K коливаються від 7 (акули, тунці) до 0,5 (місяць-риба). У таблиці 1.1 наведені деякі дані швидкостей плавання риб різних видів.

Таблиця 1.1

Швидкість руху (плавання) різних видів риб

Риба	Швидкість, $м/с$	Риба	Швидкість, $м/с$
Баракуда	12,2	Тріска	2,5
Блакитна акула	10,1	Плотва	1,2
Тунець	6,2	Лящ	0,9
Лосось	6,0	Минь	0,6
Форель	3,6	Морський окунь	0,4
Щука звичайна	3,5		

Швидкість пересування у воді залежить від форми тіла, характеру рухів тулуба, хвоста і плавників, а також від гідродинамічних особливостей тіла риби. За формулу стандартної швидкості плавання риб приймається, зазвичай, співвідношення

$$v(м/с) = 4 \cdot l(м), \quad (1.36)$$

хоча для великих за розмірами риб воно дає дещо занижені значення.

Деякі морські ссавці відрізняються великою швидкістю плавання. Так, для кита-сервала описана швидкість 6 $м/с$, для дельфінів – до 10 $м/с$ і більше.

Крім звичайного механічного руху для деяких морських організмів є характерним реактивний рух.

Нижчі ссавці – однопрохідні, сумчасті і неповнозубі – за величиною швидкості, яку можуть розвивати, також суттєво різняться. Серед однопрохідних качконіс порівняно малорухливий на суші і більш рухливий у воді. Він може



розвивати достатньо велику швидкість при плаванні (до 15 км/год), пірнанні і ритті землі. М'язова сила качконоса (особливо спинних м'язів) дуже значна, що дозволяє йому швидко пересуватися під час плавання і при закопуванні в землю. Єхидна – нічний наземна тварина, ще більш рухлива. Для неї характерні ходьба, біг і, особливо, риття землі.

Найбільш рухливим сумчастим ссавцем є кенгуру, який може розвивати швидкість до 45 км/год.

Комахоїдні – здебільшого нічні тварини – мають дуже невелику швидкість руху. Проте м'язова діяльність комахоїдних досить різноманітна. Так, для їжака і землерийок характерні ходьба, біг і риття; для крота – виключно розвинена риуча діяльність, для хохулі – плавання.

Рукокрилі, або кажани, – загін ссавців, пристосованих до польоту і до спокою при висінні головою вниз в стані підвищеного тонуру задніх кінцівок. Повільні переповзання по горизонталі порівняно рідко спостерігаються в природі. У кажанів можна спостерігати повзання вгору по вертикальній стіні заднім кінцем тіла вперед. Політ здійснюється завдяки виключно великій літальній перетинці, яка є складкою шкіри, натягнутою між тулубом, задніми і передніми кінцівками, а також пальцями передніх кінцівок і хвостом. Швидкість польоту кажанів, мабуть, не перевищує (8-10) м/с.

Гризуні – загін ссавців, що нараховує найбільшу кількість видів, які населяють всі кліматичні зони Землі. Серед гризунів є значна кількість плаваючих і пірнаючих, багато з них розвивають велику швидкість бігу, наприклад, тушканчики та зайці. У єгипетського тушканчика (довжина тіла від кінця морди до основи хвоста 130 мм) задні кінцівки мають довжину 161 мм, що дозволяє йому робити стрибки в 2,5 м. При цьому він може розвивати швидкість до 40 км/год. Швидкості руху деяких гризунів представлена в таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Максимальна швидкість руху (бігу) у гризунів

Вид	Швидкість, км/год	Вид	Швидкість, км/год
Засць-біляк	55-60	Бурундук	11,5
Ховрах малий	12	Дикобраз	3



У хижих зустрічаються дуже різноманітні форми м'язової діяльності (риття, гризіння, стрибки, біг, повзання, плавання). За швидкістю виконання рухів хижаки неоднорідні. Так, борсук, ведмідь володіють повільними рухами, а вовк, собака, лисиця розвивають при бігу дуже велику швидкість. Максимальна швидкість бігу у вовка досягає 45 км/год, причому така швидкість може підтримуватися 15 км поспіль. У лисиці швидкість бігу не перевищує 35 км/год. Найшвидшим хижакom вважається гепард. Його швидкість досягає 120 км/год.

Серед копитних зустрічаються представники з великою швидкістю руху: кабарга, сайга, пересуваючись стрибками, можуть розвивати швидкість (70-80) км/год. З іншого боку, тут зустрічаються такі тварини, як верблюд, з дуже характерними повільними рухами, але своєрідним режимом роботи і відпочинку.

Дуже великий інтерес представляють найбільш близькі до людини ссавці – мавпи. Мавпи-гамадрили здатні за 6 год пробігти в близько 38 км. Пересування мавп відбувається в основному на чотирьох лапах (особливо при втечі від небезпеки); рухи кисті, а також низку інших, пов'язаних з життям стада і вихованням дитинчат, відбуваються при стоянні на двох лапах. Важливо відзначити, що швидкість руху на двох лапах у мавп в 4 рази менша швидкості руху на чотирьох.

Таблиця 1.3

Максимальна швидкість руху (бігу) у копитних

Вид	Швидкість, км/год	Вид	Швидкість, км/год
Джейран	56-64	Архар	50-60
Сайгак	72	Олень благородний	56
Лось	32-37		

Практика підтверджує, що більші за розмірами тварини рухаються з більшою швидкістю, ніж дрібні. З ростом маси m тварини у них зменшується частота кроків ν (кількість кроків за одиницю часу). Ця залежність знайдена експериментально і приблизно визначається співвідношенням

$$\nu = m^{-0,17}. \quad (1.37)$$



В той же час, довжина кроку l наземних тварин пропорційна масі тіла

$$l = m^{0,33}. \quad (1.38)$$

З (1.37) і (1.38) можна знайти швидкість руху тварин

$$v = l \cdot \nu = m^{0,33} \cdot m^{-0,17} = m^{0,16}. \quad (1.39)$$

В (1.39) розмірність всіх величин дано в системі СІ.

Серед птахів найбільшу швидкість під час атаки розвивають соколинні – (100-150) км/год. Швидкість гусей на коротких відрізках польоту може досягати 105 км/год. Така ж швидкість у чирків, а трохи менша (до 90 км/год) у стрижив в період шлюбних ігор. Кряква летить зі швидкістю (70-80) км/год, а голуби і тетері – до (55-60) км/год. Пташки з найменшою швидкістю – сіра ворона і чапля. Їх швидкість досягає (40-45) км/год. Закони аеродинаміки обмежують масу тіла літаючих теплокровних тварин коридором від 2 г (колібрі) до 13 кг (африканська дрохва). Рух у повітряному середовищі є ефективним тільки у випадку, коли маса птаха невелика, але і достатня для створення потужності, яка витрачається на подолання аеродинамічного опору. Тому найбільш ефективний як по швидкості, так і по маневреності політ демонструють птахи середніх розмірів.

Експериментів по визначенню прискорень, які можуть розвивати живі організми не так багато. Прискорення тварин та комах, в першу чергу, досліджуються за висотою їх стрибків. Висота стрибка різних видів тварин в умовах нашої планети становить не більше 1 м. У блохи, жука, сарани і людини висота стрибка з місця складає приблизно одну і ту ж величину – (30-60) см. У той же час дрібні тварини при стрибку розвивають прискорення, яке відрізняється на два порядки від прискорення великих тварин. Наприклад, блоха при масі тіла 0,5 мг розвиває прискорення приблизно 2500 м/с^2 , що в майже 170 разів більше прискорення людини при стрибку.

Вимірювання швидкості та прискорення руху хижаків проводилося в неволі. Так, швидкість гепарда вимірювалася при його бігу по прямій за приманкою. Отримані результати мало достовірні, оскільки жертва гепарда на свободі робить різкі зміни напрямку руху, що змінює його швидкість та прискорення. Останнім часом для визначення його



кінематичних характеристик використовують ошейник з датчиком руху і можливістю GPS - навігації. Дослідження показали, що гепард може на початку руху розвивати прискорення 3 м/с^2 . Чим більша швидкість руху гепарда, тим з більшим прискоренням він гальмує (зафіксовано рекорд – $7,5 \text{ м/с}^2$ при середньому значенні – $5,5 \text{ м/с}^2$). Маневруючи, гепард може розвивати нормальне прискорення до 13 м/с^2 .





2.1. Основні поняття динаміки

В основі динаміки лежать три закони Ньютона (1687 рік), які є узагальнення численних спостережень, дослідів та теоретичних досліджень Галілея, Гюйгенса, Ньютона та інших вчених. Ньютон формулював свої закони для тіл, але зараз прийнято вважати, що перший і другий закони Ньютона відносяться до матеріальної точки (МТ), а третій – до тіл.

Перший закон Ньютона: існують такі системи відліку, в яких МТ перебуває в стані спокою або рухається рівномірно і прямолінійно доти, доки дія з боку інших тіл не змусить її змінити цей стан.

Перший закон Ньютона називають законом інерції, а системи відліку, відносно яких виконується даний закон – інерціальними системами відліку. Будь-яка система відліку, про яку відомо, що вона рухається відносно інерціальної системи відліку поступально, рівномірно і прямолінійно, також є інерціальною системою відліку. Теоретично існує безліч інерціальних систем відліку, які володіють тією важливою властивістю, що у всіх таких системах закони фізики однакові (принцип відносності).

Поняття інерціальної системи відліку є науковою абстракцією. Реальна система відліку завжди прив'язана до якогось конкретного тіла (Сонця, Землі, автомобіля, людини, МТ), по відношенню до яких і вивчають рух об'єктів. Оскільки в природі немає нерухомих об'єктів (тіло, яке нерухоме відносно Землі, буде разом з нею рухатись по еліптичній орбіті відносно Сонця), то реальна система відліку може вважатись інерціальною з певним наближенням. Дослідним шляхом встановлено, що інерціальною системою відліку з великою точністю можна вважати систему відліку зв'язану з Сонцем.

Властивість тіла зберігати стан спокою або рівномірного прямолінійного руху без дії на нього інших тіл називають інертністю. Фізичну величину, яка є мірою інертності тіла, називають інертною масою. Крім того, маса є мірою гравітаційної взаємодії і її називають гравітаційною масою. Це вперше визначив Ньютон у законі всесвітнього тяжіння. Отже,



маса – це фізична величина, одна з основних характеристик матерії, яка визначає її інерційні та гравітаційні властивості. Вперше поняття маси ввів Ньютон в визначенні імпульсу тіла.

Імпульс \vec{p} – це фізична величина, пропорційна швидкості вільного руху тіла \vec{v}

$$\vec{p} = m\vec{v}, \quad (2.1)$$

де m – коефіцієнт пропорційності, стала для даного тіла величина, його маса. Імпульс вимірюється в $\left[\frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}} \right]$.

В принципі, нізвідки не випливає, що маса, яка створює поле тяжіння тіла, визначає і його інерційні властивості. Однак, дослід показав, що інерційна та гравітаційна маси пропорційні одна одній. При прийнятій одиниці вимірювання $[\text{кг}]$ вони рівні.

Третім важливим поняттям динаміки, крім маси та імпульсу, є поняття сили. Сила \vec{F} – це векторна величина, яка є мірою взаємодії між тілами, внаслідок чого тіла отримують прискорення або змінюють свою форму та розміри. Вимірюється сила в *Ньютонах* $[H]$. Якщо на МТ діє n сил, результуючу дію на неї можна охарактеризувати *рівнодійною сил*, яка дорівнює їх векторній сумі

$$\vec{F} = \sum_i^n \vec{F}_i. \quad (2.2)$$

Другий закон Ньютона: прискорення, що його набуває МТ, прямо пропорційне рівнодійній сил, співпадає з нею за напрямком і обернено пропорційне масі МТ

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.3)$$

Наслідок з другого закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (2.4)$$

тобто, сила, яка діє на МТ, дорівнює добутку маси МТ на прискорення, з яким вона рухається.

Якщо в (2.4) використати (1.7) і (2.1) при умові, що $m = \text{const}$, можна отримати



$$\vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (2.5)$$

тобто, швидкість зміни імпульсу МТ дорівнює рівнодійній всіх діючих на неї сил.

Добуток сили на час її дії називають $\vec{F}dt$ імпульсом сили. Переписавши (2.5) у вигляді

$$\vec{F}dt = d\vec{P}, \quad (2.6)$$

отримаємо: зміна імпульсу тіла дорівнює імпульсу сили.

Третій закон Ньютона: сили, з якими взаємодіють два тіла, рівні за модулем і протилежні за напрямком.

$$\vec{F}_{1,2} = -\vec{F}_{2,1}. \quad (2.7)$$

де $\vec{F}_{1,2}$ – сила, що діє на перше тіло з боку другого, а $\vec{F}_{2,1}$ – сила, що діє на друге тіло з боку першого.

Ці сили прикладені до різних тіл, тому не врівноважують одна одну. Третій закон динаміки справедливий як у випадку контактних взаємодій, тобто при безпосередньому дотику, так й при взаємодії на відстані між нерухомими тілами.

В динаміці розглядається два типи задач, розв'язок яких для МТ (або тіла, що рухається поступально) знаходиться за допомогою рівняння (2.4). *Задачі динаміки першого типу* полягають в тому, щоб, знаючи рівняння руху тіла, визначити сили, які на нього діють. Класичним прикладом розв'язку такої задачі є відкриття Ньютоном закону всесвітнього тяжіння: знаючи встановлені Кеплером на основі обробки результатів спостережень закони руху планет, Ньютон показав, що цей рух відбувається під дією сили, обернено пропорційної квадрату відстані між планетою і Сонцем.

Задачі динаміки другого типу є в динаміці основними і полягають в тому, щоб за діючими на тіло силами визначити закон його руху. Для розв'язку такої задачі необхідно знати початкові умови, тобто положення і швидкості тіла в момент початку його руху під дією прикладених сил.



2.2. Тіло як механічна система. Закон збереження імпульсу механічної системи

Розглянемо деяку сукупність МТ, яку називають механічною системою. Оскільки тіло можна представити такою сукупністю МТ, то будь-яке тіло теж є механічною системою. Всі МТ однієї механічної системи можуть взаємодіяти між собою. Сили, з якими окремі точки системи взаємодіють між собою, називають *внутрішніми силами*. Крім того, точки системи можуть взаємодіяти з МТ інших механічних систем. Результируючі сили з боку інших систем, з якими вони діють на окрему точку даної системи, називають *зовнішніми силами*.

Введемо поняття імпульсу системи n частинок як векторної суми імпульсів її окремих частинок:

$$\vec{p}_c = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i. \quad (2.8)$$

де \vec{p}_i – імпульс i -тої частинки. Зауважимо, що імпульс системи є величиною адитивною, тобто імпульс системи дорівнює сумі імпульсів її окремих частинок незалежно від того, взаємодіють вони між собою чи ні.

Візьмемо похідну з виразу (2.8) за часом. При цьому знаки похідної і суми можна поміняти місцями. Тоді отримаємо:

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{p}_i}{dt}. \quad (2.9)$$

Згідно (2.5) для i -тої частинки

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{j=1, i \neq j}^n \vec{f}_{ij} + \vec{F}_i. \quad (2.10)$$

Тут $\sum_{j=1, i \neq j}^n \vec{f}_{ij}$ – сума всіх внутрішніх сил, з якими кожна j -та частинка взаємодіє з i -тою частинкою. \vec{F}_i – результируюча зовнішніх сил, що діють на i -ту частинку.

Підставимо (2.10) в (2.9)

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1, i \neq j}^n \vec{f}_{ij} + \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.11)$$



У (2.11) подвійна сума праворуч – це сума всіх внутрішніх сил. Відповідно до третього закону Ньютона сили взаємодії між частинками системи попарно однакові за модулем і протилежні за напрямком. Тому результуюча сила в кожній парі взаємодії дорівнює нулю, а значить, дорівнює нулю і векторна сума всіх внутрішніх сил. В результаті останнє рівняння приймає наступний вигляд:

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = \vec{F}, \quad (2.12)$$

де \vec{F} , згідно (2.2), – результуюча всіх зовнішніх сил.

З рівняння (2.12) можна зробити важливий висновок: імпульс системи може змінюватись тільки під дією зовнішніх сил.

Якщо система буде замкнутою, тобто МТ системи взаємодіють тільки між собою і немає зовнішніх сил, то

$$\frac{d\vec{p}_c}{dt} = 0, \text{ а це означає, що}$$

$$\sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{P}_1(t) + \vec{P}_2(t) + \vec{P}_3(t) + \dots + \vec{P}_n(t) = \text{const}. \quad (2.13)$$

Отже, з (2.13) можна сформулювати *закон збереження імпульсу*: в замкнутій системі матеріальних точок (тіл) сума їх імпульсів є величина стала.

У (2.13) навмисно показана залежність імпульсів від часу. Це означає, що імпульси окремих частинок або частин замкнутої системи можуть змінюватися з часом, однак ці зміни завжди відбуваються так, що приріст імпульсу однієї частини системи дорівнює зменшенню імпульсу решти системи. Іншими словами, окремі частини замкнутої системи можуть тільки обмінюватися імпульсами. Виявивши в деякій системі тіл приріст імпульсу певного тіла, можна стверджувати, що це збільшення відбулося за рахунок зменшення імпульсу оточуючих тіл.

Проілюструвати рівняння (2.13) можна на прикладі реактивного руху. Він виникає в реактивних двигунах ракет або літаків при витіканні робочого тіла з сопла. За законом (2.23) імпульс цього робочого тіла за модулем рівний, а за напрямком – протилежний імпульсу ракети і сила реакції



примушує пристрій з двигуном рухатися у бік, протилежний напрямку витікання робочого тіла. Яскравими прикладами організмів, які використовують реактивний рух, є медузи, кальмари, восьминоги, деякі молюски. Вони пересуваються завдяки своєрідному реактивному руху, який забезпечується струменем виштовхнутої з особливих порожнин тіла води. Наприклад, медуза заповнює парасолькову частину водою, яку виштовхує, внаслідок чого рухається у протилежний бік. Складнішими системами є кальмари, які мають м'язову накидку, що заповнюється водою. Внаслідок м'язового скорочення вода виштовхується через сифон, а кальмар рухається у протилежному напрямку. Причому він здатний регулювати напрямок руху завдяки обертанню сифона. Деякі молюски, такі як морський гребінець, стискають періодично свої черепашки, завдяки чому можуть запобігти зустрічі з хижаками – морськими зірками. Швидкість морських організмів варіюється від 27 м/с у представників клоунових риб до 0,6 м/с у морського гребінця та до (8-15) м/с у кальмарів, восьминогів та каракатиць.

Серед рослин реактивний рух демонструє огірок-пирскач пружний («скажений» огірок).

Закон збереження імпульсу справедливий не тільки в класичній механіці, але і для замкнутої системи мікрочастинок. Таким чином, експерименти показують, що закон збереження імпульсу, належним чином узагальнений, є фундаментальним законом природи, який не знає жодних винятків. Але в такому широкому розумінні він вже не є наслідком законів Ньютона, а повинен розглядатися як самостійний загальний принцип, що є наслідком властивості симетрії простору – його однорідності.

2.3. Закон руху центра мас (інерції) системи

При розгляді руху тіл як механічних систем часто використовують поняття центра мас або центра інерції механічної системи. *Центром мас* (ЦМ) називають таку уявну точку, радіус-вектор якої визначається як



$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^n m_i} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i, \quad (2.14)$$

де m_i – маса i -тої точки системи, \vec{r}_i – її радіус-вектор, M – маса всієї механічної системи (тіла), n – кількість МТ в даній системі.

Слід відмітити, що центр мас не завжди знаходиться всередині тіла. Існують тіла, наприклад, тороїд («бублик»), у яких центр мас знаходиться поза межами тіла.

Переписавши вираз (2.14) у вигляді $M\vec{r}_c = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$,

продиференціюємо його за часом

$$M \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i. \quad (2.15)$$

В останньому виразі суму і похідну можна поміняти місцями

$$M \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i, \quad (2.16)$$

або згідно (2.8)

$$M\vec{v}_c = \vec{p}_c, \quad (2.17)$$

Отриманий результат продиференціюємо ще раз і, використавши (1.7), (2.8) і (2.12), отримаємо

$$M\vec{a}_c = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \vec{F}. \quad (2.18)$$

Отже, ЦМ системи рухається так, як матеріальна точка, в якій зосереджена вся маса системи, і на яку діє рівнодійна всіх зовнішніх сил. В замкнутій системі центр мас буде рухатись рівномірно і прямолінійно або перебувати в стані спокою. Це означає, що внутрішні сили не можуть змінити положення центра мас.

У випадку однорідного гравітаційного поля центр мас системи співпадає з центром тяжіння.



2.4. Закони руху твердого тіла

Як було показано в параграфі 1.3 абсолютно тверде тіло (АТТ) володіє шістьма ступенями вільності і для опису його руху потрібно шість незалежних рівнянь, які можна замінити двома незалежними векторними рівняннями одне з яких стосується поступального руху а інше – обертового. Вище було також сказано, що будь-який рух АТТ може бути представлений як накладання двох рухів: поступального та обертового.

В розділі 1 було показано, що при поступальному русі всі точки тіла за однаковий проміжок часу здійснюють однакові переміщення, а значить – мають однакові швидкості і прискорення. Достатньо знати закон руху однієї точки тіла (наприклад – центра мас) і можна описати рух всього тіла. В попередньому параграфі було показано, що центр мас АТТ як механічної системи рухається так, як би рухалась матеріальна точка з масою, рівною масі цього тіла, під дією всіх прикладених до тіла зовнішніх сил. Цей поступальний рух описується рівнянням

$$m \frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}_{\text{зовн}}, \quad (2.19)$$

де $\vec{F}_{\text{зовн}}$ – рівнодійна всіх зовнішніх сил. Рівняння (2.19) є **основним рівнянням динаміки поступального руху твердого тіла**.

Для опису обертального руху потрібно задати положення осі обертання в просторі та кутову швидкість обертання тіла в кожний момент часу. Крім того, при вивченні обертального руху тіла необхідно ввести дві нові фізичні величини – момент інерції та момент сили.

Момент інерції матеріальної точки дорівнює добутку її маси на квадрат відстані від цієї точки до центра або осі обертання

$$I_i = m_i r_i^2. \quad (2.20)$$

У випадку системи МТ або АТТ, що обертається навколо деякої осі OZ, **момент інерції тіла** буде рівний сумі моментів інерції всіх МТ, з яких складається дана система



$$I_z = \sum I_{iz} = \sum m_i r_{iz}^2, \quad (2.21)$$

де r_{iz} – віддаль від i -тої МТ до осі обертання OZ.

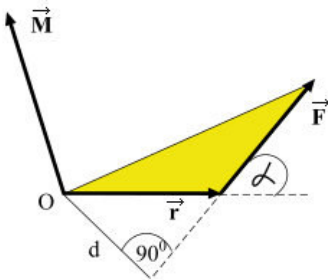


Рис. 2.1. Момент сили

Моментом сили МТ відносно центра обертання О називають векторний добуток радіуса-вектора \vec{r} цієї точки на вектор сили \vec{F}

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.22)$$

Напрямок вектора моменту сили \vec{M} (рис.2.1) визначається за правилом правого гвинта.

При обертанні вектор \vec{r} за найкоротшим шляхом до суміщення з вектором \vec{F} вектор \vec{M} напрямлений за напрямком руху гвинта. Вектор \vec{M} перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори \vec{r} та \vec{F} , а його модуль дорівнює

$$M = r \cdot F \cdot \sin \alpha. \quad (2.23)$$

Як видно з рис. 2.1 добуток $r \cdot \sin \alpha = d$ – це найкоротша віддаль від напрямку дії сили \vec{F} до центра обертання О, яку називають **плечем сили** d .

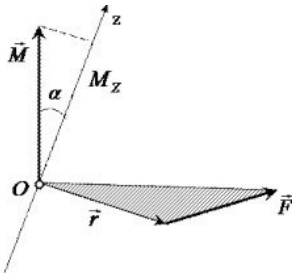


Рис. 2.2. Момент сили відносно нерухомої осі

Моментом сили відносно нерухомої осі OZ (рис.2.2) є скалярна величина M_z , яка рівна проекції вектора \vec{M} , відносно точки О на дану вісь.

Введемо ще одне поняття обертального руху – момент імпульсу. **Моментом імпульсу** МТ відносно точки обертання називають векторний добуток радіус-вектора \vec{r} цієї точки на вектор імпульсу \vec{p} (рис. 2.3)

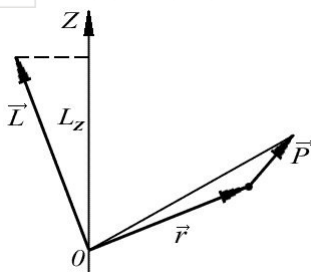


Рис. 2.3. Момент імпульсу відносно нерухомої точки та осі

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}. \quad (2.24)$$

Візьмемо похідну за часом від (2.24)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}. \quad (2.25)$$

Оскільки згідно (1.5) $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ і з

(2.1) $\vec{p} = m\vec{v}$, то $\vec{v} \times m\vec{v} = 0$ і, враховуючи (2.5) і (2.22), отримаємо

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (2.26)$$

тобто, швидкість зміни моменту імпульсу МТ відносно точки обертання дорівнює сумарному моменту сил, які на неї діють. Співвідношення (2.26) є **головним рівнянням динаміки обертального руху матеріальної точки** відносно точки обертання.

Розрахунки показують, що співвідношення (2.26) справедливе і для тіла, тобто є **головним рівнянням динаміки обертального руху тіла**: швидкість зміни моменту імпульсу тіла дорівнює головному моменту всіх зовнішніх сил відносно центра обертання. Для тіла тільки потрібно врахувати, що \vec{L} є сумарним моментом імпульсу тіла

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i, \quad (2.27)$$

де \vec{r}_i – радіус-вектор i -тої точки тіла, m_i – її маса, а \vec{v}_i – швидкість. \vec{M} – сумарний момент зовнішніх сил, які діють на тіло.

Коли тверде тіло обертається навколо деякої нерухомої осі OZ (рис.2.3), то головне рівняння динаміки обертального руху твердого тіла запишеться у вигляді

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (2.28)$$



де L_z — момент імпульсу твердого тіла відносно осі, M_z — головний момент зовнішніх сил, що діють на дане тверде тіло, відносно осі (компоненти $M_x = M_y = 0$).

При обертанні твердого тіла відносно осі обертання лінійні швидкості v_i всіх його точок пов'язані з кутовою швидкістю ω рівнянням

$$v_i = r_i \cdot \omega. \quad (2.29)$$

Тому момент імпульсу можна записати як

$$L_z = \sum_{i=1}^n r_{iz} \cdot m_i v_i = \omega \sum_{i=1}^n m_i r_{iz}^2 = I_z \omega. \quad (2.30)$$

Тоді основний закон динаміки обертального руху відносно осі OZ запишеться у вигляді

$$\frac{d(I_z \omega)}{dt} = M_z \text{ або } I_z \cdot \varepsilon = M_z, \quad (2.31)$$

де ε — кутове прискорення при обертальному русі тіла відносно осі OZ.

Таким чином, головний момент зовнішніх сил АТТ відносно осі дорівнює добутку його моменту інерції відносно цієї ж осі на кутове прискорення.

В замкнутій системі головний момент зовнішніх сил відносно осі M_z дорівнює нулю і тому (2.28) матиме вигляд

$$\frac{dL_z}{dt} = 0, \text{ звідси слідує, що } L_z = \text{const}, \text{ тобто}$$

$$I_z \cdot \omega = \text{const}. \quad (2.32)$$

Маємо вираз закону збереження моменту імпульсу АТТ відносно осі: якщо головний момент зовнішніх сил M_z відносно осі дорівнює нулю, то момент імпульсу твердого тіла відносно тієї ж осі не змінюється з часом.

Закон збереження моменту імпульсу є фундаментальним законом природи. Він пов'язаний з властивістю симетрії простору — його ізотропністю, тобто інваріантністю законів



природи відносно вибору напрямку осей координат системи відліку.

2.5. Реологія матеріалів

Як відомо, тіла можуть взаємодіяти дистанційно (через поля взаємодії) або безпосередньо (дотикаючись). Прикладом дистанційної взаємодії є гравітаційна взаємодія, яка визначається законом всесвітнього тяжіння. При безпосередній взаємодії реальних тіл (не АТТ) вони, дотикаючись, діють одне на одне з силами, призводячи до взаємної деформації. **Реологія** (з грецьк. *rhēos* – потік і *lōgos* – вчення) – це розділ динаміки, який вивчає закономірності деформації та текучості матеріальних систем під дією прикладених сил.

Механічною **деформацією** (від лат. *deformation* – спотворення) називається зміна взаємного розміщення точок матеріального середовища, яке приводить до зміни його розмірів і форми. Під дією зовнішніх деформуючих сил порушується характерна для рівноважного стану атомів (іонів) рівновага сил притягання та відштовхування. Це приводить до виникнення внутрішніх пружних сил, що прагнуть повернути атоми (іони) тіла в початкове положення. Збільшення внутрішніх сил для кожного матеріалу може відбуватись тільки до певної межі, характерної для цього матеріалу. Зовнішні сили можуть бути настільки великими, що внутрішні сили тіла при даних його розмірах не зможуть їх врівноважити, і тіло зруйнується.

Абсолютно пружними називаються тіла, у яких після припинення дії зовнішніх сил повністю зникає викликана силами деформація. *Абсолютно непружними* називаються тіла, які повністю зберігають свою деформацію і після припинення дії зовнішніх сил. В твердих тілах це супроводжується незворотною перебудовою кристалічної решітки. В природі немає тіл абсолютно пружних та абсолютно не пружних. Однак, такі матеріали як сталь, дюралюміній, тощо, за своїми властивостями достатньо близько можна вважати абсолютно пружними.



Пружною називається деформація, яка зникає після припинення дії зовнішніх сил, які її викликали. Деформація, яка не зникає після припинення дії зовнішніх сил, називається **залишковою** або **пластичною**.

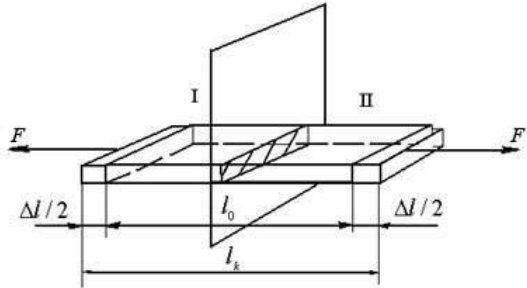


Рис. 2.4. Деформації при розтягу тіла

Існують наступні основні види механічної деформації твердих тіл: розтяг, стиск, згин, зсув, кручення.

Розтягом (стиском) називається такий вид деформації, при якому в поперечних перерізах об'єкту діє тільки повздовжня сила \vec{N} , яка збільшує (зменшує) поздовжні розміри тіла. Модуль такої внутрішньої сили можна виразити через суму модулів поздовжніх зовнішніх прикладених сил:

$$N = \sum_{i=1}^n F_i. \quad (2.33)$$

В межах пружності, згідно закону Гука, деформація прямо пропорційна модулю такої сили

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{N}{S}, \quad (2.34)$$

де Δl – величина абсолютної деформації розтягу або стиску, l_0 – початкова довжина тіла у напрямку прикладання сили, N – внутрішня сила, S – площа поперечного перерізу, E – модуль Юнга для даного матеріалу. В таблиці 2.1 приведені значення модуля Юнга деяких речовин.

Величину $\varepsilon = \frac{l_k - l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}$ називають відносною

деформацією розтягу або стиску. Величину $\sigma = \frac{N}{S}$ називають нормальною напругою (напруженням або інтенсивністю внутрішніх сил), оскільки воно діє перпендикулярно до площі



поперечного перерізу. Осьова сила N у поперечному перерізі стержня є пропорційною рівнодійній нормальних напруг σ .

Тоді закон Гука можна записати у вигляді

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma. \quad (2.35)$$

Таблиця 2.1

Модуль Юнга біологічних тканин та деяких матеріалів

Речовина	Модуль Юнга, Па	Речовина	Модуль Юнга, Па
Еластин	$10^5 - 10^6$	Нерв	$1,85 \cdot 10^7$
Колаген	$10^7 - 10^8$	Артерія	$5 \cdot 10^4$
Мембрана еритроцита	$4 \cdot 10^7$	Вена	$8,5 \cdot 10^5$
Клітина гладких м'язів	10^4	Сталь	$2 \cdot 10^{11}$
М'яз в спокої	$9 \cdot 10^5$	Дерево	$1,2 \cdot 10^{10}$
Кістка	$1,2 \cdot 10^{10}$	Гума	$5 \cdot 10^6$
Сухожилля	$1,6 \cdot 10^8$		

За фізичним змістом, модуль Юнга дорівнює такій нормальній напрузі при якій тіло видовжується (стискається) вдвічі.

Експериментально встановлено, що навіть при незначних поздовжніх деформаціях тіл, їх поперечні розміри змінюються. Поздовжнє видовження викликає поперечне звуження тіл, і, навпаки, поздовжнє скорочення супроводжується поперечним потовщенням тіл.

Якщо позначити відносну поздовжню деформацію через ε , а відносну поперечну деформацію через ε_0 , то можна отримати залежність

$$\varepsilon_0 = \mu \varepsilon, \quad (2.36)$$

де μ – коефіцієнт Пуассона.

Пуассон вважав, що μ для всіх матеріалів однаковий і рівний 0,25. Однак вимірювання показують, що μ для



матеріалів знаходиться в межах від 0 до 0,5. Його середнє значення для деяких матеріалів приведено в таблиці 2.2.

Поведінка матеріалу при розтягу найкраще можна пояснити за допомогою кривої, яку називають діаграмою розтягу, яка є залежністю напруги σ від відносної деформації розтягу ε (див. рис. 2.5). З кривої видно, що до деякої точки А існує пропорційність між σ і ε . Точка А відповідає напрузі, яку називають *межею пропорційності*. До межі пропорційності закон Гука виконується. Отже, *межею пропорційності* називається та найбільша напруга σ_s , до якої деформації в матеріалі зростають пропорційно напрузі. З рис. 2.5 видно, що в діапазоні межі пропорційності

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \quad (2.37)$$

Але згідно закону Гука (2.35) $\frac{\sigma}{\varepsilon} = E$, отже $\operatorname{tg} \alpha = E$. Числове значення модуля пружності можна визначити в масштабі діаграми як тангенс кута нахилу прямолінійної ділянки діаграми до осі абсцис.

Таблиця 2.2
Коефіцієнт Пуассона для деяких матеріалів

Матеріали	μ	Матеріали	μ
Корок	$\approx 0,00$	Мідь	0,34
Карбонова сталь	0,24 – 0,28	Бронза	0,35
Хромонікелева сталь	0,25 – 0,3	Гума	0,47
Дюралюміній	0,32 – 0,33	Парафін	0,5
М'якоть яблука	0,21 – 0,34	Картопля	0,46 – 0,49

За значенням σ_s практично визначають і таку характеристику деформації як *межа пружності*. Як правило, навіть найбільш пружні матеріали, навіть при найменших напругах, отримують остаточні деформації. Але величина останніх настільки мала, що вони не мають практичного значення.

**Межею пружності**

називається така напру-га, при якій в матеріалі виникає залишкова від-носна деформація, що дорівнює наперед заданій малій величині (0,002% - 0,005% від початкової довжини зразка). Межа пружності для більшості матеріалів (наприклад, сталі) практично співпадає з межею пропорційності.

З підвищенням напруги крива розтягу непропорційно піднімається вгору від точки *A* до точки *C*, яка називається *критичною точкою текучості*. Починаючи з неї відносне видовження починає збільшуватися без збільшення напруги. Точка *C* визначає межу текучості. **Межею текучості (повзучості)** називається така напруга σ_m , при якій в матеріалі з'являється помітне видовження без збільшення напруги.

За практично прямолінійною ділянкою текучості діаграма розтягу знов стає криволінійною (випуклою доверху) і деформації тіла починають зростати швидше напруги. Точка *B* відповідає найбільшому значенню розтягуючих зусиль. Напруга, яка відповідає найбільшій напрузі σ_m без виникнення місцевого звуження тіла (*шийки*) називається **межею міцності**. Точка *B* характеризує виникнення такої шийки (рис. 2.6) і після неї видовження тіла відбувається, в основному, на довжині шийки, інша частина тіла практично не видовжується. При напрузі, що відповідає точці *M*, тіло руйнується шляхом розриву. Після розриву тіла в місці шийки розміри обох його частин скорочуються і остаточна відносна деформація тіла $\varepsilon_{ост}$ відповідає точці *N* на

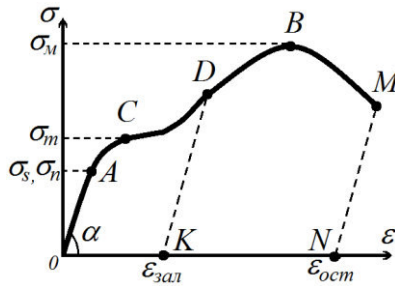
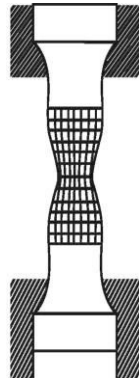


Рис. 2.5. Діаграма розтягу

Рис. 2.6.
Виникнення шийки деформації



діаграмі розтягу.

Руйнування – макроскопічне порушення суцільності тіла (матеріалу) в результаті механічних або будь-яких інших впливів. У процесі руйнування тіла можна виділити дві стадії: початкову – розвиток пор та тріщин, і кінцеву – розділення тіла на дві і більше частини. В залежності від того, як протікають дані стадії, розрізняють пластичне (в'язке) і крихке руйнування.

При *пластичному руйнуванні* після завершення пружної деформації і текучості починаються незворотні зміни розмірів і форми тіла, обумовлені зародженням та розвитком тріщин в найслабшому місці. Швидкість протікання процесу в'язкого руйнування зазвичай невелика, а сам процес можна сповільнити (зупинити), знизивши прикладене навантаження. Коли величина відносного видовження досягає деякого критичного значення, відбувається руйнування (розрив) тіла.

Крихке руйнування починається практично відразу після завершення пружної деформації (прямолінійна ділянка діаграми розтягу) і характеризується високою швидкістю протікання процесу. Тріщина, яка утворюється, досить швидко досягає критичного розміру, після чого відбувається її стрімке самовільне поширення, яке завершується руйнуванням.

Важливими характеристиками матеріалу є пластичність та повзучість. **Пластичність** характеризується величиною відносного видовження δ і відносного звуження поперечного перерізу ψ після розриву тіла.

$$\delta = \frac{l_k - l_0}{l_0} \text{ і } \psi = \frac{S_0 - S_k}{S_0}, \quad (2.38)$$

де l_0 – початкова довжина тіла, l_k – довжина тіла після розриву, S_0 – початкова площа поперечного перерізу тіла, S_k – площа поперечного перерізу шийки після розриву.

Якщо в якійсь точці D діаграми, що лежить поза межами границі пропорційності здійснити розвантаження тіла, то в тілі залишиться залишкова відносна деформація $\varepsilon_{зал}$ (рис. 2.5), причому лінія KD буде паралельною OA. При розриві зразка лінія NM визначає остаточну залишкову деформацію тіла $\varepsilon_{ост}$. Чим вона більша тим пластичнішим є матеріал.



Повзучість матеріалів називається повільна деформація тіла під дією прикладеного постійного навантаження або нормальної напруги.

Ще однією характеристикою матеріалу є його твердість. **Твердість** характеризує опір матеріалу проникненню в нього більш твердого тіла при вдавлюванні. Кількісно твердість визначається як відношення сили F контрольного зразка (індентора), що діє на тіло, до площі S поверхні відбитка, що утворився в матеріалі, і в СІ вимірюється в H/m^2 . Методи вимірювання твердості відрізняються формою і матеріалом індентора, який вдавлюється в досліджуване тіло. Наприклад, при визначенні твердості за методом Брінелля в досліджуване тіло вдавлюється сталевий загартований кулька, а в методі Віккерса – алмазна пірамідка квадратного перерізу, тощо. Позначення твердості в довідниках: H_b (або HB) – твердість по Брінеллю, H_v (або HV) – твердість по Віккерсу, тощо.

Деформація **зсуву** виникає при дії на тіло дотичної сили, прикладеної паралельно до закріпленої основи (рис. 2.7).

