

**Міністерство охорони здоров'я України
Харківський національний медичний університет**

**МЕДИЧНА ТА БІОЛОГІЧНА
ФІЗИКА**

Підручник для студентів медичних ВНЗ

За редакцією В. Г. Кнігавка

Харків ХНМУ 2013

УДК 61:53+577.3](07.07)
ББК 28.901я7
М 42

*Затверджено
вченою радою ХНМУ
Протокол № 5 від 20.05.2013*

Рецензенти:

В.О.Тіманюк - завідувач кафедри фізики
Національного фармацевтичного університету,
професор;

В.П. Берест – доцент кафедри біологічної і медичної
фізики Харківського національного університету ім.
В.Н.Каразіна.

Автори: Кнігавко В.Г., Зайцева О.В., Бондаренко М.А.,
Батюк Л.В., Мещерякова О.П., Радзішевська Є. Б.,
Гордієнко Н.О., Пономаренко Н.С., Гранкіна С.С., Лад
С.М., Левченко Т.В., Польотова Н.П., Рисована Л.М.,
Шуба І.В.

Медична та біологічна фізика: підручник для
студентів медичних ВНЗ / Кнігавко В.Г., Зайцева О.В.,
Бондаренко М.А. та ін.; за ред. В.Г.Кнігавка. - Харків:
ХНМУ, 2013. – 364 с.

У підручнику відповідно до типової програми викладені
найважливіші питання медичної та біологічної фізики.
Структура та зміст підручника цілком відповідають трансферно-
модульній системі організації навчального процесу.

Підручник призначений студентам медичних ВНЗ III – IV
рівнів акредитації, а також викладачам і всім, хто цікавиться
питаннями медичної та біологічної фізики.

УДК 61:53+577.3](07.07)
ББК 28.901я7

© Харківський національний
медичний університет, 2013

Розділ 1

ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

У першому розділі коротко викладені деякі питання вищої математики, а саме: елементи диференціального числення, елементи інтегрального числення, поняття про диференціальні рівняння. Обсяг викладення зазначених питань визначався так, щоб забезпечити студентам медичного університету набуття того рівня знань з вищої математики, який потрібен для наступного засвоєння інших розділів курсу «Медична та біологічна фізика». Враховуючи, що частина студентів одержала середню освіту в школах, а частина в спеціалізованих середніх навчальних закладах, матеріал, що викладається в першому розділі, частково містить повторення матеріалу, який вивчають у загальноосвітніх школах.

1.1 Основи диференціального числення

Перш ніж перейти до викладення матеріалу з диференціального числення, ми вважаємо за доцільне нагадати такі поняття, як функція, види функцій та границя функції.

Поняття функції, як правило, спочатку вводиться для однозначних функцій. **Змінна величина y називається функцією незалежної змінної величини x , якщо будь-якому певному значенню величини x (з безлічі її можливих значень) відповідає певне значення величини y .** Величина x при цьому називається аргументом. Наявність функціональної залежності між величинами y та x зазвичай позначається так:

$$y = f(x).$$

Якщо $f(-x) = -f(x)$, то $y = f(x)$ – непарна функція x . Якщо $f(-x) = f(x)$, то $y = f(x)$ – парна функція x . Якщо при $y = f(x)$ $x = \varphi(y)$, то функція $\varphi(y)$ – обернена функція для $f(x)$.

Нехай a й A – деякі числа. **Функція $f(x)$ має границю A при x , що прямує до a , якщо для кожного додатного числа ε**

існує таке додатне число δ , що при $|x - a| < \delta$ функція $f(x)$ визначена та $|f(x) - A| < \varepsilon$. Позначається границя функції так:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

Після визначення поняття границі функції можна перейти до визначення поняття похідної функції.

Нехай $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ – це приріст функції $y = f(x)$, пов'язаний з приростом аргументу Δx . Тоді **похідна функції у по аргументу x (звичайно позначається y')** – це границя відношення приросту функції до відповідного приросту аргументу за умови, що приріст аргументу нескінченно малий:

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Використовуються й інші позначення похідної:

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

Розглянемо геометричне тлумачення похідної. **Значення похідної y' при $x = x_0$ дорівнює тангенсові кута між дотичною до графіка функції $y = f(x)$, проведеної в точці x_0 , і віссю абсцис** (див. рис. 1.1).

Для викладення матеріалу наступних розділів підручника важливим є фізичний зміст похідної. В окремому випадку, коли незалежною змінною (аргументом) є час, тобто $x = t$, **похідна у по t** (зазвичай позначається \dot{y}) **дорівнює швидкості зміни функції y** . Наприклад, якщо y - координата, то \dot{y} - швидкість; якщо y - швидкість, то \dot{y} - прискорення; якщо y - заряд, що протікає через поперечний переріз провідника, то \dot{y} - сила струму в цьому провіднику.

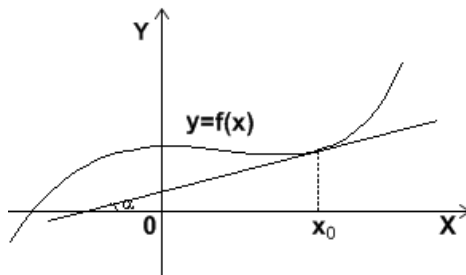


Рис. 1.1

Виходячи з визначення похідної, можна вивести її властивості та одержати формули для похідних деяких елементарних функцій, а саме:

- Нехай c - стале число (константа). Тоді $c' = 0$, тобто **похідна константи дорівнює нулю**.

- Нехай $u(x)$ та $v(x)$ - функції змінної x , $y = u(x) \pm v(x)$.

Тоді $y' = (u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x)$, тобто **похідна алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі похідних цих функцій**.

- Нехай $y = u(x) \cdot v(x)$. Тоді $y' = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$, тобто **похідна добутку двох функцій дорівнює сумі добутку похідної першої функції на другу функцію та добутку першої функції на похідну другої функції**.

Якщо маємо добуток трьох або більше функцій, то похідна такого добутку обчислюється як сума трьох або більше доданків відповідно, кожний з яких дорівнює добуткові похідної однієї з цих функцій на інші функції. Наприклад, якщо функція y є добутком трьох функцій ($y = u(x) \cdot v(x) \cdot w(x)$), то

$$y' = (u(x) \cdot v(x) \cdot w(x))' = u'(x) \cdot v(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v'(x) \cdot w(x) + u(x) \cdot v(x) \cdot w'(x).$$

- Нехай $y = c \cdot u(x)$, де c - сталий множник. Тоді $y' = c \cdot u'(x)$, тобто **сталий множник можна винести за знак похідної**.

• Нехай $y = \frac{u(x)}{v(x)}$. Якщо знаменник функції не дорівнює нулю ($v(x) \neq 0$), то

$$y' = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)},$$

тобто похідна частки двох функцій дорівнює відношенню, чисельник якого дорівнює різниці між добутком похідної чисельника частки на знаменник частки і добутком чисельника частки на похідну знаменника, а знаменник цього відношення дорівнює квадрату знаменника частки функцій.

Розглянемо тепер похідні деяких елементарних функцій:

- $y = x^n$; $y' = n \cdot x^{n-1}$.
- $y = \ln x$, $y' = \frac{1}{x}$.
- $y = \sin x$; $y' = \cos x$.
- $y = \cos x$; $y' = -\sin x$.
- $y = \operatorname{tg} x$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- $y = \operatorname{ctg} x$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.
- $y = \arcsin x$; $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $y = \arccos x$; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- $y = \operatorname{arctg} x$; $y' = \frac{1}{1+x^2}$.
- $y = \operatorname{arcctg} x$; $y' = -\frac{1}{1+x^2}$.
- $y = a^x$ (a – деяке додатне число); $y' = a^x \cdot \ln a$.

Якщо $a = e$ (e - основа натурального логарифма, $e \approx 2,7$), то

- $y = e^x$; $y' = e^x$.

При обчисленні похідних варто пам'ятати, що

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}; \quad \frac{1}{x^n} = x^{-n}; \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

Тому

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{n \cdot x} \quad (\text{зокрема, } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x}});$$

$$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = (-n) \cdot x^{-n-1} = \frac{-n}{x^{n+1}} \quad (\text{зокрема, } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2});$$

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} = \frac{\log_a e}{x}$$

$$(\text{зокрема, } (\lg x)' = \frac{1}{x \ln 10} = \frac{\lg e}{x} \approx \frac{0,43}{x}).$$

Перейдемо тепер до методики обчислення похідної *складної функції*. Нехай $y = f(u)$, де $u = \varphi(x)$, f й φ - деякі функції. У цьому випадку величина y є складною функцією незалежної змінної x , і кажуть, що функція y залежить від x за допомогою *проміжної змінної* u . Похідну складної функції знаходять за формулою

$$y' = y'(u) \cdot u'(x),$$

де y' - похідна y по x , $y'(u)$ - похідна y по u , $u'(x)$ - похідна u по x . Таким чином, **похідна складної функції дорівнює добутку похідної цієї функції по проміжній змінній на похідну проміжної змінної по незалежній змінній.**

Приклад 1. Нехай $y = 2^{\sin x}$. Тут $y = 2^u$; $u = \sin x$. Тоді $y'(u) = 2^u \cdot \ln 2$; $u'(x) = \cos x$ та $y' = 2^{\sin x} \cdot \ln 2 \cdot \cos x$.

Ми розглянули випадок, коли складна функція містила одну проміжну змінну (двоступінчаста складна функція). Розглянута методика обчислення похідної складної функції

може бути легко поширена на випадок довільного числа проміжних змінних. Як приклад розглянемо випадки двох та трьох проміжних змінних (випадки трьох- та чотириступінчастих функцій). Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(x)$, то $y' = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(x)$. Якщо $y = f(u)$, $u = \varphi(v)$, $v = \psi(w)$, $w = \xi(x)$, то $y' = f'(u) \cdot \varphi'(v) \cdot \psi'(w) \cdot \xi'(x)$.

Приклад 2. Нехай $y = \arctg \sqrt{x}$. Тоді

$$y' = \frac{1}{1+x} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Розглянемо тепер похідні вищих порядків. Якщо змінна y є функцією змінної x ($y = f(x)$), то похідна функції y (y') також є функцією x ($y' = \varphi(x)$). Від функції $\varphi(x)$, у свою чергу, можна знайти похідну. **Похідна функції, що є похідною первинної функції $y = f(x)$, називається похідною другого порядку у по x , або другою похідною у по x .** Для неї використовуються такі позначення $y'' = f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$. Зі сказаного вище зрозуміло також, що $y'' = \varphi'(x)$. Аналогічно можна ввести поняття *похідних вищих порядків у по x* , тобто похідних третього, четвертого, п'ятого і скільки завгодно вищих порядків. Вони позначаються відповідно y''' , y^{IV} , y^V , ..., $y^{(n)}$.

Приклад 3. Нехай $y = \sqrt{x^3} = x^{\frac{3}{2}}$. Тоді $y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}}$;
 $y'' = \frac{3}{4} x^{-\frac{1}{2}}$; $y''' = -\frac{3}{8} x^{-\frac{3}{2}}$; $y^{IV} = \frac{9}{16} x^{-\frac{5}{2}}$ та т. ін.

Дотепер ми розглядали функції, що залежать від одного аргументу. Однак функція може залежати від декількох аргументів. Наприклад, запис $z = f(x, y)$ є позначенням того, що змінна z є функцією двох аргументів: x та y , запис $u = f(x, y, z, t)$ - позначенням того, що змінна u є функцією чотирьох аргументів: x , y , z та t . Приріст значення функції

декількох змінних може відбуватися за рахунок приросту кожного з аргументів.

Нехай Δz_y та Δz_x - прирости функції $z = f(x, y)$ у випадках, коли величина y змінюється на Δy при сталому x та коли величина x змінюється на Δx при сталому y відповідно. Тоді ці прирости - це *частинні прирости* функції двох змінних при фіксованому значенні одного з аргументів (x або y відповідно). Отже, для функцій двох змінних можуть бути знайдені дві похідні, а саме: похідна z по y та похідна z по x . Такі похідні називаються *частинними похідними*. Частинна похідна z по y позначається або z'_y , або $\frac{\partial z}{\partial y}$, або $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ та визначається формулою

$$z'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y};$$

частинна похідна z по x позначається z'_x , або $\frac{\partial z}{\partial x}$, або $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$ та визначається формулою

$$z'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Правила знаходження частинних похідних ті самі, що й у випадку звичайних похідних, але, якщо ми беремо частинну похідну по якомусь аргументу, то всі інші аргументи при цьому вважаються сталими.

Приклад 4. Нехай $z = x^y + 3\ln x - 2\sin y$. Тоді

$$z'_x = yx^{y-1} + \frac{3}{x}; \quad z'_y = x^y \cdot \ln x - 2 \cdot \cos y.$$

Наступним важливим поняттям, без якого неможливе викладення основ вищої математики, є поняття *диференціала функції*. За визначенням **диференціал функції - це головна частина приросту функції, лінійна відносно приросту її аргументу**. Для функції $y = f(x)$ диференціал позначається dy або $df(x)$ та обчислюється за формулою

$$dy = y' dx ,$$

де dx - диференціал аргументу. Для аргументу (незалежної змінної) поняття диференціала і приросту збігаються. З формули, що визначає диференціал функції, зрозуміло, що знаходження диференціала функції зводиться до знаходження похідної цієї функції та множення її на диференціал аргументу.

Приклад 5. Нехай $y = 3^{\lg x}$. Тоді

$$y' = 3^{\lg x} \cdot \ln 3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \quad \text{та} \quad dy = \frac{3^{\lg x} \cdot \ln 3}{\cos^2 x} dx .$$

З поняттям похідної вищого порядку пов'язане і поняття *диференціала вищого порядку*. Диференціал другого порядку для функції $y = f(x)$ позначається $d^2 y$ й обчислюється за формулою

$$d^2 y = y'' dx^2 .$$

Аналогічно для диференціалів вищих порядків можна записати:

$$d^3 y = y''' dx^3 ;$$

$$d^4 y = y^{IV} dx^4 ;$$

.....

$$d^n y = y^{(n)} dx^n$$

Розглянемо приклад обчислення диференціалів вищих порядків.

Приклад 6. Нехай $y = e^{\sin x}$. Тоді

$$y' = e^{\sin x} \cdot \cos x ; \quad y'' = e^{\sin x} \cdot \cos^2 x - e^{\sin x} \cdot \sin x \quad \text{та}$$

$$d^2 y = (e^{\sin x} \cdot \cos^2 x - e^{\sin x} \cdot \sin x) dx^2 .$$

Для функцій декількох змінних поряд з поняттям частинної похідної вводиться і поняття *частинного диференціала*. **Частинний диференціал функції по деякому аргументу є добутком частинної похідної функції по цьому аргументу на диференціал цього самого аргументу.**

Наприклад, для функції $z = f(x, y)$ існують два частинних диференціала: по x та по y

$$dz_x = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx \quad \text{та} \quad dz_y = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy,$$

де dz_x і dz_y - частинні диференціали z по x та по y відповідно.

Для функції $u = f(x, y, z)$ існують три частинні диференціали: по x , по y та по z

$$du_x = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx; \quad du_y = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy \quad \text{та}$$

$$du_z = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz.$$

Сума всіх частинних диференціалів функції декількох змінних є повним диференціалом цієї функції. Так, у розглянутих вище прикладах

$$dz = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy \quad \text{та}$$

$$du = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} dy + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz,$$

де dz і du - повні диференціали функцій z та u відповідно.

Розглянемо приклад обчислення повного диференціала функції декількох змінних.

Приклад 7. Нехай $z = x^2 y^5$.

Тоді $dz = 2xy^5 dx + 5x^2 y^4 dy$.

Важливою є можливість застосування диференціала для наближених обчислень. Як зазначалося, диференціал - це головна частина приросту функції, причому, чим менший приріст аргументу, тим менша різниця між диференціалом функції та приростом функції. Тому для функції $y = f(x)$ при малих Δx можна записати $\Delta y \approx dy = y' dx$. З іншого боку, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$; $dx = \Delta x$. Звідси випливає формула, яка часто використовується при наближених обчисленнях:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \Delta x.$$

Ця формула застосовується в тому випадку, якщо значення $f(x)$ та $f'(x)$ відомі для деякого x_0 ($f(x_0)$ та $f'(x_0)$ відповідно), та необхідно обчислити значення $f(x_0 + \Delta x)$, де Δx - мале число.

Розглянемо застосування описаного підходу при наближених обчисленнях.

Приклад 8. Нехай необхідно обчислити $\ln(1,02)$. У цьому випадку

$$f(x_0 + \Delta x) = \ln(1,02); f(x) = \ln x; f'(x) = \frac{1}{x}; x_0 = 1; \Delta x = 0,02;$$

$$\ln(1,02) = \ln(1 + 0,02) = \ln(1) + \frac{1}{1} \cdot 0,02 = 0 + 0,02 = 0,02.$$

Для опису різних фізичних явищ (дифузія, електромагнітні явища та ін.) можуть використовуватися так звані *диференціальні оператори*, а саме: *градієнт скалярної функції* (grad), *дивергенція векторної функції* (div) та *ротор векторної функції* (rot).

Градiєнт скалярної функції – це вектор, проєкції якого на осі OX, OY та OZ дорівнюють частинним похідним цієї функції по аргументах x, y та z відповідно. Таким чином, для скалярної функції u

$$\vec{\text{grad}} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

де $\vec{\text{grad}} u$ - градієнт функції u, а \vec{i} , \vec{j} та \vec{k} - вектори одиничної довжини (*орти*), спрямовані вздовж осей OX, OY та OZ відповідно.

У кожній точці простору вектор градієнта скалярної функції спрямований у бік найшвидшого зростання цієї функції, а його модуль дорівнює швидкості зростання функції в цьому напрямку.

Дивергенція – це скаляр, величина якого обчислюється за формулою:

$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$

де \vec{A} - деяка векторна функція (величина).

У деяких задачах фізики дивергенція є питомою потужністю джерел векторної величини. В останній формулі такою величиною є величина \vec{A} .

Ротор – це вектор, який обчислюється за формулою:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

Формула для градієнта нам знадобиться при розгляді питань механіки рідин та у деяких інших розділах.

Формули для дивергенції та ротора потрібні для викладення питань, пов'язаних з електромагнітними явищами.

1.2 Основи інтегрального числення

Операція, обернена до операції диференціювання, тобто операція обчислення функцій за відомим диференціалом цих функцій (відомою похідною цих функцій), називається інтегруванням. Нагадаємо основні поняття, що стосуються інтегрування.

Нехай функції $F(x)$ та $f(x)$ пов'язані між собою співвідношенням $F'(x) = f(x)$. У цьому випадку функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$. Для однієї і тієї ж $f(x)$ існує безліч (нескінченно велике число) первісних функцій. Наприклад, для функції $f(x) = 4x^3$ первісними є функції x^4 ; $x^4 + 5$; $x^4 - 3$ та ін. Очевидно, що, якщо $F(x)$ є первісною функції $f(x)$, то будь-яка функція виду $F(x) + C$, де C - довільна константа, також є первісною функції $f(x)$, оскільки $[F(x) + C]' = F'(x) = f(x)$. Таким чином, усі первісні тої самої функції відрізняються одна від одної на константу.

Сукупність усіх первісних тої самої функції (нехай, $f(x)$), що відрізняються одна від одної на довільну константу (C), називається невизначеним інтегралом, що позначається

$$\int f(x)dx .$$

У цьому позначенні функція $f(x)$ називається підінтегральною функцією, а вираз $f(x)dx$ – підінтегральним виразом. Якщо $F'(x) = f(x)$, то

$$\int f(x)dx = F(x) + C .$$

Для обчислення невизначеного інтеграла треба знати його властивості, а саме:

- якщо A - константа, то

$$\int Af(x)dx = A \int f(x)dx ,$$

тобто **сталий множник можна виносити за знак інтеграла;**

- нехай $u(x)$ та $v(x)$ - деякі функції x . Тоді

$$\int (u(x) \pm v(x))dx = \int u(x)dx \pm \int v(x)dx ,$$

тобто **інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів цих функцій;**

- $d \int f(x)dx = f(x)dx ,$

тобто **диференціал невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу;**

- $\left(\int f(x)dx \right)' = f(x) ,$

тобто **похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції;**

- $\int dF(x) = F(x) + C ,$

тобто **інтеграл від диференціала функції дорівнює сумі цієї функції та довільної константи.** Звідси, зокрема, випливає, що

- $\int dx = x + C .$

Враховуючи, що операція інтегрування є оберненою до операції диференціювання, формули обчислення деяких найпростіших інтегралів можна одержати з формул обчислення похідних елементарних функцій:

- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \text{ (якщо } n \neq -1 \text{);}$
- $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C ;$

- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;
- $\int e^x dx = e^x + C$;
- $\int \sin x dx = -\cos x + C$;
- $\int \cos x dx = \sin x + C$;
- $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;
- $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;
- $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$;
- $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$.

Для більшості підінтегральних функцій невизначений інтеграл не може бути виражений через елементарні функції. У тих випадках, коли це все ж таки можливо, невизначений інтеграл знаходять, зводячи його до відомих (табличних) інтегралів. У деяких випадках цього можна досягти, здійснюючи алгебраїчні перетворення підінтегрального виразу. При цьому можуть також використовуватися перші дві властивості невизначеного інтеграла.

Приклад 1.

$$\begin{aligned} & \int \frac{3x^6 + x^2 \ln 2 - 7x + \sqrt{2} - x \cos x + 5x \cdot 2^x}{x} dx = \\ &= 3 \int x^5 dx + \ln 2 \int x dx - 7 \int dx + \sqrt{2} \int \frac{dx}{x} - \int \cos x dx + 5 \int 2^x dx = \\ &= \frac{3x^6}{6} + \frac{x^2 \ln 2}{2} - 7x + \sqrt{2} \ln|x| - \sin x + \frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2} + C . \end{aligned}$$

У деяких випадках звести вихідний інтеграл до табличного вигляду можна, використовуючи *метод заміни змінної (метод підстановки)*. При цьому вводиться нова змінна

(наприклад, t), що пов'язана функціональною залежністю з початковою змінною x , а саме $t = \varphi(x)$ або $x = \psi(t)$, де $\psi(t)$ - функція, обернена $\varphi(x)$. Потім установлюється зв'язок між dt та dx : $dx = \psi'(t)dt$ (або $dt = \varphi'(x)dx$). Підінтегральний вираз перетворюють так, щоб після перетворення він залежав від t і не залежав від x :

$$\int f(x)dx = \int f(\psi(t)) \cdot \psi'(t)dt.$$

Якщо функціональний зв'язок між t та x обраний вірно, то інтеграл, що одержаний в результаті перетворення, виявляється або табличним, або зводиться до табличного (табличних) за допомогою алгебраїчних перетворень.

Приклад 2.

$$\int x^2 e^{x^3-2} dx \left\| \begin{array}{l} t = x^3 - 2 \\ dt = 3x^2 dx \\ x^2 dx = \frac{dt}{3} \end{array} \right\| = \int e^t \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} e^t + C = \frac{1}{3} e^{x^3-2} + C.$$

Іноді невизначений інтеграл можна знайти, використовуючи *метод інтегрування частинами*. Нехай $u = u(x)$ та $v = v(x)$ є функціями x . Основна формула методу інтегрування частинами має такий вигляд:

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Часто буває так, що інтеграл $\int u dv$ за допомогою розглянутих раніше способів не зводиться до табличних, а інтеграл $\int v du$ або є табличним, або зводиться до табличного інтеграла (до табличних інтегралів). Саме у цьому випадку і застосовується метод інтегрування частинами.

Зазначимо важливі окремі випадки застосування інтегрування частинами. З використанням цього методу зазвичай знаходять інтеграли виду:

$\int x^n e^x dx$	$\int x^n \ln x dx$
-------------------	---------------------

$\int x^n a^x dx$	$\int x^n \arcsin x dx$
$\int x^n \sin x dx$	$\int x^n \arctg x dx$
$\int x^n \cos x dx$	
$u = x^n$	$dv = x^n dx$

Інтеграли, що стоять у лівому стовпчику, можна знайти при цілих невід'ємних значеннях n , причому інтегрування частинами необхідно проводити n разів. У цих інтегралах приймають $u = x^n$, а що стосується іншої частини підінтегрального виразу, то її приймають за dv . Інтеграл виду $\int x^n \ln x dx$ можна знайти при будь-якому значенні n , але при $n = -1$ його знаходять методом заміни змінної. Інтеграли виду $\int x^n \arcsin x dx$ та $\int x^n \arctg x dx$ можна знайти при цілих невід'ємних n , але при цьому приймають $dv = x^n dx$, а частина, що залишилась після цього від підінтегрального виразу, приймається за u .

Приклад 3.

$$\int x \cos x dx \left\| \begin{array}{l} u = x \\ dv = \cos x dx \\ du = dx \\ v = \sin x \end{array} \right\| = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Приклад 4.

$$\int x^4 \ln x dx \left\| \begin{array}{l} u = \ln x \\ dv = x^4 dx \\ du = \frac{1}{x} dx \\ v = \frac{x^5}{5} \end{array} \right\| = \ln x \cdot \frac{x^5}{5} - \int \frac{x^5}{5} \cdot \frac{1}{x} dx =$$

$$= \frac{x^5 \ln x}{5} - \int \frac{x^4}{5} dx = \frac{x^5 \ln x}{5} - \frac{x^5}{25} + C.$$

Крім невизначеного інтеграла, у вищій математиці використовується визначений інтеграл. Позначення визначеного інтеграла відрізняється від позначення невизначеного інтеграла тим, що під та над знаком інтеграла розміщені два числа (нехай a та b відповідно), які називаються *межами інтегрування*. Таким чином, визначений інтеграл у загальному випадку записується так:

$$\int_a^b f(x) dx.$$

На відміну від невизначеного інтеграла, що є функцією x , визначений інтеграл - це число, що може бути обчислене за формулою Ньютона -Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

де $F(b)$ та $F(a)$ – значення первісної $f(x)$ при $x = b$ та $x = a$.

Відповідно до формули Ньютона – Лейбніца, обчислення визначеного інтеграла зводиться до розглянутого раніше інтегрування функції $f(x)$, підстановці в отриманий вираз замість x чисел b і a , та обчислення різниці між отриманими при підстановці значеннями.

Приклад 5.

$$\int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3}.$$

При обчисленні визначеного інтеграла, як і у випадку невизначеного інтеграла, сталий множник можна виносити за знак інтеграла, а інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів від цих функцій. Крім того, визначений інтеграл має три властивості, притамані тільки йому, які відображаються такими формулами:

- $\int_a^a f(x) dx = 0;$

- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$;
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, де c - деяке число.

При використанні методу заміни змінної перехід до нової змінної в процесі обчислення визначеного інтеграла пов'язаний не тільки зі зміною підінтегрального виразу, але також зі зміною меж інтегрування. Крім того, після знаходження первісної, немає необхідності повертатися до початкової змінної, як це робилося у випадку невизначеного інтеграла. Слід відразу підставляти в отриманий вираз нові межі інтегрування.

Приклад 6.

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx \left\| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x} dx \\ t_1 = \ln 1 = 0 \\ t_2 = \ln 2 \end{array} \right\| = \int_0^{\ln 2} t dt = \left. \frac{t^2}{2} \right|_0^{\ln 2} = \frac{\ln^2 2}{2} - 0 = \frac{\ln^2 2}{2} .$$

Тут і далі t_1 та t_2 – це нові нижня та верхня межі інтегрування відповідно.

При обчисленні визначеного інтеграла формула інтегрування частинами має такий вигляд:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du .$$

Розглянемо приклад застосування методу інтегрування частинами у випадку визначеного інтеграла.

Приклад 7.

$$\int_0^1 x \cdot \arctg x dx = \left\| \begin{array}{l} u = \arctg x \\ dv = x dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\| = \arctg x \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \left(\int_0^1 dx - \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} \right) = \frac{\pi}{8} - \frac{x}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

При розв'язанні деяких задач використовується геометричний зміст визначеного інтеграла. Нехай $f(x)$ - функція, графік якої показаний на рис. 1.2. Тоді $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції, обмеженої лініями $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$, $x = b$, (площі заштрихованої фігури на рис. 1.2).

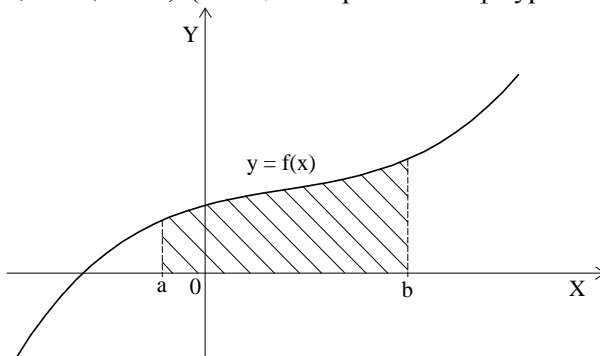


Рис. 1.2

Якщо числа a та b такі, що в інтервалі від a до b графік функції $y = f(x)$ перетинає вісь абсцис, то $\int_a^b f(x)dx$ дорівнює різниці площ фігур, розташованих вище і нижче осі абсцис, (на рис. 1.3 $\int_a^b f(x)dx = S_2 - S_1$).

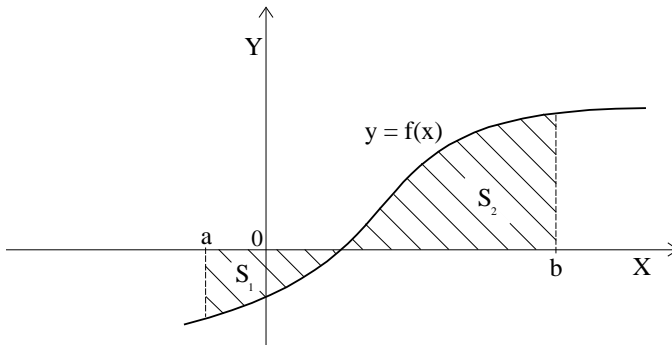


Рис. 1.3

1.3 Поняття про диференціальні рівняння

Диференціальним рівнянням називається рівняння, що пов'язує незалежну змінну x , шукану функцію $y(x)$ та її похідні по x : $y'(x)$, $y''(x)$, . . . , $y^{(n)}(x)$. За наявності однієї незалежної змінної, як у наведеному визначенні, рівняння називається *звичайним диференціальним рівнянням*. У випадку кількох незалежних змінних рівняння називається *диференціальним рівнянням у частинних похідних*.

Порядком диференціального рівняння називається найвищий порядок похідної, що міститься у рівнянні (порядок старшої похідної).

Наведемо кілька прикладів:

$$(yy')^2 + y \sin x = 2;$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + by = c,$$

де a , b , c – сталі, x – аргумент, y – шукана функція.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 3 \left(\frac{\partial z}{\partial y} + z \right),$$

де x , y – аргументи, z – шукана функція.

Перше з наведених рівнянь є звичайним диференціальним рівнянням першого порядку, друге – це звичайне диференціальне рівняння другого порядку, а третє рівняння є

диференціальним рівнянням у частинних похідних другого порядку.

Розв'язання диференціального рівняння полягає у знаходженні такої функції $y(x)$, що при її підстановці в це рівняння воно перетворюється на тотожність. Розв'язання диференціального рівняння є неоднозначним, тобто існує безліч функцій, що задовольняють цьому рівнянню. Для однозначності (єдиності) розв'язання необхідно сформулювати деякі додаткові умови (які зазвичай називаються *початковими* або *граничними умовами*). Неоднозначність розв'язання диференціального рівняння пов'язана з тим, що знаходження його розв'язку потребує проведення операції інтегрування, внаслідок чого цей розв'язок містить довільну сталу інтегрування. Більш того, при знаходженні *аналітичного розв'язку* (розв'язку у вигляді формули) диференціального рівняння n -го порядку інтегрування виконується n разів, внаслідок чого *загальний розв'язок* диференціального рівняння n -го порядку містить n довільних сталих інтегрування. Маючи n початкових або граничних умов, можна визначити чисельні значення сталих інтегрування та, тим самим, знайти *частинний розв'язок* диференціального рівняння. Підкреслимо, що загальний розв'язок диференціального рівняння - це сукупність всіх його частинних розв'язків.

Одержання аналітичного розв'язку диференціального рівняння часто буває складним, а нерідко - і неможливим. Для знаходження аналітичного розв'язку в тих випадках, коли це можливо, застосовуються різні методи залежно від виду рівняння.

Ознайомимось з методами розв'язання деяких видів диференціальних рівнянь. Почнемо зі звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

У загальному випадку звичайне диференціальне рівняння першого порядку має вигляд

$$\Phi(x, y, y') = 0.$$

Розглянемо деякі прості типи рівнянь першого порядку, розв'язання яких зводиться до знаходження невизначених інтегралів, а саме: *рівняння зі змінними, що розділяються; рівняння, однорідні щодо змінних y та x ; лінійні рівняння.*

Почнемо з рівнянь зі змінними, що розділяються. До таких рівнянь належать рівняння виду

$$y' = \frac{M(x)}{N(y)}.$$

Підставивши замість y' відношення $\frac{dy}{dx}$, запишемо це рівняння у вигляді

$$N(y)dy = M(x)dx.$$

Ми бачимо, що функції змінних x та y разом з диференціалами цих змінних стоять тепер у рівнянні по різні боки знака “=”, тобто вихідне рівняння допускає *розділення змінних* x та y . Проінтегрувавши останнє рівняння, одержуємо

$$\int N(y)dy = \int M(x)dx.$$

Ця формула є загальним розв’язком вихідного рівняння у *неявній* формі. Якщо можливо виконати інтегрування, а потім розв’язати рівняння відносно змінної y , тобто перетворити його у такий спосіб, щоб ліва частина рівняння була функцією тільки змінної y , а права частина тільки функцією змінної x , то отримаємо загальний розв’язок рівняння у *явному* вигляді.

Розглянемо приклад розв’язання диференціальних рівнянь зі змінними, що розділяються.

Приклад 1. Знайти частинний розв’язок рівняння

$$y' - y^2 \cos x \cdot \sin x = 0,$$

що задовольняє умові $y \Big|_{x = \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$.

Розділяємо змінні

$$\frac{dy}{y^2} = \cos x \cdot \sin x dx.$$

Проінтегрувавши обидві частини цього рівняння, отримаємо загальний розв’язок у неявному вигляді:

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \sin^2 x + C$$

Підставляючи в загальний розв'язок $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 2$, для визначення сталої C отримаємо

$$-\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + C, \quad \text{звідки} \quad C = -\frac{3}{4}.$$

Отже, шуканий частинний розв'язок має вигляд

$$\frac{1}{y} = -\frac{2 \sin^2 x - 3}{4} \quad \text{або у явному вигляді} \quad y = \frac{4}{3 - 2 \sin^2 x}.$$

Важливим рівнянням, що належить до рівнянь зі змінними, що розділяються, є рівняння

$$y' = ky.$$

Розділивши змінні та проінтегрувавши, отримаємо загальний розв'язок

$$\frac{dy}{y} = k dx, \quad \ln|y| = kx + C, \quad y = \pm A e^{kx}, \quad \text{де } A = e^C.$$

Якщо є початкова умова $y(x_0) = y_0$, то, визначивши A з умови $y_0 = \pm A e^{kx_0}$, отримаємо частинний розв'язок

$$y(x) = \pm y_0 e^{k(x-x_0)}.$$

Розглянуте рівняння описує процеси, при яких швидкість зміни деякої величини пропорційна поточному значенню цієї величини (наприклад, поширення епідемії, зростання внеску в банку, радіоактивний розпад атомних ядер, поглинання звуку або світла речовиною та ін.).

Перейдемо до рівнянь, однорідних відносно змінних y та x . У таких рівняннях сума показників степенів x та y є однаковою в кожному з доданків. Розділивши обидві частини такого рівняння на x^n , де n – максимальний степінь x у рівнянні, перетворюють це рівняння до вигляду

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Після цього вводиться нова змінна $t = \frac{y}{x}$. Тепер $y = tx$ та $y' = t'x + t$, після чого вихідне рівняння набуває вигляду:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{f(t) - t}{x},$$

тобто з однорідного рівняння ми одержуємо рівняння зі змінними, що розділяються, методика розв'язання якого вже описана вище.

Розглянемо приклад розв'язання однорідних рівнянь.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 y',$$

що задовольняє умові $y|_{x=1} = 1$.

Розділимо вихідне рівняння на x^2 :

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = y'.$$

Тепер, виконавши заміну $t = \frac{y}{x}$, перетворимо останнє рівняння до вигляду

$$1 + t^2 = t'x.$$

Розділяючи змінні та проінтегрувавши, отримаємо загальний розв'язок

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{dx}{x},$$

$$\text{звідки} \quad \text{arctg} t = \ln|x| + C \quad \text{або} \quad \text{arctg} \frac{y}{x} = \ln|x| + C.$$

Використовуючи граничну умову, для знаходження значення константи C отримаємо:

$$\text{arctg} 1 = \ln|1| + C, \quad \text{звідки} \quad C = \frac{\pi}{4}.$$

Повертаючись до початкової змінної, отримуємо частинний розв'язок в явному вигляді

$$y = x \operatorname{tg} \left(\ln|x| + \frac{\pi}{4} \right).$$

Тепер перейдемо до розгляду лінійних диференціальних рівнянь першого порядку. Такі рівняння у загальному випадку мають такий вигляд:

$$y' + f(x)y = g(x).$$

Якщо $g(x) \neq 0$, то рівняння є лінійним *неоднорідним* рівнянням. Якщо $g(x) = 0$, то таке рівняння називається лінійним *однорідним*. Лінійне однорідне рівняння є рівнянням зі змінними, що розділяються, методика розв'язання якого описана раніше.

Лінійне неоднорідне рівняння можна розв'язувати за методикою, що викладається нижче.

Функція $y(x)$ завжди може бути подана у вигляді добутку двох функцій:

$$y(x) = u(x) \cdot v(x).$$

Тоді вихідне рівняння перетворюється до вигляду

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) + f(x) \cdot u(x) \cdot v(x) = g(x)$$

або

$$u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot (v'(x) + f(x) \cdot v(x)) = g(x).$$

Зазначимо, що у ролі функції $v(x)$ можна вибрати будь-яку функцію, а функція $u(x)$ при цьому визначатиметься формулою

$$u(x) = \frac{y(x)}{v(x)}.$$

Оберемо функцію $v(x)$ такою, щоб

$$v'(x) + f(x) \cdot v(x) = 0.$$

Останнє рівняння - це рівняння зі змінними, що розділяються. Розв'язуючи його, отримуємо

$$\frac{dv(x)}{v(x)} = -f(x)dx, \quad \text{звідки} \quad \ln|v(x)| = -\int f(x)dx \quad \text{та}$$

$$v(x) = e^{-F(x)}, \quad \text{де} \quad F(x) = \int f(x)dx.$$

Після такого введення функції $v(x)$ рівняння для функції $u(x)$ має наступний вигляд:

$$u'(x) \cdot v(x) = g(x),$$

і це рівняння також є рівнянням зі змінними, що розділяються.

Розв'язуючи його, знаходимо:

$$u(x) = \int \frac{g(x)}{v(x)} dx = \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx ,$$

звідки, використовуючи вирази для $u(x)$ та $v(x)$, остаточно отримуємо:

$$y(x) = e^{-F(x)} \cdot \int g(x) \cdot e^{F(x)} dx .$$

Розглянемо приклад розв'язання лінійних рівнянь.

Приклад 3. Знайти частинний розв'язок рівняння

$$x^2 y' = 2xy - 3 ,$$

що задовольняє граничній умові $y \Big|_{x=-1} = 1$.

Вихідне рівняння перетворюється до вигляду

$$y' - \frac{2y}{x} = -\frac{3}{x^2} .$$

Таким чином, це рівняння є лінійним неоднорідним рівнянням, причому $f(x) = -\frac{2}{x}$, а $g(x) = -\frac{3}{x^2}$. Тепер

$$F(x) = \int \left(-\frac{2}{x} \right) dx = -2 \ln|x| + C_1 .$$

Для подальших обчислень ми можемо використовувати будь-яку з первісних. Виберемо $F(x) = -2 \ln x$. Тоді

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{2 \ln x} \cdot \int \left(-\frac{3}{x^2} \right) \cdot e^{-2 \ln x} dx = -x^2 \cdot \int \frac{3}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} dx = \\ &= -x^2 \cdot \int \frac{3 dx}{x^4} = x^2 \cdot \left(\frac{1}{x^3} + C \right) = \frac{1}{x} + C x^2 . \end{aligned}$$

Таким чином, $y = \frac{1}{x} + Cx^2$ - це загальний розв'язок рівняння. Використовуючи вищенаведену граничну умову, отримаємо

$$1 = -1 + C, \text{ звідки } C = 2.$$

Тоді частинний розв'язок вихідного рівняння, який задовольняє граничній умові, має вигляд:

$$y = \frac{1}{x} + 2x^2.$$

Наостаннє, трохи про диференціальні рівняння вищих порядків. У загальному випадку диференціальне рівняння n-го порядку має вигляд

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 \dots$$

Проінтегрувати рівняння вищого порядку до кінця вдається рідко. Часто розв'язок диференціальних рівнянь вищого порядку шукають шляхом зниження порядку цих рівнянь.

Серед диференціальних рівнянь вищих порядків практично важливими є *диференціальні рівняння з сталими коефіцієнтами*. Рівняння виду

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = f(x)$$

називається *неоднорідним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами*. Якщо ж $f(x) = 0$, то таке рівняння називається *однорідним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами*. До диференціальних рівнянь з сталими коефіцієнтами належать, зокрема, рівняння вільних незгасаючих та вільних згасаючих коливань, про що докладніше йтиметься в одному з наступних розділів.

Розділ 2

ОСНОВИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ, МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ, ТА МЕТОДІВ ОБРОБКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ВИМІРЮВАНЬ

У цьому розділі спочатку вводяться основні поняття та

формули теорії ймовірностей, на основі чого далі розглядаються основні поняття та деякі важливі задачі математичної статистики, а також застосування статистичних підходів при обробці результатів вимірювань.

2.1 Основи теорії ймовірностей

У теорії ймовірностей розглядаються *випадкові події*. **Випадковою подією називається подія, яка може відбутися або не відбутися при виконанні певного комплексу умов.** Наприклад, при киданні грального кубика може відбутися така подія, як випадіння на його верхній грані трьох точок, але ця подія може і не відбутися. Таким чином, поява трьох точок на верхній грані кубика - це випадкова подія. **Комплекс умов, які необхідні для того, щоб подія могла відбутися (або не відбутися), називається випробуванням (дослідом).** У наведеному прикладі випробування - це кидання кубика. Інший приклад випробування – це постріл. При цьому може відбутися така випадкова подія, як улучення в мішень, але ця подія може і не відбутися.

Наслідком випробування називається поява в результаті цього випробування якої-небудь випадкової події. Якщо в результаті випробування відбувається подія, що нас цікавить, кажуть про *сприятливий* наслідок випробування. Якщо ж така подія не відбувається, наслідок називають *несприятливим*.

Випадковим подіям притамані закономірності, які виявляються при багаторазових (масових) випробуваннях. Для кількісного опису цих закономірностей використовується поняття *відносної частоти події*. Нехай відбулося n випробувань та виявилось, що число сприятливих наслідків дорівнює m (подія A виникла m раз у n випробуваннях). Тоді **відносна частота події A ($P^*(A)$) - це відношення числа сприятливих наслідків до повного числа випробувань, тобто**

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Враховуючи, що $0 \leq m \leq n$, для відносної частоти випадкової події запишемо: $0 \leq P^*(A) \leq 1$.

Якщо провести декілька серій з невеликого числа випробувань, то найчастіше виявиться, що відносна частота в різних серіях приймає різні значення, які можуть значно відрізнятися одне від одного. Але якщо збільшувати число випробувань у серіях, то найчастіше значення величини $P^*(A)$ у кожній із серій виявлятимуться все ближчими одне до одного. Таким чином, із збільшенням кількості випробувань у серії випробувань відносна частота випадкової події прямує до деякої границі, яка називається *ймовірністю випадкової події* $P(A)$, тобто

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} P^*(A).$$

Остання формула є *статистичним визначенням імовірності*. Таким чином, у відповідності із статистичним визначенням, **імовірність випадкової події – це границя, до якої прямує відносна частота цієї події при необмеженому збільшенні числа випробувань.**

Імовірність випадкової події - найважливіша її кількісна характеристика, яка є мірою можливості реалізації випадкової події при випробуваннях.

При практичному використанні статистичного визначення ймовірності найскладнішим є питання про те, яка найменша кількість випробувань необхідна, аби значення відносної частоти випадкової події можна було прийняти як значення ймовірності, тобто щоб була забезпечена потрібна точність визначення $P(A)$.

Наступним важливим поняттям є поняття *рівноможливих наслідків*. **Якщо в результаті випробування можлива поява різних наслідків, причому немає підстав вважати, що якийсь з цих наслідків може з'являтися частіше або рідше за інші, то ці наслідки називають рівноможливими.** Наприклад, при киданні грального кубика немає підстав вважати, що поява зверху якоїсь конкретної грані відбуватиметься частіше або рідше за появу будь-якої іншої грані, тобто поява зверху будь-якої із граней грального кубика є рівноможливим наслідком.

Якщо всі наслідки, які можуть з'являтися при випробуванні є рівноможливими, то для визначення ймовірності події можна використовувати *класичне визначення ймовірності*.

Відповідно до класичного визначення, **ймовірність випадкової події - це відношення числа сприятливих наслідків до повного числа всіх рівноможливих наслідків, тобто**

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де $P(A)$ - ймовірність випадкової події A , m - число сприятливих наслідків, n - повне число всіх рівноможливих наслідків.

Для ймовірності випадкової події, як і для її відносної частоти, виконується нерівність $0 \leq P(A) \leq 1$, тобто ймовірність – невід’ємна величина, що менша або дорівнює одиниці. У випадку, якщо $m = n$, ніякі інші наслідки, крім сприятливих, неможливі. **Подія, яка не може не відбутися при випробуванні, називається вірогідною.** Її ймовірність дорівнює 1. Якщо $m = 0$, а $n \neq 0$, то сприятливий наслідок неможливий. **Подія, яка не може відбутися при випробуванні, називається неможливою.** Її ймовірність дорівнює 0.

Формули, за допомогою яких визначалося поняття ймовірності, використовуються для обчислення ймовірностей випадкових подій тільки у найпростіших випадках. У складніших випадках необхідно використовувати теореми додавання та (або) множення ймовірностей.

Перш, ніж вивчати ці теореми, введемо ще деякі поняття. **Події A та B називаються несумісними, якщо поява події A виключає можливість появи події B .** Наприклад, поява двох або трьох точок на верхній грані грального кубика при його одноразовому киданні є несумісними подіями, оскільки можливе випадіння двох або трьох крапок при різних випробуваннях, але неможливе їхнє одночасне випадіння при одноразовому киданні одного кубика.

Якщо несумісні події $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ утворюють таку групу подій, що у результаті випробування обов'язково відбувається одна з цих подій та не може відбутися ніяка інша подія, яка не входить до цієї групи, то кажуть, що події $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ утворюють повну групу подій.

Несумісні події A та B є *протилежними*, якщо з того факту, що при випробуванні не відбулася одна з них, випливає факт, що при цьому обов'язково відбулася інша. Наприклад, при киданні монети події, які полягають у випадінні зверху однієї із сторін (герб або цифра), є протилежними. Якщо дві несумісні події утворюють повну групу подій, вони є протилежними. Подія, протилежна події A , позначається \bar{A} .

Події A та B називаються *незалежними*, якщо ймовірність однієї з них не залежить від того, відбулася чи не відбулася інша. Наприклад, при дворазовому киданні монети подія A , якою є випадіння «герба» при першому киданні, та подія B , якою є випадіння «герба» при другому киданні, є незалежними. Події A та B називаються *залежними*, якщо ймовірність однієї з них залежить від того, відбулася чи не відбулася інша. При цьому, якщо ймовірність події B залежить від того, відбулася чи не відбулася подія A , кажуть про умовну ймовірність події B , і для цієї ймовірності використовується позначення $P(B/A)$. Для кращого розуміння терміна умовна ймовірність розглянемо такий приклад. З ящика, у якому знаходяться дві білі та дві чорні кулі, які відрізняються тільки кольором, виймають, не дивлячись, дві кулі, причому перша вийнята куля назад не повертається. Подія B полягає в тому, що друга куля є білою. Ця подія є залежною від події A , яка полягає в тому, що і перша куля є білою. Зрозуміло, що якщо подія A відбулася, то умовна ймовірність події B ($P(B/A)$) дорівнює $\frac{1}{3}$, якщо не відбулася, то умовна ймовірність події B

($P(B/\bar{A})$) дорівнює $\frac{2}{3}$.

Тепер, після того як необхідні поняття сформульовані, розглянемо теорему додавання та множення ймовірностей.

Теорему додавання ймовірностей сформулюємо тільки для випадку несумісних подій. Якщо є кілька несумісних подій A_1, A_2, \dots, A_n , то ймовірність складної події, яка полягає в тому, що відбудеться одна з цих подій (тобто відбудеться або подія A_1 , або подія A_2 , ... або подія A_n), дорівнює сумі ймовірностей цих подій, тобто

$$P(A_1 \text{ або } A_2 \dots \text{ або } A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

З теореми додавання ймовірностей випливають важливі наслідки:

1. Якщо несумісні події A_1, A_2, \dots, A_n утворюють повну групу подій, то

$$P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \dots + P(A_n) = 1.$$

2. Якщо події A та B є протилежними, то

$$P(A) + P(B) = 1 \quad \text{або} \quad P(A) = 1 - P(B).$$

Теорему множення ймовірностей сформулюємо спочатку для незалежних подій. **Якщо події A_1, A_2, \dots, A_n – незалежні, то ймовірність складної події, яка полягає в тому, що відбудуться всі ці події (тобто відбудеться і подія A_1 , і подія A_2 , ... і подія A_n), дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто**

$$P(A_1 \text{ і } A_2 \dots \text{ і } A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n).$$

Теорему множення ймовірностей для залежних подій спочатку сформулюємо для двох подій. **Якщо події A_1 та A_2 - залежні, то ймовірність складної події, яка полягає в тому, що відбудуться всі ці події (і подія A_1 , і подія A_2), дорівнює добутку ймовірностей однієї з цих подій на умовну ймовірність другої, тобто**

$$P(A_1 \text{ і } A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = P(A_2) \cdot P(A_1 / A_2).$$

Теорема множення ймовірностей для залежних подій аналогічно записується для будь-якого числа подій. Наприклад, для трьох подій відповідна формула має вигляд:

$$P(A_1 \text{ і } A_2 \text{ і } A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) \cdot P(A_3 / (A_1 \text{ і } A_2)).$$

З теорем додавання та множення ймовірностей виводиться кілька важливих формул: *формула Бернуллі, формула повної ймовірності, формула Байєса.*

Формула Бернуллі використовується у випадку, якщо наслідком випробування може бути поява однієї з двох протилежних подій. Нехай ймовірність однієї з них дорівнює p , а ймовірність другої дорівнює q , причому $q = 1 - p$. Якщо у цьому випадку проводиться n випробувань, причому ймовірність появи першої події при кожному наступному випробуванні не залежить від того, яка з цих двох подій відбулася у попередніх випробуваннях, то ймовірність того, що перша подія при цьому

відбудеться m раз ($P(m \text{ з } n)$), може бути знайдена за формулою Бернуллі:

$$P(m \text{ з } n) = \frac{n!}{m!(n-m)!} \cdot p^m \cdot q^{n-m},$$

де $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$. Нагадаємо, що $0! = 1$.

Формули повної ймовірності та Байєса використовуються у випадках, якщо подія A може відбуватися тільки разом з однією із несумісних подій B_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які утворюють повну групу подій. Нехай ймовірність події B_i дорівнює $P(B_i)$, а ймовірність події A за умови, що відбулася подія B_i , дорівнює $P(A/B_i)$. Тоді безумовна ймовірність події A може бути знайдена за формулою повної ймовірності:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A/B_1) \cdot P(B_1) + P(A/B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A/B_n) \cdot P(B_n) = \\ &= \sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i). \end{aligned}$$

Нехай тепер $P(B_j/A)$ – це ймовірність події B_j за умови, що подія A вже відбулася. Тоді ця ймовірність може бути знайдена за формулою Байєса:

$$P(B_j/A) = \frac{P(A/B_j) \cdot P(B_j)}{P(A)} = \frac{P(A/B_j) \cdot P(B_j)}{\sum_{i=1}^n P(A/B_i) \cdot P(B_i)}.$$

Зазначимо, що при застосуванні формули Байєса, ймовірності $P(B_i)$ називають апіорними, а ймовірності $P(B_j/A)$ – апостеріорними.

Розглянемо деякі приклади розв'язання задач.

Приклад 1. У ящику 20 куль, серед яких є кулі білого, чорного та зеленого кольору. З ящика, не дивлячись, дістають одну кулю. Ймовірність того, що ця куля біла ($P(б)$), дорівнює 0,5, а ймовірність того, що вона зелена ($P(з)$), дорівнює 0,2. Скільки у ящику чорних куль?

Нехай m – шукане число чорних куль, а $P(ч)$ – ймовірність того, що вийнята куля – чорна. Тоді $P(ч) = \frac{m}{20}$. З іншого боку, події, які полягають в тому, що вийнята куля є білою, чорною

або зеленою, утворюють повну групу несумісних подій. Тому

$$P(\text{б}) + P(\text{ч}) + P(\text{з}) = 1, \quad \text{звідки} \\ P(\text{ч}) = 1 - P(\text{б}) - P(\text{з}) = 1 - 0,5 - 0,2 = 0,3.$$

Тоді

$$\frac{m}{20} = 0,3 \quad \text{та} \quad m = 20 \cdot 0,3 = 6.$$

Приклад 2. Ймовірність народження хлопчика ($P(\text{х})$) дорівнює 0,52. У родині троє дітей. Яка ймовірність того, що а) у родині три хлопчики; б) у родині один хлопчик; в) у родині є хоча б одна дівчинка?

Народження хлопчика та дівчинки – це протилежні події. Тому ймовірність народження дівчинки ($P(\text{д})$) дорівнює

$$P(\text{д}) = 1 - P(\text{х}) = 1 - 0,52 = 0,48.$$

а) Відповідно до теореми множення ймовірностей для незалежних подій

$$P(3\text{х}) = P(\text{х}) \cdot P(\text{х}) \cdot P(\text{х}) = 0,52 \cdot 0,52 \cdot 0,52 = 0,14$$

б) Відповідно до теорем додавання та множення ймовірностей

$$P(1\text{ х}) = P((\text{х і д і д}) \text{ або } (\text{д і х і д}) \text{ або } (\text{д і д і х})) = \\ = P(\text{х}) \cdot P(\text{д}) \cdot P(\text{д}) + P(\text{д}) \cdot P(\text{х}) \cdot P(\text{д}) + P(\text{д}) \cdot P(\text{д}) \cdot P(\text{х}) = \\ = 0,52 \cdot 0,48 \cdot 0,48 + 0,48 \cdot 0,52 \cdot 0,48 + 0,48 \cdot 0,48 \cdot 0,52 = 0,36.$$

в) Подія, яка полягає в тому, що у родині є хоча б одна дівчинка, та подія, яка полягає в тому, що у родині немає жодної дівчинки (тобто у родині три хлопчики), є протилежними. Тому для шуканої ймовірності запишемо:

$$P(\text{хоча б одна дівчинка}) = 1 - P(3\text{х}) = 1 - 0,14 = 0,86.$$

Приклад 3. У ящику знаходяться 5 білих куль, 3 чорні кулі та 2 зелені кулі. Не дивлячись, з ящика виймають дві кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі чорні, якщо: а) перша вийнята куля повертається назад у ящик до того, як буде вийнята друга куля; б) перша вийнята куля назад не повертається?

Використаємо теорему множення ймовірностей, враховуючи, що в першому випадку події незалежні, а у другому - залежні.

$$\text{а) } P(\text{чорний і чорний}) = P(\text{чорний}) \cdot P(\text{чорний}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{3}{10} = 0,09;$$

$$\text{б) } P(\text{чорний і чорний}) = P(\text{чорний}) \cdot P(\text{чорний} / \text{чорний}) = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{15}.$$

Приклад 4. Студент знає 96 зі 100 питань, винесених на іспит. Яка ймовірність того, що з трьох питань, які є у білеті він:
а) знає всі три питання; б) знає одне питання; в) знає не більш двох питань?

$$\text{а) } P(3 \text{ з}) = P(з) \cdot P(з/з) \cdot P(з/(з \text{ і } з)) = \frac{96}{100} \cdot \frac{95}{99} \cdot \frac{94}{98} = 0,88;$$

$$\begin{aligned} \text{б) } P(1 \text{ з}) &= P(з) \cdot P(н/з) \cdot P(н/(з \text{ і } н)) + \\ &+ P(н) \cdot P(з/н) \cdot P(н/(н \text{ і } з)) + P(н) \cdot P(н/н) \cdot P(з/(н \text{ і } н)) \\ &= \frac{96}{100} \cdot \frac{4}{99} \cdot \frac{3}{98} + \frac{4}{100} \cdot \frac{96}{99} \cdot \frac{3}{98} + \frac{4}{100} \cdot \frac{3}{99} \cdot \frac{96}{98} = 0,0036; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } P(\text{знає не більш двох питань}) &= 1 - P(\text{знає 3 питання}) = \\ &= 1 - 0,88 = 0,12. \end{aligned}$$

Приклад 5. Стрілець при одному пострілі влучає у десятку з імовірністю 0,8. Визначити ймовірність семи влучень у серії з десяти пострілів.

За формулою Бернуллі:

$$m = 7; n = 10; p = 0,8; q = 1 - 0,8 = 0,2.$$

$$\text{Отже, } P(7 \text{ з } 10) = \frac{10!}{7!3!} \cdot (0,8)^7 \cdot (0,2)^3 \approx 0,2.$$

Приклад 6. Чотири заводи випускають однакові вироби, причому їхні продуктивності за рік становлять: I завод - 500 шт., II завод - 1000 шт., III завод - 200 шт., IV завод - 1000 шт. Відомо, що ймовірність випуску браку становить: на I заводі - 0,01, на II заводі - 0,01, на III заводі - 0,005, на IV заводі - 0,004. Визначити ймовірність того, що навмання обраний з річної продукції цих заводів виріб є бракованим.

Позначимо подію, яка полягає в тому, що виріб, випущений I заводом - B_1 , II заводом - B_2 , III заводом - B_3 , IV заводом - B_4 . Тоді

$$P(B_1) = \frac{500}{500 + 1000 + 200 + 1000} = \frac{500}{2700} = \frac{5}{27};$$

$$P(B_2) = \frac{1000}{2700} = \frac{10}{27}; \quad P(B_3) = \frac{2}{27}; \quad P(B_4) = \frac{10}{27}.$$

Позначимо подію, яка полягає в тому, що виріб є бракованим, A . За умовою $P(A/B_1) = 0,01$; $P(A/B_2) = 0,01$; $P(A/B_3) = 0,005$; $P(A/B_4) = 0,004$. Тоді за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = \sum_{i=1}^4 P(A/B_i) \cdot P(B_i) =$$

$$= \frac{5}{27} \cdot 0,01 + \frac{10}{27} \cdot 0,01 + \frac{2}{27} \cdot 0,005 + \frac{10}{27} \cdot 0,004 = \frac{1}{135}.$$

Приклад 7. Відділення лікарні спеціалізується на лікуванні трьох захворювань, причому кількості людей, хворих на I, II та III захворювання, співвідносяться як 1:5:3. Відомо, що деякий комплекс симптомів зустрічається при I захворюванні з ймовірністю 0,7; при II - з ймовірністю 0,3; при III - з ймовірністю 0,2. Визначити: а) ймовірність наявності зазначеного комплексу симптомів у навмання обраного пацієнта цього відділення; б) ймовірність того, що у навмання обраного пацієнта відділення є перше захворювання, якщо в нього виявлений зазначений комплекс симптомів.

Позначимо події, які полягають в тому, що у пацієнта є I, II або III захворювання, B_1 , B_2 , та B_3 відповідно. Очевидно, що

$$P(B_1) = \frac{1}{9}; \quad P(B_2) = \frac{5}{9}; \quad P(B_3) = \frac{3}{9}.$$

Позначимо подію, яка полягає в тому, що у хворого є зазначений комплекс симптомів, A . Тоді

$$P(A/B_1) = 0,7; \quad P(A/B_2) = 0,3; \quad P(A/B_3) = 0,2.$$

Тоді за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = 0,7 \cdot \frac{1}{9} + 0,3 \cdot \frac{5}{9} + 0,2 \cdot \frac{3}{9} = \frac{0,7 + 1,5 + 0,6}{9} = \frac{14}{45}.$$

Після цього, за формулою Байєса:

$$P(B_1/A) = \frac{P(A/B_1) \cdot P(B_1)}{P(A)} = \frac{0,7 \cdot \frac{1}{9}}{\frac{14}{45}} = 0,25.$$

2.2 Випадкові величини

Важливою частиною теорії ймовірностей є питання, що пов'язані з випадковими величинами.

Випадкова величина - це величина, яка приймає в результаті випробування одне з множини можливих значень, причому поява того чи іншого значення цієї величини є випадковою подією. Наприклад, число «відмінників» у групі за підсумками семестрового контролю, кількість хлопчиків, які народилися у пологовому будинку в який-небудь день, температура хворого, діаметр зіниці, тривалість серцевого циклу - усе це випадкові величини.

Розрізняють *дискретні* та *неперервні* випадкові величини.

Дискретною випадковою величиною називається випадкова величина зі скінченою або зчисленою множиною можливих значень. Прикладами дискретної випадкової величини є два перших із наведених вище прикладів.

Для завдання дискретної випадкової величини необхідно задати **закон розподілу** цієї величини, тобто перелічити всі можливі значення цієї величини та відповідні їм ймовірності. Зазвичай закон розподілу дискретної випадкової величини задається таблицею такого вигляду:

X	x_1	x_2	...	x_n
P(X)	$P(x_1)$	$P(x_2)$...	$P(x_n)$

Тут і далі великими літерами позначені випадкові величини взагалі, а рядковими - їх конкретні значення. Така таблиця може мати скільки завгодно стовпчиків.

Події, які полягають у тому, що в результаті випробування з'являється яке-небудь з можливих значень випадкової величини, є несумісними та утворюють повну групу подій. Тому

$$\sum_{i=1}^n p_i = p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_n = 1.$$

Остання формула називається *умовою нормування дискретної випадкової величини*.

Неперервною випадковою величиною називається випадкова величина, яка може приймати будь-яке із значень, що належать інтервалу (інтервалам), в якому вона існує.

Наприклад, температура людини або вміст цукру в крові - це неперервні випадкові величини.

Враховуючи, що неперервна випадкова величина приймає нескінченну множину значень, ймовірність того, що вона прийме яке-небудь певне значення, дорівнює нулю. Не дорівнює нулю ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, яке лежить у якому-небудь інтервалі. Якщо ми розіб'ємо ділянку існування випадкової величини на декілька інтервалів і для кожного з цих інтервалів визначимо ймовірність попадання в нього випадкової величини, то така величина буде задана тим точніше, чим на більшу кількість інтервалів буде розбита ця ділянка існування. Найточніше завдання неперервної випадкової величини буде одержано, якщо розміри інтервалів прямуватимуть до нуля, а кількість інтервалів - до нескінченності. При цьому **величина, яка дорівнює відношенню ймовірності dP попадання випадкової величини в інтервал від x до $x + dx$ до величини цього інтервалу dx , називається щільністю ймовірності неперервної випадкової величини X** , тобто

$$f(X) = \frac{dP}{dx},$$

де $f(X)$ - щільність ймовірності неперервної випадкової величини X .

Завдання щільності ймовірності неперервної випадкової величини є одним із способів завдання цієї величини (тобто, завдання закону розподілу цієї величини). З визначення $f(X)$ випливає, що щільність імовірності - це невід'ємна величина. При відомій щільності ймовірності величини X , можна обчислити ймовірність попадання цієї величини у будь-який інтервал. Так, якщо щільність імовірності величини X дорівнює $f(X)$, то ймовірність попадання X в інтервал від a до b обчислюється за формулою:

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(X) \cdot dx$$

та дорівнює величині площі криволінійної трапеції S під кривою $f(x)$ на інтервалі від a до b (див. рис. 2.1).

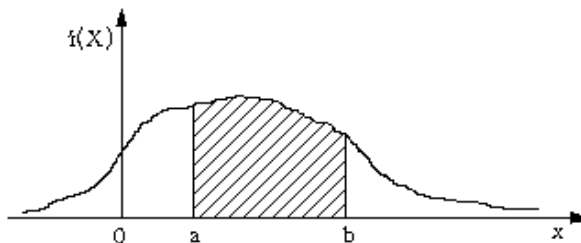


Рис. 2.1

Подія, яка полягає в тому, що випадкова величина прийме будь-яке (кожне) значення, що знаходиться в інтервалі від $-\infty$ до $+\infty$, є вірогідною. Тому

$$P(-\infty \leq X \leq +\infty) = 1.$$

Отже,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X) \cdot dx = 1.$$

Остання формула називається *умовою нормування неперервної випадкової величини*.

Для завдання неперервної випадкової величини, крім щільності ймовірності, використовується *функція розподілу*. Функція розподілу $F(X)$ неперервної випадкової величини X пов'язана з щільністю ймовірності $f(X)$ цієї випадкової величини такими формулами:

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(X) \cdot dx, \quad f(X) = \frac{dF(X)}{dx}.$$

Перша з цих формул є, по суті, визначенням поняття функції розподілу. З цієї формули видно, що **функція розподілу дорівнює ймовірності того, що випадкова величина прийме значення, яке лежить в інтервалі від $-\infty$ до x , або, іншими словами, прийме значення, яке менше або дорівнює x .**

Функція розподілу є невід'ємною величиною. Із збільшенням X функція розподілу зростає або залишається сталою, причому завжди $F(X) \leq 1$. Ймовірність попадання величини X в інтервал від a до b обчислюється при відомій функції розподілу $F(X)$ за формулою

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Для опису випадкових величин можуть також використовуватись *числові характеристики випадкових величин*.

Серед числових характеристик випадкової величини X розглянемо *математичне сподівання* ($M(X)$), *дисперсію* ($D(X)$) та *середнє квадратичне відхилення* ($\sigma(X)$).

Поняття математичного сподівання випадкової величини X майже збігається за змістом з поняттям середнього значення цієї величини. Докладніше питання про зв'язок та різницю цих понять буде обговорено при вивченні математичної статистики.

Для обчислення математичного сподівання дискретної випадкової величини використовується формула:

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(x_i) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \dots + x_n \cdot P(x_n),$$

де x_1, x_2, \dots, x_n - усі можливі значення величини X , а $P(x_1), P(x_2), \dots, P(x_n)$ - відповідні їм ймовірності.

Для обчислення $M(X)$ у випадку, якщо X - неперервна випадкова величина, використовується формула:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(X) \cdot dx.$$

Дисперсія та середнє квадратичне відхилення характеризують величину відхилення (розкиду) значень

випадкової величини від її математичного сподівання. Точніше, **дисперсія випадкової величини X - це математичне сподівання квадрата відхилення значень цієї величини від її математичного сподівання**, тобто

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Середнє квадратичне відхилення - це корінь квадратний з дисперсії, тобто

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

У випадку, якщо X - дискретна випадкова величина, дисперсія цієї величини може бути обчислена за формулою:

$$D(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - M(X))^2 \cdot P(x_i).$$

Якщо X - неперервна випадкова величина, то дисперсію можна обчислити за формулою:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M(X))^2 \cdot f(X) dx.$$

Практично для обчислення дисперсії найчастіше використовують формулу:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Таким чином, дисперсія випадкової величини X дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини X та квадратом її математичного сподівання. При цьому $M(X^2)$ обчислюють за формулами:

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \cdot P(x_i),$$

якщо X - дискретна випадкова величина, та

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(X) dx,$$

якщо X - неперервна випадкова величина.

Наприкінці питання про випадкові величини розглянемо деякі важливі приклади розподілів випадкових величин, а саме: *біноміальний розподіл (розподіл Бернуллі) та нормальний розподіл (розподіл Гаусса).*

Почнемо з біноміального розподілу. Нехай випадкова величина X - це кількість появ події A в n повторних незалежних випробуваннях. Нехай також ймовірність появи події A у кожному з випробувань дорівнює p , а ймовірність неяви цієї події у кожному з випробувань дорівнює q , тобто $q = 1 - p$. Тоді ймовірності значень випадкової величини X ($0, 1, \dots, m, \dots, n$) можна визначити за формулою Бернуллі:

$$P(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Права частина формули Бернуллі - це загальний член розкладання бінома Ньютона $(p+q)^n = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m}$. Тому розподіл дискретної випадкової величини, у якому ймовірність кожного значення дорівнює відповідному члену розкладання бінома $(p+q)^n$, називається біноміальним законом розподілу ймовірностей. У вигляді таблиці цей закон розподілу може бути заданий так:

X	0	\dots	m	\dots	n
$P(X)$	q^n	\dots	$C_n^m p^m q^{n-m}$	\dots	p^n

Математичне сподівання та дисперсія дискретної випадкової величини X , яка має біноміальний розподіл, обчислюються за формулами:

$$M(X) = np; \quad D(X) = npq.$$

Серед розподілів неперервних випадкових величин особливе місце посідає нормальний розподіл (розподіл Гаусса). Це пов'язане з тим, що, як показано у відповідних розділах теорії ймовірностей, випадкові величини, які формуються під дією багатьох факторів, з яких жоден не є визначальним, мають або нормальний розподіл, або розподіл, близький до нормального.

Важлива особливість, яка виділяє нормальний закон серед інших законів розподілів, полягає в тому, що він є граничним законом, до якого наближаються інші закони розподілу при умовах, які дуже часто зустрічаються на практиці.

Якщо неперервна випадкова величина має нормальний розподіл, її щільність ймовірності описується формулою:

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де a та σ - деякі сталі.

Можна показати, що для випадкової величини, яка має нормальний розподіл, $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, $\sigma(X) = \sigma$.

Графік цього розподілу має форму дзвону. Він симетричний відносно прямої $x = a$ (рис. 2.2).

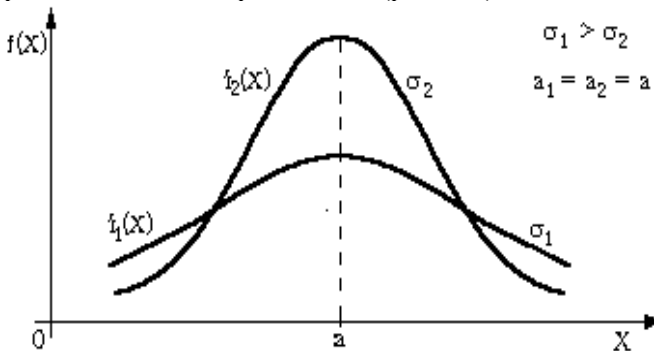


Рис. 2.2

Якщо змінювати a при постійному σ , то графік зміщується вздовж осі x , не змінюючи форму. Якщо зменшувати σ при постійному a , то графік стискається у напрямку до прямої $x = a$. Площа під графіком завжди дорівнює 1.

За необхідності обчислення ймовірності попадання величини X , яка має нормальний розподіл, у деякий інтервал треба інтегрувати наведений вище вираз для $f(X)$. Але цей інтеграл не може бути виражений через елементарні функції. У зв'язку з цим вводиться поняття *функції Лапласа*, яка дорівнює

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Для функції Лапласа за допомогою чисельних методів складена таблиця значень. Легко показати, що, якщо X має нормальний розподіл, то

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = \varphi(t_2) - \varphi(t_1),$$

де $t = (x - a)/\sigma$.

Таким чином, обчислення ймовірності попадання нормально розподіленої випадкової величини в інтервал $[x_1, x_2]$ зводиться до визначення значень t_1 і t_2 та знаходження за таблицею значень функції Лапласа величин $\varphi(t_1)$ і $\varphi(t_2)$. Слід пам'ятати, що у таблиці значень функції Лапласа наводяться значення $\varphi(t)$ тільки для додатних t , хоча при $x < a$ значення t виходять від'ємними. У випадку від'ємних значень величини t треба використати властивість непарності функції Лапласа, тобто використати формулу $\varphi(-t) = -\varphi(t)$.

Функція розподілу нормально розподіленої випадкової величини також не може бути виражена через елементарні функції, але її можна виразити через функцію Лапласа:

$$F(x) = 0,5 + \varphi(t).$$

Ця формула дозволяє обчислювати значення $F(x)$, використовуючи таблицю значень функції Лапласа.

Розглянемо приклади визначення законів розподілу випадкових величин та обчислення їхніх характеристик.

Приклад 8. На гранях правильного тетраедру нарисовані числа 1, 2, 3 та 4. Знайти закон розподілу випадкової величини X , що дорівнює числу на нижній грані правильного тетраедра, при одноразовому киданні.

Випадання граней з числами 1, 2, 3 та 4 є рівноможливими. Їхні ймовірності однакові та дорівнюють 0,25. Тому закон розподілу має вигляд, поданий у таблиці

(рівномірний розподіл)

X	1	2	3	4
P	0,25	0,25	0,25	0,25

Приклад 9. Для неперервної випадкової величини X , яка має щільність ймовірності

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 2e^{-kx}, & x > 0 \end{cases},$$

визначити ймовірність $P(-1 \leq X \leq 1)$.

Спочатку знайдемо значення k . Для цього використаємо умову нормування для неперервної випадкової величини

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(X) \cdot dx = \int_{-\infty}^0 0 \cdot dx + \int_0^{+\infty} 2 \cdot e^{-kx} \cdot dx = 0 - \frac{2}{k} \cdot e^{-kx} \Big|_0^{+\infty} = \frac{2}{k}.$$

Звідси $k = 2$. Тоді

$$\begin{aligned} P(-1 \leq X \leq 1) &= \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 0 \cdot dx + \int_0^1 2e^{-2x} dx = \\ &= 0 - e^{-2x} \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{e^2}. \end{aligned}$$

Приклад 10. Знайти функцію розподілу неперервної випадкової величини X , яка має щільність ймовірності

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{3}, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{2}{3}, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}.$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^x f(x) dx ;$$

$$1) \ x \leq -1; \quad F(X) = \int_{-\infty}^x 0 \cdot dx = 0;$$

$$2) -1 < x \leq 0; \quad F(X) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^x \frac{1}{3} dx = 0 + \frac{1}{3} x \Big|_{-1}^x = \frac{x+1}{3};$$

$$3) 0 < x \leq 1; \quad F(X) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{3} dx + \int_0^x \frac{2}{3} dx = 0 + \frac{1}{3} x \Big|_{-1}^0 + \frac{2}{3} x \Big|_0^x = \frac{0+1}{3} + \frac{2(x-0)}{3} = \frac{1+2x}{3};$$

$$4) x > 1; \quad F(X) = \int_{-\infty}^{-1} 0 \cdot dx + \int_{-1}^0 \frac{1}{3} dx + \int_0^1 \frac{2}{3} dx + \int_1^x 0 \cdot dx = \\ = 0 + \frac{1}{3} x \Big|_{-1}^0 + \frac{2}{3} x \Big|_0^1 + 0 = \frac{0+1+2(1-0)}{3} = 1.$$

Таким чином,

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{x+1}{3}, & -1 < x \leq 0 \\ \frac{1+2x}{3}, & 0 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Приклад 11. Функція розподілу неперервної випадкової величини X дорівнює

$$F(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{2} \cdot (x+1), & -1 < x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Знайти щільність ймовірності цієї випадкової величини.

$$f(X) = F'(X);$$

$$1) x \leq -1; \quad f(X) = 0' = 0;$$

$$2) -1 < x \leq 1; \quad f(X) = \left(\frac{1}{2} \cdot (x+1) \right)' = \frac{1}{2};$$

$$3) x > 1; \quad f(X) = 1' = 0.$$

Таким чином,

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq -1 \\ \frac{1}{2}, & -1 < x \leq 1 \\ 0, & x > 1 \end{cases}$$

Приклад 12. Дискретна випадкова величина має такий закон розподілу:

X	1	2	3	4
P(X)	0,4	0,3	0,2	0,1

Знайти: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

$$M(X) = \sum_{i=1}^4 x_i \cdot P(x_i) = 1 \cdot 0,4 + 2 \cdot 0,3 + 3 \cdot 0,2 + 4 \cdot 0,1 = 2;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 \cdot P(x_i) = 1 \cdot 0,4 + 4 \cdot 0,3 + 9 \cdot 0,2 + 16 \cdot 0,1 =$$

$$= 0,4 + 1,2 + 1,8 + 1,6 = 5;$$

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = 5 - 2^2 = 5 - 4 = 1;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{1} = 1.$$

Приклад 13. Неперервна випадкова величина X має щільність ймовірності

$$f(X) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ x, & 0 < x \leq 1 \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2 \\ 0, & x > 2 \end{cases}$$

Знайти: $M(X)$, $D(X)$.

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^0 x \cdot 0 \cdot dx + \int_0^1 x^2 \cdot dx + \int_1^2 x \cdot (2 - x) \cdot dx +$$

$$+ \int_2^{+\infty} x \cdot 0 \cdot dx = 0 + \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 + x^2 \Big|_1^2 - \frac{x^3}{3} \Big|_1^2 + 0 = \frac{1}{3} + 4 - 1 - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 1;$$

$$\begin{aligned}
M(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot f(x) \cdot dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \cdot 0 \cdot dx + \int_0^1 x^3 \cdot dx + \\
&+ \int_1^2 x^2 \cdot (2-x) \cdot dx + \int_2^{+\infty} x^2 \cdot 0 \cdot dx = 0 + \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 + \frac{2x^3}{3} \Big|_1^2 - \frac{x^4}{4} \Big|_1^2 + 0 = \\
&= \frac{1}{4} + \frac{16}{3} - \frac{2}{3} - \frac{16}{4} + \frac{1}{4} = \frac{7}{6}; \\
D(X) &= M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6}.
\end{aligned}$$

Приклад 14. Випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами $a = 4$, $\sigma = 2$. Визначити значення її функції розподілу при $x_1 = 6$ та $x_2 = 0$.

Для того, щоб використати таблицю значень функції Лапласа, знайдемо t_1 та t_2 за формулами:

$$t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma} = \frac{6 - 4}{2} = 1; \quad t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma} = \frac{0 - 4}{2} = -2.$$

За обчисленими значеннями t_1 та t_2 знаходимо

$$\varphi(t_1) = \varphi(1) = 0,341; \quad \varphi(t_2) = \varphi(-2) = -\varphi(2) = -0,477.$$

$$\text{Тоді } F(6) = 0,5 + 0,341 = 0,841; \quad F(0) = 0,5 - 0,477 = 0,023.$$

Приклад 15. Випадкова величина X має нормальний розподіл з параметрами $a = 2$, $\sigma = 4$. Визначити ймовірність того, що значення X знаходиться в інтервалі від 0 до 8.

$$P(x_1 \leq X \leq x_2) = \varphi(t_2) - \varphi(t_1),$$

де

$$t_2 = \frac{x_2 - a}{\sigma} = \frac{8 - 2}{4} = \frac{3}{2} = 1,5 \quad \text{та} \quad t_1 = \frac{x_1 - a}{\sigma} = \frac{0 - 2}{4} = -\frac{1}{2} = -0,5$$

Тоді

$$P(0 \leq X \leq 8) = \varphi(1,5) - \varphi(-0,5) = 0,433 + 0,191 = 0,624.$$

2.3 Елементи математичної статистики

2.3.1 Основні поняття математичної статистики

Статистичні методи застосовуються при аналізі даних, які мають значущу випадкову мінливість. Статистичні методи можуть застосовуватися також і на етапі планування дослідження, у результаті якого будуть отримані експериментальні дані для наступного статистичного аналізу.

Вивчення понять математичної статистики почнемо з поняття *сукупності*. Сукупність - це множина об'єктів (елементів сукупності), які мають загальну властивість. Число елементів сукупності називають *об'ємом сукупності*. Сукупності можуть, у свою чергу, бути елементами якихось загальніших сукупностей. Наприклад, сукупність студентів першого курсу деякого вузу, сукупність студентів другого курсу та т. ін. є елементами сукупності, до якої входять всі студенти цього вузу.

Найбільша сукупність, яка об'єднує всі елементи, що мають яку-небудь властивість (властивість, наявність якої дозволяє віднести елементи до даної сукупності), називається *генеральною сукупністю*. При вивченні сукупностей ми, як правило, намагаємося зробити висновки, які стосуються всієї генеральної сукупності. Наприклад, якщо вивчається сукупність пацієнтів з яким-небудь захворюванням з метою визначення найефективнішого способу лікування цього захворювання, то, зрозуміло, що розроблений спосіб матиме цінність, якщо він може застосовуватися при лікуванні не тільки тих хворих, які вибиралися для дослідження, але й усіх хворих з даним захворюванням, тобто для всіх елементів генеральної сукупності.

Генеральна сукупність часто має дуже великий (а можливо, і нескінченно великий) об'єм, що робить неможливим вивчення всіх її елементів. Тому вивчають тільки частину елементів генеральної сукупності. Частина генеральної сукупності, яка обрана для вивчення, називається *вибірковою сукупністю* або просто *вибіркою*. Далі ми вважатимемо, що елементи розглянутих сукупностей характеризуються кількісною ознакою X , яка є випадковою (найчастіше - неперервною випадковою) величиною. Значення величини X для окремого елемента вибірки називають *варіантою*.

Звичайно оптимальна методика аналізу існуючих даних залежить від характеру розподілу величини X . Тому для одержання уяви про цей розподіл часто починають із графічного аналізу даних, тобто будують *гістограму* для розподілу величини X . З цією метою використовуються значення величини X (варіанти), які визначаються для кожного з елементів вибірки: x_1, x_2, \dots, x_n , де n – об'єм вибірки. Інтервал значень величини X , який містить всі значення цієї величини, розбивають на кілька інтервалів, які межують один з одним та розміри яких дорівнюють $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_k$ (k – кількість таких інтервалів). Зазначимо, що найчастіше використовуються інтервали однакової ширини. Після цього для кожного j -го інтервалу підраховують число (m_j) значень величини X , які належать до цих інтервалів, та обчислюють величину $P_j^* = \frac{m_j}{n}$, що є відносною частотою попадання величини X у j -й інтервал. Розділивши тепер величину P_j^* на Δx_j , одержимо для кожного j -го інтервалу значення $f_j^* = \frac{P_j^*}{\Delta x_j}$, де f_j^* – щільність відносної частоти величини X . При $n \rightarrow \infty$ відносна частота прямує до ймовірності, а щільність відносної частоти – до щільності ймовірності величини X . Таким чином, величина f^* є вибірковою оцінкою щільності ймовірності. Якщо над кожним інтервалом Δx_j побудувати прямокутник (див. рис. 2.3) висотою f_j^* , то отримаємо ступінчастий графік, який і буде гістограмою для даної вибірки. Отже, гістограма є графіком емпіричної (експериментальної) оцінки щільності ймовірності випадкової величини X , тобто є графіком емпіричної оцінки закону розподілу цієї величини.

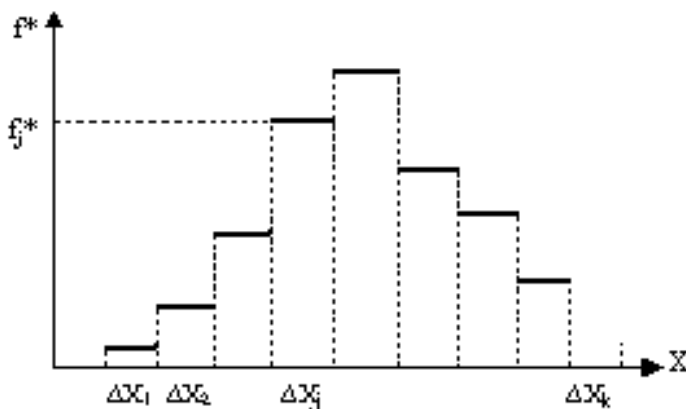


Рис. 2.3

У ряді випадків буває важливо вже на початковому етапі аналізу даних вирішити питання про те, чи є підстави припускати наявність для величини X деякого конкретного закону розподілу (наприклад, нормального розподілу). Побудова гістограми дозволяє дати попередню (яка, можливо, потребує надалі уточнення) відповідь на зазначене питання.

При вивченні сукупностей, як правило, намагаються визначити значення яких-небудь числових показників, що характеризують ці сукупності. Ці числові показники прийнято називати *статистичними характеристиками*.

Вибіркові сукупності утворюються шляхом випадкового відбору елементів з генеральної сукупності. Тому властивості вибіркової сукупності звичайно не збігаються точно з властивостями генеральної сукупності, тобто значення статистичних характеристик, які визначені при вивченні вибірки, не збігаються з істинними значеннями статистичних характеристик генеральної сукупності, причому відмінності визначених та істинних значень можуть бути великими. Отже, при вивченні вибірки ми ніколи не можемо точно визначити значення статистичних характеристик генеральної сукупності, а можемо тільки з більшою або меншою точністю оцінити ці значення. При цьому ті **значення, що отримані при вивченні**

вибіркової сукупності і які використовуються замість істинних значень статистичних характеристик генеральної сукупності, називають оцінками (вибірковими оцінками) цих статистичних характеристик.

При оцінюванні статистичних характеристик за вибіркою існують дві основні проблеми: 1) як знайти найкращу вибірку оцінку досліджуваної характеристики (питання про те, що вважати найкращою оцінкою, тобто питання про критерії оптимальності оцінок ми взагалі не розглядатимемо через його складність), 2) наскільки цій оцінці можна довіряти, тобто наскільки сильно значення оцінки може відрізнятись від істинного значення статистичної характеристики. Відповідь на друге питання звичайно дається у вигляді обчислення меж *надійного інтервалу*, про що докладніше буде сказано далі. Зараз відзначимо, що наявність двох зазначених проблем обумовлює необхідність введення двох нових термінів. Визначення чисельного значення оптимальної оцінки статистичної характеристики називається *точковою оцінкою* цієї характеристики, а побудова надійного інтервалу - *надійною оцінкою*, або *інтервальною оцінкою*.

Розглянемо методику точкової оцінки математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення випадкової величини за вибіркою.

Нехай при вивченні вибірки отримані такі значення деякої випадкової величини X : x_1, x_2, \dots, x_n (n - об'єм вибірки). Тоді оптимальною вибірковою оцінкою математичного сподівання величини X (далі позначатимемо її $\hat{M}(X)$) є середнє вибіркове (\bar{x}), яке обчислюють за формулою:

$$\hat{M}(X) = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

Привернемо увагу до різниці у застосуванні понять «середнє значення» та «математичне сподівання». Термін «математичне сподівання» стосується генеральної сукупності та еквівалентний поняттю «середнє значення для генеральної сукупності». Поняття «середнє значення», з одного боку, ширше, тому що можна говорити про середнє значення як для генеральної, так і для вибіркової сукупності, а з іншого боку, це

поняття найчастіше вживається саме у значенні «середнє вибірове».

Оптимальна вибірова оцінка дисперсії величини X (далі позначатимемо її $(\hat{D}(X))$) обчислюється за формулою:

$$\begin{aligned}\hat{D}(X) &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \\ &= \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1}.\end{aligned}$$

На практиці для обчислення $\hat{D}(X)$ часто використовують формулу:

$$\hat{D}(X) = \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{x})^2 \right).$$

Вибіркову оцінку середнього квадратичного відхилення величини X (позначається $\hat{\sigma}(X)$ або $S(X)$) знаходять за формулою:

$$\hat{\sigma}(X) = S(X) = \sqrt{\hat{D}(X)}.$$

Враховуючи, що $\hat{D}(X) = S^2(X)$, для позначення вибіркової оцінки дисперсії замість $\hat{D}(X)$ часто використовують позначення S^2 .

Відзначимо, що вибірова оцінка математичного сподівання є випадковою величиною. Для характеристики величини розкиду значень оцінки математичного сподівання відносно його істинного значення використовується така статистична характеристика, як похибка середнього m_x (інше позначення - $S_{\bar{x}}$). Ця величина визначається за формулою:

$$m_x = \frac{S}{\sqrt{n}}.$$

Розглянемо тепер методику надійного (інтервального) оцінювання математичного сподівання випадкової величини за вибіркою.

Оцінка статистичної характеристики, знайдена за вибіркою, є випадковою величиною, та її відхилення від істинного значення статистичної характеристики у загальному

випадку може бути як завгодно великим. Тому не можна ставити питання про визначення границь інтервалу, у який істинне значення статистичної характеристики попадає вірогідно, а можна лише розв'язувати задачу визначення інтервалу, у який істинне значення попадає з деякою ймовірністю α , яка нас влаштовує, (її зазвичай називають *надійною ймовірністю* або *коефіцієнтом довіри*). Такий інтервал називають надійним інтервалом. Таким чином, **надійний інтервал для статистичної характеристики - це випадковий інтервал, границі якого повністю визначаються значеннями досліджуваної величини у вибірці, що вивчається, та який із заданою ймовірністю α накриває істинне значення цієї статистичної характеристики.** У цьому визначенні слова «випадковий інтервал» означають, що границі надійного інтервалу також є випадковими величинами. Величину $p = 1 - \alpha$ називають *рівнем значущості* відхилення оцінки, або просто рівнем значущості.

Ми будемо розглядати задачу визначення надійного інтервалу тільки для математичного сподівання випадкової величини X та тільки у випадку, якщо ця величина має нормальний розподіл. Відзначимо, що описаний далі метод визначення надійних границь для $M(X)$ застосовується у більшості практичних випадків без перевірки нормальності розподілу величини X , оскільки більшість випадкових величин, які зустрічаються на практиці, мають нормальний розподіл або близький до нього. Крім того, на практиці рідко зустрічаються розподіли, для яких надійний інтервал ширший, ніж для нормального розподілу.

Для обчислення границь надійного інтервалу для математичного сподівання нормально розподіленої випадкової величини X можуть використовуватися різні формули залежно від того, відомим або невідомим є значення дисперсії $D(X)$. Випадок відомої дисперсії має місце, коли здійснюються виміри приладом з відомою похибкою, причому ця похибка значно більша випадкової похибки вимірів (докладніше про це йтиметься при розгляді методів обробки результатів вимірювань), або коли дисперсія оцінена за вибіркою досить

точно (вважається, що при $n \geq 30$ вибірккову оцінку дисперсії можна приймати як істинне значення дисперсії, тобто вважати величину $D(X)$ відомою). У цьому випадку надійний інтервал для $M(X)$ обчислюється за такою формулою:

$$\bar{x} - t(\alpha) \sqrt{\frac{D(X)}{n}} \leq M(X) \leq \bar{x} + t(\alpha) \sqrt{\frac{D(X)}{n}},$$

де \bar{x} - середнє вибірккове, n - об'єм вибірки, а величину $t(\alpha)$ знаходять за таблицею значень функції Лапласа, виходячи з умови: $\varphi(t) = \frac{\alpha}{2}$. У медико-біологічних дослідженнях звичайно приймають $\alpha = 0,95$ ($p = 0,05$). У цьому випадку $t(\alpha) = 1,96$.

Якщо дисперсія невідома та $n < 30$, то при визначенні надійного інтервалу для $M(X)$ використовують таку формулу:

$$\bar{x} - t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq M(X) \leq \bar{x} + t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},$$

де S - вибірккова оцінка середнього квадратичного відхилення, k - число ступенів волі ($k = n - 1$), а $t(\alpha, k)$ - коефіцієнт Стьюдента, що визначається за таблицею значень коефіцієнта Стьюдента (див. Додатки). Його значення знаходять на перетині стовпчика, який відповідає необхідному значенню α (або p), та рядка з обчисленим значенням k . Наприклад, при $p = 0,05$ та $k = 20$ маємо $t(\alpha, k) = 2,09$.

Проведення точкового та інтервального оцінювання статистичних характеристик досліджуваних сукупностей є найпоширенішим початковим етапом статистичного аналізу даних. Наступний етап може бути пов'язаний з висуванням та перевіркою якихось гіпотез про досліджувані сукупності. *Перевірка статистичних гіпотез* - великий важливий розділ математичної статистики.

Ми познайомимося з однією простою задачею цього типу - перевіркою гіпотези про вірогідність різниці середніх значень у двох вибіркових сукупностях. Ця задача часто зустрічається на практиці, якщо у вибірок, отриманих при яких-небудь різних умовах (наприклад, на елементи однієї вибірки впливав якийсь фактор, а на елементи іншої - ні), виявляються різними значення середніх вибіркових та потрібно з'ясувати, чи

є ці розбіжності випадковими або вони є результатом впливу згаданих різних умов одержання вибірок. Іншими словами, необхідно з'ясувати, чи належать досліджувані вибірки до однієї генеральної сукупності і відмінності між середніми вибірковими цих вибірок є випадковими, або ці розбіжності вірогідні, тобто вибірки належать до різних генеральних сукупностей. Для відповіді на сформульоване питання використовується така процедура аналізу вибірок. Обчислюються величини

$$k = n_1 + n_2 - 2; \quad H = (n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2$$

$$T = \sqrt{\frac{n_1 n_2 k}{(n_1 + n_2) H}} \cdot |\bar{x}_1 - \bar{x}_2|,$$

де k - число ступенів волі, n_1 та n_2 - об'єми вибірок, що порівнюються, S_1 та S_2 - вибіркові оцінки середніх квадратичних відхилень першої та другої вибірок відповідно, \bar{x}_1 та \bar{x}_2 - середні вибіркові. За таблицею значень коефіцієнта Стьюдента для обчисленого значення k та необхідного α (або p) визначають значення коефіцієнта Стьюдента t . Якщо $T > t$, то можна говорити про те, що різниця середніх вибіркових вірогідна, тобто вона не може бути пояснена випадковими факторами та є наслідком відмінності генеральних сукупностей, з яких відбиралися вибірки. Якщо $T < t$, то різниця не є вірогідною.

Якщо об'єми обох вибірок великі та приблизно дорівнюють один одному, то для обчислення T можна використовувати простішу формулу:

$$T = \frac{|\bar{x}_1 - \bar{x}_2|}{\sqrt{m_1^2 + m_2^2}},$$

де m_1 та m_2 - похибки середнього для першої та другої вибірок, відповідно.

Підкреслимо, що розглянутий метод визначення вірогідності різниці двох вибіркових середніх повністю справедливий тільки тоді, коли величини X_1 та X_2 мають нормальний розподіл.

Розглянемо приклади використання вивчених методик статистичного аналізу даних.

Приклад 1. Вимірювання вмісту загального білка (у %) у сироватці крові хворих дало такі результати: 5,34; 5,88; 5,38; 5,84; 6,60; 6,80; 6,26; 6,74; 6,42; 5,66; 6,56; 5,58. Знайти точкові оцінки математичного сподівання вмісту загального білка, його дисперсії та середнього квадратичного відхилення.

За формулою $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ($n = 12$) знаходимо середнє вибіркове вмісту загального білка

$$\bar{x} = \frac{5,34 + 5,88 + \dots + 5,58}{12} = 6,09\% .$$

Вибіркова оцінка дисперсії дорівнює

$$S^2(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{12-1} ((5,34 - 6,08)^2 + (5,88 - 6,08)^2 + \dots + (5,58 - 6,08)^2) \approx 0,29 .$$

Звідси вибіркиму оцінку середнього квадратичного відхилення знайдемо як

$$S = \sqrt{0,29} = 0,54 .$$

Приклад 2. Випадкова величина X має нормальний розподіл. У вибірці об'ємом $n = 16$ середнє вибіркове $\bar{x} = 23,7$, а оцінка середнього квадратичного відхилення $S = 0,4$. Визначити надійний інтервал для математичного сподівання з надійною ймовірністю $\alpha = 0,95$.

Межі надійного інтервалу знаходимо за формулою:

$$\bar{x} - t(\alpha; k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} \leq M(X) \leq \bar{x} + t(\alpha; k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} .$$

За таблицею значень коефіцієнта Стьюдента визначаємо, що для $\alpha = 0,95$ та $k = n - 1 = 15$ коефіцієнт $t(\alpha; k) = 2,13$.

Тепер надійний інтервал для $M(X)$ можна записати у вигляді

$$23,8 - 0,21 \leq M(X) \leq 23,8 + 0,21$$

або

$$23,59 \leq M(X) \leq 24,01 .$$

Приклад 3. Середнє значення та середнє квадратичне відхилення частоти дихання для однієї групи хворих ($n = 24$) становлять $\bar{x}_1 = 24$ та $S_1 = 5$ відповідно, а для іншої групи ($n = 35$) - $\bar{x}_2 = 28$ та $S_2 = 7$. Потрібно з'ясувати, чи можна з надійною ймовірністю $\alpha = 0,95$ вважати різницю між середніми значеннями частоти дихання вірогідною.

Обчислюємо значення показника T :

$$T = \sqrt{\frac{24 \cdot 35 \cdot (24 + 35 - 2)}{(24 + 35) \cdot ((24 - 1) \cdot 5^2 + (35 - 1) \cdot 7^2)}} \cdot |24 - 28| = 2,56 .$$

Визначаємо число ступенів волі k :

$$k = 24 + 35 - 2 = 57.$$

За таблицею значень коефіцієнта Стюдента знаходимо $t(0,95; 57) = 1,96$. Оскільки $T > t(\alpha; k)$, робимо висновок про те, що отримана різниця між середніми значеннями частоти подиху в групах хворих не випадкова (вірогідна).

2.3.2 Елементи кореляційного та регресійного аналізу

Важливим питанням у математичній статистиці є питання про кореляційну залежність між випадковими величинами.

Залежності між випадковими величинами можуть бути функціональними, а можуть бути і не функціональними. Наприклад, з віком ріст дітей збільшується, тобто очевидним є існування залежності між ростом та віком дітей. Разом з тим, ця залежність не є функціональною, тому що при однаковому значенні величини вік, величина ріст у різних дітей набуває істотно різних значень. Очевидно, що величина росту при заданому віці є неперервною випадковою величиною, яка має деякий розподіл. Отже, залежність між величинами у цьому випадку полягає в тому, що кожному значенню однієї випадкової величини відповідає певний закон розподілу іншої величини. При цьому говорять вже не просто про щільність імовірності випадкової величини, а про її *умовну щільність імовірності*. Наприклад, умовна щільність імовірності величини Y ($f(Y/x)$) – це щільність імовірності величини Y при вказаному значенні величини X (при $X = x$). **Якщо умовна**

щільність імовірності величини Y ($f(Y/x)$) залежить від X , а умовна щільність імовірності величини X ($\varphi(X/y)$) залежить від Y , то кажуть, що між величинами Y та X існує *кореляційна залежність*.

Якщо щільність ймовірності випадкової величини Y залежить від значення випадкової величини X , то й математичне сподівання величини Y залежить від цього значення, тобто можна казати про *умовне математичне сподівання* випадкової величини Y при заданому значенні величини X ($M(Y/x)$). Таким чином, умовне математичне сподівання величини Y є функцією величини X , що математично можна записати так:

$$M(Y/x) = \psi(x),$$

де функція $\psi(x)$ називається *функцією регресії* Y на X . Графік цієї функції називається *лінією регресії*. Якщо у виразі для $\psi(x)$ присутні які-небудь сталі коефіцієнти, то вони називаються *коефіцієнтами регресії*. Аналогічно може бути введене поняття функції регресії X на Y . Якщо

$$M(X/y) = \xi(y),$$

то функція $\xi(y)$ - це функція регресії X на Y , причому у більшості випадків лінії регресії Y на X та X на Y – це різні лінії.

Точне визначення функції регресії потребує вивчення всієї генеральної сукупності, що на практиці, як правило, неможливо. Тому практично важливою задачею є оцінка функції регресії за наявними експериментальними даними, тобто за вибіркою. При цьому статистичний аналіз можна починати з використання графічних методів.

Нехай є вибірка, що містить n елементів, для кожного з яких визначаються значення випадкових величин Y та X , причому припускається, що між цими величинами є кореляційна залежність. Якщо точки з координатами y_i та x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) нанести на координатну площину $ХОУ$, то утвориться так зване *кореляційне поле*. Візуальне вивчення кореляційного поля найчастіше може стати основою для вибору зручного аналітичного виразу для опису функції регресії. Визначення оптимального аналітичного виразу для функції регресії

пов'язане з обчисленням значень коефіцієнтів регресії. Методика визначення оптимальних вибірових оцінок коефіцієнтів регресії розглядатиметься далі. Зараз відзначимо, що, чим складніший аналітичний вираз, обраний для опису функції регресії, та чим більше коефіцієнтів він містить, тим складніше розв'язувати задачу вибіркової оцінки значень цих коефіцієнтів. Тому звичайно прагнуть використовувати для опису функції регресії якомога простіші залежності, але при цьому такі, графіки яких достатньою мірою відповідають отриманому кореляційному полю. Найпростіше задача обчислення значень коефіцієнтів регресії вирішується у випадку лінійної функції регресії, тобто при наявності залежності типу $y = ax + b$. Разом з тим, точки кореляційного поля майже ніколи не лягають точно на пряму лінію. Тому, обираючи лінійну функцію як функцію регресії, необхідно попередньо з'ясувати питання про те, наскільки обґрунтованим є припущення про лінійність функції регресії. З цією метою, виходячи з експериментальних даних, знаходять вибірову оцінку *коефіцієнта кореляції* (вибіровий коефіцієнт кореляції), використовуючи формулу:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1) \cdot S(X) \cdot S(Y)} =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^n (x_i \cdot y_i) - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sqrt{\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2 \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 - n \cdot \bar{y}^2 \right)}},$$

де R – вибіровий коефіцієнт кореляції.

Значення вибірового коефіцієнта кореляції лежать в інтервалі $-1 \leq R \leq 1$. Якщо $R > 0$, то функції регресії Y на X та X на Y – це зростаючі функції, а якщо $R < 0$ – спадні. Чим ближче значення $|R|$ до одиниці, тим тісніше точки кореляційного поля згруповані навколо прямої регресії, тобто тим більше підстав вважати функцію регресії лінійною. У цьому випадку кажуть про сильну кореляційну залежність. Чим ближче значення R до нуля, тим гірше точки кореляційного

поля лягають на пряму та тим менше підстав вважати функцію регресії лінійною. Разом з тим, невеликі за модулем значення коефіцієнта кореляції зовсім не обов'язково означають відсутність кореляційної залежності між величинами Y та X , вони лише означають, що немає достатніх підстав вважати цю залежність лінійною. Таким чином, **коефіцієнт кореляції є мірою лінійності залежності між випадковими величинами**, але не мірою взагалі залежності між цими величинами.

При великих значеннях модуля вибіркового коефіцієнта кореляції для опису функції регресії можна використовувати лінійну функцію, що має вигляд $y = ax + b$. Такий опис вимагає обчислення значень коефіцієнтів регресії. Разом з тим, лінія регресії може бути проведена через кореляційне поле порізно, тобто виникає питання про те, яку з ліній регресії слід вважати оптимальною, або інакше, якою повинна бути оптимальна процедура оцінки коефіцієнтів регресії за вибіркою. Для відповіді на це питання необхідно спочатку сформулювати критерії оптимальності, тобто, якщо ми говоримо про оптимальну функцію регресії, то, насамперед, треба вирішити, за яким критерієм ця функція має бути оптимальною.

При визначенні функції регресії прийнято вважати оптимальними ті оцінки коефіцієнтів регресії, які отримані при застосуванні методу найменших квадратів.

Суть методу найменших квадратів полягає в тому, що оптимальними значеннями коефіцієнтів регресії для функції $y = \psi(x)$ вважаються ті, для яких сума

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \psi(x_i))^2$$

приймає найменше значення. В окремому випадку лінійної регресії вигляду

$$\psi(x) = ax + b$$

значення коефіцієнтів a та b визначають, мінімізуючи суму

$$\sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2.$$

Для цього знаходять частинні похідні останнього виразу по a та по b , прирівнюють ці похідні до нуля та розв'язують

отриману систему рівнянь. У підсумку для оптимальних вибірових оцінок коефіцієнтів регресії a та b одержують такі вирази:

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}; \quad b = \frac{\bar{y} \cdot \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x} \cdot \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \cdot \bar{x}^2}.$$

З урахуванням виразу для R останні вирази можна перетворити до вигляду:

$$a = R \frac{S(Y)}{S(X)}; \quad b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

У випадку регресії X на Y функція регресії має такий вигляд:

$$\xi(y) = a_1 y + b_1,$$

а коефіцієнти регресії a_1 та b_1 обчислюються за формулами:

$$a_1 = R \frac{S(X)}{S(Y)}; \quad b_1 = \bar{x} - a_1 \bar{y}.$$

Відзначимо, що лінії регресії Y на X та X на Y збігаються тільки в тому випадку, якщо $|R|=1$. У цьому випадку між величинами Y та X існує лінійна функціональна залежність.

Розглянутий метод статистичного вивчення зв'язку між характеристиками вибірки застосовується тільки в тому випадку, якщо ці характеристики є кількісними. Разом з тим, можливі ситуації, коли одна або кілька характеристик, між якими припускається наявність зв'язку, є якісними. Наприклад, залежно від часу перебування на сонці людина може бути більш-менш засмаглою. Залежно від віку людина може бути більш-менш сивою. Наявність зв'язку між, наприклад, часом перебування на сонці та ступенем засмаглості очевидна, тобто виходить, у цьому випадку також можна говорити про існування кореляційної залежності, але необхідно вкладати у термін «кореляція» інший зміст та вводити інші кількісні параметри для визначення міри кореляційного зв'язку між досліджуваними характеристиками вибірки (ознаками).

Тому розглянутий раніше коефіцієнт кореляції часто називають коефіцієнтом кореляції *Пірсона*, відрізняючи його тим самим від інших кількісних характеристик залежності між ознаками.

Тепер розглянемо докладніше методи оцінки кореляційної залежності у випадку, якщо хоча б одна з ознак є якісною (не кількісною). При цьому опис ступеня вираженості якісної ознаки для елементів вибірки є порівняльним, тобто здійснюється за принципом «більше або менше». Наприклад, більш засмаглий або, наприклад, менш сивий. Кожну характеристику (ознаку) оцінюють шляхом ранжування: для одного з елементів ця характеристика вважається мінімальною та цьому елементу надається мінімальний ранг (наприклад, 1), для іншого елемента характеристика вважається другою за ступенем малості та цьому елементу надається наступний за величиною ранг (наприклад, 2) та т.ін. У такий самий спосіб кожному елементу вибірки надається значення рангів для кожної з тих характеристик, для яких припускається наявність кореляційного зв'язку.