Величину $\tau = \frac{N}{S}$ називають

дотичною напругою, де N і S – внутрішня сила і площа поперечного перерізу зразка відповідно. Абсолютна деформація зсуву вимірюється величиною зміщення вільної основи Δl . Відносна деформація зсуву визначається за формулою

$$\frac{\Delta l}{h} = \operatorname{tg} \gamma, \text{ де } h - \text{висота зразка. Так як кут } \gamma \text{ часто малий, то}$$

можна вважати, що $\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma$. Оскільки при цьому виді деформації внутрішні сили діють в площині перерізу, то деформацію зсуву здійснюють дотичні механічні напруги. При невеликій величині відносної деформації зсуву зв'язок між деформацією і механічною напругою виражається законом Гука для зсуву:

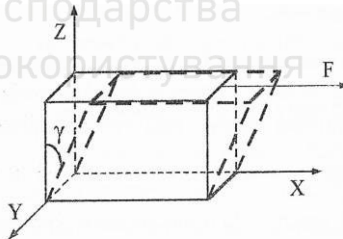


Рис.2.7. Деформації зсуву



$$\gamma = \frac{1}{G} \tau, \quad (2.39)$$

де G – модуль зсуву. Між величинами E і G для одного і того ж матеріалу існує залежність :

$$G \approx 0,4E. \quad (2.40)$$

Деформації **кручення** піддаються багато деталей машин і конструкцій: вали, пружини, тощо, а також кістки опорно-рухового апарату людини і тварин.

Нанесемо на поверхню циліндра сітку взаємно перпендикулярних ліній, так що одне вічко на циліндрі за формою буде квадратом (рис. 2.8), і перпендикулярно до осі циліндра прикладемо до його країв дві сили, напрямлені в різні сторони. При малій деформації можна зафіксувати, що:

- квадрати перетворились в ромби, тобто відбувається зсув поперечних перерізів тіла;
- перерізи круглі і плоскі до деформації зберігають свою форму і після деформації;
- відбувається поворот одного перерізу відносно іншого на деякий кут.

На ос-
нові отри-
маних да-
них можна
зробити
висновок,
що матері-

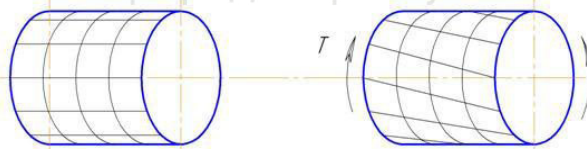


Рис.2.8. Деформація кручення

ал циліндра при деформації кручення підкоряється закону Гука для зсуву (2.39), тобто кручення стержня круглого поперечного перерізу можна представити як результат зсувів, викликаних взаємним поворотом його перерізів.

Величину деформації кручення визначають за *відносним кутом закручування* (рис. 2.9), який визначається за формулою

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (2.41)$$

де $d\varphi$ – кут повороту одного перерізу віднос-

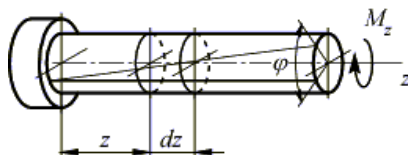


Рис.2.9. Відносний кут закручування



но іншого, при відстані між ними dz .

Якщо всі перерізи тіла зсовуються рівномірно, то

$$\theta = \frac{\varphi}{z}, \quad (2.42)$$

де φ – кут зсуву одного торця циліндра відносно іншого, z – довжина тіла.

Опір крученню швидко зростає із збільшенням радіуса циліндра, тому органи тварин і людини, розраховані на виконання крутильних рухів, як правило, довгі й тонкі (шия птахів, тіло змії).

При деформації **згину** на опуклій стороні тіло піддається розтягу, а на увігнутій піддається

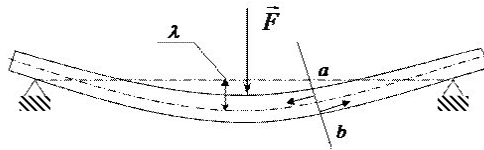


Рис.2.10. Деформація згину

стиску (рис. 2.10). В середині зігнутого тіла знаходиться тонкий шар, який називається *нейтральним шаром*, що не піддається ні розтягу, ні стиску. Біля нього при деформації тіла виникають дуже малі пружні сили. На шари тіла діє тим більша механічна напруга, чим далі вони знаходяться від нейтрального шару. На рис. 2.10 показана деформація згину. Пунктирна лінія – нейтральний шар, стрілками показані сили, що діють в деякому перерізі ab . Величина λ називається стрілою прогину. В теорії опору матеріалів показано, що стріла прогину прямокутної в перерізі балки знаходиться за формулою:

$$\lambda = \frac{1}{4b} \frac{F}{E} \left(\frac{L}{a} \right)^3, \quad (2.43)$$

де b – ширина балки, a – її товщина, L – її довжина, F – діюча сила, E – модуль Юнга.

Матеріал, який знаходиться в нейтральному шарі, з точки зору підвищення міцності тіла при деформації, абсолютно непотрібний. Він лише робить конструкцію важчою. Тому частину речовини біля даного нейтрального шару можна видалити без зменшення міцності балки, яка працює на згин.



Таким способом зменшують масу конструкції при збереженні заданої міцності. Наприклад, суцільні бруси замінюють трубами, балки роблять тавровими або двотавровими. Трубчасту будову мають кістки кінцівок, стебла швидкозростаючих рослин-злаків, тощо. Математичні розрахунки показують, що найбільший опір згину виявляють трубки, в яких відношення внутрішнього діаметра до зовнішнього становить 8:11. Саме таке співвідношення мають стебла більшості рослин. Яскравим представником рослин, які позбавлені центральної частини стебла, є бамбук. Цю рослину ефективно використовують для одержання сировини, продуктів харчування та будівельних матеріалів близько 2,2 млрд. людей. Деякі види бамбука ростуть зі швидкістю близько одного метра за добу. Модуль Юнга тканини бамбука дорівнює $2 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$, тобто бамбук в розрахунку на одиницю маси більш пружний, ніж сталевий стрижень. У той же час густина бамбука становить 600 кг/м^3 , тоді як для сталі густина дорівнює 7800 кг/м^3 .

Стосовно до прямого бруса в залежності від напрямку діючих сил згин називають *поздовжнім* або *поперечним* (рис. 2.11).

Поздовжній згин виникає під дією сил, напрямлених вздовж

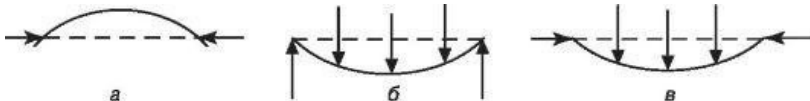


Рис.2.11. Різні види згину: а) поздовжній, б) поперечний, в) поздовжньо-поперечний

бруса та прикладених до його кінців назустріч один одному (рис. 2.11, а). Зразок набуває форму арки. Поперечний згин виникає під дією сил, напрямлених перпендикулярно брусу та прикладених як до його кінців, так і в середній частині (рис. 2.11, б). Зустрічається також і змішаний поздовжньо-поперечний згин (рис. 2.11, в).

2.6. Механічні та реологічні властивості біологічних тканин

Біологічні тканини прийнято поділяти на рідкі (кров, лімфа,



слизові рідини, синовіальна рідина, тощо), м'які і тверді, причому даний поділ є досить умовним. До м'яких біотканин ми будемо відносити тканини, для яких відносні деформації можуть становити десятки і сотні відсотків, – це шкіра, м'язова тканина, тканини легенів і мозку, стінки кровоносних судин, дихальних шляхів і деякі інші, а до твердих – кісткова тканина та зуби. Проміжне становище займають сухожилля і суглобовий хрящ. Для визначеності сухожилля віднесемо до м'яких тканин, а хрящ – до твердих.

Більшість біологічних тканин є сукупністю великої кількості хімічно різнорідних елементів, що сформувалися в процесі еволюції і, які прямо залежать від функцій, які вони виконують в процесі життєдіяльності організму. Все ж можна виділити три основні складові біологічних тканин: колагену (макромолекула унікальної триспиральної структури, волокнистий білок), еластину (як і колаген – волокнистий білок у хребетних) та сполучної речовини.

Під механічними властивостями біологічних тканин розуміють:

1. активні механічні властивості;
2. пасивні механічні властивості.

Перші пов'язані з процесами біологічної рухливості (скорочення м'язів, ріст клітин, рух хромосом в клітинах при їх поділі, тощо). Ці процеси в основному визначаються хімічними реакціями і вивчаються в курсі біохімії.

До пасивних механічних властивостей біологічних тканин відносять їх реологічні властивості. Розглянемо їх.

2.6.1. Тверді біологічні тканини

Кістки людей і тварин мають суттєві відмінності (довгі трубчасті кістки кінцівок, плоскі кістки черепа, короткі кістки – хребці), але з точки зору їх механічних властивостей – вони ідентичні.

Кісткова тканина – один із видів з'єднувальної тканини, є основою опорно-рухового апарату. У дорослої людини кісткова маса складає приблизно 18% від маси всього тіла. Густина кісткової тканини становить біля 2400 кг/м^3 і залежить від умов



формування, розвитку, віку людини, ділянки організму, тощо. У компактній кістковій тканині приблизно 1/2 об'єму займає тверда фаза кістки (органічна і мінеральна (неорганічна) складова кістки – ламели). Неорганічна речовина (60-50%) представлена мікроскопічними кристалами гідроксилапатиту типу $3CO_3(PO_4)_2 \cdot Ca(OH)_2$ та інших солей кальцію, а органічна частина (40-50%) – колагеном. Мінеральна речовина розміщується між волокнами макромолекул колагену (фібрилами).

Пружні властивості кісткової тканини визначаються в основному мінеральною речовиною, а текучість – колагеном. При густині кісткової тканини 2400 кг/м^3 її модуль Юнга становить $\approx 10^{10} \text{ Па}$, межа міцності при розтягу – $\sigma_m \approx (1,5 - 1,8) \cdot 10^8 \text{ Па}$, відносна деформація розтягу досягає 1%. Велику міцність кістка має і при стиску ($\sigma_m \approx (1,6 - 1,9) \cdot 10^8 \text{ Па}$). Значно гірше кісткова тканина витримує деформації згину та кручення. Так, стегнова кістка в поздовжньому напрямку витримує навантаження 45000 Н , а при згині всього 2500 Н .

Межа міцності на стискання кісток та інших біологічних тканин приведені в таблиці 2.3.

Таблиця 2.3

Межа міцності на стискання, МПа

Тканина	σ_m	Тканина	σ_m
Суцільна кістка	147	Дентин	20
Мінеральна речовина кістки	44	Хребець	7
Білкова речовина кістки	0,1	Зв'язки великих суглобів	10-15
Емаль	34-45	Шкіра (живіт)	17-36

Запас механічної міцності кісток помітно перевищує навантаження, з якими людина зустрічається у повсякденному житті. Відомо, що жива кістка в 5 разів міцніша залізобетону. Стегнова і гомілкорова кістки витримують навантаження в 25-30 разів більші середньої ваги людини.



Для довгих трубчастих кісток характерним є крихке руйнування. Руйнування таких кісток можна розглядати як руйнування стрижня під дією навантажень в поздовжньому або поперечному напрямках. Поздовжні навантаження виникають, наприклад, при падінні на кисть витягнутої руки, або на руку, зігнуту в ліктьовому суглобі. Пошкодження нижнього епіфіза стегнової кістки внаслідок деформацій розтягу та стиску можливе при падінні на зігнуте коліно (рис. 2.12).

Часто має місце пошкодження кісток внаслідок їх згину під впливом зовнішнього навантаження. Зона початку руйнування діяфіза довгої трубчастої кістки при згині розташовується на опуклій стороні (рис. 2.13) дуги, де зосереджуються найбільші значення напружень розтягу.

Суглобовий хрящ знаходиться на кінцівках трубчастих кісток. За своєю будовою він є пористим, легко проникаючим для рідин матеріалом з малим модулем Юнга. Під дією навантаження він виділяє, а при розвантаженні поглинає синовіальну рідину. Розміри хряща можуть змінюватись під дією навантаження.

В суглобі розрізняють рідку і тверду його фазу. Рідка фаза складає (60-80)% його маси. В твердій фазі є до 35% воло-

кон колагену, все інше – біологічний матеріал. Синовіальна рідина забезпечує змазування і живлення суглоба.

Суглобовий хрящ має дві важливі особливості:

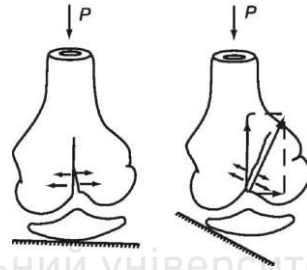


Рис.2.12. Травма стегнової кістки

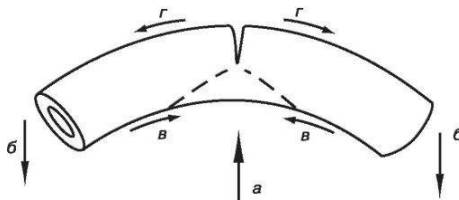


Рис.2.13. Схема руйнування діяфіза довгої трубчастої кістки внаслідок згину: а, б – напрямок дії векторів зовнішніх сил, в – деформації стиску, г – деформації розтягу



- завдяки тому, що його коефіцієнт жорсткості приблизно на порядок менший за коефіцієнт жорсткості кістки, він легше деформується і розподіляє навантаження на всю суглобову поверхню кістки, чим зменшує в ній концентрацію механічних напруг;
- забезпечує надзвичайно низький коефіцієнт тертя в суглобі (від 0,005 до 0,012).

За час життя людини навантаження на суглобний хрящ коливається від нульового до навантажень, які в 3-4 рази перевищують вагу людини. При цьому в суглобі можуть розвиватись деформації розтягу, які приводять до його деструкції. Така локальна деструкція суглобового хряща не відновлюється і тому вважається небезпечним пошкодженням, яке в подальшому може привести до дегенерації всього суглоба.

Реологічні властивості хряща суттєво відрізняються при деформаціях розтягу вздовж і впоперек напрямку колагенових волокон. Так, для зовнішнього шару хряща відростків стегнової кістки руйнуючі навантаження розтягу дорівнюють відповідно 25,5 і 9,8 МПа, тобто відрізняються в 2,5 рази.

Модуль Юнга E суглобового хряща, який був визначений в експериментах на стиснення, склав (23-50) МПа, модуль зсуву G – (0,4-4) МПа. Необхідно відзначити, що при дегенеративних змінах в хрящі модуль зсуву збільшується.

Коефіцієнт Пуассона хряща $\mu = 0,5$ і тому його можна розглядати як матеріал, що не піддається стисненню.

Оскільки людина здійснює в середньому $2 \cdot 10^6$ кроків в рік, викликає інтерес довговічність хряща і його стомлюваність. Встановлено, що при циклічних навантаженнях, довговічність хряща суттєво знижується при зростанні в ньому механічних напружень, а також із збільшенням його віку.

В таблиці 2.4 приведені основні реологічні характеристики компактної і губчатої речовини стегнової кістки і суглобового хряща людини.

2.6.2. М'які біологічні тканини

Більшість м'яких біологічних тканин мають подібні механічні та реологічні властивості: великі значення відносної



деформації, нестискуваність, відмінність в механічних параметрах в різних напрямках (анізотропність). Це пояснюється будовою даних речовин. В їх склад входять, клітини, колагенові та еластинові волокна і основна речовина. Механічні властивості даних складових і визначають механічні властивості м'яких біологічних тканин.

Таблиця 2.4

Реологічні характеристики матеріалу стегової кістки і суглобового хряща

Речовина	E , ГПа	σ_m (на розтяг або стиск), МПа	μ
Компактна речовина кістки	7-18	120-200	0,2-0,4
Губчата речовина кістки	0,026-0,6	3,7-11,4	–
Суглобовий хрящ	0,023-0,05	10-25	0,5

Колагенові волокна (діаметром від 0,2 до 12 $\mu\text{м}$) складаються з пучка фібрил, діаметром від 20 до 40 нм , в залежності від виду ссавця і тканини.

Еластинові структури в м'яких тканинах зустрічаються в двох морфологічних формах: волокон (шкіра, хрящі, вени) і мембран (артерії). За своїми механічними властивостями еластин подібний до гуми, він може розтягуватись в двох напрямках. Відносна деформація еластину ε може досягати 200 – 300%, тоді як колаген в цьому відношенні подібний до капронових волокон ($\varepsilon = 10\%$).

В таблиці 2.5 показані реологічні характеристики колагену та еластину.

Таблиця 2.5

Реологічні характеристики матеріалу колагену та еластину

Матеріал	E , МПа	σ_m (на розтяг), МПа
Колаген	10-100	100
Еластин	0,1-0,6	5



Кількісне співвідношення колагену і еластину в м'яких тканинах та взаємне розміщення їх волокон і визначає механічні та реологічні характеристики тканини.

Колагенові волокна в м'яких тканинах вкладені хвилеподібно і розгортаються лише при великих навантаженнях. Тому на початкових етапах деформації пружні властивості м'яких тканин визначає еластин. Після видовження еластинових волокон пружні властивості визначає набагато жорсткіший колаген. Пружні властивості тканин у комах визначає резилін, а у рослин целюлоза.

Шкіра є складним органом, який виконує низку важливих функцій організму: терморегуляцію, обмін речовин, секреторну функцію (роботу сальних і потових залоз), захист організму від пошкоджень, тощо. У дорослої людини її площа досягає $(1,5-1,6) \text{ м}^2$, а товщина – $(0,5-4) \text{ мм}$. Оскільки шкіра знаходиться на межі між організмом і навколишнім середовищем в процесі еволюції в ній виробились такі властивості, які забезпечили захист організму від шкідливої дії фізичних, хімічних, інфекційних агентів. Шкіра має складну будову і складається з трьох накладених один на одного шарів, які тісно пов'язані між собою, але чітко розрізняються за природою, структурою, властивостями: епідерміс, дерма, підшкірна клітковина. Епідерміс покривається зверху роговим шаром.

В загальний склад шкіри входять волокна колагену, еластину та основна тканина – матриця.

Колаген складає 75% сухої маси шкіри, а еластин – біля 4%. Середня густина шкіри становить 1100 кг/м^3 (область рук, грудей, спини).

Зі збільшенням деформації шкіри її пружний опір спочатку є невеликим (викликаний деформаці-

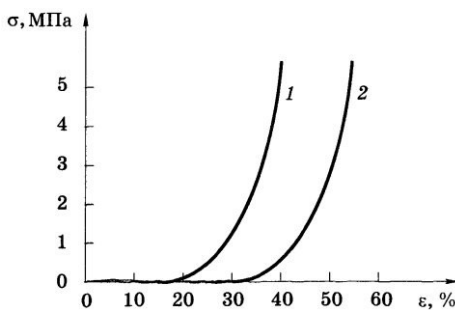


Рис. 2.14. Реологічні характеристики шкіри при розтягу в поперечному (1) і поздовжньому (2) напрямках



єю еластину), а потім, після розгортання колагенових волокон, різко збільшується. Більшість колагенових волокон шкіри орієнтовані в поперечному напрямку відносно поздовжньої орієнтації тіла, що зумовлює для шкіри явище анізотропії розтягу. Воно проявляється в тому, що існують виділені напрямки для ділянок шкіри (лінії Лангера), в яких шкіра розтягується набагато краще ніж в перпендикулярних до цих ліній напрямках (рис. 2.14). Зморшкам на шкірі ми завдячуємо лініям Лангера.

Анізотропія шкіри сильно змінюється при деяких хворобах, наприклад, при псоріазі, при нейродермітах (особливо в областях згинальних поверхонь) або в шкірі верхньої повіки при прогресуючій короткозорості. Анізотропія шкіри обличчя, особливо в області лоба, дозволяє оцінювати вікові зміни. Численні дослідження в різних областях медицини показали, що анізотропія шкіри є об'єктивним діагностичним критерієм певних захворювань людини.

М'язи є різноманітними за формою, розмірами, особливостям кріплення до інших органів тіла, величиною максимального зусилля, що ними розвивається. Незалежно від призначення, особливостей будови і способів регуляції принцип роботи різних м'язів організму однаковий.

М'язи складаються із сукупності м'язових клітин (волокон), які поділяються на:

- тонкі (діаметром 7 нм і довжиною 1 мкм), які складаються з трьох видів білків: актин, тропоміозин, тропонін;
- товсті (діаметром 15 нм, довжиною 1,5 мкм), які мають у своєму складі лише один білок – міозин;
- сполучну тканину ендомізій, яка складається з волокон колагену і еластину, а також густої мережі нервових волокон і кровоносних судин.

М'язові волокна через ендомізій утворюють спочатку первинний пучок. Первинні пучки, об'єднуючись, утворюють вторинний пучок.

Ширина такого вторинного пучка варіюється від 10 до 100 мкм, а довжина часто відповідає довжині м'яза і може досягати в деяких волокнах 12 см.

Кожне м'язове волокно знаходиться в окремій мембранній оболонці (сарколемі) і електрично ізольоване від інших волокон.



До кісток м'яз прикріплюється за допомогою сухожилля із міцної волокнистої тканини. М'язи проявляють одночасно пружні і в'язкі властивості, в цьому вони є подібними до полімерів.

М'язи за будовою поділяються на два види:

- гладкі паралельно-волокнисті (кишечник, стінки судин, м'язи шлунку та сечового міхура);
- поперечно - смугасті (поперечно-волокнисті).

Основу паралельно-волокнистих м'язів (їх більше 600) складають веретеноподібні клітини з подовженим ядром, тонкі м'язові волокна представлені білками актину і тропоміозину. Ці м'язи характеризуються тривалим скороченням і малою стомлюваністю.

Поперечно-волокнисті м'язи складаються або з довгих (декілька см) багатоядерних волокон (скелетні м'язи, м'язи, що кріпляться до кісток і забезпечують рух голови, тулуба, кінцівок), або з відносно коротких волокон (серцеві м'язи). Поперечно-волокнисті м'язи дуже тісно (анатомічно і фізіологічно) пов'язані зі скелетом, утворюючи разом з ним систему органів опори і руху.

Одиночне м'язове волокно при скороченні розвиває силу величиною близько 2 мН. У м'язах людини міститься приблизно $3 \cdot 10^7$ волокон. Якби всі вони скоротилися одночасно в одному напрямку, то створили б величезне зусилля – до 60 000 Н.

Якщо розглядати м'яз як фізичне тіло, то можна його характеризувати низкою механічних (пружність, жорсткість, міцність, релаксація) і біологічних (збудження, скорочення) властивостей, які відіграють важливу роль при виконанні рухів. Скорочуючись м'яз стає коротшим та товстішим, наближуючи між собою точки прикріплення та розвиваючи при цьому силу.

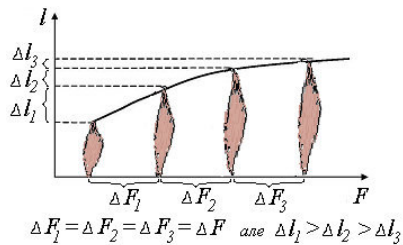


Рис. 2.15. Видовження м'язів під дією навантаження: l – довжина м'яза, F – прикладена сила



При прикладанні невеликих навантажень у м'язі виникають пружні сили скорочення. Від величини цих сил залежить рухова діяльність людини. Після зняття навантаження дані пружні сили поновлюють початкову форму деформованого (розтягнутого) м'яза.

Видовження м'яза нелінійно залежить від прикладеної сили (рис. 2.15). При збільшенні навантаження на м'яз в два рази видовження його збільшується з коефіцієнтом меншим ніж 2.

В'язкість м'яза проявляється в часовому запізненні його деформації після зміни навантаження. На рис. 2.16 лінією (A) зображе-

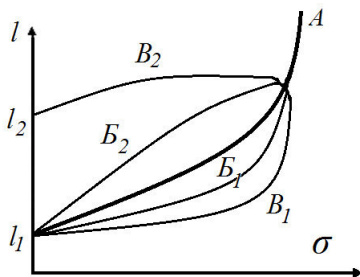


Рис. 2.16. Графік ілюстрації в'язкості м'яза

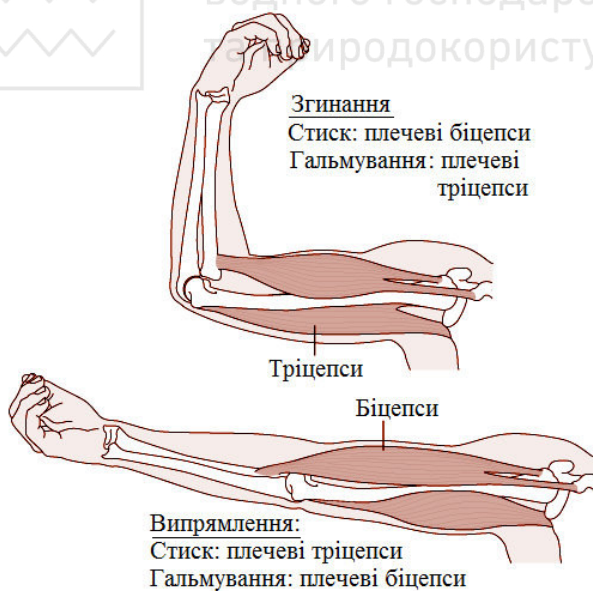


Рис. 2.17. Принцип дії ліктьового суглоба



но співвідношення «довжина – напруга» в ідеальному випадку, коли немає опору внутрішнього тертя у не збудженому м'язі. Лінія (B_1) показує, як при наявності в'язкості для кожного напруження м'язу її довжина відстає від «ідеального». Лінія (B_1) характеризує м'яз з ще більшою в'язкістю: запізнення деформації є ще більшим, ніж у випадку (B_1). Більш того, м'яз з великою в'язкістю після зняття навантаження може не зразу повернутися до вихідної довжини (l_1) – у ньому залишається залишкова деформація: $\Delta l = l_2 - l_1$. Криві (B і B) утворюють так звані «петлі гістерезису». Вони характеризують запізнення деформації і при розтягу, і при стиску (B_2 і B_2).

Повзучість м'яза проявляється у його видовженні з часом при незмінній нарузі, причому це видовження відбувається без керування центральною нервовою системою.

Релаксація м'яза проявляється у зменшенні напруги в ньому при незмінному видовженні. Вона проявляється, наприклад, при зістрибуванні людини з певної висоти або стрибках людини догори, якщо перед цим людина глибоко присіла і зробила довгу паузу перед стрибком. Чим довша така пауза, тим сила відштовхування і висота підскоку є меншими. Взагалі, прояви повзучості і релаксації м'яза потрібно розглядати не в прямій залежності від його нервового збудження. Для живого організму такий підхід є чисто умовним. Зміст його полягає в тому, що навіть з позиції механіки не потрібно розуміти зв'язок між напругою і довжиною м'яза як постійні співвідношення. Пружні сили, які виникають у м'язі можуть складати переважну частину сили тяги м'яза, тому на використання пружних властивостей м'яза при аналізі рухів потрібно приділяти особливу увагу.

Існує два важливих принципи біомеханіки скелетних м'язових тканин:

1. Скелетні м'язи працюють у парі. Вони можуть тільки скорочуватися, тому для кожного суглоба використовується один м'яз (або група м'язів) для руху його в одному напрямку і, відповідно, інший м'яз (або група м'язів), щоб рухати його в протилежному напрямку. Рис. 2.17 ілюструє цей принцип для ліктьового суглоба.

2. М'яз діє найбільш ефективно, коли він знаходиться в середині діапазону руху суглоба, який він згинає. В цьому



випадку обидва м'язи знаходяться в середньому навантаженні. Таке положення пари м'язів називається *релаксаційний баланс*.

З даних принципів випливає важливий критерій робочого дизайну: робота повинна бути запланована таким чином, щоб вона відбувалася за участю протилежних м'язів кожного суглоба в релаксаційному балансі. Для більшості суглобів, це означає, що з'єднання повинно відбуватися приблизно в середині руху. Навантаження на м'яз буде мінімальним при виконанні такої роботи.

Важливою характеристикою м'яза є його жорсткість. Коефіцієнт жорсткості м'яза визначається як відношення приросту сили відновлення м'яза до приросту довжини м'яза під дією зовнішньої сили:

$$K_{жс} = \frac{\Delta F}{\Delta l}. \quad (2.44)$$

Величина, що є зворотною до коефіцієнта жорсткості, має назву *коефіцієнта податливості* м'яза. Коефіцієнт податливості

$$K_n = \frac{\Delta l}{\Delta F} \quad (2.45)$$

вказує, як збільшиться довжина м'яза при зміні зовнішньої сили на 1 Н. Наприклад, коефіцієнт податливості згинача передпліччя є близьким до 1 мм/Н.

Міцність м'яза оцінюється за величиною напруження, при якому відбувається його розривання. Величина границі міцності складає від 0,1 до 0,3 Н/мм². Для порівняння – границя міцності сухожилля біля 50 Н/мм², а фасцій – від 0,1 до 0,3 Н/мм². Однак при дуже швидких рухах можливе розривання сухожилля при цілісності м'яза. Це відбувається через те, що м'яз встигає амортизувати, а сухожилля – ні.

Судинна тканина. Кровоносні судини складаються з трьох шарів: внутрішній (інтим), середній і зовнішній (судинна) оболонки. Механічні властивості судини в основному залежать від властивостей середньої оболонки. Вона складається з колагену, еластину і гладких м'язових волокон. Останні відповідають за активну поведінку судин, оскільки їх скорочення змінює діаметр відповідної кровоносної судини і механічні властивості судинної стінки в цілому.



Відносний склад судинної тканини змінюється по ходу кровоносної системи: співвідношення еластину до колагену в сонній артерії складає 2:1, а стегновій артерії 1:2. Зі збільшенням відстані від серця до периферії в судинах збільшується частка гладких м'язових волокон. Наприклад, в артеріолах вони вже є основною складовою судинної тканини. Капіляри мають ендотеліальний шар, але в їх стінках немає м'язової і з'єднувальної тканини. Вони відносно пасивні. Лімфатичні судини за будовою є схожими з венами, відрізняючись від них меншою товщиною і більшою проникністю.

Таблиця 2.6

Механічні розміри кровоносних судин

Назва	Діаметр, мм	Товщина стілки, мм	Сумарна площа внутрішньої поверхні, см ²	Відношення об'єму судини до загального об'єму кровоносної системи, %
Аорта	25	2	4,5	2
Середні артерії	4	1	420	8
Малі артерії та артеріоли	0,03	0,02		1
Капіляри	0,008	0,001	4500	5
Венули	0,02	0,002	4000	54
Вена	5	0,5	40	
Порожниста вена	30	1,5	18	

При дослідженні механічних властивостей судинної тканини розрізняють способи вирізання зразка з судини (вздовж або поперек судини). Але можна розглядати деформацію судин в цілому як результат дії тиску крові на пружний циліндр.

Розглянемо кровоносну судину довжиною l , товщиною h і внутрішнім радіусом r (рис. 2.18). Дві половини циліндричної судини взаємодіють між собою по перерізах стінок циліндра



(заштрихована область на рис. 2.18).

Загальна площа даного перерізу взаємодії дорівнює $2hl$. Якщо в судинній стінці існує механічна напруга σ , то сила взаємодії двох половинок судини дорівнює

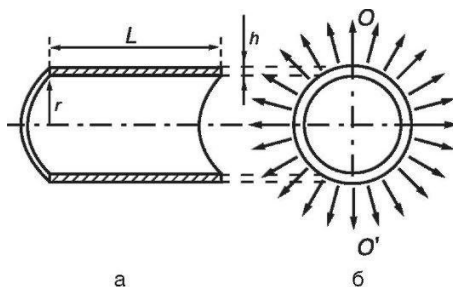


Рис.2.18. Переріз циліндричної судини
вздовж (а) і поперек (б) осі

$$F = \sigma \cdot S = 2\sigma hl. \quad (2.46)$$

Ця сила зрівноважена рівнодійною сил тиску крові зсередини на циліндр (показано стрілочками на рис. 2.18, б). Щоб знайти рівнодійну силу необхідно просумувати горизонтальні проекції прикладених сил. Однак, простіше знайти рівнодійну силу, якщо помножити тиск на проекцію площі напівциліндра на вертикальну площину OO' . Ця проекція дорівнює $2rl$. Тоді вираз для сили прийме вигляд

$$F_p = 2prl. \quad (2.47)$$

Прирівнявши (2.46) з (2.47) і виразивши σ отримаємо рівняння Ламе

$$\sigma = \frac{pr}{h}. \quad (2.48)$$

Рівняння Ламе, наприклад, показує, що в капілярах ($r \rightarrow 0$) напруга відсутня ($\sigma \rightarrow 0$).

Знайдемо повний диференціал (2.48) при умові ($h = const$):

$$d\sigma = \frac{r}{h} dp + \frac{p}{h} dr. \quad (2.49)$$

Продиференціюємо закон Гука (2.35) і врахувавши, що для циліндричного зразка $d\varepsilon = dr/r$, з нього виразимо

$$d\sigma = E d\varepsilon = E \frac{dr}{r}. \quad (2.50)$$

Прирівняємо праві частини (2.49) і (2.50) і отримаємо



$$E \frac{dr}{r} = \frac{r}{h} dp + \frac{p}{h} dr. \quad (2.51)$$

Перетворимо (2.51) відносно dp :

$$dp = \frac{h}{r} \left(\frac{E}{r} - \frac{p}{h} \right) dr = \left(\frac{Eh}{r^2} - \frac{p}{r} \right) dr. \quad (2.52)$$

Для кровоносної системи зазвичай $\frac{Eh}{r} \gg p$, тому з (2.52)

можна наближено дістати

$$\frac{dp}{dr} = \frac{Eh}{r^2}. \quad (2.53)$$

Рівняння (2.53) використовують при визначенні модуля Юнга кровоносних судин, вимірюючи залежність зміни тиску в судині від радіусу для судин різних радіусів.

Сухожилля (їх у людини декілька сотень) в порівнянні з іншими м'якими тканинами має відносно просту мікроструктуру, яка визначається однонапрямленими колагеновими волокнами. Така структура пов'язана з головною фізіологічною функцією сухожилля – необхідністю передавати зусилля в одному напрямку: від м'яза до кістки. В фазі розслаблення колагенові волокна мають хвилясту структуру, а при передачі зусилля вони випрямляються і потім майже не деформуються.

Таблиця 2.7

Реологічні характеристики матеріалу стегнової кістки і суглобового хряща

Речовина	E , МПа	σ_m (на розтяг), МПа	ε (при розриві), %
Сухожилля	> 100	53	9,7
Шкіра	2-40	7,6	78
Аорта в поздовжньому напрямку	0,84-3,9	0,7-1	46
М'язи серця	1	0,11	63,8

Модуль Юнга сухожиль більший 100 МПа. Серед м'яких тканин сухожилля мають найбільшу границю міцності, воно



також має найменшу відносну деформацію при однаковому навантаженні серед не мінералізованих тканин. Механічні властивості сухожиль залежать від статі і віку людини і максимальної міцності вони досягають для людини у віці 20-25 років. Характерні реологічні характеристики для сухожиль і інших м'яких тканин приведені в таблиці 2.7.

Тканини мозку мають м'яку пластичну драглеподібну структуру. Якщо головний мозок не підтримується черепом, він зберігає свою форму, хоча під дією власної ваги намагається сплющитись. Густина тканин мозку трохи вища густини води. Весь мозок на (77-78)% складається з води, на (10-12)% – з ліпідів, на 8% – з протеїнів (білків) і невеликої кількості неорганічних солей. В'язкість мозку відповідає в'язкості гліцерину (14,9 Па·с) при кімнатній температурі, але набагато менша ніж у інших тканин.

Насамкінець відмітимо розділи і напрямки медицини, для яких особливо важливо мати уявлення про механічні та реологічні характеристики біологічних тканин людини:

- космічна медицина, оскільки вона вивчає поведінку людини в нових екстремальних умовах проживання;
- спортивна медицина, яка вивчає можливості опорно-рухового апарату, а також особливості травматизму людини під час тренувань та спортивних змагань;
- гігієна, яка вивчає вплив вібрацій на механічні властивості тканин людини;
- протезування, яке використовує штучні тканини і органи при заміні тканин і органів людини;
- судова медицина, яка використовує знання стійкості біологічних структур по відношенню до різноманітних деформацій;
- травматологія і ортопедія, де питання механічної дії на організм є визначальними.



Рис.2.19. Усунення асиметрії лица за допомогою пластирного натягу



У спортивній та космічній медицині знання фізичних властивостей біологічних структур по відношенню до навантажень, які в них виникають під час змагань та космічного польоту, відіграють визначальну роль. У щелепно-лицевій хірургії, пластичній хірургії та косметології механічні властивості тканин визначають об'єм необхідних медичних заходів і служать об'єктивним критерієм для оцінки ефективності лікування.

Часто при пошкодженнях м'яких тканин, особливо на відкритих ділянках тіла, в посттравматичний період застосовують прості методи з використанням підручного матеріалу. Так, для усунення асиметрії обличчя після травми проводиться пластирний натяг зі здорової сторони на хвору.

Пластирний натяг (рис. 2.19) направлений проти натягу м'язів здорової шкіри і здійснюється міцною фіксацією вільного кінця пластиру до спеціального шолому-маски, виготовленому індивідуально.

М'які біологічні тканини комах та молюсків. Їх механічні та реологічні властивості в основному визначаються макромолекулами резиліну ($E = 1,7 \cdot 10^6 \text{ Па}$). Якщо взяти відношення сили, яку може розвинути блоха (*Aphaniptera*) завдяки скороченню резилінових волокон, до ваги комах і врахувати цей коефіцієнт в перерахунку на силу скорочення людських м'язів, то можна визначити висоту стрибка людини середньої ваги. Вона склала б більше 350 метрів. Саме завдяки резиліну бджола здатна здійснювати близько 500 мільйонів змахів крилами протягом життєвого циклу. Штучний резилін широко використовується у медицині як заміник пружних серцевих клапанів, стінок кровоносних судин та міжхребцевих дисків.

Еластичні властивості тканини, яка задає частоту відкривання стулок морського гребінця (*Pecten*), визначають білкові макромолекули абдуктину. Гребінець може закривати і відкривати стулки з частотою 3 коливання за секунду. Крім того, абдуктин знаходиться в передніх крилах цикад (*Homoptera*, *Cicadidae*).

М'які біологічні тканини рослин. Їх механічні та реологічні властивості в основному визначаються



макромолекулами целюлози.

Рослинна клітина оточена еластичною оболонкою целюлозно-пектинової природи. Оболонки рослинних клітин характеризуються пружними властивостями, які зумовлюють здатність рослинних клітин розтягуватися під впливом зовнішніх навантажень. Модуль Юнга для чистої целюлози становить 10^8 Н/м^2 , що становить близько 5% модуля Юнга для сталі. Клітинна оболонка містить різноманітні компоненти, крім целюлози, через що її модуль Юнга менший, ніж у чистої целюлози. Наприклад, модуль Юнга клітинної оболонки водорості *Nitella* дорівнює $7 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$. Модуль Юнга деревної рослинності змінюється в інтервалі $(0,35 - 0,39) \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$.

2.7. Реологічні моделі біологічних тканин

Закономірності динаміки механічних властивостей біологічних тканин вивчають за різноманітними реологічними моделями. Оскільки біологічні тканини одночасно володіють властивістю в'язкості та пружності, то в їх моделях можна використовувати пружні та в'язкі елементи. В якості елемента, що моделює пружні властивості біологічних тканин можна використовувати пружину, а в якості елемента, що моделює їх в'язкі властивості — циліндр з в'язкою рідиною, в якому рухається поршень з отворами.

2.7.1. Реологічні моделі твердих біологічних тканин

а) Кісткова тканина

Модель, що комбінує пружні та в'язкі властивості кісткової тканини, називається моделлю Кельвіна. У даній моделі паралельно з'єднані пружина з модулем Юнга E_1 і циліндр з поршнем з отворами у в'язкій рідині з коефіцієнтом в'язкості η приєднані послідовно до іншої пружини з модулем Юнга E_2 (рис. 2.20).

Під дією постійного навантаження пружина 2, згідно закону Гука, майже миттєво видовжується, після чого поступово



втягується поршень з рідини. Після зняття напруги відбувається швидке стиснення пружини 2, а пружина 1 поступово втягує поршень в попереднє положення.

Якщо швидкість руху поршня невелика, то сила опору рідини пропорційна до швидкості і напрямлена проти швидкості, тобто

$$F_{on} = -rv = -r\dot{x}, \quad (2.54)$$

де r – коефіцієнт опору, v – швидкість руху поршня.

Для відносної зміни координати поршня, запишемо:

$$\varepsilon_{\eta} = \frac{x - x_0}{x_0}, \quad (2.55)$$

де x_0 – початкова координата поршня, яка дорівнює координаті кінця не видовженої пружини 1, x – кінцева координата поршня. Візьмемо похідну з виразу (2.55) за часом

$$\dot{\varepsilon}_{\eta} = \frac{\dot{x}}{x_0}. \quad (2.56)$$

Тоді (2.54) можна переписати у вигляді:

$$\sigma_{\eta} S = -rx_0 \dot{\varepsilon}_{\eta} \text{ або } \sigma_{\eta} = -\frac{rx_0}{S} \dot{\varepsilon}_{\eta}, \quad (2.57)$$

де S – площа поперечного перерізу циліндра, σ_{η} – нормальна напруга, прикладене до поршня.

Коефіцієнт біля $\dot{\varepsilon}$ за фізичним змістом аналогічний коефіцієнту в'язкості рідини циліндра (див. розділ 4)

$$\eta = -\frac{rx_0}{S}, \quad [\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}. \quad (2.58)$$

Тоді з (2.57) і (2.58) отримаємо

$$\sigma_{\eta} = \eta \dot{\varepsilon}_{\eta}, \quad \dot{\varepsilon}_{\eta} = \frac{\sigma_{\eta}}{\eta} \quad (2.59)$$

Виходячи з властивостей послідовного з'єднання елементів

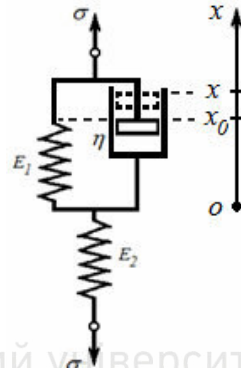


Рис. 2.20. Модель Кельвіна деформації кісткової тканини



моделі, запишемо вираз для її загальної відносної деформації

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \quad (2.60)$$

де ε_1 – відносна деформація першої пружини (оскільки $\varepsilon_1 = \varepsilon_\eta$ і $\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon}_\eta$), ε_2 – відносна деформація другої пружини.

Крім того, для паралельно з'єднаних циліндра і першої пружини може-

мо записати вираз для напруги σ_1 :

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 + \eta \dot{\varepsilon}_1. \quad (2.61)$$

де E_1 – модуль Юнга першої пружини.

Напруга в елементах однакова, тобто

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \quad (2.62)$$

де $\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2$ (E_2 – модуль Юнга другої пружини, ε_2 – її відносна деформація).

Отже,

$$\sigma = E_1 \varepsilon_1 + \eta \dot{\varepsilon}_1 = E_2 \varepsilon_2. \quad (2.63)$$

Отримаємо систему

$$\begin{cases} \sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 + \eta \dot{\varepsilon}_1, \\ \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2, \\ \sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{cases} \quad (2.64)$$

Використавши (2.64) і похідні за часом отримаємо

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_1}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{E_2} \dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{E_2 \eta} \sigma. \quad (2.65)$$

Рівняння (2.65) – це диференціальне рівняння моделі деформації кісткової тканини.

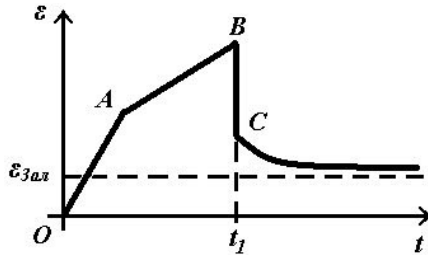


Рис.2.21. Залежність відносного видовження ε від часу t для кісткової тканини



Розв'язком даного рівняння (додаток 1) є:

$$\varepsilon = \frac{1}{E_2} \sigma + \frac{1}{\eta} e^{-\frac{E_1}{\eta} t} \int \sigma \cdot e^{\frac{E_1}{\eta} t} dt. \quad (2.66)$$

Оскільки залежність $\sigma(t)$ може бути довільною, то інтеграл в правій частині (2.66) може не братись взагалі. Для простих випадків, наприклад, при миттєвому прикладенні постійного навантаження ($\sigma = \text{const}$), видно, що відносна деформація ε стрибком змінюється. Величина цього стрибка становить $\varepsilon = \frac{\sigma(E_1 + E_2)}{E_1 E_2}$. Це відповідає миттєвому витягуванню пружини

2. Потім витягується поршень (залежність експоненціально зростає). В певний момент часу при знятті напруги ($\sigma = 0$) відбувається швидке скорочення пружини 2, а пружина 1 втягує поршень в попереднє положення за законом експоненціального спадання ε .

В реальній кістковій тканині стадії деформації дещо інші. Залежність відносної деформації кісткової тканини ε від часу t представлена на рис. 2.21. Тут в початковий момент прикладення напруги видовження відбувається не миттєво, а пропорційно (ділянка OA) за час видовження пружини 2 (швидка деформація). Після цього настає стадія повзучості

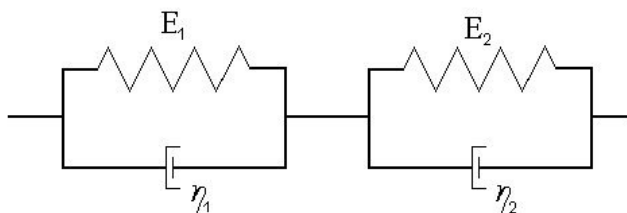


Рис. 2.22. Реологічна модель хребта

(ділянка AB). При знятті напруження в момент часу t_1 відбувається швидка стадія скорочення кісткової тканини (ділянка BC). Після цього настає стадія зворотної повзучості кістки і завжди в ній присутня залишкова відносна деформація



Слід відмітити, що такі дослідження проводилися на викопних («мертвих») кісткових тканинах. «Живі» кістки при знятті навантажень повністю відновлюють попередню довжину.

б) Хребет

Реологічні властивості хребта задовільно описуються моделлю, представленою на рис. 2.22. Тут послідовно з'єднані елементи з різними пружними і в'язкими властивостями відповідають хребцям і міжхребцевим дискам.

Диференціальне рівняння, яке описує деформації даної моделі:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{E_1\eta_2 + E_2\eta_1}{\eta_1\eta_2} \dot{\varepsilon} + \frac{E_1E_2}{\eta_1\eta_2} \varepsilon = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1\eta_2} \dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_1\eta_2} \sigma. \quad (2.67)$$

Розв'язком цього рівняння (додаток 2) є

$$\varepsilon = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1\eta_2} e^{-\frac{E_1}{\eta_1}t} \int e^{\left(\frac{E_1}{\eta_1} - \frac{E_2}{\eta_2}\right)t} \left(\dot{\sigma} \cdot e^{\frac{E_2}{\eta_2}t} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_1 + \eta_2} \sigma \cdot e^{\frac{E_2}{\eta_2}t} \right) dt. \quad (2.68)$$

При умові $\sigma = const$ і $\dot{\sigma} = 0$ з (2.68) отримаємо

$$\varepsilon = \frac{E_1 + E_2}{E_1E_2} \sigma, \quad (2.69)$$

що є ідентичним для кісткової тканини людини.

2.7.2. Реологічні моделі м'яких біологічних тканин

а) Модель гладких м'язів

Моделлю гладких м'язів є реологічна модель Максвелла (рис. 2.23). У цій моделі пружина і поршень, що рухається в циліндрі з в'язкою рідиною, послідовно з'єднані. Під дією постійної сили σ пружина майже миттєво видовжується, а поршень рухається з постійною швидкістю до того часу, доки діє сила.



Для пружини можна записати закон Гюка: $\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E}$, де ε_1 –

відносна деформація пружини, E – її модуль Юнга.

З (2.59) для циліндра з поршнем:

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{1}{E} \dot{\sigma} \quad (2.70)$$

Скориставшись (2.59) для поршня запишемо

$$\dot{\varepsilon}_\eta = \frac{\sigma}{\eta}, \quad (2.71)$$

де $\dot{\varepsilon}_\eta$ – похідна від відносного зміщення поршня за часом, η – коефіцієнт в'язкості рідини.

Сумуючи (2.70) і (2.71) знаходимо швидкість загальної відносної деформації моделі Максвелла:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_\eta = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (2.72)$$

Рівняння (2.72) – це диференціальне рівняння моделі деформації гладких м'язів. Розв'язком цього рівняння (додаток 3) є

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma + \frac{1}{\eta} \int \sigma dt \quad (2.73)$$

При постійній механічній напрузі ($\sigma = const$)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{\sigma}{\eta} t. \quad (2.74)$$

Рівняння (2.74) визначає поведінку гладких м'язів в стані повзучості (постійна сила прикладена до м'яза). Це рівняння прямої, воно показує, що в початковий момент часу ($t = 0$), при прикладанні постійної сили, відбувається миттєве видов-



Рис. 2.23.
Модель
Максвелла
деформації
гладких м'язів

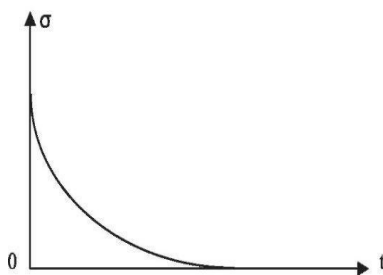


Рис. 2.24. Крива релаксації
напружень



ження м'яза $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, після чого відносна

деформація м'яза буде лінійно зростати аж до досягнення межі повзучості, коли настає його розривання. Найбільше напруження, за якого швидкість деформації або деформація повзучості для даної температури за певний проміжок часу не перевищує встановленої величини називається *межею повзучості м'яза*.

Крім того, рівняння (2.72) дає можливість визначити поведінку гладких м'язів в стані релаксації. Релаксація м'яза можлива, коли його деформування обмежене (наприклад, кісткою). Якщо швидко розтягнути пружину і закріпити цей стан, то деформація ε буде зберігатися. Пружина з часом почне скорочуватись (релаксувати), витягуючи поршень. Отже, в стані релаксації $\varepsilon = \text{const}$ і $\dot{\varepsilon} = 0$.

Тоді з (2.72)

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} = -\frac{\sigma}{\eta}, \text{ або } \frac{d\sigma}{\sigma} = -\frac{E}{\eta} dt. \quad (2.75)$$

Інтегруючи останній вираз з початкового моменту часу ($t = 0$) і початкової напруги $\sigma(0)$ до біжучих значень t і σ отримаємо:

$$\sigma = \sigma(0) \cdot e^{-\frac{E}{\eta} t}. \quad (2.76)$$

Отже, з часом нормальна напруга буде зменшуватись за експоненціальним законом (волокна м'язових тканин розкручуються, м'яз розтягується, рис. 2.24). Тому гладкі м'язи можуть значно розтягуватись без значних зусиль, що сприяє збільшенню об'єму порожнистих органів, наприклад, сечового міхура.

Величина $\tau = \frac{\eta}{E}$ називається часом релаксації. За фізичним змістом, час релаксації – це час, протягом якого механічне

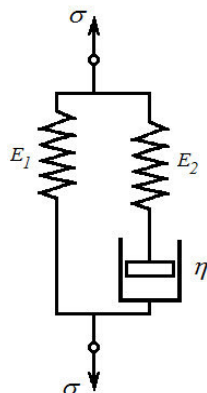


Рис. 2.25. Модель
Зінера скелетних
м'язів



напруження в м'язі зменшується в e разів.

Модель Максвелла взагалі широко використовується при вивченні механічних властивостей біологічних тканин. Наприклад, при вивченні властивостей волосся використовують явище релаксації напруги в них. Цей процес описують за допомогою моделі, що складається з чотирьох паралельно з'єднаних моделей Максвелла.

б) Скелетні м'язи

Механічна поведінка **скелетних м'язів** задовільно описується моделлю Зінера (рис. 2.25), яка складається з двох паралельних плечей: в одному знаходиться пружний елемент, а в іншому послідовно – пружний і в'язкий.

Для кожної пружини моделі запишемо закон Гюка, а для циліндра з поршнем – закон в'язкого тертя (2.59). Разом з умовами розподілу деформацій ε і напружень σ отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} \sigma_1 = E_1 \varepsilon_1, \\ \sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = \eta \dot{\varepsilon}_\eta, \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \\ \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2 + \varepsilon_\eta. \end{cases} \quad (2.77)$$

В (2.77) σ_1 – напруга, прикладена до лівого плеча моделі, в якому знаходиться перша пружина, σ_2 – напруга, прикладене до правого плеча з другою пружиною і поршнем, ε_1 , ε_2 , ε_η – відносні видовження відповідно першої, другої пружин і відносне зміщення поршня, E_1 , E_2 – модулі Юнга першої і другої пружин відповідно, η – коефіцієнт в'язкості рідини в циліндрі.

Використавши систему рівнянь (2.77) і їх похідні за часом можна отримати

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_1 E_2}{\eta(E_1 + E_2)} \varepsilon = \frac{1}{E_1 + E_2} \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta(E_1 + E_2)} \sigma. \quad (2.78)$$

Рівняння (2.78) – це диференціальне рівняння моделі



деформації скелетних м'язів. За видом воно подібне до рівняння (2) з додатку 2. Тут коефіцієнти – $\alpha = E_1 E_2 / (\eta(E_1 + E_2))$, $\beta = 1 / (E_1 + E_2)$ і $\gamma = E_2 / (\eta(E_1 + E_2))$.

Тоді розв'язком (2.78) буде

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \beta e^{-\alpha t} \left[e^{\alpha t} \sigma - \left(\alpha - \frac{\gamma}{\beta} \right) \int e^{\alpha t} \sigma dt \right] = \beta \sigma - (\alpha \beta - \gamma) e^{-\alpha t} \int e^{\alpha t} \sigma dt = \\ &= \frac{\sigma}{E_1 + E_2} + \frac{E_2^2}{\eta(E_1 + E_2)^2} \cdot e^{-\frac{E_1 E_2 t}{\eta(E_1 + E_2)}} \int e^{\frac{E_1 E_2 t}{\eta(E_1 + E_2)}} \sigma dt. \end{aligned} \quad (2.79)$$

При $\sigma = \text{const}$ отримаємо $\varepsilon = \sigma / E_1$.

Час релаксації скелетного м'яза визначається співвідношенням $\tau = \eta / E_2$.

в) Кров

Реологічною моделлю крові – рідкої тканини, механічні властивості якої визначаються в'язкістю плазми і еритроцитами (докладніше в розділі 4), моделюється двома в'язкими і одним пружним елементом (рис. 2.26). Запишемо закон Гука для пружного елемента, закони тертя для кожного з в'язких елементів, врахуємо характер розподілу в моделі напруг і деформацій подібно до попередніх моделей і отримаємо систему рівнянь:

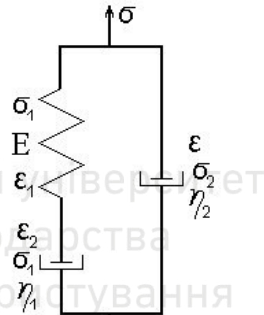


Рис. 2.26.
Реологічна модель
крові

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 + \sigma_2, \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2, \\ \sigma_1 = \eta_1 \dot{\varepsilon}_1, \\ \sigma_2 = \eta_2 \dot{\varepsilon}, \\ \sigma_1 = E \varepsilon_2. \end{cases} \quad (2.80)$$

Підставимо вирази для σ_1 і σ_2 в перше рівняння (2.80) і отримаємо



$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \eta_1 \dot{\varepsilon}_1 + \eta_2 \dot{\varepsilon}, \quad (2.81)$$

Звідки

$$\dot{\varepsilon}_1 = \frac{\sigma}{\eta_1} - \frac{\eta_2}{\eta_1} \dot{\varepsilon}. \quad (2.82)$$

Продиференціюємо друге і п'яте рівняння (2.80) і підставимо п'яте рівняння в друге. Отримаємо

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon}_1 + \frac{\dot{\sigma}_1}{E}. \quad (2.83)$$

Звідси

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_1}{E}. \quad (2.84)$$

З (2.81) отримаємо $\dot{\sigma}_1 = \dot{\sigma} - \dot{\sigma}_2 = \dot{\sigma} - \eta_2 \ddot{\varepsilon}$, а підставивши цей вираз в (2.84), отримаємо

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}_1}{E} = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma} - \eta_2 \ddot{\varepsilon}}{E}. \quad (2.85)$$

Прирівняємо праві сторони (2.82) і (2.85) і отримаємо

$$\frac{\sigma}{\eta_1} - \frac{\eta_2}{\eta_1} \dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma} - \eta_2 \ddot{\varepsilon}}{E}. \quad (2.86)$$

або

$$\ddot{\varepsilon} + E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta_2} \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma. \quad (2.87)$$

Рівняння (2.87) – це диференціальне рівняння моделі деформації крові. Розв'язком рівняння (2.87) є (додаток 4):

$$\varepsilon = \int e^{-E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t} \int e^{\frac{E \eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t} \left(\frac{1}{\eta_2} \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma \right) dt dt. \quad (2.88)$$

Якщо кров здеформувати (стиснути або розтягнути), а потім залишити цю деформацію, то в ній виникне напруга, яка згідно (2.87) при $(\dot{\varepsilon} = 0)$ і $(\ddot{\varepsilon} = 0)$ буде визначатись співвідношенням

$$\dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1} \sigma = 0, \text{ розв'язком якого при } \sigma(t=0) = \sigma_0 \text{ буде}$$

$$\sigma = \sigma_0 \cdot e^{-\frac{E}{\eta_1} t}. \quad (2.89)$$



Рівняння (2.89) – це відоме рівняння релаксації і воно ідентичне рівнянню релаксації гладких м'язів (2.76). Графік для релаксації деформацій крові подібний до графіка рис. 2.24.

При прикладенні до крові постійного навантаження ($\sigma = const$) і ($\dot{\sigma} = 0$) рівняння (2.87) прийме вигляд

$$\ddot{\varepsilon} + E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \dot{\varepsilon} - \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma = 0. \quad (2.90)$$

При початкових умовах ($\varepsilon(t_0 = 0) = 0$) і ($\dot{\varepsilon}(t_0 = 0) = C$), де C – константа, отримаємо (формула (13) додатку 4)

$$\varepsilon = \frac{\eta_1 \eta_2}{E(\eta_1 + \eta_2)} \left(C - \frac{\sigma}{\eta_1 + \eta_2} \right) \left(1 - \exp \left(-E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t \right) \right) + \frac{\sigma}{\eta_1 + \eta_2} t, \quad (2.91)$$

Відповідна залежність $\varepsilon(t)$ приведена на рис. 2.27. На ній стрілочками вказано моменти прикладення і зняття зі зразка напруги. Після цього пружина скорочується, а поршень у в'язкій рідині перестає рухатися і при $t \rightarrow \infty$ деформації не зникають, тобто модель дійсно представляє в'язку та пружну рідину, що не зберігає форму.

Механічні властивості біологічних тканин при різних типах навантаження описуються, як правило, моделями з чотирма і більше елементами. Для біологічних рідин завжди використовується модель з послідовно з'єднаними одним або декількома в'язкими елементами (циліндрами).

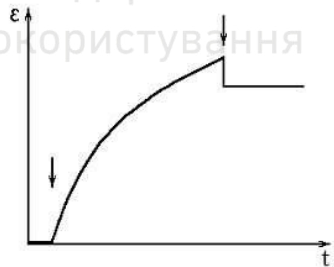


Рис. 2.27. Залежність відносної деформації крові від часу при постійній нарузі

г) Тромб і тканини мозку

Модель Бюргерса (рис. 2.28) задовільно описує **реологічні властивості тромба та тканин мозку**.

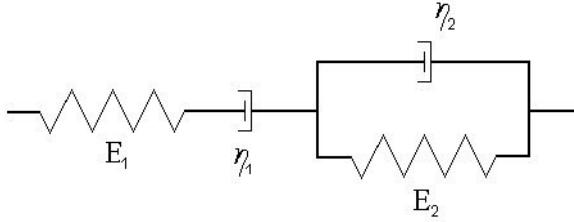


Рис. 2.28. Модель Бюргера тромба та тканин мозку

Диференціальне рівняння, яке описує деформації даної моделі:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{E_2}{\eta_2} \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_1} \ddot{\sigma} + \left[\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \eta_2} + \frac{1}{\eta_1} \right] \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_1 \eta_2} \sigma. \quad (2.92)$$

Розв'язком даної моделі є (додаток 5)

$$\varepsilon = \frac{1}{E_1} \sigma + \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \right) e^{-\frac{E_2}{\eta_2} t} \int e^{\frac{E_2}{\eta_2} t} \sigma dt + \frac{E_2}{\eta_1 \eta_2} e^{-\frac{E_2}{\eta_2} t} \int e^{\frac{E_2}{\eta_2} t} \int \sigma dt dt. \quad (2.93)$$

Нехай $\sigma = const$, тоді, інтегруючи другий доданок (2.93) і інтегруючи за частинами його третій доданок, отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{1}{E_1} \sigma + \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \right) \frac{\eta_2}{E_2} \sigma + \frac{E_2}{\eta_1 \eta_2} \sigma \left(t \frac{\eta_2}{E_2} - \left(\frac{\eta_2}{E_2} \right)^2 \right) = \\ &= \sigma \left(\frac{1}{E_1} + \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 E_2} + \frac{1}{\eta_1} t - \frac{\eta_2}{\eta_1 E_2} \right) = \sigma \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} + \frac{1}{\eta_1} t \right) = \\ &= \sigma \left(\frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} + \frac{1}{\eta_1} t \right). \end{aligned} \quad (2.94)$$

Рівняння (2.94) є рівнянням прямої. Воно показує, що при сталому навантаженні тромба або тканин мозку, вони будуть лінійно видовжуватись, аж до розривання.



2.8. Динаміка скорочення м'язів

Керування скорочувальною властивістю м'яза здійснюється за допомогою великої кількості мотонейронів, складові частини яких – аксони в складі нерва, що управляє рухом, підходять до м'яза. Саме через аксони передається електричний сигнал, який приводить до скорочення волокна м'яза.

Історично основні результати по механіці і енергетиці скорочення м'язів отримані на кравецькому м'язі (згинає ногу в колінному суглобі і розгортає гомілку всередину) жаби і поперечному м'язі (згинає стегно, допомагає відведенню і обертанню стегна) кролика. В експериментах по м'язовому скороченню м'яз (або м'язове волокно) зазвичай стимулюється не через нерв, а шляхом подачі на нього електричного імпульсу струму прямокутної форми. Якщо на м'яз подати електричний потенціал, м'яз у вільному стані розвиває силу і скорочується, або, якщо він закріплений між зафіксованими основами – тільки розвиває силу. В найпростішому виді механічних дослідів досліджують зміну натягу м'яза при стимулі електричним струмом при фіксованій довжині м'яза (або деякої його частини). Така зміна натягу м'яза називається *ізометричним скороченням*. Наприклад, у режимі ізометричного скорочення працюють м'язи людини у випадках:

- утримування тіла у підтягнутому положенні на перекладині;
- утримування штанги у піднятому стані над головою;
- стиснення щелеп жувальними м'язами;
- скорочення міокарду шлуночків при зачинених клапанах.

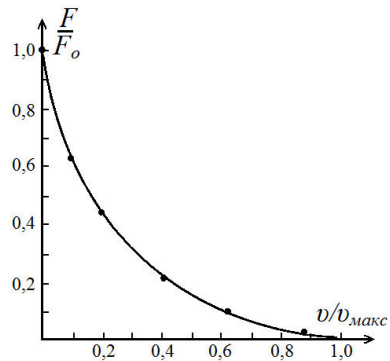


Рис. 2.29. Графічний опис рівняння Хілла



Інколи на м'яз стале постійне навантаження і спостерігають за зміною його довжини. Така зміна називається *ізотонічним скороченням*. Наприклад, литковий м'яз функціонує в ізотонічному режимі при взаємодії ноги з опорою у фазі амортизації.

Крім того, вивчають також *ауксотонічний* режим скорочення м'яза, при якому відбувається зміна його і довжини, і напруги під впливом багатьох факторів (як біологічних, так і механічних).

Значна кількість даних про механічні і енергетичні властивості м'яза отримані А.В. Хіллом при дослідженні кравецького м'яза жаби. Співвідношення між основними механічними характеристиками скорочення м'яза – швидкістю скорочення (v) і ізотонічною силою, яка виникає при скороченні (F) називається *характеристичним рівнянням Хілла*

$$(F + a)v = b(F_0 - F), \quad (2.95)$$

де F – сила, що виникає в м'язі при скороченні або зовнішня сила прикладеного навантаження F_0 – максимальна сила ізометричного скорочення, a і b – емпіричні параметри, пов'язані співвідношенням

$$b = \frac{a}{F_0} v_{\max}, \quad (2.96)$$

де v_{\max} – максимальна швидкість скорочення м'яза ($v = v_{\max}$ при $F = 0$). Для кравецького м'яза жаби $a = 0,25 \cdot F_0$, для м'язів людини $a \approx (0,25 - 0,4) \cdot F_0$. Константа b для різних м'язів є різною.

Оскільки співвідношення (2.95) між F і v визначають в умовах, коли м'яз скорочується і піднімає вантаж, то сила F , що розвивається м'язом, визначає також вагу вантажу, який піднімає м'яз. За умови відсутності вантажу швидкість скорочення м'яза максимальна: v_{\max} – швидкість скорочення ненавантаженого м'яза. При збільшенні навантаження швидкість скорочення м'яза зменшується. F_0 – це гранична



вага вантажу, який може підняти м'яз. При $F > F_0$ швидкість скорочення стає від'ємною (м'яз розтягується).

Ненавантажений м'яз коротшає з максимальною швидкістю, яка залежить від типу м'язових волокон. Наприклад, кравецький м'яз жаби скорочується зі швидкістю всього лише 0,2 м/с (приблизно, 10 довжин м'яза за 1 с). М'язи руки людини, які набагато довші, коротшають зі швидкістю 8 м/с. Швидко скорочуючись, м'яз розвиває меншу силу, ніж при повільному скороченні або після попереднього розтягування. Цим пояснюється той загальновідомий факт, що швидкі рухи можливі, якщо не потрібна велика сила, тобто коли м'язи не навантажені (вільно рухаються) і, навпаки, максимальна м'язова сила вимагає повільних рухів, наприклад, при пересуванні великих предметів або підйомі штанги. Велику вагу можна підняти або зіштовхнути з місця тільки дуже повільно. Це цілком можливе завдяки здатності людини довільно змінювати швидкість м'язового скорочення.

Як видно з рівняння Хілла сила натягу збуджених м'язів F , швидкість v їх скорочення, а також і величина скорочення, в основному, визначають рухову діяльність людини. **Довжина, сила і швидкість скорочення** є найбільш важливими характеристиками динаміки руху м'язів.

Сила натягу м'язів залежить від сукупності механічних, анатомічних і фізіологічних умов. Основною динамічною умовою, що визначає натяг м'яза, є його навантаження, тобто сила, прикладена до фізіологічного поперечного перерізу м'яза. Під *фізіологічним поперечним перерізом м'яза* розуміють площу поперечного перерізу м'яза (см^2), що проходить через всі м'язові волокна. Площа поперечного перерізу м'яза не завжди збігається з його фізіологічним поперечним перерізом. Наприклад, при однаковій товщині, м'язи з паралельним і пір'ястим розташуванням волокон значно відрізняються за даним показником.

Першим правилом динаміки м'язових скорочень є *принцип Вебера*: сила м'яза, при інших однакових умовах пропорційна його фізіологічному поперечному перерізу. Тобто чим він є більшим, тим більшою є сила, яку він розвиває. Через це товсті волокна розвивають більшу силу, ніж тонкі. Багато скелетних



м'язів через велику кількість м'язових волокон у своєму складі можуть розвивати силу більшу за вагу тіла.

Для характеристики здатності до напруги, яка може розвиватись м'язом при скороченні, вводять поняття абсолютної сили м'яза. **Абсолютна сила м'яза** – це сила, що розвивається одиницею площі поперечного перерізу м'яза при його скороченні. Вважається, що абсолютна сила м'яза, яку він може розвинути при оптимальній довжині складає близько $2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}^2$.

Поперечно-волокнисті м'язи, за типом яких побудована більшість скелетних м'язів, мають цей показник дещо вищим, ніж паралельно-волокнисті.

З експериментів відомо, що найбільша маса вантажу, який в змозі утримувати м'яз людини з поперечним перерізом 1 см^2 , в середньому становить 10 кг . Знаючи цей показник, не важко визначити силу, яку можуть розвинути різні м'язи людини. Вона має наступні значення (в кг): для литкового м'яза – $6,24$; для розгиначів шиї – $9,0$; жувального м'яза – 10 ; двоголового м'яза плеча – $11,4$; плечового м'яза – $12,1$; триголового м'яза – $16,87$. Звичайно, обчислена таким шляхом величини лише в більшій або меншій мірі наближаються до істинних, оскільки не у всіх людей і навіть не у всіх м'язів одного і того ж суб'єкта м'язова сила однакова.

Фізіологічні умови, що впливають на величину натягу м'яза, в основному можна звести до особливостей його збуджуваності і стомлюваності, які відображуються на можливостях м'язів у підвищенні чи зниженні його напруги.

Крім того, сила натягу м'яза може бути різною в залежності від:

- впливу на неї нервових імпульсів, які можуть посилатися в м'яз з різною частотою;
- вихідної довжини м'яза.

Останнє проявляється в тому що, якщо попередньо наблизити кінці м'яза один до одного, то він, при інших однакових умовах, буде розвивати меншу напругу. І, навпаки, якщо м'яз попередньо розтягнути, то він стає здатним розвинути більшу напругу. Однак при дуже великому розтягуванні м'язова сила знов зменшується.



У стані спокою м'язи не є повністю розслабленими, а зберігають деяку напругу, яка називається *тонусом*.

Швидкість скорочення м'яза пов'язана зі швидкістю його деформації. Це залежить:

- від величини в'язкості м'яза (м'язи, що складаються зі «швидких» волокон, наприклад, литковий, скорочується з більшою швидкістю, ніж ті, до складу яких входять «повільні» волокна);
- від сили, яка розвивається м'язом;
- від навантаження (при інших однакових умовах, чим більшим є напруження м'яза і чим меншою є маса частини тіла, що переміщується, тим більшою є швидкість скорочення).

Величина скорочення м'яза. Для м'язів справедливий *принцип Бернуллі*: величина скорочення м'яза пропорційна довжині його волокон.

Найбільше скорочуються м'язи, побудовані з довгих волокон – паралельно-волокнисті. Скорочення м'яза залежить також від сили, що виникає у ньому при збудженні, і від величини вантажу, який він переміщує. Чим більшою є активна сила м'язу і чим меншою є протидіюча йому зовнішня сила, тим більшим є його скорочення.

2.9. Центр мас органів людини

Розглядаючи тіло людини як систему взаємно рухомих мас його частин, потрібно зазначити, що воно має цілком визначені динамічні властивості. В залежності від того, як ці маси розташовані в просторі одна відносно одної і наскільки вони рухомі, залежать і динамічні властивості всього тіла людини. Тіло людини як біомеханічна система знаходиться в рівновазі, ступінь стійкості якої характеризує положення загального центру мас людини.

За свідченнями багатьох авторів, вперше положення центру мас людини визначив Джованні Альфонсо Бореллі, який в 1679р. у своїй книзі «Про локомоції тварин» писав, що «ЦМ людського тіла, що знаходиться в випрямленому стані розташовується між сідницями і лобком».



Таблиця 2.7

Відносні маси ланок тіла і розташування їх центрів мас

Назва ланки	Відносна маса	Розташування ЦМ ланки (у відносних одиницях відстані від проксимального суглобу)
Голова	0,07	Над верхнім краєм слухового проходу
Тулуб	0,43	На відстані 0,51 від плечової кістки
Плече	0,03	На відстані 0,45 від плечового суглобу
Передпліччя	0,02	На відстані 0,43 від ліктьового суглобу
Кисть	0,01	На відстані 0,37 від зап'ястного суглобу
Стегно	0,12	На відстані 0,45 від стегнового суглобу
Гомілка	0,05	На відстані 0,41 від колінного суглобу
Ступня	0,02	На відстані 0,44 від п'яти

Сьогодні існують розвинені методики визначення ЦМ органів людини. Приймаючи масу людини за 100%, визначають масу частин її організму у відносних одиницях (%). Центр мас ланки визначають за відсною відстанню її від проксимального суглоба. Візьмемо відстань від центра мас деякої ланки, наприклад, плеча до суглоба і розділимо це значення на довжину даної ланки (плеча). Ми отримаємо у відносних одиницях центр мас даної ділянки.

В таблиці 2.7 представлені середні дані про масу ланок тіла і про положення їх центрів мас (за О. Фішер, М. Бернштейн).



Статика – це розділ механіки, предметом вивчення якого є матеріальні тіла, що знаходяться в стані спокою при дії на них зовнішніх сил. У широкому розумінні слова, статика – це теорія рівноваги будь-яких тіл – твердих, рідких або газоподібних.

Статику прийнято поділяти на геометричну та аналітичну. В основі аналітичної статки лежить *принцип можливих переміщень*, який визначає умови рівноваги будь-якої механічної системи. Геометрична статика базується на, так званих, аксіомах статки, які є наслідком загальних законів динаміки для випадку, коли швидкості твердих тіл прямують до нуля.

З історичних причин і педагогічних міркувань статику часто викладають незалежно від динаміки, будуючи її на наступних аксіомах:

- а) властивостей сил,
- б) рівноваги,
- в) дії та протидії.

Статика – найстаріший розділ механіки; деякі з її принципів були відомі вже стародавнім єгиптянам і вавилонянам, про що свідчать побудовані ними піраміди і храми. Серед перших творців теоретичної статки був Архімед (близько 287-212 до н.е.), який розробив теорію важеля і сформулював основний закон гідростатики. Родоначальником сучасної статки став голландець С.Стевін (1548-1620рр.), який в 1586 році сформулював закон додавання сил, або правило паралелограма, і застосував його при розв'язку низки задач.

Основними поняттями статки є поняття сили, системи сил, еквівалентної системи сил, вільних та не вільних тіл, моменту сил відносно центру і відносно осі.

Поняття *сили* та *моменту сил відносно центру і відносно осі* було дане в розділі 2 «Динаміка».

Системою називається сукупність сил, прикладених до

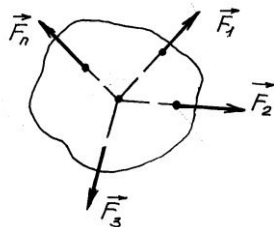


Рис. 3.1. Система збіжних сил



одного твердого тіла.

Система збіжних сил (рис. 3.1) – це сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці, яка називається центром системи сил.

Еквівалентними називаються системи сил, які діють на тіло однаково.

Умову еквівалентності систем сил записують у вигляді:

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n) \sim (\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3, \dots, \vec{P}_m) \quad (3.1)$$

Рівнодійною називається сила, еквівалентна системі сил:

$$\vec{R} \sim (\vec{R}) \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n). \quad (3.2)$$

Зрівноваженою називається система сил, рівнодійна яких існує і дорівнює нулю

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{0}. \quad (3.3)$$

Всі тіла в механіці діляться на *вільні* та *невільні*.

Вільне тіло може переміщатися в просторі в будь-якому напрямку.

Невільним називається тіло, переміщення якого обмежені накладеними на нього *в'язями*, тобто іншими тілами, що обмежують свободу переміщень даного тіла.

Всі сили в механіці поділяються на *активні сили* і *сили реакції в'язей*.

Останні можуть виникати тільки у відповідь на дію активних сил. Відзначимо, що *реакція в'язей напрямлена в бік, протилежний тому напрямку, куди тіло не може переміщатися внаслідок накладених на нього в'язей*.

3.1. Аксиоми статyki

Аксиоми статyki можна сформулювати використавши поняття і закони динаміки. Так, перша аксіома – це, по суті, перефразування першого закону динаміки без поняття інерціальних систем відліку.

1. **Аксиома інерції:** під дією зрівноваженої системи сил МТ рухається прямолінійно і рів-

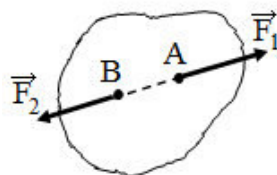


Рис. 3.2. Ілюстрація аксіоми рівноваги системи двох сил



номірно або перебуває у стані спокою.

2. Аксиома рівноваги системи двох сил: система двох сил зрівноважена тоді і тільки тоді, коли ці сили:

- діють вздовж однієї прямої, яка з'єднує точки їх прикладання;
- рівні за модулем;
- напрямлені в протилежні сторони (рис. 3.2).

Відзначимо, зокрема, що з умови: $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \sim \vec{0}$, випливає $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

3. Аксиома приєднання (відкидання) зрівноваженої системи сил: дія системи сил на тіло не зміниться, якщо до неї приєднати (відкинути) зрівноважену систему сил.

Наслідком цієї аксиоми є наступна **теорема**, яку ми приймемо без доведення: дія сили на АТТ не зміниться, якщо цю силу перенести вздовж лінії дії в будь-яку точку цього тіла.

Четверта аксиома базується на правилі додавання векторів.

4. Аксиома паралелограма: рівнодійна двох сил, прикладених до тіла, визначається за правилом паралелограма.

$$\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Rightarrow \vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2. \quad (3.4)$$

Довжина вектора \vec{R} визначається згідно теореми косинусів

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}, \quad (3.5)$$

де α кут між векторами \vec{F}_1 і \vec{F}_2 .

П'ята аксиома є третім законом динаміки.

5. Аксиома дії та протидії: два тіла взаємодіють з силами \vec{F}_1 і \vec{F}_2 , рівними за величиною і протилежними за напрямком.

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2. \quad (3.6)$$

Відзначимо, що ці сили на відміну від сил, про які йде мова в аксиомі 2, системи не утворюють, оскільки прикладені до різних тіл.

6. Аксиома затвердіння: рівновага zdeформованого тіла не порушиться, якщо тіло вважати абсолютно твердим.

Ця аксиома дозволяє розглядати рівновагу не тільки АТТ, але також тіл, що можуть деформуватися. Наприклад, при вивченні рідин в гідростатиці.



7. Аксиома звільнення від в'язей: невідільне матеріальне тіло можна розглядати як вільне, якщо в'язі замінити їх реакціями.

Відзначимо, що у всіх попередніх аксіомах розглядалися вільні тіла. Відповідно для вільних тіл в наступних параграфах ми сформулюємо умови рівноваги і теореми статки. У той же час всі скелетні кістки, м'язи та інші органи тіла є прикладом тіл з в'язями. Звідси зрозуміла значимість останньої аксіоми, яка дозволяє від тіл з в'язями переходити до вільних, а також необхідності уміння визначати реакції їх в'язей.

3.2. Типи в'язей і напрям їх реакції в статиці

Ідеально гладенька поверхня. Розглянемо тіло, яке може переміщатись без тертя по гладенькій горизонтальній поверхні (рис.3.3). Нехай на нього діє сила тяжіння \vec{P} , прикладена до його центра мас. Реакція в'язі \vec{N} представлена силою,

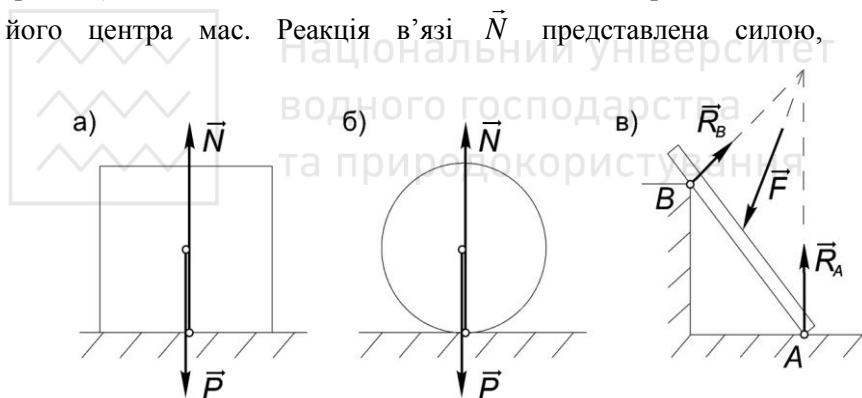


Рис. 3.3. Сили, що діють на тіло з боку ідеальної гладкої поверхні

розподіленою по площині нижньої грані цього тіла, і її можна вважати прикладеною до центра цієї грані.