Далі попарно аналізуються ознаки, для яких припускається наявність зв'язку. Нехай для якоїсь з таких пар x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) – це значення рангу за однією ознакою для i -го елемента вибірки (n – об'єм вибірки), а y_i – значення рангу за іншою ознакою для того самого елемента вибірки. Для перевірки наявності кореляційної залежності між досліджуваними ознаками обчислюють коефіцієнт рангової кореляції (коефіцієнт кореляції *Спірмена*) за формулою:

$$R = 1 - \frac{6 \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}.$$

Коефіцієнт кореляції Спірмена є мірою ступеня кореляційної залежності між ознаками, причому, чим більший за модулем коефіцієнт кореляції тим тіснішою є ця залежність.

Розглянемо приклад обчислення коефіцієнтів кореляції та регресії при аналізі експериментальних даних.

Приклад 4. Результати одночасного вимірювання значень величин Y та X для елементів деякої вибірки наведені в таблиці. Знайти вибіркову оцінку коефіцієнта кореляції та рівняння регресії Y на X та X на Y.

X	3,1	1,5	3,7	2,8	0,5	3,5	4,5	2,0	0,9
Y	1,7	1,2	3,0	2,5	0,7	2,2	2,6	1,9	1,8

Спочатку знаходимо середні вибіркові величин X та Y:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{22,5}{9} = 2,50;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{17,6}{9} = 1,96.$$

Потім знаходимо вибіркові оцінки середніх квадратичних відхилень:

$$S(X) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{1,84} = 1,36;$$

$$S(Y) = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} = \sqrt{0,46} = 0,68$$

та обчислюємо значення величини

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y} = 50,34 - 9 \cdot 2,5 \cdot 1,96 = 6,24.$$

Тепер можна обчислити значення коефіцієнта кореляції:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \cdot \bar{x} \cdot \bar{y}}{(n-1)S(X)S(Y)} = \frac{6,24}{8 \cdot 1,36 \cdot 0,68} = 0,84.$$

Отримане значення R достатньо велике, щоб вважати регресію лінійною, тому можна перейти до обчислення коефіцієнтів регресії.

$$a = R \frac{S(Y)}{S(X)} = 0,84 \cdot \frac{0,68}{1,36} = 0,48;$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 1,96 - 0,48 \cdot 2,5 = 0,76;$$

$$a_1 = R \frac{S(X)}{S(Y)} = 0,84 \cdot \frac{1,36}{0,68} = 1,67 ;$$

$$b_1 = \bar{x} - a_1 \bar{y} = 2,5 - 1,67 \cdot 1,96 = -0,77 .$$

Тепер рівняння регресії Y на X та X на Y можуть бути записані відповідно у вигляді:

$$y = 0,48x + 0,76$$

та

$$x = 1,67y - 0,77.$$

2.3.3 Методи обробки результатів вимірювань

Вимірюванням називається обчислення значення вимірюваної величини експериментальним шляхом за допомогою спеціальних технічних засобів.

Вимірювання поділяють на *прямі, непрямі, сукупні та сумісні*, які розрізняються видом *рівнянь вимірювань*.

З прямими вимірюваннями ми маємо справу, коли прилад (засіб вимірювання) призначений для визначення чисельних значень безпосередньо вимірюваної величини. Якщо y - шукана величина, а x – безпосередньо вимірювана величина, то при прямих вимірюваннях рівняння вимірювань має вигляд: $y = x$. Наприклад, вимірювання довжини лінійкою, сили струму амперметром - усе це прямі вимірювання.

Якщо шукана величина y обчислюється відповідно до рівняння вимірювань $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де x_1, x_2, \dots, x_n - безпосередньо вимірювані величини, а f – деяка функція, то такі вимірювання називаються непрямыми. Наприклад, якщо при вимірюваннях потужності електричного струму (P) безпосередньо вимірюється сила струму (I) та напруга (U), а потужність розраховується за формулою $P = IU$, то такі вимірювання потужності є непрямыми. У цьому прикладі $y = P$, $x_1 = I$, $x_2 = U$, $n = 2$.

Якщо всі шукані величини y_1, y_2, \dots, y_k пов'язані з безпосередньо вимірюваними величинами x_1, x_2, \dots, x_n рівнянням вимірювань

$$F(y_1, y_2, \dots, y_k, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

то такі вимірювання називають сумісними. Відзначимо, що при сумісних вимірюваннях число вимірювань (m) має бути

більшим або дорівнювати числу шуканих величин, тобто $m \geq k$. Можна навести такий приклад сумісних вимірювань. Відомо, що у певних діапазонах температур залежність опору (R) деяких провідників від температури (t) можна подати у вигляді $R = R_0(1 + \alpha t)$, де R_0 та α - деякі сталі, які необхідно визначити. У цьому випадку шляхом багаторазових одночасних вимірювань величин R та t можуть бути отримані ряди значень R_i та t_i ($i = 1, 2, \dots, m$; $m > 2$) та визначені чисельні значення коефіцієнтів R_0 та α . У цьому прикладі $y_1 = R_0$, $y_2 = \alpha$; $x_1 = R$, $x_2 = t$; $k = n = 2$.

Сукупні вимірювання є окремим випадком сумісних вимірювань. При сукупних вимірюваннях всі шукані величини y_1, y_2, \dots, y_k є однойменними. У зв'язку з тим, що сукупні вимірювання є окремим випадком сумісних вимірювань, та методика обробки результатів таких вимірювань не відрізняється від методики обробки результатів сумісних вимірювань, надалі ми окремо не розглядатимемо сукупні вимірювання.

Відзначимо таке: якщо $m > k$, то вимірювання називаються *надлишковими*, а якщо $m = k$, то *безнадлишковими*.

Перш ніж перейти до опису способів обробки результатів вимірювань, слід ввести ряд термінів, пов'язаних з *похибками* вимірювань. Похибка вимірювання – це відхилення результату вимірювання від *істинного значення* вимірюваної величини.

Значення величин, які отримані при вимірюваннях, називають *виміряними*. У загальному випадку виміряні значення відрізняються від істинного значення (x_i) вимірюваної величини, яке ніколи не може бути визначене абсолютно точно. Тому за результатами вимірювань знаходять оцінку істинного значення, яка називається *дійсним значенням* (x_d) вимірюваної величини та використовується замість істинного значення. Різниця між виміряним та дійсним значеннями вимірюваної величини називають *абсолютною похибкою* окремого вимірювання, тобто $\Delta x = x - x_d$, де Δx - абсолютна похибка вимірюваної величини, x - виміряне значення. Якщо дійсне значення не дорівнює нулю, то відношення абсолютної похибки до дійсного значення називають *відносною похибкою* (δx), тобто

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_d}.$$

Величина, обернена модулю відносної похибки $(|1/\delta x|)$, називається *точністю вимірювання*.

Похибка вимірювання може мати кілька складових: *методичну, інструментальну*, обумовлену впливом зовнішніх причин, *суб'єктивну*.

Методична похибка - це складова похибки вимірювання, яка виникає внаслідок недосконалості методу вимірювань, внаслідок впливу вимірювальної апаратури на вимірювану фізичну величину або в результаті деяких припущень при виведенні розрахункових формул.

Інструментальна похибка обумовлена конструктивною або технологічною недосконалістю засобів вимірювань. Вона залежить від якості виготовлення та стабільності мір, вимірювальних приладів та перетворювачів, від градування та похибки відліку вимірювальних приладів.

Похибка, обумовлена впливом зовнішніх причин, виникає внаслідок відхилення від нормальних для даного засобу вимірювань умов роботи.

Суб'єктивна похибка може виникати внаслідок недосконалості органів почуттів спостерігача, а також при недостатній його досвідченості, неуважності у момент відліку показань тощо.

За походженням похибки поділяють на *систематичні* та *випадкові*.

Систематичні похибки виникають унаслідок постійного впливу деякого фактора та є сталими або закономірно змінюються з часом. Вивчення факторів, які впливають на результати вимірювань, може дозволити зменшити або виключити систематичні похибки.

Якість вимірювань, яка відображає близькість до нуля систематичної похибки, називається *правильністю вимірювань*. Малі значення систематичної похибки свідчать про правильність вимірювань.

Випадкові похибки пов'язані з впливом випадкових

неконтрольованих факторів та не можуть бути враховані задалегідь. Величина випадкової похибки може бути знижена шляхом проведення багаторазових вимірювань та використання статистичних методів обробки результатів вимірювань.

Збіжністю вимірювань називається якість, яка відображає близькість одне до одного результатів вимірювань, виконаних в однакових умовах. Висока збіжність результатів повторних вимірювань означає, що значення випадкової похибки невеликі.

Залежно від наявності або відсутності функціонального зв'язку між похибкою вимірювання та значенням вимірюваної величини розрізняють *адитивну* та *мультиплікативну* похибки. Адитивна похибка не залежить від значення вимірюваної величини. Мультиплікативна похибка залежить від значення вимірюваної величини.

Якщо вимірювання здійснюються багаторазово, то під *абсолютною похибкою вимірювань* (вимірювань у цілому, а не окремого вимірювання!) розуміють модуль різниці між істинним та дійсним значеннями. Оскільки істинне значення вимірюваної величини невідоме, абсолютну похибку вимірювань можна визначити, тільки задавшись надійною ймовірністю (α), з якою необхідно оцінити можливе відхилення x_d від x_i . При цьому Δx виявляється залежною від α .

Розглядаючи методи обробки вимірювань, почнемо з прямих вимірювань.

При прямих вимірюваннях похибки можуть бути пов'язані як з нестабільністю (випадковим характером) самої вимірюваної величини, так і з засобами вимірювання, що використовувались. У першому випадку говорять про випадкові, у другому - про інструментальні похибки. Методика обробки результатів прямих вимірювань залежить від співвідношення внесків випадкової та інструментальної похибок у загальну похибку вимірювань.

Якщо випадкова похибка набагато перевищує інструментальну, вимірювання необхідно проводити багаторазово. У цьому випадку отримують ряд значень вимірюваної величини x_1, x_2, \dots, x_n (n - число вимірювань). За дійсне значення приймається середнє вибіркове, тобто

$$x_d = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i .$$

За абсолютну похибку приймається половина ширини надійного інтервалу, тобто

$$\Delta x = t(\alpha, k) \frac{S}{\sqrt{n}} ,$$

де $t(\alpha, k)$ - коефіцієнт Стюдента, який відповідає надійній ймовірності α (значення величини α найчастіше приймають таким, що дорівнює 0,95) та числу ступенів волі k ; S – вибіркова оцінка середнього квадратичного відхилення величини X .

Якщо інструментальна похибка набагато перевищує випадкову, достатньо одного вимірювання. При цьому виміряне значення приймається як дійсне, а абсолютна похибка обчислюється за формулою:

$$\Delta x = \sqrt{\left(t(\alpha, \infty) \frac{d}{3} \right)^2 + (\alpha v)^2} .$$

Тут v – похибка відліку, а $d = \gamma \cdot x_n / 100\%$, де γ - *приведена* похибка приладу, а x_n – нормувальне значення. У засобів вимірювань з рівномірною шкалою похибка відліку складає половину ціни поділки приладу, а нормувальне значення дорівнює модулю різниці крайніх значень шкали. Величину γ визначають, виходячи з класу точності приладу (він позначений на корпусі приладу). Точніше, клас точності приладу дорівнює приведеній похибці, якщо вона виражена у відсотках.

Якщо випадкова та інструментальна похибки - це величини одного порядку, то вимірювання проводять багаторазово для зниження величини випадкової похибки, а як дійсне значення приймається середнє вибіркове. Абсолютна похибка при цьому обчислюється за формулою:

$$\Delta x = \sqrt{\left(t(\alpha, k) \frac{S}{\sqrt{n}} \right)^2 + \left(t(\alpha, \infty) \frac{d}{3} \right)^2} .$$

Похибка відліку в цьому випадку є частиною випадкової похибки.

Після прямих розглянемо непрямі вимірювання.

Якщо шукана величина у обчислюється за формулою $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то дійсне значення цієї величини (y_d) може бути визначене за формулою:

$$y_d = f(x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd}),$$

де $x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd}$ - дійсні значення безпосередньо вимірюваних величин x_1, x_2, \dots, x_n .

Максимально можливе значення абсолютної похибки при непрямих вимірюваннях величини у (Δy_{\max}) може бути обчислене за формулою:

$$\Delta y_{\max} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f(x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd})}{\partial x_i} \Delta x_i \right|,$$

де $\frac{\partial f(x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd})}{\partial x_i}$ - частинна похідна у по x_i , обчислена при

$x_1 = x_{1d}, x_2 = x_{2d}, \dots, x_n = x_{nd}$; Δx_i - абсолютна похибка величини x_i , яка визначається правилами, що описані вище.

Разом з тим, складові похибок величини у, які пов'язані з похибками різних безпосередньо вимірюваних величин, звичайно частково компенсуються. Тому для визначення абсолютної похибки непрямих вимірювань шуканої величини у (Δy) частіше використовують формулу:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f(x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd})}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2}.$$

На практиці часто визначають спочатку відносну похибку шуканої величини у (δy) за формулою:

$$\delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \ln f(x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd})}{\partial x_i} \Delta x_i \right)^2},$$

а абсолютну похибку цієї величини визначають як добуток відносної похибки та дійсного значення, тобто $\Delta y = y_d \cdot \delta y$.

Наведені вище формули для обробки результатів непрямих вимірювань застосовуються у випадку, якщо похибки $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ не дуже великі у порівнянні з $x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd}$. У протилежному випадку непрямі вимірювання розглядаються як

окремих випадок сумісних вимірювань та обробляються за правилами, описаними нижче.

Останніми розглянемо сумісні вимірювання. Якщо при сумісних вимірюваннях m (кількість вимірювань, тобто кількість рівнянь) дорівнює k (кількість шуканих величин, тобто кількість невідомих), то дійсні значення шуканих величин знаходять шляхом розв'язання системи рівнянь:

$$F_1 (y_1, y_2, \dots, y_k, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$F_2 (y_1, y_2, \dots, y_k, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

$$\dots \dots \dots$$

$$F_m (y_1, y_2, \dots, y_k, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Зазвичай при цьому похибка вимірювань велика, та її складно оцінити. Тому при сумісних вимірюваннях прагнуть до того, щоб m було більшим за k . У цьому випадку для визначення дійсних значень шуканих величин використовують метод найменших квадратів. Про метод найменших квадратів вже йшлося вище, де обчислювалися коефіцієнти регресії. У загальному випадку застосовуються ті самі основні ідеї, що і раніше (знаходження частинних похідних, дорівнювання їх нулю тощо). Розв'язуючи системи рівнянь, визначають дійсні значення шуканих величин y_1, y_2, \dots, y_k . Щодо похибок вимірювань цих величин, то формули їх розрахунку досить складні навіть у найпростішому випадку, коли рівняння вимірювань - це лінійні рівняння. Унаслідок цього методику розрахунку похибок сукупних та сумісних вимірювань ми не обговорюватимемо.

Розглянемо приклади обробки результатів вимірювань при різних видах вимірювань.

Приклад 5. При визначенні вмісту азоту в даній пробі були отримані такі результати: 9,28%; 9,38%; 9,35%; 9,43%; 9,53%; 9,48%. Відомо, що у цих вимірюваннях випадкова похибка значно більша за інструментальну. Знайти дійсне значення вмісту азоту в пробі, а також абсолютну та відносну похибки при надійній ймовірності $\alpha = 0,95$.

Знаходимо дійсне значення вимірюваної величини:

$$x_d = \frac{9,28 + 9,38 + \dots + 9,48}{6} = 9,41\% .$$

Визначаємо вибірккову оцінку середнього квадратичного відхилення:

$$S = \sqrt{\frac{1}{5}((9,28 - 9,41)^2) + \dots + (9,48 - 9,41)^2)} = 0,091\% .$$

Знаходимо за таблицею значення коефіцієнта Стюдента:

$$t(0,95; 5) = 2,571.$$

Обчислюємо абсолютну похибку вимірювань:

$$\Delta x = t(\alpha, k) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}} = 0,095\% .$$

Тоді відносна похибка дорівнює

$$\delta x = \frac{\Delta x}{x_d} = \frac{0,095}{9,41} = 0,01 .$$

Приклад 6. Сила струму вимірюється амперметром класу точності 2,5. Діапазон вимірювань $0 \div 10$ А, ціна поділки 0,05 А. Амперметр показує силу струму 9 А. Знайти абсолютну та відносну похибки.

Приведена похибка приладу дорівнює $\gamma = 2,5\%$. Величину d можна визначити, знаючи приведену похибку та нормувальне значення, яке в цьому випадку дорівнює $x_n = 10$ А.

$$d = \frac{\gamma \cdot x_n}{100\%} = \frac{2,5 \cdot 10}{100} = 0,25 \text{ (А)} .$$

Похибка відліку в цьому випадку дорівнює 0,025 А (половині ціни поділки), яка є величиною, значно меншою, ніж d . Тому абсолютна похибка вимірювання ΔI приблизно дорівнює абсолютній похибці приладу:

$$\Delta I = t(\alpha, \infty) \cdot \frac{d}{3} = \frac{1,96 \cdot 0,25}{3} = 0,163 \text{ (А)} .$$

Тоді відносна похибка вимірювання:

$$\delta I = \frac{\Delta I}{I} = \frac{0,163}{9} = 0,018 .$$

Приклад 7. Сила струму вимірюється амперметром класу точності 1,5. Діапазон вимірювань $0 \div 2$ А. Отримані такі результати вимірювань сили струму: 0,30; 0,285; 0,31; 0,31; 0,30; 0,29; 0,285; 0,32; 0,30 (А). Визначити дійсне значення сили струму та абсолютну похибку вимірювань.

$$I_d = \bar{I} = \frac{1}{9}(0,30 + 0,285 + \dots + 0,32 + 0,30) = 0,3 \text{ (А)};$$

$$\Delta I = \sqrt{\left(t(\alpha, k) \frac{S}{\sqrt{n}}\right)^2 + \left(t(\alpha, \infty) \frac{d}{3}\right)^2};$$

$$d = \frac{\gamma \cdot x_n}{100\%} = \frac{1,5 \cdot 2}{100} = 0,03 \text{ (А)};$$

$$k = n - 1 = 8; \quad t(0,95; 8) = 2,31; \quad \sqrt{n} = 3; \quad t(0,95; \infty) = 1,96;$$

$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (I_i - \bar{I})^2} = \sqrt{\frac{1}{8} ((0,30 - 0,30)^2 + \dots + (0,30 - 0,30)^2)} = 0,012 \text{ (А)};$$

$$\Delta I = \sqrt{\left(2,31 \cdot \frac{0,012}{3}\right)^2 + \left(1,96 \cdot \frac{0,03}{3}\right)^2} = 0,022 \text{ (А)}.$$

Приклад 8. Визначити дійсне значення потужності, яка виділяється на резисторі, а також абсолютну та відносну похибки визначення потужності, якщо прямі вимірювання сили струму в резисторі та напруги на ньому дали такі результати: $U = 107,3 \pm 0,3$ В; $I = 7,65 \pm 0,04$ А.

Дійсне значення потужності знайдемо за формулою:

$$P_d = U \cdot I = 107,3 \cdot 7,65 = 821 \text{ (Вт)}.$$

Далі знайдемо відносну похибку:

$$\delta P = \sqrt{\left(\frac{\partial \ln P(U_d, I_d)}{\partial U} \Delta U\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln P(U_d, I_d)}{\partial I} \Delta I\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\Delta U}{U_d}\right)^2 + \left(\frac{\Delta I}{I_d}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,3}{107,3}\right)^2 + \left(\frac{0,04}{7,65}\right)^2} = 0,006.$$

Тепер

$$\Delta P = P_d \delta P = 821 \cdot 0,006 = 4,9 \text{ (Вт)}.$$

Приклад 9. Рівняння вимірювань має такий вигляд:
 $y = ax^2 + bx + c$. При сумісних вимірюваннях були отримані такі пари значень x та y : 2 і 8; 3 і 11; 4 і 14; 5 і 17; 6 і 15; 7 і 11; 8 і 8. Знайти дійсні значення величин a , b та c і записати оптимальне за методом найменших квадратів рівняння, яке пов'язує змінні x та y .

Відповідно до методу найменших квадратів треба знайти такі значення a , b та c , за яких сума

$$\sum_{i=1}^7 (y_i - ax_i^2 - bx_i - c)^2$$

приймає мінімальне значення. Тому значення шуканих величин a , b та c знайдемо шляхом розв'язання системи рівнянь

$$\begin{cases} a \sum_{i=1}^7 x_i^4 + b \sum_{i=1}^7 x_i^3 + c \sum_{i=1}^7 x_i^2 = \sum_{i=1}^7 y_i x_i^2 \\ a \sum_{i=1}^7 x_i^3 + b \sum_{i=1}^7 x_i^2 + c \sum_{i=1}^7 x_i = \sum_{i=1}^7 y_i x_i \\ a \sum_{i=1}^7 x_i^2 + b \sum_{i=1}^7 x_i + 7c = \sum_{i=1}^7 y_i \end{cases}$$

або

$$\begin{cases} 7475a + 1295b + 203c = 2371 \\ 1295a + 203b + 35c = 421 \\ 203a + 35b + 7c = 82 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, одержимо: $a = -1,05$; $b = 10,1$; $c = -9,0$. Таким чином, для опису експериментальних даних оптимальною за методом найменших квадратів буде залежність
 $y = -1,05x^2 + 10,1x - 9$.

Розділ 3

ОСНОВИ БІОМЕХАНІКИ, БІОРЕОЛОГІЇ ТА БІОАКУСТИКИ

3.1 Основи біомеханіки

3.1.1 Основні поняття та закони обертального руху

Основні поняття механіки знайомі студентам зі шкільного курсу фізики, причому питання механіки поступального руху відображені у шкільному курсі достатньо для розуміння наступного матеріалу, а обертального – недостатньо. Тому питання обертального руху потребує обговорення.

Все ж таки, спочатку нагадаємо поняття поступального руху. **При поступальному русі тіла всі його точки рухаються однаково, тобто з однаковими швидкостями і прискореннями.**

При викладанні матеріалу, що стосується обертального руху, розглядатиметься рух *абсолютно твердих тіл*, тобто таких тіл, у яких відстань між будь-якими двома точками не змінюється з часом (таким чином, у абсолютно твердих тіл з часом не змінюються форма та розміри).

Найпростішим випадком обертального руху є обертальний рух відносно нерухомої осі, тобто такий **рух, при якому всі точки тіла рухаються по колах, центри яких лежать на одній прямій, що перпендикулярна до площини обертання та називається віссю обертання.**

Положення матеріальної точки, яка обертається навколо осі, можна охарактеризувати радіус-вектором (\vec{r}), тобто вектором, проведеним від центра кола до точки, яка обертається по колу.

Якщо точка рухається по колу зі сталою за модулем швидкістю, то таке обертання є рівномірним. Рівномірне обертання відбувається зі сталою кутовою швидкістю. Нагадаємо, що кутова швидкість (ω) при рівномірному обертанні - це відношення кута повороту ($\Delta\alpha$) радіус-вектора,

проведеного від центра кола до тіла, що рухається по колу, до проміжку часу (Δt), за який цей поворот відбувся, тобто

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t}.$$

Якщо обертання не є рівномірним, то кутова швидкість змінюється з часом, та її миттєве значення знаходять за формулою:

$$\omega = \dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt}.$$

При нерівномірному обертанні для того, щоб охарактеризувати швидкість зміни кутової швидкості, використовується така величина, як *кутове прискорення* (β). У загальному випадку

$$\beta = \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt}.$$

Розглянуті вище характеристики обертального руху тіл є кінематичними характеристиками.

Перейдемо до динамічних характеристик обертального руху: *моменту сили, моменту інерції, моменту імпульсу*.

Момент сили (M) - це фізична величина, модуль якої дорівнює добутку модуля цієї сили (F) на її плече (d), причому під плечем сили розуміють найкоротшу відстань від осі обертання до лінії, вздовж якої діє сила. Таким чином,

$$M = Fd.$$

Якщо вектор сили не лежить у площині, перпендикулярній до осі обертання, то під F в останній формулі слід розуміти величину проекції сили на зазначену площину.

Момент сили є векторною величиною, однак надалі ми, кажучи про момент сили, матимемо на увазі його модуль, що є скалярною величиною.

Якщо сила прикладена до тіла в деякій точці, яка характеризується радіусом-вектором \vec{r} , то остання формула може бути записана у такому вигляді:

$$M = Fr \sin \varphi,$$

де φ - кут між векторами \vec{F} та \vec{r} .

Перейдемо до поняття рівноваги. Розглядаючи обертальний рух, під рівновагою розуміють ситуацію, коли тіло обертається навколо осі зі сталою кутовою швидкістю або перебуває в стані спокою. Умова рівноваги тіл при обертальному русі може бути сформульована таким чином: **тіло знаходиться в рівновазі, якщо сума моментів всіх прикладених до тіла сил відносно осі обертання дорівнює нулю**. При цьому враховуються або ті сили, які лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання, або проекції цих сил на такі площини. Очевидно, що різні сили можуть обертати тіло навколо осі в різних напрямках. Тому моменти сил, які обертають тіло навколо осі в одному напрямку (наприклад, за годинниковою стрілкою), беруть зі знаком «+», а моменти сил, що обертають тіло в протилежному напрямку (проти годинникової стрілки), - зі знаком «-». Тоді умова рівноваги тіл при обертальному русі має вигляд:

$$M_1 + M_2 + \dots + M_n = 0,$$

де M_1, M_2, \dots, M_n - моменти прикладених до тіла сил відносно осі обертання, взяті зі знаком «+» або зі знаком «-» залежно від напрямку створюваного ними обертання.

Якщо сумарний момент (M) прикладених до тіла сил відносно осі обертання не дорівнює нулю, але сталий, то тіло обертається навколо цієї осі зі сталим кутовим прискоренням, причому

$$M = J\beta,$$

де J - коефіцієнт пропорційності, який називається *моментом інерції* тіла. Очевидно, що момент інерції є мірою інертності тіла при обертальному русі (як маса тіла при поступальному русі).

Момент інерції матеріальної точки відносно осі обертання дорівнює добутку маси (m) цієї точки на квадрат відстані (r) від точки до осі обертання, тобто

$$J = mr^2.$$

Якщо розмірами тіл не можна знехтувати (тіло не можна вважати матеріальною точкою), то момент інерції тіла відносно осі обертання обчислюється за формулою:

$$J = \int r^2 dm = \int r^2 \rho dV,$$

де dm - маса елементарної частинки цього тіла, віддаленої від осі обертання на відстань r ; dV - об'єм цієї частинки; ρ - густина речовини цього тіла (ρ у загальному випадку залежить від r). При використанні останньої формули інтегрування необхідно проводити по всьому об'єму тіла.

Аналогічно тому, як при описі поступального руху вводиться поняття імпульсу тіла, при описі обертального руху може бути введено поняття *моменту імпульсу* тіла (L) відносно осі. Величина модуля моменту імпульсу обчислюється за формулою:

$$L = J \omega ,$$

тобто **момент імпульсу тіла дорівнює добутку його моменту інерції відносно осі обертання на кутову швидкість обертання відносно цієї осі.**

Момент імпульсу відносно осі є векторною величиною, однак надалі при викладанні матеріалу цього підрозділу ми говоритимемо про модуль моменту імпульсу, якщо інше не буде оговорено окремо.

Модуль моменту імпульсу матеріальної точки, яка обертається по колу навколо деякої осі, можна також обчислити за формулою:

$$L = pr,$$

де p - модуль імпульсу матеріальної точки, r - відстань від цієї точки до осі обертання.

Основний закон динаміки обертального руху:

$$M = \dot{L} = \frac{dL}{dt} .$$

Аналогічно тому, як при розгляді поступального руху формулюється закон збереження імпульсу, у випадку обертального руху формулюється *закон збереження моменту імпульсу*: **момент імпульсу тіла відносно осі залишається сталим, якщо сумарний момент відносно цієї осі всіх зовнішніх сил, які діють на тіло, дорівнює нулю.**

3.1.2 Основи матеріалознавства

Розглянемо спочатку питання, що пов'язані з видами деформацій та величинами, що характеризують деформації.

Формулюючи поняття «деформація», зазначимо, що термін «деформація» може використовуватись у двох значеннях: або як деформування (тобто як процес), або як деформованість (тобто як властивість).

Деформацією (як процес) тіла називається зміна його форми та розмірів при дії на це тіло зовнішніх сил. Розрізняють *пружні та непружні (пластичні)* деформації.

При пружних деформаціях тіло після зняття деформувального впливу повністю відновлює свої початкові форму та розміри.

Важливим окремим випадком пружних деформацій є *високоеластичні* деформації. Високоеластичні деформації відрізняються значними змінами форми та розмірів тіл (матеріалів) при порівняно невеликих навантаженнях. Такі деформації найчастіше властиві просторово структурованим полімерам, у тому числі й речовинам, що входять до складу біологічних тканин. Основну увагу далі ми приділятимемо пружним деформаціям.

При непружних (пластичних) деформаціях після зняття деформувального впливу тіло не відновлює або тільки частково відновлює початкову форму. Деформації (як властивість), які зберігаються після зняття деформуючого впливу, називають залишковими, або пластичними.

Відповідно до характеру взаємних переміщень частин тіла при деформаціях вирізняють такі види деформації: *стиску, розтягу, зсуву, згину, кручення.*

При деформаціях тіл під дією зовнішніх сил відбуваються зміни середніх відстаней між атомами та молекулами, які складають ці тіла, що спричиняє появу *внутрішніх сил*. Під внутрішніми силами, як правило, розуміють сили, з якими взаємодіють частини тіла, розділені деяким перерізом.

Якщо направити вісь OX уздовж нормалі до площини такого перерізу (див. рис. 3.1), а осі OY та OZ розмістити в площині перерізу так, щоб усі три осі були взаємно перпендикулярні, то в загальному випадку внутрішня сила (F) має складові, спрямовані вздовж кожної з осей (F_x , F_y та F_z). Внутрішні сили, що розподілені по перерізу, у загальному

випадку створюють *обертальні моменти* відносно кожної з осей (M_x , M_y та M_z). Обертальний момент відносно осі OX часто називають крутильним та позначають M_k , моменти відносно осей OY та OZ називають згинальними.

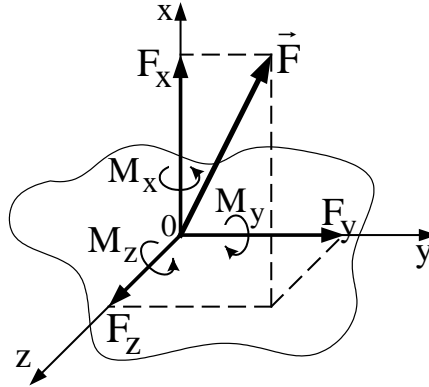


Рис. 3.1

Величина внутрішньої сили, яка виникає при деформації в деякій ділянці перерізу, залежить від площі цієї ділянки. Відношення внутрішньої сили \vec{F} , яка виникає при деформації на деякій ділянці перерізу, до площі цієї ділянки S називається *механічною напругою* ($\vec{\sigma}$), тобто

$$\vec{\sigma} = \frac{\vec{F}}{S}.$$

Остання формула визначає величину середнього значення механічної напруги на ділянці площею S . Для характеристики деформації в кожній точці перерізу механічна напруга вводиться як

$$\vec{\sigma} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{S} = \frac{d\vec{F}}{dS},$$

де $d\vec{F}$ - внутрішня сила, яка виникає в перерізі площею dS .

Як і внутрішня сила, механічна напруга є векторною величиною та має складові, спрямовані вздовж осей OX, OY та OZ (σ_x , σ_y та σ_z відповідно). Якщо розглядається плоский

переріз, що лежить в площині YOZ, то величину σ_x називають *нормальною напругою*, а величини σ_y та σ_z - *дотичними напругами*. Іноді дотичну напругу позначають буквою τ , причому загальна дотична напруга дорівнює

$$\tau = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_z^2}.$$

Таким чином, механічна напруга в кожній точці тіла є мірою внутрішніх сил, які виникають при деформації цього тіла під дією зовнішніх сил.

При вивченні в рамках біомеханіки роботи людських органів та конструкцій медичного призначення найважливішими є вимоги міцності, які потребують проведення розрахунків або (та) модельних досліджень на міцність. Під міцністю матеріалу ми розумітимемо здатність цього матеріалу протистояти руйнуванню при деформаціях, тобто міцність матеріалу тим більша, чим більшими є деформувальні впливи, які руйнують тіло. При розрахунках на міцність зазвичай прагнуть виділити найнебезпечніший за величиною механічної напруги переріз та у цьому перерізі визначити точку з найбільшим значенням механічної напруги. **Максимальна робоча напруга не повинна перевищувати припустиму напругу ($[\sigma]$)**, яка обчислюється за формулою:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{гр}}}{n},$$

де $\sigma_{\text{гр}}$ - *гранична напруга*, n - *коефіцієнт запасу міцності* (часто говорять просто *запас міцності*), значення якого найчастіше лежить у межах від 2 до 5, причому це значення береться тим більшим, чим більш довговічною має бути конструкція.

Поняття граничної напруги по-різному вводиться для різних тіл, про що докладніше буде сказано далі.

Для визначення способу обчислення граничної напруги необхідно спочатку докладно розглянути деформацію розтягу. Для характеристики деформації розтягу використовується така величина, як відносне видовження (ϵ), **яке дорівнює**

відношенню видовження тіла при деформації до його довжини у недеформованому стані, тобто

$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L},$$

де L - довжина недеформованого тіла, ΔL - його видовження (абсолютне видовження) при деформації. При збільшенні ε величина механічної напруги зростає, причому залежність σ від ε має досить складну форму, зображену на рис. 3.2.

Розглянемо детально графік залежності σ від ε , зображений на рис. 3.2. На початковій ділянці цього графіка при значеннях σ , що змінюються від 0 до σ_{Π} , механічна напруга прямо пропорційна відносному видовженню, тобто для цієї ділянки виконується *закон Гука*. Цей закон з використанням величин σ та ε записують у вигляді:

$$\sigma = \varepsilon E,$$

де E - *модуль пружності* (модуль Юнга), який характеризує пружні властивості матеріалу при деформації розтягання (стискання). Величина σ_{Π} називається *межею пропорційності*.

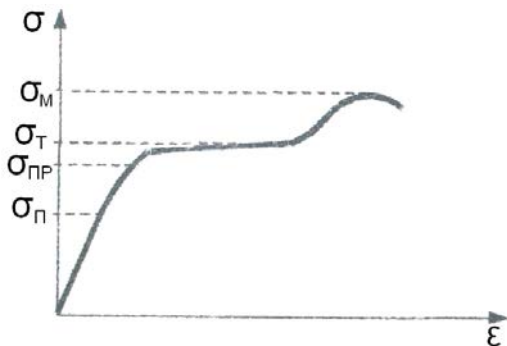


Рис. 3.2

При $\sigma_{\Pi} < \sigma < \sigma_{\text{пр}}$ деформація залишається пружною, але закон Гука вже не виконується. Величина $\sigma_{\text{пр}}$ називається *межею пружності*. При $\sigma > \sigma_{\text{пр}}$ деформація перестає бути пружною, та звичайно спостерігається ділянка, на якій значні збільшення величини ε відбуваються без істотних збільшень

механічної напруги. Ця ділянка називається ділянкою текучості матеріалу, а величина σ_T - *межею текучості*. Для ділянки текучості характерне утворення залишкових (пластичних) деформацій. Потім при збільшенні σ спостерігається ділянка, на якій з ростом ε швидко зростає й σ . При цьому швидко зростають і залишкові деформації. Після досягнення механічною напругою величини σ_m відбувається руйнування матеріалу. Тому величина σ_m називається *межею міцності*. Іноді цю величину називають також *руйнівною напругою*, а величину ε , яка відповідає руйнівній напрузі, *називають руйнуючою деформацією*.

Деякі матеріали (наприклад, леговані сталі) не мають вираженої ділянки текучості. Ділянка залежності σ від ε , яка відповідає пружним деформаціям, плавно переходить у таких матеріалів у ділянку, на якій спостерігаються залишкові деформації. Для таких матеріалів під межею текучості найчастіше розуміють напругу, яка відповідає залишковому видовженню $\varepsilon = 0,002$.

Матеріали, які руйнуються при порівняно невеликих деформаціях (невеликих значеннях ε), називаються *крихкими*.

Матеріали, у яких незначні навантаження викликають пластичні (непружні) деформації, називають *пластичними*. Пластичність матеріалу оцінюють значенням відносного залишкового видовження при розриві, що визначається за формулою:

$$\delta = \frac{L_k - L_0}{L_0} \cdot 100\%,$$

де L_k - кінцева довжина частини зразка після розриву, L_0 - початкова довжина цієї частини зразка. Відзначимо, що пластичність матеріалів звичайно зростає з ростом температури. З ростом температури звичайно спостерігають і зниження міцності.

Хоча деформації стиску та розтягу описуються тими самими законами і мають подібні графіки залежності σ від ε , здатність деяких матеріалів протистояти деформаціям стиску та розтягу істотно різні. Так, крихкі матеріали зазвичай добре

витримують деформацію стиску, але порівняно легко руйнуються при деформації розтягу.

Повертаючись до поняття граничної напруги, зазначимо, що для пластичних матеріалів як $\sigma_{\text{гп}}$ приймають межу текучості, а для крихких - межу міцності.

При деформації розтягу (стиску) відбувається зміна не тільки поздовжніх, але й поперечних розмірів деформованого тіла. При розтяганні поперечні розміри тіла зменшуються, при стисканні - збільшуються. Зазвичай *поперечне відносне видовження* (укорочення), яке ми позначатимемо $\epsilon_{\text{п}}$, у кілька разів менше за поздовжнє. **Відношення поперечного відносного видовження до поздовжнього називається коефіцієнтом Пуассона** та позначається μ , тобто

$$\mu = \frac{\epsilon_{\text{п}}}{\epsilon}.$$

Як правило, при розтяганні тіл їхній об'єм збільшується, а при стисканні - зменшується. Якщо V - об'єм недеформованого тіла, а ΔV - зміна (абсолютна) об'єму тіла при

деформації, то величину $\frac{\Delta V}{V}$ називають *відносною зміною*

об'єму тіла. При малих деформаціях (тобто при $\epsilon \ll 1$) відносна зміна об'єму пов'язана з величинами ϵ та μ співвідношенням

$$\frac{\Delta V}{V} = \epsilon \cdot (1 - 2\mu).$$

Для переважної більшості матеріалів $\mu < 0,5$. Якщо при розтяганні об'єм тіла не змінюється, то $\mu = 0,5$. Близькі до таких значення коефіцієнта Пуассона спостерігаються, наприклад, у каучуку й парафіні. В ізотропних матеріалів (тобто матеріалів, властивості яких не залежать від напрямку) $\mu \approx 0,25$. Деякі речовини характеризуються дуже малими значеннями μ . Наприклад, у бетону $\mu \approx 0,1$, а для корку можна вважати, що μ дорівнює нулю. Для більшості матеріалів значення μ лежать у діапазоні від 0,23 до 0,35.

Значення модуля Юнга та коефіцієнта Пуассона для деяких поширених матеріалів наведені в таблиці 3.1.

Таблиця 3.1

Матеріал	E , ГПа	μ
Сталь	190...220	0,25...0,35
Мідь	80...110	0,31...0,34
Латунь	100	0,32...0,42
Бронза	90...120	0,32...0,4
Алюміній	60...80	0,32...0,36
Каучук	0,008...0,01	0,47
Золото	8	0,42
Срібло	80	0,38...0,41
Скло	50...70	0,25

Перейдемо до розгляду деформації зсуву. Деформацію зсуву найпростіше розглядати на прикладі прямокутного паралелепіпеда, нижня грань якого закріплена, а до верхньої грані прикладена сила F , яка лежить у площині верхньої грані (див. рис. 3.3).

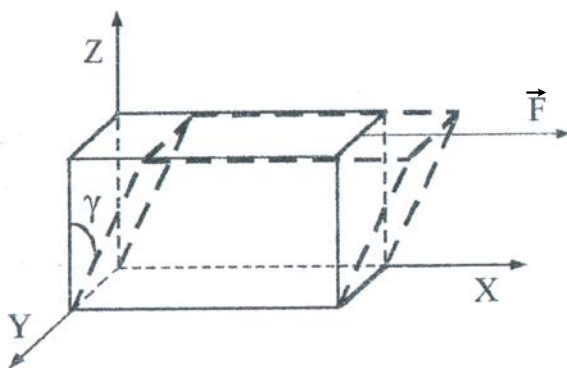


Рис. 3.3

При зсуві деформований паралелепіпед перестає бути прямокутним. Шари речовини, з якої складається паралелепіпед, що паралельні площини XY , зміщуються один відносно одного

у напрямку дії сили F . Ступінь деформованості паралелепіпеда характеризується кутом γ , який називається *кутом зсуву*, або *відносним зсувом*. Остання назва пов'язана з тим, що зазвичай при зсуві кут γ малий, а для малих кутів, що виражені у радіанах, $\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta x}{\Delta z}$, де Δx - абсолютний зсув шару речовини.

При зсуві виникають дотичні напруги, що спрямовані паралельно силі \vec{F} . При малих деформаціях напруги, що виникають, прямо пропорційні куту зсуву, тобто

$$\tau = G\gamma.$$

Остання формула є математичним записом закону Гука при деформації зсуву. Величина G у цій формулі називається *модулем пружності при зсуві*, або *модулем пружності другого роду*. Модуль пружності другого роду для будь-якого матеріалу пов'язаний з модулем Юнга для цього матеріалу співвідношенням

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}.$$

Якщо $\mu = 0,25$, що виконується для багатьох матеріалів, то $G \approx 0,4E$. Зокрема, $G \approx 0,4E$ для всіх ізотропних матеріалів.

Припустима напруга при зсуві ($[\tau]$) для пластичних матеріалів зазвичай приймається $[\tau] = (0,5 \dots 0,6) \cdot [\sigma]$, а для крихких матеріалів $[\tau] = (0,8 \dots 1,0) \cdot [\sigma]$.

Згин - це складний вид деформації. При згині відбувається як розтяг та стиск шарів речовини, так і їхній зсув відносно один одного. У результаті при згині в конструкції виникають як нормальні, так і дотичні механічні напруги. Тому при виборі конструкцій, які зазнають деформації згину, може виникати необхідність проведення розрахунків міцності і на розтяг, і на стиск, і на зсув.

Кручення - це вид деформації, при якому в поперечному перерізі деформованої конструкції виникає єдиний силовий фактор - крутильний момент. При вивченні механічних процесів в організмі або в конструкціях медичного призначення

деформацію кручення звичайно можна не враховувати.

У біомеханіці найчастіше доводиться зважати на теплове розширення тіл. Якщо в складі деякої конструкції два об'єкти взаємодіють між собою, то при нагріванні відбувається теплове розширення матеріалів, з яких складаються взаємодіючі об'єкти, що у свою чергу приводить до зміни пов'язаних із такими взаємодіями механічних напруг у цих об'єктах. Тому до характеристик матеріалів, важливих з погляду біомеханіки, належать *лінійний та об'ємний коефіцієнти теплового розширення*.

При малих змінах температури теплове розширення тіл описується такими співвідношеннями:

$$L = L_0(1 + \alpha \Delta t); \quad V = V_0(1 + \beta \Delta t),$$

де L та V – довжина та об'єм тіла після зміни температури відповідно; L_0 та V_0 – довжина та об'єм тіла до зміни температури відповідно; Δt – збільшення температури; α та β – лінійний та об'ємний коефіцієнти теплового розширення тіл відповідно. Слід відмітити, що з високою точністю справедливим є співвідношення $\beta = 3\alpha$.

3.1.3 Деякі важливі питання біомеханіки

Викладений вище матеріал є основою, спираючись на яку, можна перейти до розгляду деяких питань біомеханіки. Почнемо з *опорно-рухового апарата* людини.

Опорно-рухова система людини є сукупністю зв'язаних між собою кісток (зрослих або з'єднаних між собою в суглобах) та м'язів, які кріпляться до кісток, як правило, за допомогою зв'язок. З погляду механіки, опорно-руховий апарат людини – це система різних важелів. Більшість кістково-м'язових з'єднань (за винятком середнього уха) побудована так, що при їхній роботі за рахунок програшу в силі відбувається виграш у швидкості переміщення, тобто в організмі людини головну роль відіграють так звані *важелі швидкості* (на відміну від *важелів сили*, які забезпечують виграш у силі за рахунок програшу в переміщенні).

З'єднання кісток бувають одноосьові, двохосьові та тривісні залежно від числа взаємно перпендикулярних осей, відносно яких можуть обертатися кістки в суглобі. У деяких випадках багатовісність з'єднання забезпечується за рахунок близького розташування двох або декількох одноосьових з'єднань. Взагалі, багатоланність з'єднань забезпечує значне збільшення кінематичної рухливості цих з'єднань (наприклад, у кистях рук).

Внаслідок високого положення центра ваги тіла людини в положенні стоячи та порівняно малої при цьому площі опори опорно-руховий апарат людини, з погляду механіки, є досить нестійкою системою. Зберігати рівновагу людині, що стоїть, вдається за рахунок безперервної роботи м'язів. При русі людини м'язи, створюючи сили, забезпечують переміщення кісток, тобто виконують роботу. Проте м'язи працюють, підтримуючи рівновагу, і в тому випадку, якщо людина стоїть нерухомо. У зв'язку з цим кажуть про *динамічну* (при русі) і *статичну* (у нерухомому стані) роботу м'язів. Треба, однак, ясно розуміти, що й статична робота, насправді, пов'язана з переміщеннями (без переміщення немає механічної роботи). Коли людина стоїть, відбуваються дрібні скорочення та розслаблення м'язів, які створюють невеликі (часто непомітні для ока) переміщення тіла або його частин. Таким чином, статична робота, по суті, є різновидом динамічної роботи.

Вимірювання роботи окремих м'язів свідчать про те, що найбільша зовнішня механічна робота виконується м'язом при середніх значеннях навантажень і середніх значеннях швидкостей скорочення.

Зрозуміло, що робота виконується не тільки скелетними м'язами. М'яз міокарда безупинно виконує роботу, перекачуючи кровоносною системою кров. Гладкі м'язи стінок кишечника забезпечують його перистальтику і таке інше.

Робота, що виконується людиною, та й розвинута нею при цьому потужність можуть набувати суттєво різних значень і діапазон цих значень у точності невідомий. Деякі граничні значення можна зазначити тільки для потужності. Так, спортсмен-стрибун при стрибку розвиває потужність порядку 3,5 кВт.

Для вимірювання роботи людини застосовують пристрій, які називаються *ергометрами*, а самі вимірювання роботи при цьому називаються *ергометрією*. Наприклад, дозовані навантаження на організм людини з метою оцінки стану й резервів серцево-судинної системи можуть створюватися за допомогою велоергометра (див. рис. 3.4), у якому зміна навантаження на людину, яка крутить педалі, забезпечується за рахунок зміни сили тертя між ободом колеса (1 на рис. 3.4) та спеціальною стрічкою (2 на рис. 3.4), перекинутою через обід.

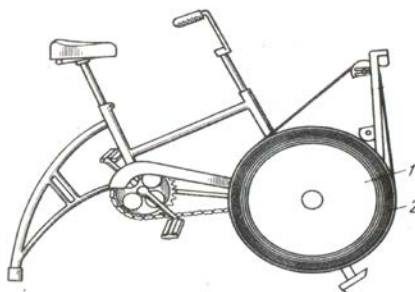


Рис. 3.4

У деяких випадках при русі тіла людини можуть виникати стани перевантаження (підвищеної вагомості) або невагомості.

З проблемами перевантажень найчастіше доводиться мати справу в авіації та космонавтиці. Найважливішими реакціями організму на перевантаження є зміни, які відбуваються в серцево-судинній системі. Обумовлене інерційними явищами збільшення гідравлічного тиску призводить унаслідок еластичності судин до перерозподілу крові в організмі, точніше, до зсуву її в напрямку дії перевантаження. Це може спричинювати зменшення припливу крові до серця, легенів, головного мозку. Найгірше при перевантаженнях здійснюється кровопостачання очей, унаслідок чого порушуються зорові функції. Одним з найважливіших методів боротьби з перевантаженнями є зміна положення тіла щодо напрямку перевантаження. Так, якщо перевантаження спрямоване не вздовж тіла, а під кутами, близькими до 90° , до напрямку

голова - таз, то переносимість перевантаження зростає в багато разів.

Важливою особливістю біомеханічних систем є те, що найчастіше не тільки збільшення, але й зменшення механічного впливу виявляється несприятливим фактором. При тривалих змінах зовнішніх умов пристосувальні механізми людського організму здійснюють не тільки функціональну, але й морфологічну перебудову, що призводить до негативних наслідків при поверненні організму до нормальних умов. Так, зниження рівня механічних навантажень при невагомості призводить до падіння мінеральної насиченості кісткової тканини, тобто до погіршення механічних характеристик кісток, і в першу чергу, зниження межі міцності. При цьому найшвидша атрофія кісткової тканини відбувається в хребті, із чим пов'язана можливість небезпечних ушкоджень при поверненні від невагомості до нормальної вагомості.

Функціонування організму людини пов'язане зі здійсненням *інерціальної орієнтації*, тобто з визначенням положення тіла відносно напрямку сили ваги або напрямку прискорення при прискореному русі тіла. Інерціальною системою орієнтації у людини є її *вестибулярний апарат*. Він розташований у внутрішньому вусі (докладніше див. підрозділ 3.2) та складається із трьох взаємно перпендикулярних *напівкружних каналів* і порожнини (*присінка*). На внутрішній поверхні стінок присінка та у частині напівкружних каналів знаходяться групи *рецепторних волоскових клітин*. Усередині присінка та напівкружних каналів знаходиться студениста маса (*ендолімфа*), яка містить дрібні кристали – *отоліти*. Прискорене переміщення голови або зміна її орієнтації відносно напрямку сили ваги викликає переміщення ендолімфи та отолітів, що приводить до подразнення волоскових клітин та вироблення нервових імпульсів, які надходять потім у головний мозок.

Досить тривалі періодичні впливи на вестибулярний апарат людини (наприклад, при хитанці на кораблі) можуть погано переноситися організмом та призвести його до стану, який називається *морською хворобою*.

3.2 Основи біореології

3.2.1 Механічні властивості біологічних тканин

Для опису механічних властивостей біологічних тканин наразі широко використовуються поняття та формули *реології* – такого розділу фізики, який вивчає процеси, пов'язані з необоротними залишковими деформаціями та плином різних в'язких і пластичних матеріалів. Застосування реології при вивченні біологічних систем є цариною *біореології*.

Вивчення механічних властивостей біологічних тканин почнемо з кісткової тканини. Кісткова тканина – один з видів сполучної тканини, яка складається з декількох видів клітин та міжклітинної речовини, яка є обвапнованою.

Основними компонентами кісткової тканини є макромолекули *тропоколагену* та неорганічні кристали, у першу чергу, різні солі кальцію.

Для кісткової тканини при деформації стиску руйнівні напруження значно більші, ніж при розтягу.

Механічні характеристики кісткової тканини сильно залежать від її вологовмісту. Зі збільшенням вологовмісту модуль пружності кісткової тканини та величина руйнівної напруги зменшуються, а руйнуюча деформація зростає. Більше того, від вологовмісту залежить і вигляд залежності між напругою та відносним видовженням. Так, у сухої кісткової тканини залежність між напругою та відносним видовженням має лінійний характер, а зі збільшенням вологовмісту ця залежність стає все більш нелінійною. Вважається, що властивості кісткової тканини у фізіологічних умовах відповідають вологовмісту кістки, що лежить у діапазоні 5...8,5%.

Механічні характеристики компактної кісткової тканини сильно залежать також від напрямку виникаючих при деформації механічних напруг. Так, для деформації розтягу в напрямку поздовжньої осі трубчастої кістки модуль Юнга компактної кісткової тканини становить величину порядку 18 ГПа, а в напрямках, перпендикулярних до цієї осі, варіює в межах приблизно від 7 ГПа до 8,5 ГПа. Щодо руйнівної напруги та руйнуючої деформації, то в напрямку поздовжньої осі вони мають значення порядку 128 МПа та 0,009 відповідно, а в

напрямках, перпендикулярних до цієї осі, зазначені величини мають значення 13...17 МПа та 0,002 відповідно.

Наступною розглянемо хрящову тканину. З погляду біореології суглобовий хрящ є нелінійно-в'язкопружним анізотропним матеріалом з гетерогенністю механічних властивостей по суглобній поверхні. Він має дві функціональні особливості: по-перше, деформуючись під впливом навантаження значно легше, ніж субхондральна кістка (відношення їхніх твердостей дорівнює 1:10), хрящ зменшує концентрацію напруг у кістках; по-друге, хрящ забезпечує низький коефіцієнт тертя в суглобі - від 0,005 до 0,012.