Принципово картина не змінюється, якщо поверхня тіла буде гладенькою, але криволінійною (рис. 3.3, б).

Якщо тіло у вигляді бруса з гладенькою поверхнею опирається в точці A на ідеально гладеньку поверхню, а в точці B – на виступ (рис. 3.3, в), то неважко зрозуміти, що тіло не зможе перебувати в рівновазі, якщо в якості активної сили виступає його власна вага. Рівновага даного бруса можлива,



якщо до нього прикласти зовнішню силу \vec{F} . При цьому, як буде показано в подальшому, рівновага можлива тільки в тому випадку, коли лінія дії цієї сили проходить через точку перетину ліній дії реакцій \vec{R}_A і \vec{R}_B .

Отже, з приводу цього типу в'язі можна зробити наступний висновок: *реакція ідеально гладенької поверхні прикладена в точці дотику і спрямована по нормалі до поверхні тіла або в'язі.*

Гнучка, невагома і нерозтяжна нитка. Реакція в'язі дорівнює силі натягу нитки, вона напрямлена вздовж нитки від тіла, яке ця нитка утримує (рис.3.4).

Жорсткий невагомий прямолінійний стрижень. Реакція напрямлена вздовж стрижня, який, на відміну від нитки, може сприймати зусилля як на розтяг (\vec{S}_B), так і на стиск (\vec{S}_A) (рис. 3.5).

4. Рухома опора. Допускає переміщення закріпленої на опорі точки тіла тільки вздовж опорної площини (рис.3.6, а). Реакція на-

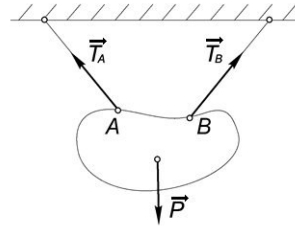


Рис. 3.4. Сили, що діють на тіло з боку гнучких, невагомих, нерозтяжних ниток

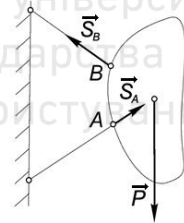


Рис. 3.5. Сили, що діють на тіло з боку невагомих, прямолінійних стрижнів

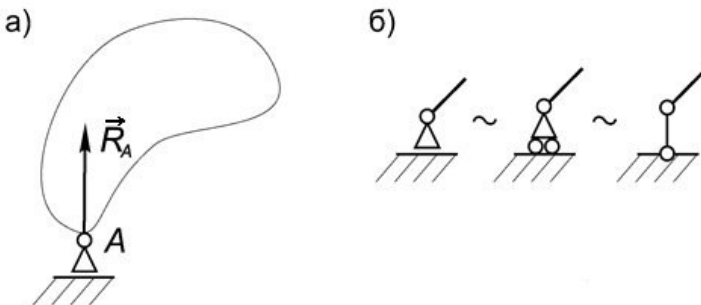


Рис. 3.6. Рухомий циліндричний шарнір



прямлена перпендикулярно заштрихованій опорній площині.

У навчальній літературі цей вид в'язі також називають *рухомим циліндричним шарніром*. Часто на схемах типу в'язів такий зв'язок зображають так, як показано на рис. 3.6, б. Прикладом в'язей такого типу є коток – циліндр машини, що трембує асфальт при укладанні дорожнього полотна. Коток може обертатись навколо осі, а вісь – рухатись по дорозі.

5. Нерухома опора. Перешкоджає переміщенню закріпленої таким чином точки тіла в горизонтальному і вертикальному напрямках. Цей зв'язок допускає поворот тіла навколо даної точки (рис. 3.7, а), тому в навчальній літературі його також називають *нерухомим циліндричним шарніром*. На схемах він зображується так, як показано на рис. 3.5, б. Прикладом в'язей такого типу є підшипник.

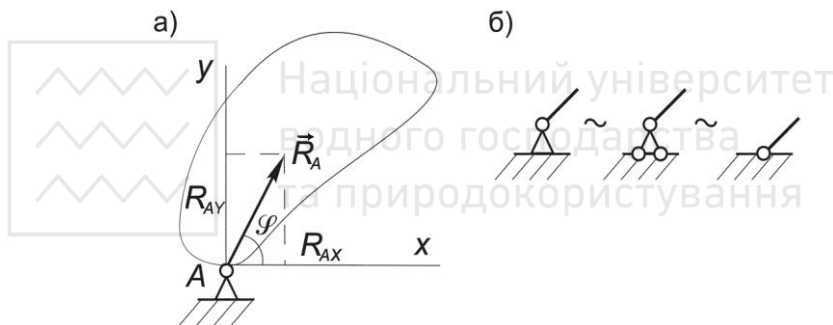


Рис. 3.7. Нерухомий циліндричний шарнір

6. Сферичний шарнір. На відміну від циліндричного шарніра не допускає переміщення закріпленої таким чином точки тіла в трьох взаємно перпендикулярних напрямках. В'язь допускає поворот тіла відносно трьох осей координат (рис. 3.8).



Рис. 3.8. Сферичний шарнір



Реакцію сферичного шарніра виражають трьома складовими у трьох взаємно перпендикулярних напрямках:

$$\vec{R} = \vec{X}_A + \vec{Y}_A + \vec{Z}_A. \quad (3.7)$$

Прикладом такого шарніру є, наприклад, тазостегновий суглоб.

3.3. Момент сил відносно центра

Розглянемо тіло, яке закріплене в центрі O і може повертатися навколо осі, перпендикулярної до площини малюнка і проходить через точку O . Прикладемо в точці A цього тіла силу \vec{F} і вивчимо, чим визначається оберտальна дія цієї сили (рис. 3.9).

Згідно (2.23) момент сили \vec{F} відносно точки O для такої плоскої системи визначається співвідношенням $M = r \cdot F \cdot \sin \alpha = F \cdot d$, де d – плече цієї сили.

Одні моменти сил будуть обертати тіло за годинниковою стрілкою, інші – проти неї. Щоб розрізнити такі моменти сил між собою, в статиці ввели **правило знаків**: момент сили вважається додатнім, якщо сила прагне повернути тіло проти ходу годинникової стрілки і від'ємним, якщо вона обертає тіло за ходом годинникової стрілки.

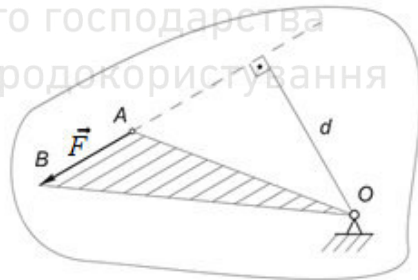


Рис. 3.9. Сила і плече сили

Для системи збіжних сил є справедливою **теорема Варіньона**: момент рівнодійної системи збіжних сил щодо довільного центру O дорівнює геометричній сумі моментів усіх сил системи відносно цього центру

$$\vec{M}_O(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{O_i}(\vec{F}_i), \quad (3.8)$$



де $\vec{M}_O(\vec{R})$ – момент рівнодійної моменту сил відносно центру O , $\vec{M}_{O_i}(\vec{F}_i)$ – момент сили \vec{F}_i відносно цього ж центру.

Для плоскої системи збіжних сил геометрична сума в (3.8) переходить в алгебраїчну

$$M_O(R) = \sum_{i=1}^n M_{O_i}(\vec{F}_i). \quad (3.9)$$

Моментом сили відносно осі z називається проекція на цю вісь вектора моменту сили відносно точки, що лежить на осі. Момент сили відносно осі характеризує обертальну дію сили навколо даної осі.

Парою сил називається система двох сил, розташованих в одній площині, які рівні за величиною, протилежно напрямлені і не лежать на одній прямій (рис.3.10). Пара сил не має рівнодійної. Тому пару сил не можна замінити або зрівноважити однією силою; її можна зрівноважити тільки іншою парою.

Плече пари d – найкоротший відрізок між лініями дії сил, що складають пару.

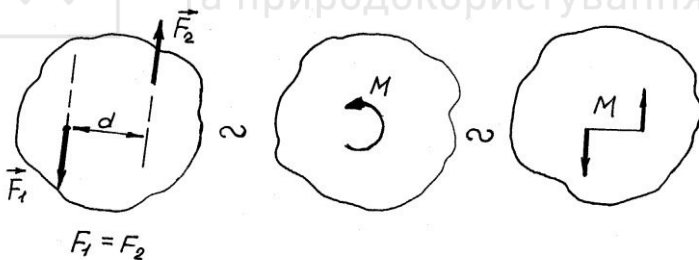


Рис. 3.10. Пара сил

Моментом пари сил називається вектор $\vec{M}(\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ модуль якого дорівнює добутку однієї з сил пари на плече пари, напрямлений перпендикулярно до площини дії пари у той бік, звідки обертання пари сил видно проти ходу стрілки годинника.

Модуль моменту пари

$$M(\vec{F}_1, \vec{F}_2) = F_1 \cdot d = F_2 \cdot d. \quad (3.10)$$

Дві пари еквівалентні, якщо їх моменти векторно рівні.



Наслідком цього є те, що пару сил, яка діє на АТТ, можна переміщати у площині її дії, або у паралельну площину, при цьому можна змінювати модулі сил або плече пари, але зберігати величину моменту і напрям обертання.

Поняття пари сил дуже важливе в механіці оскільки воно застосовується при використанні різноманітних важелів.

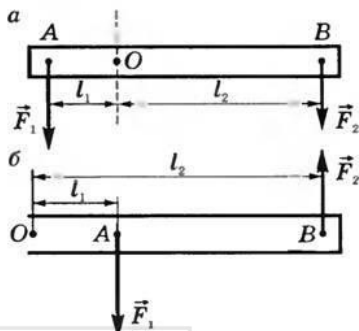


Рис.3.11. Важелі I роду (а) та II роду (б) : О – нерухома опора, \vec{F}_1 – навантаження, \vec{F}_2 – прикладена сила, l_1 , l_2 – плечі важеля

Важіль – тверде тіло, яке може обертатися навколо нерухомої опори. Тут розглядається пара сил – рівнодійна прикладених сил $\vec{R} \sim (\vec{F}_1, \vec{F}_2)$ і реакція опори \vec{N} . Важелі застосовують для зміни напрямку і значення сили, наприклад, для зрівноваження великої сили малою. Людина стала використовувати важелі ще в доісторичні часи, інтуїтивно розуміючи принцип його дії.

Розрізняють важелі I, II та III роду. В важелі I роду, який ще називають важелем рівноваги, (рис. 3.11) точка опори розташована між точками прикладання сил (наприклад, залізничний шлагбаум, коромисло на плечі, ножиці), а самі сили направлені в одну сторону. У важеля II роду, який називають важелем сили, точки прикладання сил розташовані по одну сторону від опори, а сили направлені в різні сторони, причому прикладена сила знаходиться далі від опори ніж навантаження (наприклад, ручна тачка для перевезення ґрунту). Важіль III роду, який називають важелем швидкості, відрізняється від важеля II роду тим, що у них точка прикладання сили ближче до точки опори, ніж навантаження (наприклад, стріла підйомного крану).



3.4. Умови рівноваги в статиці

1. Умови рівноваги системи збіжних сил.

Для рівноваги системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб рівнодійна системи сил дорівнювала нулю (геометричні умови):

$$\vec{R} = 0,$$

або сума проекцій цих сил на осі координат дорівнювала нулю (аналітичні умови):

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0. \quad (3.11)$$

Якщо всі сили системи збіжних сил розташовані в площині, наприклад XOY , то для їх рівноваги запишемо два рівняння

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0.$$

2. Умова рівноваги системи пар сил.

Пари сил, як завжди розташовані у просторі, перебувають у рівновазі, якщо геометрична сума їх моментів дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0. \quad (3.12)$$

Теорема про зведення довільної системи сил (основна теорема статики): Довільну систему сил, прикладених до АТТ, можна звести до головного вектора системи сил \vec{R} , який дорівнює рівнодійній цієї системи сил і прикладений у довільному центрі зведення O , і головного моменту сил \vec{M}_0 , який дорівнює векторній сумі моментів прикладених сил відносно центра зведення:

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad \text{і} \quad \vec{M}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{0i}(\vec{F}_i). \quad (3.13)$$

Розглянемо окремі випадки зведення сил:

а) $\vec{R} = 0$; $\vec{M}_0 = 0$ – система сил зрівноважена, тобто тверде тіло під дією такої системи сил знаходиться у рівновазі;



б) $\vec{R} = 0$; $\vec{M}_0 \neq 0$ – система сил зводиться до пари сил, момент якої не залежить від центра зведення.

3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил.

Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно і достатньо, щоб головний вектор \vec{R} і головний момент цієї системи сил \vec{M}_0 дорівнювали нулю (геометричні умови):

$$\vec{R} = 0; \vec{M}_0 = 0, \quad (3.13)$$

або суми проекцій усіх сил на кожную з трьох координатних осей і суми їх моментів відносно цих осей дорівнювали нулю (аналітичні умови):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n M_x(\vec{F}_i) = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n M_y(\vec{F}_i) = 0; \\ \sum_{i=1}^n F_{iz} = 0; \sum_{i=1}^n M_z(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

4. Умови рівноваги довільної плоскої системи сил.

Для рівноваги довільної плоскої системи сил (лежать в одній площині) необхідно і достатньо, щоб головний вектор сил і головний момент цієї системи сил дорівнювали нулю (геометричні умови):

$$\begin{aligned} \vec{R} = 0; \vec{M}_0 = 0 \\ \sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n M(\vec{F}_i) = 0. \end{aligned} \quad (3.15)$$

5. Умова рівноваги плоскої системи паралельних сил.

Для рівноваги плоскої системи паралельних сил (лінії дії сил паралельні) необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій усіх сил на вісь, паралельну силам, і алгебраїчна сума моментів усіх сил відносно будь-якої точки на площині дорівнювали нулю:

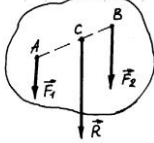


Рис.3.12, а. Правила
складання однонаправлених
паралельних сил

$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; \sum_{i=1}^n M(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.16)$$

якщо всі сили паралельні осі ОУ.

Правила складання двох паралельних сил:

1. Сили, однонаправлені, паралельні (рис. 3.12, а):

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2; F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC. \quad (3.17)$$

2. Сили різнонаправлені, паралельні ($F_2 > F_1$) (рис. 3.12, б):

$$\vec{R} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1; F_1 \cdot AC = F_2 \cdot BC. \quad (3.18)$$

3.5. Опорно-рухова система людини

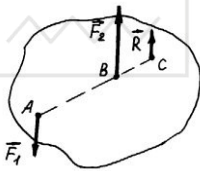


Рис.3.12, б. Правила
складання
різнонаправлених
паралельних сил

З точки зору біомеханіки система забезпечення руху людини включає в себе сукупність кісток (скелет, рис. 3.13) певних розмірів, мас, моментів інерції, які сполучені між собою за допомогою різних типів з'єднань, і м'язів, які призводять до руху кісток в даних з'єднаннях завдяки своєму скороченню. За формою кістки поділяють на довгі, короткі, плоскі або округлі; за структурою на трубчасті, губчасті і повітроносні. Довга трубчаста кістка показана на рис 3.14. У процесі еволюції людини довжина й товщина кісток збільшувалась і кістки набули великої міцності.

Скелет дорослої людини складається з 200 – 214 кісток, які є пасивною частиною опорно-рухового апарату. Більшість людей має 206 кісток (85 парних і 36 непарних). У новонароджених зазвичай близько 270 кісток, значна кількість яких є дуже маленькими. Це робить скелет гнучкішим і допомагає дитині

пройти через родовий канал. У міру дорослішання багато з цих кісток зростаються.

За будовою скелет людини поділяється на скелет голови, тулуба і кінцівок. Скелет голови називається черепом, який має складну будову. У черепі знаходиться мозок і деякі сенсорні

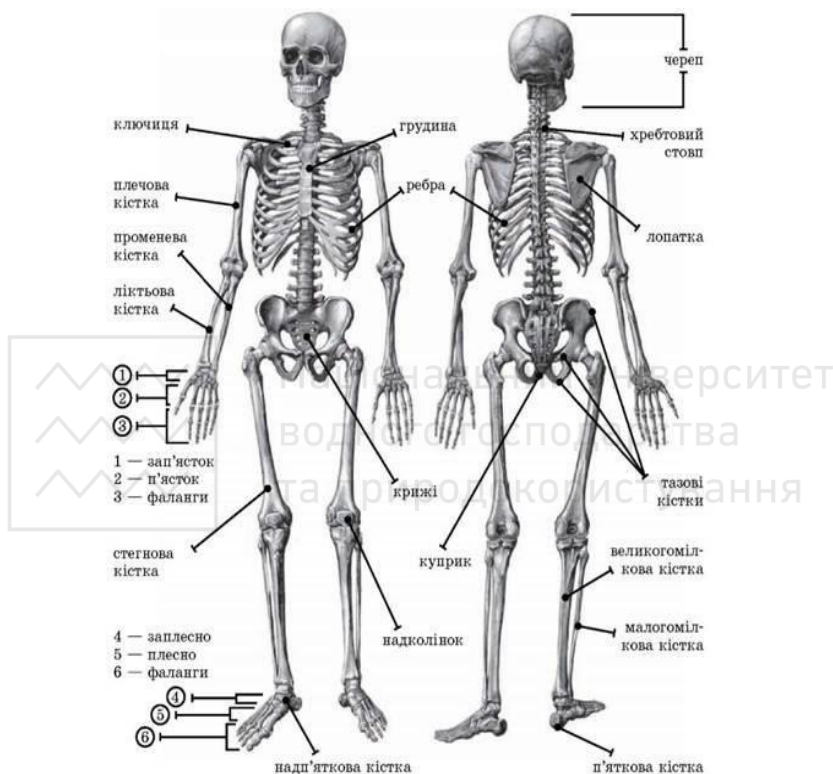


Рис. 3.13. Скелет людини

системи: зорова, слухова, нюхова. При заняттях фізичними вправами велике значення має наявність опорних місць черепа – контрфорсів, які пом'якшують поштовхи і струси при бігу, стрибках.

Безпосередньо з тулубом череп з'єднується з допомогою двох перших шийних хребців. Скелет тулуба складається з хребтного стовпа і грудної клітки. Хребтний стовп складається з 33-34 хребців і має п'ять відділів: шийний (7

хребців), грудний (12), поперековий (5), крижовий (5 зрощених хребців) і куприковий (зрощені 4-5 хребців). З'єднання хребців здійснюється за допомогою хрящоподібних, еластичних міжхребцевих дисків і суглобових відростків. Міжхребцеві диски збільшують рухливість хребта. Чим більша їх товщина, тим вища гнучкість. Якщо вигини хребетного стовпа виражені сильно (при сколіозах) рухливість грудної клітини зменшується. Плоска або округла спина (горбата) свідчить про слабкість м'язів спини.

В основний скелет входить і грудна клітка, яка виконує захисну функцію для внутрішніх органів і складається з груднини, 12 пар ребер і їх з'єднань. Ребра – це плоскі дугоподібно-вигнуті довгі кістки, які за допомогою гнучких хрящоподібних кінців прикріплюються до груднини. Всі з'єднання ребер дуже еластичні, що має важливе значення для забезпечення дихання.



Рис. 3.14. Будова довгої трубчастої кістки

Скелет верхньої кінцівки утворюють плечовий пояс, який складається з лопаток і двох ключиць, і вільна верхня кінцівка, яка включає плече, передпліччя і кисть.

Скелет нижньої кінцівки утворюють тазовий пояс, який складається з двох тазових кісток і крижів, і скелет вільної нижньої кінцівки, який включає стегно, гомілку і стопу.

Кістки скелету між собою можуть з'єднуватись трьома можливими способами (рис. 3.15):

нерухомими з'єднаннями, у яких між кістками є прошарок сполучної тканини чи хряща, або утворюється кістковий шов.

Щілина або порожнина між з'єднаними кістками відсутні (наприклад – хребці куприка або кістки черепа);

напіврохотими з'єднаннями, які мають невелику щілину в хрящовому або сполучнотканинному прошарку між з'єднаними кістками (наприклад, хрящові прошарки між хребцями забезпечують гнучкість хребта);

Рухомими з'єднаннями, або суглобами, які характеризуються наявністю між кістками порожнини та синовіальної мембрани, що вистилає зсередини суглобну капсулу (рис. 3.16).

Основними видами рухів, які забезпечують суглоби, є: згинання - розгинання, відведення (назовні) – приведення (всередину), обертання (поворот назовні і всередину) і кругові рухи (в плечовому, тазостегновому, променезап'ястковому суглобах). Сумарно в організмі людини нараховується біля 150 з'єднань, які є суглобами.



Рис. 3.15. Типи з'єднання кісток

В організмі людини є 639 м'язів. Наймасивніший – великий сідничний м'яз, а найменший – стремінний. Загальна маса скелетної мускулатури складає 40% маси тіла. Поперечно - смугасті скелетні м'язи – це активна частина опорно-рухового апарату, яка приводить в рух кісткові ланки за допомогою сили натягу, яка виникає при скороченні м'язів. Управління цим кістково-м'язовим апаратом руху здійснюється центральною нервовою системою.



Для вивчення механіки рухів живого організму зазвичай будують його модель – біомеханічну систему, яка включає основні властивості виконання нею рухових функцій. Така система для вищих ссавців включає в себе **біокінематичну пару** – сполучення двох кісток, відносний рух яких визначається типом з'єднання та керуючим впливом відповідних м'язів. У



Рис. 3.16. Види суглобів

таких парах з'єднання двох ланок здійснюються таким чином, щоб створити лише наперед задані (визначені) рухи. Кількість можливих видів рухів однієї біокінематичної пари визначається її кількістю ступенів вільності.

Біокінематичні пари з *одним ступенем* вільності є наступні суглоби: плече, ліктьовий суглоб, міжфалангові суглоби пальців, сочленіння стопи з великою берцовою кісткою.

Біокінематичні пари з *двома ступенями* вільності є наступні суглоби: колінний суглоб (який може згинатись і розгинатись, а також допускає невеликий поворот голені відносно стегна), зап'ястно-п'ясний суглоб великого пальця кисті руки і деякі інші.

Біокінематичні пари з *трьома ступенями* вільності є шароподібні суглоби, у яких можливі рухи у наступних напрямках: поворот; приведення і відведення у фронтальній площині; згинання та розгинання. Такими суглобами є: плечовий, тазостегновий.

Найпростішою моделлю біомеханічної системи людини вважається шарнірна модель О. Фішера (рис. 3.17), в якій людина розглядається як певна обмежена кількість твердих циліндрів, з'єднаних за допомогою шарнірів.

Загалом в людському організмі нараховується близько 33 суглобів з трьома ступенями вільності, 29 – з двома і 87 – з однією. Сумарно суглоби тіла людини володіють 244 ступенями вільності.



Біокінематичні пари скелету з'єднані між собою в біокінематичні ланцюги. В залежності від того, які кінематичні пари присутні в ланцюгу і як вони розташовані, розрізняють плоскі і просторові кінематичні ланцюги. У плоскому ланцюзі всі ланки рухаються в одній або паралельних площинах (рис. 3.18, а, б). кінематичний ланцюг, ланки якого утворюють замкнутий контур, називається замкнутим (рис. 3.18, б, г), якщо контур не замкнутий, ланцюг називається незамкнутим або відкритим (рис. 3.18, а, в). У традиційних механізмах зазвичай використовуються замкнуті кінематичні ланцюги, відкритими ланцюгами є біокінематичні ланцюги скелету людини.

Легко можна порахувати кількість ступенів вільності для окремих біокінематичних ланцюгів скелету людини. Наприклад, рука має 18 рухомих сегментів і 27



Рис. 3.17. Шарнірна модель Фішера

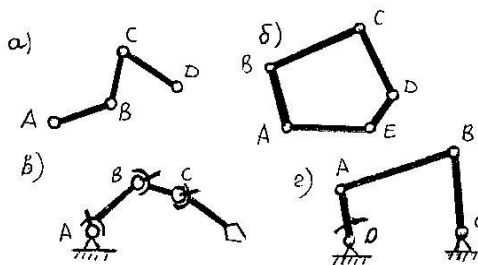


Рис. 1.2

Рис. 3.18. Кінематичний ланцюг: а) відкритий, плоский; б) замкнутий, плоский; в) відкритий, просторовий; г) замкнутий, плоский



У скелетах тварин і людини всі біокінематичні пари є важелями. У котів крім кісток скелету важелями є рухомі кігті, у багатьох риб – колючки спинного плавника. Багато важелів можна знайти у тілі комах, птахів, вони є і в рослин. Типовий важіль – стовбур дерева і його продовження – корінь.

Кісткові важелі, які з'єднані рухомо у суглобах, можуть під дією прикладених сил зберігати положення і змінювати його.

Для прикладу, розглянемо передпліччя людини як один з видів важелів (рис. 3.19). Сила натягу м'яза F прикладена до короткого плеча a важеля (точка опори O – ліктьовий суглоб).

Навантаження R – вага

тіла, яке знаходиться в

кисті, – прикладене до

довгого плеча b .

Обидві сили

знаходяться по одну

сторону від точки

опори, отже даний

важіль є важелем III

роду. Тут не

враховується сила

тяжіння самого передпліччя, прикладена до його центра мас.

Тоді, умовою рівноваги даного важеля буде рівність моментів

прикладених сил відносно точки опори згідно (3.18)

$$F \cdot \sin \alpha \cdot a = Rb. \quad (3.19)$$

Нехай, для спрощення, $\alpha = \pi/2$, тоді $\sin \alpha = 1$.

Оскільки при обертанні важеля кутова швидкість ω всіх його точок однакова то згідно (1.28)

$$\frac{v_{\text{тіла}}}{b} = \frac{v_{\text{м'яз}}}{a}, \quad (3.20)$$

де $v_{\text{тіла}}$ – швидкість руху кисті з тілом, $v_{\text{м'яз}}$ – швидкість скорочення м'яза. Із співвідношень (3.19) і (3.20) можна отримати

$$F = R \frac{b}{a} \text{ і } v_{\text{тіла}} = v_{\text{м'яз}} \frac{b}{a}. \quad (3.20)$$

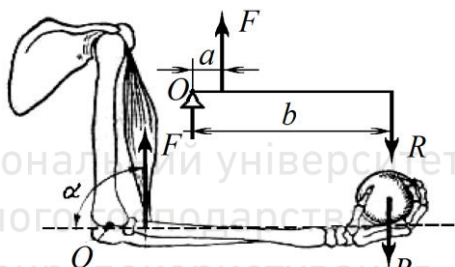


Рис. 3.19. Важіль швидкості



При $a < b$ важіль програє в силі ($F > R$), але *виграє в швидкості* переміщення вантажу ($v_{\text{тіла}} > v_{\text{м'яз}} \text{) і називається тому **важелем швидкості**.$

Хорошим прикладом важеля швидкості є нижня щелепа. Діюча сила F у ній здійснюється жувальним м'язом. Протидіюча їй сила R – опір твердої їжі, яка роздавлюється зубами – діє на зуби. Плече прикладання діючої сили набагато коротше плеча прикладання протидіючої сили, тому жувальний м'яз короткий і сильний. Коли потрібно розгризти щось тверде, людина діє корінними зубами, зменшуючи при цьому плече сили опору.

При $a > b$ важіль виграє в силі ($F < R$), але *програє в швидкості* переміщення вантажу ($v_{\text{тіла}} < v_{\text{м'яз}} \text{) і називається тому **важелем сили**. Прикладом такого важеля є стопа людини при вставанні на пальці (рис. 3.20). Це також важіль III роду. У цьому випадку опорою O важеля служать головки плеснових кісток; сила тяжіння R тіла прикладена до таранної кістки, а м'язова сила F , що здійснює підйом тіла, передається через Ахіллове сухожилля і прикладена до виступу п'яткової кістки і оскільки $a > b$ то $F < R$.$

Важелі в живих організмах дають вииграш у силі. Наприклад, довгі ноги оленя дають йому можливість швидко бігати, короткі лапи крота розраховані на затрату великих сил за малої швидкості, довгі щелепи мисливських собак дозволяють їм швидко схопити здобич під час бігу.

Подібних важелів у тілі людини більшість, але є і важелі I роду, наприклад, череп (рис. 3.21), що розглядається в сагітальній площині. (Сагітальна площина розташована в передньо-задньому напрямку. Сагітальні площини (уявні) проходять вертикально спереду назад уздовж тіла; тільки

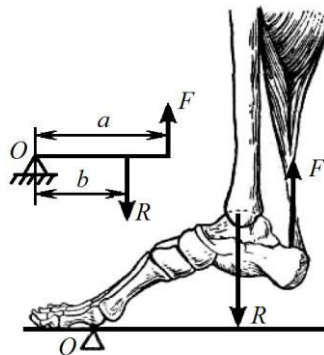


Рис. 3.20. Важіль сили



серединна сагітальна площина ділить його на дві симетричні половини). Тут вісь обертання проходить через зчленування черепа з першим хребцем, роль сили опору R відіграє сила тяжіння, яка прикладена до центра мас черепа, а F – сила натягу м'язів і сухожиль, прикріплених до потиличної кістки.

Якщо розглядати скелет як сукупність окремих ланок,

з'єднаних в один організм, то виявиться, що всі ці ланки при нормальній стійці людини утворюють систему, що знаходиться у нестійкій рівновазі. Так, опора тулуба представлена кульовими поверхнями тазостегнового зчленування. Центр маси тулуба розташований вище опори, що при кульовій опорі створює нестійку рівновагу. Те ж відноситься і до колінного та гомілковостопного з'єднань. Всі ці ланки перебувають у стані нестійкої рівноваги.

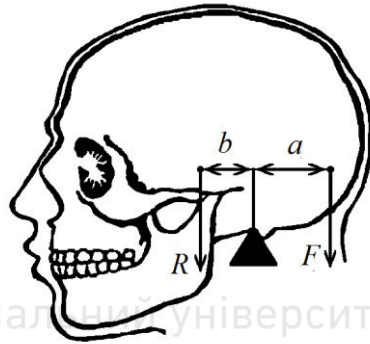


Рис. 3.21. Важіль 1 роду

Центр мас тіла людини при нормальній стійці розташований якраз на одній вертикалі з центрами тазостегнового, колінного і гомілковостопного зчленувань ноги, на (2-2,5) см нижче мису крижів і на (4-5) см вище тазостегнової осі. Таким чином, це дуже нестійкий стан з'єднання ланок скелету. Вся система тримається в рівновазі, тільки завдяки постійній напрузі у м'язах, які підтримують скелет.



Розділ 4. Механіка рідинних та газових потоків

Рідина, густина якої не залежить від зовнішнього тиску, називається *нестисливою*. *Гідромеханіка* вивчає рівновагу і рух нестисливих рідин та взаємодію з зануреними в них твердими тілами.

Гідромеханіка поділяється на гідростатику та гідродинаміку. Закони рівноваги рідин (теорія рівноваги води в океанах, повітря в атмосфері, теорія плавання та стійкості плаваючих тіл, тощо) вивчає *гідростатика*. Кінематику рідких середовищ, закони руху ідеальної і в'язкої рідини і її взаємодію з твердими тілами, іншими рідинами або газами вивчає *гідродинаміка*.

4.1. Закони гідростатики

В гідромеханіці рідини і гази розглядаються як суцільне середовище, що рівномірно заповнює певний об'єм. Напружений стан такого суцільного середовища можна характеризувати за допомогою тиску. У випадку рівноваги в середовищі *тиск* дорівнює величині взятої з оберненим знаком нормальної напруги на довільно орієнтованій в даній точці площадці:

$$P = -\sigma. \quad (4.1)$$

Середня величина тиску на деяку площадку дорівнює відношенню середнього значення нормальної складової сили, що діє на площадку, до площі цієї площадки

$$P = \frac{\Delta F}{\Delta S}. \quad (4.2)$$

Тиск вимірюється в системі СІ в паскалях (*Па*). Один паскаль – це тиск, який створюється силою в 1 *Н*, що діє нормально до площадки 1 *м*². 1 *Па* = 1 *Н/м*² = 0,102 *кгс/м*². Використовуються також наступні одиниці: 1 *кгс/м*² = 1 *ат* = 9,81 *Па*; 1 *мм.рт.ст.* (1 *торр*) = 133,322 *Па*.

В теоретичній гідростатиці для опису нестисливої нерухомої рідини використовують **рівняння Нав'є – Стокса**:

$$\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P = \frac{\vec{F}}{m}, \quad (4.3)$$



де P – тиск, який діє на елемент рідини масою m з боку зовнішньої сили \vec{F} , ρ – густина рідини.

При відсутності зовнішніх сил ($\vec{F} = 0$) рівняння (4.3) виражає **закон Паскаля**: тиск у всіх частинах об'єму рідини або газу однаковий ($p = \text{const}$) і без змін передається у всі точки об'єму. Якщо єдиною силою, що діє на рідину, є сила тяжіння, направлена вздовж осі OZ, то рівняння (2.3) можна переписати у вигляді

$$\frac{dP}{dz} = \rho g. \quad (4.4)$$

Візьмемо інтеграл з останнього виразу від $z=0$ (поверхня рідини) до z – глибини, яка відрховується від поверхні в напрямку прискорення \vec{g} .



$$\int_{P_0}^P dP = \int_0^z \rho g dz. \quad (4.5)$$

Інтегрування визначає, що в однорідній нестисливій нерухомій рідині тиск зростає з глибиною за лінійним законом

$$P = P_0 + \rho g z, \quad (4.6)$$

де P_0 – тиск на поверхні $z=0$ (зовнішній тиск). Вираз $\rho g z$ називається **гідростатичним тиском**.

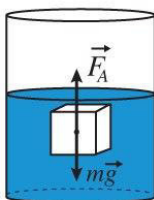


Рис. 4.1. Сила
Архімеда

Нерівномірний розподіл тиску в рідині або газі створює **гідростатичну підйомну силу** (виштовхувальна сила, сила Архімеда), яка діє на тіла частково або повністю в них занурених. Ця сила визначається **законом Архімеда**: на тіло занурене в рідину (або газ) (рис. 4.1) діє сила, яка напрямлена

вертикально вгору, прикладена до центру тяжіння витисненого об'єму і чисельно рівна вазі витисненої рідини (газу)

$$F_A = \rho_p g V_p, \quad (4.7)$$

де ρ_p – густина рідини або газу, V_p – об'єм витисненої рідини або газу.



Якщо сила тяжіння mg менша виштовхувальної сили F_A , то тіло буде спливати на поверхню доти, доки вага витісненої зануреною частиною тіла рідини не стане рівною силі тяжіння, що діє на тіло. Якщо $mg > F_A$ – тіло потоне, якщо $mg = F_A$ – тіло буде вільно плавати всередині рідини.

Тканини морських тварин (м'язи та кістки) містять білки та неорганічні речовини, через що їх густина варіює в межах (1060 - 2000) кг/м^3 . Для забезпечення плавучості тварин густина їх тканин повинна не сильно відрізнятися від значень густини морської води. Це забезпечується речовинами з невисокими значеннями густини: жир (930 кг/м^3), сквален та воскові ефіри (860 кг/м^3), газ ($\approx 0 \text{ кг/м}^3$).

Значення густини біологічних рідин інколи можуть використовуватися як діагностичні критерії стану організму (таблиця 4.1).

Таблиця 4.1
Залежність густини жовчі від стану здоров'я

Стан здоров'я	Густина, кг/м^3
Норма	$1008 \pm 0,2$
Хронічний холангіогепатит	$1004 \pm 2,0$
Цироз печінки	$1001 \pm 0,6$

4.2. Поверхневий натяг рідин

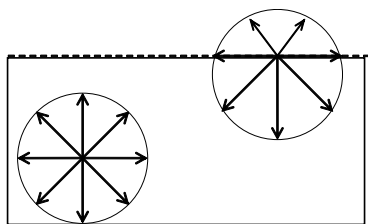


Рис. 4.2. Напрямок і величина сил взаємодії молекули рідини з сусідніми молекулами

Рідини займають за своїми властивостями проміжне становище між газами і кристалами. Зокрема, рідина як і кристалічне тіло, зберігає об'єм, але подібно до газів, не зберігає своєї форми. Для кристалічного стану характерне упорядковане розташування частинок

(атомів або молекул), а для газів – хаотичне. В розташуванні частинок рідини спостерігається так званий ближній порядок – це упорядковане розташування по відношенню до довільної



частинки найближчих до неї сусідів. В кристалічних тілах має місце далекий порядок – впорядковане розташування частинок по відношенню до довільної частинки спостерігається в межах значного об'єму. В кристалічних тілах частинки коливаються біля положення рівноваги – вузлів кристалічної решітки. Молекули рідини як і частинки твердого тіла також коливаються біля положення рівноваги, але ці положення для молекул рідини не є постійними. Через деякий час, який називають часом «осілого життя», молекула стрибком переходить в нове положення рівноваги на відстань рівну середній відстані між сусідніми молекулами (наприклад, для води $\approx 3 \cdot 10^{-10} \text{ м}$).

Сили взаємодій зменшуються із збільшенням віддалі між молекулами, тому кожна молекула рідини взаємодіє лише з молекулами, що входять в так звану сферу молекулярної дії.

Кожна молекула зазнає притягання зі сторони найближчих сусідів, що знаходяться в межах сфери молекулярної дії, центр якої співпадає з даною молекулою. Рівнодійна всіх сил для молекули, що знаходиться всередині рідини в середньому дорівнює нулю. Рівнодійна сил притягання, які діють на молекулу, що знаходиться в поверхневому шарі рідини, напрямлена всередину рідини (рис.4.2). Тому поверхневий шар рідини має меншу концентрацію молекул, ніж внутрішній, тобто виникають передумови скорочення площі поверхневого шару. Таке явище набуття відкритої поверхні рідини стану з мінімально можливою площею поверхні називають *поверхневим натягом*. Серед усіх фігур певного об'єму найменшу площу поверхні має куля. Тому крапля рідини, на яку не діють зовнішні сили, внаслідок поверхневого натягу приймає кулясту форму. Краплини рідини, для яких роль сили тяжіння мала, дійсно приймають форму кульок.

Внаслідок поверхневого натягу поверхня рідини утворює ніби деформовану плівку, в якій виникає сила, що «намагається» зменшити її площу. Цю силу називають *силою поверхневого натягу* $F_{п.н.}$. Вона спрямована вздовж поверхні рідини перпендикулярно до межі цієї поверхні. Експериментально доведено, що значення сили поверхневого натягу прямо



пропорційне довжині контуру l , який обмежує поверхню рідини.

$$F_{n.n} = \alpha l \quad (4.8)$$

Коефіцієнт α , що залежить від природи рідини, називається *коефіцієнтом поверхневого натягу* (або просто *поверхневим натягом*). Із співвідношення (4.8)



видно, що **коефіцієнт поверхневого натягу α** чисельно дорівнює силі, прикладеній до одиниці довжини краю поверхневої плівки рідини.

Рис. 4.3. Концентрація молекул рідини в поверхневому і внутрішніх шарах рідини

З підвищенням температури α зменшується. При наближенні рідини до критичного стану коефіцієнт поверхневого натягу прямує до нуля. Критичний стан характеризується критичною температурою. (Критична температура визначається як температура, при якій зникають відмінності в фізичних властивостях між рідиною і парою, які знаходяться в рівновазі між собою). Це пояснюється тим, що в критичній точці (точці, яка характеризується критичними значеннями тиску, об'єму та температури, при якій настає критичний стан рідини) різниця між рідким і газоподібним станами зникає. Окрім цього коефіцієнт поверхневого натягу залежить від домішок. Наприклад, розчин мила у воді зменшує її поверхневий натяг, а цукру – збільшує.

В таблиці 4.2. приведені значення коефіцієнта поверхневого натягу для деяких рідин при температурі 20°C.

Таблиця 4.2

Коефіцієнт поверхневого натягу для деяких рідин

Рідина	σ , мН/м	Рідина	σ , мН/м
Вода	72,5	Ртуть	470
Жовч	48	Спирт	22
Молоко	50	Сиворотка крові	60
Сеча	66	Ефір	17



Концентрація молекул рідини поверхневого шару менша, ніж молекул внутрішніх шарів. На рис. 4.3 умовно зображено розміщення молекул поверхневого та внутрішнього шарів рідини. Оскільки відстані між молекулами поверхневого шару дещо більші за відстані між молекулами внутрішніх шарів, то вони мають надлишок потенціальної енергії (див § 6.4) міжмолекулярної взаємодії порівняно з молекулами внутрішніх шарів. Сума цих потенціальних енергій складає *енергію* всього *поверхневого шару* W_n , яка дорівнює

$$W_n = \alpha S, \quad (4.9)$$

де S – площа поверхні шару.

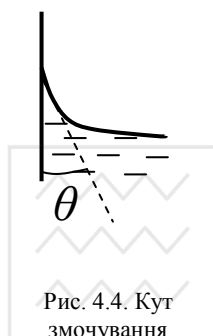


Рис. 4.4. Кут змочування змочуючої рідини

При контакті рідини із твердим тілом можлива ситуація за якої молекули твердого тіла сильніше притягуватимуть молекули рідини, ніж молекули рідини притягуватимуться між собою. У цьому випадку кажуть, що рідина *змочує* тверде тіло (рис. 4.4) і *кут змочування* θ між поверхнею рідини і твердим тілом гострий. Поверхню такого тіла називають *гідрофільною*. Якщо $\theta \rightarrow 0$, то має місце повне (ідеальне) змочування рідиною твердого тіла. Наприклад, повне змочування спостерігається при контакті води або спирту із чистим склом, нафти з водою, тощо. Якщо ж сили притягання між молекулами рідини більші, ніж між молекулами рідини і твердого тіла, то спостерігається *незмочування* рідиною твердого тіла (рис. 4.5, кут θ – тупий). Поверхню такого тіла називають *гідрофобною*. Так, наприклад, поводить себе ртуть при контакті зі склом та багатьма іншими твердими тілами. При $\theta \rightarrow 180^\circ$ має місце повне незмочування.



Рис. 4.5. Кут змочування не змочуючої рідини

Якщо капіляр (тонку трубку) занурити в рідину, то внаслідок явища змочування (незмочування) рідина підніматиметься (опускатиметься) в цьому капілярі. Таке втягування (виштовхування) рідини з капіляру називають



капілярними явищами. Пояснимо причини виникнення такого піднімання чи опускання рідини в капілярі.

Розглянемо рідину з різною формою поверхні (рис. 4.6). Якщо поверхня рідини плоска, то на будь-яку молекулу M_1

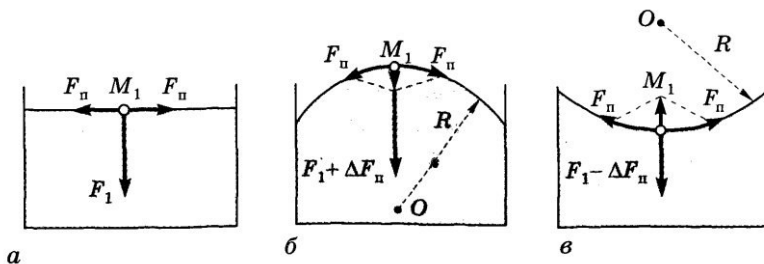


Рис. 4.6. Сили, які створюють молекулярний тиск під поверхнями: а) плоскою, б) випуклою, в) ввігнутою

поверхневого шару діє результуюча сила F_1 , спрямована перпендикулярно до поверхні всередину рідини, а сили з боку інших молекул поверхневого шару F_n – скомпенсовані. На поверхню з боку рідини здійснюється молекулярний тиск p_0 , який дорівнює атмосферному.

Якщо ж поверхня рідини буде криволінійною, то сили поверхневого натягу, що діють на молекулу M_1 , направлені під кутом і вже не компенсують одна одну, а їх результуюча направлена до центру кривизни поверхні і здійснює на неї додатковий молекулярний тиск Δp . Величину Δp розраховують за **формулою Лапласа**:

$$\Delta p = \sigma \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (4.10)$$

де R_1 і R_2 – радіуси кривизни поверхонь рідини в двох взаємно перпендикулярних перерізах.

Якщо поверхня рідини сферична, то $R = R_1 = R_2$ і

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (4.11)$$

Оскільки сили, що створюють додатковий молекулярний тиск завжди направлені до центру кривизни поверхні, то і додатковому тиску приписують такий же напрямок.



Під дією цього додаткового тиску змочуючі рідини піднімаються по капіляру, а незмочуючі – опускаються.

Висоту підйому рідини в капілярі можна визначити з формули:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho_{\text{рід}} g R}, \quad (4.12)$$

де R – радіус капіляра. У випадку $\cos \theta < 0$ формула (4.12) покаже висоту опускання рідини в капілярі.

Капілярні явища відіграють значну роль в природі, техніці, виробництві, будівництві тощо. Вони визначають умови конденсації пари, кипіння рідин, кристалізації. Змочуючі рідини легко проникають в пористі тіла. Завдяки цьому, наприклад, відбувається зволоження білизни, вати в сирих приміщеннях, утримується волога в ґрунті, тощо. Навпаки, незмочуючі рідини не можуть проникнути в пористі тіла, наприклад, в пір'я птахів, змащене жиром.

Речовини, які зменшують коефіцієнт поверхневого натягу рідини, називають *поверхнево активними* (ПАР). Застосування ПАР набуло надзвичайно широкого вжитку в діяльності людини від звичайного прання білизни до боротьби з личинками малярійних комарів у водоймах.

Слід відмітити, наприклад, що поверхня легень людини має специфічну рельєфну форму, що визначається наявністю елементарних структур – альвеол. Така форма забезпечує велику площу легень для поліпшення газообміну. Підвищення поверхневого натягу може призвести до небезпечного респіраторного захворювання – *гіаліново-мембранної хвороби новонароджених*. Запобігти цьому захворюванню можна за рахунок внесення ПАР, які зменшують коефіцієнт поверхневого натягу альвеол. Однією з таких речовин є фосфатидилхолін, молекули якого мають видовжену форму пуголовків. Головки таких «пуголовків» є гідрофільними, а ланцюжки – «хвостики» – гідрофобними з жирних кислот. Полярні головки знаходяться у контакті з водою, тоді як жирні кислоти залишаються у повітрі. Результатом дії такого граничного молекулярного шару є зменшення коефіцієнта поверхневого натягу від $70 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$ до $30 \cdot 10^{-3} \text{ Н/м}$.



4.3. Закони гідродинаміки ідеальної рідини

В реальних рідинах між окремими шарами рідини виникають сили в'язкого (внутрішнього) тертя. В окремих випадках вплив внутрішнього тертя невеликий і ним можна знехтувати. *Ідеальною* називається нестислива рідина, в якій відсутня в'язкість. При розгляді руху ідеальної рідини корисно розглядати швидкості руху елементарних (дуже малих) об'ємів рідини в певних точках потоку.

Стаціонарним (стаціонарною) називається потік (течія), в усіх точках якого (якої) швидкість елементарних об'ємів рідини не змінюється з часом. Для графічного зображення течії використовують поняття лінії течії.

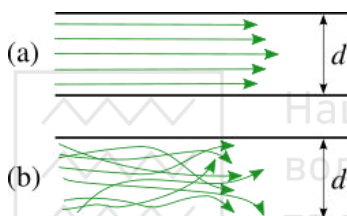


Рис. 4.7. Ламінарна (а), та турбулентна (б) течії рідини в каналі діаметром d

Лінією течії називається така лінія, дотичні до якої в кожній її точці співпадають з напрямком швидкості елементарного об'єму рідини в цій точці. Лінії течії на малюнку проводяться з такою густотою, щоб кількість ліній, які перетинають перпендикулярну площадку одиничної площі була пропорційною модулю швидкості рідини.

Поверхню, утворену лініями течії, що проведені через усі точки малого замкнутого контура, називають *трубкою течії*.

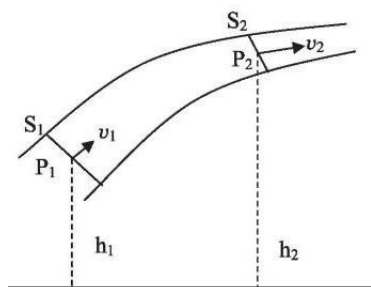


Рис. 4.8. Рух рідини в трубці

Розрізняють ламінарну або шарувату течію та турбулентну. *Ламінарною* називають течію, в якій окремі шари при своєму русі не змішуються (ковзають один відносно одного) (рис. 4.7, а). В *турбулентній* течії відбувається перемішування окремих шарів, утворення завихрень в результаті виникнення нормальної



(поперечної) складової швидкості (рис. 4.7, b).

Розглянемо трубку течії, настільки тонку, що в кожному її перерізі швидкість можна вважати однаковою у всіх точках перерізу (рис. 4.8). Розглянемо перерізи трубки S_1 і S_2 . Нехай швидкість рідини в цих перерізах – відповідно v_1 і v_2 . Тоді маса рідини, яка пройшла через переріз S_1 за час Δt дорівнює $m_1 = \rho_1 v_1 S_1 \Delta t$, а через переріз S_2 рівна $m_2 = \rho_2 v_2 S_2 \Delta t$, де ρ_1 і ρ_2 – густина рідини в першому і другому перерізах відповідно. Для стаціонарного руху маси рідини m_1 і m_2 повинні бути рівними, інакше кількість рідини між S_1 і S_2 повинна була б збільшуватись (або зменшуватись) і течія перестала б бути стаціонарною. Звідси

$$\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2. \quad (4.13)$$

Рівняння (4.13) називають **рівнянням нерозривності** потоку рідини. Для нестисливої рідини ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$) рівняння нерозривності спрощується

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \text{ або } S v = \text{const}. \quad (4.14)$$

З (4.14) слідує, що чим більша площа перерізу трубки течії, тим менша швидкість течії і навпаки.

Коли рідина рухається по трубі змінного перерізу і різної висоти (рис. 4.8), то для деякого її об'єму змінюється як кінетична так і потенціальна енергії об'єму рідини (див. §6.4). Ця зміна обумовлена дією деяких зовнішніх сил, робота яких рівна зміні потенціальної і кінетичної енергії рідини $A = \Delta W_k + \Delta W_n$.

Після підстановок і перетворень в лівій та правій частинах останнього співвідношення отримаємо вираз

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 + P_1 = \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2 + P_2 \quad (4.15)$$

або для довільного перерізу

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho g h + P = \text{const}, \quad (4.16)$$



де $\frac{\rho v^2}{2}$ – динамічний тиск, ρgh – гідростатичний тиск, p – статичний тиск.

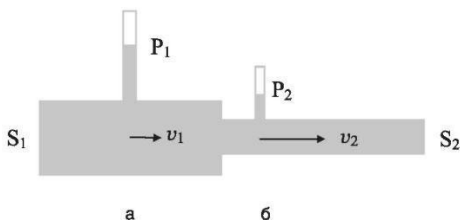


Рис. 4.9. Рівні підняття рідини в манометричних трубках, приєднаних до труби а) широкого перерізу і б) вузького перерізу

Розмірність всіх доданків (4.16) одиниця енергії розділена на одиницю об'єму $\left[\frac{1 \text{ Дж}}{1 \text{ м}^3} \right]$. Перший і

другий доданки мають фізичний зміст одиниці кінетичної та потенціальної енергії відповідно, які приходяться на одини-

цю об'єму рідини, третій доданок – це робота сил тиску по переміщенню одиниці об'єму рідини.

Рівняння (4.16) носить ім'я **Бернуллі** на честь дослідника. Це рівняння виражає закон збереження енергії при стаціонарній течії ідеальної рідини. Для горизонтальної трубки течії $h_1 = h_2$ і рівняння Бернуллі приймає вигляд

$$p + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const} . \quad (4.17)$$

Звідси випливає, що в тих місцях труби, де більша швидкість течії, тиск буде меншим і навпаки. Це можна продемонструвати за допомогою манометричних трубок, рівень підняття рідини в яких пропорційний статичному тиску (рис. 4.9). Видно, що в широкому перерізі (а), де швидкість течії менша, статичний тиск більший, ніж у вузькому перерізі (б).

Зміна діаметру судин кровоносної системи організму приводить до таких хвороб як *тромбоз* та *аневризми*. Зокрема, при тромбозі, внаслідок утворення на внутрішній стінці судини кров'яних згустків, відбувається зменшення її поперечного перерізу. Це зменшення величини перерізу S судини супроводжується збільшенням швидкості течії крові у місцях меншого перерізу згідно з рівнянням (4.14). Збільшення швидкості течії v призводить до зменшення статичного тиску



p відповідно до (4.16). Зменшення цього тиску нижче певного рівня призводить до закупорки судини. Але через це кінетична енергія крові, що рухається, збільшується, і отвір судини збільшується. Виникають коливання стінок кровоносної судини, які спричиняють болісні відчуття.

При аневризмі відбувається збільшення величини перерізу S судини внаслідок патоморфологічних змін у її стінках. Швидкість течії крові зменшується (див. рівняння нерозривності потоку), але статичний тиск p збільшується (див. рівняння Бернуллі). Цей надлишковий тиск може призвести до крововиливу.

Ще однією хворобою, пов'язаною вже з поверхневим натягом рідин є *газова емболія*, при якій бульбашка газу може суттєво утруднити і навіть зупинити протікання крові в судинах малого внутрішнього діаметру. Завдяки газовій емболії кров

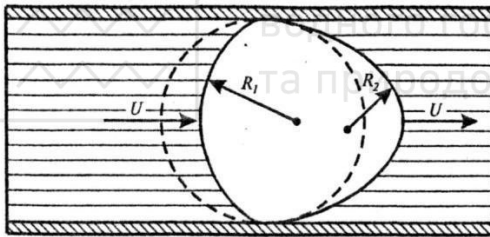


Рис. 4.10. Вплив газової бульбашки на проходження крові по судині

серйозних функціональних розладів і, навіть, до летального результату.

Якщо внаслідок турбулентного руху в крові утворюється газова бульбашка з радіусом, набагато

меншим внутрішнього радіуса судини, то вона має майже сферичну форму і вільно переноситься з кров'ю по даній судині. При попаданні такої бульбашки в судину з внутрішнім радіусом меншим радіуса бульбашки, меніск бульбашки деформується під дією сили тиску крові. Передній меніск витягується, радіус кривизни його R_2 зменшується, а задній, навпаки, стає більш плоским зі збільшенням свого радіуса R_1 (рис.4.10). Відповідно, додаткові молекулярні тиски, які діють на дані меніски, будуть неоднакові і їх результуюча сила, прикладена до бульбашки,



буде направлена проти швидкості крові v . (рис. 4.10). Це може привести до повної зупинки крові в даній судині.

Ще гірша ситуація виникає коли бульбашка потрапляє на розгалуження (біфуркацію) судин і повністю зупиняє кров в двох сусідніх судинах.

Газова емболія може виникнути при пораненні крупних вен, де тиск крові є нижчим від атмосферного, при неправильному проведенні внутрішньовенних ін'єкцій, тощо.

Газові бульбашки можуть утворитися при різкому зменшенні зовнішнього тиску. При цьому відбувається зменшення розчинності газів (в першу чергу – нітрогену) в крові і переході їх з розчинного стану в газовий. З такою проблемою стикаються водолази при швидкому підйомі з глибини на поверхню (кесонна хвороба), льотчики та космонавти – про розгерметизації кабіни літака та скафандрів.

4.4. Закони гідродинаміки в'язкої рідини

Для всіх реальних рідин в тій чи іншій мірі властиве внутрішнє тертя або в'язкість, що проявляється в протидії при переміщенні одного шару рідини (газу) відносно іншого.

Розглянемо течію в'язкої рідини між двома твердими пластинками (рис. 4.11), з яких нижня нерухома, а верхня рухається зі швидкістю v_1 . Нехай течія рідини є ламінарною у вигляді декількох шарів зі швидкостями v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , тощо. Шар рідини, який безпосередньо знаходиться біля нижньої

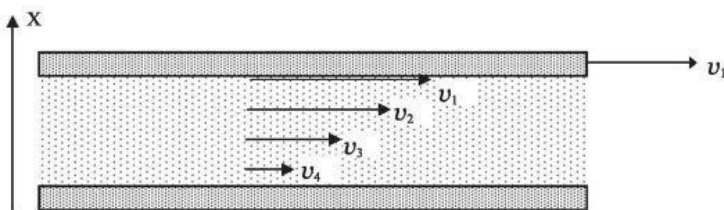


Рис. 4.11. Течія в'язкої рідини між рухомою і не рухомою твердими

нерухомої пластинки внаслідок притягання молекул рідини і твердого тіла є нерухомим, тобто його швидкість $v_n = 0$. Із збільшенням відстані від нижньої пластини швидкість шарів



рідини буде збільшуватись ($v_4 < v_3 < v_2 < v_1$). Максимальна швидкість буде у шара рідини, який «прилипає» до верхньої пластини.

Шари в'язкої рідини діють один на одного внаслідок притягання молекул різних шарів між собою та перехід молекул із одного шару в інший внаслідок їх теплового руху. Завжди верхній шар рідини намагається прискорити рух нижнього, а нижній намагається його загальмувати. Сила внутрішнього тертя пропорційна площі S шарів, які взаємодіють, і тим більша, чим більша їх відносна швидкість. Оскільки розбиття на шари рідини умовне, то прийнято виражати силу в залежності від зміни швидкості, віднесеної до довжини в напрямку, перпендикулярному швидкості (вздовж осі OX), тобто від dv/dx – *градієнта швидкості* (швидкості зсуву).

Змінюючи швидкість v руху верхньої пластини, можна експериментально встановити співвідношення (**рівняння Ньютона для в'язкого тертя**)

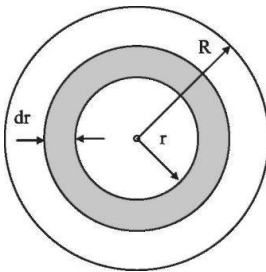
$$F = \eta \left| \frac{dv}{dx} \right| S, \quad (4.18)$$

де η – в'язкість (динамічна в'язкість) рідини, яка дорівнює силі в'язкого тертя, що виникає між шарами рідини при градієнті швидкості 1 м/с на 1 м довжини, перпендикулярній напрямку руху рідини, на поверхні шару рідини площею 1 м^2 , S – площа шару рідини. Динамічна в'язкість η в системі СІ вимірюється в *паскаль – секундах* ($\text{Па} \cdot \text{с}$), в системі СГС – в *пуазах* (П): $1\text{ Па} \cdot \text{с} = 10\text{ П}$.

Якщо в'язкість рідин не залежить від градієнта швидкості (але залежить від складу рідини, її температури та тиску), то такі рідини підкоряються рівнянню (4.18) і називаються *ньютонівськими*. Рідини, для яких не виконується (4.18) називаються *не ньютонівськими*. Властивості ньютонівської рідини мають більшість рідин (вода, розчини неорганічних речовин, низькомолекулярні органічні рідини) і всі гази. Коефіцієнт в'язкості і ньютонівських і не ньютонівських рідин залежить від температури, причому для рідин він зменшується з



підвищенням температури, а для газів – збільшується, що вказує на різний механізм внутрішнього тертя в рідинах і газах.



$$dS = 2\pi r dr$$

Рис. 4.12. Виділений шар рідини

Рідини, які складаються із складних і великих молекул (полімерів, органіки, тощо) і які утворюють протяжні просторові структури, є не ньютонівськими. Їх в'язкість набагато більша ніж у простих рідин. Збільшення їх в'язкості відбувається завдяки тому, що при течії робота зовнішніх сил іде не тільки на

подолання істинної ньютонівської в'язкості, а і на руйнування структури.

При русі рідин в циліндричних трубах внаслідок осової симетрії елементарні об'єми рідини, рівновіддалені від осі, мають однакову швидкість. Найбільшу швидкість мають ті елементарні об'єми, які рухаються вздовж осі труби. Найближчі до стінок труби шари рідини – нерухомі.

Виділимо циліндричний об'єм рідини радіуса r від осі труби і довжиною l . Якщо тиск на торцях труби p_1 і p_2 , то сила тиску, яка забезпечує перекачування даного об'єму (рис. 4.12)

$$F = (p_1 - p_2)\pi r^2. \quad (4.19)$$

На бічну поверхню виділеного циліндра з боку оточуючого шару рідини діє сила внутрішнього тертя

$$F_m = \eta \frac{dv}{dr} S = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l, \quad (4.20)$$

де $S = 2\pi r l$ – площа бічної поверхні циліндра. Оскільки рідина рухається рівномірно, то ці сили зрівноважені, тобто $F = F_m$. Звідси

$$(p_1 - p_2)\pi r^2 = -\eta \frac{dv}{dr} 2\pi r l. \quad (4.21)$$

Знак « $-$ » в правій частині (4.21) показує, що $dv/dr < 0$ (швидкість зменшується зі збільшенням r . Розділимо змінні в (4.21) і проінтегруємо



$$\int_0^v dv = -\frac{(p_1 - p_2)}{2l\eta} \int_R^0 r dr. \quad (4.22)$$

Отримаємо

$$v = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} (R^2 - r^2). \quad (4.23)$$

Найбільшу швидкість має шар рідини, який протікає вздовж осі труби ($r=0$)

$$v_{\text{макс}} = \frac{(p_1 - p_2)R^2}{4l\eta}. \quad (4.24)$$

Витрата рідини dQ , яка протікає через деякий поперечний переріз труби $dS = 2\pi r dr$ за час dt :

$$dQ = \frac{dV}{dt} = \frac{dl \cdot dS}{dt} = \frac{v \cdot dt \cdot dS}{dt} = v \cdot dS = v \cdot 2\pi r \cdot dr. \quad (4.25)$$

Підставимо v з (4.23) у вираз (4.25) і проінтегруємо

$$Q = \pi \frac{p_1 - p_2}{2l\eta} \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot r dr = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{p_1 - p_2}{l}. \quad (4.26)$$

Отримана залежність носить назву **формули Пуазейля**. Як видно з (4.26) при заданій різниці тисків на торцях труби через неї протікає тим більше рідини чим менша її в'язкість і більший радіус труби. Величина $X = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$ носить назву *гідравлічного опору*.

Для труб зі змінним діаметром в рівнянні (4.26) замість різниці тисків на довжину труби необхідно брати градієнт тиску. Тоді рівняння Пуазейля прийме вигляд

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dl}. \quad (4.27)$$

Ламінарну течію в'язкої рідини відрізняють від турбулентної за, так званим, *числом Рейнольдса*:

$$\text{Re} = \frac{\rho_p v d}{\eta}, \quad (4.28)$$



де ρ_p – густина рідини, ν – її швидкість, d – діаметр труби.

Якщо число Рейнольдса більше деякого критичного ($Re > Re_{кр}$), то рух рідини є турбулентним. Наприклад, для течії води в гладких циліндричних трубах $Re_{кр} \approx 2300$, для крові судинах – $Re_{кр} \approx 900-1600$. Оскільки число Рейнольдса залежить від в'язкості і густини рідини, то зручно ввести їх відношення, яке називається *кінематичною в'язкістю*:

$$\nu = \eta / \rho_p. \quad (4.29)$$

Кінематична в'язкість вимірюється $[m^2/c]$, в системі СГС – $[Cm]$ (читається – *стокс*; співвідношення $1 Cm = 10^{-4} m^2/c$).

Використовуючи поняття кінематичної в'язкості, число Рейнольдса можна виразити у вигляді

$$Re = \frac{\nu d}{\nu}. \quad (4.30)$$

З (4.30) видно, що характер течії рідини залежить від діаметра труби. В широких трубах навіть при невеликих швидкостях рідини може виникнути турбулентний рух.

Наприклад, в трубках діаметром 2 мм течія води стає турбулентною при швидкості більшій 1,27 м/с, а в трубці діаметром 2 см – вже при швидкості 0,12 м/с ($T = 16^\circ C$).

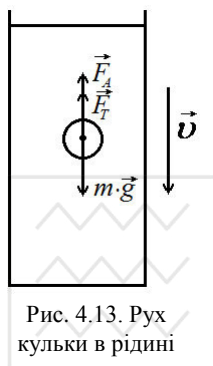


Рис. 4.13. Рух кульки в рідині

4.5. Рух сферичних тіл в в'язкому середовищі

В'язкість рідин можна спостерігати не тільки при русі рідин в трубах, а і при русі твердих тіл в рідинах. При рівномірному русі у в'язкому середовищі тіл сферичної форми сила в'язкого тертя визначається за формулою Стокса

$$F_T = 6\pi r \eta \nu, \quad (4.31)$$

де r – радіус тіла, η – коефіцієнт в'язкого тертя, ν – швидкість руху тіла кулястої форми у в'язкому середовищі.

Нехай кулька падає в рідині (рис. 4.13). На неї діють сили:



\vec{F}_A – сила Архімеда, $m\vec{g}$ – сила тяжіння, \vec{F}_T – сила в'язкого тертя. Модуль рівнодійної цих сил

$$R = mg - F_A - F_T. \quad (4.32)$$

Швидкість кульки зростає доти, доки рівнодійна не стане рівною нулю, тоді

$$F_T = mg - F_A. \quad (4.33)$$

Оскільки $mg = \rho_{кул} V g$, $F_A = \rho_{рід} V g$, $V = \frac{4}{3} \pi r^3$, то підставивши ці вирази і (4.31) в (4.33) отримаємо

$$v = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 g (\rho_{кул} - \rho_{рід})}{\eta}, \quad (4.34)$$

де $\rho_{кул}$ – густина кульки, $\rho_{рід}$ – густина рідини, V – об'єм кульки, g – прискорення вільного падіння.

Формула (4.34) справедлива не тільки для руху сфери в рідині, а і в газі. Вона може використовуватись, наприклад, для визначення часу осідання пилу в повітрі, тощо.

4.6. Гемодинаміка

Гемодинаміка вивчає рух крові по судинній системі, який залежить від властивостей крові, кровоносних судин і серця. Фізичною основою гемодинаміки є гідродинаміка та реологія.

Система кровообігу людини складається з серця і системи кровоносних судин, які утворюють велике і мале кола кровообігу. Система кровообігу виконує в організмі транспортну функцію: кров транспортує кисень і поживні речовини від легенів і органів травлення до всіх тканин організму, від тканин кров виносить кінцеві продукти обміну до органів виділення. Рух крові в судинній системі можливий за наявності різниці тиску на початку і в кінці судини. Ця різниця тисків створюється роботою серця.

Кровоносна система – це складна замкнута система еластичних трубок різного діаметру (аорта, артерії, артеріоли, капіляри, вени). Від серця кров рухається по аорті – еластичній трубці з м'язової тканини. Чим далі від серця, тим



більше розгалужуються судини, відсилаючи в усі органи свої розгалуження – артерії. Діаметр судин зменшується з віддаленням від серця. У тканинах органів артерії розгалужуються на дрібні судини – артеріоли, які дають початок величезній кількості волосяних ємностей – капілярів.

Таблиця 4.3

Швидкість і тиск крові в судинах

Судини	Швидкість, $10^{-2} \frac{m}{c}$	Тиск (понад атмосферного), мм. рт. ст.
Аорта: висхідна аорта, дуга аорти, спадна аорта	30 - 90 60 30	50 - 150
Артерії	20 - 50	80 - 20
Артеріоли	1 - 20	50 - 20
Капіляри	0,01 - 0,05	20 - 10
Венули	0.1 - 1	10 - 5
Вени	10 - 20	(-5) - (+5)

З таблиці 4.3 видно, що швидкість течії крові згідно (4.14) є

v , см/с

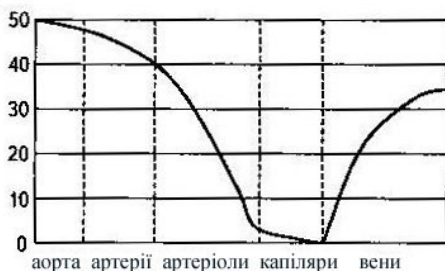


Рис. 4.14. Розподіл лінійної швидкості
кровотоку в різних ділянках
судинного русла

максимальною в аорті, оскільки остання є найвужчим місцем кровоносної системи. Далі швидкість течії крові знижується у напрямку від аорти до капілярів (рис. 4.14).

Сумарна площа капілярів у 500-600 разів перевищує площу поперечного перетину аорти, відповідно і швидкість течії крові

у них у 500-600 разів є меншою за швидкість в аорті. Значне зниження швидкості течії крові в капілярах сприяє покращенню обміну речовин між кров'ю і тканинами, що є ще однією



причиною того, що обмінні процеси, в основному, протікають у капілярній системі.

Стінка капіляра має особливу будову і нагадує сітку в вічком величиною $(30 - 40) \text{ \AA}$. Через ці вічка вільно проходять з капілярів в тканини молекули кисню та води, солі та інші поживні речовини. Капіляри, поступово збільшуючи свій діаметрі, переходять у венули. Венули з'єднуються у вени, які несуть кров до серця. Коло замикається. До місця старту кров повертається, в середньому, через 20 секунд, за добу здійснює 4200 обертів.

Кровоносна система як система замкнутих трубок характеризується своїм гідравлічним опором згідно (4.26). Артеріоли є основними регуляторами загального гідравлічного опору кровотоку. При великому фізичному навантаженні, коли витрата Q крові підвищується у декілька разів, тиск крові підвищується у меншій пропорції через підвищену пропускну спроможність артеріол.

Враховуючи, що внутрішні радіуси аорти r_{aop} , артерій r_{art} , артеріол r_{aol} і капілярів r_{kap} відносяться як:

$$r_{aop} : r_{art} : r_{aol} : r_{kap} = 3000 : 500 : 7 : 1,$$

то, згідно з формулою для гідравлічного опору, мінімальний гідравлічний опір має аорта, а максимальний – капіляри. Однак, оскільки більшість судин включені в рух крові паралельно, то сумарний опір певної ділянки судинної системи менший, в порівнянні з опором окремої судини. Завдяки великій кількості капілярів, сумарний опір капілярної мережі є меншим за сумарний опір артеріол і, тим більше, аорти. Таким чином, найбільший гідравлічний опір

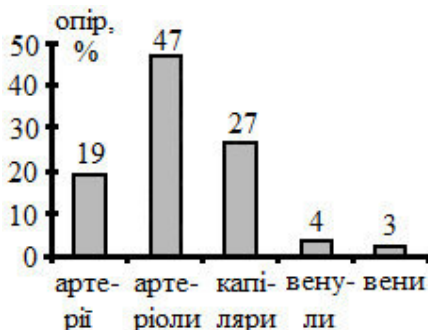


Рис. 4.15. Співвідношення гідравлічних опорів різних частин судинної системи (100% – гідравлічний опір всієї судинної системи)



серед всіх ділянок судинної системи має сукупність артеріол (рис. 4.15). Зміна їх зазору відіграє головну роль у регуляції тиску крові.

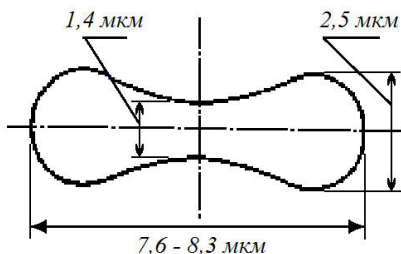


Рис. 4.16. Геометричні розміри еритроцита.
Вид збоку

для дорослої людини маса крові складає до 7% від її маси. Концентрація еритроцитів в крові становить $n_{ep} = (4 - 6) \cdot 10^6 \text{ мм}^{-3}$. За цим показником вона набагато перевищує концентрацію лейкоцитів та тромбоцитів. Тому наближено кров можна вважати з точки зору механічних властивостей суспензією еритроцитів у плазмі. В зв'язку з цим,



Рис. 4.17. Агрегація еритроцитів в крові.

кров є не ньютонівською рідиною. Геометрично еритроцити є мікроскопічними подвійно ввігнутими дисками діаметрами рівними приблизно 8 мкм, товщиною в центрі біля 1,4 мкм і на периферії – біля 2 мкм (рис. 4.16). Еритроцити складаються з тонкої мембрани товщиною $(70-100)\text{Å}$, заповненої концентрованим розчином гемоглобіну. У нерухомій крові еритроцити накладаються один на одного, утворюючи так звані «монетні стовпчики», з 6-8 еритроцитів (рис. 4.17).

Гематокритом (Ht) називається відношення загального об'єму еритроцитів (V_{ep}) до об'єму крові ($V_{кр}$):



$$Ht = \frac{V_{ep}}{V_{кр}}. \quad (4.35)$$

Для здорових дорослих жінок $Ht = (0,41 - 0,43)\%$, для здорових дорослих чоловіків – $Ht = (0,44 - 0,46)\%$.

Динамічна в'язкість крові становить $\eta = (4 - 6) \text{ мПа} \cdot \text{с}$, при різноманітних патологіях вона може змінюватись в широких межах від $\eta = 1,7 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ (при анемії – мало еритроцитів в крові) до $\eta = 22,9 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ (при поліцитемії – багато еритроцитів в крові). Математично залежність в'язкості крові від гематокриту можна приблизно представити у вигляді

$$\eta = \eta_0 e^{2 \cdot Ht}, \quad (4.36)$$

де η_0 – в'язкість плазми.



При протіканні крові по капілярах агрегація еритроцитів падає, вони деформуються і в'язкість крові зменшується (рис. 4.18). Якщо представити кров, що рухається по судині, як суміш двох рідин – плазми біля стінок судини, і однорідної суспензії еритроцитів у центрі, то, згідно розрахунків, радіус серцевини складатиме $(R - 0,76r)$, де R – внутрішній радіус судини, r – радіус еритроцита. Дуже тонкий шар плазми поблизу стінки капіляра відіграє роль мастила. Завдяки цьому опір руху еритроцитів зменшується. Ефект зменшення в'язкості крові в дрібних судинах з діаметром $d < 500 \text{ мкм}$ за рахунок деформації еритроцитів і орієнтації їх вздовж осі судини носить



Рис. 4.19.
Деформація
еритроцита в капілярі



назву **феномену сігма або ефекту Фареуса – Ліндквіста**.

Еритроцити характеризуються високою еластичністю. Завдяки своїй формі подвійно ввігнутого диску, вони можуть сильно деформуватися по різних осях (рис. 4.19). Деформуючись, еритроцити можуть просуватися один за одним у капілярах діаметром всього 3 мкм. Саме в таких тонких капілярних судинах і відбувається газообмін між кров'ю і тканинами. Така висока еластичність еритроцитів покращує обмінні процеси і знижує в'язкість крові. Завдяки відносно невисокій в'язкості крові, в системі мікроциркуляції знижуються навантаження на серце. При деяких патологічних станах еластичність еритроцитів зменшується і, як наслідок, – погіршується кровообіг.

В'язкість різних речовин приведена в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4

Динамічна в'язкість різних речовин

Речовина	Повітря	Вода		Гліцерин	Кр ов	Плазма
Температура , °C	20	20	100	20	36	36
Динамічна в'язкість, мПа·с	0,018	1	0,3	5	4 - 6	1,5

Оскільки кров не ньютонівська рідина, то її в'язкість

залежить від багатьох

параметрів: градієнта

швидкості крові

(dv/dx) , її температури

(T), гематокриту (Ht),

геометричних

параметрів судин –

радіуса (r), довжини (l):

$$\eta = \eta\left(\frac{dv}{dx}, T, Ht, r, l\right).$$

Зокрема, із збільшен-

ням градієнта швидкості

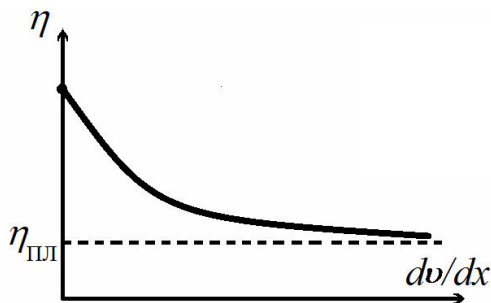


Рис. 4.20. Залежність в'язкості крові від градієнта швидкості



її в'язкість η зменшується по експоненціальній залежності до в'язкості плазми $\eta_{пл}$, яку можна вважати ньютонівською рідиною (рис. 4.20).

Температурна залежність в'язкості крові складна і її приблизно можна виразити експоненціальною залежністю

$$\eta = a \cdot e^{b/T}, \quad (4.37)$$

де a і b – константи, T – абсолютна температура.

В середньому, збільшення температури крові на 1°C приводить до зменшення її в'язкості на 2%.

Розглянемо модель кровоносної системи у вигляді насоса (серця), який перекачує рідину (кров) по великій кількості трубок (судин) різного діаметру (рис. 4.21). Насос має вигляд еластичної груші, яка ритмічно стискується, подаючи рідину через клапани в систему трубок. При зменшенні об'єму груші

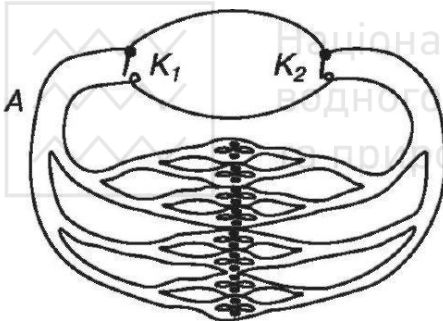


Рис. 4.21. Модель судинної системи

(скороченні лівого шлуночка) відкривається лівий клапан K_1 і рідина виштовхується в трубку A великого діаметру (аорту). Робоча фаза виштовхування серцем крові в аорту (скорочення серцевого м'язу) називається *систолою*.

Об'єм крові, що виштовхується в аорту при одному скороченні серця, називається *ударним об'ємом*, який складає (60-70) мл. Завдяки еластичності стінок аорти її об'єм збільшується і вона приймає всю рідину, яку виштовхнув насос. Після цієї фази клапан K_1 закривається. Тиск в аорті (*систолічний артеріальний тиск*, САТ) підвищується. Завдяки поступовому скороченню стінок аорти підвищення тиску поширюється вздовж всієї артеріальної судинної системи і рідина проштовхується в судини меншого діаметру. Поступово тиск в судинах зменшується до величини, яка називається *діастолічним артеріальним тиском* (ДАТ), і рідина в кінці циклу через впускний клапан K_2 попадає в правий шлуночок серця.



Величина швидкості пульсової хвилі v_n у великих судинах залежить від їх розмірів і механічних властивостей тканини стінок і визначається за формулою Моенса - Кортевега

$$v_n = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}, \quad (4.38)$$

де E – модуль Юнга стінки судини, h – її товщина, ρ – густина стінки судини, d – внутрішній діаметр судини.

На рис. 4.22 приведено два цикли пульсової хвилі в плечовій артерії.

З (4.38) видно, що зі збільшенням жорсткості судини і товщини її стінки швидкість пульсової хвилі зростає. Так, в аорті вона дорівнює (4-6) м/с, в артеріях м'язового типу – (8-12) м/с. В венах, які більш еластичні, швидкість пульсової хвилі менша і, наприклад, в порожнистій вені складає 1 м/с. Із приведених даних видно, що швидкість пульсової хвилі набагато більша лінійної швидкості крові, яка навіть при спокійному стані людини в аорті не перевищує 0,5 м/с.

З віком еластичність судин людини знижується (модуль Юнга зростає), а швидкість пульсової хвилі росте. Вона зростає і зі збільшенням тиску. При підвищеному тиску судина дещо розтягується, стає більш «напруженою» і для її подальшого розтягу потрібне більше зусилля.

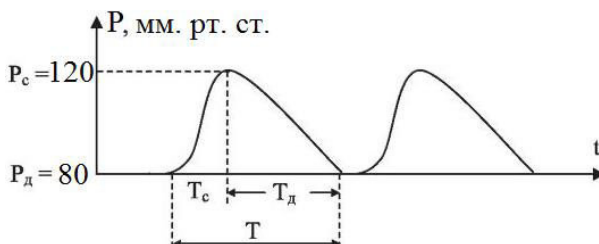


Рис. 4.22. Зміна артеріального тиску в плечовій артерії: T – тривалість серцевого циклу; T_c – тривалість систоли; T_d – тривалість діастолі; P_c – максимальний САТ; P_d – мінімальний ДАТ

Форма пульсових коливань і їх характеристик є відображенням роботи серця і стану судинної системи. Тому їх реєстрація на різних ділянках судинної системи і наступний



аналіз мають діагностичне значення.

Одну з перших моделей кровотоку запропонував О. Франк, який теоретично розвинув ідею про те, що артерії «запасують» кров під час систоли і виштовхують її в дрібні судини під час діастоли (рис. 4.23). В даній моделі зроблені наступні припущення:

1. Всі великі судини об'єднані в один резервуар з високо еластичними стінками, об'єм якого пропорційний тиску. Гідравлічним опором резервуара нехтують.
2. Мікросудини об'єднані в одну жорстку трубку. Гідравлічний опір такої жорсткої трубки великий; еластичністю її нехтують.
3. Еластичність і опір для кожної групи судин постійні.
4. Перехідні процеси встановлення руху крові не розглядаються.
5. Закриття та відкриття аортального клапана визначаються «зовнішнім механізмом», який пов'язаний з активною діяльністю серця.