Руйнівні напруги при розтягу зовнішнього шару хряща виростків стегнової кістки вздовж і поперек напрямку колагенових волокон дорівнюють 25,5 МПа та 9,8 МПа відповідно. Модуль пружності при стиску змінюється в чималих межах - від 2,3 МПа до 50 МПа. Значення коефіцієнта Пуассона близьке до 0,5; отже, суглобовий хрящ у першому наближенні можна розглядати як матеріал, що не стискається. Модуль зсуву змінюється від 0,4 МПа до 4,1 МПа, причому дегенеративні зміни в хрящі викликають збільшення цього модуля. Розподіл характеристик механічних властивостей суглобового хряща по поверхні суглоба неоднорідний, і саме це забезпечує рівномірну передачу зусилля з найбільшим ступенем просторової відповідності поверхонь контакту.

М'які біологічні тканини за своїми механічними властивостями істотно відрізняються від твердих тканин.

До складу м'яких тканин входять клітини, колагенові та еластинові волокна, *основна речовина*. Унаслідок цього м'які тканини, як правило, розглядають як складений матеріал з аморфною матрицею, армований безперервними волокнами двох типів.

Колагенові фібрили, які складаються з молекул тропоколагену, у м'яких тканинах з'єднуються в колагенові волокна та пучки таких волокон. Колагенові волокна мають високу межу міцності при розтязі (50...100 МПа) та мають високий модуль пружності (порядку 1 ГПа).

Еластин складається з ланцюгів амінокислот, з'єднаних між собою в різних ділянках хімічними зв'язками. При розтязі

для еластину, на відміну від колагену, виконується закон Гука. Еластин у тканинах може зустрічатися у вигляді волокон (у шкірі, венах та ін.) або у вигляді мембран (в артеріях). Модуль пружності еластину порядку 0,6 МПа.

Основна речовина перерозподіляє навантаження від одного волокна до іншого, ізолює окремі волокна, запобігаючи поширенню розривів від одного волокна до іншого, зменшує тертя при розпрямленні волокон.

Залежність механічної напруги від відносного видовження для м'яких тканин має складний вигляд, що зображений на рис. 3.5.

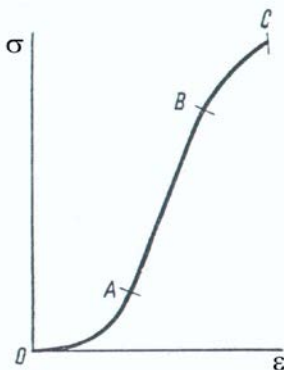


Рис. 3.5

Як ми вже зазначали, м'які тканини при розтягу здатні до великих деформацій і зв'язок між напругою та деформацією має нелінійний характер. Умовно криву «напруга - деформація» можна поділити на три ділянки. Перша ділянка – це ділянка від О до А, де напруга зі збільшенням деформації зростає за експоненціальним законом. Ця ділянка відповідає фізіологічному діапазону функціонування м'яких біологічних тканин. На другій ділянці (АВ) зв'язок між напругою та деформацією практично лінійний. На третій ділянці (ВС) проявляється нелінійність. В точці С відбувається розрив структурних елементів.

При описі поведінки м'яких біологічних тканин в межах фізіологічних навантажень зазвичай використовують

припущення про їхню суто пружну поведінку, причому це припущення не суперечить експериментальним даним.

Окремо треба сказати про м'язову тканину. М'язи здатні виконувати механічну роботу, забезпечуючи переміщення людини, рух повітря в дихальних шляхах, рух крові та багато інших життєво важливих процесів. Розрізняють два основних типи м'язів: 1) поперечно - смугасті (на поздовжньому вздовж волокон зрізі під мікроскопом видно правильну систему темних та світлих смуг, що чергуються), які утворюють тканину, що прикріплюється до різних частин кістяка, унаслідок чого їх також називають кістяковими м'язами; 2) гладкі м'язи стінок внутрішніх органів, кровоносних та лімфатичних судин.

Особливості структури й механізм м'язового скорочення можна розглянути на прикладі поперечно - смугастого м'яза. Він складається з пучків паралельних волокон, кожне з яких має діаметр 10...100 мкм та довжину 10...15 см. Волокно оточене пружною оболонкою (сарколемою) та містить 1000...2000 паралельно розташованих тонких ниток - міофібрил діаметром 1...2 мкм.

Кожна міофібрила розділена z-мембранами на ділянки - саркомери довжиною 2,5...3 мкм. Саркомер - найменше утворення, яке має властивість скоротності. Між z-мембранами розташовані решітки з тонких актинових та товстих міозинових ниток.

Початок скорочення волокна пов'язаний з надходженням у міофібрили речовин — активаторів механохімічної реакції, зокрема іонів Ca^{++} .

При активації саркомера актинові та міозинові нитки зчеплюються за допомогою поперечних містків. Решітки ниток ковзають, усуваючись одна в одну, завдяки чому й відбувається скорочення волокна. Містки в процесі скорочення саркомера багаторазово прикріплюються, створюють зусилля, згинаються, просуваючи нитку вздовж нитки, та відкріплюються. Енергія для роботи містків постачається АТФ.

При скороченні м'язи розвивають великі зусилля, які залежать від площі поперечного перерізу, початкової довжини волокон та ряду інших факторів. Сила м'яза на 1 cm^2 його поперечного перерізу називається *абсолютною м'язовою силою*.

У людини вона становить величину приблизно від 50 до 100 Н. Сила й потужність тих самих м'язів залежать від ряду фізіологічних умов: віку, статі, тренування та ін.

Гладкі м'язи за своїми властивостями істотно відрізняються від кістякових: не мають упорядкованого розташування скорочувальних білків та мають менші розміри волокон. Їхні клітини з'єднуються між собою протоплазменими містками та міофібрилами. Збудливість гладких м'язів значно нижча, ніж поперечно - смугастих, а період м'язового скорочення - довший. Гладкі м'язи мають високу здатність до автоматичної діяльності. Подразниками, які збуджують автоматичне скорочення, є деякі продукти обміну речовин, що з'являються в самому м'язі або доставлені кров'ю.

Для опису залежності між силою та швидкістю м'язового скорочення звичайно використовується рівняння Хілла:

$$v = \frac{b(F_0 - F)}{F - a} \quad \text{або} \quad F = \frac{bF_0 + va}{v + b},$$

де v – швидкість скорочення; F – сила (навантаження); F_0 – максимальна ізометрична сила, яку може розвинути м'яз; b – константа, яка має розмірність швидкості; a – константа, яка має розмірність сили. Ізометричною називається сила, яку розвиває м'яз за умов незмінності своєї довжини

У пасивному стані м'яз поводить себе як м'яка біологічна тканина. Якщо розтягальна сила F не занадто велика, то співвідношення між довжиною м'яза цієї силою описується експоненціальною залежністю

$$F = k \exp\left(\frac{\ell}{c\ell_0}\right),$$

де ℓ та ℓ_0 - довжини розтягнутого та нерозтягнутого м'яза відповідно, k та c – деякі константи. Зростаюча опірність спочиваючого м'яза розтягання до великих довжин обумовлена пружними елементами, розташованими паралельно скорочувальним ниткам. Самі міофібрили в стані спокою майже не чинять опору.

Зазначимо, що застосування понять та підходів біореології до опису властивостей біологічних тканин ускладнюється

низкою особливостей цих тканин. Так, біологічні тканини є неоднорідними середовищами, для яких характерні **анізотропія (залежність властивостей тканин від напрямку в них)** та нелінійність механічних властивостей. При механічних напруженнях біологічних тканин можуть спостерігатися великі відносні деформації. Механічні властивості біологічних тканин залежать від ряду механічних факторів (швидкості та тривалості навантаження, орієнтації та ін.) та від ряду факторів біологічної природи (віку організму, ступеня функціональної активності тощо). Модуль пружності біологічних тканин не є константою. Тому криві залежності механічної напруги від відносного видовження нелінійні. Крім того, істотно відрізняються властивості кісткової тканини та м'яких тканин.

Для біологічних тканин характерна також *релаксація напруг* та *повзучість*. **Говорячи про релаксацію напруг, мають на увазі, що при сталих значеннях ε величина механічної напруги залежить від часу. Якщо при сталих значеннях σ від часу залежить відносне видовження, то говорять про повзучість матеріалу.**

Важливо також, що опис більшості механічних характеристик біологічних об'єктів неможливий без урахування умов їхнього функціонування в складі цілісного живого організму.

3.2.2 Механіка рідин, біореологія та деякі питання гемодинаміки.

Виняткова роль системи кровообігу у функціонуванні організму людини визначає необхідність розгляду біофізичних аспектів роботи цієї системи. Плин крові судинами - це досить складний, з погляду біофізики, процес, вивчення якого корисно почати з розгляду простішого процесу - плинку води по трубах. Тому спочатку вивчимо основні поняття та формули механіки рідин, зокрема, гідродинаміки.

Найпростішою моделлю рідини є *ідеальна рідина*. **Ідеальна рідина - це абсолютно нестислива та нев'язка рідина.** У нестисливій рідині нехтують залежністю густини від тиску. Нев'язка рідина характеризується відсутністю

внутрішнього тертя. Найпростішим видом руху рідини є *стаціонарний* рух. При стаціонарному русі рідини її швидкість в кожній точці не змінюється з часом.

Швидкість руху частинок рідини називають *лінійною* швидкістю.

Для стаціонарного руху ідеальної рідини точно виконується *рівняння Бернуллі*:

$$P + \rho gh + \frac{\rho v^2}{2} = \text{const} ,$$

де P - тиск у деякій точці рідини, h - висота цієї точки, відлічувана від деякого рівня, v – швидкість (лінійна) рідини в цій точці, g - прискорення вільного падіння, ρ - густина рідини.

Три доданки, які знаходяться у лівій частині рівняння Бернуллі, прийнято називати *статичним*, *гидростатичним* та *динамічним (гидродинамічним)* тисками відповідно. Необхідно пам'ятати, що рівняння Бернуллі є наслідком закону збереження механічної енергії та виконується за тих самих умов, що й цей закон. Таким чином, чим більша в'язкість, а отже, тертя в системі, тим гірше виконується рівняння Бернуллі.

Якщо рівняння Бернуллі точно виконується тільки для ідеальної рідини, то наступне важливе рівняння - рівняння нерозривності струменя - виконується і для реальної рідини. Воно має вигляд:

$$Q = Sv = \text{const} ,$$

де Q - *об'ємна* швидкість плину рідини, тобто об'єм рідини, який протікає через поперечний переріз труби за одиницю часу $[Q] = \text{м}^3/\text{с}$, S - площа поперечного перерізу струменя (при плинні рідини по трубі - площа поперечного перерізу труби), v - усереднена по перерізу швидкість плину рідини.

Рівняння нерозривності струменя випливає із закону збереження маси для нестисливої рідини.

Реальні рідини - це *в'язкі* рідини. При плинні реальної рідини швидкість її руху в різних точках перерізу потоку (струменя) різна. Називатимемо ділянки рідини, які рухаються з однією швидкістю, шаром рідини. У реальній рідині при русі шарів один відносно одного виникають сили *внутрішнього*, або

в'язкого тертя між цими шарами. Існування сил в'язкого тертя при плинні реальної рідини - це і є в'язкість рідини, яка розуміється як фізичне явище.

Далі ми розглядатимемо тільки реальні (в'язкі) рідини.

Плин рідини може бути *ламінарним* або *турбулентним*. При ламінарному (шаруватому) плинні шари рідини ковзають один відносно одного, зберігаючи свою цілісність і не перемішуючись (якщо зневажити дифузією). Такий вид плину спостерігається при порівняно малих відносних швидкостях руху сусідніх шарів, тобто при невеликих значеннях градієнта швидкості. При великих відносних швидкостях руху сусідніх шарів сили тертя між цими шарами виявляються достатніми для створення на границях шарів вихрів, які викликають порушення цілісності шарів та їхнє активне перемішування. Такий вид плину рідини називається турбулентним (вихровим).

Далі ми вважатимемо, що плин рідини є ламінарним.

Поняття в'язкості як фізичної характеристики рідини (фізичної величини) вводиться в гідродинаміці за допомогою *формули Ньютона для сили в'язкого тертя*. Вона має вигляд:

$$F = \eta \frac{dv}{dz} S, \quad (3.1)$$

де F - сила в'язкого тертя між сусідніми шарами рідини, що тече; v - швидкість руху шару рідини, z - координата, яка спрямована

перпендикулярно до границі стикання шарів, унаслідок чого $\frac{dv}{dz}$ є модулем градієнта швидкості (тобто величиною, яка характеризує величину зміни швидкості плину рідини при переході від одного шару до іншого), S - площа поверхні стикання шарів рідини, що труться, η - коефіцієнт пропорційності, який називається *коефіцієнтом в'язкості* або *динамічною в'язкістю* рідини.

Коефіцієнт в'язкості в СІ вимірюється у *паскаль - секундах* (Па·с). Вода, наприклад, при 20°C має в'язкість $\eta = 1,005 \cdot 10^{-3}$ Па·с.

Вимірювання в'язкості рідини називається *віскозиметрією*, а прилади для її вимірювання – *віскозиметрами*.

При плинні рідини по циліндричній трубі розглянуті шари - це коаксіальні циліндри, які начебто вкладені один в одний, S - площа бічної поверхні цих циліндрів, а напрямом z у будь-якій точці струменя збігається з напрямком радіуса перерізу циліндра в цій точці.

Багато складних рідин, неоднорідних за складом частинок, що утворюють ці рідини (наприклад, розчини макромолекул), не підкоряються формулі Ньютона. Тому *реальні рідини* прийнято підрозділяти на *ньютонівські та неньютонівські* залежно від того, чи виконується для них формула (3.1), чи не виконується.

Абсолютно коректно поняття "коефіцієнт в'язкості" може використовуватись тільки для ньютонівських рідин. **У ньютонівських рідин коефіцієнт в'язкості залежить тільки від роду рідини та від її температури**, причому зі зростанням температури коефіцієнт в'язкості зменшується. **У неньютонівських рідин величина коефіцієнта в'язкості залежить також від величин, які характеризують умови плину рідини, наприклад, від градієнта швидкості.** Тому казати про коефіцієнт в'язкості неньютонівських рідин можна тільки при детальній характеристиці методики та умов визначення цього коефіцієнта. Звичайно, говорячи про в'язкість неньютонівських рідин, використовують термін "позірна в'язкість".

Тепер, після введення поняття коефіцієнта в'язкості, можна з'ясувати умови, від яких залежить характер плину рідини.

Здатність рідини переходити від ламінарного плину до турбулентного і навпаки, залежить як від характеристик рідини (коефіцієнта в'язкості, густини), так і від усередненої по перерізу швидкості її плину, а також діаметра труби. Схарактеризувати цю здатність можна за допомогою *числа Рейнольдса* (Re). При плинні рідини в циліндричній трубі діаметром D це число обчислюється за формулою:

$$Re = \frac{\rho v D}{\eta}. \quad (3.2)$$

Значення числа Рейнольдса, при якому відбувається перехід від ламінарного плину до турбулентного, називається критичним ($Re_{кр}$). Для гладких циліндричних труб воно приблизно дорівнює $Re_{кр} \approx 2300$.

Якщо значення числа Рейнольдса менше за критичне значення ($Re_{кр}$), то плин рідини є ламінарним, якщо більше - турбулентним.

Як видно з формули (3.2), число Рейнольдса для рідини залежить від її густини та динамічної в'язкості, а точніше - від їхнього відношення. Тому здатність рідини переходити від ламінарного плину до турбулентного або навпаки можна характеризувати такою величиною, як *кінематична в'язкість*, яка позначається ν та дорівнює $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. У зв'язку із цим

формула для числа Рейнольдса може бути записана у вигляді:

$$Re = \frac{vD}{\nu}.$$

Кінематична в'язкість у СІ вимірюється у m^2/s .

Внаслідок тертя між стінками труби, якою тече рідина, та рідиною, а також між шарами рідини швидкість руху шару залежить від його віддалення від стінки труби, причому чим ближче шар до стінки, тим його швидкість менша. При цьому вважають, що шар, який торкається стінки, перебуває у спокої. Для ділянки циліндричної труби довжиною L та радіусом R залежність швидкості шару рідини (v) від відстані до центра труби (r) у випадку ньютонівських рідин має вигляд:

$$v = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \cdot (R^2 - r^2), \quad (3.3)$$

де P_1 та P_2 - тиски на початку та на кінці ділянки труби відповідно. Найбільшу швидкість (v_{max}) мають частинки, які рухаються вздовж осі труби (для них $r = 0$). При цьому:

$$v_{\max} = \frac{P_1 - P_2}{4\eta L} \cdot R^2.$$

Виходячи з формули (3.3) та формули нерозривності струменя, можна одержати вираз, який визначає об'єм рідини, що протікає через поперечний переріз циліндричної труби за одиницю часу при стаціонарному ламінарному плині (*формула Пуазейля*):

$$Q = \frac{(P_1 - P_2) \cdot \pi R^4}{8\eta L}. \quad (3.4)$$

Іноді проводять аналогію між процесами протікання рідини в трубі та електричного струму в провіднику. При цьому Q вважається аналогом сили струму I , а різниця тисків $P_1 - P_2$ - аналогом різниці потенціалів $\phi_1 - \phi_2$. Враховуючи, що

$$\frac{\phi_1 - \phi_2}{I} = R, \quad \text{де } R - \text{електричний опір, величину}$$

$$X = \frac{P_1 - P_2}{Q} = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \quad \text{називають } \textit{гiдpавлiчним опором}. \quad \text{Корисно}$$

звернути увагу на те, що X для циліндричних труб дуже залежить від радіуса труби. Для гідравлічного опору характерні ті самі закони для *послідовного* та *паралельного з'єднань труб*, що й для електричного опору при різному з'єднанні провідників. Тобто, якщо труби з гідравлічними опорами X_1, X_2, \dots, X_n з'єднані послідовно, то загальний гідравлічний опір ($X_{\text{заг}}$) цієї системи буде:

$$X_{\text{заг}} = X_1 + X_2 + \dots + X_n,$$

а якщо труби з'єднані *паралельно*, то:

$$\frac{1}{X_{\text{заг}}} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \dots + \frac{1}{X_n}.$$

Формула (3.4) використовується для практичного визначення в'язкостей рідин. Розглянемо методи вимірювання в'язкості рідин. Вимірювання в'язкості рідини називається *віскозиметрією*, а прилади для її вимірювання – *віскозиметрами*.

Коефіцієнти в'язкості, значення яких лежать у межах 10^{-5} - 10^4 Па·с, визначаються за допомогою капілярних віскозиметрів (Оствальда і Гесса).

Формули гідродинаміки найчастіше застосовуються для опису ньютонівських рідин. Тому для опису плин у судинах крові, яка є неньютонівською рідиною, доводиться використовувати поняття та формули біореології.

У рамках біореології плин крові розглядається як деформація зсуву, а основними кількісними характеристиками досліджуваних процесів є напруга зсуву, або напруга при зсуві, та *швидкість зсуву*.

Раніше вводилося поняття кута зсуву, або відносного зсуву, який позначався γ .

У процесі зсуву шарів при плинні рідини кут зсуву зростає. Похідна відносного зсуву за часом називається швидкістю зсуву

та позначається $\dot{\gamma}$. Враховуючи, що $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\Delta x}{\Delta z}$, а при малих

значеннях зсуву $\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma$, можна вважати, що $\dot{\gamma} = \frac{dv}{dz}$, тобто

швидкість зсуву в реології - це величина, яка у гідродинаміці називається модулем градієнта швидкості. Зазначимо, що деформація зсуву, яка зростає з часом, називається *плоским зсувним плином*.

Якщо введені поняття використати для опису плин у ньютонівської рідини, то формула Ньютона для сили в'язкого тертя в реологічних характеристиках набуває вигляду:

$$\tau = \eta \dot{\gamma}.$$

Таким чином, графік залежності τ від $\dot{\gamma}$ для ньютонівських рідин має вигляд прямої, яка проходить через початок координат (лінія 1 на рис. 3.6).

Види залежностей τ від $\dot{\gamma}$ для неньютонівських рідин істотно різні. Деякі види таких залежностей показані на рис. 3.6. Графіки цих залежностей називаються *кривими плин*у. Рідини, криві плин у яких відповідають лінії 2 на рис. 3.6, називаються *псевдопластичними*, лінії 3 - *дилатантними*, 4 та 5 - *в'язкопластичними*.

Псевдопластичне поведіння найчастіше спостерігається у рідинах, що містять такі частинки, які можуть змінюватися (наприклад, розпадатися) при зміні умов плинучості. Дилатантне поведіння виникає за наявності обертання частинок, обумовленого існуючими градієнтами швидкостей, та "тертям" при зіткненні частинок.

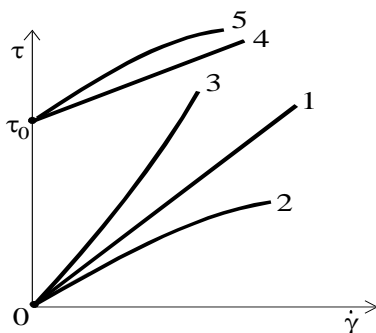


Рис.3.6

У в'язкопластичних рідинах спостерігається стрибкоподібний перехід від майже пружних деформацій при малих напругах до в'язкого плинучості при тих значеннях напруження зсуву, які перевищують певний поріг, позначений на рис. 3.6 як τ_0 . Величина τ_0 називається *граничною напругою зсуву*.

В'язко-пластичні властивості мають різні рідини, у тому числі й кров. Кров - це рідина з явно вираженими неньютонівськими властивостями. Водночас плазма крові, хоча й має неньютонівські властивості, але виражені ці властивості у плазмі значно слабше, ніж у цільної крові. Це означає, що неньютонівські властивості крові пов'язані, у першу чергу, з форменими елементами крові. Ураховуючи, що сироватка крові - ньютонівська рідина, можна зробити висновок про те, що неньютонівські властивості плазми обумовлені макромолекулами розчинених у ній органічних сполук, головним чином, білків.

З формених елементів найважливішим внеском у набуття кров'ю неньютонівських властивостей є внесок еритроцитів. Це пов'язано з рядом факторів: великою кількістю еритроцитів у

крові (порядку 5 млн. в 1 мм^3), здатністю деформуватися при проходженні через судини малого діаметра, а також зі здатністю еритроцитів утворювати агрегати, розміри яких залежать від умов плину крові.

Істотна залежність реологічних властивостей крові від вмісту в ній формених елементів потребує введення кількісного показника, який характеризує вміст у крові цих елементів. Таким показником є **показник гематокрита (H)**, який **дорівнює відносному об'єму формених елементів у крові, зазвичай вираженому у відсотках**. У нормі цей показник у людини становить приблизно 46...48 %. Зі збільшенням показника гематокрита в'язкість крові зростає, причому ця залежність має досить складний вигляд і для її опису використовують такі формули:

$$\eta = \eta_0 \cdot (1 + \alpha H)^\beta \quad \text{або} \quad \eta = \eta_0 \cdot e^{\gamma \cdot H},$$

де η_0 - в'язкість плазми крові, α , β та γ - деякі емпіричні константи, які залежать від концентрації та форми суспендованих елементів.

Позірна в'язкість крові людини залежить від швидкості зсуву. Чіткіше це проявляється при малих швидкостях зсуву. В'язкість крові зі збільшенням швидкості зсуву зменшується. Так, при $\dot{\gamma} = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ в'язкість крові становить приблизно 0,8 Па·с. При великих швидкостях зсуву ($\dot{\gamma} > 100 \text{ с}^{-1}$) позірна в'язкість крові мало залежить від $\dot{\gamma}$, наближаючись при зростанні швидкості зсуву до величини 4...5 мПа·с.

Поведінку в'язко-пластичних рідин при різних швидкостях зсуву описують дві поширені моделі.

Так, при великих значеннях швидкості зсуву залежність напруження зсуву від швидкості зсуву є майже лінійною та з високою точністю може бути описана формулою (моделлю) *Шведова-Бінгама*:

$$\tau = \tau_0 + k\dot{\gamma} \quad (\text{при } \tau > \tau_0),$$

де k - деякий коефіцієнт, який збігається за розмірністю з коефіцієнтом в'язкості.

При малих значеннях швидкості зсуву нелінійністю залежності напруги зсуву від швидкості зсуву зневажати не можна та для опису цієї залежності варто використовувати формулу (модель) *Кессона*:

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + k\sqrt{\dot{\gamma}} \quad (\text{при } \tau > \tau_0),$$

де k - деякий коефіцієнт, який іноді називають коефіцієнтом Кессона.

Визначення змін величини в'язкості крові є важливим для діагностики. Якщо відношення в'язкості крові до в'язкості плазми називати відносною в'язкістю, то зміна відносної в'язкості крові в діапазоні від 4,2 до 6,0 вважається нормою. Разом з тим при анемії відносна в'язкість крові меча за 2,0, при поліцитимії – більша за 10,0.

Переходячи до окремих питань гемодинаміки, з'ясуємо спочатку, як змінюється середня лінійна швидкість плинку крові в системі кровообігу людини при переході від одного її відділу до іншого. Відповідні дані наведені в п'ятому стовпці табл. 3.2 та показані на рис. 3.7, де також введена крива що показує зміни тиску крові в різних ділянках судинного русла.

Таблиця 3.2

Судина	Площа перерізу, см ²	Загальне число	Довжина, м	Середня швидкість плинку, м/с	Середня швидкість зсуву, с ⁻¹
Аорта	2,0...8,0	1	0,8	0,3...0,6	100
Великі артерії	0,01...0,3	~10 ³	0,2...0,4	0,2	400
Малі артерії, артеріоли	3·10 ⁻⁴ ...8·10 ⁻³	~10 ⁸	2...50·10 ⁻³	2...100·10 ⁻³	>10 ²
Капіляри	2·10 ⁻⁷ ...8·10 ⁻⁷	≥10 ⁹	10 ⁻⁴	5...7·10 ⁻⁴	400
Венули, малі вени	3·10 ⁻⁴ ...0,03	~10 ⁹	2...10·10 ⁻³	1...10·10 ⁻³	~10 ²
Великі вени	0,2...0,8	~10 ³	0,1...0,3	0,1...0,2	100

Порожні ті вени	~3	2	0,5	0,1...0,2	50
--------------------	----	---	-----	-----------	----

Як видно з таблиці 3.2, при русі крові у великому колі кровообігу її середня лінійна швидкість спочатку зменшується, досягаючи мінімального значення в капілярах, а потім зростає. Ці зміни значень середньої швидкості пояснюються, виходячи з формули нерозривності струменя, з якої випливає, що швидкість руху крові зменшується при збільшенні сумарної площі перерізу судин системи кровообігу й, навпаки, збільшується при зменшенні сумарної площі перерізу. Підкреслимо, що мова йде не про площу перерізу однієї судини, а саме про сумарну площу перерізу судин у розглянутому відділі системи кровообігу.

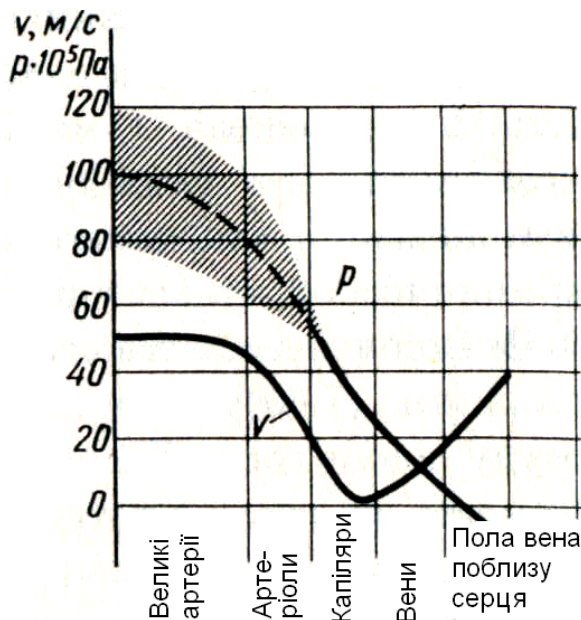


Рис. 3.7

Площа сумарного просвіту всіх капілярів в 500...600 разів більша за площу поперечного перерізу аорти, отже,

$v_{\text{кап}} \approx \frac{1}{500} v_{\text{аорт.}}$ Саме в капілярній сітці при повільній швидкості руху відбувається обмін речовин між кров'ю та тканинами.

Що стосується середнього за період серцевого циклу тиску крові, то у великому колі кровообігу він безперервно зменшується при русі крові від виходу з лівого шлуночка серця до входу в його праве передсердя. Ми говоримо про середній за період серцевого циклу тиск, оскільки в артеріях унаслідок періодичності роботи серця тиск пульсує із частотою, зазвичай трохи більшою 1 Гц. Найбільше падіння тиску спостерігається на ділянці артеріол. Відповідно до формули Пуазейля $P_1 - P_2 = QX$. Оскільки у всіх відділах кровоносної системи величина Q однакова, зрозуміло, що найбільше зниження тиску на ділянці артеріол є наслідком того, що саме ця ділянка кровоносної системи має самий великий гідравлічний опір.

Обговоримо питання про те, чому величина гідравлічного опору максимальна саме на ділянці артеріол. Ми пам'ятаємо, що величина X дуже залежить від радіуса судини та зростає при її зменшенні. Отже, гідравлічний опір артерії більший за опір аорти, опір артеріоли більший за опір артерії, а опір капіляра – за опір артеріоли. З іншого боку, при паралельному з'єднанні судин їх загальний гідравлічний опір зменшується. Тому характер зміни гідравлічного опору при переході від одного відділу до іншого можна пояснити так: спочатку опір зростає у зв'язку з тим, що фактор зменшення радіусів судин є вагомим за збільшення їхнього числа; далі, навпаки, при переході від артеріол до капілярів фактор збільшення числа судин виявляється вагомим за зменшення радіуса судин.

Обговоримо тепер методи вимірювання швидкості руху крові у судинах та тиску крові.

Сучасні ультразвукові прилади, використовуючи ефект Доплера, дозволяють досить просто та точно визначати швидкість течії крові у судинах.

Існує також електромагнітний метод (електромагнітна витратометрія) виміру швидкості кровотоку, який ґрунтується на

явищі відхилення іонів крові, при їхньому русі у створеному магнітному полі. Зміщення іонів створює електричне поле, яке може бути вимірене, причому виникаюча різниця потенціалів залежить від швидкості плину крові. Зазвичай використовується змінне магнітне поле, що обумовлює виникнення при русі іонів саме змінного електричного поля, напругу якого легше вимірювати, ніж напругу постійного поля.

Виміряти тиск у кровоносній судині можна шляхом введення в судину порожньої голки, з'єднаною гумовою трубкою з манометром. У хірургічній практиці безпосереднє вимірювання тиску в порожнинах серця виконується методом катетеризації, тобто введенням через одну з великих судин тонкого поліетиленового зонда, на кінці якого знаходиться мініатюрний електроманометр.

У клініці застосовується непрямий, безкровний спосіб вимірювання кров'яного тиску (за *Коротковим*). Розглянемо фізичні основи цього методу на прикладі вимірювання тиску крові в плечовій артерії.

На плече пацієнта накладають порожню гумову манжету. У міру накачування повітря в манжету, м'які тканини руки стискаються, здавлюється плечова артерія, і припиняється плин крові. Випускаючи повітря, зменшують тиск у манжеті та у м'яких тканинах, з якими вона стикається. Коли цей тиск зменшиться до систолічного, кров зможе пробитися через здавлену артерію. При цьому плин крові в артерії є турбулентним. Починають прослуховуватися виразні тони, які називаються початковими. Вони обумовлені вібрацією стінок артерії внаслідок того, що в момент систоли серця (при максимальному тиску) порції крові прориваються через стиснену манжетою ділянку судини. З'являється пульс на променевій артерії. Показання манометра з першою появою пульсу відповідає максимальному, або *систолічному*, тиску (у нормі він приблизно дорівнює 16 кПа, або 120 мм рт. ст). При подальшому зниженні тиску в манжеті тони доповнюються шумами. Ці шуми обумовлені турбулентним плином крові через здавлену манжетою ділянку артерії. Потім шуми стихають та у фонендоскопі знову прослуховуються тільки тони, які називаються послідовними. Ці тони швидко слабшають, і

звуків явища припиняються. Це відбувається при повному відновленні просвіту артерії та установленні нормального ламінарного плину крові. Показання манометра в момент різкого ослаблення послідовних тонів відповідає мінімальному, або *діастолічному*, тиску (у нормі він дорівнює 11 кПа або 80 мм рт. ст).

Обговоримо коротко питання про роботу та потужність серця. Скорочуючись, серце виконує роботу проти сил тиску в крові, виштовхуючи її в аорту, і надає цій крові кінетичну енергію. Роботу, що виконує шлуночок серця по виштовхуванню крові при одному скороченні, можна обчислити за формулою $A = P\Delta V$, де P - середній тиск у шлуночку при скороченні, ΔV - зміна об'єму шлуночка при цьому. Зміна об'єму камери серця при одному скороченні називається *ударним об'ємом* (V_y), тобто $\Delta V = V_y$. Кінетична енергія крові, викинутої в аорту при одному скороченні, визначається за формулою:

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{\rho V_y v^2}{2},$$

де m - маса викинутої крові, ρ - густина крові, v - середня швидкість крові в аорті. Таким чином, робота лівого шлуночка ($A_{\text{лш}}$):

$$A_{\text{лш}} = V_y \left(P + \frac{\rho v^2}{2} \right).$$

Зневажаючи роботою передсердь та вважаючи, як це прийнято, що робота правого шлуночка приблизно становить 20% від роботи лівого, для роботи (A) усього серця одержуємо:

$$A = 1,2 \cdot V_y \left(P + \frac{\rho v^2}{2} \right).$$

Якщо підставити чисельні значення величин, які входять в останню формулу, одержимо, що робота серця за одне скорочення дорівнює приблизно 1 Дж. Враховуючи, що час одного скорочення приблизно дорівнює 0,3 с, для потужності серця одержимо приблизне значення 3,3 Вт.

При розгляді кровообігу важливим є поняття *пульсової хвилі*.

Пульсова хвиля – це хвиля підвищеного тиску, яка поширюється аортою та артеріями. Вона викликана виштовхуванням крові з лівого шлуночка під час систоли та подальшим поширенням зміни об'єму крові вздовж еластичної судини в результаті одночасної зміни в ній тиску та маси рідини. Пульсова хвиля викликає пульсації швидкості плину крові у великих артеріях. Для оцінки швидкості пульсової хвилі (v_n) запропонована така формула:

$$v_n = \sqrt{\frac{hE}{2\rho R}},$$

де h – товщина стінки судини; R – радіус судини; E – модуль Юнга матеріалу стінки судини.

Таким чином, швидкість поширення пульсової хвилі залежить як від геометричних параметрів судини, так і від пружних властивостей судинної стінки.

Модуль Юнга не є сталою величиною для судин, тому швидкість поширення пульсових хвиль може приймати суттєво різні значення.

Швидкість пульсової хвилі 5...10 м/с. Відзначимо, що швидкість крові ($\approx 0,5$ м/с) істотно менша за швидкість пульсової хвилі.

Скорочуючись під час систоли, серце виштовхує кров в аорту та артерії, що відходять від неї. Якби стінки цих судин були твердими, то тиск, який виникає на виході із серця, передавався б до периферії зі швидкістю звуку. Реально, за час вигнання крові із шлуночків (час систоли $t_c = 0,3$ с) пульсова хвиля встигає поширитися на відстань $L = v_n \cdot t_c \approx 2$ м, тобто охопити всі великі судини – аорту та артерії.

З віком швидкість пульсової хвилі зростає унаслідок зменшення еластичності судин.

3.3 Механічні коливання. Фізика слуху

3.3.1 Механічні коливання та хвилі

Перейдемо тепер до обговорення питання про механічні коливання та хвилі.

Коливаннями (коливальним процесом) називають процес, який точно або приблизно повторюється через однакові проміжки часу, які називаються періодом коливань. Залежно від фізичної сутності процесу розрізняють коливання механічні (наприклад, коливання пружинного маятника), електричні (змінний електричний струм), звукові (коливання густини середовища, у якому поширюється звук) та ін. Незалежно від виду всім коливальним явищам властиві деякі загальні закономірності та загальні характеристики.

Коливання поділяються також на:

- вільні незагасаючі коливання;
- вільні загасаючі коливання;
- вимушені коливання;
- автоколивання.

Вільні незагасаючі коливання відбуваються в коливальній системі під дією тільки внутрішніх сил та починаються ці коливання після того, як система виведена з положення рівноваги.

Якщо внутрішня сила, що викликає коливання, пропорційна зміщенню від положення рівноваги тіла, що здійснює коливання, та спрямована протилежно зміщенню, то вільні незагасаючі механічні коливання описуються таким диференціальним рівнянням:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.5)$$

де x - зміщення тіла, яке здійснює коливання, від положення рівноваги; \ddot{x} - друга похідна величини x по часу (t); величина ω_0^2 - позитивна стала, яка є квадратом власної циклічної частоти коливань. Нагадаємо, що циклічна (кругова) частота коливань - це кількість коливань системи за 2π секунд.

Диференціальне рівняння (3.5) має незліченну множину розв'язків, які відрізняються один від одного значеннями двох констант інтегрування. Зазвичай загальний розв'язок рівняння (3.5) записують у вигляді:

$$x = x_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де величини x_0 та φ_0 - це вищезазначені довільні константи, причому величина x_0 - це амплітуда коливань; $\omega_0 t + \varphi_0$ - фаза

коливань; φ_0 - початкова фаза коливань (тобто значення фази коливань при $t = 0$).

У випадку механічних коливань амплітуда – це максимальне зміщення тіла, що коливається, від положення рівноваги, а у загальному випадку амплітуда коливань - це модуль максимального відхилення величини (x), що коливається, від її рівноважного значення.

Нагадаємо також, що

$$\omega_0 = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T},$$

де ν - частота коливань (кількість коливань за одиницю часу), вимірювана в герцах (Гц), а T – період коливань, тобто час, за який відбувається одне повне коливання.

Вільні загасаючі коливання відбуваються в тому випадку, якщо на тіло, яке здійснює коливання, поряд із внутрішніми силами діє й зовнішня гальмівна сила (сила тертя або сила опору середовища руху тіла). Зазвичай припускають, що зовнішня сила - це сила опору середовища, та вважають, що ця сила пропорційна швидкості руху коливного тіла (це справедливо при не занадто великих швидкостях). Тоді рівняння коливань може бути записане у вигляді:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (3.6)$$

де β - деяка стала, яка називається *коефіцієнтом загасання*.

Вигляд загального розв'язку цього рівняння залежить від знака різниці $\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$. Якщо коефіцієнт загасання β менший за власну циклічну частоту ω_0 , то різниця $\omega_0^2 - \beta^2$ є позитивною величиною. У цьому випадку (випадку малого тертя) загальний розв'язок рівняння (3.6) має вигляд:

$$x(t) = x_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (3.7)$$

де $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ - циклічна частота коливань; ω_0 - частота власних коливань (тобто циклічна частота вільних коливань системи за відсутності сили опору). У випадку загасаючих коливань x_0 - це початкова амплітуда коливань.

Формула (3.7) описує загасаючі коливання. При таких коливаннях циклічна частота менша за частоту власних коливань (ω_0), а амплітуда коливань (A) зменшується за експоненціальним законом $A(t) = x_0 e^{-\beta t}$. Швидкість убуття амплітуди часто характеризують *логарифмічним декрементом загасання* λ :

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \ln \frac{x_0 e^{-\beta t}}{x_0 e^{-\beta(t+T)}} = \ln e^{\beta T} = \beta T,$$

де $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$ - період вільних загасаючих коливань.

При збільшенні тертя різниця ($\omega_0^2 - \beta^2$) стає від'ємною, а рух при цьому стає аперіодичним.

Якщо права частина рівняння (3.6) відмінна від нуля та є періодичною функцією, то таке рівняння описує вимушені коливання. Точніше, **вимушені коливання відбуваються в коливальній системі під дією зовнішньої сили, яка періодично змінюється**. Ця зовнішня періодична сила, що викликає вимушені коливання, називається *змушуючою силою*. Якщо змушуюча сила змінюється з часом за гармонічним законом, то рівняння вимушених коливань має вигляд:

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \sin(\omega_z t), \quad (3.8)$$

де f_0 - амплітуда змушуючої сили, m - маса тіла, яке здійснює коливання, ω_z - циклічна частота змушуючої сили.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння (3.8) є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння (рівняння (3.6)) та якого-небудь частинного розв'язку неоднорідного рівняння (3.8). Загальний розв'язок однорідного рівняння (3.6) у випадку $\omega_0^2 - \beta^2 \geq 0$ наведений вище (формула (3.7)). Власні коливання, які описані загальним розв'язком однорідного рівняння, є загасаючими і з часом вони зникнуть. Залишиться тільки частинний розв'язок неоднорідного рівняння, який описує постійні вимушені коливання. Цей

частинний розв'язок шукають у вигляді синусоїдальної функції часу з тією самою циклічною частотою, що й циклічна частота змін правої частини рівняння (3.8), тобто частинний розв'язок рівняння (3.8) має вигляд:

$$x(t) = B \sin(\omega_3 t + \delta). \quad (3.9)$$

Підставляючи отриманий вираз (3.9) у рівняння (3.8), знаходимо амплітуду B та зсув фази δ вимушеного коливання:

$$B = \frac{f_0}{m \cdot \sqrt{(\omega_0^2 - \omega_3^2)^2 + 4\beta^2 \omega_3^2}} \quad \text{та} \quad \tan \delta = -\frac{2\beta \omega_3}{\omega_0^2 - \omega_3^2}.$$

Амплітуда вимушеного коливання B прямо пропорційна амплітуді змушуючої сили f_0 , та має складну залежність від коефіцієнта загасання β і кругових частот власного (ω_0) та вимушеного (ω_3) коливань. Якщо циклічна частота змушуючої сили прямує до величини $\sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$, тобто

$$\omega_3 \rightarrow \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}, \quad (3.10)$$

то амплітуда вимушених коливань прямує до максимального значення (B_{\max}), яке дорівнює

$$B = B_{\max} = \frac{f_0}{2m\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}.$$

У випадку малого загасання ($\beta \approx 0$) при виконанні умови (3.10), яка у цьому випадку має вигляд $\omega_3 \rightarrow \omega_0$, амплітуда вимушених коливань різко наростає.

Різке зростання амплітуди вимушених коливань при наближенні частоти змушуючої сили до власної частоти коливань системи називається *резонансом*. При цьому частота ($\omega_{\text{рез}}$) змушуючої сили *називається резонансною частотою*. Як можна зрозуміти з вищезазначеного, резонансна частота дорівнює

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}.$$

Якщо загасання відсутнє ($\beta = 0$), то амплітуда вимушених коливань при резонансі необмежено зростає, а сам резонанс спостерігається при збігу частоти змушуючої сили із власною

частотою коливань системи. При збільшенні коефіцієнта загасання β максимальна (резонансна) амплітуда зменшується. Як видно з останньої формули, резонансна частота при цьому також зменшується.

Зазначимо, що явище резонансу може мати найрізноманітніші прояви: при коливанні у пружних середовищах, в електричних коливаннях, у звукових та світлових явищах та ін. В одних випадках явище резонансу є корисним (наприклад, настроювання апарата УВЧ - терапії на резонанс), в інших - шкідливим (руйнування конструкцій).

Важливим з погляду впливу на здоров'я людини є такий вид вимушених коливань, як *вібрація*. Дослідження показали, що вібрація є комплексним подразником, який викликає порушення функціонального, а за певних умов – і органічного характеру практично у всіх системах організму людини від центральної нервової та гуморальної до опорно-рухового апарата. Вібрація впливає на рефлекторну діяльність, зокрема, внаслідок зниження швидкості поширення збудження по волокнах периферичних нервів. Вібрація може призводити до порушень механізмів регуляції кровотечі та судинного тону. Істотну роль у розвитку небажаних ефектів вібродії відіграють резонансні явища. Так, при вібрації опори із частотою, яка лежить у діапазоні 4...10 Гц, характерні дискомфортні та болючі відчуття в ділянці грудей та живота; резонансні коливання голови при збуджуючих частотах у діапазоні 8...27 Гц можуть, зокрема, стати причиною зниження гостроти зору. Вивчення впливу вібрації на людей спричинило виявлення такого виду професійної патології, як *вібраційна хвороба*. При систематичному та тривалому впливі вібрації на людину спостерігаються органічні зміни, зокрема, у кістково-суглобовій системі. Дослідженнями доведено появу кістоподібних змін у кістках, регіонарний остеопороз, втомлюванісні псевдопереломи, остеоартроз і спондилоз.

З розгляду вимушених коливань випливає, що в реальній (із загасанням) коливальній системі можна підтримувати незатухаючі гармонічні коливання за рахунок впливу зовнішньої синусоїдальної сили. Ці коливання відбуваються із

частотою змушуючої сили. Можна здійснити незатухаючі коливання реальної системи з власною частотою (ω_0). Для цього, вочевидь, до коливальної системи необхідно ввести джерело енергії, яке б компенсувало втрати енергії, пов'язані із силами опору. Такі системи називаються автоколивальними. Іноді поняття «автоколивальна система» та «автоколивання» формулюють так: *коливальна система, яка сама регулює надходження енергії до коливного тіла, називається автоколивальною системою, а незатухаючі коливання, які відбуваються за рахунок енергії самої коливальної системи, називають автоколиваннями.* На відміну від вимушених коливань, частота й амплітуда автоколивань визначаються властивостями самої системи.

Будь-яка автоколивальна система складається з трьох частин: 1) джерела енергії; 2) коливальної системи; 3) пристрою, який здійснює періодичну подачу енергії до системи (регулювальний пристрій на рис. 3.2). Роботою цього пристрою керує сама автоколивальна система. Взаємодія між ними називається *зворотнім зв'язком*.

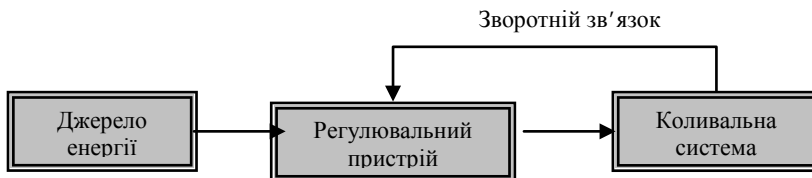


Рис.3.2

Найвідомішим прикладом автоколивальних систем є годинник. Багато біологічних систем (наприклад, серце, легені) також є автоколивальними системами.

Автоколивання при великих втратах енергії в системі не є гармонічними і називаються *релаксаційними коливаннями*.

Підбиваючи підсумки, можна сказати, що будь-які коливання описуються диференціальним рівнянням другого порядку, яке у загальному випадку має вигляд:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = f(t),$$

причому тип коливань визначається значеннями коефіцієнтів a та b , а також видом функції $f(t)$.

Перейдемо до механічних хвиль. Якщо в пружному середовищі створити деформацію (тобто, змістити частинки від положення рівноваги), то в цьому середовищі виникнуть механічні коливання, які ми розглянули вище. Завдяки зв'язкам, які існують між частинками середовища, коливання почнуть поширюватися в просторі (у цьому середовищі), тобто виникнуть *хвилі*. Таким чином, **хвилі – це коливання, які поширюються в просторі із часом**. Якщо говорять про *механічні хвилі*, то це означає, що із часом відбувається поширення механічних коливань у пружних середовищах.

Якщо напрямок коливальних рухів частинок у середовищі при поширенні механічних хвиль збігається з напрямком поширення хвилі, то такі хвилі називаються *поздовжними*. Якщо ж напрямок коливальних рухів частинок перпендикулярний напрямку поширення хвилі, то такі хвилі називаються *поперечними*.

Для характеристики хвиль поряд з розглянутими раніше характеристиками коливань, використовуються такі величини, як швидкість поширення хвилі (v) та довжина хвилі (λ). **Говорячи про швидкості хвилі, найчастіше мають на увазі швидкість переносу хвилею енергії.** Що стосується довжини хвилі, нагадаємо, що це поняття може вводитися по-різному. Часто кажуть, що довжина хвилі – це мінімальна відстань між двома точками хвилі, фази коливань у яких відрізняються на 2π . Іноді кажуть, що довжина хвилі - це відстань, на яку хвиля поширюється за час, що дорівнює періоду коливань хвилі.

Нагадаємо також відомі співвідношення між величинами, що є характеристиками хвиль:

$$v = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T}.$$

Про частоту коливань йшлося вище (при розгляді механічних коливань). Але треба зазначити, що частота акустичних хвиль, що сприймаються, залежить від взаємних

швидкостей джерела звуку та його приймача. У цьому полягає *ефект Доплера*, що досить широко використовується на практиці, у тому числі й у медицині. При русі джерела та приймача акустичних хвиль вздовж одної прямої зі швидкостями, значно меншими за швидкість звуку, частота хвиль, що сприймаються, обчислюється за формулою:

$$\nu = \frac{\nu_0(\nu_z \pm \nu_n)}{(\nu_z \mp \nu_d)},$$

де ν - частота хвиль, що сприймаються приймачем; ν_0 - частота хвиль, які випромінюються джерелом; ν_z - швидкість звуку; ν_n - швидкість руху приймача; ν_d - швидкість руху джерела хвиль. Якщо джерело звуку рухається до приймача, то в знаменнику береться знак «-», якщо від приймача - знак «+». Якщо приймач рухається до джерела звуку, то в чисельнику останньої формули береться знак «+», якщо від джерела - знак «-».

Хвильовий процес - це значно складніший процес, ніж просте коливання. Якщо хвиля поширюється в тривимірному просторі, то, у загальному випадку, у різних напрямках поширення коливань відбувається по-різному. Первісна деформація може мати різні форми, на які середовище реагує по-різному (відрізняються повертаючі сили та загасання).

Як будь-які коливання, хвильові процеси описуються диференціальними рівняннями. У найпростішому випадку плоскої хвилі в тривимірному просторі, тобто у випадку, коли величина (U), що здійснює коливання, залежить тільки від однієї координати (нехай це буде координата x), диференціальне рівняння хвильового процесу (*хвильове рівняння*) має вигляд:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

а його розв'язком є вираз

$$U(x, t) = U_0 \sin \left(\omega \left(t - \frac{x}{v} \right) + \varphi_0 \right) =$$

$$= U_0 \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right),$$

де U_0 - амплітуда хвилі; $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - циклічна частота; T - період коливань; v - швидкість поширення хвилі; λ - довжина хвилі; φ_0 - початкова фаза.

Необхідно підкреслити, що для розв'язання задачі опису конкретної механічної хвилі не менше значення, ніж саме хвильове рівняння, мають додаткові початкові та граничні умови.

За заданими початковими та граничними умовами можна визначити чисельні значення сталих φ_0 , ω , U_0 .

У фізиці найважливішими видами хвиль є механічні та електромагнітні. Поширювані хвилі переносять енергію. Фізичною величиною, яка характеризує цей перенос, є *потік енергії*. **Потік енергії (Φ) через деяку поверхню дорівнює енергії, перенесеною хвилею через цю поверхню за одиницю часу, тобто**

$$\Phi = \frac{dW}{dt},$$

де dW - енергія, що переноситься хвилею через вищезгадану поверхню за проміжок часу dt .

Одиницею вимірювання потоку енергії є ват (Вт).

Якщо поверхня площею S перпендикулярна напрямку вектора швидкості поширення хвилі (\vec{v}), то потік енергії, що переноситься хвилею через цю поверхню, дорівнює:

$$\Phi = wSv,$$

де w - величина, яка називається *щільністю енергії* та вимірюється в Дж/м³.

Величина потоку енергії через поверхню залежить від площі цієї поверхні. Тому для опису переносу енергії хвилею використовується така величина, як *інтенсивність* (I) хвилі, яка є *щільністю потоку енергії*:

$$I = \frac{d\Phi}{dS} = wv.$$

Інтенсивність вимірюється у Вт/м^2 .

Враховуючи, що швидкість хвилі – це векторна величина, інтенсивність також можна розглядати як вектор, спрямований у тому самому напрямку, що й вектор швидкості поширення хвилі. Такий вектор називається вектором Умова: $\vec{I} = w \vec{v}$.

3.3.2 Фізика слуху. Ультразвук та інфразвук

Почнемо з *акустичних* хвиль. Акустика (від грецького “акустикос” - слуховий) галузь фізики, у якій вивчаються акустичні хвилі, тобто механічні хвилі, які поширюються в пружних середовищах, із частотами від найнижчих (близьких до 0 Гц) до гранично високих ($10^{12} \dots 10^{13}$ Гц), а також процеси їхнього збудження, поширення та взаємодії з речовиною.

Акустичні хвилі, які викликають у людини слухові відчуття, називаються звуковими. Звукові хвилі мають частоти, які лежать у діапазоні від 16 Гц до 20 кГц.

Акустичні хвилі є чергуваннями ділянок розрідження та стиску середовища, у якому поширюються ці хвилі, причому величини, які характеризують ступінь стиску або розрідження середовища (звуковий або додатковий тиск, додаткова густина) мають періодичну залежність від часу та координати. У рідких та газоподібних середовищах звукові хвилі є поздовжніми. У твердих тілах вони можуть мати як поздовжню, так і поперечну складові.

Для характеристики звукових хвиль використовують різні *фізичні (об'єктивні)* характеристики: *звуковий тиск*, амплітуда, інтенсивність, частота, довжина хвилі, період коливань, швидкість поширення, *гармонічний (акустичний) спектр*.