Об'єм аорти в момент часу t запишемо у вигляді

$$V(t) = V_0 + c \cdot p(t), \quad (4.39)$$

де V_0 – об'єм резервуару в момент часу $t=0$, $p(t)$ – тиск крові в резервуарі, c – коефіцієнт пружності, який характеризує еластичність стінок резервуару.

Продиференціюємо (4.37) по часу

$$\frac{dV}{dt} = c \cdot \frac{dp}{dt}. \quad (4.40)$$

У (ПР) – пружний резервуар (артерії) через клапан K_1 надходить кров із серця, витрата якої дорівнює Q . Вона змінює об'єм резервуару на величину dV/dt і відтікає з витратою Q_0 через клапан K_2 в периферичну систему (артеріоли, капіляри). Звідси

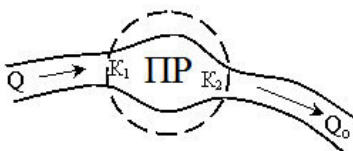


Рис. 4.23. Модель кровотоку Франка

$$Q = \frac{dV}{dt} + Q_0. \quad (4.41)$$

Скористаємось формулою Пуазейля для витрати Q_0

$$Q_0 = \frac{p - p_g}{X}, \quad (4.42)$$



де p_e – тиск крові після клапан K_2 (венозної крові), $X = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$ – гідрравлічний опір жорсткої трубки на виході з резервуару, l – довжина трубки, R – її радіус, η – в'язкість крові. Можна вважати $p_e \approx 0$ (див. табл. 4.4). Тоді підставивши (4.38) і (4.40) в (4.39) отримаємо

$$Q = c \cdot \frac{dp}{dt} + \frac{p}{X}. \quad (4.43)$$

При закінченні систоли кров не поступає в резервуар ($Q = 0$) поширюється в венотній системі. Звідси з (4.43) можна отримати

$$\frac{dp}{p} = -\frac{dt}{c \cdot X}. \quad (4.44)$$

Інтегруючи даний вираз, отримаємо

$\ln p = -\frac{t}{c \cdot X} + A$. Константу A знайдемо з початкових умов: $p(t=0) = p_c$. Тут p_c – систолічний артеріальний тиск. Останнє рівняння перетворюється в

$$\ln \frac{p}{p_c} = -\frac{t}{c \cdot X}, \quad (4.45)$$

або

$$p = p_c \cdot e^{-\frac{t}{c \cdot X}}. \quad (4.46)$$

Підставивши (4.44) в (4.40) при умові $p_e \approx 0$ отримаємо

$$Q_0 = \frac{p_c}{X} \cdot e^{-\frac{t}{c \cdot X}} = Q_c \cdot e^{-\frac{t}{c \cdot X}}, \quad (4.47)$$

де $Q_c = \frac{p_c}{X}$ – витрата крові з пружного резервуару після клапана K_2 в кінці систоли (початку діастоли).

Хоча дана модель грубо описує реальний тиск крові, вона проста і правильно відображає процес до кінця діастоли.



Аеродинаміка – це розділ гідроаеродинаміки, в якому вивчаються закони руху газового середовища і його взаємодії з твердими тілами в ньому. З точки зору біомеханіки в аеродинаміці інтерес викликають закони руху птахів і комах.

Крило птаха або комахи має обтічну форму із закругленим переднім краєм та вузьким заднім (рис. 4.24). При їх горизонтальному польоті молекули повітря обтікають крило, але завдяки вигнутій його верхній поверхні вони проходять за одиницю часу шлях більший, ніж ті молекули, що обтікають його нижню, більш плоску поверхню, і отже мають більшу швидкість руху. Несиметричне обтікання крила спричинює появу циркуляційного потоку навколо контуру крила, який на опуклій площині спрямований в бік течії повітря, що призводить до збільшення швидкості руху повітря, а на ввігнутій – проти течії, що супроводжується зменшенням швидкості руху повітря. Згідно рівняння Бернуллі (4.16), якщо швидкість повітряного потоку більша, то тиск середовища менший, і навпаки. Завдяки різниці тисків між верхньою та нижньою площинами крила птаха і комахи виникає *піднімальна сила*, що спрямована перпендикулярно до напрямку швидкості руху тіла. Крім піднімальної сили на них діють сила тяжіння, сила їх м'язової тяги та сила лобового опору повітря, яка діє протилежно напрямку швидкості руху тіла (рис. 4.24). Взаємне відношення цих сил і визначають аеродинамічні характеристики



Рис. 4.24. Сили, які діють на крило птаха



птахів і комах. У процесі польоту птах здатний змінювати кут атаки – кут між хордою крила та напрямком потоку повітря, причому змах крила вниз характеризується збільшенням кута атаки, що збільшує піднімальну силу.

Таблиця 4.5

Навантаження на крила птахів

Назва	Маса, г	Площа поверхні крил, см^2	Навантаження на крила, $\text{кг}/\text{м}^2$
Жайворонок	34	220	1,59
Ворона	615	2045	3,01
Качка	925	834	11,00
Ластівка	160	123	12,9
Колібри	10	20	5,0
Альбатрос	8502	6250	13,60

Відомо, що для літаючих тварин відносна потужність м'язів зростає, в той час як маса тіла зменшується. Це відбувається тому, що потужність м'язів змінюється пропорційно площі їх поперечного перерізу, а об'єм (а значить, і маса) – як куб довжини. Але, з іншого боку, маленький птах або комаха повинні долати більший опір повітря, яке обтікає його поверхню, зумовлений маленьким тілом і в'язкістю повітря.

В результаті відносного зростання потужності м'язів, з однієї сторони, і збільшення опору повітря, з іншої, муха може підняти в повітря 200 відсотків власної маси, птах – 100.

Таблиця 4.6

Навантаження на крила комах

Назва	Вага, г	Площа поверхні крил, см^2	Навантаження на крила, $\text{кг}/\text{м}^2$
Муха	18	20	1,0
Метелик	50	860	0,06
Москіт	1,3	8	0,16
Джміль	2100	116	18,0
Оса	85	68	1,25

Корисно привести значення «ефективності» дії крил, тобто маси, яку здатна підняти в повітря 1 м^2 поверхні крила.



З таблиці 4.5 видно, що маленькі птахи мають відносно невелике навантаження на крила. Великі, такі як, наприклад, альбатрос, незважаючи на великий розмах крил, на 1 м^2 площі поверхні крила піднімають приблизно (11-19) кг.

Величина навантаження крил для комах схожа з навантаженням для птахів всупереч припущенням, судячи із зовнішнього вигляду, що навантаження їх крилець дуже велике.

Як видно з таблиці 4.6, крім джмеля, навантаження на крила у комах менше, ніж у птахів.

4.8. Біологічна та медична апаратура гемодинаміки

4.8.1. Вимірювання тиску крові

Знання тиску крові людини відіграє велику роль в діагностуванні багатьох захворювань. САТ і ДАТ можуть бути безпосередньо вимірними за допомогою голки або спеціальної трубки – катетера, введених в кровоток певної артерії людини і з'єднаних з манометром. На практиці цей болісний метод не використовується, а застосовується безкровний *метод Короткова*, запропонований в 1905 році і реалізований в приладі, який називається *сфігмоманометр*. Суть методу полягає в наступному. Між плечем і плечовим суглобом накладається манжета, в яку за допомогою гумової груші нагнітають повітря, тим самим змінюючи тиск в манжеті, що фіксується манометром (рис. 4.25). Одночасно з цим за допомогою фонендоскопа прослуховуються тони і шуми в плечовій артерії в області ліктьового згину. Повітря нагнітається в манжету доти, доки за допомогою фонендоскопу не буде чути звуків від протікаючої крові в артерії. Це означає,



Рис. 4.25. Сфігмоманометр
Короткова для вимірювання тиску
в плечовій артерії



що тиск в манжеті став більшим систолічного артеріального тиску (САТ) і кров по артерії не проходить. Повільно випускаючи повітря з манжети, знижують в ній тиск, а значить – і тиск на артерію. В той момент, коли тиск стане трохи меншим САТ, кров окремими порціями почне проходити по артерії і за допомогою фонендоскопу починають прослуховуватись окремі тони. Вони обумовлені вібрацією стінок артерії безпосередньо за манжетою під дією потужних поштовхів крові, які проходять крізь стиснуту манжетою ділянку судини тільки в моменти систоли серця. Значення тиску, який в цей момент фіксується манометром, приймають за систолічний (верхній). При подальшому пониженні тиску в манжеті тони починають доповнюватись шумами. Ці шуми обумовлені турбулентним рухом крові через частково стиснуту манжетою ділянку артерії. Шуми швидко згасають при досягненні кров'ю ламінарного току. Повна відсутність шумів досягається в момент повного відкриття стиснутої ділянки артерії. Значення тиску, який фіксується манометром в цей момент часу приймають за діастолічний (нижній).

У здорових людей в віці від 15 до 50 років САТ, визначений за методом Короткова складає (105 – 120) мм. рт. ст., а ДАТ – (60 – 80) мм. рт. ст. З віком, як правило, тиск зростає.

4.8.2. Вимірювання в'язкості крові

Розділ фізики, який вивчає в'язкість рідин називається *віскозиметрією*, а прилади – віскозиметрами. При дослідженнях в'язкості рідин використовують наступні види віскозиметрів:

1. *Ротаційний віскозиметр Куетта*. У ньому рідина знаходиться між двома циліндрами (рис. 4.26). Зовнішній циліндр знаходиться на осі двигуна і може обертатися з постійною кутовою швидкістю ω .

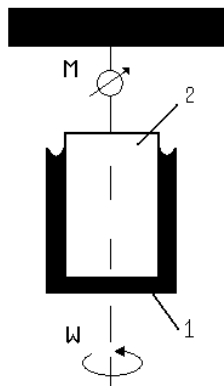


Рис. 4.26. Будова ротаційного віскозиметра:
1 – зовнішній циліндр,
2 – внутрішній циліндр



Внутрішній – нерухомий і підвішений на спіральній пружині. При обертанні зовнішнього циліндра за рахунок в'язкості рідини внутрішній циліндр повертається на деякий кут. За цим кутом можна визначити момент в'язких сил M , прикладених до внутрішнього циліндра.

Цей метод дозволяє вимірювати в'язкість рідин в межах $(1-10^5) \text{ Па} \cdot \text{с}$, тобто змащувальних мастил, розплавлених силікатів і металів, в'язких лаків і клеїв, крові, тощо.

В'язкість рідини визначають за формулою

$$\eta = \frac{(R_1 - R_2)}{2\pi R_2^3} \cdot \frac{M}{l\omega}, \quad (4.48)$$

де R_1 і R_2 – радіуси зовнішнього і внутрішнього циліндрів, l – висота рідини між стінками циліндрів, M – момент сил, прикладених до внутрішнього циліндра, ω – кутова швидкість обертання зовнішнього циліндра.

Чим більша ω , тим на більший кут повернеться внутрішній циліндр. З урахуванням пружності пружини кругова шкала дозволяє вимірювати в'язкість рідини при різних швидкостях обертання, тобто при різних значеннях градієнта швидкості dv/dz в рідині між циліндрами, що важливо для визначення η не ньютонівських рідин.

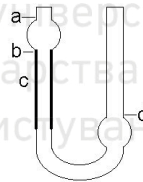


Рис. 4.27. Будова капілярного віскозиметра:
a, b, d – мітки,
c – капіляр

2. *Капілярний віскозиметр Оствальда.* Принцип роботи такого віскозиметра базується на вимірюванні часу протікання через капіляр рідини відомої маси під дією сили тяжіння при певному перепаді тисків.

В одне із колін віскозиметра (рис. 4.27) до мітки d наливається рідина з відомою густиною ρ_0 і в'язкістю – η_0 (наприклад, вода). За допомогою гумової груші, яка приєднується до іншого коліна, рідина засмоктується до мітки a . Після цього груша від'єднується і секундоміром засікається час протікання рідини t_0 між мітками a і b . Такі ж вимірювання



проводять і для досліджуваної рідини з густиною ρ_x , визначаючи час її протікання t_x . Для еталонної рідини з відомою в'язкістю рівняння Пуазейля (4.26) можна записати у вигляді

$$Q_0 = \frac{V}{t_0} = \frac{\pi R^4}{8\eta_0} \cdot \frac{\Delta p_0}{l}. \quad (4.49)$$

Для досліджуваної рідини можемо аналогічно записати

$$Q_x = \frac{V}{t_x} = \frac{\pi R^4}{8\eta_x} \cdot \frac{\Delta p_x}{l}, \quad (4.50)$$

де V – об'єм рідини, що перетікає, Δp_0 , Δp_x – різниця тисків на кінцях капіляра для еталонної і досліджуваної рідини відповідно, η_0 , η_x – коефіцієнти в'язкості еталонної і досліджуваної рідини відповідно, t_0 , t_x – час протікання еталонної і досліджуваної рідини через капіляр довжиною l і радіусом R .

Так як V в цих умовах для обох рідин однаковий, то, з (4.49) і (4.50) не важко отримати

$$\frac{\pi R^4}{8\eta_0} \cdot \frac{\Delta p_0}{l} t_0 = \frac{\pi R^4}{8\eta_x} \cdot \frac{\Delta p_x}{l} t_x. \quad (4.51)$$

Оскільки $\Delta p_0 = \rho_0 g l$ і $\Delta p_x = \rho_x g l$, то підставивши ці значення в (4.51), одержимо рівняння для визначення відносної в'язкості

$$\eta_x = \eta_0 \frac{\rho_x t_x}{\rho_0 t_0}. \quad (4.52)$$

Капілярні віскозиметри використовуються в основному для вимірюванні в'язкості крові і можуть застосовуватись в широкому діапазоні від $10^{-5} \text{ Па} \cdot \text{с}$ (гази) до $10^4 \text{ Па} \cdot \text{с}$ (консистентні мастила).

3. *Медичний віскозиметр Гесса.* За будовою він є капілярним віскозиметром, призначеним для вимірювання коефіцієнта в'язкості дуже невеликого об'єму рідини. Віскозиметр Гесса складається з двох градуйованих піпеток 1 (для забору крові) і 2



(для забору води), закріплених на загальній підставці (рис. 4.28). Усередині піпеток проходять капіляри строго однакових діаметрів. Друга піпетка з'єднана з краном 3. Після того як в

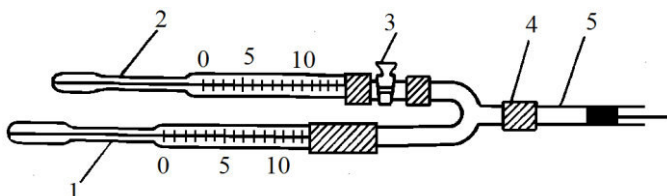


Рис. 4.28. Віскозиметр Гесса: 1 – піпетка для крові, 2 – піпетка для води, 3 – кран, 4 – скляний трійник з гумовою трубкою, 5 – скляна трубка з поршнем

дану піпетку набрана вода, що служить еталонною рідиною, кран закривається, що дозволяє набрати досліджувану рідину в першу піпетку, не змінюючи рівня набраної води. Обидві піпетки з'єднані з трійником 4 гумовими трубками, від якого йде інша гумова трубка, яка під'єднана до скляного стерильного наконечника з поршнем 5.

Відкривши кран, піпетку 2 занурюють в дистильовану воду відомої температури і набирають воду до нульової відмітки, після чого кран закривають. Піпетку 1 занурюють в досліджувану кров і поршнем заповнюють її до нульової відмітки. Відкривши кран і розмістивши обидві піпетки з капілярами горизонтально, поршнем забезпечують одночасний рух рідин. Через деякий час фіксують по шкалах відстані x_0 , яка пройшла вода і x , яку пройшла кров. В'язкість крові визначають за формулою

$$\eta = \eta_0 \frac{x_0}{x}. \quad (4.53)$$

Точність вимірювань невисока і становить близько 4%.

4. *Віскозиметр Стокса*. Він базується на використанні формули (4.31) при рівномірному русі ідеальної кульки радіусом r у в'язкому середовищі. В циліндр з досліджуваною рідиною опускається кулька відомого радіусу, після чого на деякій відстані від поверхні рідини (для крові достатньо 5 см) – настання рівномірного руху, секундоміром засікається час t її опускання на висоту h . Згідно (4.34) в'язкість рідини визначається



$$\eta = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 g (\rho_{кул} - \rho_{pid}) t}{h}, \quad (4.54)$$

оскільки $l = vt$.

Даний метод можна використовувати при вимірюванні **швидкості осідання еритроцитів (ШОЕ)**, за допомогою якого можна визначити існування запального процесу в організмі. Еритроцити рухаються у плазмі крові. Оскільки еритроцити мають дископодібну форму (рис. 2.12) і мають більшу густину ніж плазма, то швидкість їх осідання (ШОЕ) можна визначити наближено за формулою Стокса.

З (4.34) видно, що ШОЕ v залежить від в'язкості крові η обернено пропорційно

$$v \sim \frac{1}{\eta}. \quad (4.55)$$

Використавши залежність в'язкості крові від температури (4.37) отримаємо

$$v = \frac{1}{a} e^{-b/T}. \quad (4.56)$$

Для двох різних температур тіла, використавши отримаємо

$$\frac{v_2}{v_1} = e^{-b\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)}. \quad (4.57)$$

Прологарифмувавши останній вираз отримаємо

$$\ln v_2 - \ln v_1 = b \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right). \quad (4.58)$$

З (4.58) видно, що за значенням ШОЕ можна визначити наявність запальних процесів в організмі, при яких температура локально зростає. Якщо температура тіла збільшується, в'язкість крові зменшується, а швидкість осідання еритроцитів збільшується. Збільшення швидкості осідання еритроцитів зумовлюється запальними процесами, гострими інфекційними хворобами, хронічними локалізованими інфекціями (абсцесами), травмами, злоякісними пухлинами, станом вагітності. Особливо процедура вимірювання ШОЕ доцільна у разі таких



захворювань, як темпоральний артрит, коли значення ШОЕ досягають 100 мм/год .

На практиці для визначення ШОЕ застосовують **метод Вестергрена**: 2 мл венозної крові разом з $0,5 \text{ мл}$ цитрату Натрію (антикоагулянт – речовина, яка не дає крові згортатись) набирають у циліндричну трубку, заповнюючи її до рівня 200 мм , і поміщають вертикально в штатив, при цьому пробірка може зберігатися до 2 годин при кімнатній температурі і до 6 годин у холодильнику; вимірювання проводиться протягом години, а при необхідності – протягом двох годин; осідання еритроцитів у сучасній пробірці на 2 мм за годину відповідає значенню ШОЕ 1 мм/год (тобто сучасна модифікація методу масштабує і має похибку $0,5 \text{ мм/год}$ – оскільки візуально можна зняти показники з точністю до приблизно половини міліметрової поділки). Через 1 год вимірюють відстань від верхньої межі стовпчика плазми до верхньої межі стовпчика еритроцитів. Це відстань, виражене в мм/год і є показником ШОЕ. Нормальні показники ШОЕ наступні: $(7 - 12) \text{ мм/год}$ для жінок і $(3 - 9) \text{ мм/год}$ для чоловіків.

4.8.3. Інфузійні прилади

Інфузійні прилади – це прилади, які використовуються для введення внутрішньовенно або під шкіру різноманітних лікарських розчинів для корекції складу позаклітинних та внутрішньоклітинних рідин. До них, в першу чергу, відносяться **шприци** та системи для внутрішньовенного крапельного внесення (**крапельниці**).

Робота шприца (рис. 4.29) базується на створенні надлишкового тиску в голці, введеній в кровоток, в порівнянні з тиском крові. Цей надлишковий тиск Δp створюється механічною дією на поршень шприца, що забезпечує вприскування розчину шприцом в кров. Розрахунки показують, що швидкість руху поршня u , витрата розчину Q і швидкість його витікання з голки v визначаються із співвідношень



Рис. 4.29. Робота шприца

$$u = \frac{\pi \Delta p d^4}{128 \eta l S}, \quad Q = uS, \quad v = \frac{4Q}{\pi d^2}, \quad (4.59)$$

де d – діаметр голки, l – її довжина, S – площа поперечного перерізу поршня, η – коефіцієнт в'язкості розчину.

Іншим приладом для внутрішньовенного вливання є крапельниця (рис. 4.30), яка дозволяє вводити рідину самопливом за рахунок різниці тисків, створюваної при підйомі камери з препаратом на певну висоту (~ 60 см). Формули (4.59) можна застосовувати і для крапельниці, якщо замінити величину S на площу перерізу трубки, а u – на швидкість руху рідини в ній.



Рис. 4.30. Робота крапельниці

4.8.4. Центрифуги

Центрифугування – це процес розділення (сепарації) неоднорідних рідких середовищ, що не змішуються, або дисперсних систем (наприклад, частинок в рідині) у відцентровому полі. Здійснюється центрифугування за допомогою центрифуги (рис. 4.31), основною частиною якої є барабан (кошик) з суцільними (дірчастими) стінками, що



обертається з великою швидкістю на вертикальному (горизонтальному) валу. Перша центрифуга була сконструйована у 1877 році у Німеччині Лефельдом.

Вздовж вертикалі на частинку, занурену в рідину, діють сила Архімеда та сила тяжіння. Результуюча сила, яка діє на частинку вздовж осі ОУ

$$F_p = mg - F_A = \rho_m Vg - \rho_p Vg = (\rho_m - \rho_p) \cdot Vg, \quad (4.60)$$

де ρ_m – густина частинки, ρ_p – густина рідини, V – об’єм

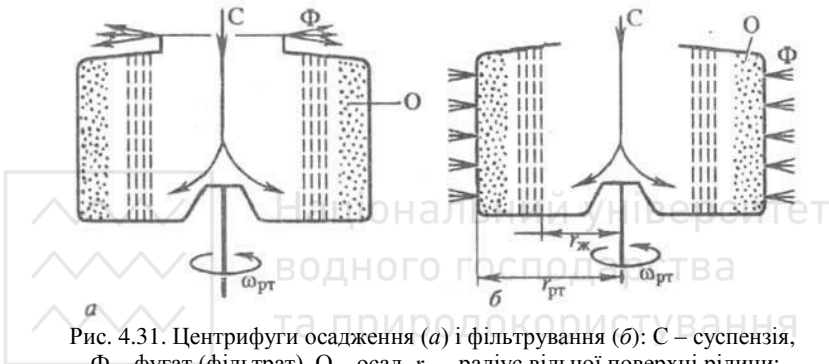


Рис. 4.31. Центрифуги осадження (а) і фільтрування (б): С – суспензія, Ф – фугат (фільтрат), О – осад, $r_{ж}$ – радіус вільної поверхні рідини;

$r_{рт}$ – радіус обертання стінки центрифуги; $\omega_{рт}$ – частота обертання

частинки. Отже, чим більша густина частинки в порівнянні з густиною рідини, тим більшою буде результуюча сила F_p і тим скоріше в гравітаційному полі частинка осяде на дно.

Нехай частинка об’ємом V рухається в центрифугі, заповненій рідиною навколо вертикальної осі на віддалі r від неї. Система відліку, пов’язана із центрифугою, є неінерціальною. В таких системах відліку виникають *сили інерції*, направлені по осі ОХ

$$\vec{F}_{in} = -m\vec{a}, \quad (4.61)$$

де \vec{a} – прискорення неінерціальної системи відліку відносно інерціальних. У випадку обертальних систем це прискорення називається доцентровим ($a_d = \omega^2 r$), а сили інерції, спрямовані від осі обертання, називаються *відцентровими*. В рухомій

центрифугі дію відцентрових сил зазнають як і тверді завислі частинки, так і частинки самої рідини, що створює передумову сепарації частинок за фракціями. Наприклад, завдяки цим ефектам відбувається просушування білизни в барабані пральної машини.

Якщо в центрифугі є рідина, то відцентрові ефекти спричиняють виникнення в рідині згідно (4.16)

додаткового динамічного тиску $p = \frac{\rho_p v^2}{2}$. Оскільки

$$v = \omega_{PT} \cdot r, \text{ то}$$

$$p = \frac{\rho_p \omega_{PT}^2 r^2}{2}. \quad (4.62)$$

Розглянемо завислу в рідині тверду частинку, маленьку за розмірами. Для спрощення будемо вважати її форму у вигляді паралелепіпеда з площею поперечного перерізу ΔS , як показано на рис. 4.32. На грані 1 і 2 такої частинки будуть діяти сили, спричинені динамічним тиском. Їх рівнодійна, направлена по осі OX і дорівнює

$$\begin{aligned} F_{e1} = F_2 - F_1 &= \left(\frac{\rho_p \omega_{PT}^2 (r + \Delta r)^2}{2} - \frac{\rho_p \omega_{PT}^2 r^2}{2} \right) \Delta S = \\ &= \frac{\rho_p \omega_{PT}^2 \Delta S}{2} (r^2 + 2r\Delta r + \Delta r^2 - r^2) \end{aligned} \quad (4.63)$$

Якщо $\Delta r \ll r$, то можна знехтувати доданком Δr^2 і отримати

$$F_{e1} = \rho_p \omega_{PT}^2 r \Delta r \Delta S = \rho_p V \omega_{PT}^2 r, \quad (4.64)$$

оскільки $\Delta r \Delta S = V$ – об'єм частинки.

Згідно (4.61) відцентрова сила інерції, що діє на тверду частинку дорівнює

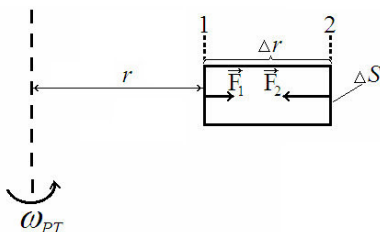


Рис. 4.32. Обертання частинки в центрифугі



$$F_{in} = \rho_m V \omega_{PT}^2 r. \quad (4.65)$$

Отже, у рухомій центрифугі рівнодійна сил, що діють на частинку в горизонтальному напрямі визначається виразами (4.64) і (4.65)

$$F_{p1} = F_{in} - F_{e1} = (\rho_m - \rho_p) \cdot V \omega_{PT}^2 r. \quad (4.66)$$

Якщо $\rho_m > \rho_p$, то частинка буде рухатись в рідині від осі обертання, якщо $\rho_m < \rho_p$, то – до осі.

Насправді, оскільки на частинку діють дві результуючих сили: вздовж осі ОУ – F_p і вздовж осі ОХ – F_{p1} , то частинка буде рухатись по деякій гвинтовій лінії, що сходиться, або розходиться від осі в залежності від співвідношення величин ρ_m і ρ_p .

Величина $Q = \frac{F_{p1}}{F_p}$ називається *фактором розділення* центрифуги. З (4.60) і (4.66) отримаємо

$$Q = \frac{(\rho_m - \rho_p) \cdot V \omega_{PT}^2 r}{(\rho_m - \rho_p) \cdot V g} = \frac{\omega_{PT}^2 r}{g}. \quad (4.64)$$

В сучасних ультрацентрифугах кутова швидкість досягає значень $2\pi \cdot 10^3 \text{ рад/с}$, звідки при стандартних розмірах центрифуг з $r_{PT} = 0,1 \text{ м}$ отримуємо $Q \approx 4 \cdot 10^5$.

Ультрацентрифуги здатні розділити частинки за розміром менші 100 нм , завислі або розчинені в рідині. Вони знайшли широке застосування в медично-біологічних дослідженнях для розділення біополімерів, вірусів і субклітинних частинок.

Особливу групу представляють собою вузькоспеціалізовані медичні центрифуги, призначені для стандартних клінічних аналізів крові, наприклад, для визначення Ht .



Розділ 5. Біомеханіка дихання

Дихання – це сукупність процесів, що забезпечують надходження у внутрішні органи живих організмів кисню, використання його для окислювальних процесів, і видалення назовні вуглекислого газу. Процес дихання є досить складним, в ньому задіяні декілька систем та органів при їх одночасній взаємодії.

Головним органом, який забезпечує дихання людини є **легені**. Їх повітроносні шляхи представлені носоглоткою, гортанню, трахеєю. Легені є парним органом і їх умовно можна розділити на 3 системи:

- система каналів або трубок (бронхіальне дерево), по якому повітря досягає альвеол;
- система альвеол, де відбувається газообмін;
- кровоносна система легень.

Система бронхів (рис. 5.1) візуально нагадує систему гофрованих трубок. По мірі розгалуження бронхіального дерева діаметр бронхів зменшується, але їх кількість зростає. Кінцеві гілочки бронхів, які називають бронхіолами, мають діаметр $< 1\text{ мм}$, але їх кількість досягає декількох тисяч. Стінка бронхів складається з трьох шарів:

1. Внутрішній шар – слизовий. Особливістю даного слизового шару є наявність на поверхні ворсинок – «стовпа волосся», які створюють напрямлений рух слизу по поверхні, сприяючи механічному виведенню пилинок або інших мікроскопічних частинок діаметром від 2 до 10 $\mu\text{м}$ назовні. Цей механізм викидає «чужі» частинки зі швидкістю 16 мм/хв . Поверхня слизової завжди зволожена, містить антитіла та імунні клітини.

2. Середній шар – м'язово-хрящовий. Дана оболонка стінки бронха виконує роль механічного каркаса. Хрящові кільця

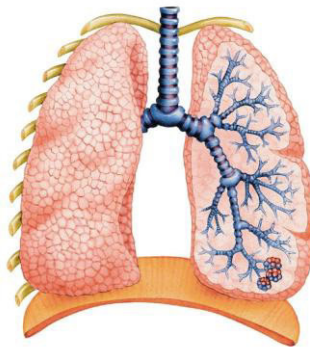


Рис. 5.1. Дихальна система людини



такого каркаса подібні до кілець гофрованого шланга. Хрящова тканина бронха перешкоджає зменшенню його діаметра при перепадах тиску повітря в легенях. Крім того, хрящові кільця, зв'язані гнучкою сполучною тканиною забезпечують мобільність і гнучкість бронхіального дерева. По мірі зниження діаметра бронхів в середній оболонці починає переважати м'язовий компонент. За допомогою гладкої м'язової тканини у легенях з'являється можливість регулювати потоки повітря, обмежувати поширення інфекції і чужорідних тіл.

3. Зовнішній шар – адвентиція. Ця оболонка забезпечує механічний зв'язок бронхіального дерева з оточуючими органами і тканинами. Складається з колагенової сполучної тканини.

Бронхіальне дерево отримало назву через свою подібність до перевернутого дерева. Початком повітряних шляхів бронхіального дерева є трахея – циліндрична трубка довжиною (11-13) см і діаметром (1,5-2,5) см, яка у своїй нижній частині роздвоюється на два головних бронхи, що направляють повітряні потоки кожен у свою легеню (праву і ліву). Всередині легені розгалуження продовжується на частинні бронхи (3 в лівій легені і 2 в правій), сегментарні, тощо. Повітряна система бронхіального дерева закінчується термінальними бронхіолами, які дають початок дихальній частині легені (у ній відбувається газообмін між кров'ю і повітрям легені).

Діаметр кожної термінальної бронхіоли не перевищує 1 мм, вона дає початок 13-16 дихальним бронхіолам, які в свою чергу дають початок дихальним ходам, що закінчуються альвеолами. В альвеолах відбувається основний газообмін.

Легені лише в місцях з'єднання з головними бронхами механічно прикріплені до навколишніх

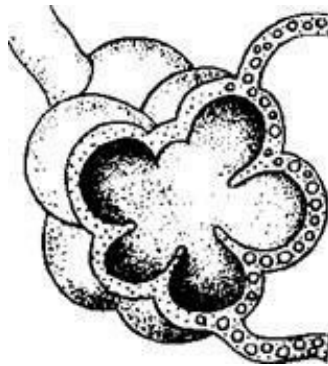


Рис. 5.2. Альвеольний мішечок



тканин. Решта їх поверхні не має механічного зв'язку з оточуючими органами. Легені розташовані в спеціальній порожнині грудної клітки товщиною (5-10) *мкм*, яка називається плевральною. Ця порожнина вистелена одношаровою слизовою тканиною – плеврою. Така ж тканина вистилає і саму зовнішню поверхню легені. Ці два листки слизових тканин можуть ковзати одна по одній завдяки спеціальному мастилу. При вдиху і видиху відбувається ковзання зовнішньої поверхні легенів по внутрішній поверхні грудної клітки і діафрагми.

Легенева альвеола виглядає як гроно винограду (альвеольний мішечок) (рис. 5.2) з діаметром однієї «виноградинки» 0,2 *мм* і товщиною стінки 0,04 *мм*. В легенях альвеол є близько 400 мільйонів. Площа внутрішньої поверхні альвеол змінюється більш ніж в 3 рази: при вдиханні повітря вона складає більше 120 *м²*, при видиханні – 40 *м²*. Площа поверхні альвеол більш ніж в 50 разів перевищує площу шкіри.

Оскільки альвеола має кулясту форму, то поверхневий натяг альвеолярних мембран, які встилають її внутрішню поверхню, створює в мембранах згідно (4.11) додатковий тиск Лапласа, який намагається зменшити радіус альвеол. При вдиханні об'єм альвеол збільшується завдяки роботі дихальних м'язів, тиск стає меншим атмосферного і повітря вільно заповнює альвеоли. При видиху діаметр альвеол зменшується, додатковий тиск в них збільшується, що, здавалось би, повинно було б ще більше зменшувати об'єм альвеол і перешкоджати наступному вдиху. Але цього не відбувається завдяки тому, що внутрішня поверхня альвеол покрита спеціальною органічною речовиною – **сурфактантом**. Дана речовина містить органічні складові, які значно зменшують коефіцієнт поверхневого натягу σ сурфактанта, причому σ залежить від товщини його плівки: при вдиханні вона більша, оскільки площа поверхні альвеоли більша і $\sigma = 0,05 \text{ Н/м}$, а при видиханні ця плівка товстіша і коефіцієнт поверхневого натягу сурфактанта знижується в 10-50 разів, приймаючи значення $\sigma = (0,001 - 0,005) \text{ Н/м}$. При цьому зменшується і додатковий тиск в альвеолах, що дає можливість здійснити наступний вдих. Отже, саме наявність сурфактанта з його унікальними поверхневими властивостями



перешкоджає повному спаданню альвеол при видиханні і забезпечує можливість дихання. Крім того, в сурфактанті знаходяться антитіла, імунні клітини, що забезпечують захисні функції, а також сурфактант перешкоджає проникненню в альвеолу крові. Завдяки сурфактанту розправляються легені при першому подиху новонародженого.

Внутрішня поверхня альвеол має тісний контакт з капілярами, що огортають альвеолу у вигляді сітки. Завдяки тому, що альвеола відділена від капіляра дуже тонким прошарком, є можливим активний газообмін між легеневою і кровоносної системами.

Через систему бронхів повітря поступає до альвеол, але воно вже достатньо зволожене і підігріте або охолоджене до температури тіла. Для полегшення даних термічних змін слизова трахеї має дуже густу сітку мікросудин. Слизова оболонка носа та гортані затримують більшість твердих частинок діаметром від 10 *мкм*, які поступають в них з повітрям. Частинки діаметром від 2 до 10 *мкм* виводяться трахеєю та бронхами. Найменші частинки до 2 *мкм* досягають альвеол, де вони втягуються стінками і виносяться лімфою.

Вентиляція легенів здійснюється внаслідок різниці тиску між альвеолярним і атмосферним повітрям. При вдиханні тиск в альвеолах знижується (за рахунок розширення грудної клітки) і стає нижчим атмосферного: повітря з атмосфери входить в повітроносні шляхи. При видиханні тиск в альвеолах наближається до атмосферного або навіть стає вищим нього (при форсованому видиханні), що відповідно призводить до видалення повітря з альвеол.

При складній системі повітроносних трубок різного діаметру рух повітря в них носить також складний характер від ламінарного до турбулентного з великими значеннями числа

Рейнольдса. Подібно до гідравлічного опору $X = \frac{8\eta l}{\pi R^4}$, витрату повітря в дихальних шляхах характеризують в'язким опором дихальних шляхів, який часто називають **резистансом** R :

$$R = \frac{\Delta P}{Q}, \quad (5.1)$$



де ΔP – різниця тисків на вході і виході елементу дихальних шляхів, Q – максимальна витрата повітря на вході і виході елементу дихальних шляхів. Максимальна величина Q при вдиханні називається піковим інспіраторним потоком, максимальна величина при видиханні – піковим експіраторним потоком.

Податливість (комплаєнс) визначається різницею тисків ΔP в легенях під час вдиху і видиху при введенні в них певного об'єму повітря V

$$C = \frac{V}{\Delta P}. \quad (5.2)$$

Резистанс дихальних шляхів визначається з

$$R = R_{\text{л}} + R_{\text{г}} + R_{\text{н}} + R_{\text{м}}, \quad (5.3)$$

де $R_{\text{л}}$ – опір тканини легенів, $R_{\text{г}}$ – опір верхніх дихальних шляхів (порожнина рота, носові ходи, глотка), $R_{\text{н}}$ – опір нижніх дихальних шляхів (трахея, головні бронхи), $R_{\text{м}}$ – опір малих дихальних шляхів (менших 2 мм в діаметрі).

Оскільки опір дихальних шляхів обернено пропорційний внутрішньому діаметру трубки, то з чотирьох доданків (5.3) найбільше значення має $R_{\text{м}}$. На частку бронхіол з внутрішнім діаметром меншим 2 мм припадає 40% від загальної величини опору дихальних шляхів, що пов'язано з дуже великою кількістю дрібних повітряних шляхів і великою загальною площею їх поперечного перерізу. Крім того, на величину R впливають в'язкість і густина газу.

Для визначення тиску в дихальній системі використовують формулу трьохкомпонентної моделі легенів

$$P = (R_{\text{г}} + R_{\text{н}} + R_{\text{м}})Q + \frac{V}{C_{\text{л}}} + \frac{V}{C_{\text{к}}}, \quad (5.4)$$

де $C_{\text{л}}$ – податливість легенів, $C_{\text{к}}$ – податливість грудної клітки.

Опір дихальних шляхів є дуже чутливим до факторів, які впливають на їх діаметр. Такими факторами є легеневий об'єм, тонус бронхіальних м'язів, виділення слизу і зменшення об'єму дихальних шляхів під час видихання або їх здавлювання



якимось об'ємним процесом у легенях (наприклад, пухлиною). Відомо, що опір більший на видиху, ніж на вдиху, до того ж він більший при невеликих об'ємах легенів, оскільки повітряні шляхи при цьому ще не відкриті в достатній мірі. Одноразовий глибокий вдих сприяє зменшенню опору, але затяжка під час паління цигарок або вдихання інших подразнюючих речовин, навпаки, збільшує опір завдяки рефлекторному скороченню гладкої мускулатури в результаті подразнення її рецепторів.

Хронічний бронхіт і бронхіальна астма супроводжуються збільшенням опору дихальних шляхів при спокійному диханні у декілька разів в порівнянні з нормою. В цьому випадку об'єм легенів збільшується і в організмі виникають два компенсаторних механізми: повітряні шляхи дихальної системи збільшують діаметр трубок, що приводить до зменшення опору, а підвищений тиск еластичної віддачі допомагає видиху.

Вдих є активним процесом, який здійснюється дихальними м'язами. Всього при вдиху використовується 10 м'язів, головним із яких є діафрагма. Діафрагма – це найсильніший м'яз видиху, який забезпечує 2/3 об'єму повітря при вдиху. За

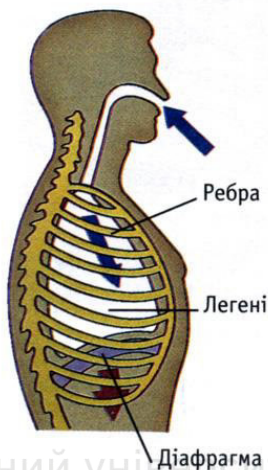


Рис. 5.3. Рух діафрагми при вдиханні

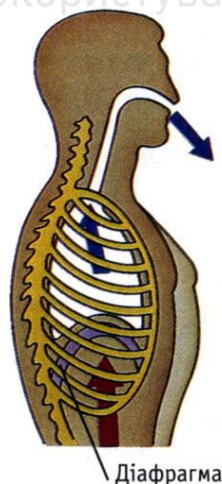


Рис. 5.4. Рух діафрагми при видиханні



будовою – це тонка куполоподібна пластина, прикріплена як батут до нижніх ребер і хребта. В нормі при спокійному диханні (12-18 дихальних рухів за хвилину) купол діафрагми опускається приблизно на 1 см, але під час форсованого вдиху і видиху – до 10 см. При паралічі він під час вдиху зміщується швидше вгору, ніж вниз, через зниження внутрішньогрудинного тиску. Це явище відоме під назвою *парадоксального руху діафрагми* і виявляється під час флюороскопії, коли лікар просить хворого вдихнути через ніс.