Звуковий (додатковий) тиск у точці середовища, у якій поширюється акустична хвиля, - це різниця між миттєвим значенням тиску в даній точці та середнім за часом тиском у цій точці.

Говорячи про амплітуду коливань, у випадку звукових хвиль зазвичай мають на увазі амплітуду звукового тиску.

Інтенсивність звукової хвилі може бути обчислена за формулою:

$$I = \frac{P_0^2}{2\rho v},$$

де P_0 – амплітуда звукового тиску; ρ - густина середовища; у якому поширюється звук; v – швидкість поширення звуку.

Унаслідок особливостей сприйняття звуку людиною, про що докладніше буде сказано далі, для характеристики звуку може використовуватися також величина, яка називається *рівнем інтенсивності* (L):

$$L = \lg \frac{I}{I_0},$$

де $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м². Це значення I_0 відповідає *порогу чутності*, тобто мінімальній для нормального слуху інтенсивності звуку, що сприймається при частоті 1000 Гц. Слід зазначити, що при поширенні звукових хвиль у повітрі цьому значенню інтенсивності звуку відповідає амплітуда звукового тиску $P_0 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ Па.

Рівень інтенсивності вимірюється в белах (Б). Якщо інтенсивність одного звуку в 10 разів більша за інтенсивність іншого звуку тієї самої частоти, то говорять, що рівень першого звуку на один бел вище, ніж другого. Рівень інтенсивності може вимірюватися й у *децибелах* (дБ). При вимірюваннях рівня інтенсивності в децибелах формула для L має вигляд:

$$L = 10 \cdot \lg \frac{I}{I_0}.$$

З використанням введених позначень згадувана раніше періодична залежність звукового тиску від координати та часу для плоскої хвилі може бути записана у вигляді:

$$P = P_0 \sin \left(2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) + \varphi_0 \right),$$

де t – час; x – координата; яку відлічують в напрямку поширення хвилі.

Як зазначалося, швидкість поширення хвилі визначає швидкість переносу енергії хвилею. Швидкість поширення звуку в різних середовищах різна. У газах швидкість звуку приблизно дорівнює швидкості теплового руху молекул, і тому

тим більша, чим вища температура середовища, і тим менша, чим більша маса молекул газу. У твердих тілах швидкість звуку приймає значення в інтервалі від 2 до 5 км/с, а в рідинах - від 0,7 до 2 км/с. У воді швидкість звуку приблизно дорівнює 1,34 км/с. У повітрі при температурі 0°C швидкість звуку дорівнює 331 м/с, а при температурі 20°C - 340 м/с.

Гармонічний (акустичний) спектр звуку характеризує розподіл у ньому інтенсивностей за частотами.

За характером гармонічного спектра звуку поділяють на *тони* (прості та складні) і *шуми*.

Простий тон – це звукова хвиля однієї визначеної частоти (довжини хвилі). Прикладом простого тону є звук, який створюється камертоном. **Складний тон** - це сукупність декількох простих тонів, тобто декількох хвиль із різними частотами.

Гармонічний спектр простого тону, який, як правило, зображують у вигляді графіка залежності інтенсивності від частоти, це одна вертикальна лінія (рис. 3.8), а складного тону – сукупність декількох вертикальних ліній (рис. 3.9). Таким чином, спектр тонів є *лінійчастим*.

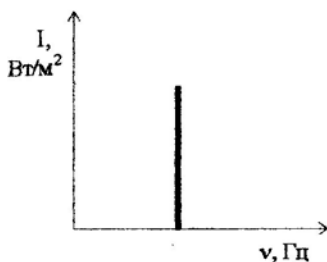


Рис. 3.8

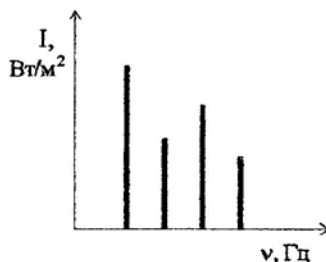


Рис. 3.9

Важливим окремим випадком складних тонів є *музичні тони*. Гармонічний спектр музичного тону (наприклад, окрема нота, зіграна на якому-небудь музичному інструменті) містить прості тони, частоти яких задовольняють формулі:

$$\nu_k = k\nu_1,$$

де ν_k - частоти простих тонів, які створюють музичний тон; k - цілі додатні числа ($k = 1; 2; 3; 4 \dots$), більші за одиницю; ν_1 - найменша частота простого тону в музичному тоні. Тон із частотою ν_1 називається основним тоном, і його інтенсивність вища за інтенсивність будь-якого іншого простого тону, який створює цей музичний тон. Інші прості тони в цьому музичному тоні називаються *обертонами*.

Шум не є сукупністю простих тонів. Можна сказати, що в спектрі шуму присутні всі частоти, які належать деякому діапазону частот. Тому не можна говорити про інтенсивність, яка припадає на ту або іншу частоту в спектрі шуму, а можна говорити про інтенсивність, яка припадає на який-небудь інтервал частот. Звідси випливає, що як спектральну

характеристику шуму варто використовувати величину $\frac{dI}{d\nu}$, яка

називається *спектральною щільністю*, а під спектром шуму розуміти залежність його спектральної щільності від частоти. Таким чином, шум характеризується *суцільним* (безперервним) спектром. При цьому треба пам'ятати, що для шуму зазвичай характерна й безперервна зміна з часом величини спектральної щільності на різних частотах. Тому, коли говорять про акустичний спектр шуму, мають на увазі деяку усереднену за часом залежність спектральної щільності від частоти.

Слухове відчуття в людини визначається як фізичними характеристиками звуку, що сприймається, так й особливостями конструкції апарата слуху людини. Тому для опису слухового відчуття недостатньо фізичних (об'єктивних) характеристик звуку та необхідно використовувати його *фізіологічні* (*суб'єктивні*) характеристики. До таких характеристик належать *гучність* (вірніше говорити, *рівень гучності*), *висота* та *тембр звуку*.

Рівень гучності звуку залежить, у першу чергу, від його інтенсивності. Але внаслідок того, що здатність слухового апарата сприймати звук залежить від його частоти, рівень гучності також залежить від частоти. При фіксованій частоті звуку слухові відчуття підкоряються *закону Вебера-Фехнера*:

при збільшенні подразнення в геометричній прогресії відчуття зростає в арифметичній прогресії. Внаслідок цього при фіксованій частоті звуку рівень гучності (E) лінійно залежить від рівня інтенсивності. Залежність рівня гучності від інтенсивності може бути подана у вигляді формули:

$$E = k(v) \cdot \lg \frac{I}{I_0(v)}.$$

У цій формулі величина $I_0(v)$ залежить від частоти звуку і є мінімальною інтенсивністю звуку, який сприймається людським вухом (поріг чутності) при частоті v . Коефіцієнт $k(v)$ залежить від частоти, інтенсивності та від обраних одиниць вимірювання рівня гучності. Якщо частота звуку дорівнює 1000 Гц (стандартна частота звукових вимірювань), а рівень гучності вимірюється у *фонах* (*фон*), то $k(v) = 10$. Таким чином, при частоті 1000 Гц збігаються поняття рівня гучності та рівня інтенсивності, поняття фона та децибела.

Для вимірювання гучності може використовуватися така одиниця, як *сон*. Сон – одиниця шкали гучності звуку, яка виражає безпосередню суб'єктивну оцінку порівняльної гучності простого тону. Один сон відповідає рівню гучності 40 фон при частоті звуку 1000 Гц. При кожному збільшенні рівня гучності на 10 фон число одиниць сонів приблизно подвоюється.

При частотах, відмінних від 1000 Гц, для визначення рівня гучності за рівнем інтенсивності або навпаки використовують отримані експериментально графіки, які пов'язують ці величини при різних частотах. Криві, які утворюють ці графіки, називають *кривими рівної гучності* (рис. 3.5).

Крива, яка відповідає мінімальній інтенсивності звуку, який сприймається людським вухом, тобто нижня крива на графіку кривих рівної гучності, - це крива порога чутності. При дуже великих інтенсивностях звук починає викликати болючі відчуття. Залежність максимальної інтенсивності звуку, при якій ще не з'являються болючі відчуття, від частоти називається кривою *порогу болевих відчуттів*, або *порогом дотику* (верхня крива на графіку кривих рівної гучності).

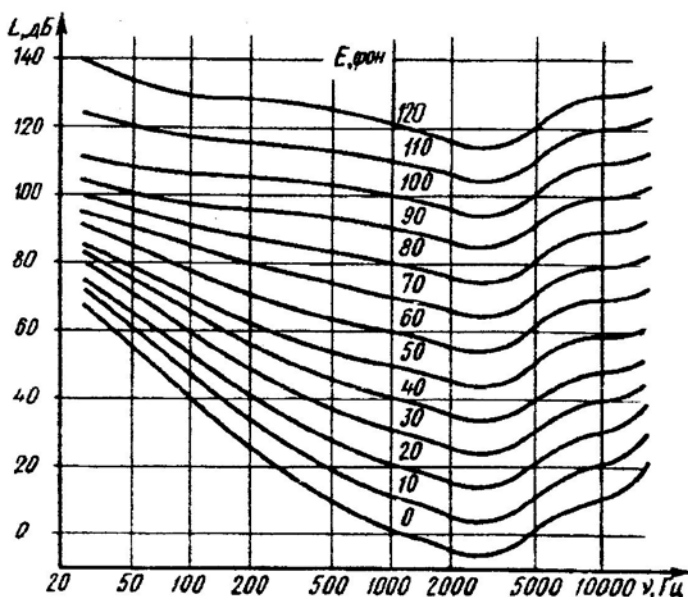


Рис. 3.10

Із кривих рівної гучності видно, що людський слуховий апарат є найчутливішим до звуків із частотами 2,5 - 4 кГц, а для звуків, які наближаються за частотою до країв діапазону, що сприймається людиною (16 Гц та 20 кГц), чутливість слуху значно нижча.

Уміння користуватися кривими рівної гучності входить у перелік обов'язкових практичних навичок, якими повинні опанувати студенти в процесі вивчення курсу медичної та біологічної фізики. Наведемо приклади використання таблиці кривих рівної гучності.

Нехай $\nu = 100$ Гц, а $L = 60$ дБ. Визначимо рівень гучності звуку. Знаходимо криву рівної гучності, яка проходить через точку перетину горизонтальної лінії, що відповідає $L = 60$ дБ, та вертикальної лінії, що відповідає $\nu = 100$ Гц. Рухаючись цією кривою до вертикальної прямої, що відповідає частоті

1000 Гц (на ній зображена шкала гучностей), знаходимо, що $E = 30$ фон.

Нехай $\nu = 200$ Гц, а $E = 70$ фон. Визначимо рівень інтенсивності звуку. Знаходимо криву рівної гучності, що перетинає шкалу E на позначці 70 фон. Для цієї кривої знаходимо точку її перетину з вертикальною лінією, що відповідає $\nu = 200$ Гц. Бачимо, що ця точка відповідає значенню рівня інтенсивності, $L = 80$ дБ.

Наступна фізіологічна характеристика звуку - його висота. **Висота звуку визначається, в основному, його частотою, причому, чим більша частота, тим звук вищий, а чим менша частота, тим він нижчий.** Значно меншою мірою висота залежить від складності тону та його інтенсивності. У випадку складного тону його висота, у першу чергу, визначається частотою основного тону. Залежністю висоти тону від інтенсивності звуку, як правило, зневажають.

Третя фізіологічна характеристика звуку – тембр. **Тембр визначається гармонічним спектром звуку.** Звичайне поняття тембру використовується при характеристиці складних (музичних) тонів. Людина здатна розрізняти звучання тої самої ноти, відтвореної різними інструментами. Це пов'язано з тим, що ці звуки збігаються за частотами основного тону та обертонів, але відрізняються розподілом інтенсивності по обертонах, що надає звукам своєрідне «забарвлення» та дозволяє органу слуху розрізняти такі звуки.

Серед звукових методів дослідження, які застосовуються у медицині, розглянемо *аудиометрію, аускультацию, перкусію та фонокардіографію.*

Аудиометрія – це вимірювання гостроти слуху. При цьому в пацієнта визначають індивідуальну криву порогу чутності, яка називається *аудиограмою*. Порівняння аудиограми пацієнта з нормальною аудиограмою допомагає проводити діагностику захворювань органа слуху. Аудиографію проводять за допомогою аудіометра, який є звуковим генератором з телефонами, що дозволяє незалежно регулювати частоту та інтенсивність вихідного сигналу.

Аускультация – це вислуховування звуків, які виникають при роботі внутрішніх органів людини (серця, легенів та ін.). Аускультация може проводитися за допомогою *стетоскопа* та *фонендоскопа*. Стетоскоп, який у цей час використовується рідко, є трубкою із пласким розтрубом (див. рис. 3.11). Значно частіше для аускультации використовують фонендоскоп (див. рис. 3.12).



Рис. 3.11

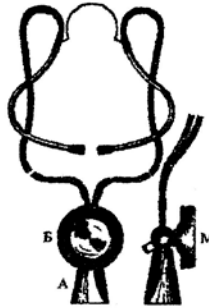


Рис. 3.12

Фонендоскоп складається із двох м'яких трубок, наконечники яких лікар вставляє у свої зовнішні слухові проходи, та двох лійок (А та Б) - для вислуховування звуків, що виникають при роботі серця або легенів відповідно. Отвір ширшої лійки (Б) затягнутий пружною мембраною (М), яку прикладають до поверхні тіла пацієнта. При цьому, завдяки явищу резонансу звуків у лійці, поліпшуються умови вислуховування цих звуків.

Перкусія пов'язана із простукуванням внутрішніх органів з метою визначення їхнього положення, форми, розмірів і стану. Інформацію про внутрішні органи несуть *перкуторні* звуки, які відбиваються від поверхонь цих органів. Перкуторні звуки одержують шляхом постукування або молоточком по спеціальній пластинці, яка називається плесіметром, або просто пальцями однієї руки по фалангах пальців іншої руки, накладеної на тіло пацієнта. Гучність відбитих перкуторних звуків залежить від різниці між щільністю тканини досліджуваного органа й щільністю оточуючих його тканин. Найчастіше при простукуванні

внутрішніх органів чутний «тупий» звук, який за характером спектра є шумом. При простукуванні порожнин, заповнених повітрям (здорові легені), чутні «дзвінки» (ще говорять - тимпаничні) звуки, у спектрі яких разом з безперервною шумовою складовою присутні й лінійчасті складові окремих тонів. Поява цих тонів пов'язана з резонансним посиленням тих складових спектра перкуторних звуків, довжини хвиль яких відповідають геометричним розмірам порожнин, які простукують.

При діагностиці стану серцевої діяльності застосовується метод фонокардіографії (ФКГ). **Цей метод полягає в графічній реєстрації тонів та шумів серця з наступною їхньою клінічною інтерпретацією.**

Фонокардіографія здійснюється за допомогою *фонокардіографа*, а криві, які виходять при цьому, називаються *фонокардіограмами*. Фонокардіограф складається з мікрофона, який перетворює акустичний сигнал на електричний, підсилювача електричних сигналів, системи частотних фільтрів та пристрою реєстрації. Метод дозволяє вивчити складові спектра звуків, що виникають при роботі серця, які мають частоту менш ніж 1000 Гц, тобто відповідають тій ділянці акустичного спектра, у якій людське вухо менш чутливе.

Перейдемо до *апарата слуху* людини. Він забезпечує прийом акустичного сигналу (звукова хвиля) та перетворення його на електричний сигнал (деяка сукупність електричних імпульсів, що виробляються рецепторними клітинами та передаються по нервових волокнах у мозок). Виходячи з морфологічних особливостей і функціональної ролі, слуховий апарат людини поділяють на *зовнішнє, середнє та внутрішнє вухо*. Схема будови слухового апарата людини показана на рис. 3.13.

Зовнішнє вухо складається з *вушної раковини* та *зовнішнього слухового проходу*. Вушна раковина людини має складну форму. Цим визначається складність процесу дифракції на ній звукових хвиль, які потрапляють потім у зовнішній слуховий прохід, що дозволяє людині виявляти напрямок на положення джерела звуку у вертикальній площині. Наявність у людини двох вух дозволяє йому за рахунок *бінаурального*

ефекту з точністю до 3° оцінювати напрямок на положення джерела звуку в горизонтальній площині.

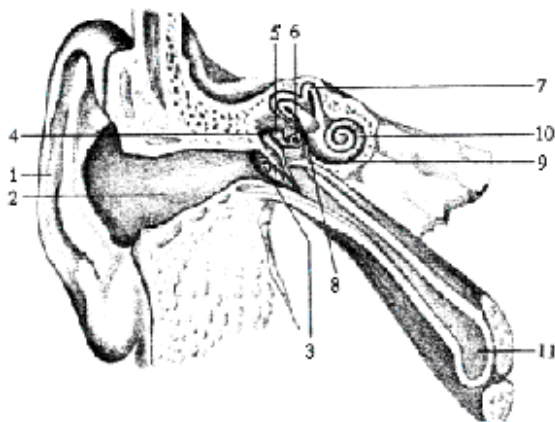


Рис. 3.13

1 - вушна раковина; 2 - зовнішній слуховий прохід; 3 - барабанна перетинка; 4 - молоточок; 5 - ковадло; 6 - стремінце; 7 - напівкругні канали; 8 - овальне вікно; 9 - кругле вікно; 10 - завитка; 11 – слухова труба.

До складу середнього вуха входять *барабанна перетинка* та *слухові кісточки*. Барабанна перетинка має неправильну форму та різний натяг у різних частинах, у зв'язку з чим вона не має власного періоду коливань, чим виключається можливість акустичного резонансу та забезпечується достатня гладкість кривих рівної гучності. Слухові кісточки (*молоточок*, *ковадло* та *стремінце*) служать для передачі коливань від барабанної перетинки, до якої кріпиться молоточок, до мембрани *овального вікна завитки*, який є початковою частиною внутрішнього вуха. До мембрани овального вікна кріпиться стремінце. Система барабанна перетинка - слухові кісточки - мембрана овального вікна відіграє роль підсилювача сигналу. Збільшення амплітуди звукового тиску досягається за рахунок двох ефектів: збільшення амплітуди сили тиску за рахунок системи важелів, утворених кісточками, та зменшення площі, на яку діє ця сила

(площа барабанної перетинки більш ніж в 20 разів перевищує площу овального вікна). Загальне посилення сигналу, що забезпечує середнє вухо, становить близько 28 дБ. При занадто високій інтенсивності на рівні болючого відчуття цей механізм частково блокується за рахунок рефлекторного зменшення рухливості системи слухових кісточок.

Перетворення акустичного сигналу на електричний відбувається в завитку, що є частиною внутрішнього вуха (див. рис.3.9).

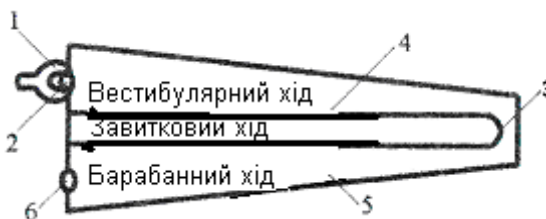


Рис. 3.14

1 - стремінце, 2 - овальне вікно, 3 - гелікотрема, 4 - вестибулярна мембрана; 5 - основна (базиллярна) мембрана; 6 - кругле вікно.

Завиток є кістковим утворенням, яке має форму конусоподібної спіралі. Порожнина завитка розділена двома мембранами (вестибулярною та основною, або базиллярною) на три ходи, або канали: *вестибулярний*, *завитковий* та *барабанний* (див. рис.3.14).

Вестибулярний та барабанний канали з'єднуються між собою в ділянці купола завитка невеликим отвором (*гелікотремою*) та заповнені *перілімфою*. Завитковий хід, розташований між вестибулярною та основною мембранами, заповнений *ендолімфою*. У завитковому ході на основній мембрані розташовані *рецепторні волоскові клітини*. Ці клітини разом з *покровною пластинкою* утворюють *кортієв орган*.

При поширенні звукової хвилі вздовж каналів завитка основна мембрана втягується в коливальний процес. При цьому волоски рецепторних клітин торкаються покривної пластинки, та при деформації волосків відбувається подразнення клітин. Електричні імпульси, що генеруються при цьому, передаються

потім по слуховому нерву в мозок. Залежно від частоти хвилі в коливальний процес втягуються різні ділянки основної мембрани, що спричиняє подразнення різних ділянок кортієва органа (різних груп рецепторних клітин). Це дозволяє мозку розпізнати частоту прийнятого акустичного сигналу (суб'єктивно - висоту звуку). Зміна інтенсивності звукової хвилі приводить до зміни амплітуди коливань основної мембрани, тобто ступеня подразнення рецепторних клітин. Це дозволяє мозку розпізнати інтенсивність звуку (суб'єктивно - його гучність).

Акустичні хвилі із частотами від 20 кГц до 10^9 Гц називають ультразвуковими (УЗ) хвилями, або ультразвуком.

Ультразвук одержують, використовуючи такі фізичні явища, як *зворотний п'єзоелектричний ефект (п'єзо ефект) та магнітострикція*. Сутність зворотного п'єзо ефекту полягає в тому, що п'єзоелектрики (речовини, для яких спостерігається п'єзоелектричний ефект, наприклад, кварц) при поміщенні в електричне поле деформуються (розтягуються або стискаються). Тому, якщо кристал п'єзоелектрика помістити в змінне електричне поле ультразвукової частоти, то поверхня кристала почне коливатися із цією частотою, збуджуючи в навколишньому середовищі ультразвукові хвилі. Магнітострикція – це зміна розмірів (розтягування або стискання) *феритів* у магнітному полі. Поміщаючи ферити в змінне магнітне поле УЗ частоти, викликають коливання поверхонь феритів із цією же частотою, тобто генерацію в навколишньому середовищі ультразвукових хвиль.

Ультразвук широко застосовується в медицині. Найвідоміше застосування ультразвуку в діагностиці – *ультразвукові дослідження (УЗД)*. Методики УЗД базуються на відбиванні ультразвукових хвиль від зовнішніх та внутрішніх поверхонь різних органів людини. Комп'ютерна обробка одержуваних УЗ-сигналів дозволяє одержати на екрані зображення відбиваючих поверхонь. УЗД застосовуються для виявлення пухлин та інших патологічних змін органів, виявлення каменів у сечовивідній системі та жовчному міхурі, вимірювання розмірів тих або інших органів або їхніх частин

(камер серця, ниркової миски). Використання ефекту Доплера при УЗД дозволяє визначати швидкості плину крові, вивчати роботу рухливих частин органів (наприклад, клапанів серця).

Перш ніж розглядати терапевтичне використання ультразвуку, перелічимо ефекти, які виникають при проходженні УЗ-хвиль через біологічні тканини:

- мікровібрації на клітинному та субклітинному рівнях;
- руйнування макромолекул;
- перебудова та ушкодження мембран, що призводить до зміни їхньої проникності;
- виділення тепла;
- руйнування клітин;
- утворення хімічно високоактивних іонів та вільних радикалів.

Первинним механізмом ультразвукової терапії є механічна та теплова дія на тканину.

У хірургії ультразвук застосовується як «ультразвуковий скальпель», тобто для розтину як м'яких, так і кісткових тканин. Існує також метод ультразвукового зварювання кісткових тканин (ультразвуковий остеосинтез).

Ультразвук застосовується для подріблення каменів у нирках, сечовивідних шляхах та жовчному міхурі.

Ультразвук малої інтенсивності застосовують у стоматології, офтальмології та інших галузях медицини для мікромасажу тканинних структур, що викликає підвищення проникності клітинних мембран та активізацію процесів тканинного обміну.

Згубна дія ультразвуку на мікроорганізми використовується для стерилізації різних середовищ.

Ультразвук використовується також у фармацевтичній промисловості для створення емульсій, суспензій, аерозолів, а також для гомогенізації тканин при витяганні з них біологічно активних речовин (ферменти, токсини, вітаміни та ін.).

Акустичні хвилі із частотами, меншими за 16 Гц, називаються *інфразвуковими хвилями*, або *інфразвуком*.

Для інфразвуку є характерним слабе поглинання різними середовищами. Поряд з вираженішою ніж у звуку, здатністю до

дифракції це призводить до того, що інфразвук поширюється на великі відстані, огинаючи перешкоди та проникаючи в приміщення.

Інфразвук впливає на організм людини, викликаючи втому, головний біль, сонливість, роздратування, почуття страху. Припускають, що в основі багатьох із зазначених фізіологічних ефектів лежить явище резонансу, оскільки частоти власних коливань тіла людини і його окремих частин лежать у межах 3...13 Гц. Наприклад, α - ритми головного мозку мають частотний інтервал 9...13 Гц.

Сильний вплив на людину здійснюють шуми. Шум може викликати зниження чутливості органа слуху аж до повної втрати слуху людиною. Шум викликає підвищену стомлюваність, зниження працездатності, може викликати нервові захворювання. Шкідливість шуму визначається його інтенсивністю та спектральним складом. За спектральним складом шуми підрозділяють на: низькочастотні (менш 300 Гц), середньочастотні (300...800 Гц) та високочастотні (більше 800 Гц), причому за однакової інтенсивності шкідливість шуму зростає з підвищенням його частоти.

Боротьба із шумом може вестися в декількох напрямках. Одним з них є усунення самих джерел шуму, а також *ослаблення* створених ними шумів за допомогою різних амортизаторів та глушителів. Інший напрямок - це розроблення звукопоглинаючих матеріалів, що використовують для захисту приміщень. Ослаблення звуку може досягатися або шляхом його поглинання, або шляхом багаторазового відбивання. Ступінь поглинання звуку в речовинах залежить від частоти звуку (чим більша частота, тим сильніше поглинання) та від таких фізичних властивостей речовин як пружність, густина, в'язкість та ін.

У зв'язку з тим, що шум, інфразвук та вібрація є факторами, які чинять несприятливий вплив на людину, виникає необхідність у їхньому гігієнічному нормуванні. Із цією метою вводиться поняття *допустимого рівня* (ДР). Допустимі рівні залежать від різних факторів. Наприклад, ДР для шуму залежить від його спектрального складу. Для низькочастотного шуму ДР більший, ніж для високочастотного. Зрозуміло, ДР за шумом

різні для житлових та виробничих приміщень, для денного й нічного часу та ін.

Параметрами, що нормуються, для постійного шуму (шуму, рівень якого мало змінюється з часом) є рівні інтенсивності, визначені в октавних смугах частот зі середньгеометричними значеннями 63, 125, 250, 500, 1000, 2000, 4000 та 8000 Гц. Для непостійного шуму такими параметрами є еквівалентні (за енергією) рівні інтенсивності та максимальні значення рівня інтенсивності. Наприклад, для житлових приміщень у період з 7 до 23 години для вищезазначених октавних смуг частот значення ДР дорівнюють відповідно 63, 52, 45, 39, 35, 32, 30 та 28 дБ.

Параметрами, що нормуються, для постійного інфразвуку та низькочастотного шуму є рівні інтенсивності, але визначені в інших октавних смугах частот, а саме: 2, 4, 8, 16 та 31,5 Гц. Звичайно як допустимий рівень постійного інфразвуку та низькочастотного шуму для території житлової забудови приймається величина 90 дБ.

Для вібрації параметрами, що нормуються, є рівень віброшвидкості або рівень віброприскорення. Ці параметри визначаються в октавних смугах частот зі середньгеометричними значеннями 2, 4, 8, 16, 31,5 та 63 Гц і обчислюються за формулами:

$$L_v = 20 \lg \frac{v}{v_0} \quad \text{або} \quad L_a = 20 \lg \frac{a}{a_0},$$

де v – середнє квадратичне значення віброшвидкості; $v_0 = 5 \cdot 10^{-8}$ м/с; a – середнє квадратичне значення віброприскорення; $a_0 = 3 \cdot 10^{-4}$ м/с². Для житлових приміщень гранично допустимі рівні вібрації у вищезазначених смугах частот дорівнюють відповідно: за показником L_v - 79, 73, 67, 67, 67 та 67 дБ; за показником L_a - 25, 25, 25, 31, 37 та 43 дБ.

Розділ 4

БІОЛОГІЧНА ТЕРМОДИНАМІКА

4.1 Основні поняття та закони термодинаміки

Усі живі організми існують за рахунок одержання ними енергії з навколишнього середовища. Рослини використовують енергію світла, яке надходить від Сонця. Тварини використовують енергію, яка надходить з їжею. У процесах життєдіяльності ця отримана енергія частково витрачається на здійснення різного виду робіт, а частково розсіюється у вигляді тепла. Здійснення будь-якої роботи організмом - це корисне використання енергії, отриманої ззовні. Виділену організмом теплоту, в основному, можна віднести до другорядних, але неминучих втрат енергії, які відбуваються в результаті різних процесів, що перебігають в організмі. Таким чином, вивчення життєдіяльності організму або його окремих частин потребує кількісного опису процесів перетворення одних видів енергії в організмі в інші, зв'язку цих перетворень енергії зі здійсненням роботи та передачею теплоти. Саме ці питання вивчаються в розділі фізики, який називається термодинамікою.

Термодинаміка вивчає взаємні перетворення різних видів енергії в макроскопічних системах, що пов'язані з передачею теплоти або (та) зі здійсненням роботи.

Тіло (або система тіл, або, навпаки, частина тіла), що розглядається з погляду перебігу в ньому зазначених процесів, називається *термодинамічною системою*. Усе, що існує поза цією системою (тобто вся інша частина всесвіту), вважається *навколишнім середовищем*. Говорячи надалі про системи, ми будемо мати на увазі саме термодинамічні системи. Розрізняють такі види систем: *ізолювані, закриті та відкриті*.

Ізолювані системи не обмінюються з навколишнім середовищем ані енергією, ані речовиною. Закриті системи обмінюються з навколишнім середовищем енергією, але не обмінюються речовиною. Відкриті системи обмінюються з навколишнім середовищем і енергією, і речовиною.

Такі процеси, як перетворення енергії в термодинамічних системах, обмін енергією із зовнішнім середовищем, здійснення системою роботи підкоряються універсальному (тобто притаманому для всіх процесів у всесвіті) закону збереження енергії. Закон збереження енергії, сформульований щодо процесів, які розглядаються термодинамікою, називається

першим законом термодинаміки. Перш ніж сформулювати цей закон, необхідно згадати деякі поняття.

Розглянемо спочатку *внутрішню енергію* системи. Якщо казати точно, то внутрішня енергія системи - це вся її енергія крім кінетичної енергії системи як цілого (кінетичної енергії центра мас системи) та потенціальної енергії взаємодії системи з навколишнім середовищем. Таким чином, до внутрішньої енергії системи входить і кінетична енергія теплового руху молекул системи (тобто їхнього руху відносно центра мас системи), і потенціальна енергія взаємодії молекул системи між собою, і енергія взаємодії атомів у молекулах, і енергія взаємодії електронів атомів з їхніми ядрами, і т. ін. Однак у термодинаміці зазвичай під внутрішньою енергією розуміють ту частину внутрішньої енергії, яка може змінюватися при термодинамічних процесах. Це означає, що, з погляду термодинаміки, внутрішня енергія - це кінетична енергія теплового руху молекул системи та потенціальна енергія взаємодії молекул системи між собою. Разом з тим, біологічна термодинаміка повинна враховувати й процеси перетворення енергії хімічного зв'язку атомів у молекулах у тепло й у роботу.

Термодинаміка розглядає зміни внутрішньої енергії системи, які відбуваються внаслідок або здійснення роботи (роботи системи проти зовнішніх сил або роботи зовнішніх сил над системою), або передачі теплоти від однієї системи до іншої. Напрямок передачі теплоти визначається температурами взаємодіючих систем. Тепло завжди переходить від системи з вищою температурою до системи з нижчою температурою. За рахунок теплоти, що передана системі, може змінюватися її внутрішня енергія, системою може виконуватися робота, можуть відбуватися обидва ці процеси. Процес передачі теплоти системі (системою), не пов'язаний зі здійсненням системою роботи, називається *теплообміном*, або *теплопередачею*.

Для кількісної характеристики процесу теплообміну використовується поняття *кількості теплоти*. Кількість теплоти – це кількість енергії, що передана системі (або віддана системою) при теплообміні. Енергія, передана при теплообміні, йде на зміни внутрішньої енергії системи. Тому говорять, що **кількість теплоти – це фізична величина, яка дорівнює зміні**

внутрішньої енергії системи при теплообміні. Звідси випливає, що кількість теплоти, як і енергія, вимірюється в джоулях. У термодинаміці часто використовується також позасистемна одиниця вимірювання кількості теплоти – *калорія* (кал). Варто пам'ятати, що $1 \text{ кал} = 4,2 \text{ Дж}$.

Існують різні формулювання першого закону термодинаміки. Одне з них таке: **кількість теплоти, що передана системі, дорівнює сумі зміни внутрішньої енергії системи та роботи, що виконана системою проти зовнішніх сил.** Математично це відповідає такій формулі:

$$Q = \Delta U + A,$$

де Q – кількість теплоти, ΔU - зміна внутрішньої енергії, A – робота системи проти зовнішніх сил.

Як зазначалося раніше, людський організм, який є відкритою системою, існує за рахунок споживання енергії, запасеної в їжі. У процесі складних біохімічних реакцій в організмі харчові речовини (у першу чергу, вуглеводи та жири), які мають великий запас внутрішньої енергії, перетворюються на речовини, які мають меншу внутрішню енергію (головним чином, у воду та вуглекислий газ). Енергія, яка при цьому вивільнюється, витрачається організмом на виконання різних видів робіт та розсіюється у вигляді тепла. Так, вважається, що для нормального функціонування людського організму він повинен за добу споживати 2300 ккал, з яких приблизно 600 ккал використовується для здійснення роботи, інші 1700 ккал становлять втрати тепла (теплопровідність, теплове випромінювання, випаровування).

Кількість енергії, яку вивільнює організм при засвоєнні живильних речовин, не залежить від механізмів біохімічних реакцій, які перебігають при цьому, що обумовлено *законом Гесса*. Звичайно цей закон формулюють так: **тепловий ефект хімічного процесу, який розвивається через декілька проміжних стадій, не залежить від шляху перетворення, а визначається лише кінцевим та початковим станами хімічних систем.** Слушність закону Гесса підтверджується прямими вимірюваннями кількості теплоти, яку віддає організм людини за добу. Ця кількість дорівнює кількості енергії, що

отримана організмом з поживних речовин за добу. Саме закон Гесса лежить в основі практичного визначення калорійності харчових продуктів.

В організмі людини енергія їжі витрачається на здійснення таких видів робіт:

- механічної роботи - роботи з переміщення тіла або частин тіла проти механічних сил (механічна робота виконується м'язами при їхньому скороченні);
- хімічної роботи - роботи, з синтезу високомолекулярних сполук із низькомолекулярних у ході біохімічних реакцій;
- осмотичної роботи - роботи з переносу різних речовин через мембрани клітин з ділянки меншої концентрації цих речовин до ділянки їхньої більшої концентрації;
- електричної роботи - роботи з переносу іонів в електричному полі, що забезпечує низку електрофізіологічних процесів, які розглядатимуться в наступних розділах.

Усі термодинамічні процеси підпорядковуються першому закону термодинаміки. Але не всі процеси, що є можливими з погляду першого закону термодинаміки, можуть спостерігатися на практиці. У термодинаміці процеси поділяють на *зворотні* та *незворотні*. Зворотним називається такий процес, при якому система може самостійно (без витрат енергії ззовні) повернутися в початковий стан. При незворотних процесах система може повернутися в початковий стан тільки за рахунок надходження енергії з навколишнього середовища. Іноді кажуть, що незворотний процес – це процес, зворотний якому може існувати тільки як частина якогось іншого процесу.

Реально всі термодинамічні процеси в природі є незворотними. Але, якщо незворотні процеси можуть мати перебіг лише в одному напрямку та не можуть самочинно перебігати у зворотному напрямку, то чим же визначається спрямованість термодинамічних процесів? Для відповіді на це питання вводиться поняття *ентропії*.

Під час перебігу термодинамічних процесів ентропія системи змінюється, і зміну ентропії можна обчислити за формулою:

$$dS = \frac{dQ}{T},$$

де S - ентропія, T - температура. Очевидно, що одиницею вимірювання ентропії є джоуль на кельвін (Дж/К).

Якщо система початково не перебувала в стані рівноваги, то термодинамічні процеси, які відбуваються в ній, мають такий перебіг, що $dS \geq 0$, тобто при незворотних процесах ентропія системи є величиною неспадною (або зростає, або залишається сталою). Це твердження (принцип неспадання ентропії) є одним з формулювань другого закону термодинаміки. Другий закон термодинаміки має кілька формулювань й, мабуть, найвідомішим з них є таке: **теплота сама по собі не може переходити від тіла з нижчою температурою до тіла з вищою температурою.**

Для того, щоб виходячи з вищенаведеного визначення ентропії, обчислювати не тільки її зміну при переході з одного стану до іншого, але й визначати самі значення ентропії в цих станах, необхідно знати, чому дорівнює ентропія хоча б в одному якомусь стані. Ця проблема була розв'язана на основі статистичної фізики, яка дозволила, крім того, з'ясувати фізичний зміст ентропії.

У статистичній фізиці показано, що ентропія системи дорівнює нулю, якщо температура цієї системи дорівнює абсолютному нулю. Цей висновок іноді називають третім законом термодинаміки.

Що стосується змісту ентропії, то він впливає з формули

$$S = k \ln W,$$

де S - ентропія системи в деякому стані, k - стала Больцмана, W - термодинамічна ймовірність цього стану системи.

Неупорядковані стани системи є ймовірнішими, ніж упорядковані. Тому ентропія системи тим більша, чим більша неупорядкованість цієї системи. Іншими словами, **ентропія є мірою неупорядкованості системи.**

Оскільки процеси мають такий перебіг, що системи прагнуть перейти в імовірніший стан, а ймовірніші стани – це стани з більшою ентропією, стає зрозумілим і зміст другого закону термодинаміки. **Принцип неспадання ентропії – це**

наслідок прагнення системи перейти з менш імовірного стану в більш ймовірний.

Для кожного стану системи характерні визначені значення внутрішньої енергії та ентропії. Тому внутрішня енергія та ентропія називаються функціями стану. У термодинаміці використовуються ще три функції стану системи, які називаються *термодинамічними потенціалами*: *ентальпія* (H), *вільна енергія Гіббса* (G) та *вільна енергія Гельмгольца* (F). Ці термодинамічні потенціали задаються формулами:

$$H = U + PV,$$

$$G = H - TS,$$

$$F = U - TS,$$

де P та V - тиск у системі та об'єм системи відповідно.

Останню формулу можна записати у такому вигляді:

$$U = F + TS.$$

У правій частині цієї формули перший доданок відповідає тій частині внутрішньої енергії, яка при термодинамічних процесах, пов'язаних зі зміною внутрішньої енергії, може бути використана для здійснення роботи. Другий же доданок відповідає переходу частини внутрішньої енергії в тепло, тобто цей доданок пов'язаний з тією частиною внутрішньої енергії, яка не може бути перетворена в роботу. Звідси можна зрозуміти, чому величину F називають вільною енергією, а величину TS іноді називають зв'язаною енергією.

Якщо система складається з молекул різних видів, то зміна термодинамічних потенціалів системи може відбуватися за рахунок зміни кількості молекул якого-небудь виду (наприклад, при хімічних реакціях). Тоді для кожної з речовин, що входять до складу системи, можна ввести поняття хімічного потенціалу (μ_i), де кожне зі значень індексу i відповідає одній з речовин, які складають систему. При цьому хімічний потенціал дорівнює зміні будь-якого термодинамічного потенціалу (H, U, G або F), який припадає на одну частинку i-ї речовини, при незмінній кількості частинок (n_j) інших речовин та сталих значеннях відповідних параметрів (S, V, T, P).

$$\mu_i = \left(\frac{\partial U}{\partial n_i} \right)_{S,V,n_j} = \left(\frac{\partial H}{\partial n_i} \right)_{S,P,n_j} = \left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{T,P,n_j} = \left(\frac{\partial F}{\partial n_i} \right)_{T,V,n_j},$$

де n_i та n_j – кількість частинок i -ї та j -ї речовин відповідно, причому j -а речовина – це будь-яка інша, крім i -ї.

Різниця хімічних потенціалів у різних частинах розчинів може бути причиною такого явища, як *осмос*. Якщо є два розчини, розділені мембраною, яка пропускає молекули розчинника, але не пропускає молекули розчинених речовин, то молекули розчинника намагатимуться перейти через мембрану в той бік, де хімічний потенціал розчинника менший, тобто в ділянку концентрованішого розчину. Тиск, який треба докласти з боку більш концентрованого розчину, щоб запобігти переходу в цю ділянку молекул розчинника, *називається осмотичним тиском*.

Осмос відіграє важливу роль у багатьох біологічних процесах. Так, з осмосом пов'язане всмоктування води коріннями рослин. Поміщення кров'яних тілець у гіпотонічний розчин (розчин, концентрація солей у якому менша, ніж у плазмі крові) призводить до набрякання цих тілець, а при значній гіпотонічності - до розриву мембран та загибелі клітин. От чому винятково важливо, щоб будь-які розчини, які вливають у вену (або вводять взагалі в кровоносну систему), були ізотонічними, тобто відповідали плазмі крові за концентрацією солей. Несприятливим для клітин є й тривале перебування в гіпертонічних розчинах.

4.2 Елементи нерівноважної термодинаміки

Організми, як і більшість біооб'єктів, є відкритими термодинамічними системами, опис яких є більш складним, ніж опис ізольованих та закритих систем. Такі системи досліджуються з використанням методів нерівноважної термодинаміки.

У нерівноважній термодинаміці, зокрема, враховуються процеси переносу, тобто враховується наявність в організмах потоків різних фізичних величин, наприклад, потоків речовини (точніше, маси речовини), потоків теплоти, потоків електричних

зарядів (електричних струмів). Ці потоки виникають внаслідок існування градієнтів якихось інших фізичних величин. Наприклад, потоки маси речовини пов'язані, в першу чергу з наявністю градієнта концентрації цієї речовини (це відоме явище дифузії, про яке йтиметься докладніше у розділі 6), потоки теплоти пов'язані з наявністю у середовищі градієнта температури, потоки заряду – з існуванням градієнта потенціалу електричного поля, тощо.

З існуючими градієнтами величин пов'язане поняття *термодинамічних сил*, які розглядаються як причина існування вищезгаданих потоків.

Якщо потік виникає внаслідок термодинамічної сили, яка має з потоком загальні властивості, кажуть про *прямі* процеси переносу, а якщо властивості потоку та термодинамічної сили, яка його викликає, є різними, то кажуть про *непрямі* (*перехресні*) процеси переносу. Так, зазвичай дифузія молекул деякої речовини відбувається внаслідок наявності градієнта концентрації цієї речовини, що є прямим процесом переносу, а дифузія йонів в електричному полі (електродифузія, про яку йтиметься у наступному розділі) відбувається при наявності як градієнта концентрації, так і градієнта потенціалу електричного поля, тобто є перехресним процесом переносу.

Для всіх термодинамічних систем, що є близькими до рівноваги, при всіх процесах переносу, притаманних біологічним системам, існує лінійна залежність між термодинамічними силами та потоками, що може бути виражено такою формулою:

$$J_i = \sum_{k=1}^N L_{ik} X_k,$$

де J_i – i -й потік; X_k – k -а термодинамічна сила; N – загальна кількість термодинамічних сил у системі; L_{ik} – деякий коефіцієнт, який прийнято називати *кінетичним коефіцієнтом* та який встановлює величину впливу k -ї термодинамічної сили на i -й потік.

Остання формула називається *лінійним законом термодинаміки незворотних процесів*, або *лінійним законом потоків та термодинамічних сил*.

Важливо зазначити, що процеси, які обумовлені термодинамічними силами, відбуваються так, що завжди при перехресних переносах виконується така рівність:

$$L_{ik} = L_{ki}.$$

Ця рівність називається *принципом Онсагера*, або *принципом симетрії кінетичних коефіцієнтів*.

В ізольованих термодинамічних системах процеси відбуваються так, що ентропія цих систем зростає. При цьому

величина $\frac{dS}{dt}$ називається *швидкістю виникнення ентропії*, або *виробленням ентропії*. Але, якщо в системі відбувається декілька процесів, наприклад, біохімічних реакцій, то може існувати ситуація, коли дві реакції відбуваються одночасно та пов'язані одна з одною, причому одна з реакцій обумовлює зростання ентропії, а друга – її зменшення, хоча загалом ентропія зростає. У цьому випадку говорять про *спряження реакцій*, причому перша реакція називається *спрягаючою*, а друга – *спряженою*.

Це ж саме стосується і термодинамічних процесів взагалі. Часто використовується таке формулювання: **спряженням потоків (процесів) називають таке співвідношення між потоками (процесами), при якому додатне вироблення ентропії від одного потоку (процесу) компенсує зменшення ентропії від іншого потоку (процесу).**

Спряження процесів є характерною рисою існування таких відкритих термодинамічних систем, як організми.

Незважаючи на те, що процеси, які перебігають в організмах, є незворотними, внаслідок чого перебіг цих процесів пов'язаний зі збільшенням ентропії, організми можуть підтримувати сталість основних параметрів (функцій) стану, у тому числі й сталість ентропії. Збереження сталого рівня ентропії в організмі забезпечується за рахунок надходження в нього ззовні їжі, яка має більшу внутрішню енергію та меншу ентропію, ніж продукти життєдіяльності, що видаляються із організму.

Для живих організмів при їхньому нормальному функціонуванні характерним є стан гомеостазу, тобто

збереження постійності (точніше, майже постійності) значень основних параметрів, що характеризують життєдіяльність організму, зокрема, ентропії. **Стан системи, при якому ентропія всієї відкритої системи залишається сталою, тобто не змінюється з часом, називається *стаціонарним*.** Якщо ентропія мало змінюється з часом, кажуть про *квазистаціонарні* стани. Таким чином, дорослі живі організми, що перебувають у стані гомеостазу, є стаціонарними (точніше, квазистаціонарними) відкритими системами.

Обмін речовиною між організмом та навколишнім середовищем можна формально розглядати як надходження в організм із навколишнього середовища негативної ентропії, або *негентропії*.

Таким чином, для нормально функціонуючого організму характерне виконання умови

$$\frac{dS_i}{dt} + \frac{dS_e}{dt} \approx 0,$$

де $\frac{dS_i}{dt}$ - швидкість вироблення ентропії в організмі, а $\frac{dS_e}{dt}$ - швидкість надходження в організм негентропії.

Стаціонарні стани, у яких перебувають живі організми, не є рівноважними. Тому розділ термодинаміки, який розглядає живі організми – це нерівноважна термодинаміка відкритих систем. Якщо все ж таки вважати живий організм системою, що знаходиться поблизу стану рівноваги, то для такого організму виконується *теорема Пригожина*.

У відповідності до цієї теореми **в стаціонарному стані при фіксованих зовнішніх параметрах вироблення ентропії у відкритій системі мінімальне**, тобто

$$\frac{dS_i}{dt} \rightarrow \min.$$

Іншими словами, процеси в організмі, що нормально функціонує, мають такий перебіг, при якому забезпечується енергетично найбільш вигідний режим його функціонування, тобто режим з максимально можливим ККД та мінімально можливою швидкістю вироблення ентропії. Теорема Пригожина має й еволюційне трактування. Очевидно, що організми, у яких

за інших рівних умов забезпечується мінімальна швидкість вироблення ентропії, потребують для підтримки стаціонарного стану менших енергетичних витрат, тобто для задоволення своїх потреб мають потребу в меншому надходженні їжі ззовні. Цим обумовлені їхні еволюційні особливості, які забезпечують перевагу в боротьбі за існування. Таким чином, краще виживають ті організми, що функціонують відповідно до вимог теореми Пригожина, а інші організми відкидаються еволюцією як тупикові гілки.

Організми можуть перебувати й у нестационарних станах. Це може бути наслідком як природних процесів (ріст організму, сезонні зміни та ін.), так і наслідком негативних впливів зовнішнього середовища (хвороба, необхідність адаптації до зміни зовнішніх умов та ін.). Для організму в нестационарному стані теорема Пригожина може й не виконуватися, а швидкість вироблення ентропії перевершувати таку в стаціонарному стані. Водночас при поверненні організму до стаціонарності відбуватиметься й перехід до найбільш економічного режиму функціонування, у якому швидкість вироблення ентропії мінімальна. Таким чином, **процеси саморегуляції в організмі при його поверненні до стаціонарного стану повинні супроводжуватися зменшенням швидкості вироблення ентропії, що є принципом Пригожина-Глансдорфа.**

Вивчення процесів ауторегуляції в живих організмах та їхньої самоорганізації дозволило зробити висновок про подібність основних принципів та закономірностей цих процесів у різних складних відкритих системах, що послужило поштовхом до створення нової галузі науки – *синергетики*. Таким чином, **синергетика – це наука, яка вивчає загальні принципи самоорганізації та утворення просторових, часових та просторово-часових структур у відкритих нерівноважних системах.**

4.3 Поверхневий натяг. Коефіцієнт поверхневого натягу

Молекули на поверхні рідини і молекули всередині рідини перебувають у різних умовах. На кожную молекулу всередині рідини з усіх боків діють сили притягання з боку сусідніх молекул. Над поверхнею рідини знаходиться пара, густина якої

в багато разів менша за густину рідини, і тому взаємодією молекул пари з молекулами рідини можна знехтувати. Молекули на поверхні притягуються лише молекулами, які лежать нижче. Тому енергія молекул, що знаходяться на поверхні, більша за енергію молекул, що знаходяться всередині рідини, внаслідок чого вільна поверхня рідини має так звану поверхневу енергію тим більшу, чим більша площа цієї вільної поверхні. Якщо U є цією поверхневою енергією, то

$$U = \sigma S,$$

де S – площа вільної поверхні рідини, а σ - коефіцієнт пропорційності, який називається *коефіцієнтом поверхневого натягу* рідини і вимірюється у ньютонах на метр (Н/м). Коефіцієнт поверхневого натягу рідини залежить від роду рідини і від її температури, причому зі збільшенням температури він зменшується.

Подібно до того, як у механіці тіла, що мають більшу потенціальну енергію, прагнуть перейти до стану з меншою потенціальною енергією, рідини прагнуть перейти до стану з найменшим можливим значенням поверхневої енергії, тобто до стану з найменшою площею вільної поверхні (ось чому рідини у невагомості під дією молекулярних сил набувають сферичної форми, за якої площа вільної поверхні мінімальна). Це прагнення рідини скоротити площу вільної поверхні сприймається як *поверхневий натяг*.

Внаслідок цього виникають *сили поверхневого натягу*, які прагнуть зменшити площу вільної поверхні рідини. Сила поверхневого натягу спрямована вздовж вільної поверхні рідини (по дотичній до цієї поверхні, якщо вона не є плоскою) перпендикулярно до межі вільної поверхні.

Модуль сили поверхневого натягу, яка прикладена до прямолінійної ділянки межі вільної поверхні, прямо пропорційний довжині цієї ділянки, тобто

$$F = \sigma \ell,$$

де F – модуль сили поверхневого натягу; ℓ – довжина ділянки межі вільної поверхні.

Щоб збільшити площу вільної поверхні рідини на ΔS , треба виконати роботу A проти сил поверхневого натягу, причому

$$A = \sigma \Delta S.$$

З поверхневим натягом рідин пов'язано явище *змочування*. Явище змочування спостерігається в поверхневому шарі рідини на границі з твердим тілом. Якщо сила притягання молекул рідини одна до одної менше сили їхнього притягання до молекул твердого тіла, рідина називається *змочувальною*, у протилежному випадку – *незмочувальною*. Змочування приводить до скривлення вільної поверхні рідини в області її контакту з твердим тілом.

Мірою змочуваності є кут між поверхнею, що змочується, і дотичною до поверхні рідини. Цей кут називають *кутом змочування* або *крайовим кутом* (кут θ на рис. 4.1 та 4.2). При змочуванні кут θ – гострий, при незмочуванні – тупий. При повному змочуванні $\theta = 0$.

На рис. 4.1 та 4.2 показано скривлення вільної поверхні рідини в області її контакту з твердим тілом (вертикальна лінія на рисунках) у випадках, якщо рідина є змочувальною і незмочувальною відповідно.

Якщо в рідину, налиту в широку посудину, опустити вузьку трубку, то внаслідок явища змочування рівень рідини в трубці може виявитися вищим або нижчим за рівень вільної поверхні рідини в посудині. Ці явища підняття (або опускання) рідини в тонких трубках (капілярах) називають *капілярними явищами*.

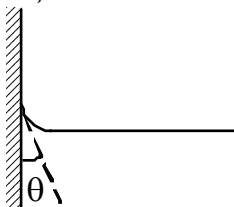


Рис. 4.1

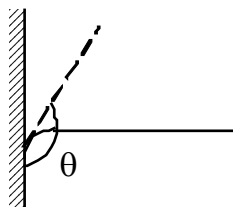


Рис. 4.2

Якщо для матеріалу, з якого зроблений капіляр, рідина є змочувальною, то рівень рідини в капілярі буде вищим, ніж у навколишній рідині, а вільна поверхня є увігнутою. Якщо ж рідина є незмочувальною, то рівень рідини в капілярі буде нижчим, ніж у навколишній рідині, а вільна поверхня є опуклою.