При вдиху відбувається низка одночасних рухів, які призводять до активного нагнітання повітря в повітряні шляхи дихальної системи. При скороченні діафрагми вона ущільнюється (рис. 5.3), органи черевної порожнини переміщуються вниз і вперед, в результаті чого вертикальний розмір грудної порожнини збільшується. Крім того, краї ребер піднімаються і виступають вперед, що сприяє збільшенню і поперечного її діаметра. В даному процесі приймає участь 10 м'язів. У плевральній порожнині завдяки вакууму тиск зменшується на початку вдиху на 2,5 *мм рт. ст.* ($\sim 0,33325 \text{ Па}$), а після нього – на 6 *мм рт. ст.* ($\sim 0,7998 \text{ Па}$). Таке зменшення тиску в плевральній порожнині передається тканинам легенів, які розширюються, зменшуючи тиск в дихальних і повітряних відділах. В результаті атмосферне повітря заходить в область зниженого тиску – в легені. Пройшовши повітряні шляхи, свіже повітря змішується із залишковою порцією повітря легенів (повітря, що залишилося в альвеолах і дихальних шляхах після видиху). В результаті цього, концентрація кисню в повітрі альвеол підвищується, а концентрація вуглекислого газу знижується.

Спокійний видих є пасивним процесом, він не вимагає напруження будь-яких м'язів – потрібне лише розслаблення діафрагми (рис. 5.4). Легені, завдяки своїй еластичності і пружності самі витісняють основну частину повітря. Лише при форсованому видиху можуть напружуватися м'язи живота, міжреберні м'язи, всього при цьому використовується 8 м'язів. До найбільш важливих м'язів, що забезпечує цей тип видиху, крім діафрагми, відносяться прямий, косий і поперечний м'язи черевної стінки. При їх скороченні внутрішньочеревний тиск



підвищений, а діафрагма піднімається. Вони скорочуються також при кашлі, блювоті, дефекації. Легені при видиху стискаються, тиск в них стає більшим атмосферного, і повітря виходить.

При спокійному диханні людина вдихає за хвилину (6-8) л літрів повітря. При газообміні в альвеолах тіло отримує біля 0,25 л/хв кисню і віддає біля 0,2 л/хв вуглекислого газу.

Об'єм повітря, який вдихається при максимальному зусиллі, варіюється: для жінок – біля 2 л, для чоловіків – більше 3 л.

Хвороби негативно впливають на роботу дихальних м'язів. У хворих, яким доводиться витратити більше зусиль на дихання, діафрагма може стомлюватися, в результаті чого вентиляція легенів стає неадекватною, в них накопичується двоокис вуглецю. У деяких хворих втома діафрагми відіграє велику роль у розвитку дихальної недостатності.

У деяких новонароджених слабо скоординована активність різних дихальних м'язів, що може стати причиною *синдрому раптової смерті*.

При діагностуванні легеневих хвороб використовують наступні механічні параметри: об'єм легенів, податливість, опір дихальних шляхів.

При вимірюванні об'єму легень визначаються декілька значень:

- дихальний об'єм (ДО) – об'єм повітря, що його людина вдихає і видихає у спокійному стані (для здорової дорослої людини – близько 500 мл);
- резервний об'єм вдиху (РОВд) – максимальний об'єм повітря, яке можна вдихнути додатково після спокійного вдиху (для здорової дорослої людини – близько 1500 мл);
- резервний об'єм видиху (РОВид) – максимальний об'єм повітря, яке можна видихнути додатково після спокійного видиху (для здорової дорослої людини – близько 1500 мл);
- залишковий об'єм (ЗО) – об'єм повітря в легенях, після максимального видиху. Залишковим об'ємом вважають 1200 мл;
- життєва ємність легенів (ЖЄЛ) – максимальний об'єм повітря, яке можна видихнути після максимального вдиху. $(ЖЄЛ = ДО + РОВд + РОВид)$, що для здорової дорослої



людини становить близько 3500 мл);

- загальна ємність легенів (ЗЄЛ), тобто загальна ємність газу в легенях, при максимальному вдиху ($ЗЄЛ = ЖЄЛ + ЗО$);
- хвилинний об'єм дихання (ХОД) – об'єм повітря, яке проходить через легені за 1 хв.

При вимірюванні життєвої ємності легенів (ЖЄЛ) обстежуваний робить повний вдих, а потім якомога сильніше і швидше видихає повітря в полегшений спірометр. У здорової людини загальний об'єм видиху значний. ЖЄЛ змінюється з віком, вона залежить також від статі, ступеня розвитку грудної клітки і дихальних м'язів. Зазвичай вона більша у чоловіків, ніж у жінок. У дітей життєва ємність легенів мала. У спортсменів вона більша, ніж у нетренованих людей. У штангістів, наприклад, вона становить близько 4000 мл, футболістів – 4200 мл, гімнастів – 4300 мл, плавців – 4900 мл, веслувальників – 5500 мл.

Після максимального видиху в легенях знаходиться залишковий об'єм. Його і функціональну залишкову ємність легенів можна визначити тільки непрямими методами. Один з цих методів полягає в наступному: обстежуваний дихає в спірометр, підключений до замкнутої дихальної системи, що містить гелій. Вимірюється ступінь розведення останнього після декількох хвилин дихання.

Виміряти податливість легенів і опір дихальних шляхів значно складніше. Для того щоб визначити податливість легенів, тобто величину зміни легеневого об'єму на одиницю зміни тиску, треба знати внутрішньоплевральний тиск. На практиці його

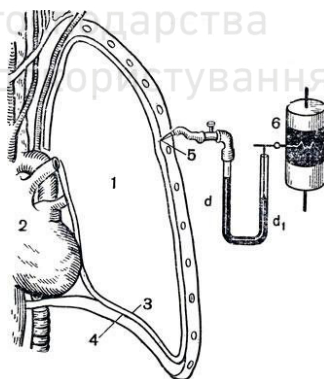


Рис. 5.5. Використання манометра для вимірювання негативного тиску в плевральній порожнині: 1 – ліва легеня; 2 – серце; 3 – плевра; 4 – діафрагма; 5 – голка, введена в плевральну порожнину; 6 – барабан кімографа; d і d₁ – рівні ртуті в колінах манометра



можна виміряти за допомогою невеликого латексного балончика, введенного в стравохід і сполученого з манометром. Таким чином, тиск в стравоході буде визначати внутрішньо плевральний тиск. Для вимірювання опору дихальних шляхів, тобто зниження тиску по ходу дихальних шляхів на одиницю об'ємної швидкості повітряного потоку, необхідно знати альвеолярний тиск. Його визначають у обстежуваного, що знаходиться в положенні сидячи в герметичній камері. Спочатку його просять дихати, переборюючи повну обструкцію дихальних шляхів, і за зміною тиску в камері на цей момент часу розраховують легеневий об'єм. Потім його просять важко дихати і знову реєструють тиск у камері. На підставі отриманих даних визначають альвеолярний тиск і розраховують опір дихальних шляхів. Подібними камерами обладнані тільки спеціалізовані центри.

5.1. Біологічна та медична апаратура системи дихання

5.1.1. Вимірювання тиску у плеврі

Тиск у плевральній порожнині можна виміряти, проколовши грудну стінку порожнистою голкою, з'єднаною з манометром (рис. 5.5). При попаданні голки в плевральну порожнину, манометр покаже значення тиску нижчого за атмосферний. Такий тиск часто називають негативним, умовно приймаючи значення атмосферного тиску за нуль. Залишаючись весь час нижчим атмосферного, тиск в плевральній порожнині змінюється: під час вдиху цей тиск є нижчим атмосферного на (9-12) мм рт. ст., а під час видиху – на (2-6) мм рт. ст. За рахунок такого негативного тиску в плевральній порожнині

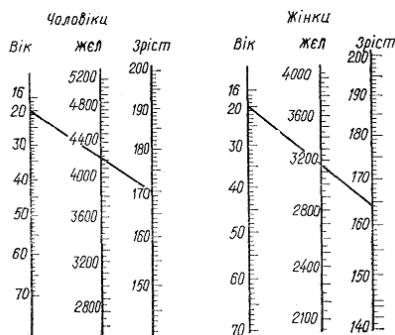


Рис. 5.6. Номограма Міллера для визначення значень ЖЄЛ



легені розширюються або спадають синхронно з грудною кліткою, що розширюється або звужується.

Якщо в плевральну порожнину при пораненнях, операціях на грудях, переломах, тощо потрапляє повітря, то тиск у ній стає рівним атмосферному, легені спадають і перестають приймати участь у диханні. Якщо повітря потрапляє в плевральну порожнину з двох сторін, то людина може загинути від задухи. Надходження повітря в плевральну порожнину називають *пневмотораксом*. Частковий пневмоторакс знаходить застосування при лікуванні туберкульозу легенів.

5.1.2. Спірометр

Спірометрія – метод визначення життєвої ємності легенів і об'ємів повітря, що її складають. Ці показники залежать від віку, зросту, статі, фізичного розвитку людини та інших факторів. Для оцінки функції дихання у даної особи слід виміряти у неї легеневі об'єми порівнювати з належними величинами, розрахованими за формулами або за номограмами (рис. 5.6). Для вимірювання ЖЄЛ і об'ємів, що її складають, використовують водяний або сухий спірометр (рис. 5.7).

Водяний спірометр складається з зовнішнього циліндра з водою (А), всередині якого по порожнистій направляючій трубці рухається внутрішній циліндр (В) з поплавком (Г). Внутрішній циліндр занурений у верхній верх дном. В спокійному стані даний циліндр з поплавком знаходиться в рівновазі – плаває у зовнішньому циліндрі. Прилад відкалібрований так, що на шкалі оглядового віконця (Б) рівень

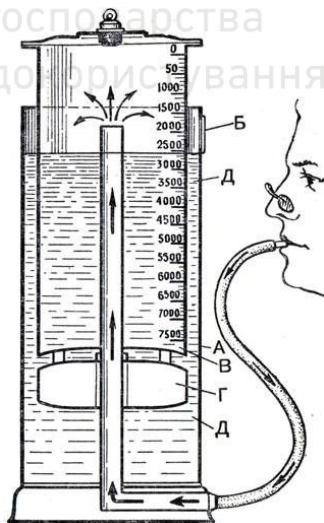


Рис. 5.7. Водяний спірометр:
А – зовнішній циліндр; Б – оглядове віконце; В – внутрішній циліндр; Г – поплавець з повітрям; Д – вода



води знаходиться на нульовій відмітці. До порожнистої металевій трубки під'єднана гумова трубка з мундштуком для дихання. При видиху в мундштук повітря поступає у внутрішній циліндр і збільшує тиск на воду, підвищуючи її рівень між стінками циліндрів. За різницею показів шкали визначають об'єм видиху.

Сухий спірометр реалізують, в основному, на основі пікфлоуметра Райта (рис. 5.8).

Він вимірює тільки один показник – пікову швидкість видиху (ПШВ). Потік повітря всередині спірометра діє на лопасті крильчатки, приводячи їх в обертальний рух. Швидкість обертання вимірюється електронним, фотоелектричним або механічним способом.

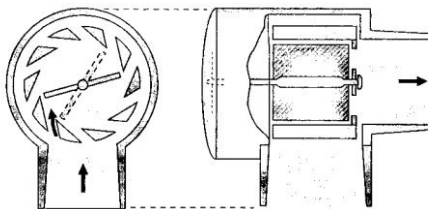


Рис. 5.8. Пікфлоуметр Райта

5.2. Особливості дихальної системи земноводних та птахів

В попередніх параграфах було показано важливість знаходження в альвеолах легень людини сурфактанту – поверхнево-активної речовини (ПАР), що може змінювати коефіцієнт поверхневого натягу внутрішньої поверхні альвеолі. У тих рідкісних випадках, коли у новонародженого відсутні в легенях клітини цієї речовини, дитина не може зробити перший вдих самостійно і помирає. Через недостатню кількість або повну відсутність ПАР в альвеолах близько півмільйона немовлят у всьому світі помирає щороку, так і не зробивши першого вдиху.

Між тим, деякі тварини, які дихають легенями, можуть обійтись і без ПАР. В першу чергу це відноситься до холоднокровних – жаб, змій, крокодилів. Даним тваринам не потрібно витрачати енергію на обігрівання свого тіла, тому їх потреби в кисні не такі високі, як у теплокровних. Саме тому площа поверхні легенів у них менша. Відношення площі



внутрішньої поверхні легенів людини до їх об'єму S/V становить приблизно $3 \cdot 10^4 \text{ м}^{-1}$, тоді як у жаби ця величина становить всього $2 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$.

Зменшення величини S/V у холонокровних пов'язане з тим, що діаметр альвеол у них приблизно в 10 разів більший, ніж у теплокровних. Згідно (4.11) додатковий тиск, який необхідно подолати при вдиху, обернено пропорційний радіусу альвеоли. Великий радіус альвеол у холонокровних дозволяє їм легко робити вдих навіть без зменшення величини σ за рахунок ПАР.

Немає ПАР і в легенях птахів. Птахи – теплокровні тварини і ведуть активний спосіб життя. У стані спокою потреба птахів в кисню вища, ніж в інших хребетних, включаючи ссавців. Під час польоту ця потреба в кисню зростає в декілька разів. Дихальна система птахів здатна насичувати кров киснем навіть при польоті на великій висоті, де його концентрація значно менша, ніж на рівні моря. Відомі випадки реєстрації льотчиками висоти польоту кондорів в 11300 м. Будь-які ссавці (включаючи і людину), опинившись на такій висоті, починають відчувати кисневе голодування, різко знижують свою рухову активність, а іноді навіть впадають в стан напівнепритомності. Птахи пристосувались до таких умов існування завдяки тому, що крім звичайних легенів, у птахів є додаткова система, яка складається з п'яти і більше пар тонкостінних повітряних мішків. Дані повітряні мішки системою трубок з'єднані з легенями. Порожнини мішків широко розгалужуються в тілі і заходять у деякі кістки, іноді навіть у дрібні кістки фаланг пальців. В результаті дихальна система, наприклад качки, займає близько 20% об'єму тіла (2% – легені, 18% – повітряні мішки), в той час як у людини дихальна система займає лише 5% об'єму тіла. Стінки повітряних мішків збіднені на судини і в газообміні участі не беруть. Мішки не тільки сприяють продуванню повітря через легені в одному напрямку, але й зменшують густину тіла, тертя між окремими його частинами, сприяють ефективному охолодженню тіла.

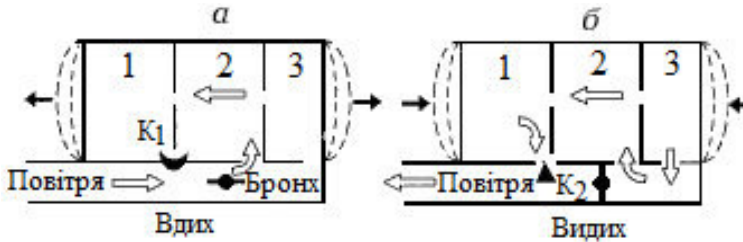


Рис. 5.9. Рух повітря в дихальній системі птахів: а - вдих, б – видих, K1 і K2 – клапани, що змінюють напрямок руху повітря, 1 – передній повітряний мішок, 2 – легені, 3 – задній повітряний мішок

відкритих з обох сторін трубочок – повітряних капілярів. Ці капіляри відходять від бронхів і оточені кровоносними судинами. Під час вдиху об'єми передніх і задніх повітряних мішків збільшуються. Повітря з трахеї надходить безпосередньо в задні мішки. Передні мішки з основними бронхами не сполучаються та заповнюються повітрям, що виходить з легенів (рис. 5.9, а).

При видиху сполучення передніх мішків з основним бронхом відновлюється, а задніх – перекривається. В результаті під час видиху повітря через легені птаха тече в тому ж напрямку, що і при вдиху (рис. 5.9, б). Під час дихання змінюються тільки об'єми повітряних мішків, а об'єм легенів залишається практично постійним. Саме тому в пташиних легенях немає необхідності в ПАР, розкривати легені немає потреби.



6.1. Енергія

Здатність фізичної системи (в окремому випадку вона може складатися з одного тіла) змінювати механічний рух тіл, які її оточують, можна характеризувати не тільки силою, але й енергією. **Енергія** – це загальна кількісна міра руху і взаємодії всіх видів матерії. У відповідності з різними формами руху матерії розглядають її різні форми: механічну, внутрішню, електромагнітну, хімічну, ядерну, тощо. Цей поділ є умовним. Так, хімічна енергія є сумою механічної енергії руху електронів і електричної енергії їх взаємодії між собою та з атомними ядрами. В одних явищах форма руху матерії не змінюється (наприклад, гаряче тіло нагріває холодне), в інших переходить в іншу форму (наприклад, в результаті тертя механічний рух перетворюється на тепловий). Однак, у всіх випадках енергія, яка віддається (в тій або іншій формі) одним тілом іншому тілу, дорівнює енергії, отриманій другим тілом. Дане твердження було отримане на основі численних експериментів, які лягли в основу фундаментального **закону збереження та перетворення енергії**: *енергія не виникає із нічого і не зникає, вона може лише переходити з однієї форми в іншу.*

6.2. Механічна робота

Зміна механічного руху тіла завжди відбувається внаслідок дії сил з боку інших тіл. Для кількісної характеристики процесу обміну енергією між тілами, які взаємодіють при цьому, в механіці вводиться поняття роботи сили. Робота є мірою зміни енергії.

Робота сили – це міра дії сили, яка залежить від модуля і напрямку сили та від переміщення точки її прикладання. Якщо тіло рухається прямолінійно і на нього діє стала за величиною і напрямком сила \vec{F} , яка утворює деякий кут α з напрямком переміщення \vec{r} , то робота цієї сили визначається як скалярний добуток вектора сили \vec{F} на вектор переміщення \vec{r} :



$$A = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot r \cdot \cos \alpha. \quad (6.1)$$

Одиниці вимірювання роботи $[A] = [F] \cdot [r] = 1H \cdot 1m = 1Дж$.

З (6.1) можна зробити висновок, що механічна робота може бути як додатною ($0 \leq \alpha < \pi/2$; $\cos \alpha > 0$) так і від'ємною ($\pi/2 < \alpha \leq \pi$; $\cos \alpha < 0$). Робота може взагалі не здійснюватись, тобто $A = 0$ при $\alpha = \pi/2$ і $\cos \alpha = 0$, навіть якщо на тіло діє сила. Останні висновки особливо виразно показують, що поняття роботи в механіці суттєво відрізняється від повсякденного уявлення про роботу. В повсякденному розумінні будь-яке зусилля, зокрема м'язове напруження, завжди супроводжується виконанням роботи. Наприклад, для того щоб тримати вантаж, стоячи нерухомо або переміщати його горизонтально, носій витрачає багато м'язових зусиль, тобто «здійснює роботу». Однак, робота м'язів як механічна величина в даних випадках дорівнює нулю, а енергія вантажу при цьому не змінюється.

З того факту, що робота може бути як позитивною, так і негативною, випливає, що робота є алгебраїчною величиною. Якщо сила, прикладена до тіла, здійснює додатну за знаком роботу, то швидкість тіла збільшується. Дійсно, в цьому випадку сила, а значить і прискорення, направлені вздовж напрямку швидкості, збільшуючи її. Якщо ж сила здійснює від'ємну за знаком роботу, то прискорення направлене проти швидкості, і швидкість тіла зменшується.

Якщо в формулі (6.1) під \vec{F} розуміти рівнодійну декількох сил, які діють на тіло $\vec{F} = \sum_i^n \vec{F}_i$, то тоді рівняння можна переписати у вигляді

$$A = \sum_i^n \vec{F}_i \cdot \vec{r} = \sum_i^n (\vec{F}_i \cdot \vec{r}) = \sum_i^n A_i, \quad (6.2)$$

тобто $A = \sum_i^n A_i$. Отримали, що у випадку, коли рух тіла відбувається під дією декількох сил, то робота, що здійснюється кожною силою $\vec{F}_i \cdot \vec{r} = F_i \cdot r \cdot \cos \alpha_i$ не залежить



від дії інших сил, і *результуюча робота декількох сил дорівнює алгебраїчній сумі робіт всіх сил, що діють на дане тіло (властивість адитивності роботи).*

В загальному випадку, коли сила може змінюватися як за модулем так і за напрямком, для обчислення роботи сили вводиться поняття **елементарної роботи** δA :

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F \cdot ds \cdot \cos \alpha, \quad (6.3)$$

де $d\vec{r}$ – елементарне переміщення тіла, ds – елементарний шлях, який проходить тіло, α – кут між напрямком сили і дотичної до траєкторії точки її прикладання, направленої в сторону переміщення. В декартовій системі координат

$$\delta A = F_x dx + F_y dy + F_z dz, \quad (6.4)$$

де F_x , F_y , F_z – проекції сили на координатні осі, x , y , z – координати точки її прикладання.

Робота A , яка виконується силою \vec{F} на ділянці траєкторії від точки 1 до точки 2, дорівнює сумі елементарних робіт сили \vec{F} на всіх нескінченно малих ділянках траєкторії; ця сума зводиться до криволінійного інтегралу:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = \int_1^2 F \cos \alpha \cdot ds = \int_1^2 F_s ds, \quad (6.5)$$

де F_s – проекція сили на напрямок переміщення.

В декартовій системі координат

$$A = \int_1^2 (F_x dx + F_y dy + F_z dz). \quad (6.6)$$

При прямолінійному русі тіла під дією прикладеної сталої сили ($F = \text{const}$, $\alpha = \text{const}$) отримаємо

$$A = F \cos \alpha \int_1^2 ds = F s \cos \alpha, \quad (6.6)$$

де s – пройдений тілом шлях.

Як приклад сил, які завжди виконують від'ємну роботу, можна привести силу тертя. Величина сили тертя, яка виникає при русі тіла по горизонтальній поверхні, визначається за формулою



$F_{\text{тр}} = \mu mg$, де μ – коефіцієнт тертя. За формулою (6.6) маємо

$$A_{\text{тр}} = \mu mgs \cos 180^\circ = -\mu mgs. \quad (6.7)$$

Отже, робота сил тертя від’ємна.

6.3. Потужність

Миттєва потужність – це величина, яка характеризує швидкість виконання роботи і дорівнює відношенню виконаної елементарної роботи δA до проміжку часу dt , протягом якого ця робота виконувалася:

$$P = \frac{\delta A}{dt}. \quad (6.8)$$

Одиниця вимірювання потужності – ват (Вт): 1 Вт – потужність, при якій за час 1 с . виконується робота в 1 Дж . Позасистемною одиницею потужності є кінська сила (к. с.). $1 \text{ к. с.} = 735 \text{ Вт}$.

Потужність виконання роботи за деякий проміжок часу Δt дорівнює

$$P_\Sigma = \frac{A}{\Delta t}, \quad (6.9)$$

де A – робота, виконана за час Δt .

Підставивши в (6.8) вираз із (6.3) отримаємо

$$P = \frac{\delta A}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos \alpha, \quad (6.10)$$

де α – кут між векторами \vec{F} і $d\vec{r}$.

З (6.10) видно, що миттєва потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили на вектор швидкості, з якою рухається точка прикладання цієї сили; із виразів (6.1) і (6.10) видно, що потужність, як і робота, є скалярною величиною. З формули (6.10) випливає, що при співпаданні напрямку сили з напрямком переміщення $\cos \alpha = 1$ і $P = F \cdot v$, тобто

$$F = \frac{P}{v} \quad \text{і} \quad v = \frac{P}{F}. \quad (6.11)$$

З формул (6.11) видно, що при постійній потужності двигуна



швидкість його руху обернено пропорційна силі тяги і навпаки. На цьому базується принцип дії коробки перемикання передач різних транспортних засобів.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) механізмів. Дія механізмів (наприклад, суглобів тварин) завжди пов'язана з втратами частини енергії на дії немеханічних сил (хімічні реакції в м'язах, які часто супроводжуються виділенням тепла, сили тертя в волокнах м'язів, тощо). Тому для характеристики машин і механізмів (в тому числі, і біологічних) вводять поняття ККД, який дорівнює відношенню корисної роботи A_k до затраченої (повної) роботи A_z :

$$\eta = \frac{A_k}{A_z}. \quad (6.12)$$

Якщо в (6.12) підставити (6.9), то ККД можна виразити як відношення корисної потужності $P_{\Sigma k}$ до затраченої $P_{\Sigma z}$:

$$\eta = \frac{P_{\Sigma k}}{P_{\Sigma z}}. \quad (6.13)$$

Оскільки втрати потужності неминучі в будь-якому механізмі (в тому числі – і в людському організмі), то завжди $P_{\Sigma k} < P_{\Sigma z}$, і ККД будь-якого механізму завжди менший одиниці. Прийнято η виражати у відсотках.

У більшості механічних з'єднань складових живих організмів даремні втрати енергії, з точки зору механічного руху, малі. Для цього в них зменшені, наскільки можливо, сили тертя і будь-які сили опору руху механізмів. У сполучних ланках живих організмів ці втрати знижені настільки, що ККД виявляється лише на декілька відсотків менший одиниці.

6.4. Механічна енергія

Механічна енергія є характеристикою руху і взаємодії тіл. Вона залежить від їх швидкостей і взаємного розташування. Оскільки в результаті механічного руху будь-яке тіло може виконувати механічну роботу, то ця робота є мірою зміни в тілі механічної енергії. Тому енергію і роботу вимірюють в одних одиницях (в системі СІ – Дж).



Скористаємось другим законом Ньютона у формі (2.5) і помножимо його скалярно на $d\vec{r}$:

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r} = m \cdot d\vec{v} \frac{d\vec{r}}{dt} = m \cdot d\vec{v} \cdot \vec{v} = m\vec{v} \cdot d\vec{v} . \quad (6.14)$$

Зліва є вираз для елементарної роботи (6.3). Повну роботу виконану тілом знайдемо інтегруванням елементарних робіт δA згідно (6.5)

$$A = \int_{v_1}^{v_2} m\vec{v} \cdot d\vec{v} = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} , \quad (6.15)$$

де v_1 і v_2 – початкова і кінцева швидкість тіла при його переміщенні.

Отже, робота сили \vec{F} виявилася рівною зміні деякої величини $\frac{mv^2}{2}$, причому дана величина визначає стан тіла і не залежить від того, яким способом тіло приведено в цей стан. Вона залежить від маси тіла і його швидкості руху в даній системі відліку, тобто є функцією стану її руху, і називається **кінетичної енергією**. Величина кінетичної енергії є відносною, оскільки швидкість тіла залежить від вибору системи відліку, в якій розглядається його рух. У різних інерціальних системах відліку, які рухаються одна відносно одній, швидкість тіла, а, отже, і його кінетичні енергії будуть неоднакові. Володіючи кінетичною енергією $W_k = \frac{mv^2}{2}$ тіло здатне виконати роботу за

рахунок зменшення швидкості, а, значить, за рахунок зменшення його кінетичної енергії.

Змінити кінетичну енергію тіла можна тільки шляхом здійснення роботи, при цьому зміна кінетичної енергії за будь-який проміжок часу дорівнює алгебраїчній сумі робіт всіх зовнішніх сил, що діяли на тіло протягом даного проміжку часу.

Кінетична енергія тіла пов'язана з його імпульсом p співвідношенням



$$W_K = \frac{p^2}{2m}. \quad (6.16)$$

Якщо розглядати систему взаємодіючих тіл, то згідно параграфу 2.1 слід розрізняти зовнішні і внутрішні сили. В такому випадку (6.15) можна переписати у вигляді

$$W_{K_2} - W_{K_1} = A + A', \quad (6.17)$$

де $W_{K_2} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{i2}^2}{2}$ – сумарна кінцева кінетична енергія всіх тіл

системи, $W_{K_1} = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{i1}^2}{2}$ – сумарна початкова кінетична енергія

всіх тіл системи, A – робота всіх зовнішніх сил над системою, A' – робота всіх внутрішніх сил.

Рівняння (6.17) виражає зміст **теорему про зміну кінетичної енергії системи**: зміна кінетичної енергії системи тіл дорівнює роботі всіх (як зовнішніх, так і внутрішніх) сил прикладених до системи.

Потенціальною енергією називають енергію, яка визначається взаємним розташуванням взаємодіючих між собою тіл (або частин одного тіла), тобто потенціальна енергія W_{Π} є функцією координат тіла (радіус-вектора):

$$W_{\Pi} = W_{\Pi}(\vec{r}) = W_{\Pi}(x, y, z). \quad (6.18)$$

При цьому абсолютна зміна потенціальної енергії дорівнює роботі, яку здійснюють тіла, що взаємодіють.

$$A = -(W_{\Pi_2}(\vec{r}_2) - W_{\Pi_1}(\vec{r}_1)) = -\Delta W_{\Pi}, \quad (6.19)$$

або $A = W_{\Pi_1} - W_{\Pi_2}$, тобто робота визначається не потенціальною енергією, а їх переміщенням на $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

В задачах для деякого умовно вибраного взаємного розташування тіл системи (стану системи) приймають значення потенціальної енергії рівним нулю ($W_{\Pi_1} = 0$). Далі величину потенціальної енергії $W_{\Pi_2} = W_{\Pi}$, пов'язаної зі зміною розташування тіл системи від умовно вибраного нульового рівня, прирівнюють до виконаної роботи сил взаємодії A , взятої



з протилежним знаком: $W_H = -A$.

Поняття потенціальної енергії вводять тільки для певного виду сил – потенціальних. Сили, робота яких не залежить від форми траєкторії тіла, а залежить тільки від координат початкової і кінцевої точок його траєкторії називаються *потенціальними*.

Якщо ж тіло рухалося по будь-якій замкнутій траєкторії (тобто воно повернулося у початкове положення), то робота, що здійснюється такими силами, дорівнює нулю. В цьому випадку

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = 0. \quad (6.20)$$

Системи тіл, в яких діють лише потенціальні сили, називаються **консервативними**.

Прикладом сил, які задовольняють умові (6.20) є гравітаційні сили, сили пружності, сили електростатичної взаємодії.

На відміну від потенціальних існують і непотенціальні сили, для яких умова (6.20) не виконується. Сили, робота яких залежить від форми траєкторії називають **непотенціальними**. Характерним прикладом непотенціальних сил є сила тертя та сили, які виникають при непружних деформаціях.

Системи тіл, в яких діють як потенціальні так і непотенціальні сили, називаються **дисипативними (розсіюючими)**. Строго кажучи, всі реальні макроскопічні системи в природі є дисипативними.

Розглянемо приклади потенціальних сил.

а) Гравітаційні сили.

Знайдемо роботу сил гравітації Землі, при переміщенні МТ масою m вздовж деякої траєкторії, наприклад з точки 1 в точку 2 (рис. 6.1).

За законом всесвітнього тяжіння сила взаємодії між МТ масою m і Землі масою M дорівнює

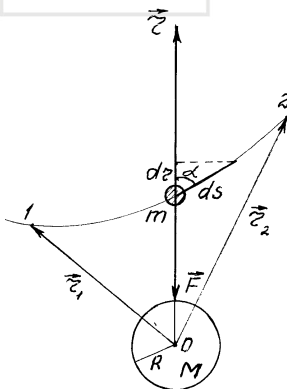


Рис. 6.1. Рух матеріальної точки в гравітаційному полі Землі, R – радіус Землі



$$F = G \frac{mM}{r^2}, \quad (6.21)$$

де r – відстань від центру Землі до точки, G – гравітаційна стала.

Згідно (6.5) маємо

$$A = - \int_1^2 G \frac{mM}{r^2} \cos \alpha \cdot ds. \quad (6.22)$$

Знак мінус в (6.22) виникає внаслідок різного напрямку сили тяжіння і переміщення. З рис. 6.1 видно, що $dr = ds \cos \alpha$.

Тоді

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} G \frac{mM}{r^2} dr = \frac{GmM}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = m \left(\frac{GM}{r_2} - \frac{GM}{r_1} \right). \quad (6.23)$$

З (6.23) видно, що гравітаційні сили є потенціальними, оскільки їх робота A залежить лише від \vec{r}_1 і \vec{r}_2 і не залежить від форми траєкторії. При виконанні $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ справджується умова (6.20).

Прирівняємо праві частини (6.19) і (6.23)

$$-(W_{II_2} - W_{II_1}) = m \left(\frac{GM}{r_2} - \frac{GM}{r_1} \right). \quad (6.24)$$

Якщо логічно припустити, що на нескінченості ($r_2 \rightarrow \infty$) потенціальна енергія гравітаційної взаємодії тіл практично дорівнює нулю ($W_{II_2} \approx 0$), то з (6.24) отримаємо $W_{II_1} = - \frac{GmM}{r_1}$,

або в загальному випадку

$$W_{II} = - \frac{GmM}{r}. \quad (6.25)$$

Для більшості задач біологічної механіки тіла знаходяться біля поверхні Землі, тобто $h \ll R$, де h – висота тіла над поверхнею Землі. Тоді (6.25) перепишемо у вигляді



$$W_{II} = -\frac{GmM}{r} = -\frac{GmM}{R+h} = -\frac{GmMR}{R^2\left(1+\frac{h}{R}\right)}. \quad (6.26)$$

Величина $g = \frac{GM}{R^2}$ – називається прискоренням вільного падіння. Враховуючи, що $\frac{h}{R} \ll 1$, вираз $\frac{1}{1+\frac{h}{R}}$ можна розкласти в ряд і обмежитись першими двома членами $\frac{1}{1+\frac{h}{R}} \approx 1 - \frac{h}{R}$. Тоді з (6.26) отримаємо:

$$W_{II} = -mgR\left(1 - \frac{h}{R}\right) = -mgR + mgh. \quad (6.27)$$

Величина потенціальної енергії визначається тим, від якого рівня відраховується висота розташування тіла. Тому потенціальна енергія одного і того ж тіла може бути позитивною, негативною або рівною нулю в залежності від вибору нульового рівня відліку. Якщо відраховувати потенціальну енергію тіла від поверхні Землі, тоді

$$W_{II} = mgh. \quad (6.28)$$

Поле тяжіння Землі є важливим зовнішнім фактором життєдіяльності організмів. Наприклад, для організмів, що пересуваються у водному середовищі, є важливим їх орієнтування. Таку можливість організмів орієнтувати напрямок свого руху відносно гравітаційного поля називають *гравітаксисом*. Гравітаксис спостерігається у багатьох водоростей. Рівень гравітаційної орієнтації водоростей визначається наявністю забруднень у середовищі, впливом сонячного, зокрема ультрафіолетового випромінювання. Таким чином, гравітаксис є важливим екологічним фактором, який дає змогу водним організмам знаходити кращі умови існування.

Ростову реакцію рослин, яка викликає вигин або викривлення її певної частини у бік гравітації як зовнішнього стимулу, називають *гравітропізмом*.

**б) Пружні сили.**

У разі повздовжньої деформації тіла (наприклад, пружини вздовж осі Ox) сила пружності визначається із закону Гюка

$$F = -kx, \quad (6.29)$$

де k – коефіцієнт пружності, x – величина деформації.

Робота сили пружності згідно (6.5)

$$A = -\int_{x_1}^{x_2} kx dx = -\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2). \quad (6.30)$$

За формулою (6.19) маємо

$$-\frac{1}{2}k(x_2^2 - x_1^2) = -(W_{\Pi_2} - W_{\Pi_1}). \quad (6.31)$$

Якщо прийняти, що енергія недеформованого ($x_1 = 0$) тіла рівна нулю ($W_{\Pi_1} = 0$), то легко отримати формулу для потенціальної енергії пружної взаємодії

$$W_{\Pi} = \frac{1}{2}kx^2. \quad (6.32)$$

Повна механічна енергія системи тіл дорівнює сумі кінетичних і потенціальних енергій всіх тіл системи:

$$W = \sum_{i=1}^N W_{K_i} + \sum_{i=1}^N W_{\Pi_i} = W_K + W_{\Pi}, \quad (6.33)$$

де N – кількість тіл в системі.

Закон збереження повної механічної енергії системи: в замкнутій механічній системі тіл сума кінетичних і потенціальних енергій всіх тіл системи є величиною незмінною при всіх можливих переміщеннях тіл системи, якщо між тілами діють лише потенціальні сили.

З закону збереження механічної енергії випливає, що

$$\sum_{i=1}^N W_{K_i} + \sum_{i=1}^N W_{\Pi_i} = \text{const}, \quad (6.33)$$

Якщо система переходить зі стану 1 в стан 2, то закон збереження енергії можна записати у вигляді



$$\left(\sum_{i=1}^N W_{K_i} \right)_1 + \left(\sum_{i=1}^N W_{\Pi_i} \right)_1 = \left(\sum_{i=1}^N W_{K_i} \right)_2 + \left(\sum_{i=1}^N W_{\Pi_i} \right)_2, \quad (6.34)$$

або

$$(W_K)_1 + (W_{\Pi})_1 = (W_K)_2 + (W_{\Pi})_2. \quad (6.35)$$

Отже, закон збереження механічної енергії справедливий лише для консервативних систем. Для дисипативних систем зміна повної механічної енергії системи дорівнює роботі всіх неконсервативних сил, що діють на тіла системи. В цьому випадку можна записати

$$\Delta W_K + \Delta W_{\Pi} = \sum_{j=1}^M A_{j_{\text{непотенц}}}, \quad (6.36)$$

де ΔW_K – сумарна зміна кінетичної енергії всіх тіл системи, ΔW_{Π} – сумарна зміна потенціальної енергії всіх тіл системи, $A_{j_{\text{непотенц}}}$ – робота j -тої непотенціальної сили над тілами системи, M – їх кількість.

Рівняння (6.36) є математичним записом **закону зміни повної механічної енергії** в дисипативних системах, тобто є свого роду законом збереження енергії у разі дії в системі непотенціальних сил.

Закон збереження механічної енергії є окремим випадком загального закону збереження та перетворення енергії в будь-якій замкнутій системі.

Як правило, у випадку виконання роботи непотенціальними силами зміна механічної енергії переходить у теплову енергію.

6.5 Енергія та обмін речовин

Закон збереження та перетворення енергії стосовно біологічних об'єктів проявляється в процесах метаболізму. *Обмін речовин (метаболізм)* – це сукупність процесів перетворення речовини і енергії в живих організмах, які становлять основу їх життєдіяльності.

Обмін речовин передбачає руйнування складних органічних сполук, яке супроводжується вивільненням енергії, необхідної



для інших процесів, та утворенням складних субстанцій, що формують речовину для тканин та органів. Живий організм одержує енергію з продуктів харчування, вона витрачається на нагрівання тіла і виконання організмом роботи. Типове значення обміну речовин як потужності перетворення хімічної енергії у теплову та механічну для людини масою 70кг у стані спокою становить $P = 120\text{Вт}$. Отже, протягом доби ($t = 86400\text{с}$) завдяки обміну речовин для підтримання життєдіяльності людина даної маси витрачає енергію

$$W = P \cdot t = 120 \cdot 86400 = 10368 \cdot 10^3 \text{ Дж} = 2477 \cdot 10^3 \text{ кал}.$$

Таким чином, людині щодобово потрібно одержувати через харчування близько 2500ккал з тим, щоб підтримувати свою масу. Збільшення маси тіла на 1кг еквівалентне затраченій енергії величиною близько 7700ккал .

6.6. Робота та потужність серця

Серце є основним джерелом енергії, яка витрачається для забезпечення руху крові по судинам кровоносної системи. Це дуже складний м'язовий коливальний гемодинамічний орган, який об'єднує два «двигуни» – ліву і праву частину серця.

Розглянемо роботу лівого шлуночка серця. Його повна робота, яка виконується під час перенесення крові масою m і об'єму V , залежить від (рис. 6.2):

- різниці потенціальних енергій на виході і вході ΔW_{Π} ;
- різниці кінетичних енергій ΔW_K ;
- роботи, яка здійснюється за рахунок різниці тисків на виході і вході лівого шлуночка A_p , тобто

$$A = \Delta W_{\Pi} + \Delta W_K + A_p. \quad (6.37)$$

$$\text{Тут} \quad \Delta W_{\Pi} = mg(h_2 - h_1), \quad \Delta W_K = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2},$$

$$A_p = (p_2 - p_1)V.$$

Відомо, що різниця висот між шлуночком і артеріальною дугою для дорослої людини $(h_2 - h_1) \approx 0,15\text{м}$, швидкість руху



крові на цій ділянці становить $0,4 \text{ м/с}$, а густина $\rho \approx 10^3 \text{ кг/м}^3$.

Початкова швидкість скорочення м'язів дорівнює нулю, тобто $v_1 = 0$. Також відомо, що артеріальний тиск у здорової людини змінюється від 80 мм рт. ст. (діастола – розширення порожнини серця та їх наповнення кров'ю) до 120 мм рт. ст. (систола – скорочення м'язів серця після розслаблення, що супроводжується нагнітанням крові в артеріальну систему). Однак, мінімальний тиск, що встановлюється в артеріях, призводить до закриття аортального клапана, тому різниця тисків на вході і виході з лівого шлуночка становить:

$$\Delta p = 120 \text{ мм.рт.ст.} - 0 = 120 \text{ мм.рт.ст.} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ Па}.$$

Об'єм крові, що виштовхується в аорту протягом систоли при одному скороченні серця складає $(60-70) \text{ мл}$. Повна робота, що виконується при цьому:



Рис. 6.2. Схема лівої частини серця: v_1 , p_1 , h_1 – швидкість, тиск і висота знаходження об'єму крові V на вході в серце; v_2 , p_2 , h_2 – ті самі величини для крові на виході з серця

$$A = \Delta W_{\Pi} + \Delta W_K + A_p = \rho V g (h_2 - h_1) + \frac{\rho V (v_2^2 - v_1^2)}{2} + (p_2 - p_1) V =$$

$$10^3 \cdot 70 \cdot 10^{-6} \cdot 0,15 + \frac{1}{2} \cdot 10^3 \cdot 70 \cdot 10^{-6} \cdot 0,4^2 + 1,6 \cdot 10^4 \cdot 70 \cdot 10^{-6} =$$

$$= 1,14 \text{ Дж}.$$



Для визначення повної роботи всього серця до цієї роботи слід додати роботу правого шлуночка, який накачує кров у легеневу артерію, забезпечуючи тиск близько 20 мм рт. ст. ($2,7 \cdot 10^3 \text{ Па}$), або $1/6$ артеріального тиску, виконуючи при цьому приблизно 20% від роботи A . Тоді загальна робота, яку виконує серце за одне скорочення:

$$A_{\text{заг}} = A + 0,2A = 1,2A = 1,2 \cdot 1,14 \approx 1,4 \text{ Дж}.$$

За добу серце виконує (за пульсу 60 ударів за хвилину) $N = 60 \cdot 60 \cdot 24 = 86400$ ударів. Робота серця за добу становить:

$$A_0 = N \cdot A_{\text{заг}} = 86400 \cdot 1,4 = 120960 \text{ Дж} \approx 1,2 \cdot 10^5 \text{ Дж}.$$

Для порівняння, таку роботу можна здійснити піднявши 1000 кг на висоту близько 12 м.

При фізичному навантаженні робота серця різко збільшується, зростає систолічний та хвилинний об'єми крові, збільшується і швидкість руху крові в аорті. При цьому збільшується і відношення між величинами ΔW_K і A_p . В спокійному стані $\Delta W_K / A_p \approx 0,01$. При навантаженні обидві величини зростають, але швидкість зростання ΔW_K вища, так що дане відношення може досягати значення $\Delta W_K / A_p \approx 0,3$.

Корисна потужність, що розвивається серцевим м'язом під час систоли: $P_c = \frac{A_{\text{заг}}}{T_c}$, де $T_c \approx 0,3 \text{ с}$ – тривалість систоли.

Звідси отримуємо: $P_c = \frac{1,4}{0,3} = 4,67 \text{ Вт}$. Час одного циклу

серцевої діяльності $T \approx 0,85 \text{ с}$. Середня потужність за весь цикл дорівнює $P_{\text{сер}} = \frac{1,4}{0,85} = 1,65 \text{ Вт}$.

Коефіцієнт корисної дії (ККД) серця, який дорівнює відношенню виконаної роботи до витраченої енергії ($\eta = A/W$) складає всього (14-25)%, що вказує на значні втрати енергії. При фізичній роботі (навантаженні) і тренуванні серця ККД може збільшуватися. При підвищенні артеріального тиску навантаження на серце зростає, а ККД – зменшується. Тому для



полегшення роботи серця бажано, щоб кров'яний тиск був порівняно низьким, а серцевий викид – великим.

6.6.1. Апарат штучної підтримки роботи серця

При операціях на серці, які вимагають його тимчасової заміни в системі кровообертання крові, використовують спеціальні апарати штучного кровообертання (АШК) крові (рис. 6.3). Цей апарат є поєднанням штучного серця (насосна система) зі штучними легенями (оксигенатор – система, яка забезпечує насичення крові киснем).

Апарат виконаний у вигляді пересувного стола, всередині якого розміщено механічну складову – насоси, а збоку прикріплений фізіологічний блок, який вміщує оксигенатор, резервуар запасної крові, тримачі для трубок і катетерів.

Принцип роботи АШК полягає в відборі венозної крові з організму, після чого вона фільтрується, зігрівається (охолоджується), оксигенізується (насичується киснем і з неї видаляється вуглекислий газ) і нагнітається в артеріальне русло хворого. Таким чином, замінюється функція серця (нагнітання крові) і легенів (газообмін). Газообмін і нагрівання (охолодження) відбуваються в оксигенаторі. Відбір венозної і нагнітання артеріальної крові відбувається за допомогою системи насосів, яка за функцією подібна серцю (підтримує тиск

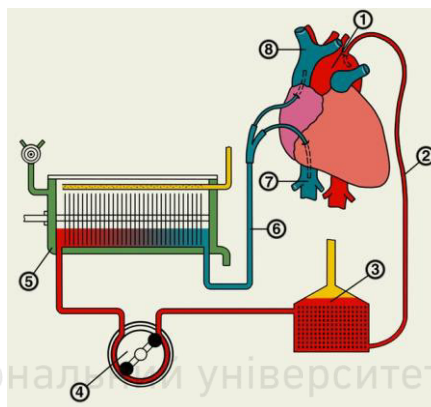


Рис. 6.3. Схема підключення апарату штучного кровообігу до h_2 – ті самі величини для крові на виході з серця:
1 – аорта, 2 – артеріальна лінія, 3 – мікрофільтр, 4 – артеріальний насос, 5 – оксигенатор, 6 – венозна лінія, 7 – нижня порожниста вена, 8 – верхня порожниста вена



і циркуляцію крові в судинах організму під час операції). Оксигенатор за функцією виконує роль легенів і забезпечує насичення крові киснем. Отже, апарат в цілому виконує функцію серця і легенів.

6.7. Робота та потужність скорочення м'язів

Як було показано в параграфі 2.7 важливими характеристиками роботи м'яза є сила і швидкість його скорочення. Рівняння, яке виражає ці характеристики, було отримано емпірично А. Хіллом (2.88) і потім підтверджено кінетичною теорією м'язового скорочення.

Визначимо роботу скорочення м'яза за час t . Згідно (6.9) і (6.11)

$$A = F \nu t, \quad (6.38)$$

де P – потужність м'яза, ν – швидкість його скорочення.

Виразимо ν з характеристичного рівняння Хілла (2.88) і, підставивши в (6.38), отримаємо

$$A = bF \frac{F_0 - F}{F + a} t. \quad (6.39)$$

При скороченні м'яза завжди виділяється певна кількість теплоти Q , внаслідок тертя м'язових волокон між собою та інших процесів в м'язах. Дана величина називається *теплопродукцією*. Як показав Хілл, теплопродукція залежить лише від зміни довжини x м'яза і не залежить від навантаження на нього:

$$Q = a \cdot x, \quad (6.40)$$

де a – константа з рівняння (2.88).

Загальна потужність $P_{\text{заг}}$ яка розвивається м'язом, визначається швидкостями виконання м'язом роботи і виділення теплоти. Скориставшись (6.8), (6.11) та (1.8), отримаємо

$$P_{\text{заг}} = \frac{\delta A}{dt} + \frac{\delta Q}{dt} = F \cdot \nu + \frac{\delta Q}{dt} = F \cdot \nu + a \frac{dx}{dt} = (F + a) \nu. \quad (6.41)$$

Згідно (2.88) рівняння (6.41) можна переписати у вигляді:

$$P_{\text{заг}} = (F + a) \nu = b(F_0 - F) \nu. \quad (6.42)$$



Рівняння (6.42) показує, що залежність загальної потужності м'яза $P_{\text{заг}}$ від прикладеної сили F є лінійною.

Дослідження показують, що константа b залежить від температури. При нагріванні на 10°C поблизу 0°C константа b подвоюється.

Константа a знаходиться в діапазоні значень від $0,25F_0$ до $0,4F_0$.

За цими даними легко оцінити максимальну швидкість скорочення для певного м'яза.

Враховуючи (2.89) можна оцінити відношення

$$\frac{v_{\text{max}}}{b} \approx (2,5 - 4).$$

Графік залежності відносної потужності від відносного навантаження м'яза носить ковпакоподібний вигляд (рис. 6.5).

З (6.42) видно, що

а) $P_{\text{заг}} = 0$ при $F = F_0$;

б) Потужність досягає максимального значення $(P_{\text{заг}})_{\text{max}} = \sqrt{a(F_0 + a)} - a$ при $F = 0,31F_0$. Це означає, що потужність м'язового скорочення буде максимальною коли і швидкість і сила складають $\approx 30\%$ від максимально можливих величин.

Це використовують, наприклад, спортсмени-велогонщики: при переході з рівнини на гірську ділянку навантаження на м'язи підвищується, і спортсмен переключає швидкість

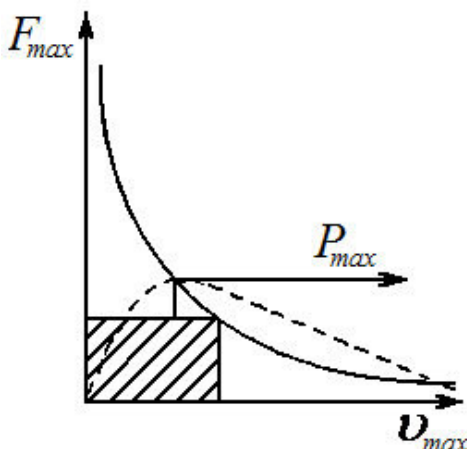


Рис. 6.4. Залежність потужності скорочення м'яза P від сили, що розвивається F і швидкості скорочення v (пунктирна лінія). Заштрихований прямокутник відповідає максимальній потужності
($P_{\text{max}} = F_{\text{onm}} \cdot v_{\text{onm}}$)



велосипеда на найменшу передачу.

Максимальна потужність (200Вт) м'язів руки людини досягається при швидкості скорочення 2,5м/с.

Коефіцієнт корисної дії при скороченні м'яза визначається як відношення виконаної роботи A до затраченої енергії W

$$\eta = \frac{A}{W} = \frac{A}{A + Q} = \frac{P_{\text{кор}}}{P_{\text{заг}}} = \frac{F \cdot v}{(F + a)v} = \frac{F}{F + a}. \quad (6.43)$$

ККД м'яза η зберігає постійне значення (біля 40%) в діапазоні значень сили $0,2F_0 < F < 0,8F_0$. Практично ККД може досягти (40-60)% для різних типів м'язів.

Відомою є формула взаємозв'язку сили м'язів і їх маси. Цю залежність можна виразити формулою:

$$F = \frac{2}{3} kmg, \quad (6.44)$$

де F – м'язова сила, k – деяка стала величина, що характеризує фізичну підготовленість атлета; m – маса атлета, g – прискорення вільного падіння. У провідних важкоатлетів м'язова сила становить (55 – 57)% ваги тіла.

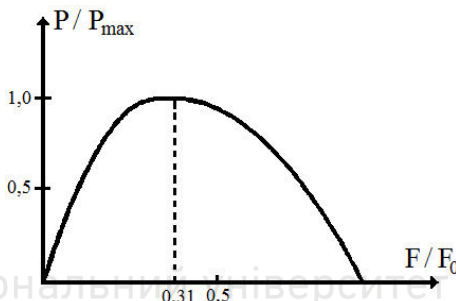


Рис. 6.5. Залежність потужності м'яза від навантаження



ДОДАТОК 1

Реологічна модель деформації кісткової тканини

Диференціальне рівняння моделі
деформації кісткової тканини:

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_1}{\eta} \varepsilon = \frac{1}{E_2} \dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{E_2 \eta} \sigma. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння 1.

Позначимо $\alpha = E_1/\eta$, $\beta = 1/E_2$,
 $\gamma = (E_1 + E_2)/(E_2 \eta)$.

З (1) отримаємо

$$\dot{\varepsilon} + \alpha \varepsilon = \beta \dot{\sigma} + \gamma \sigma. \quad (2)$$

Після заміни $\varepsilon = e^{-\alpha t} \varepsilon_1$ і $\sigma = e^{-\frac{\gamma}{\beta} t} \sigma_1$ отримаємо
 $e^{-\alpha t} \dot{\varepsilon}_1 = \beta e^{-\frac{\gamma}{\beta} t} \dot{\sigma}_1$, тобто

$$\dot{\varepsilon}_1 = \beta e^{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\beta}\right)t} \dot{\sigma}_1. \quad (3)$$

Інтегрування (3) частинами останнього виразу дає

$$\varepsilon_1 = \beta \left[e^{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\beta}\right)t} \sigma_1 - \left(\alpha - \frac{\gamma}{\beta}\right) \int e^{\left(\alpha - \frac{\gamma}{\beta}\right)t} \sigma_1 dt \right],$$

або

$$\varepsilon = \beta e^{-\alpha t} \left[e^{\alpha t} \sigma - \left(\alpha - \frac{\gamma}{\beta}\right) \int e^{\alpha t} \sigma dt \right] = \beta \sigma - (\alpha \beta - \gamma) e^{-\alpha t} \int e^{\alpha t} \sigma dt.$$

Враховуючи значення α , β і γ , маємо

$$\varepsilon = \frac{1}{E_2} \sigma + \frac{1}{\eta} e^{-\frac{E_1}{\eta} t} \int \sigma \cdot e^{\frac{E_1}{\eta} t} dt. \quad (4)$$

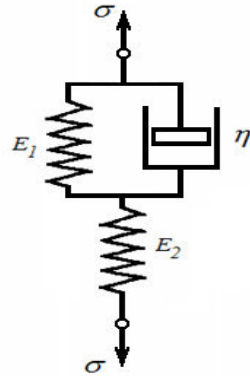


Рис. 1. Модель
Кельвіна деформації
кісткової тканини



ДОДАТОК 2

Реологічна модель деформації хребта

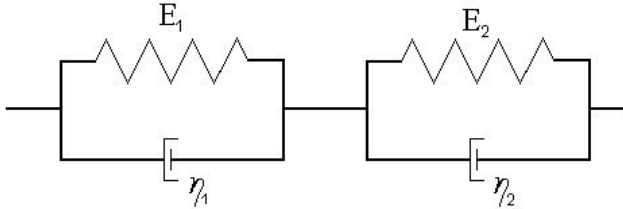


Рис. 1. Реологічна модель деформації хребта

Диференціальне рівняння моделі деформації хребта (рис. 1):

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{E_1\eta_2 + E_2\eta_1}{\eta_1\eta_2} \dot{\varepsilon} + \frac{E_1E_2}{\eta_1\eta_2} \varepsilon = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1\eta_2} \dot{\sigma} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_1\eta_2} \sigma. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння 1.

Позначимо $\alpha = \frac{E_1\eta_2 + E_2\eta_1}{\eta_1\eta_2}$, $\beta = \frac{E_1E_2}{\eta_1\eta_2}$, $\gamma = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1\eta_2}$,

$$\delta = \frac{E_1 + E_2}{\eta_1\eta_2}.$$

Підставимо в (1) і отримаємо

$$\ddot{\varepsilon} + \alpha \dot{\varepsilon} + \beta \varepsilon = \gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma. \quad (2)$$

Нехай k_1 і k_2 такі, що $k_1 + k_2 = -\alpha$ і $k_1k_2 = \beta$, тобто є коренями характеристичного (до правої частини (2)) рівняння $k^2 + \alpha k + \beta = 0$.

Виконаємо заміну $\varepsilon = e^{k_1 t} \varepsilon_I$, тоді

$$e^{k_1 t} (\ddot{\varepsilon}_I + (2k_1 + \alpha) \dot{\varepsilon}_I) = \gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma. \quad (3)$$

Зробимо ще одну заміну $\dot{\varepsilon}_I = y$, тоді з (3) отримаємо

$$e^{k_1 t} (\dot{y} + (2k_1 + \alpha) y) = \gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma. \quad (4)$$

Очевидно, що

$$y = z \cdot e^{-(2k_1 + \alpha)t} = z \cdot e^{(k_2 - k_1)t}, \quad (5)$$

де z – деяка функція, залежна від часу.



Підставимо (5) в (4)

$$e^{k_1 t} \left(\dot{z} \cdot e^{(k_2 - k_1)t} + z(k_2 - k_1)e^{(k_2 - k_1)t} + (k_1 - k_2)z \cdot e^{(k_2 - k_1)t} \right) = \gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma$$

або

$$e^{k_1 t} \cdot \dot{z} \cdot e^{(k_2 - k_1)t} = \gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma \text{ і звідси } -\dot{z} \cdot e^{k_2 t} = \gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma. \quad (6)$$

Зробимо заміну в правій частині (6):

$$\sigma = \sigma_I e^{-\frac{\delta}{\gamma} t}. \quad (7)$$

Тоді, підставивши (7) в (6), отримаємо $\dot{z} \cdot e^{k_2 t} = \gamma \dot{\sigma}_I e^{-\frac{\delta}{\gamma} t}$.

Звідси $z = \gamma \int \dot{\sigma}_I e^{-\left(k_2 + \frac{\delta}{\gamma}\right)t} dt$. Таким чином, вираз (5) набуде вигляду

$$y = z \cdot e^{(k_2 - k_1)t} = \gamma \cdot e^{(k_2 - k_1)t} \int \dot{\sigma}_I e^{-\left(k_2 + \frac{\delta}{\gamma}\right)t} dt.$$

Звідки $\varepsilon_I = \gamma \int e^{(k_2 - k_1)t} \int \dot{\sigma}_I e^{-\left(k_2 + \frac{\delta}{\gamma}\right)t} dt dt$ і

$$\varepsilon = e^{k_1 t} \varepsilon_I = \gamma \cdot e^{k_1 t} \int e^{(k_2 - k_1)t} \int \dot{\sigma}_I e^{-\left(k_2 + \frac{\delta}{\gamma}\right)t} dt dt. \quad (8)$$

З (7) – $\sigma_I = \sigma e^{\frac{\delta}{\gamma} t}$. Звідси $\dot{\sigma}_I = \dot{\sigma} e^{\frac{\delta}{\gamma} t} + \frac{\delta}{\gamma} \sigma e^{\frac{\delta}{\gamma} t}$. Підставивши

даний вираз в (8), маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \gamma \cdot e^{k_1 t} \int e^{(k_2 - k_1)t} \int \left(\dot{\sigma} \cdot e^{\frac{\delta}{\gamma} t} + \frac{\delta}{\gamma} \sigma \cdot e^{\frac{\delta}{\gamma} t} \right) e^{-\left(k_2 + \frac{\delta}{\gamma}\right)t} dt dt = \\ &= \gamma \cdot e^{k_1 t} \int e^{(k_2 - k_1)t} \int \left(\dot{\sigma} \cdot e^{-k_2 t} + \frac{\delta}{\gamma} \sigma \cdot e^{-k_2 t} \right) dt dt. \end{aligned} \quad (9)$$

Оскільки, $k_1 + k_2 = -\alpha$ і $k_1 k_2 = \beta$, а $\alpha = \frac{E_1 \eta_2 + E_2 \eta_1}{\eta_1 \eta_2}$ і

$\beta = \frac{E_1 E_2}{\eta_1 \eta_2}$, то звідси неважко отримати $k_1 = -\frac{E_1}{\eta_1}$ і $k_2 = -\frac{E_2}{\eta_2}$.

Рівняння (9) набуде вигляду



Національний університет
водного господарства
та природокористування

$$\varepsilon = \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} e^{\frac{E_1}{\eta_1} t} \int e^{\left(\frac{E_1 - E_2}{\eta_1 - \eta_2}\right) t} \int \left(\dot{\sigma} \cdot e^{\frac{E_2}{\eta_2} t} + \frac{E_1 + E_2}{\eta_1 + \eta_2} \sigma \cdot e^{\frac{E_2}{\eta_2} t} \right) dt dt. \quad (10)$$



Національний університет
водного господарства
та природокористування



ДОДАТОК 3

Реологічна модель деформації м'яких м'язів

Диференціальне рівняння моделі деформації м'яких м'язів (рис. 1):

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_1 + \dot{\varepsilon}_\eta = \frac{1}{E} \dot{\sigma} + \frac{\sigma}{\eta}. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння 1.

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \int_0^t \dot{\sigma} dt + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma dt. \quad (2)$$

Звідси

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma \Big|_0^t + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma dt. \quad (3)$$

Якщо $\sigma(0) = 0$, то

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \sigma(t) + \frac{1}{\eta} \int_0^t \sigma dt. \quad (4)$$

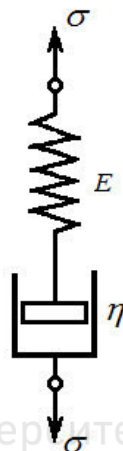


Рис. 1.
Модель
Максвелла
деформації
гладких м'язів



ДОДАТОК 4

Реологічна модель деформації крові

Диференціальне рівняння моделі деформації крові (рис. 1):

$$\ddot{\varepsilon} + E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \dot{\varepsilon} = \frac{1}{\eta_2} \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння 1.

Позначимо $\alpha = E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2}$, $\gamma = \frac{1}{\eta_2}$,

$$\delta = \frac{E}{\eta_1 \eta_2}.$$

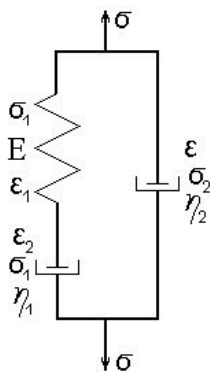


Рис. 1.

Реологічна модель
деформації крові

Підставимо в (1) і отримаємо

$$\ddot{\varepsilon} + \alpha \dot{\varepsilon} = \gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma. \quad (2)$$

Зробимо заміну $\dot{\varepsilon} = e^{-\alpha t} \varepsilon_1$ і, підставивши її в (2), отримаємо

$$e^{-\alpha t} \dot{\varepsilon}_1 = \gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma. \quad (3)$$

Звідси

$$\dot{\varepsilon}_1 = \gamma e^{\alpha t} \dot{\sigma} + \delta e^{\alpha t} \sigma$$

тому,

$$\varepsilon_1 = \int e^{\alpha t} (\gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma) dt. \quad (4)$$

Враховуючи заміну, маємо

$$\dot{\varepsilon} = e^{-\alpha t} \int e^{\alpha t} (\gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma) dt. \quad (5)$$

Інтегруючи (5) отримаємо

$$\varepsilon = \int e^{-\alpha t} \int e^{\alpha t} (\gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma) dt dt, \quad (6)$$

або

$$\varepsilon = \int e^{-\frac{E(\eta_1 + \eta_2)}{\eta_1 \eta_2} t} \int e^{\frac{E(\eta_1 + \eta_2)}{\eta_1 \eta_2} t} \left(\frac{1}{\eta_2} \dot{\sigma} + \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma \right) dt dt. \quad (7)$$

Частковий випадок: до крові прикладене постійне



навантаження при відсутній початковій деформації. В такому випадку:

$\varepsilon(0) = 0$, $\dot{\varepsilon}(0) = C$, $\sigma = \text{const}$, C – деяка константа.

Тоді, (7) набуде вигляду:

$$\varepsilon = \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma \int e^{-E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t} \int e^{\frac{E \eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t} dt dt. \quad (8)$$

Продиференціюємо (8) і отримаємо

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma \cdot e^{-E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t} \int e^{\frac{E \eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t} dt = \\ &= \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{E(\eta_1 + \eta_2)} \right) + C_1 \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma e^{-E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t}, \end{aligned} \quad (9)$$

де C_1 – деяка константа.

З умови $\dot{\varepsilon}(0) = C$ отримаємо $C = \frac{\sigma}{\eta_1 + \eta_2} + \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma \cdot C_1$, звідки

$$C_1 = \frac{\eta_1 \eta_2}{E \sigma} \left(C - \frac{\sigma}{\eta_1 + \eta_2} \right). \quad (10)$$

Проінтегруємо (9) і маємо

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma \int \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{E(\eta_1 + \eta_2)} + C_1 e^{-E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t} \right) dt = \\ &= \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma \left(\frac{\eta_1 \eta_2}{E(\eta_1 + \eta_2)} t - \frac{C_1 \eta_1 \eta_2}{E(\eta_1 + \eta_2)} e^{-E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t} + C_2 \right), \end{aligned} \quad (11)$$

де C_2 – деяка константа.

З умови $\varepsilon(0) = 0$ отримаємо

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{E}{\eta_1 \eta_2} \sigma \left(C_2 - \frac{C_1 \eta_1 \eta_2}{E(\eta_1 + \eta_2)} \right), \text{ звідки} \\ C_2 &= \frac{C_1 \eta_1 \eta_2}{E(\eta_1 + \eta_2)} = \frac{\eta_1^2 \eta_2^2}{E^2 \sigma (\eta_1 + \eta_2)} \left(C - \frac{\sigma}{\eta_1 + \eta_2} \right). \end{aligned} \quad (12)$$



Підставимо (10) і (12) в (11) і отримаємо

$$\varepsilon = \frac{\eta_1 \eta_2}{E(\eta_1 + \eta_2)} \left(C - \frac{\sigma}{\eta_1 + \eta_2} \right) \left(1 - \exp \left(-E \frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} t \right) \right) + \frac{\sigma}{\eta_1 + \eta_2} t. \quad (13)$$





ДОДАТОК 5

Реологічна модель деформації тромба і тканин мозку

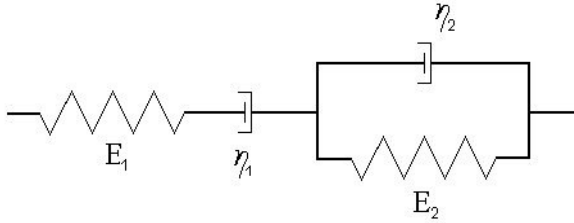


Рис. 1. Модель Бюргерса деформації тромба та тканин мозку

Диференціальне рівняння деформації:

$$\ddot{\varepsilon} + \frac{E_2}{\eta_2} \dot{\varepsilon} = \frac{1}{E_1} \ddot{\sigma} + \left[\frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \eta_2} + \frac{1}{\eta_1} \right] \dot{\sigma} + \frac{E_2}{\eta_1 \eta_2} \sigma. \quad (1)$$

Розв'язок рівняння 1.

Позначимо $\alpha = \frac{E_2}{\eta_2}$, $\beta = \frac{1}{E_1}$, $\gamma = \frac{(E_1 + E_2)}{E_1 \eta_2} + \frac{1}{\eta_1}$, $\delta = \frac{E_2}{\eta_1 \eta_2}$.

Підставимо в (1) і отримаємо

$$\ddot{\varepsilon} + \alpha \dot{\varepsilon} = \beta \ddot{\sigma} + \gamma \dot{\sigma} + \delta \sigma. \quad (2)$$

Звідси:

$$\dot{\varepsilon} + \alpha \varepsilon = \beta \dot{\sigma} + \gamma \sigma + \delta \int \sigma dt. \quad (3)$$

Зробимо заміну $\varepsilon = e^{-\alpha t} \varepsilon_I$. Тоді, підставивши її в (3), отримаємо:

$$e^{-\alpha t} \dot{\varepsilon}_I = \beta \dot{\sigma} + \gamma \sigma + \delta \int \sigma dt. \quad (4)$$

Звідси:

$$\dot{\varepsilon}_I = e^{\alpha t} (\beta \dot{\sigma} + \gamma \sigma + \delta \int \sigma dt) \quad (5)$$

і, проінтегрувавши, маємо:

$$\varepsilon_I = \beta \int e^{\alpha t} \dot{\sigma} dt + \gamma \int e^{\alpha t} \sigma dt + \delta \int e^{\alpha t} \int \sigma dt dt. \quad (6)$$



Перший інтеграл в (6) інтегруємо за частинами, тоді:

$$\varepsilon_I = \beta e^{\alpha} \sigma + (\gamma - \alpha \beta) \int e^{\alpha} \sigma dt + \delta \int e^{\alpha} \int \sigma dt dt. \quad (7)$$

Підставивши (7) в $\varepsilon = e^{-\alpha} \varepsilon_I$, отримаємо:

$$\varepsilon = \beta \sigma + (\gamma - \alpha \beta) e^{-\alpha} \int e^{\alpha} \sigma dt + \delta e^{-\alpha} \int e^{\alpha} \int \sigma dt dt, \quad (8)$$

або

$$\varepsilon = \frac{1}{E_1} \sigma + \left(\frac{\eta_1 + \eta_2}{\eta_1 \eta_2} \right) e^{-\frac{E_2}{\eta_2} t} \int e^{\frac{E_2}{\eta_2} t} \sigma dt + \frac{E_2}{\eta_1 \eta_2} e^{-\frac{E_2}{\eta_2} t} \int e^{\frac{E_2}{\eta_2} t} \int \sigma dt dt. \quad (9)$$





Бібліографічний опис

1. Антонов В. Ф. Физика и биофизика. Курс лекций для студентов медицинских вузов [Текст] / В. Ф. Антонов, А. В. Коржуев // М. : ГЭОТАР-МЕД, 2004. – 192 с.
2. Аруин А. С. Биомеханические свойства скелетных мышц и сухожилий [Текст] / А. С. Аруин, В. М. Заднорский // М. : ГЦОЛИФК, 1980. – 64 с.
3. Архипов О. А. Біомеханічний аналіз [навчальний посібник, 2-ге вид.] / О. А. Архипов // К. : НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2014. – 242 с.
4. Боечко В. Ф. Медицинская и биологическая физика [Текст] / В. Ф. Боечко и др. // Черновцы : Буковинская государственная меакадемия, 1998. – 366 с.
5. Бочаров А. Ф. Биомеханика : учебное пособие / А. Ф. Бочаров, Г. П. Иванова, В. П. Муравьев // СПб. [б.и.]: СПбГАФК им. П.Ф. Лесгафта, 2000. – 74 с.
6. Бранков Г. Основы биомеханики [Текст] / Г. Бранков // М. : «Мир», 1981. – 256 с.
7. Бялик М. В. Загальна фізика. Частина 1 [Інтерактивний комплекс] / М. В. Бялик та ін. // Рівне : Видав. НУВГП, 2009. – 397 с.
8. Владимиров Ю. А. Лекции по биологической и медицинской физике / Ю. А. Владимиров // М. : МГУ, 1999. – 660 с.
9. Волькенштейн М. В. Биофизика [учебное пособие для вузов] / М. В. Волькенштейн // М. : «Наука», 1989. – 489 с.
10. Гидроаэромеханика / Под ред. А. М. Прохорова // Физическая энциклопедия : В 3 т. – М., 1988. – Т. 1.
11. Гидромеханика / Под ред. А. М. Прохорова // Физическая энциклопедия : В 3 т. – М., 1988. – Т. 1.
12. Глазер Р. Очерк основ биомеханики [Текст] / Р. Глазер // М. : «Наука», 1988. – 129 с.
13. Горбачик В. Е. Основы анатомии, физиологии, антропометрии и биомеханики [учебное пособие] / В. Е. Горбачик // Витебск : УО «ВГТУ», 2011. – 125 с.
14. Григор'єва Л. І. Основи біофізики і біомеханіки : навч. посіб. [Текст] / Л. І. Григор'єва, Ю. А. Томілін // Миколаїв :



Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2011. – 297 с.

15. Григор'єва Л. І. Практикум з «Біофізики і біомеханіки» [навчальний посібник] / Л. І. Григор'єва, Ю. А. Томілін // Миколаїв : Вид-во ЧДУ ім. Петра Могили, 2005. – 44 с.

Донской Д. Д. Биомеханика : [уч. пособие] / Д. Д. Донской //

16. Динамика / Под ред. А. М. Прохорова // Физическая энциклопедия : В 3 т. – М., 1988. – Т. 1.

17. Дубровский В. И. Биомеханика [Текст] / В. И. Дубровский, В. Н. Федорова // М. : ВЛАДОС-ПРЕСС, 2003. – 669 с.

18. Заднорский В. М. Биомеханика двигательного аппарата человека [Текст] / В. М. Заднорский, А. С. Аруин, В. П. Селуянов // М. : Физкультура и спорт, 1981. – 143 с.

19. Кизилова Н. Н. Конспект лекций по курсу «Биомеханика» [Текст] / Н. Н. Кизилова // Харьков : ХТУРЭ, 1997. – 108 с.

20. Кизилова Н. Н. Методические указания к практическим занятиям по курсу «Биомеханика» [Текст] / Н. Н. Кизилова // Харьков : ХТУРЭ, 1999. – 52 с.

21. Кинасошвили Р. С. Сопротивление материалов [Текст] / Р. С. Кинасошвили // М. : «Наука», 1975. – 384 с.

22. Кинематика. / Под ред. А. М. Прохорова // Физическая энциклопедия : В 3 т. – М., 1990. – Т. 2.

23. Кичайкина Н. Б. Биомеханика : учебное-методическое пособие / Н. Б. Кичайкина, И. М. Козлов, А. В. Самсонова / Под ред. Н. Б. Кичайкиной // СПб : СПбГУФК [б.и.], 2008. – 160 с.

24. Костюков П. Г. Биофизика [Под общ. ред. П. Г. Костюкова] / П. Г. Костюков и др. // К. : Высш. шк., 1980. – 504 с.

25. Лапутин А. Н. Практическая биомеханика / А. Н. Лапутин, В. В. Гамалий, А. А. Архипов // К. : Науковий світ, 2000. – 298 с.

26. Лещенко В. Г. Медицинская и биологическая физика: учебное пособие [Текст] / В. Г. Лещенко, Г. К. Ильич // Минск : «Новое знание»; М. : ИНФРА-М, 2012. – 552 с.

27. Михасев Г. И. Биомеханика: [учебник] / Г. И. Михасев, А. В. Чигарев, А. В. Борисов // М. : Изд-во Гревцова, 2010. – 284 с.



28. Ньютона законы механики. / Под ред. А. М. Прохорова // Физический энциклопедический словарь. – М., 1984.
29. Олофинская В. П. Техническая механика: курс лекций с вариантами практических и тестовых заданий [Текст] / В. П. Олофинская // М. : ФОРУМ: ИНФРА-М, 2007. – 349 с.
30. Попов Г. И. Биомеханика двигательной деятельности [Текст] / Г. И. Попов, А.В. Самсонова // М. : Изд. центр «Академия». 2013. – 320 с.
31. Посудін Ю.І. Фізика і біофізика навколишнього середовища [Текст] / Ю.І. Посудін // Київ: Світ, 2000 р., 303с.
32. Посудін Ю. І. Фізика: Підручник [Текст] / Ю. І. Посудін // Біла Церква : Видавництво Білоцерківського національного аграрного університету, 2008. – 464 с.
33. Регирер С. А. Лекции по биологической механике [Текст] / С. А. Регирер // М. : Изд. МГУ, 1980. – 145 с.
34. Ремизов А. Н. Медицинская и биологическая физика: Учебн. для мед. вузов [Текст] / А.Н. Ремизов // М. : «Высшая школа», 1987. – 638 с.
35. Самсонова А. В. Моторная и сенсорная функции мышц в биомеханике локомоций : монография / А. В. Самсонова. Санкт-Петербургский гос. ун-т физ. культуры им. П. Ф. Лесгафта // СПб. : [б.и.], 2007. – 152 с.
36. Статика. / Под ред. А. М. Прохорова // Физический энциклопедический словарь. – М., 1984.
37. Тиманюк В. А. Биофизика [Текст] / В. А. Тиманюк, Е. Н. Животнова // К.: ИД «Профессионал», 2004. – 704 с.
38. Уилмор Дж. Х. Физиология спорта и двигательной активности [Текст] / Дж. Х. Уилмор, Д.Л.Костил // К : Олимпийская литература, 1997. – 504 с.
39. Федорова В. Н. Медицинская и биологическая физика. Курс лекций с задачами: учебное пособие [Текст] / В.Н. Федорова, Е. В. Фаустов // М. : ГЭОТАР-Медиа, 2008. – 592с.
40. Федешин Я. І. Фізика з основами біофізики [Текст] / Я. І. Федешин // Львів : Світ, 2000. – 458 с.
41. Чакак А. А. Физика. Выпуск 3. Работа. Мощность. Энергия. Законы сохранения механической энергии и импульса [Текст] / А. А. Чакак // Оренбург : ОГУ, 2012. – 120 с.



ЗМІСТ

Передмова	4
Розділ 1. Кінематика механічного руху	8
1.1. Основні поняття кінематики	8
1.2. Кінематичні характеристики поступального та обертального рухів	10
1.3. Поняття ступенів вільності тіла	15
1.4. Кінематичні характеристики живих організмів	17
Розділ 2. Динаміка	24
2.1. Основні поняття динаміки	24
2.2. Тіло як механічна система. Закон збереження імпульсу механічної системи	27
2.3. Закон руху центра мас (інерції) системи	29
2.4. Закони руху твердого тіла	31
2.5. Реологія матеріалів	35
2.6. Механічні та реологічні властивості біологічних тканин	44
2.6.1. Тверді біологічні тканини	45
2.6.2. М'які біологічні тканини	48
2.7. Реологічні моделі біологічних тканин	61
2.7.1. Реологічні моделі твердих біологічних тканин	61
2.7.2. Реологічні моделі м'яких біологічних тканин	65
2.8. Динаміка скорочення м'язів	73
2.9. Центр мас органів людини	77
Розділ 3. Статика	79
3.1. Аксиоми статички	80
3.2. Типи в'язей і напрям їх реакції в статиці	82
3.3. Момент сил відносно центра	85
3.4. Умови рівноваги в статиці	88
3.5. Опорно-рухова система людини	90
Розділ 4. Механіка рідинних та газових потоків	99
4.1. Закони гідростатики	99
4.2. Поверхневий натяг рідин	101
4.3. Закони гідродинаміки ідеальної рідини	107



4.4. Закони гідродинаміки в'язкої рідини	111
4.5. Рух сферичних тіл в в'язкому середовищі	115
4.6. Гемодинаміка	116
4.7. Аеродинаміка	126
4.8. Біологічна та медична апаратура гемодинаміки	128
4.8.1. Вимірювання тиску крові	128
4.8.2. Вимірювання в'язкості крові	129
4.8.3. Інфузійні прилади	134
4.8.4. Центрифуги	135
Розділ 5. Біомеханіка дихання	139
5.1. Біологічна та медична апаратура системи дихання	148
5.1.1. Вимірювання тиску у плеврі	148
5.1.2. Спірометр	149
5.2. Особливості дихальної системи земноводних та птахів	150
Розділ 6. Енергія, робота, потужність	153
6.1. Енергія	153
6.2. Механічна робота	153
6.3. Потужність	156
6.4. Механічна енергія	157
6.5. Енергія та обмін речовин	164
6.6. Робота та потужність серця	165
6.6.1. Апарат штучної підтримки роботи серця	168
6.7. Робота та потужність скорочення м'язів	169
ДОДАТОК 1 Реологічна модель деформації кісткової тканини	172
ДОДАТОК 2 Реологічна модель деформації хребта ..	173
ДОДАТОК 3 Реологічна модель деформації м'яких м'язів	176
ДОДАТОК 4 Реологічна модель деформації крові ..	177
ДОДАТОК 5 Реологічна модель деформації тромба і тканин мозку	180
Бібліографічний опис	182