При повному змочуванні (або незмочуванні) висота підйому (опускання) рідини в капілярі може бути обчислена за формулою

$$h = \frac{2\sigma}{\rho R g},$$

де h – висота підйому (опускання) рідини в капілярі; ρ – густина рідини; R – радіус капіляра; g – прискорення вільного падіння. Цей вираз відомий як *формула Журена*.

Існують різні методи визначення коефіцієнта поверхневого натягу. Найпростіший із них – метод відриву крапель. При цьому бюретку заповнюють рідиною і забезпечують таку швидкість витікання води, щоб вона витікала окремими краплями. На краплю діють сила тяжіння краплі F_T і рівнодійна сил поверхневого натягу F . Сили поверхневого натягу діють уздовж контура (периметра бюретки), що обмежує поверхню витікаючої краплі.

Сили поверхневого натягу утримують краплю рідини доти, доки $F > F_T$. Крапля відривається від бюретки в той момент, коли $F = F_T$. Довжина кола бюретки, яке обмежує поверхню краплі, $\ell = \pi D$, де D – діаметр бюретки. Тоді, виходячи з формули, що є умовою відрива краплі, одержуємо:

$$\sigma = \frac{F}{\ell} = \frac{F_T}{\pi D},$$

звідки, враховуючи формулу $F_T = mg$, де m – маса краплі, остаточно одержуємо:

$$\sigma = \frac{mg}{\pi D}.$$

Капілярні явища можуть бути причиною дуже небезпечного для людини явища – *газової емболії*. При цьому бульбашки повітря, що потрапили до крові, можуть закупорити

дрібні судини й позбавити кровопостачання який-небудь орган. Це може призвести до серйозного функціонального розладу або навіть летального результату. Зокрема, повітряна емболія може виникнути при пораненні великих вен та потраплянні до них навколишнього повітря. Необхідно, щоб бульбашки повітря не потрапляли до судин при внутрішньовенних ін'єкціях. Газова емболія є також причиною так званої кесонної хвороби. При ній газові бульбашки в крові з'являються при швидкому зменшенні тиску у середовищі, в якому знаходиться людини. При такому зменшенні тиску різко зменшується розчинність азоту у крові, він починає виділятися у кров, утворюючи газові бульбашки і викликаючи газову емболію.

Розділ 5

ЕЛЕМЕНТИ МОЛЕКУЛЯРНОЇ БІОФІЗИКИ

Молекулярна біофізика вивчає будову і фізико-хімічні властивості біологічно важливих макромолекул. Це, в першу чергу, стосується структури та функцій білків та нуклеїнових кислот. Важливим моментом є дослідження зв'язків між структурою макромолекул та їхніми біологічними функціями.

Макромолекулами є молекули багатьох речовин, які відіграють найважливішу роль у житті клітин. Серед таких речовин треба, у першу чергу, відзначити білки та нуклеїнові кислоти. При дослідженні макромолекул одним з головних є питання про те, яким чином фізико-хімічні властивості макромолекул визначають їхні біологічні властивості. Завданням-максимум таких досліджень є визначення біологічних властивостей макромолекул, виходячи зі знання їхньої структури. У цьому напрямку досягнуто певні результати, але згадане завдання все ще далеке від остаточного розв'язання.

Вивчення зв'язку між структурою та функціями макромолекул варто починати з розгляду структури цих молекул. Почнемо з білків (або протеїнів).

Білки поділяють на прості та складні. Спочатку розглянемо прості білки. Прості білки утворюються в результаті полімеризації амінокислот. Усі амінокислоти, а до складу білків можуть входити 20 різних амінокислот, містять аміногрупу (-

NH₂) та карбоксильну групу (-COOH), причому в процесі полімеризації карбоксильна група однієї амінокислоти реагує з аміногрупою іншої кислоти, утворюючи пептидний зв'язок (-CO-NH-). **Послідовність амінокислотних залишків у поліпептидному ланцюгу визначає первинну структуру білка.** Пептидний зв'язок за своїм походженням є ковалентним зв'язком. Ковалентні зв'язки називають сильними. Енергія, яка необхідна для розриву таких зв'язків, лежить у межах 200...800 кДж/моль.

Молекулярна маса білків коливається в межах від 6000 до 1000000 дальтон і вище залежно від кількості окремих поліпептидних ланцюгів у складі єдиної молекулярної структури білка. Молекули з молекулярною масою меншою за 10000 дальтон (поліпептидні ланцюги, які містять менш ніж 100 амінокислотних залишків) зазвичай називають поліпептидами.

У всіх амінокислотах є атом вуглецю (C, заключений в коло на рис. 4.1), який трьома одинарними ковалентними зв'язками з'єднаний відповідно з аміногрупою, карбоксильною групою та атомом водню.

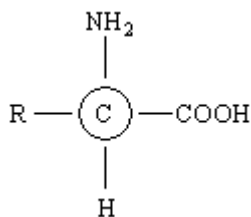


Рис. 5.1

Четвертим ковалентним зв'язком цей атом вуглецю зв'язаний з тією частиною молекули амінокислоти, яка називається радикалом (R на рис. 5.1) і є специфічною для кожної амінокислоти. Залежно від виду радикала амінокислоти (точніше, амінокислотні залишки) можуть бути поділені на полярні та неполярні. Полярні амінокислотні залишки є *гідрофільними*, неполярні – *гідрофобними*. Полярні залишки можуть бути заряджені позитивно або негативно й, у зв'язку із цим, надавати молекулі відповідно основні або кислотні

властивості. Наприклад, лужними (основними) є гістонові білки, які входять до складу нуклеопротейдів ядер еукаріотичних клітин.

Наявність в білках великої кількості полярних угруповань, тобто тих, що мають позитивний або негативний заряд, приводить до того, що в розчинах білки є поліелектролітами.

Більшість амінокислот (крім амінокислоти гліцин), як і переважна більшість скільки-небудь складних молекул, не мають площини та центра симетрії. Такі молекули називаються *хіральними*. Термін «хіральність» означає розбіжність деякої структури з її дзеркальним відображенням. Хіральні речовини можуть існувати у двох формах – правій та лівій (D- та L-форми відповідно). Ці дві конфігурації молекул не можна сумістити одну з одною ніяким поворотом системи як цілого в просторі. D- та L-форми називають *дзеркальними антиподами*, або *енантіомерами*. Для хіральних речовин характерне явище обертання площини поляризації світла, про що докладніше буде сказано в розділі «Оптика».

Суміші хіральних речовин, які містять однакову кількість правих та лівих молекул, називаються *рацемічними*. До складу білків живих організмів входять тільки L-форми амінокислот. Зазначимо, що не слід плутати L-форми хіральних молекул з молекулами, які обертають площу поляризації світла вліво. Серед амінокислот у білках є як ліво-, так і правообертаючі амінокислоти.

Атомні угруповання в молекулах, що зв'язані одинарними ковалентними зв'язками, можуть обертатися одне відносно одного. При цьому енергії конформації, які відрізняються величиною кута повороту атомних угруповань навколо одиночних ковалентних зв'язків, відрізняються. Відмінності енергій цих конформацій обумовлені відмінностями в енергіях взаємодій між атомними угрупованнями.

Існують різні види взаємодій атомних груп, що складають молекулу, між собою. Якщо взаємодіють між собою полярні групи атомів, то важливу роль відіграють електростатичні (*іонні, іон-дипольні, орієнтаційні та індукційні*) взаємодії. Якщо ж угруповання не є полярними, то енергія взаємодії між ними – це енергія *дисперсійних* взаємодій та енергія відштовхування.

Усі перелічені взаємодії прийнято називати слабкими (на відміну від сильного ковалентного зв'язку).

Іонні взаємодії – це електростатичні взаємодії між іонами. Енергія цих взаємодій пропорційна величині $\frac{1}{r}$, де r – відстань між іонами.

Іон-дипольні взаємодії – це взаємодії між іонами та полярними групами молекул, які є електричними диполями (див. розділ 6). Енергія цих взаємодій пропорційна $\frac{1}{r^2}$.

Орієнтаційні взаємодії – це диполь-дипольні взаємодії, тобто взаємодії між атомними угрупованнями, які є електричними диполями. Диполі прагнуть установитися антипаралельно. За температур, які характерні для живих організмів, енергія орієнтаційних взаємодій пропорційна $\frac{1}{r^6}$.

Індукційні взаємодії пов'язані з тим, що в електричному полі неполярне угруповання може поляризуватися, перетворюючись на диполь. Таким чином, полярне угруповання своїм полем індукуює появу дипольного моменту в колись неполярного угруповання, що далі приводить до диполь-дипольних взаємодій. Енергія індукційних взаємодій також пропорційна $\frac{1}{r^6}$.

Дисперсійні взаємодії існують між неполярними атомами та молекулами з насиченими електронними оболонками. Ці взаємодії мають квантово-механічне походження. Енергія цих взаємодій також пропорційна $\frac{1}{r^6}$.

Орієнтаційні, індукційні та дисперсійні взаємодії називають *ван-дер-ваальсовими* взаємодіями.

Енергія відштовхування пов'язана із взаємодіями, які описуються квантовою механікою. Ця енергія пропорційна $\frac{1}{r^{12}}$.

Квантово-механічні ефекти відштовхування атомів також відносять до ван-дер-ваальсових взаємодій.

Конформації молекул, які відповідають таким кутам повороту атомних угруповань, за яких енергія взаємодії між ними мінімальна, є стійкими станами. Молекули зазвичай перебувають в стійких станах. Якщо таких станів декілька, то вони називаються *поворотними ізомерами*, або *ротомерами*.

Саме внутрішнє обертання, яке приводить до конформаційних переходів, визначає вторинну, а частково й третинну структуру макромолекул.

За рахунок обертання окремих амінокислотних залишків навколо пептидного зв'язку молекула білка здобуває конформацію, яка відповідає мінімальній енергії взаємодії між різними амінокислотними залишками. Ці енергетично найвигідніші конформації або самі є локально впорядкованими структурами, або містять такі структури, причому ці структури періодичні та є спіралями різного типу. **Спосіб упакування макромолекули білка в періодичну тривимірну структуру визначає вторинну структуру білка.**

При утворенні вторинної структури найбільш значущим видом взаємодії між окремими ланками поліпептидного ланцюга є утворення водневих зв'язків.

У загальному випадку водневий зв'язок - це слабка взаємодія між яким-небудь електронегативним атомом та атомом водню, ковалентно зв'язаним з іншим електронегативним атомом.

Водневі зв'язки, які визначають вторинну структуру білків, – це, у першу чергу, зв'язки між воднем імінної групи (-NH-), яка входить у якийсь пептидний зв'язок, та киснем карбонільної групи (-CO-) іншого пептидного зв'язку, хоча певну роль у формуванні вторинної структури відіграють й інші водневі зв'язки. Різні водневі зв'язки мають різну енергію, а виходить, і різний ступінь міцності. Узагалі енергія водневих зв'язків змінюється в межах 4...30 кДж/моль. У білках основна частина водневих зв'язків характеризується енергією близько 6,3 кДж/моль.

У глобулярних білках основним видом вторинної структури є α -спіраль. В α -спіралі закручування

поліпептидного ланцюга зазвичай відбувається за годинниковою стрілкою (права спіраль), що обумовлено наявністю в білках тільки L-амінокислот. На кожний виток α -спіралі припадає 3,6 амінокислотних залишки. Крок спіралі дорівнює 0,54 нм, радіус - 0,23 нм.

Інший вид вторинної структури, що часто спостерігається у фібрилярних білках, одержав назву β -структури. У цьому випадку два (або декілька) поліпептидних ланцюги, що розташовані паралельно або частіше антипаралельно, зв'язуються водневими зв'язками, які утворюються між іміногрупами та карбонільними групами сусідніх ланцюгів. При цьому утворюються структури типу складчастого шару (шаруваті структури).

Існують білки, будова яких не відповідає ані β -, ані α -структурі. Таким є, наприклад, колаген - фібрилярний білок, який входить до складу сполучних тканин (див. розділ 3).

Найчастіше молекула білка не є повністю α -спіраллю або β -структурою, а містить ділянки, які мають вторинну структуру одного із зазначених типів, та неструктуровані ділянки. Здатність ділянок білкової молекули здобувати вторинну структуру пов'язана з амінокислотним складом цих ділянок, точніше, з гідрофобністю радикалів цих амінокислот. Ділянки білкової молекули, які містять гідрофобні радикали, відштовхують воду, що сприяє їхньому згортанню в α -спіраль або утворенню вторинної структури іншого виду. Ділянка молекули, яка містить гідрофільні радикали, взаємодіє з молекулами води, що перешкоджає утворенню вторинної структури. Такі ділянки є перемичками між структурованими ділянками. У результаті молекули глобулярних білків складаються зі структурованих спіральних або витягнутих сегментів, з'єднаних різноманітними неструктурованими згинами або петлями. Саме за рахунок наявності неструктурованих ділянок поліпептидний ланцюг має гнучкість.

За рахунок взаємодій різного роду дві (або декілька) сусідні по ланцюгу структуровані ділянки утворюють елементарні комплекси - «шпильки»: шпильки з антипаралельних α -спіралей, антипаралельні β -

шпильки, а також паралельні β -шпильки, прикриті α -спіраллю. Далі з декількох сусідніх елементарних комплексів та структурних сегментів утворюється компактна структура - *домен*. Такі процеси лежать в основі формування *третинної структури* білків.

Третинну структуру білка визначають як просторову орієнтацію поліпептидної спіралі або спосіб укладання поліпептидного ланцюга в певному об'ємі.

Як зазначалося, формування третинної структури білка відбувається за рахунок різних взаємодій. Серед них є єдиний вид сильних взаємодій - утворення дисульфідних містків, тобто утворення ковалентного зв'язку між двома атомами сірки, які входять до складу різних залишків амінокислоти цистин у молекулі білка (Цис-S-S-Цис). У формуванні третинної структури важливу роль відіграють слабкі взаємодії - електростатичні, та ван-дер-ввальсові, водневі зв'язки, гідрофобні взаємодії. Відповідно до сучасних уявлень при формуванні третинної структури (особливо у глобулярних білків) найзначущими зі слабких взаємодій є гідрофобні взаємодії. Вище відмічалася роль цих взаємодій у формуванні доменів.

Глобули малих білків складаються з одного домена, глобули великих білків - з декількох доменів. Компактизація доменів у глобулу також пов'язана з тим, що деякі гідрофобні ділянки різних доменів повертаються одна до одної та взаємодіють між собою, а гідрофільні ділянки взаємодіють із водою, яка оточує білкову молекулу.

Саме третинна структура білка визначає його біологічні властивості. Порушення третинної структури призводять до часткової або повної втрати білком його біологічної функціональності. Та третинна структура, здобуваючи яку білок є біологічно функціональним, називається його *нативною конформацією*. Порушення слабких взаємодій (унаслідок зміни температури, рН середовища та ін.), які призводять до руйнування нативної конформації білка, називається його *денатурацією*.

У деяких випадках білок має *четвертинну структуру* -

білок при цьому складається з декількох глобул. Розглянемо процеси, які лежать в основі формування четвертинної структури білків.

Іноколи нативна конформація поліпептидного ланцюга така, що частина гідрофобних ділянок опиняється на зовнішній частині молекули та контактує з навколишньою водою, яка оточує молекулу. При цьому гідрофобні взаємодії можуть приводити до об'єднання двох або декількох білкових молекул (глобул) у єдиний комплекс, у якому гідрофобні ділянки молекул звернені одна до одної та взаємодіють між собою. Так відбувається утворення **четвертинної структури білків, тобто формування макромолекулярного утворення, яке має функціональну активність тільки як структурно єдине ціле.**

Білки із четвертинною структурою, що складаються з декількох поліпептидних ланцюгів, називають *олігомерами*, або *мультимерами*, а кожний з ланцюгів, які складають олігомер, - *протомером*, *мономером*, або *субодиницею*. Олігомерні білки найчастіше побудовані з парного числа мономерів.

У формуванні четвертинної структури поряд з гідрофобними беруть участь й інші слабкі взаємодії. Мономери в олігомері взаємодіють між собою особливими контактними площадками, які володіють високою стеричною відповідністю, унаслідок чого говорять про компліментарність протомерів, які поєднуються в олігомер.

Зараз все ширше поширюється точка зору про існування п'ятого рівня структурної організації білків. Мова йде про поліфункціональні макромолекулярні комплекси з різних ферментів. Ці комплекси, які називаються *метаболічними олігомерами*, каталізують всі стадії деякого процесу (наприклад, піруватдегідрогеназний комплекс).

Крім простих білків, існують і складні білки – білки, які складаються із простого білка та небілкової частини, яка називається *протетичною групою*. Наприклад, гемопротейни містять як протетичну групу залізо. Конформація білкової частини складного білка така, що вона створює умови для утримання протетичної групи в молекулі.

Перейдемо до розгляду нуклеїнових кислот. Як рибонуклеїнові кислоти (РНК), так і дезоксирибонуклеїнові

кислоти (ДНК) складаються з нуклеотидів, що утворюють полінуклеотидні ланцюги, у яких окремі нуклеотиди зв'язані між собою фосфодієфірним зв'язком. Як відомо, до складу кожного з нуклеотидів входить азотиста основа (пуринова або піримідинова), вуглевод (у РНК - рибоза, у ДНК - дезоксирибоза) та залишок фосфорної кислоти. Полімеризація нуклеїнових кислот відбувається шляхом утворення ковалентного зв'язку між залишком фосфорної кислоти одного нуклеотида та вуглеводом іншого.

Пуринові основи (аденін та гуанін) однакові як у РНК, так й у ДНК. Піримідиновими основами в РНК є урацил та цитозин, а в ДНК – тимін та цитозин. Іноді в складі нуклеїнових кислот зустрічаються інші азотисті основи, які називаються *мінорними*. Відносно високим є їхній вміст у транспортних РНК. Азотисті основи мають плоску форму та не є хіральними. Вуглеводи мають асиметричний атом вуглецю, є хіральними та присутні у нуклеїнових кислотах завжди в D-формі.

Послідовність розташування нуклеотидів у ланцюгах ДНК та РНК визначає їхню первинну структуру.

Особливості структури, у тому числі й первинної, характерні для різних видів нуклеїнових кислот. Тому нагадаємо, що рибонуклеїнові кислоти поділяють на інформаційні, або матричні, РНК, транспортні РНК, рибосомні (іноді говорять – рибосомальні) РНК та РНК вірусів. В еукаріотичних клітинах більша частина ДНК знаходиться в ядрі, зв'язана з білками в *нуклеопротеїд* та структурована у вигляді окремих хромосом. Бактерії не мають ядра, і більша частина їхньої ДНК замкнена в одне кільце. Крім того, ДНК міститься в мітохондріях та хлоропластах.

Щодо особливостей первинної структури РНК, то інформаційні РНК мають суворо визначені однакові послідовності нуклеотидів на кінцях молекул. Те саме стосується й транспортних РНК.

Розглядаючи вторинну структуру нуклеїнових кислот, необхідно відразу відмітити розбіжності вторинних структур ДНК та РНК. ДНК усіх клітин має однотипну вторинну структуру. Що стосується РНК, то тут кожен з видів цих з'єднань треба розглядати окремо.

Почнемо із ДНК. Молекула ДНК складається із двох ланцюгів, що утворюють правообертальну спіраль, у яку закручені обидва ланцюги. Таким чином, **вторинна структура ДНК – це подвійна спіраль**. Взаємодія між ланцюгами в подвійній спіралі обумовлена, в першу чергу, утворенням водневих зв'язків між азотистими основами. При цьому азотисті основи, що звернені одна до одної, перебувають всередині спіралі, а фосфорильні та вуглеводні компоненти - зовні. У ДНК завжди реалізується компліментарність з'єднання опозитних (протилежних) азотистих основ: аденін та тимін завжди зв'язуються між собою, утворюючи 2 водневі зв'язки, а цитозин та гуанін зв'язуються тільки між собою, утворюючи 3 водневі зв'язки. Унаслідок цього в ДНК завжди міститься однакова кількість аденіну та тиміну. Це саме стосується також гуаніну та цитозину. З цієї самої причини в ДНК завжди міститься однакова кількість пуринових і піримідинових азотистих основ.

Поряд з водневими зв'язками важливу роль у стабілізації подвійної спіралі ДНК відіграють також гідрофобні, електростатичні та дисперсійні взаємодії між азотистими основами. Водночас специфічність з'єднання між собою опозитних основ пов'язана саме з утворенням водневих зв'язків. Існують також дисперсійні взаємодії між сусідніми в ланцюгу основами – так звані *стекинг-взаємодії*.

Теоретично ланцюги ДНК можуть поєднуватися в подвійну спіраль паралельно або антипаралельно залежно від орієнтації вуглеводу, який входить до нуклеотиду. У клітинах існує тільки антипаралельне з'єднання ланцюгів ДНК.

На основі рентгеноструктурного аналізу кристалів ДНК, виділеної з клітин, зроблений висновок про можливості існування декількох форм вторинної структури ДНК. Але у клітині, очевидно, існують тільки А- та В- форми подвійної спіралі ДНК. Вони характеризуються відповідно такими параметрами спіралі: діаметр - 1,8 та 1,7 нм; крок - 2,8 та 3,4 нм; кількість нуклеотидів на виток - 11 та 10.

Паралельно фосфодіефірному кістяку молекули ДНК розташовані так звані велика та мала боріздки. Напевне, саме в них до ДНК приєднуються білки, які здійснюють регуляторні функції.

Для вторинної структури транспортної РНК запропонована модель «конюшинового листка», відповідно до якої ці РНК мають 4 або 5 петель за рахунок наявності як спарених (двоспіральних), так і неспарених ділянок. Особливістю двоспіральних ділянок транспортної РНК є те, що в подвійну спіраль поєднуються не два різні полінуклеотидні ланцюги, а різні ділянки того самого ланцюга.

Вторинна структура інформаційної та рибосомної РНК маловивчена. Є дані про утворення в одноланцюгових інформаційних та рибосомних РНК ділянок з подвійною спіраллю - «шпильок». Біологічна роль цього явища поки невідома.

Обговорення структур рівня вищого, ніж другий, для нуклеїнових кислот варто проводити окремо для прокаріотичних та еукаріотичних клітин. Це пов'язано з тим, що в ядрах клітин еукаріот ДНК у чистому вигляді майже не зустрічається. Ядерна ДНК зв'язана з білками, і говорити тому необхідно не про структуру ДНК, а про структуру нуклеопротейду, точніше дезоксирибонуклеопротейду (ДНП).

У бактерій, як зазначалося, подвійна спіраль ДНК замкнена в кільце. Відомо також, що бактеріальна ДНК утворює безліч локальних петель. Біологічне значення такої організації ДНК нез'ясоване.

Нижчий рівень організації нуклеопротейду в ядрах еукаріотичних клітин – це *нуклеосоми*. Кожна нуклеосома – це, по-перше, 8 молекул гістонів (по 2 молекули чотирьох видів), які утворюють білкові тіла – кори, що мають форму дисків, та, по-друге, ДНК, намотана на ці кори. Намотана на кор ДНК утворює 1,75 обороту, що відповідає 146 парам нуклеотидів. Вільні від контакту з корама ділянки ДНК називають *лінкерними* (єднальними). Вони містять від 15 до 100 пар нуклеотидів. У результаті утворюється структура, схожа на намистини, з діаметром 10...11 нм. Відрізок ДНК, який включає нуклеосому та лінкерну ділянку, має в середньому довжину близько 20 нм. Розрахунки дають як оцінку кількості нуклеосом у геномі людини величину близько $1,5 \cdot 10^7$. Взаємодія гістонових білків із ДНК відбувається за рахунок сольових або

іонних зв'язків і неспецифічна відносно складу та послідовності нуклеотидів у молекулі ДНК.

Подальша компактизація ДНП забезпечується ще одним гістоновим білком, який, з'єднуючись із лінкерною ДНК та двома сусідніми кораами, зближає їх. При цьому утворюється нитчаста структура діаметром 25-30 нм. Цю нитчасту структуру називають хроматиною, або елементарною фібрилою. Вважають, що така структура утворюється за рахунок соленоїдного типу укладання нуклеосом. У результаті такого укладання утворюються глобули, або *нуклеомери*, які називають «наднамистинами», кожна з яких містить 8 нуклеосом.

У нуклеосомній нитці є ділянки ДНК, що вільні від білкових тіл та містять такі нуклеотидні послідовності, які впізнаються різними негістоновими білками. Саме негістонові білки забезпечують усі подальші рівні компактизації нуклеопротеїду.

Ці специфічні білки знаходять згадувані вище позануклеосомні ділянки ДНК, що віддалені одна від одної на відстань у кілька тисяч пар нуклеотидів, зближують їх та утворюють великі петлі, або *петлеві домени*. Петлеві домени містять від 20 до 80 тисяч пар нуклеотидів та мають довжину 0,2...0,3 мкм. Розмір окремого домена близький до розміру реплікона (ділянки хромосоми, що автономно реплікується), та, можливо, петлевий домен як структурна одиниця хромосоми відповідає функціональній одиниці - реплікону. На хромосому в середньому припадає більш ніж 2000 петлевих доменів.

Петлі доменів, можливо, кріпляться до білків, що подібні до білків ядерного матриксу. У зв'язку із цим іноді говорять про білковий кістяк хромосоми, який проходить вздовж її осі. Очевидно, близько 18 петель, площа яких перпендикулярна осі хромосоми, кріплячись до білкового кістяка, утворюють виток діаметром 0,7...0,8 мкм, що відповідає діаметру хроматиди. Можливо, видимі в оптичному мікроскопі *хромонеми* (субодиниці хромосоми) є наборами таких витків.

Відмітимо, що всі рівні компактизації хроматину присутні в мітотичних хромосомах, тобто в хромосомах, які знаходяться на тій стадії клітинного циклу, на якій відсутня їх функціональна активність (не перебігають процеси транскрипції

та реплікації). Для забезпечення функціональної активності в окремих ділянках інтерфазної хромосоми відбувається деструктуризація (частіше кажуть - декомпактизація) хроматину.

Слід зазначити, що поряд з негістоновими білками важливу роль у компактизації хроматину приймають двовалентні катіони. Взаємодіючи із ДНК, катіони нейтралізують електростатичне відштовхування між фосфорильними групами різних нуклеотидів. Зниження концентрації катіонів у розчині, який містить хромосоми, призводить до зворотного набрякання останніх, оскільки електростатичні взаємодії в поліаніонах, якими є нуклеїнові кислоти, стають настільки сильними, що ці взаємодії не можуть компенсуватися за рахунок взаємодій інших видів.

Розділ 6

БІОФІЗИКА МЕМБРАННИХ ПРОЦЕСІВ

6.1 Біологічні мембрани

Жива клітина, яка є відкритою системою, безупинно обмінюється з навколишнім середовищем різними речовинами. Здійснення транспорту речовин через *поверхневу (плазматичну)* мембрану є винятково важливою частиною процесів життєдіяльності клітини, завдяки якому забезпечується дихання клітини, її харчування, електрична активність клітин (при скороченні м'язових клітин, проведенні нервових імпульсів тощо) і низка інших важливих процесів. У зв'язку з цим, вивчення електричних властивостей біологічних тканин, електричних явищ, пов'язаних з життєдіяльністю людини, неможливо без вивчення процесів транспорту речовин через мембрану, що, у свою чергу, потребує попереднього розгляду будови клітинних мембран.

Біологічні мембрани належать до найважливіших структурних компонентів клітин. Вони є найтоншими структурами товщиною $\approx 6-12$ нм.

Крім поверхневої мембрани, яка відокремлює вміст клітини від зовнішнього середовища, клітина має й внутрішні

мембрани, які покривають такі внутрішньоклітинні структури, як мітохондрії, ендоплазматичний ретикулум, апарат Гольджи, лізосоми та ін.

Плазматична мембрана забезпечує підтримку відносної автономності та постійності хімічного складу клітини й одночасно здійснює та регулює транспорт речовин із зовнішнього середовища в клітину й назад. Плазматична мембрана забезпечує також формування контактів між клітинами.

Спеціалізована плазматична мембрана нервових клітин відіграє ключову роль у поширенні нервових імпульсів. Плазматичні мембрани епітеліальних клітин шлунково-кишкового тракту та нирок беруть участь у процесах усмоктування та секреції.

Як правило, виділяють такі основні функції біологічних мембран: бар'єрну (здійснення вибіркового обміну речовиною з навколишнім середовищем); матричну (забезпечення певної орієнтації та розташування мембранних білків); механічну (забезпечення міцності каркаса клітини та внутрішньоклітинних структур); енергетичну (мембрани мітохондрій беруть участь у синтезі АТФ); генерацію та проведення біопотенціалів; рецепторну.

Головними компонентами мембран є ліпіди та білки. У мембранах міститься також невелика кількість вуглеводів. Основною частиною мембранних ліпідів є фосфоліпіди, які складаються із двох частин. Одна з них - "голівка", яка є полярною й тому має гідрофільні властивості. Інша частина - "хвости", які є залишками жирних кислот. Хвости неполярні, а тому гідрофобні. Білки мембрани досить різноманітні за своєю структурою та функціями. Саме вони визначають функціональне різноманіття та спеціалізацію біологічних мембран.

Зараз більшістю вчених визнається *рідинно-мозаїчна* модель будови біологічних мембран (рис. 6.1). Відповідно до цієї теорії, основною неперервною частиною мембрани є подвійний шар фосфоліпідів, у якому полярні голівки орієнтовані назовні шару та контактують із водним середовищем (позаклітинною рідиною зовні та цитоплазмою

всередині клітини), а хвости (позначені цифрою 1 на рис. 6.1) звернені всередину бішару та зв'язані гідрофобними взаємодіями.

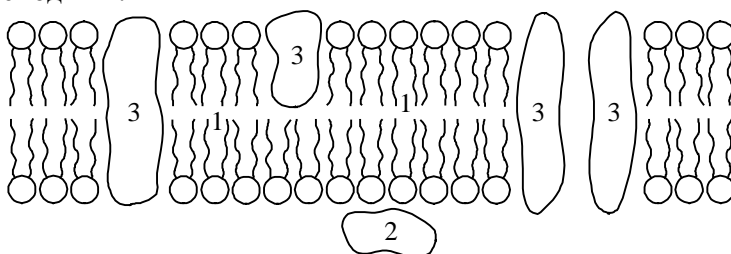


Рис. 6.1

У деякому визначеному діапазоні температур фосфоліпідні структури у воді поєднують властивості рідин та кристалів. Подібно до рідин вони мають плинність, але подібно до кристалів зберігають упорядкованість у розташуванні та орієнтації молекул. Таким чином, фосфоліпідні системи можуть мати рідкокристалічні властивості. При зменшенні температури нижче за деяке критичне значення відбувається фазовий перехід фосфоліпідів з рідкокристалічного стану в гель. При звичайній для клітини температурі фосфоліпідний бішар перебуває у рідкокристалічному стані.

За сучасними уявленнями, бішар є структурою, в якій молекули ліпідів здатні поступально та обертально рухатись та обмінюватися місцями.

Відповідно до рідинно-мозаїчної моделі білки не покривають повністю поверхню ліпідного бішару, а нібито плавають у ньому. За характером розташування та зв'язку з ліпідами мембранні білки поділяють на *периферичні* та *інтегральні*. Периферичні білки (позначені цифрою 2 на рис. 6.1) розташовані на поверхні (зовнішній або внутрішній) ліпідного шару. Можливо, вони взаємодіють із голівками фосфоліпідів. Існує, однак, точка зору про те, що периферичні білки пов'язані з мембраною не шляхом прямого контакту з фосфоліпідами, а через інтегральні білки. Молекули інтегральних білків (позначені цифрою 3 на рис. 6.1) мають великі гідрофобні ділянки. Цими ділянками вони занурені вглиб

ліпідного шару та зв'язані з ним. Деякі з інтегральних білків пронизують мембрану наскрізь.

6.2 Транспорт речовин крізь мембрани

Розглянемо процеси транспорту речовин через мембрани клітин.

Механізми (типи) транспорту різних речовин через мембрану різноманітні. Ці механізми можна поділити на дві великі групи - пасивний та активний транспорт речовин.

1. **При пасивному транспорті речовин через мембрану не витрачається енергія клітини.** До механізмів пасивного транспорту належать *дифузія* (зокрема такі її різновиди як *полегшена* та *обмінна дифузія*), а також *електродифузія* та *осмос*.
2. **Активний транспорт речовин пов'язаний з витратою клітиною енергії.** У більшості випадків у здійсненні активного транспорту беруть участь спеціальні *молекули-переносники*.

Почнемо з розгляду пасивного транспорту. Пасивний транспорт через мембрани зазвичай пов'язаний з тим або іншим різновидом дифузії. У найпростішому розумінні **дифузія - це перенесення речовини з ділянки простору, у якій концентрація речовини більша, до ділянки простору, у якій концентрація речовини менша.** Перенесення при цьому відбувається в результаті теплового руху молекул речовини. Розподіл речовини в просторі визначає *градієнт концентрації*. Напрямок вектора градієнта концентрації збігається з напрямком її найбільшого зростання. Тому при дифузії напрямок перенесення речовини протилежний напрямку градієнта концентрації.

Дифузія описується *рівнянням Фіка*. Якщо концентрація речовини залежить тільки від однієї просторової координати (будемо вважати, що це координата x), то **рівняння Фіка** має вигляд:

$$\frac{dm}{dt} = -D \frac{dc}{dx} S, \quad (6.1)$$

де m - маса речовини; $\frac{dm}{dt}$ - швидкість перенесення речовини (точніше, маса речовини, яка переноситься за одиницю часу) через поверхню, перпендикулярну напрямку x ; S - площа цієї поверхні; c - концентрація речовини, що переноситься; $\frac{dc}{dx}$ - модуль градієнта концентрації; D - коефіцієнт пропорційності, який називається *коефіцієнтом дифузії*. Якщо ввести позначення:

$$\Phi = \frac{dm}{dt} \quad \text{та} \quad J = \frac{\Phi}{S},$$

де Φ - потік речовини (точніше, потік маси речовини), а J - густина потоку речовини, то рівняння Фіка можна записати у вигляді:

$$J = -D \frac{dc}{dx}. \quad (6.2)$$

Як відбувається дифузія речовин через мембрану? Існує досить обмежена кількість речовин, здатних дифундувати безпосередньо через фосфоліпідний бішар. Це деякі гази (кисень, вуглекислий газ) та неелектроліти, розчинні в ліпідах. Більшість речовин, які переносяться через мембрану, не можуть дифундувати через фосфоліпідний шар. Це й зрозуміло, тому що управляти дифузією через фосфоліпідний бішар клітина не може, а для підтримки стабільності свого внутрішнього складу, для збалансованості найскладніших біохімічних процесів у клітині вона повинна мати можливість регулювати надходження речовин у клітину та їхній вихід з неї.

Дифузія більшості речовин через мембрану здійснюється за допомогою особливих мембранних утворень, які формуються з інтегральних білків. Це можуть бути *білки-переносники*, які беруть участь у механізмах *полегшеної дифузії*, та білки, що утворюють спеціальні мембранні структури, які називаються *порами*, або *каналами*. З порами, зокрема, пов'язане перенесення через мембрану іонів (*електродифузія*).

При полегшеній дифузії молекули речовини, що

переноситься, утворюють комплексне з'єднання з молекулами-переносниками. Для полегшеної дифузії характерні висока специфічність, пов'язана зі здатністю переносників утворювати з'єднання тільки з чітко визначеними молекулами (більше того, навіть з точно визначеними стереоізомерами молекул) або іонами, а також чутливість до специфічних речовин-інгібіторів, які сильно впливають на перенесення через мембрану тих або інших речовин. Різновидом полегшеної дифузії є *обмінна дифузія*. При обмінній дифузії перенесена молекула (або іон) відокремлюється від переносника тільки при приєднанні до нього іншої такої самої молекули (іона), що потім переноситься назад. Таким чином, обмінна дифузія не змінює концентрацій речовин ні всередині клітин, ні зовні.

Через пори відбувається дифузія води, деяких простих органічних сполук, іонів. Для дифузії через пори характерне те, що проникність мембрани залежить при цьому як від розміру каналу, так і від розміру молекули (іона). Для іонів перенос визначається також зарядом іона та різницею потенціалів між внутрішньою та зовнішньою сторонами мембрани.

За наявності в мембрані електричного поля залежність швидкості та напрямку перенесення іонів через мембрану від значень характеристик поля приводить до того, що **дифузія іонів не підкоряється звичайному рівнянню Фіка. Перенесення іонів (електродифузія) описується рівнянням Нернста-Планка**, що має вигляд:

$$J = -D \frac{dc}{dx} - cuZF \frac{d\phi}{dx}, \quad (6.3)$$

де u - рухомість іона; Z - його заряд, виражений в елементарних зарядах (тобто валентність); F - стала Фарадея; ϕ - потенціал електричного поля; $\frac{d\phi}{dx}$ - модуль градієнта потенціалу.

Враховуючи, що рухомість іона дорівнює

$$u = \frac{D}{RT}, \quad (6.4)$$

де R - універсальна газова стала, а T - абсолютна температура, рівняння Нернста - Планка можна записати у вигляді

$$J = -D \left(\frac{dc}{dx} + \frac{ZF_c}{RT} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right). \quad (6.5)$$

Для опису явища електродифузії доцільно ввести поняття *електрохімічного потенціалу*.

Рівняння Нернста-Планка, якщо виконати деякі елементарні перетворення, можна записати у вигляді:

$$J = -\frac{cD}{RT} \cdot \frac{d(RT \ln c + Fz\varphi + \mu_0)}{dx}, \quad (6.6)$$

де μ_0 – хімічний потенціал розчинника, який є однаковим по обидва боки мембрани, внаслідок чого не залежить від координати, за якою виконується диференціювання. Величина $\bar{\mu} = \mu_0 + RT \ln c + Fz\varphi$ – є електрохімічним потенціалом, який визначає вільну енергію Гібса в розрахунку на один моль розчиненої речовини у присутності електричного поля. Доданок $RT \ln c$ визначає внесок розчиненої речовини (осмотичний внесок) в електрохімічний потенціал. Доданок $Fz\varphi$ характеризує внесок електричного поля.

Рівняння (6.5) та (6.6), враховуючи означення електрохімічного потенціалу, можна записати у такому вигляді:

$$J = -\frac{cD}{RT} \cdot \frac{d\bar{\mu}}{dx}. \quad (6.7)$$

Рівняння (6.7) називається *рівнянням Теорелла*. З цього рівняння можна зробити висновок про те, що рушійною силою пасивного транспорту іонів є градієнт електрохімічного потенціалу. Рушійною ж силою пасивного транспорту незаряджених молекул є градієнт концентрації.

Як зазначалося вище, канали утворені інтегральними мембранними білками, гідрофільні полярні групи яких звернені всередину каналу. Більшості каналів властива специфічність – здатність пропускати тільки визначені іони. Відомі натрієві, калієві, кальцієві, хлорні канали. Клітина управляє проникністю іонного каналу. У результаті конформаційних змін білків, які утворюють стінки каналу, він може переходити з відкритого стану в закритий та навпаки. Причиною цих змін може бути, наприклад, зміна електричного поля мембрани.

На даний час відомий ряд процесів, пов'язаних з перенесенням речовин через мембрани в напрямку градієнта концентрації, тобто з ділянки, у якій концентрація речовини менша, в ділянку, у якій вона більша. Таке перенесення протилежне за напрямком перенесенню, пов'язаному з дифузією, неможливе без витрати енергії клітиною, тобто є *активним транспортом речовин*. До таких процесів належать *іонні насоси*: натрій-калієвий насос плазматичних мембран, кальцієвий насос мембран саркоплазматичного ретикулу, протонний насос мітохондрій та хлоропластів. До процесів активного транспорту належить перенесення різних речовин (наприклад, цукрів) через мембрани клітин епітелію кишечника. Ми розглянемо найбільш вивчений із цих механізмів - натрій-калієвий насос (рис. 6.2).

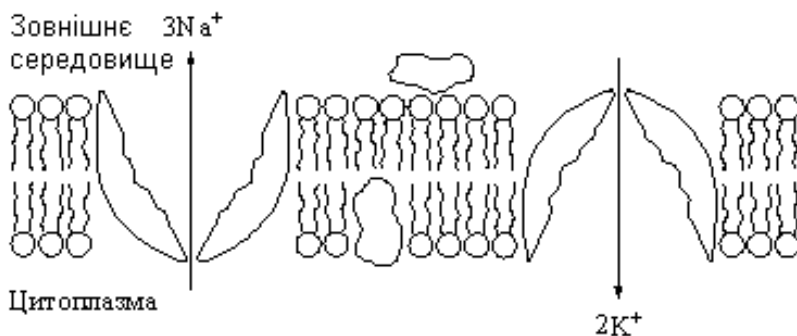


Рис. 6.2

При роботі натрій-калієвого насоса відбувається перенесення через плазматичну мембрану іонів натрію із клітини назовні та іонів калію ззовні в клітину. Зазвичай при одному циклі роботи насоса переносяться три іони натрію та два іони калію, хоча в штучно створених умовах це співвідношення може бути й іншим. Транспорт іонів натрію та калію через мембрану здійснюється складним інтегральним білком-переносником, гідролізуючим АТФ, за рахунок енергії якого й здійснюється робота $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ насоса. Цей білок (фермент) називається транспортною АТФ-азою, або $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ АТФ-

азою. Перенесення іонів у цьому випадку обумовлене конформаційними змінами білка-переносника.

Перенесення іонів при роботі натрій-калієвого насоса спричиняє те, що концентрації натрію та калію всередині клітини та поза клітиною істотно розрізняються. Розрізняються внутрішньоклітинні та позаклітинні концентрації й деяких інших іонів, зокрема хлору. Така розбіжність внутрішніх та позаклітинних концентрацій різнозаряджених іонів є причиною існування електричної різниці потенціалів між зовнішньою та внутрішньою поверхнями плазматичної мембрани. Як приклад у таблиці 5.1 наведені дані про розподіл концентрації (с), вираженої в ммоль/л, основних іонів між цитоплазмою та зовнішнім середовищем для гігантського аксона кальмара.

Таблиця 6.1

Іон	Калій	Натрій	Хлор
c_i	329	78	104
c_o	22	462	286

Примітка. Тут і далі індекси «і» та «о» стосуються внутрішньоклітинного вмісту та позаклітинного середовища відповідно.

Зупинимося коротко на інших різновидах активного транспорту.

У кожному циклі роботи кальцієвого електрогенного іонного насоса транспортна Ca^{2+} -АТФаза за рахунок енергії гідролізу АТФ відкачує із клітини два іони кальцію. У кожному циклі роботи протонного насоса (H^+ -насос, або протонна помпа) через мембрану переносяться два протони. Види іонних насосів схематично зображені на рис. 6.3.

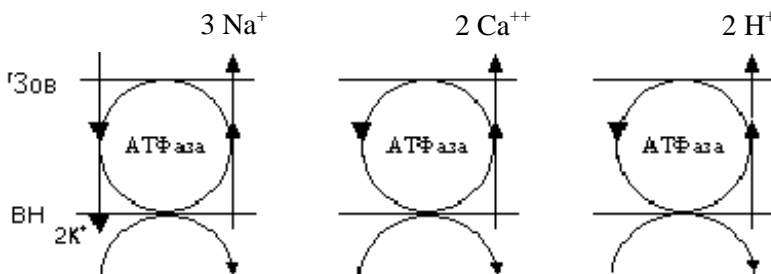


Рис.6.3.

6.3 Мембранні потенціали спокою та дії

У спокої внутрішнє середовище клітини заряджене негативно відносно позаклітинного середовища. Різниця потенціалів між внутрішньою та зовнішньою сторонами мембрани називається *мембранним потенціалом*. Мембранний потенціал у стані спокою клітини називається *потенціалом спокою*. У різних клітин різних організмів потенціал спокою може приймати різні значення, які лежать у діапазоні приблизно від 50 до 100 мВ.

Клітинна мембрана відокремлює міжклітинну речовину та внутрішньоклітинний вміст. Ці два середовища містять катіони та аніони (K^+ , Na^+ , Cl^- та ін.) у різних концентраціях, причому ці іони мають різну рухливість. Мембрана має різну проникність для різних іонів. Так, невеличкі іони можуть проходити через мембранні канали, а іони макромолекул (зазвичай вони є поліаніонами) через мембрану проходити не можуть. Кожний з цих факторів може приводити до створення різниці потенціалів між внутрішнім та зовнішнім боками мембрани та ставати внеском у загальний мембранний потенціал.

Розглянемо перелічені вище явища докладніше.

Причиною пасивного переміщення через мембрану іонів є наявність градієнта електрохімічного потенціалу, тобто іони переміщуються крізь мембрану доти, доки значення цього потенціалу по обидва боки мембрани не стануть однаковими. Але вирівнювання значень електрохімічних потенціалів може приводити до виникнення різниці потенціалів між боками

мембранни. Виходячи з наведеної вище формули для електрохімічного потенціалу, для ситуації рівності цих потенціалів по обидва боки мембрани можна записати

$$RT \ln c_i + zF\varphi_i = RT \ln c_o + zF\varphi_o,$$

звідки

$$\varphi_m = \varphi_i - \varphi_o = \frac{RT}{zF} \ln \frac{c_o}{c_i}, \quad (6.8)$$

де, як і раніше, індекси “i” та “o” стосуються внутрішньоклітинного вмісту та позаклітинного середовища відповідно.

Формула (6.8) дозволяє обчислити так званий *рівноважний потенціал Нернста*.

Якщо на мембрані існують градієнти концентрацій катіонів та аніонів, то за наявності різниці у рухливостях цих іонів навіть при однаковості градієнтів їхніх концентрацій, процес електродифузії іонів крізь мембрану приводитиме до появи різниці потенціалів між обома боками мембрани. Різниця потенціалів, що виникає при цьому на мембрані, називається *дифузійним потенціалом* і є тим більшою, чим більшою є різниця рухливостей катіонів та аніонів.

Наявність усередині клітини поліаніонів приводить до створення неоднакових концентрацій одновалентних як катіонів, так і аніонів по різні боки мембрани. Це разом з дифузійними процесами формує так званий *потенціал Доннана* (φ_d), який може бути обчислений за формулою:

$$\varphi_d = \frac{RTnc(P^-)}{2Fzc_0},$$

де n – кількість негативних зарядів на кожній молекулі-поліаніоні; $c(P^-)$ – концентрація цих молекул у клітині, c_0 – концентрація іонів калія у міжклітинному середовищі.

Треба зазначити, що потенціал Доннана створює невеликий внесок у загальний мембранний потенціал і у клітині, що нормально функціонує, може не враховуватися при обчисленні загального мембранного потенціалу.

Говорячи про процеси формування потенціалу спокою,

варто згадати про те, що в спокої мембрана клітини практично непроникна для іонів натрію, але деякою мірою проникна для іонів калію. Тому частина іонів калію, внесених у клітину при роботі $\text{Na}^+ - \text{K}^+$ -насоса, дифундує через мембрану клітини назовні, тим самим, збільшуючи абсолютну величину потенціалу спокою.

У цей час найкращою моделлю, яка описує формування потенціалу спокою, є модель, яка припускає, що в стаціонарному стані сума потоків основних іонів (K^+ , Na^+ , Cl^-) дорівнює нулю, тобто

$$\Phi_{\text{K}^+} + \Phi_{\text{Na}^+} - \Phi_{\text{Cl}^-} = 0. \quad (6.9)$$

Виходячи із цього рівняння та використовуючи рівняння Нернста-Планка, можна отримати **формулу (рівняння) Гольдмана–Ходжкіна–Катца для мембранного потенціалу спокою**:

$$\varphi_m = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_{\text{K}}[\text{K}^+]_o + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_o + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}^-]_i}{P_{\text{K}}[\text{K}^+]_i + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_i + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}^-]_o}, \quad (6.10)$$

де φ_m - мембранний потенціал спокою; P_{K} , P_{Na} та P_{Cl} - проникності (коефіцієнти проникності) мембрани для іонів калію, натрію та хлору відповідно; $[\text{K}^+]$, $[\text{Na}^+]$ та $[\text{Cl}^-]$ - активні концентрації іонів калію, натрію та хлору.

У наведеній формулі під проникністю мембрани для якого-небудь виду іонів розуміють коефіцієнт пропорційності між щільністю потоку цих іонів через мембрану та різницею концентрацій іонів по обидва боки мембрани.

$$J = P(c_i - c_o)$$

У найпростішій моделі дифузії іонів через мембрану проникність мембрани дорівнює

$$P = \frac{Dk}{\ell} \quad (6.11)$$

де k - коефіцієнт розподілу частинок речовини (іонів) між мембраною та навколишнім середовищем (зазвичай водна фаза); ℓ - товщина мембрани (точніше, мабуть, поздовжній розмір пори).

У стаціонарному стані проникності мембрани клітини для

різних іонів істотно різні. Якщо прийняти проникність мембрани для калію за одиницю, то можна зазначити таке співвідношення: $P_K : P_{Na} : P_{Cl} = 1:0,04:0,45$. Із цього співвідношення видно, що основну роль у формуванні потенціалу спокою відіграють іони калію.

При ушкодженні клітинної мембрани підвищується проникність для всіх іонів, зменшуються відмінності у величинах проникностей, унаслідок чого абсолютне значення мембранного потенціалу знижується.

Якщо абсолютну величину мембранної різниці потенціалів штучно зменшити, то можливі два результати: якщо зміна невелика, то після зняття впливу клітина відновить колишнє значення ϕ_m , якщо ж зміна така, що потенціал мембрани досягне деякого граничного рівня (ϕ_n на рис. 6.4.), то наслідком такої зміни стане процес, який називається генерацією *потенціалу дії*. У процесі генерації потенціалу дії мембранний потенціал спочатку падає до нуля (*деполяризація* мембрани), потім стає позитивним (*реверсія* потенціалу), а потім повертається до первинного значення (*реполяризація* мембрани). Зазвичай після реполяризації настає досить тривала *гіперполяризація*, тобто деякий зсув мембранного потенціалу в негативний бік в порівнянні з первинним значенням.

Процес формування потенціалу дії пов'язаний зі значною та неодноразовою зміною проникності мембрани для іонів натрію та калію. Спочатку після досягнення граничного значення відкриваються натрієві канали, і іони натрію масово входять усередину клітини. Це приводить до деполяризації, а потім і реверсії мембранного потенціалу. Потім відкриваються калієві канали, а натрієві закриваються. Відбувається масовий вихід іонів калію із клітини. Потім включається $Na^+ - K^+$ насос, що відновлює близькі до первинних концентрації натрію та калію. У результаті мембранний потенціал знову стає негативним, тобто відбувається реполяризація мембрани.

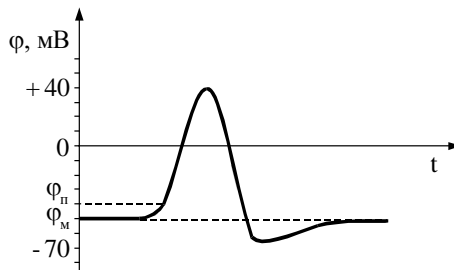


Рис. 6.4

У стані збудження співвідношення максимальних коефіцієнтів проникності мембрани для K^+ , Na^+ та Cl^- становлять $P_K : P_{Na} : P_{Cl} = 1:20:0,45$ (значення визначилися для аксона кальмара).

Генерація потенціалу дії на якійсь ділянці мембрани викликає на сусідніх ділянках мембрани такі зміни мембранного потенціалу, що він досягає при цьому граничного значення, що, у свою чергу, викликає на цій ділянці генерацію потенціалу дії. У результаті хвиля потенціалу дії поширюється по клітинній мембрані. У м'язовій клітині цей процес викликає її скорочення, у нервовій клітині поширення по мембрані хвилі потенціалу дії є передачею нервового імпульсу.

Математична модель, що описує процеси генерації та поширення потенціалу дії вздовж мембран клітин збуджуваних тканин, були побудовані Ходжкіним та Хакслі. Вони виходили з еквівалентної електричної схеми мембрани, яка є електричним колом з чотирма паралельними гілками. Перша з них містить електричну ємність (C), а інші три гілки відтворюють натрієву (g_{Na}) та калієву (g_K) провідності мембрани, а також провідність відтоку ($g_{відт}$). Під провідністю тут розуміють величину, яка є оберненою електричному опору.

Кожна з останніх трьох гілок містить джерела струму з електрорушійними силами ε_{Na} , ε_K та $\varepsilon_{відт}$ відповідно.

Нехай ϕ - мембранний потенціал, а ϕ_p - рівноважний потенціал Нернста.

Виходячи з того, що іонні струми для кожного з іонів прямо пропорційні різниці між мембранним потенціалом та рівноважним потенціалом Нернста для відповідного типу іонів, Ходжкін та Хакслі для процесу поширення потенціалу дії вздовж мембрани аксона одержали таке рівняння (рівняння Ходжкіна-Хакслі):

$$\frac{r}{2\rho_a} \cdot \frac{d^2\varphi}{dx^2} = C \frac{d\varphi}{dt} + g_{K\max} n^4 (\varphi - \varphi_{\text{рівн}}^K) + g_{Na\max} m^3 h (\varphi - \varphi_{\text{рівн}}^{Na}) + g_{\text{відт}} (\varphi - \varphi_{\text{рівн}}^{\text{відт}}),$$

де ρ_a - питомий опір аксоплазми, t - час, n - частка активованих калієвих каналів, m - частка активованих натрієвих каналів, h - частка інактивованих натрієвих каналів. Вважається, що потенціал дії поширюється в напрямку координати x .

Використовуючи хвильове рівняння, яке у цьому випадку має вигляд $\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, рівняння Ходжкіна-Хакслі можна перетворити до вигляду:

$$\frac{r}{2\rho_a v^2} \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = C \frac{d\varphi}{dt} + g_{K\max} n^4 (\varphi - \varphi_{\text{рівн}}^K) + g_{Na\max} m^3 h (\varphi - \varphi_{\text{рівн}}^{Na}) + g_{\text{відт}} (\varphi - \varphi_{\text{рівн}}^{\text{відт}}).$$

Розв'язання останнього рівняння дає можливість розрахувати швидкість поширення нервового імпульсу.

Для більшості тварин винятково важливим фактором, який забезпечує успіх у боротьбі за існування, є досягнення високої швидкості передачі нервових імпульсів по аксонах нейронів. Це завдання різні організми вирішують по-різному. Оскільки швидкість поширення хвилі потенціалу дії по мембрані нервового волокна пропорційна кореню квадратному з радіуса волокна, аксони багатьох безхребетних мають великий радіус. Однак таке збільшення радіуса волокна енергійно неефективне, тому в хребетних прискорення проходження імпульсів нервовими волокнами досягається іншим способом. Нервові волокна хребетних (мієлінові волокна) тонкі, але більша частина їхньої поверхні оточена так званими

шванівськими клітинами (начебто обгорнена ними). При цьому розташування цих клітин є просторово періодичним: за ділянкою, оточеною шванівськими клітинами, йде ділянка, на якій мембрана нейрона контактує з позаклітинною рідиною (гола ділянка), потім знову покрита ділянка, потім знову гола тощо. Ці голі ділянки називаються *перехопленнями Ранв'є*. Шванівські клітини мають високий опір. Вони електрично ізолюють мембрану нервового волокна. На цих ділянках потенціал дії генеруватися не може - він генерується тільки на перехопленнях Ранв'є. Реверсія мембранного потенціалу на одному перехопленні викликає значні зміни потенціалу на сусідньому перехопленні, а досягнення на цьому перехопленні потенціалом граничного значення викликає на ньому генерацію потенціалу дії. Таким чином, у хребетних хвиля потенціалу дії не біжить усією поверхнею волокна, а перестрибує з одного перехоплення на інше. При цьому збільшується швидкість передачі нервового імпульсу. Крім того, забезпечити харчування тонкого волокна та відновити потенціал спокою не на всьому волокні, а на окремих перехопленнях, клітині легше, ніж у випадку немієлінового волокна. Тому мієлінові волокна забезпечують хребетним одночасно й високу швидкість передачі нервового імпульсу, і високу енергетичну ефективність.

Важливим питанням молекулярної біофізики є біофізика зорової реценції, але розгляд цього питання потребує попередньої загальної характеристики ока людини.

Будова ока людини показана на рис. 4.2.

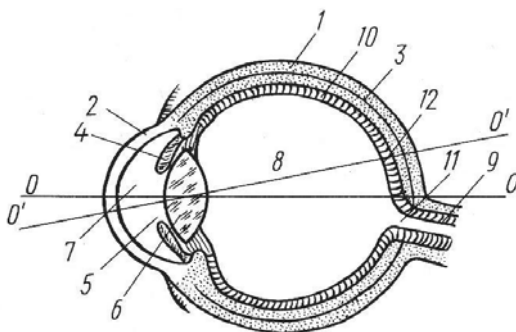


Рис. 4.2

Зовнішньою оболонкою ока є *склера*, або *білкова оболонка* (1). Передня частина склери називається *рогівкою* (2). Рогівка прозора, має більшу кривизну та міцність, ніж решта частини склери. Друга оболонка - це *судинна оболонка* (3), яка в своїй передній частині переходить у *райдужну оболонку* (4), що визначає колір очей людини. У центрі райдужної оболонки знаходиться невеликий отвір - *зіниця* (5). Через зіницю світло потрапляє всередину ока. Простір між рогівкою й райдужною оболонкою називається *передньою камерою* ока (7). Передня камера заповнена рідиною, показник заломлення якої майже дорівнює показнику заломлення води. Ця рідина називається *вологою передньої камери*. За зіницею знаходиться *кришталік* (6) - прозоре еластичне утворення, що є двоопуклою (збірною) лінзою. За судинною оболонкою всередині ока розміщена *сітчаста оболонка*, або *сітківка* (10) (її ще називають *ретиною*). На сітківці знаходяться *зорові рецептори*, тобто сітківка є світлосприймаючим апаратом ока. Внутрішня частина ока заповнена прозорою драглистою масою, що називається *склоподібним тілом* (8).

Взагалі кажучи, око людини є так званою *центрованою оптичною системою*. Детальний аналіз таких оптичних систем здійснюється у відповідних розділах оптики. Але для ока людини може використовуватися спрощена модель – так зване *приведене око Вербицького*. Виходячи з цієї моделі, побудову

зображень, які створюються оком на сітківці, можна проводити, використовуючи правила побудови зображень в одній лінзі.

Оптична схема ока Вербицького показана на рис. 4.3.

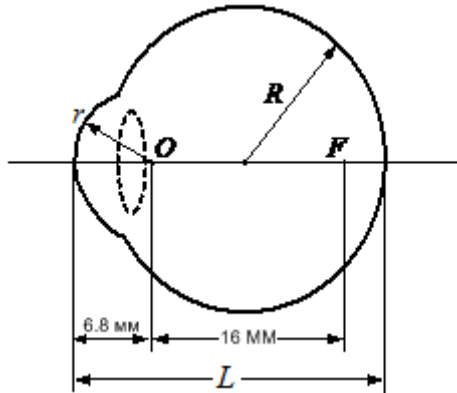


Рис. 4.3

У схемі на рис. 4.3 $R = 10,2$ мм, $r = 6,8$ мм; довжина ока вздовж вісі – $L = 23,4$ мм. Головний фокус F знаходиться від оптичного центру ока (O) на відстані 16 мм. Показник заломлення лінзи, якою моделюється око, дорівнює 1,4, оптична сила її – 64 дптр. Оптичний центр ока знаходиться на відстані 7,2 мм від рогівки, тобто на відстані приблизно 17 мм від сітківки. *Головна оптична вісь* ока (OO) проходить через геометричні центри рогівки, зіниці й кришталика. Світлопровідна система ока формує на сітківці дійсне, перевернене, зменшене зображення предмета, що розглядається.

Оптична сила ненапруженого ока дорівнює 63...65 дптр. Елементом світлопровідної системи ока, що вносить найбільший внесок до загальної оптичної сили ока є рогівка. Її оптична сила приблизно дорівнює 40 дптр. У ненапруженому оці кришталик має оптичну силу близько 20 дптр.

Ненапружене око створює на сітківці різке зображення видалених предметів. Щоб одержати на сітківці різке зображення близько розмішених предметів, слід збільшити оптичну силу ока. Процес пристосування ока до чіткого бачення різновіддалених предметів називається *акомодацією*. При

акомодації змінюється оптична сила кришталика. При напрузі ока кришталік округляється, внаслідок чого оптична сила ока може зростати до 70 дптр.

Акомодація ока для одержання чіткого зображення предметів, віддалених від ока більше, ніж на 25 см, не вимагає відчутної напруги ока. Тому людина зазвичай прагне розмістити даний предмет саме на такій відстані від очей і тому відстань в 25 см називається *відстанню найкращого зору*.

Найменша відстань від ока до предмета, при якій можливе отримання його чіткого зображення на сітківці, називається *ближньою точкою ока*, або *ближньою точкою ясного бачення*.

У людей можуть спостерігатися вроджені або придбані з віком недоліки світлопровідної системи ока. До них належать *міопія, гіперметропія та астигматизм*.

При міопії (короткозорості) зображення даного предмета (зазвичай віддаленого предмета) формується не на сітківці, а перед нею. Причиною міопії, яка зустрічається найчастіше, є витягнута (видовжена) форма очного яблука. Рідше зустрічається рефракційна міопія, пов'язана з надмірною заломлюючою здатністю (кривизною) різних елементів світлопровідної системи ока. Для корекції міопії необхідно зменшити оптичну силу ока. Це досягається шляхом використання розсіювальних лінз (скельця окулярів, контактні лінзи).

При гіперметропії (далекозорості) зображення предмета, що розглядається, (зазвичай предмета, розташованого близько до ока) формується не на сітківці, а за нею. Причиною старечої далекозорості, яка зустрічається найчастіше, є втрата кришталіком еластичності. У цьому випадку при напруженні ока кришталік або не стає округлішим (як це відбувається при нормальній акомодатії), або округляється недостатньою мірою й процес акомодатії порушується. Іноді зустрічається також гіперметропія, пов'язана з укороченою (сплюснутою) формою очного яблука. Для корекції гіперметропії необхідно збільшити оптичну силу ока. Це досягається шляхом використання збірних лінз.

При астигматизмі кривизна заломлюючих поверхонь ока неоднакова в різних меридіанних площинах, наприклад, у

вертикальній і горизонтальній. У результаті промені, що падають на око в різних площинах, фокусуються по-різному, й на сітківці утворюється розмите зображення. Для корекції астигматизму використовують циліндричні лінзи, що мають кривизну тільки в одній з меридіанних площин і тим самим забезпечують однаковість заломлення променів, що падають на око в різних площинах. Відзначимо, що астигматизм порівняно легко коригується при простому астигматизмі, тобто тоді, коли площини максимальної і мінімальної кривизни взаємно перпендикулярні. Якщо ж ці площини не перпендикулярні, то говорять про косий астигматизм й підібрати лінзи для корекції зору в цьому випадку значно складніше.

Світлосприймаючу систему ока утворюють зорові клітини (рецептори), що знаходяться на сітківці. У людини є два види зорових клітин, які різняться за формою, що й знайшло відображення в назвах цих клітин - *палички* та *колбочки*. Паличок на сітківці близько 130 млн., а колбочок - близько 7 млн. Палички та Колбочки розподілені на сітківці нерівномірно. У *жовтій плямі* (12 на рис. 4.2) - ділянці сітківки, на якій фокусується зображення предмета, що розглядається людиною, - знаходяться в основному колбочки, причому в центральній частині жовтої плями знаходяться тільки колбочки. При віддаленні від жовтої плями до периферії сітківки частка колбочок серед зорових клітин зменшується, а частка паличок зростає. Зорових рецепторів немає тільки в тій ділянці сітківки, де в око входить зоровий нерв (9 на рис. 4.2). Ця ділянка називається *сліпою плямою* (11 на рис. 4.2). Лінія, що проходить через оптичний центр кришталика й центр жовтої плями, називається *зоровою віссю* (O'O' на рис. 4.2). Зорова вісь утворює з головною оптичною віссю ока кут приблизно в 5° .

Колбочки забезпечують здатність ока розрізняти кольори, але мають не дуже високу світлочутливість, тобто потребують для своєї роботи достатньо яскравого (денного) світла. Таким чином, колбочки утворюють апарат кольорового (хроматичного) денного зору. Палички, на відміну від колбочок, не дають можливості розрізняти кольори, але мають вищу світлочутливість. Вони досить добре працюють у сутінках при слабкому освітленні, при якому колбочковий апарат не працює.

Таким чином, палички утворюють апарат ахроматичного сутінкового зору. Максимум загальної чутливості колбочок лежить в жовто-зеленій частині спектра й відповідає світлу з довжиною хвилі 555 нм. Це пов'язано з тим, що спектр сонячного випромінювання, що досягає поверхні Землі, також має максимум в цій ділянці довжин хвиль. Максимум чутливості паличок відповідає світлу з довжиною хвилі в 510 нм. Це пов'язано з тим, що палички відіграють головну роль в сприйнятті світла в сутінках, коли освітлення забезпечується світлом, розсіяним верхніми шарами атмосфери, а спектр розсіяного випромінювання зміщений у бік менших довжин хвиль у порівнянні із спектром світла, що проходить.

Здатність людини розрізняти кольори пов'язана з тим, що в нормальному оці на сітківці є три групи колбочок, максимумами, чутливості яких відповідають довжинам хвиль 445, 535 та 570 нм, тобто відповідають синій, зеленій та червоній частинам спектра. Розпізнавання кольорів мозком здійснюється відповідно до того, наскільки сильно збуджена та або інша група колбочок. Порушення роботи однієї з груп колбочок викликає таке захворювання, як дальтонізм. При цьому людина не розрізняє, наприклад, червоний і зелений кольори.

Око регулює кількість світла, що потрапляє на сітківку, оскільки для нормальної роботи зорових клітин їх освітленість повинна лежати в певних межах. Здатність ока пристосовуватися до бачення за різних яркостей світла називається *адаптацією*. Адаптація здійснюється за рахунок таких трьох механізмів: 1) зміна діаметра зіниці в межах від 2 до 8 мм; 2) зміна концентрації світлочутливої речовини, яка міститься в зорових рецепторах, і розщеплювання якої викликає збудження рецепторів; 3) екранування колбочок і паличок темним пігментом, що знаходиться в судинній оболонці й здатний в процесі адаптації переміщатися у напрямку склоподібного тіла.

Розмір зображення предмета на сітківці визначається *кутом зору*, тобто кутом, утвореним променями, що йдуть від країв предмета та проходять через оптичний центр ока. Око може побачити предмет, якщо кут зору не менший деякого мінімального значення, оскільки для того, щоб дві точки

предмета розрізнялися оком як дві різні точки, необхідно, щоб промені від цих точок потрапляли на дві різні колбочки. Таким чином, існує *найменший кут зору*, який для нормального ока дорівнює $1'$. Кут зору в $1'$ відповідає двом точкам, що віддалені одна від одної на 70 мкм та знаходяться на відстані найкращого зору від ока. Тому відстань в 70 мкм вважають за *межу розрізнення ока*.

Здатність ока розрізняти (бачити як окремі) різні точки предмета називають *роздільною здатністю* ока. Роздільна здатність ока тим більша, чим менша його межа розрізнення, тобто чим менше найменший кут зору. У медицині для характеристики роздільної здатності ока використовують таке поняття, як *гострота зору*. У нормі (тобто при найменшому куті зору, що дорівнює $1'$) гострота зору дорівнює одиниці. У загальному випадку гострота зору у людини дорівнює відношенню найменшого кута зору нормального ока до найменшого кута зору у цієї людини.

Розглянемо тепер власне молекулярні механізми зорової рецепції.

Електронно-мікроскопічні дослідження зорових рецепторів (паличок та колбочок) показують, що їхні зовнішні сегменти мають шарувату структуру, що є як би стопкою дисків, кількість яких досягає декількох сотень. Кожен диск складається із здвоєної білково-ліпідної мембрани, з'єднаної по краях. Диски утворюються шляхом випинання клітинної мембрани всередину сегмента. У результаті такого процесу міждисккові проміжки відповідають цитоплазмі клітини й мають високий вміст калію, а внутрішньодисккові проміжки є замкнутими ділянками зовнішнього середовища, багатого натрієм. Отже, зовнішні сегменти фоторецепторів - це структури, що є багаторазовим повторенням ділянок з градієнтом концентрацій K^+ та Na^+ . Цей градієнт підтримується процесами активного транспорту за участю Na^+ - K^+ - АТФ-ази. За рахунок утворення дисків ефективна світлочутлива поверхня фоторецептора зростає в багато разів, що обумовлює високу ймовірність її взаємодії з квантами світла.

Дослідження, виконані за допомогою мікроелектродної техніки, показали, що при дії світла у фоторецепторах формуються генераторні потенціали (багато авторів називають їх рецепторними потенціалами, а генераторними називають потенціали в нервових закінченнях), величина яких пропорційна інтенсивності світла, що діє на рецептори. Услід за появою генераторних потенціалів виникають імпульси в нервових волокнах.

На даний час твердо встановлено, що сприйняття світла починається з його поглинання молекулами світлочутливих пігментів - білків, які знаходяться в зовнішніх сегментах паличок та колбочок. Усі світлочутливі білки є хромопротеїдами. Вони складаються з хромофора ретиналю (альдегіду вітаміну А) та молекули білка опсину. Таким чином, усі зорові пігменти містять одну й ту ж групу - ретиналь - та відрізняються хімічним складом і структурою своєї білкової частини - опсином. Згідно з останніми даними, практично весь (92-95%) білок фоторецепторної мембрани є опсином.

У паличках всіх видів тварин виявлений зоровий пігмент родопсин, а в колбочках багатьох тварин знайдені пігменти йодопсин, цианопсин тощо. Найбільш вивченим нині є родопсин. Біохімічні дослідження та дані електронної мікроскопії дозволяють припускати, що молекули родопсину покривають зовнішню поверхню дисків з обох боків і становлять близько половини всіх білків зовнішнього сегменту. Допускають можливість його локалізації і на внутрішній поверхні дисків.

З'єднання опсину з ретиналем здійснюється тільки в тому випадку, якщо останній знаходиться у вигляді «зігнутої» цис-форми. Незначна зміна в структурі хромофора перешкоджає утворенню родопсину. Було показано, що елементарний зоровий акт починається з поглинання молекулою пігменту кванта електромагнітного випромінювання. При цьому електрони в молекулі ретиналю переходять з основного рівня на збуджений. У результаті поглинання енергії кванта відбувається процес ізомеризації: ретиналь із «зігнутої» цис-форми перетворюється на повністю «випрямлену» транс-форму. Вуглеводневий ланцюг повністю випрямляється. Внаслідок

трансїзомеризації ретиналь не може «вкладатися» у відповідну «нішу» опсину, що призводить до послаблення зв'язку між молекулою ретиналю та опсином. Кінцевим результатом реакції фотоїзомеризації є розпад родопсину на ретиналь та опсин. При цьому відбувається вицвітання родопсину - він з рожевого стає жовтуватим, а потім безкольоровим.

Розпад родопсину на ретиналь та опсин спричиняє збудження рецепторної клітини. У подальших стадіях здійснюється підготовка до наступного сприйняття квантів світла. При цьому ретиналь, що звільнився, спочатку відновлюється в ретинол - одну з форм вітаміну А. Ретинол під дією ферменту ретиненїзомерази через ряд стадій знову перетворюється на цис-їзомер.

Необхідно відзначити, що в процесі фотохімічних реакцій родопсину відбуваються не тільки зміни структури ретиналю, але й істотні зміни структури білкової частини молекули - опсину.

Останнім часом багатьма авторами було доведено, що перетворення йодопсину колбочок на світлі та у темряві в основному співпадають з перетвореннями родопсину паличок.

Припускається, що при розпаді родопсину під дією світла трансїзомер ретиналю, що звільняється, реагує з позитивно зарядженими аміногрупами фосфоліпідів мембрани фоторецептора. Блокування аміногруп фосфоліпідів робить мембрану більш негативно зарядженою, що приводить до різкого підвищення проникності мембрани для протилежно заряджених катіонів. Підвищення іонної проникності мембрани викликає появу генераторного потенціалу, який активує холінергічний механізм у синапсі та викликає збудження нервових клітин. У фазі відновлення ретиналь звільняється від фосфоліпиду, реїзомерізується в цис-форму та з'єднується з опсином. Іонні градієнти відновлюються в результаті процесів активного перенесення іонів.

Існує також припущення про те, що необхідна для збудження зміна проникності мембрани може бути викликана не тільки описаними процесами зміни заряду мембрани, але й зміною конформації молекул світлочутливих білків. Таким чином, молекулярні перетворення зорового пігменту можуть

розглядатися як пусковий механізм для збудження фоторецепторів.

Контрольні запитання та завдання до розділу

1. Опишіть структурні елементи та фізичні властивості біологічних мембран.
2. Назвіть та охарактеризуйте види пасивного транспорту крізь мембрани.
3. Запишіть та поясніть рівняння Фіка та Нернста-Планка.
4. Охарактеризуйте основні види та суть активного транспорту.
5. Запишіть та поясніть рівняння Гольдмана-Ходжкіна-Катца.
6. Поясніть механізми виникнення та поширення потенціалу дії.

Розділ 6

ЕЛЕКТРОДИНАМІКА, ЇЇ МЕДИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ. ОСНОВИ МЕДИЧНОЇ АПАРАТУРИ

6.1. Поняття про електрографію органів і тканин

Робота більшості важливих органів людини пов'язана з електричними явищами, які виникають унаслідок генерації потенціалів дії на мембранах клітин. При цьому в різних точках організму відбуваються зміни з часом електричних потенціалів. Електрична активність клітин, тканин, органів пов'язана з їхнім функціональним станом. **Реєстрація різниць потенціалів між певними точками організму лежить в основі електрографічних діагностичних методик**, з яких найвідомішою та найбільш розповсюдженою є методика *електрокардіографії* (ЕКГ).

В основі біофізичної інтерпретації електричних явищ, що пов'язані з роботою серця, лежить модель, яку запропонував Ейнтховен – творець методики електрокардіографії.

Вивчення біофізичних основ електрографії вимагає

попереднього поглиблення знань студентів в галузі фізики електромагнітних явищ. Крім того, корисно згадати деякі фізичні поняття та формули, які вивчалися в школі.

Електричне поле – це вид матерії, який породжується електрично зарядженими тілами або змінним магнітним полем та виявляється за дією на заряджені тіла. Характеристикою зарядженого тіла є його заряд. Заряд тіла – це скалярна фізична величина. Від значення заряду тіла залежить величина електромагнітних взаємодій, у яких бере участь це тіло. Найважливішими характеристиками електричного поля є його напруженість (\vec{E}) та потенціал (φ).

Напруженість (\vec{E}) - це векторна фізична величина, яка є силовою характеристикою електричного поля. Напруженість у деякій точці електричного поля дорівнює відношенню сили (\vec{F}), яка в цій точці діє з боку поля на нерухоме точкове заряджене тіло, до його заряду (q), тобто

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}.$$

У СІ напруженість електричного поля вимірюється у вольтах на метр (В/м).

Потенціал (φ) - це скалярна величина, яка є енергетичною характеристикою електричного поля. Потенціал поля в деякій точці дорівнює відношенню потенціальної енергії (W), яку, знаходячись в цій точці, має нерухоме точкове заряджене тіло, до заряду цього тіла, тобто

$$\varphi = \frac{W}{q}.$$

Потенціал, як і напруга (різниця потенціалів), у СІ вимірюється у вольтах (В).

Напруженість поля пов'язана з його потенціалом співвідношенням

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi,$$

$$\text{тобто} \quad E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Таким чином, напрямок вектора \vec{E} збігається з напрямком найшвидшого зменшення потенціалу.

Тут і далі називатимемо точковим зарядом заряджене тіло, розмірами якого можна знехтувати. Напруженість електричного поля, яке створюється в деякій точці точковим зарядом q , обчислюється за формулою

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad (6.1)$$

де ϵ - діелектрична проникність середовища; ϵ_0 - електрична стала ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м), а r - відстань від точки, у якій визначається напруженість поля, до точки, у якій знаходиться заряд.

Потенціал поля, яке створюється в деякій точці точковим зарядом, обчислюється за формулою

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Якщо поле створюється декількома зарядами, то його характеристики (напруженість та потенціал) обчислюються, виходячи з *принципу суперпозиції полів*. Відповідно до цього принципу, напруженість електричного поля, створеного в деякій точці декількома зарядами, дорівнює векторній сумі напруженостей полів, створених у цій точці кожним із зарядів, а потенціал - алгебраїчній сумі потенціалів, створених кожним із зарядів, тобто

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots + \vec{E}_n;$$

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n,$$

де \vec{E} та φ - результуючі напруженість та потенціал поля, створеного в деякій точці n зарядами; $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \dots, \vec{E}_n$ - напруженості полів, створених у цій точці кожним із зарядів, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ - потенціали полів, створених у цій точці

кожним із зарядів.

Виходячи з принципу суперпозиції полів, можна обчислити характеристики поля, яке створюється різними системами зарядів. Найпростішою системою зарядів є **електричний диполь** - система, що складається з двох точкових однакових за модулем, але протилежних за знаком зарядів (+q та -q), які знаходяться на відстані ℓ один від одного. Вектор довжиною ℓ , проведений від негативного заряду диполя до позитивного, називається *плечем диполя*. Характеристикою електричного диполя є *дипольний момент*. Дипольний момент (\vec{p}) електричного диполя - це векторна величина, яка дорівнює добутку модуля одного із зарядів, що утворюють диполь, на плече диполя, тобто

$$\vec{p} = q \cdot \vec{\ell}.$$

Використовуючи принцип суперпозиції полів, можна показати, що потенціал поля, створеного диполем у точці, яка знаходиться на відстані r від центра диполя, у випадку, якщо $r \gg \ell$, обчислюється за формулою

$$\varphi = \frac{q \ell \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2} = \frac{p \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 \epsilon r^2}, \quad (6.2)$$

де θ - кут між прямою, проведеною від центра диполя до точки, у якій визначається потенціал (точка А на рис. 6.1), та вектором дипольного моменту.

Електричні явища в організмі людини пов'язані з протіканням електричних струмів у тканинах організму, які є здебільшого середовищами, що добре проводять електричний струм. Основними характеристиками струмів є сила (I) та густина струму (j).

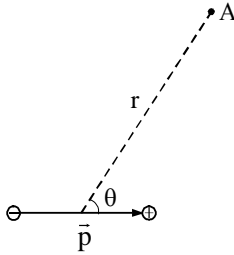


Рис. 6.1

Якщо через провідник протікає струм, то сила струму - це відношення заряду (q), який проходить через поперечний переріз провідника за деякий проміжок часу (t), до цього проміжку, тобто

$$I = \frac{q}{t}.$$

У СІ сила струму вимірюється в амперах (А).

Густина струму - це відношення сили струму, який протікає через поперечний переріз провідника, до площі цього перерізу (S), тобто

$$j = \frac{I}{S}. \quad (6.3)$$

Густина струму є векторною величиною, яка спрямована у напрямі протікання струму. Вона вимірюється в амперах на метр квадратний (A/m^2).

Здатність провідника проводити струм характеризується його опором (R). Опір провідника дорівнює відношенню напруги (U), прикладеної на кінцях провідника, до сили струму, який при цьому протікає в провіднику, тобто

$$R = \frac{U}{I}.$$

Опір провідника вимірюється в омах (Ом).

Опір провідника залежить від його довжини, товщини та від провідних властивостей матеріалу провідника. Ці провідні властивості матеріалу (середовища) можна охарактеризувати такими величинами, як *питомий опір* та *питома електропровідність (питома провідність)*.

У випадку циліндричного провідника

$$R = \rho \frac{\ell}{S},$$

де ℓ - довжина провідника; S - площа його поперечного перерізу; ρ - питомий опір матеріалу провідника ($\text{Ом} \cdot \text{м}$).

Питома електропровідність речовини (σ) - це величина, обернена до його питомого опору, тобто

$$\sigma = \frac{1}{\rho}.$$

З останньої формули зрозуміло, що питома електропровідність вимірюється в $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$.

Значення питомої електропровідності різних біологічних тканин для постійного струму наведені в таблиці 6.1.

Величини струмів, які протікають у середовищах, залежать від провідних властивостей цих середовищ і від напруженості електричного поля в них. Зв'язок між цими величинами встановлює закон Ома в диференціальній формі

$$j = \sigma E. \quad (6.4)$$

Таблиця 6.1

Біологічна тканина	Спино-мозкова рідина	Кров	М'язова	Нервова	Жирова	Шкіра (суха)	Кістка без надкісниць
Питома електропровідність $\sigma, \text{Ом}^{-1} \cdot \text{м}^{-1}$	1,8	0,6	0,5	$7 \cdot 10^{-2}$	$3 \cdot 10^{-2}$	10^{-5}	10^{-7}

Найпростішою моделлю струмових систем є відокремлене *точкове джерело струму*. Воно характеризується силою струму, який витікає з нього (або втікає в нього). Якщо струм витікає із точкового джерела струму, то таке джерело

називається *витоком*, якщо втікає - *стоком*. У першому випадку струм джерела вважається позитивним, а в другому - негативним.

Якщо точкове джерело струму знаходиться в нескінченному ізотропному провідному середовищі, то відповідно до формули (6.3), густина струму через поверхню сфери радіуса r , у центрі якої знаходиться джерело струму, дорівнює

$$\mathbf{j} = \frac{\mathbf{I}}{4\pi r^2}.$$

Підставляючи в цю формулу вираз для \mathbf{j} із закону Ома в диференціальній формі (формула (6.4)), можна отримати

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{I}}{4\pi\sigma r^2}.$$

Таким чином, залежність напруженості поля, що створюється відокремленим точковим джерелом струму, від r така сама, як і залежність напруженості поля, що створюється відокремленим точковим зарядом (див. формулу (6.1)). Можна показати, що для полів, які створюються іншими струмовими системами, формули для напруженостей та потенціалів подібні до формул для аналогічних систем зарядів. Різниця полягає в тому, що у формулах для напруженостей та потенціалів полів струмових систем стоять величини \mathbf{I} та σ замість відповідно величин q та $\varepsilon_0\varepsilon$ у формулах для напруженостей та потенціалів полів систем заряджених тіл.

Розглянемо **струмовий диполь**, тобто систему з двох точкових джерел струму (витоку та стоку), сили струмів яких рівні за модулем і які знаходяться на відстані ℓ один від одного. Характеристиками такого диполя є сили струму точкових джерел, плече диполя (вектор довжиною ℓ , проведений від стоку до витоку), момент струмового диполя (дипольний момент), модуль якого (D) обчислюється за формулою

$$\vec{D} = \mathbf{I} \vec{\ell}. \quad (6.5)$$

Виходячи з відзначеної раніше аналогії між зарядовими та

струмовими системами й беручи до уваги формули (6.2) та (6.5), для потенціалу поля, яке створюється струмовим диполем, можна записати

$$\varphi = \frac{I \ell \cos \theta}{4 \pi \sigma r^2} = \frac{D \cos \theta}{4 \pi \sigma r^2}. \quad (6.6)$$

Доведено, що потенціал поля, яке створюється довільною системою струмів, може бути представлений у вигляді ряду

$$\varphi = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r^3} + \frac{D}{r^4} + \dots, \quad (6.7)$$

де A, B, C, D, ... - деякі коефіцієнти. Таке подання потенціалу поля, створеного системою струмів, називається *мультипольним розкладом*.

Якщо система струмів скомпенсована, тобто сила струмів, які витікають з витоків, дорівнює силі струмів, які втікають у стоки, то у формулі (6.7) $A = 0$, і ця формула має такий вигляд:

$$\varphi = \frac{B}{r^2} + \frac{C}{r^3} + \frac{D}{r^4} + \dots$$

Зі збільшенням r кожний з наступних членів цього ряду зменшується швидше, ніж попередній, тому при досить великих r значущим виявляється тільки перший доданок цього ряду -

$\frac{B}{r^2}$. З іншого боку, саме таку залежність потенціалу поля від r

має струмовий диполь (див. формулу (6.6)). Звідси роблять такий висновок: якщо потенціал поля, яке створюється складною скомпенсованою системою струмів, визначається на досить великих відстанях від цієї системи, то таку систему можна з достатньою точністю вважати струмовим диполем.

Спираючись на викладене вище, можна перейти до розгляду теорії Ейнтховена. Спочатку теорія Ейнтховена (перша концепція) ґрунтувалася на уявленнях про те, що серце є електричним диполем, розміщеним в однорідному діелектричному середовищі, тобто струми в такому середовищі відсутні. При цьому вважалось, що збуджена ділянка міокарду заряджається негативно по відношенню до незбудженої ділянки

серця, а розподіл електричного потенціалу в просторі є ідентичним до такого, який створює електричний диполь.

Насправді ж, під час роботи серця через мембрани клітин міокарда протікають іонні струми, пов'язані з генерацією потенціалів дії. Ці струми утворюють складну, але скомпенсовану струмову систему. Тому, якщо вимірювати потенціали поля цієї системи струмів у точках, віддалених від серця на відстані, що значно більші за розміри серця, то можна вважати, що це поле створюється якимось струмовим диполем. Іншими словами, у зазначеному випадку серце можна вважати струмовим диполем.

У зв'язку з цим, Ейнтховеном була запропонована нова (друга) концепція (модель) теорії електрокардіографії. Основні постулати цієї моделі можна сформулювати так:

1. Серце є струмовим диполем. Збуджена ділянка міокарда заряджена негативно відносно незбудженої ділянки. Такий перерозподіл зарядів, як було показано вище, можна розглядати як струмовий диполь та характеризувати моментом струмового диполя (\vec{D}), який часто називають *інтегральним електричним вектором серця*.

2. Диполь знаходиться в однорідному ізотропному провідному середовищі, що з достатньою точністю виконується для тканин організму. Протягом серцевого циклу вектор дипольного струмового моменту серця (\vec{D}) змінюється за величиною та напрямком. Вважають, що його початок є нерухомим і знаходиться в синатріальному (синусному) вузлі серця. Кінець цього вектора протягом серцевого циклу описує складну просторову криву, проекція якої на фронтальну площину утворює за час серцевого циклу три петлі.

Ейнтховен запропонував вимірювати електричні потенціали, що пов'язані з роботою серця та змінюються з часом, у таких трьох точках: кисть правої руки, кисть лівої руки, ліва стопа (точки А, В та С на рис. 6.2 відповідно). Таке розміщення точок реєстрації потенціалів обумовлене найпростішою моделлю електричної активності серця, яка розглядає серце як струмовий диполь, розташований у центрі правильного трикутника, вершинами якого є точки А, В та С.

Цей трикутник називається *трикутником стандартних відведень*.

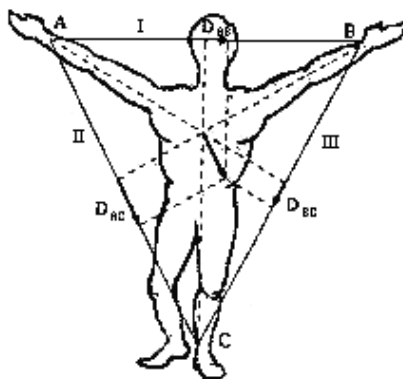


Рис. 6.2

Різниці потенціалів, що реєструються між точками А та В, А та С, а також В та С (U_{AB} , U_{AC} та U_{BC} відповідно) називаються різницями потенціалів у першому, другому та третьому стандартних відведеннях відповідно. У моделі Ейнтховена ці різниці потенціалів пропорційні величинам проекцій вектора дипольного моменту (\vec{D}), який є емпіричною моделлю серця, на відповідні сторони трикутника відведень, тобто $U_{AB} : U_{BC} : U_{AC} = D_{AB} : D_{BC} : D_{AC}$.

Внаслідок електричних процесів, що пов'язані з роботою серця, у кожному зі стандартних відведень реєструється досить складна залежність різниці потенціалів від часу, яка називається *електрокардіограмою*.

Зазвичай найсильнішим є сигнал, який реєструється у другому стандартному відведенні. Нормальна електрокардіограма, одержана в другому відведенні, має вигляд, показаний на рисунку 6.3.

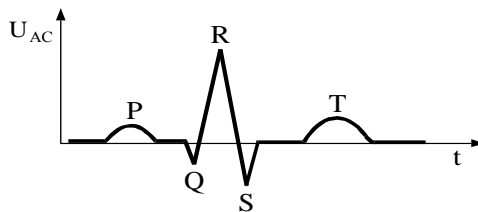


Рис. 6.3

Як видно з цього рисунка, на кардіограмі можна виділити типові піки (зубці), які прийнято позначати буквами P, Q, R, S, T. Із трьох петель, що описує кінець вектора \vec{D} серця протягом серцевого циклу, з першою петлею пов'язують зубець P, з другою - систему зубців QRS, а з третьою - зубець T.

Зубець P відображає електричні процеси, які викликають систолу (скорочення) передсердь, тобто він відображає проходження хвилі потенціалу дії по м'язових волокнах передсердь. Система зубців QRS обумовлена протіканням іонних струмів при генерації потенціалів дії в м'язових волокнах шлуночків, що є причиною їхньої систоли. Зазвичай максимальне значення різниці потенціалів, яке відповідає зубцю R у другому відведенні, становить величину порядку 1 мВ. Зубець T спостерігається під час діастолі (розслаблення міокарда) і відображає процеси реполяризації (відновлення попередніх потенціалів) мембран клітин міокарда. Ці процеси, головним чином, пов'язані з іонними струмами, які протікають через мембрани м'язових волокон при роботі в цих волокнах натрій-калієвого насоса.

Вимірювання різниць потенціалів у стандартних відведеннях дозволяє фіксувати зміни з часом не самого вектора \vec{D} , а тільки його проєкції на площину трикутника відведень.

Для того, щоб зареєструвати складову вектора \vec{D} , перпендикулярну до площини трикутника стандартних відведень, необхідні додаткові електроди, розташовані поза цією площиною. Ці міркування є біофізичним обґрунтуванням використання грудних відведень (див. рис. 6.4), які в діагностичній практиці використовуються для уточнення

характеру порушень роботи серця.

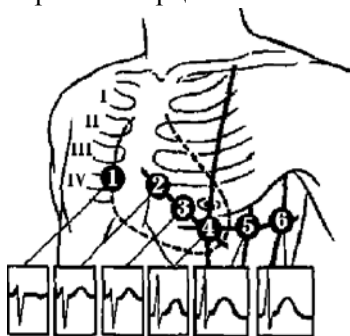


Рис. 6.4

З реєстрацією змін потенціалів, обумовлених роботою серця, пов'язана й така діагностична методика, як *вектор-кардіографія*. При вектор-кардіографії чотири електроди розміщують поблизу серця у двох взаємно перпендикулярних площинах (рис. 6.5). Різниці потенціалів, що реєструються протилежно розміщеними електродами, подаються на вертикально та горизонтально відхиляючі пластини електронно-променевої трубки (наприклад, осцилографа). При цьому на екрані можна спостерігати переміщення кінця вектора \vec{D} , який утворює три згадані вище петлі.

Аналіз та інтерпретація електрокардіограм та вектор-кардіограм у клініці базується на накопиченому кардіологами практичному досвіді. Кожна кардіограма порівнюється зі стандартними відомими кривими, відповідність яких до тих або інших відхилень від норми твердо встановлена на практиці. Легко ідентифікуються за ЕКГ аритмії, багато форм порушень збудливості серця. Виходячи з вигляду ЕКГ, можна встановити наявність інфаркту міокарда та його локалізацію. Важливу інформацію можна одержати й про інші відхилення у роботі серця.

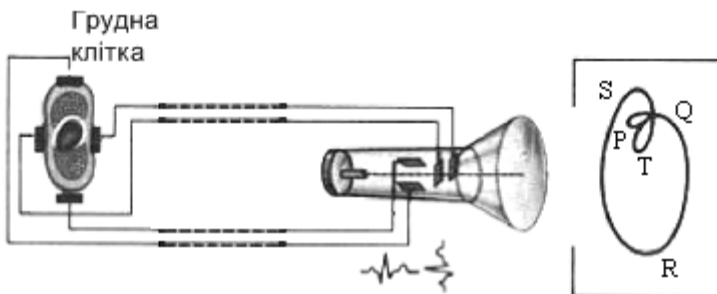


Рис. 6.5

На даний час у клінічну практику все ширше впроваджуються автоматизовані системи реєстрації та аналізу електрокардіограм, методи внутрішньопорожнинної електрокардіографії, програмувальної електричної стимуляції серця, тривалого моніторингу ЕКГ за Холтером, багатополюсна ЕКГ, проведення електрокардіографії в поєднанні з різноманітними навантажувальними тестами та ін.

Електричним методом, другим за частотою використання в клінічній практиці, є *електроенцефалографія* (ЕЕГ).

При ЕЕГ за допомогою електродів, закріплених у різних точках на голові пацієнта (кількість й розташування точок визначаються метою дослідження), реєструють різниці потенціалів, що змінюються з часом, які відображають електричну активність клітин головного мозку. Електроенцефалографія застосовується з метою діагностики різних видів патології центральної нервової системи, зокрема, травм мозку, епілепсії, психічних розладів, порушення сну. У випадку пухлин мозку ЕЕГ дає інформацію про локалізацію пухлини. Функціональна діагностика мозку може проводитися шляхом порівняння *електроенцефалограм* до й після прийняття пацієнтом певних лікарських препаратів.

Різниці потенціалів, що реєструються при ЕЕГ, у сотні разів слабкіші, ніж при електрокардіографії, та становлять величину в декілька мікрвольт. Тому реєстрація ЕЕГ є значно складнішим технічним завданням, ніж реєстрація ЕКГ. Вимірювання рекомендується проводити в приміщеннях, ізольованих від зовнішніх електричних впливів, які створюють

завади. Необхідно використовувати підсилювачі зі значно більшими, ніж при ЕКГ, коефіцієнтами підсилення. Необхідно вирішувати й деякі інші методичні проблеми. Електроенцефалограма має вигляд складних регулярних коливань з різними частотами та амплітудами. Коливання, які відносяться до певних діапазонів частот, називаються ритмами. Зокрема, можуть спостерігатися такі ритми: δ - ритм (0,5...3,5 Гц), θ - ритм (3,5...8 Гц), α - ритм (8...13 Гц), β - ритм (13...35 Гц), γ - ритм (більше 35 Гц). Виходячи з вигляду електроенцефалограм, з появи або зникнення певних ритмів, можна судити про характер та ступінь змін функціонального стану різних структур головного мозку.

З появою комп'ютерів, які мають великі обчислювальні можливості та порівняно низьку вартість, у медицині з'явилися комп'ютерні системи, у яких широко застосовується складна математична обробка результатів електрографічних вимірів. Це, у першу чергу, стосується методик електроенцефалографії та електрокардіографії, у яких почали широко використовувати багатоканальні діагностичні системи, що забезпечують:

а) вимірювання біоелектричних потенціалів одночасно у великій кількості точок на поверхні голови або грудної клітки пацієнта;

б) обчислювальну обробку результатів виміру з використанням різних математичних моделей;

в) подання остаточних результатів обчислень на екран монітора комп'ютера у вигляді топографічних мап із прив'язкою до анатомічних орієнтирів.

Такий спосіб відображення, який одержав назву «мапінг», дозволяє забезпечити надійнішу та точнішу діагностику порівняно з традиційною електроенцефалографією та електрокардіографією.

Значно рідше, ніж ЕКГ та ЕЕГ, використовуються інші електрографічні методики. Серед них слід відмітити реєстрацію потенціалів, створюваних сітківкою ока, - *електроретинографію* (ЕРГ), м'язами - *електроміографію* (ЕМГ), а також шкірою - *шкірногальванічну реакцію* (ШГР).

6.2. Фізичні та біофізичні основи реографії

Значна кількість діагностичних та терапевтичних методик, що використовуються у сучасній медицині, ґрунтується на ефектах, які виникають при впливі на тканини організму людини електричних струмів. Механізми дії цих струмів на тканини, а також явища, які спостерігаються при цьому, визначаються видом струму та електричними властивостями біологічних тканин.

Більшість біологічних тканин є провідниками. Тканинам притаманна іонна провідність, тобто тканини - це провідники другого роду. Важливою особливістю біологічних тканин є те, що вони мають ємнісні властивості. Внаслідок цього електричні властивості біологічних тканин для постійного струму відрізняються від таких для змінного струму. Через структури, що мають ємнісні властивості, тобто подібні до конденсаторів, постійний електричний струм не проходить взагалі, а змінний – проходить, причому тим краще, чим більшою є частота змінного струму.

При протіканні змінного струму через розчини електролітів фази напруги та сили струму співпадають і весь час відношення напруги до сили струму залишається сталим, тобто виконується звичайний закон Ома. Проте при протіканні змінного струму через такі електричні кола або середовища, що мають ємнісні властивості, фази напруги та сили струму не співпадають, внаслідок чого відношення напруги до сили струму не є сталим і змінюється за абсолютною величиною від нуля до нескінченності.

Говорять, що ті кола або середовища, в яких при протіканні змінного електричного струму фази напруги та сили струму співпадають, мають властивості активного опору, а ті, в яких ці фази відрізняються на $\pm \frac{\pi}{2}$, мають властивості реактивного опору. В загальному випадку різниця фаз напруги та сили струму може приймати різні значення, у діапазоні від $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$. Це означає, що такі середовища (або електричні

кола) мають як активну, так і реактивну складові опору. Ці складові прийнято позначати R та X відповідно.

Нагадаємо, що властивості реактивного опору мають котушки індуктивності та конденсатори. Якщо опір є тільки індуктивним, то він позначається X_L та обчислюється за формулою $X_L = \omega L$, де ω – циклічна частота змінного струму, а L – індуктивність котушки. У випадку котушки індуктивності з нехтовно малим активним опором струм відстає за фазою від напруги на $\frac{\pi}{2}$. Якщо ж опір є тільки ємнісним, то він

позначається X_C та обчислюється за формулою $X_C = \frac{1}{\omega C}$, де C – ємність конденсатора. Струм у конденсаторі випереджає за фазою напругу на $\frac{\pi}{2}$. За наявності у колі послідовно увімкннутих індуктивності та ємності загальний реактивний опір обчислюється за формулою $X = X_L - X_C$.

Як зазначалося вище, якщо ділянка кола містить реактивну складову, фази напруги на цій ділянці та сили струму в ній не співпадають. У цьому випадку для наочності вважається зручним при дослідженні процесів протікання змінних струмів через різні види електричних кіл використовувати так звані *векторні діаграми*. На таких діаграмах напруга та сила струму зображуються у вигляді векторів, модулі яких дорівнюють амплітудним значенням напруги та сили струму, а кут між цими векторами дорівнює різниці фаз напруги та сили струму. Наприклад, у випадку змінного струму, що протікає через електричне коло, яке містить активну та ємнісну реактивну складові, векторна діаграма має такий вигляд (рис. 6.6):

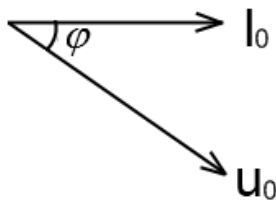


Рис. 6.6

На рисунку 6.6 U_0 та I_0 – амплітудні значення напруги та сили струму відповідно; кут φ – різниця фаз між силою струму та напругою.

Для постійного струму відношення напруги на кінцях деякої ділянки кола до сили струму у цій ділянці є сталою величиною, яка є опором цієї ділянки. У випадку протікання змінного струму через коло, що має як активну, так і реактивну складові, відношення напруги до сили струму змінюється з часом і не може вважатися опором. Тому для опису електричних процесів у таких колах використовується величина, що називається *повним опором*, або *імпедансом*. Цю величину зазвичай позначають Z . Важливе значення для подальшого викладення матеріалу має таке поняття, як *модуль імпедансу*. Модуль імпедансу ділянки кола дорівнює відношенню амплітуди напруги на кінцях цієї ділянки до амплітуди сили струму в ній, тобто

$$|Z| = \frac{U_0}{I_0}.$$

Важливо зазначити, що для кола, у якому активна (R) та реактивна (X) складові опору увімкнуті послідовно, величина модуля імпедансу може бути обчислена за формулою

$$|Z| = \sqrt{R^2 + X^2}.$$

Різницю фаз між силою струму і напругою іноді називають *кутом зсуву фаз*.

Розглянемо тепер докладніше електричні властивості біологічних тканин. Одразу ж зазначимо, що імпеданс є високоінформативним показником, що характеризує функціональний стан біологічних тканин, причому важливу

інформацію можна одержати, досліджуючи як величину модуля імпедансу, так і величину зсуву фаз.

Для біологічних тканин часто спостерігаються достатньо великі значення різниці фаз між силою струму і напругою. Це свідчить про те, що внесок ємнісного опору в повний опір біологічних об'єктів є значним.

Ємнісні властивості біологічних тканин пов'язані, у першу чергу, із клітинними мембранами, які, маючи діелектричні властивості, розділяють два провідні середовища (внутрішньоклітинний вміст та міжклітинне середовище), тобто є аналогами діелектричного шару в конденсаторах.

Зазначимо, що клітинні мембрани мають досить велику поверхневу ємність: $\approx 0,5 \cdot 10^{-2}$ Ф/м². Пробій мембрани відбувається при напрузі $\approx 150 \dots 200$ мВ, яка відповідає напруженості електричного поля $\approx 10^6 \dots 10^7$ В/м. Ємнісні властивості організму пов'язані також з тим, що є тканини, які погано проводять постійний струм, наприклад, суха шкіра.

Індуктивністю біологічних об'єктів як правило нехтують.

Як теоретичні міркування, так і експериментальні дослідження визначають спадний характер залежності модуля імпедансу біологічних тканин від частоти змінного струму. Типовий вигляд графіків залежності модуля імпедансу від циклічної частоти струму показаний на рис. 6.7.

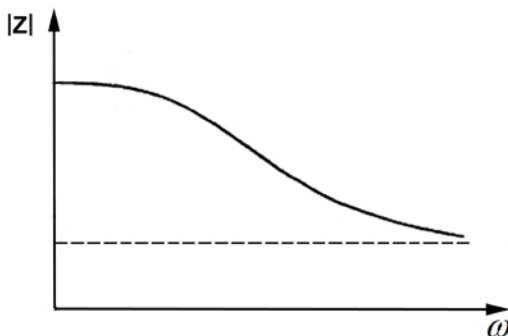


Рис. 6.7

З цього рисунку видно, що при збільшенні частоти модуль імпедансу тканин зменшується, але не до нуля, а до деякого сталого значення. Зміна функціонального стану тканин змінює і графіки залежності $|Z|$ від ω , але спадний характер цієї залежності залишається.

Використовуючи резистори та конденсатори можна зібрати таке електричне коло, яке матиме залежність модуля імпедансу від частоти струму таку ж, яка показана на рис. 6.7. Найпростіше з таких кіл має схему, показану на рис. 6.8.

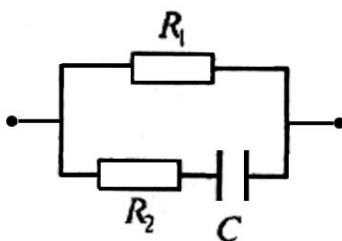


Рис. 6.8

Таке коло називають *електричним еквівалентом* біологічної тканини. Деталям, які містить це коло, можна дати таке трактування: резистор R_1 є аналогом міжклітинного середовища, резистор R_2 – аналогом внутрішньоклітинного вмісту, а конденсатор C – аналогом клітинних мембран.

При зміні фізіологічного стану та деяких патологічних процесах може змінюватись співвідношення між активною та реактивною складовими імпедансу тканин, що може використовуватись при діагностиці різних захворювань. Наприклад, при запаленні на перших стадіях спостерігається збільшення активного (омічного) опору тканин. Зворотній ефект спостерігається на ранніх стадіях онкологічних захворювань.

Для оцінки функціонального стану тканин при вимірюваннях імпедансу може обчислюватись так званий *коефіцієнт дисперсії* (K), який дорівнює відношенню модуля імпедансу при низьких (10^2 - 10^4 Гц) частотах ($Z_{нч}$) до модуля імпедансу при високих (10^6 - 10^8 Гц) частотах ($Z_{вч}$):

$$K = \frac{Z_{нч}}{Z_{вч}}.$$

Функціональним критерієм є також частотна залежність тангенса кута зсуву фаз. Вона дає уявлення про зміни співвідношення між величинами активного і реактивного опорів.

Так, наприклад, як вказувалось раніше, при запаленні на перших стадіях, спостерігається збільшення активного опору тканин. Цей ефект обумовлений тим, що струм низької частоти йде переважно через міжклітинну рідину, яка володіє суто омичним опором. При запаленні клітини набухають і переріз міжклітинних ділянок зменшується, що й призводить до підвищення омичного опору. Ємнісний опір при цьому практично не змінюється, оскільки не змінюється структура клітин. Відомо також, що за незмінного ємнісного опору збільшення омичного опору свідчить про набухання клітин, а зменшення омичного опору, навпаки, свідчить про зменшення об'єму клітин. Протилежний ефект збільшення ємнісного опору по відношенню до активного, спостерігається на ранніх стадіях онкологічних захворювань і пояснюється перетворенням нормальних клітин у ракові, що супроводжується появою молодих клітин ємнісний опір яких вище за ємнісний опір старих клітин.

Імпеданс кровоносних судин залежить від їх кровонаповнення, а отже, він характеризує діяльність серцево-судинної системи. На вимірюванні імпедансу базується діагностичний метод дослідження центральної та органної (тканинної) гемодинаміки, який називають *реографією* (*імпеданс-плетізмографією*). В основі реографічних методик лежить явище зміни величини імпедансу ділянки біологічної тканини при зміні кровонаповнення судин тканини.

При реографії найчастіше використовується змінний струм частотою 30 кГц. При цьому використовуються сили струму, амплітуди яких менші за граничне значення, тобто такі струми, які не викликають подразнення збудливих тканин.

При реографії головного мозку одержують реоенцефалограми, при реографії серця - реокардіограми. При

реографії можна також проводити дослідження магістральних судин легенів, печінки та кінцівок, а в стоматології - судин пародонта, слизової оболонки порожнини рота, слинних залоз та ін.

У стоматології також використовується методика, подібна до реографії, яка називається *реодентографією*. При реодентографії оцінюють стан пульпи зуба. Для цього використовують змінний струм частотою 0,5...1 МГц.

6.3. Магнітні явища. Елементи магнітобіології

На початку цього підрозділу нагадаємо деякі основні поняття та закони, що стосуються магнітних явищ.

Магнітне поле - це вид матерії, який породжується зарядженими тілами, що рухаються, (електричними струмами) або змінним електричним полем та проявляється дією на заряджені тіла, що рухаються, (електричні струми).

Спрямований (упорядкований) рух електричних частинок – це електричний струм. Виходячи з визначення магнітного поля, зрозуміло, що на провідник зі струмом, поміщений у магнітне поле, з боку цього поля діє сила (сила Ампера). Для прямолінійної ділянки провідника зі струмом ця сила прямо пропорційна величинам сили струму та довжини ділянки провідника. Вона також залежить від орієнтації провідника в магнітному полі. При певному положенні прямолінійної ділянки провідника зі струмом сила, яка діє на нього з боку магнітного поля, має максимальне значення (F_{\max}). Відношення цієї сили до добутку сили струму (I) в ділянці провідника на довжину (ℓ) цього провідника залежить тільки від властивостей поля і є характеристикою цього поля. Така характеристика називається індукцією магнітного поля, або магнітною індукцією (B). Отже,

$$B = \frac{F_{\max}}{I\ell}.$$

Магнітна індукція вимірюється в теслах (Тл). Магнітна індукція – це векторна величина. За останньою формулою визначається значення модуля магнітної індукції. Напрямок вектора магнітної індукції, напрямок сили струму в ділянці

провідника та напрямок сили Ампера пов'язані між собою правилом лівої руки, відомим зі шкільного курсу фізики. Вектор \vec{B} завжди перпендикулярний до вектора сили Ампера. Для характеристики просторового розподілу магнітного поля використовується поняття ліній магнітної індукції. Лінія магнітної індукції - це лінія, по дотичній до якої в кожній її точці спрямований вектор магнітної індукції.

При довільній орієнтації прямолінійної ділянки провідника зі струмом відносно ліній магнітної індукції сила Ампера (F_A) обчислюється за формулою:

$$F_A = IB\ell \sin \alpha ,$$

де α - кут між напрямком вектора \vec{B} та напрямком протікання струму в провіднику.

Якщо в магнітне поле поміщений плоский контур, яким протікає електричний струм, то сили Ампера, які діють на різні ділянки контуру, спрямовані по-різному. Однак загальна сила Ампера, яка діє на контур зі струмом з боку однорідного магнітного поля, дорівнює нулю. Якщо вектор \vec{B} не перпендикулярний до площини контуру, то сили Ампера, які діють на різні ділянки контуру, не лежать у його площині та створюють обертаючі моменти, які обумовлюють орієнтуючу дію магнітного поля на цей контур зі струмом. Величина обертаючого моменту залежить від орієнтації площини контуру стосовно ліній магнітної індукції та досягає максимального значення в тому випадку, якщо вектор \vec{B} лежить у площині контуру. Тому поняття магнітної індукції може вводитися з використанням не максимальної сили, яка діє на ділянку провідника зі струмом у магнітному полі, а з використанням максимального обертаючого моменту (M_{\max}), який діє на плоский контур зі струмом. У цьому випадку

$$B = \frac{M_{\max}}{IS} ,$$

де S – площа поверхні, обмеженої контуром. Величину IS називають *магнітним моментом* (p), тобто $p = IS$. Точніше, $|\vec{p}| = IS$, оскільки магнітний момент є векторною величиною,

причому вектор \vec{p} спрямований вздовж нормалі до поверхні, обмеженої контуром. Одиниця виміру магнітного моменту називається ампер-квадратний метр ($A \cdot m^2$). У зв'язку зі сказаним вище останню формулу правильніше записувати у такому вигляді:

$$|\vec{B}| = \frac{|\vec{M}_{\max}|}{|\vec{p}|}.$$

Слід відмітити, що магнітний момент є характеристикою будь-яких замкнутих струмових систем, зокрема, систем заряджених частинок, які рухаються по замкнутих траєкторіях, та заряджених тіл, які обертаються. Магнітний момент елементарних частинок, ядер атомів, атомів та молекул прийнято виражати в специфічних одиницях, які називаються *атомний магнетон Бора* (μ_B) та *ядерний магнетон* (μ_γ).

Зокрема, $\mu_B = 0,927 \cdot 10^{-23} A \cdot m^2$.

Як зазначалося, сила, що діє з боку магнітного поля на провідник зі струмом, тобто на заряджені частинки, які утворюють електричний струм у провіднику, називається силою Ампера. Сила, що діє з боку магнітного поля на окрему заряджену частинку, що рухається в магнітному полі, називається силою Лоренца (F_L). Сила Лоренца обчислюється за формулою

$$F_L = qvB \sin \alpha,$$

де q – заряд частинки, що рухається, v – швидкість її руху, α – кут між напрямком вектора швидкості частинки та напрямком вектора \vec{B} . Напрямок сили Лоренца визначається за правилом лівої руки.

При розміщенні речовини в магнітному полі індукції B_0 магнітна індукція всередині цієї речовини (B), взагалі кажучи, відрізняється від B_0 . Магнітні властивості речовини характеризують за допомогою величини, яка називається *магнітною проникністю* (μ). За визначенням

$$\mu = \frac{B}{B_0}, \quad (6.8)$$

тобто, **магнітна проникність** показує, у скільки разів **індукція магнітного поля в речовині відрізняється від індукції магнітного поля у вакуумі**.

Залежно від значень величини μ усі речовини поділяються на діамагнетики, парамагнетики та феромагнетики. У діамагнетиків $\mu < 1$, у парамагнетиків $\mu > 1$, а у феромагнетиків $\mu \gg 1$.

Відмітимо, що до діамагнетиків відноситься вода, водень, азот та взагалі більшість компонентів органічних сполук. Парамагнітні властивості, наприклад, мають гемоглобін, а отже, і еритроцити, у яких він знаходиться.

Якщо говорити про феромагнетики, то важливо зазначити, що феромагнітні властивості мають не окремі атоми або молекули, а кристали або сукупності кристалів деяких речовин (залізо, нікель, кобальт та деякі сплави). Більше того, феромагнітні властивості притаманні цим речовинам не при будь-яких температурах. При нагріванні феромагнетиків до деякої температури (різної у різних феромагнетиків) вони втрачають феромагнітні властивості та перетворюються в парамагнетики. Ця температура називається *температурою Кюрі*, або *точкою Кюрі*.

Феромагнетики можуть намагнічуватися в магнітному полі та зберігати намагнічений стан після їхнього видалення з поля, яке намагнічує. Цими властивостями феромагнетиків обумовлене широке використання їх у техніці. Зокрема, феромагнетики використовуються для виготовлення значної частини сучасних носіїв інформації.

Механічні сили, які діють на феромагнітні тіла та постійні магніти, що поміщені в магнітне поле, знаходять різноманітні застосування в медицині. Так, магнітні поля використовуються для виправлення грудної клітки у дітей за допомогою спеціальних пристроїв; магнітні заглушки застосовуються для запобігання виділень зі штучного зовнішнього свища ободової кишки; за допомогою магнітного поля проводиться видалення феромагнітних порошин та ошукрок із ока або металевих предметів зі шлунка та ін.

Виходячи з визначення магнітної проникності (формула

(6.8)), можна зробити висновок, що величина $\frac{B}{\mu}$ не залежить

від властивостей речовини, поміщеної в магнітне поле, та є величиною, яка характеризує тільки магнітне поле. Це є підґрунтям для введення поряд з магнітною індукцією ще однієї фізичної величини, яка є характеристикою магнітного поля, – *напруженості магнітного поля* (\vec{H}). За визначенням

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu},$$

де μ_0 - магнітна стала ($\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м). Одиницею виміру напруженості магнітного поля є ампер на метр (А/м).

Як зазначалося вище, магнітне поле породжують заряджені частинки, що рухаються (електричні струми). Формула, яка дозволяє розрахувати напруженість (dH) магнітного поля, створюваного в деякій точці невеликою (точніше, нескінченно малою) ділянкою провідника довжиною $d\ell$, якою протікає електричний струм, називається *законом Біо-Савара-Лапласа* і має вигляд

$$dH = \frac{Id\ell \sin \alpha}{4\pi r^2},$$

де I – сила струму в ділянці провідника, r – відстань від цієї ділянки провідника до точки, у якій визначається напруженість магнітного поля, α - кут між напрямком струму в ділянці провідника та вектором, проведеним від цієї ділянки до точки, у якій розраховується величина H .

Як зазначалося вище, змінне магнітне поле породжує електричне поле. Це поле, діючи на заряджені частинки в провідниках, створює (індукує) в провідниках електричний струм (індукційний струм). **Поява індукційних струмів у провідниках, які поміщені у змінне магнітне поле, або які рухаються в постійному магнітному полі, називається явищем електромагнітної індукції.** Для кількісного опису цього явища вводиться поняття магнітного потоку. **Магнітний потік (Φ) через деяку плоску поверхню дорівнює добутку**

модуля вектора магнітної індукції (B) на площу (S) цієї поверхні та на косинус кута (α) між напрямком вектора \vec{B} та напрямком нормалі до поверхні, тобто

$$\Phi = BS \cos \alpha.$$

Магнітний потік вимірюється у веберах (Вб).

Якщо відбувається зміна магнітного потоку через поверхню, що обмежена провідним контуром, то в цьому контурі виникає електрорушійна сила (ЕРС), яка породжує індукційний струм. При цьому закон електромагнітної індукції має вигляд

$$\varepsilon_i = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}, \quad (6.9)$$

де ε_i - електрорушійна сила (ЕРС) індукції, $\Delta \Phi$ - зміна магнітного потоку через поверхню, обмежену контуром, за час Δt . Знак « - » у правій частині останньої формули обумовлений відомим зі шкільного курсу фізики правилом Ленца, яке визначає напрямок індукційного струму.

Якщо через провідний контур протікає електричний струм, то цей струм створює магнітне поле, причому лінії магнітної індукції цього поля пронизують поверхню, обмежену контуром. У цьому випадку явище електромагнітної індукції може проявлятися в тому, що зміна магнітного потоку через поверхню, обмежену контуром, приводить до виникнення ЕРС, яка перешкоджає зміні сили струму в контурі. Цей окремий випадок явища електромагнітної індукції називається самоіндукцією. Таким чином, **самоіндукція – це виникнення ЕРС індукції в контурі при такій зміні магнітного потоку через поверхню, обмежену контуром, що викликана зміною сили струму в контурі**. Виникаючу при самоіндукції ЕРС називають ЕРС самоіндукції.

Величина магнітного потоку (Φ), що створюється електричним струмом у контурі, через поверхню, обмежену цим контуром, прямо пропорційна силі струму (I). Тому можна записати

$$\Phi = LI, \quad (6.10)$$

де L - деякий коефіцієнт пропорційності, який називається індуктивністю контуру. Індуктивність вимірюється в генрі (Гн).

Використовуючи формули (6.9) та (6.10), можна одержати формулу обчислення ЕРС самоіндукції (ε_{is})

$$\varepsilon_{is} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

Унаслідок явища електромагнітної індукції в суцільних провідних середовищах (наприклад, розчинах електrolітів, біологічних тканинах), які знаходяться у магнітному полі, можуть виникати замкнуті індукційні струми (*вихрові струми*, або *струми Фуко*). Вихрові струми утворюються при переміщенні провідного тіла в магнітному полі або при зміні з часом індукції магнітного поля, у яке поміщене таке тіло. Сила вихрових струмів залежить від електричного опору тіла, а отже, від його питомого опору та розмірів. Зрозуміло, величини цих струмів залежать і від швидкості зміни індукції магнітного поля. У фізіотерапії вихрові електричні струми використовуються для нагрівання окремих частин тіла людини, про що докладніше розповідатиметься у наступному підрозділі.

Для того, щоб розуміти механізми впливу електромагнітних полів на біологічні об'єкти, вміти розраховувати характеристики цих впливів, треба спиратися на загальну теорію електромагнітних процесів, яка була розроблена Максвеллом. Саме Максвелл сформулював ідею про те, що магнітне поле може створюватися не тільки електричними струмами, але також і змінним електричним полем. Таке змінне електричне поле є аналогом струмів, які Максвелл назвав *струмами зміщення*. Густина струмів зміщення обчислюється за формулою:

$$j_{zm} = \frac{dD}{dt},$$

де D – індукція електричного поля, яка пов'язана з напруженістю електричного поля формулою: $D = \varepsilon \varepsilon_0 E$. Підкреслимо, що струми зміщення завжди існують тоді, коли відбуваються зміни електричного поля: і у вакуумі, і в провіднику, і в діелектрику.

Спираючись на результати експериментальних досліджень електромагнітних явищ та сформульоване ним припущення про існування струмів зміщення, Максвелл одержав чотири рівняння, які називаються рівняннями Максвелла і є теоретичним підґрунтям сучасної теорії електромагнітних явищ. Ці чотири рівняння можуть бути записані у такому вигляді:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t};$$

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho.$$

У цих рівняннях $\rho = \frac{dq}{dV}$ є об'ємною густиною заряду, а \vec{j} , як і раніше, є густиною струму.

Якщо записати рівняння Максвелла для однорідного нейтрального ($\rho = 0$) непровідного середовища зі сталими значеннями величин ϵ та μ , то з цих рівнянь можна отримати диференціальне рівняння, яке є відомим хвильовим рівнянням. Це свого часу дозволило Максвеллу зробити висновок про існування електромагнітних хвиль та обчислити швидкість поширення цих хвиль.

У найпростішому випадку плоскої електромагнітної хвилі, що розповсюджується вздовж осі OX , а вектори \vec{E} та \vec{H} спрямовані вздовж осей OY та OZ відповідно можна записати такі два хвильові рівняння:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2},$$

де v – швидкість поширення електромагнітної хвилі, яка описується останніми двома рівняннями. Величина v обчислюється за формулою:

$$v^2 = \frac{1}{\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}.$$

Розв'язок цих рівнянь може бути записаний у такому вигляді:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} + \varphi\right); \\ \vec{H} &= H_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} + \varphi\right),\end{aligned}$$

де E_0 та H_0 – амплітуди напруженостей електричного та магнітного полів відповідно; ω та λ – циклічна частота та довжина хвилі; φ – початкова фаза.

Взаємодія електромагнітних полів та біооб'єктів розглядатиметься головним чином у наступному підрозділі. У цьому підрозділі ми обговоримо тільки питання, пов'язані з впливом на біооб'єкти магнітного поля або постійного, або такого, що дуже повільно змінюється.

Проблема взаємодії магнітних полів і біооб'єктів містить у собі два аспекти, які одержали відповідно до прийнятої термінології різні назви (визначення), а саме:

- вивчення впливу на біологічні системи магнітних полів відносять до «магнітобіології»;
- галузь досліджень, зв'язаних з вивченням магнітних полів, створюваних самими організмами, називають «біомагнетизмом».

Розглядаючи питання магнітобіології, почнемо з того, що тканини людського організму значною мірою діамагнітні, подібно воді. Однак в організмі є й парамагнітні речовини, молекули та іони. Починаючи з 60-х років минулого сторіччя, потік інформації про вплив природних магнітних полів на біологічні об'єкти швидко збільшувався. Незважаючи на це, первинний механізм впливу магнітного поля на біологічні об'єкти остаточно не з'ясований.

Очевидно, первинними у всіх випадках є фізичні або фізико-хімічні процеси, серед яких найважливішими вважаються такі:

- а) орієнтація молекул у магнітному полі;
- б) зміна концентрацій молекул та іонів у неоднорідному магнітному полі;
- в) дія магнітного поля (сила Лоренца) на іони, які переміщуються разом з біологічною рідиною, що приводить до зміни траєкторій їхнього руху;
- г) перерозподіл зарядів у потоці, що спричиняє появу електричного поля (ефект Холла);
- д) чисто магнітні взаємодії феромагнітних речовин, які містяться в клітинах, з магнітним полем.

Вважається, що в магнітних полях відбувається зміна швидкості дифузії речовин у тканинах, швидкості та напрямку протікання ряду біохімічних реакцій, зміна структури води та ряд інших ефектів на субклітинному рівні. Існують дані як про стимуляцію, так і про пригнічення деяких процесів життєдіяльності в організмі внаслідок впливу магнітного поля. Лікувальний вплив на організм постійним або низькочастотним змінним магнітним полем називається *магнітотерапією*.

У 1975 році спочатку в мікроорганізмах, а потім й в організмах різних представників тваринного світу, включаючи людину, була виявлена феромагнітна речовина - магнетит (Fe_3O_4) та доведена її біогенна природа. Це обумовило якісно новий рівень досліджень, пов'язаних з вивченням механізмів впливу магнітних полів на біооб'єкти, а також механізмів виникнення магнітних полів у біосистемах. Створюється враження, що в багатьох організмів є своя «магнітна стрілка» у вигляді частинок магнетиту, завдяки чому вони можуть орієнтуватися в магнітному полі Землі.

Дослідження в цій галузі неможливі без знання основ геомагнетизму - науки про магнітне поле Землі. На даний час уже відомо, що геомагнітне поле дозволяє магніточутливим організмам не тільки орієнтуватися по сторонах світу, але й одержувати іншу важливу інформацію. Добові та інші коливання магнітного поля містять інформацію про географічну широту, пору року та добу, а локальні магнітні аномалії,

особливо океанічні, можуть бути орієнтирами на шляхах міграції тварин.

Серед різних збурювань магнітосфери найсильніший вплив на магнітне поле поблизу земної поверхні чинять магнітні бурі, які відбуваються внаслідок спалахів на Сонці (сонячної активності). Вони обрушують на верхні шари атмосфери потоки заряджених частинок високих енергій. Найбільша інтенсивність бурі триває від 2 до 12 годин. При цьому зміни напруженості магнітного поля поблизу земної поверхні досягають 5% від звичайних значень напруженості. Незважаючи на, здавалося б, малі зміни величини напруженості магнітного поля, магнітні бурі, як встановлено, впливають на організми, на фізіологію та поведінку людини. Відомо, що випадки госпіталізації у зв'язку з інфарктом міокарда, дорожньо-транспортні пригоди та аварії літаків, які відбулися з вини пілотів, виявляють стійку кореляцію з рівнем магнітної активності.

На даний час накопичено багато різних експериментальних даних про вплив магнітних полів на різні біологічні об'єкти. Так, є відомості про такі ефекти: загибель дрозофіл у неоднорідному магнітному полі, морфологічні зміни у тварин і рослин після перебування в постійному магнітному полі, орієнтація рослин і тварин у магнітному полі, вплив магнітного поля на нервову систему, зміни характеристик крові людини, поліпшення регенерації кісткової тканини при впливі слабких магнітних полів. Крім того, одержані дані про магніторецепцію різних тварин та людини й про зв'язок цього явища з магніторецепторами, які діють завдяки присутності в клітинах біогенних магнітних матеріалів.

Наразі намітився деякий прогрес у дослідженнях механізмів дії магнітного поля на біологічні системи, що стало можливим, завдяки успіхам у розробці лабораторних методик, які дозволяють виявляти й ідентифікувати дуже малі кількості (до 10^{-9} г) феромагнітних речовин, та розробці недорогих способів магнітного екранування.

Переходячи до біомагнетизму, почнемо з того, що індукція геомагнітного поля на поверхні Землі змінюється в межах приблизно від $2,4 \cdot 10^{-5}$ до $6,8 \cdot 10^{-5}$ Тл. За лабораторними

стандартами це поле досить слабе. З іншого боку, дослідники (1980 р.), вимірюючи індукцію магнітного поля, пов'язаного з генерацією потенціалів дії в ізольованому сідничному нерві жаби-бика одержали значення $B = 1,2 \cdot 10^{-10}$ Тл. Таким чином, щоб виявити зовнішні поля біологічних систем, останні повинні перевищувати рівень «магнітного шуму» у самій біосистемі.

Спочатку «біомагнетизмом» називали діагностичний напрямок у медико-біологічних дослідженнях, пов'язаний з реєстрацією надслабких магнітних полів, які породжуються біострумами. У деяких випадках індукцію таких полів вдається виміряти. Найвражаючі результати тут досягнуті в галузі нейромагнетизму та кардіомагнетизму. Так, наприклад, на основі реєстрації часової залежності індукції магнітного поля серця (біострумів серця) створений діагностичний метод – *магнітокардіографія*.

Оскільки магнітна індукція пропорційна силі струму, а сила струму за законом Ома пропорційна різниці потенціалів (біопотенціалів), то, загалом, магнітокардіограма несе ту ж інформацію, що й електрокардіограма. Однак магнітокардіограма може реєструватися безконтактним способом і на деякій відстані від біологічного об'єкта - джерела поля. У цьому її істотна перевага в порівнянні з методом ЕКГ. Розвиток магнітографії органів зв'язаний з технічними можливостями виміру досить слабких полів. Перспективи даних методик пов'язані зі створенням сквідів - високочутливих магнітометрів з надпровідними квантовими інтерферометричними датчиками.

Дослідження останніх років показали, що розмежовувати два напрямки “магнітобіологію” та “біомагнетизм” не зовсім коректно, тому що вони мають загальну природу, як це було показано при вивченні магніторецепції. Можливо, незабаром ми станемо свідками створення загальної теорії впливу магнітних полів на біооб'єкти, що буде основою нового якісного стрибка в створенні нових як терапевтичних, так і діагностичних методик.

6.4 Дія електричних струмів та електромагнітних полів на біологічні об'єкти

Механізм дії електричного струму на тканини залежить від того, який це струм. З урахуванням характеристик струмів і пов'язаних із цими струмами ефектів, прийнято окремо розглядати впливи на тканини *постійного, імпульсного та змінного* струмів.

При протіканні постійного струму в тканинах організму іони безупинно рухаються в одному напрямку. При цьому позитивні іони зміщуються в один бік та накопичуються в одних ділянках тканини, а негативні переміщуються в протилежний бік та накопичуються в інших ділянках тканини. Цим визначається **основний механізм дії постійного струму на тканини - зміна (у порівнянні зі звичайними значеннями) концентрацій іонів у різних частинах тканин.**

Відзначимо, що при протіканні в тканинах постійного електричного струму сила струму може істотно зменшуватися з часом, незважаючи на незмінність прикладеної напруги. Це явище пов'язане з тим, що внаслідок зміщення іонів та зміни їхніх концентрацій у різних частинах тканин в останніх виникає створене цими іонами поле, яке частково компенсує зовнішнє поле, тобто виникає ЕРС поляризації тканин, яка зменшує силу струму в них.

На використанні постійного електричного струму засновані такі терапевтичні методики, як *гальванізація та лікарський електрофорез*.

Гальванізацію проводять при напрузі 60...80 В. При цьому густина струму не повинна перевищувати 1 А/м^2 . Як апарат для гальванізації найчастіше використовують двопівперіодний випрямляч змінного струму, який дозволяє регулювати вихідну напругу та контролювати (вимірювати) силу створюваного струму. Для підведення струму до пацієнта використовуються електроди, зазвичай, з листового свинцю або станіолу. Між шкірою пацієнта та електродами розташовують гідрофільні прокладки, змочені водою або фізіологічним розчином. Застосування прокладок знижує опір шкіри (завдяки її зволоженню), поліпшує електричний контакт між електродами та тілом людини, а головне, - дозволяє уникнути припікаючої дії на шкіру пацієнта продуктів електролізу хлористого натрію, які виділяються на електродах (на катоді при цьому утворюються

луги, на аноді - кислоти).

Зміни в тканинах концентрацій різних іонів при протіканні постійного електричного струму викликають відповідні реакції організму, зокрема, **стимулюють кровообіг та лімфообіг, метаболічні процеси в клітинах**. Крім того, відзначаємо **підвищення збудливості нервових та м'язових клітин під катодом та її зниження під анодом**. Зменшення збудливості нервових клітин під анодом створює, зокрема, ефект місцевої аналгезії (знеболювання). Гальванізація може проводитися при лікуванні деяких нервових захворювань, бронхіальної астми та ін.

Лікарський електрофорез (електрофорез лікарських речовин) - це метод введення лікарських речовин через шкіру або слизові оболонки при підведенні до цих тканин постійного струму. Лікарський електрофорез проводиться в такий самий спосіб та за допомогою того самого апарату, що й гальванізація, але одна з гідрофільних прокладок змочується не водою, а розчином необхідної лікарської речовини. Електрофоретичне введення препаратів може використовуватися тоді, коли ліки, розчиняючись у воді, утворюють іони. При цьому аніони вводять пацієнтові, змочуючи лікарським розчином прокладку під катодом, а катіони - під анодом.

Електрофоретичний спосіб введення препаратів має ряд переваг перед іншими способами. Електрофорез не є травматичним, забезпечує локальний вплив у потрібному місці, ліки вводяться в іонній формі, яка звичайно й забезпечує терапевтичний ефект, а головне, - препарат при електрофоретичному введенні накопичується в підшкірній клітковині, звідки він повільно вимивається, чим забезпечується тривалий безперервний вплив препарату на патологічне вогнище.

Електрофорез може використовуватися також з діагностичною метою, наприклад, для розділення та виявлення білкових фракцій плазми крові, що є досить інформативним при діагностиці ряду захворювань.

Говорячи про явища, пов'язані з постійними струмами, згадаємо явище *гальванізму* в порожнині рота, яке може

спостерігатися, якщо якісь стоматологічні конструкції в порожнині рота виготовлені з різних металів. При цьому під впливом електролітів (слина, компоненти харчових продуктів) між металевими конструкціями виникає ЕРС, яка породжує перетікання невеликих гальванічних струмів. Ці струми поступово призводять до корозії металів, погіршуючи якість зроблених з них конструкцій.

Струми, які змінюються з часом, прийнято поділяти на імпульсні та змінні (говорячи про зміну струму, ми маємо на увазі зміну сили струму). **Говорячи про імпульсні струми, звичайно мають на увазі струми, що періодично, але не гармонічно (не синусоїдально), залежать від часу.** Разом з тим, у медицині можуть використовуватися й поодинокі імпульси електричного струму (електричні імпульси), тобто струми, які змінюються з часом, тривалість протікання яких невелика. **Змінним струмом зазвичай називають струм, який змінюється з часом за гармонічним законом, тобто струм, сила якого синусоїдально змінюється з часом.**

Електричні імпульси можуть мати різну форму (різну залежність напруги або сили струму від часу). Так, можуть використовуватися прямокутні, трикутні, трапецеєподібні та інші імпульси. Різноманітність форм імпульсів перешкоджає введенню універсальних, загальних для всіх форм імпульсів характеристик імпульсних струмів.

Для подальшого викладу матеріалу нам будуть необхідні такі характеристики імпульсів, як амплітуда, тривалість, *крутість фронту*. Під фронтом розумітимемо ділянку імпульсу, яка відповідає наростанню напруги або сили струму (передній фронт), та ділянку, яка відповідає їхньому спаданню (задній фронт, або зріз). Для імпульсів під амплітудою звичайно розуміють максимальне значення модуля напруги або сили струму (U_{\max} або I_{\max} відповідно). Тривалість імпульсу (τ) - це тривалість проміжку часу, протягом якого напруга або сила струму перевищує значення $0,1 \cdot U_{\max}$ або $0,1 \cdot I_{\max}$ відповідно. Для імпульсів напруги під крутістю фронту (s) розуміють величину:

$$s = \frac{0,8 \cdot U_{\max}}{\tau_{\phi}},$$

де τ_{ϕ} - тривалість проміжку часу наростання модуля напруги від $0,1 \cdot U_{\max}$ до $0,9 \cdot U_{\max}$ (для заднього фронту - спадання від $0,9 \cdot U_{\max}$ до $0,1 \cdot U_{\max}$) (див. рис. 6.9). Аналогічно вводиться це поняття для імпульсів сили струму.

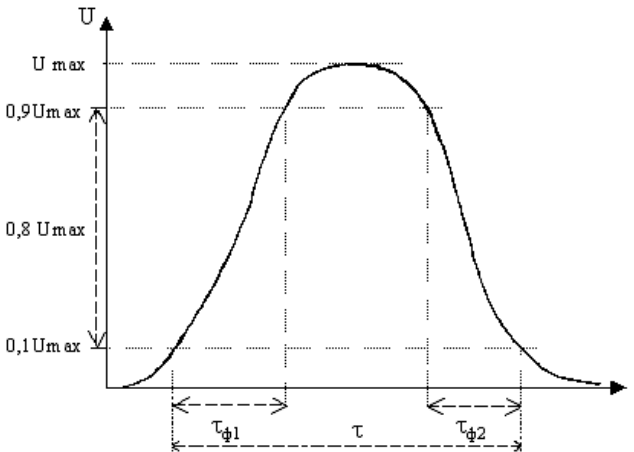


Рис. 6.9

Імпульсні струми також характеризуються періодом повторення імпульсів (T) та частотою імпульсів (ν), де $\nu = 1/T$.

При впливі імпульсного струму на тканину швидко зміна потенціалу в міжклітинній рідині може спричинити зниження мембранного потенціалу клітини до величини, при якій на мембрані клітини починається процес генерації потенціалу дії. Таким чином, **основним механізмом дії імпульсних струмів на біологічні об'єкти є подразнення збудливих тканин (до збудливих тканин відносять м'язову, нервову та залізисту тканини).**

Подразнювальна дія імпульсного струму залежить від його амплітуди та частоти, крутості й тривалості імпульсів.

Подразнення тканин, яке приводить до генерації клітинами тканин потенціалу дії, можливе тільки при не дуже малих амплітудах імпульсів. Тому існує мінімальна сила імпульсного струму, при якій спостерігається відповідна реакція (подразнення) тканин. Цю силу струму називають *пороговим струмом* (i_n).

Залежність подразнювальної дії імпульсних струмів від частоти проявляється при досить великих частотах. При цьому із збільшенням частоти імпульсів подразнювальна дія струму зменшується (зростає величина порогового струму).

Чим більша крутість фронту імпульсу, тим більша подразнювальна дія струму. Це прояв *закону Дюбуа-Реймона*, який формулюють так: **подразнювальна дія електричного струму прямо пропорційна швидкості наростання (спадання) сили струму.** Таким чином, подразнювальна дія струму прямо пропорційна величині похідної сили струму за часом. Оскільки швидкість наростання сили струму в імпульсі визначається крутістю фронту, можна вважати, що **подразнювальна дія імпульсного струму прямо пропорційна крутості імпульсу.**

При збільшенні тривалості імпульсу його подразнювальна дія на збудливі тканини наростає, тобто зменшується величина порогового струму. На цьому заснована *методика електродіагностики* - вивчення збудливих властивостей тканин шляхом визначення залежності величини порогового струму від тривалості імпульсу при подразненні тканини одиничними прямокутними імпульсами. Ця залежність (її графік показаний на рис. 6.10) описується *рівнянням* (іноді говорять, законом або формулою) *Хорвега-Вейса-Ланіка*:

$$i_n = \frac{a}{\tau} + b,$$

де a та b - деякі сталі.

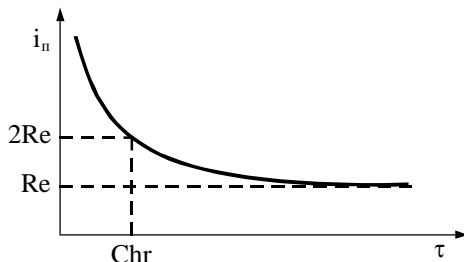


Рис. 6.10

Із графіка цієї залежності видно, що при зростанні тривалості імпульсу пороговий струм все менше залежить від τ та прямує до деякого граничного значення, яке в електрофізіології називають *реобазою* (Re). Таким чином, **реобаза дорівнює границі, до якої прямує пороговий струм, коли тривалість імпульсу прямує до нескінченності, тобто**

$$Re = \lim_{\tau \rightarrow \infty} i_n.$$

Іноді реобазу визначають як значення порогового струму, що реєструється при таких тривалостях імпульсу, при яких граничний струм перестає залежати від тривалості імпульсу.

Для характеристики збудливих властивостей тканин поряд з реобазою використовують таку величину, як *хронаксія* (Chr). **Хронаксія - це така тривалість імпульсу, при якій пороговий струм дорівнює подвійній реобазі.**

Значення параметрів a та b у рівнянні Хорвега-Вейса-Лапіка пов'язані зі значеннями реобазу та хронаксії. Використовуючи визначення реобазу та хронаксії, легко показати, що $b = Re$, а $a = Re \cdot Chr$. Отже, рівняння Хорвега-Вейса-Лапіка може бути записане у вигляді

$$i_n = Re \left(\frac{Chr}{\tau} + 1 \right).$$

Для збудливих тканин характерні певні значення реобазу та хронаксії. При різних патологічних станах ці параметри змінюються. Так, зменшення реобазу за незмінної хронаксії характерне для початку запальних процесів. Некротичні зміни в

тканинах супроводжуються підвищенням реобазиса та зменшенням хронаксії.

У стоматології електродіагностика використовується як електроодонтодіагностика, тобто визначення електрозбудженості нервових рецепторів пульпи. Для здорових зубів характерні значення порогового струму, які лежать у межах 2...10 мкА. Підвищена чутливість, при якій $i_n < 2$ мкА, характерна для початкової стадії пародонтозу, гіперстезії твердих тканин зуба, новоутворень щелепи. Зниження чутливості може свідчити про карієс ($i_n = 20...25$ мкА), ураження пульпи ($i_n = 30...100$ мкА), періодонтах ($i_n > 200$ мкА).

На використанні імпульсних струмів базуються такі терапевтичні методики, як *кардіостимуляція, дефібриляція, електрогімнастика м'язів, електросон*.

У нормі імпульси, які викликають скорочення серця, виробляються синусним (синатріальним) вузлом, який називається водієм ритму, та через провідну систему надходять на м'яз міокарда.

Якщо синусний вузол не виконує свою функцію або порушена робота провідної системи, необхідним є зовнішній водій ритму. Як зовнішній водій ритму зазвичай використовується *кардіостимулятор (електростимулятор)*, який носять або імплантують, та який є генератором електричних імпульсів із частотою 1...1,2 Гц та тривалістю 0,8...3 мс.

Дефібрилятори застосовують при зупинці серця або при виникненні фібриляції шлуночків серця, тобто неупорядкованих скороченнях окремих м'язових волокон внаслідок їхнього збудження одного одним. Дефібрилятор виробляє одиночні електричні імпульси (розряди) високої напруги, які викликають швидке сильне скорочення серцевого м'яза, що найчастіше приводить до відновлення нормальних скорочень серця. Зазвичай використовується напруга в декілька кіловольт (до 8 кВ), причому у випадку невдалої спроби "запустити" серце при наступних спробах збільшують напругу розряду.

Електрогімнастика м'язів підтримує м'язовий тонус, поліпшує кровообіг та обмін речовин в уражених м'язах або в

м'язів з порушеною іннервацією, підтримує їхню скорочувальну здатність. Для електрогімнастики використовують імпульсний струм з імпульсами трикутної форми тривалістю 1...1,5 мс та частотою 100 Гц або імпульси експоненціальної форми тривалістю 3...60 мс та частотою 8...80 Гц.

Електросон - це метод гальмування центральної нервової системи імпульсним струмом з імпульсами прямокутної форми, тривалість яких 0,1...1 мс, а частотою слідування – 5...150 Гц.

Змінний струм характеризується напругою, силою струму, амплітудним та діючим значеннями цих величин, частотою (а також пов'язаними з частотою величинами - циклічною частотою та періодом), фазою.

Залежно від частоти змінного струму можуть спостерігатися різні механізми дії струму на тканини. **При низьких частотах змінний струм, як й імпульсний, здійснює на збудливі тканини подразнювальну дію. При високих частотах, коли зміщення заряджених частинок у тканинах невеликі, переважає тепловий ефект, тобто виділення в тканинах теплоти внаслідок протікання струму.**

Змінний струм, як й імпульсний, викликає подразнення збудливих тканин тоді, коли сила струму не менша за пороговий струм. Величина порогового струму збільшується зі збільшенням частоти змінного струму (тобто подразнювальна дія змінного струму зменшується зі збільшенням його частоти). Залежність порогового струму від частоти визначається **законом Нернста**, відповідно до якого в діапазоні частот від 100 до 3000 Гц пороговий струм пропорційний кореню квадратному з частоти струму (тобто $i_{\text{п}} = k_1 \sqrt{\nu}$), а в діапазоні частот від 50 до 300 кГц пороговий струм пропорційний частоті струму (тобто $i_{\text{п}} = k_2 \nu$, де k_1 та k_2 - деякі сталі). У випадку змінного струму порогове значення струму називають також *порогом відчутного струму*.

Подразнювальна дія змінного струму на організм характеризується також *порогом невідпускаючого струму*. Якщо людина торкається рукою провідника, який перебуває під напругою, може відбутися скорочення м'язів, яке викликає захоплення рукою цього провідника. Мінімальне значення

сили струму, при якому людина не може самостійно розтиснути руку та звільнитися від провідника, що є джерелом цього струму, називають порогом невідпускаючого струму.

При дії на біологічні тканини змінних електромагнітних полів у тканинах виникають змінні електричні струми. При високих частотах змін цих полів (а отже, і струмів) починає позначатися інерційність носіїв струму в тканинах - іонів. При досить великих частотах іони коливаються, причому амплітуди їхніх зміщень невеликі. З іншого боку, при високих частотах важливу роль починають відігравати струми в діелектриках, що пов'язані з вимушеними коливаннями частинок (молекул, атомів, іонів), які утворюють діелектрик. Таким чином, при підвищенні частоти коливань електромагнітного поля зменшуються відмінності в характері руху заряджених частинок у провідниках та діелектриках.

Виділення тепла, яке відбувається в тканинах при протіканні через них змінного струму високої частоти, лежить в основі *діатермії*. Розрізняють *терапевтичну діатермію* та *хірургічну діатермію (електрохірургію)*, яка, у свою чергу, поділяється на *діатермотомію* та *діатермокоагуляцію*.

При діатермії *питома теплова потужність струму* (кількість теплоти, яка виділяється за 1 с в одиниці об'єму тканин при протіканні струму) обчислюється за формулою

$$q = j^2 \rho,$$

де q - питома теплова потужність; j - густина струму; ρ - питомий опір тканини, через яку протікає струм.

При терапевтичній діатермії використовується змінний струм частотою близько 1 МГц та силою струму 1...1,5 А. Струм підводять до пацієнта за допомогою металевих електродів з досить великою площею контакту з тілом пацієнта. Електроди повинні щільно прилягати до шкіри. Як видно з формули для питомої теплової потужності, велика кількість теплоти виділяється в тканинах з високими значеннями питомого опору. Це призводить до некорисного виділення великої кількості теплоти в шкірі. Крім того, терапевтична діатермія - це не цілком безпечна методика, тому що при порушенні щільного контакту електрода з поверхнею тіла

зменшення площі контакту призводить до збільшення густини струму, локального збільшення виділення тепла, що може викликати не прогрівання, а пропалювання шкіри. Унаслідок усього цього терапевтична діатермія зараз у лікувальній практиці не застосовується.

При *електрохірургії* використовується струм із частотою порядку 10 МГц. Застосовуються два електроди: один з великою площею контакту з тілом пацієнта, інший - з малою площею поверхні (гострий електрод). У місці дотику тіла гострим електродом утворюється висока густина струму та розвивається висока питома теплова потужність. Унаслідок цього при діатермокоагуляції ($j = 6 \dots 10 \text{ мА/мм}^2$) відбувається "заварювання" кровоносних судин. При діатермотомії ($j \approx 40 \text{ мА/мм}^2$) гострий електрод виконує роль електроножа (електроскальпеля), який, пропалюючи тканину, розсікає її. Діатермотомія зручна для хірурга тим, що метод практично безкровний, тому що одночасно з розсіченням тканини відбувається заварювання розсічених судин. Однак такі розрізи гояться значно гірше, ніж зроблені звичайним скальпелем.

При використанні деяких методик струм, який діє на пацієнта, є водночас і змінним, і імпульсним. Так, при *місцевій дарсонвалізації* на пацієнта впливають змінним струмом частотою 100...400 кГц, але підводиться він до пацієнта не безупинно, а імпульсами із частотою 50 Гц. При цьому використовуються напруги порядку 10 кВ. Особливістю методики є те, що струм підводиться до пацієнта за допомогою електрода, який має дуже великий опір (зазвичай це або пустотілий, або заповнений графітом скляний електрод). Коли такий електрод наближається до шкіри пацієнта, між ним і шкірою проскакує іскорка, тобто появляється струм. Однак при протіканні струму на скляному електроді падає велика напруга, що приводить до різкого зменшення напруги між шкірою та електродом. Розряд (іскорка) гасне, струм припиняється, і між шкірою та електродом знову виникає велика напруга. Це знову породжує наступний розряд тощо. Місцева дарсонвалізація створює місцеву подразнювальну дію на нервові закінчення в шкірі, що стимулює кровообіг у ділянках шкіри, які підпадають під вплив, та викликає ряд інших корисних реакцій.

Електричні струми в тканинах можна збуджувати й без використання електродів. При розміщенні тканин (частин тіла) у змінному електромагнітному полі в них виникають змінні струми. Прогрівання тканин за допомогою наведених змінним полем струмів лежить в основі таких методик, як *індуктотермія*, *УВЧ- терапія* та *НВЧ- терапія*. Остання має різновиди: *МКХ- терапія* (яка іноді називається *СМХ-терапією*) та *ДЦХ- терапія*.

При індуктотермії на тканини пацієнта впливають змінним магнітним полем, частота коливань якого знаходиться у межах 10...15 МГц. Стандартний апарат для індуктотермії створює поле, яке змінюється з частотою 13,56 МГц. Змінне магнітне поле індукує в тканинах вихрові електричні струми, внаслідок протікання яких виділяється тепло та відбувається прогрівання тканин.

При індуктотермії питома теплова потужність обчислюється за формулою

$$q = k \frac{\omega^2}{\rho} B_0^2,$$

де k - деякий коефіцієнт пропорційності; ω - циклічна частота зміни магнітного поля; B_0 - амплітуда магнітної індукції. З формули видно, що при індуктотермії краще нагріваються тканини з меншими значеннями питомого опору, тобто тканини, які добре проводять струм. Ефективне прогрівання тканин відбувається до глибини 6...8 см. Підвищення температури тканин підсилює кровообіг у них, викликає активізацію роботи різних ферментів. При індуктотермії відбувається стимуляція імунної системи організму.

Магнітне поле при індуктотермії створюється за допомогою котушки (індуктора), яка зазвичай є спіралльно змотаним проводом, яким протікає змінний електричний струм відповідної частоти. Для прогрівання тканин кінцівки її найчастіше обмотують проводом так, що утворюється котушка, всередині якої перебуває кінцівка.

При УВЧ-терапії (УВЧ – ультрависокі частоти) на тканини пацієнта впливають змінним електричним полем УВЧ-діапазону електромагнітних хвиль (30...300 МГц). УВЧ-поле

створює в тканинах пацієнта електричні струми (точніше, коливання заряджених частинок) тієї ж частоти, з якої змінюється УВЧ-поле. Струми, що виникають, нагрівають тканини (органи) пацієнта, причому змінні електромагнітні поля УВЧ, сильніше нагрівають ті тканини, які мають меншу електропровідність. Слід пам'ятати, що електропровідність тканин для змінного струму відрізняється від їхньої електропровідності для постійного струму, причому, чим вища частота струму, тим більші ці відмінності.

Питома теплова потужність при УВЧ-терапії обчислюється за формулою

$$q = E^2 \omega \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{tg} \delta,$$

де E - діюче (ефективне) значення напруженості електричної складової УВЧ-поля в тканині ($E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}$, де E_0 - амплітуда

напруженості електричного поля); δ - кут діелектричних втрат. При протіканні змінного струму через середовища, які мають ємнісні властивості, повний струм (I) можна розглядати як сукупність активної (I_a) та реактивної (I_p) складових, причому фаза активної складової збігається з фазою напруги, а фаза реактивної відрізняється від фази напруги на $\frac{\pi}{2}$. *Кут*

діелектричних втрат - це різниця фаз між повним струмом та його реактивною складовою (див. векторну діаграму на рис. 6.11).

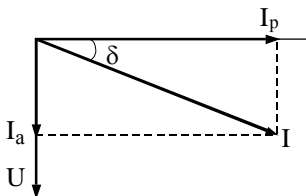


Рис. 6.11

Легко зрозуміти, що

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{I_a}{I_p} = \frac{\sigma}{\omega \varepsilon \varepsilon_0},$$

де I_a - активна складова повного струму; I_p - його реактивна складова; σ - питома електропровідність середовища (тканини). Слід відмітити, що чим більша величина $\operatorname{tg} \delta$, тим більше виражені провідні властивості середовища (тканини), а чим менша ця величина, тим більше виражені діелектричні властивості.

При НВЧ-терапії (НВЧ - надвисокі частоти) для прогрівання тканин пацієнта на них впливають електромагнітними хвилями із частотами, які лежать у діапазоні 300 МГц - 30 ГГц. Зазвичай при цьому використовуються апарати, які виробляють електромагнітні хвилі з такими стандартними значеннями довжин хвиль: при ДЦХ-терапії (ДЦХ - дециметрові хвилі) - 65,2 см ($\nu = 460$ МГц), а при МКХ-терапії (мікрохвильової терапії) - 12,6 см ($\nu = 2375$ МГц).

ДЦХ- та МКХ-терапія розрізняються глибиною проникнення випромінювання в тканини організму. Під час ДЦХ-терапії глибина проникнення сягає 9 см, а під час МКХ-терапії - становить 3 – 5 см. При НВЧ-терапії добре прогріваються м'язові тканини та кров.

Важливо підкреслити, що вплив високочастотних електромагнітних коливань на організм не зводиться тільки до теплового ефекту. Вплив електромагнітного випромінювання на організм спостерігається також за таких інтенсивностей випромінювання, за яких тепловий ефект не є значущим. Механізми впливу електромагнітних випромінювань на організм вивчені все ще недостатньо. Зрозуміло, що біологічна дія випромінювання проявляється на різних рівнях, а саме: субклітинному (молекулярному), клітинному, тканинному, органному, організменому, популяційному, видовому, біоценотичному, глобальному.

Результатом несприятливого впливу електромагнітних випромінювань радіочастотного діапазону можуть бути як прямі патологічні явища (захворювання органів або порушення діяльності систем організму), так і ослаблення захисно-

пристосувальних реакцій організму. Вважається доведеним негативний вплив електромагнітних випромінювань досить високої інтенсивності на серцево-судинну, центральну нервову, ендокринну, кровотворну та деякі інші системи організму. Вплив змінних електромагнітних полів (ЕМП) може призводити до запаморочень, підвищеної стомлюваності, дратівливості, ослаблення пам'яті, розладу сну, загальної слабкості та інших негативних наслідків. Під час тривалого впливу електромагнітних полів навіть невисокої інтенсивності настають виражені зміни в корі великих півкуль головного мозку.

Через це впроваджується жорстке гігієнічне нормування рівнів електромагнітних полів, які впливають на людей. Докладно питання гігієнічного нормування рівнів ЕМП розглядатимуться наприкінці розділу.

З лікувальною метою можуть використовуватися не тільки змінні, але й постійні електричні та магнітні поля.

Дія постійного електричного поля на тканини спричиняє поляризацію діелектриків та появу в провідних тканинах струмів, які викликають зміщення іонів та зміну їхніх концентрацій у різних ділянках тканин, причому зміщення іонів відбувається доти, поки створене ними електричне поле не компенсує вплив зовнішнього поля.

Використовуються такі методики, як *електростатичний душ* (або *франклінізація*) та *аероіоноterapia*. При цьому пацієнта поміщають у сильне електростатичне поле (використовують напругу до 50 кВ), у якому відбувається часткова іонізація повітря. При цьому з'являються аероіони, а також продукти іонізації повітря - озон та окисли азоту, які подразнюють рецептори шкіри та слизової оболонки верхніх дихальних шляхів. Усе це спричиняє *зміну функціонального стану центральної нервової системи, яка виражається в активізації гальмівних процесів, поліпшенні самопочуття, нормалізації сну та ін.*

Переходячи до проблеми гігієнічного нормування рівнів ЕМП, почнемо з того, що електромагнітні поля, які виникають на робочих місцях у виробничих умовах, поділяють на технологічні (створювані спеціально для використання в тому

або іншому технологічному процесі) та нетехнологічні.

Розглянемо окремі види електромагнітних полів.

1. Електростатичне поле. Для електростатичного поля нормується гранично допустимий рівень (ГДР) напруженості поля протягом однієї години (ГДР = 60 кВ/м) та час перебування людини в полі (при напруженостях поля від 20 до 60 кВ/м). Час перебування (t_n) обчислюється за формулою:

$$t_n = \left(\frac{\text{ГДР}}{E} \right)^2,$$

де E - фактична напруженість електростатичного поля. При напруженостях, менших за 20 кВ/м, час перебування в електростатичних полях не нормується.

2. Електричне поле частотою 50 Гц. У цьому випадку нормується гранично припустимий рівень напруженості електричного поля, у якому людина може перебувати без засобів захисту (ГДР = 25 кВ/м). При напруженостях поля в межах від 5 до 25 кВ/м нормується час перебування в полі, який обчислюється за формулою $t_n = \frac{50}{E} - 2$. У середині

житлових будинків ГДР = 0,5 кВ/м, на території житлової забудови ГДР = 1 кВ/м. Поблизу високовольтних ліній (ВЛ) електропередачі повинні встановлюватися санітарно-захисні зони. Так, для ВЛ із напругою 330 кВ ширина такої зони повинна дорівнювати 20 м у кожний бік від крайніх фазових проводів ВЛ.

3. Магнітне поле частотою 50 Гц. У цьому випадку нормовані величини та їхні значення залежать від характеру магнітного поля, яке впливає на людину (переривчасте та неперервне). Основними параметрами, які характеризують вплив поля, є: амплітуда напруженості магнітного поля, тривалість імпульсу, тривалість паузи між імпульсами, загальний час впливу протягом робочого дня. Нормування здійснюється шляхом встановлення для різних інтервалів часу перебування людини в полі відповідних амплітудних значень напруженості магнітного поля з урахуванням характеру поля, яке впливає. Наприклад, для неперервного магнітного поля із частотою 50 Гц при тривалості перебування людини в полі до 1 години включно

ГДР = 6000 А/м, а при тривалості 7 годин ГДР = 1600 А/м.

4. Електромагнітні поля радіочастотного діапазону. У цьому випадку оцінювання впливу електромагнітних випромінювань радіочастотного діапазону здійснюється в такий спосіб.

Оцінювання проводиться за енергетичною експозицією, яка визначається інтенсивністю випромінювання й часом його впливу на людину. При цьому норми для осіб, які не досягли 18 років та вагітних жінок, відрізняються від норм для інших осіб.

У діапазоні частот 30 кГц – 300 МГц інтенсивність випромінювання оцінюється за значеннями напруженості електричної або магнітної (зазвичай, саме електричної) складових електромагнітних полів, а в діапазоні 300 МГц – 300 ГГц – за значеннями густини потоку енергії. У цьому випадку значення ГДР = 2,5 мкВт/см²).

Енергетична експозиція в першому із зазначених діапазонів визначається як добуток квадрата напруженості електричного поля на час впливу на людину, а в другому діапазоні - як добуток густини потоку енергії на час впливу.

У випадку імпульсномодульованих коливань оцінка проводиться за середньою за період проходження імпульсу інтенсивністю електромагнітного випромінювання.

Граничні значення напруженості електричного поля в діапазоні 30 кГц...300 МГц залежать від частоти випромінювання, внаслідок чого цей діапазон поділяється на чотири піддіапазони, для кожного з яких визначені граничні значення (див. таблицю 6.2).

Таблиця 6.2

Частота (крім нижньої, включаючи верхню межу)	30-300 кГц	0,3 -3 МГц	3 -30 МГц	30 -300 МГц	0,3 -3 ГГц
Довжина хвилі	10 -1 км	1- 0,1 км	100 -10 м	10 -1 м	100 -1 см
ГДР	25 В/м	15 В/м	10 В/м	3 В/м	2,5 мкВт/см ²

У випадку наявності електромагнітних випромінювань, які мають складові, що відносяться до різних частотних діапазонів, для кожного з діапазонів обчислюють відношення рівня випромінювання в даному діапазоні до граничного значення для цього діапазону, а потім, підсумовуючи внески різних діапазонів, встановлюють наявність або відсутність загального перевищення гранично припустимого рівня.

6.5 Основи медичної електроніки

Електроніку можна охарактеризувати як галузь науки та техніки, яка вивчає та застосовує роботу електровакуумних, іонних та напівпровідникових пристроїв. **Медична електроніка** є розділом електроніки, у якому розглядаються особливості застосування електронних систем для розв'язання медико-біологічних завдань, а також будова відповідної апаратури.

Застосування електронних пристроїв у медицині на цей час надзвичайно різноманітне, однак можна виділити три основні групи задач, які розв'язуються за допомогою медичних електронних апаратів. До них відносяться зняття та реєстрація медико-біологічної інформації, дія на організм будь-якими фізичними факторами в лікувальних цілях, переробка та зберігання медико-біологічної інформації. Відповідно до зазначених задач, всю медичну електронну апаратуру прийнято підрозділяти на *контрольно-діагностичну апаратуру, терапевтичну* (іноді кажуть *фізіотерапевтичну, або електротерапевтичну*) *апаратуру* та *кібернетичні електронні пристрої*.

Контрольно - діагностична апаратура призначена для зняття, передачі та реєстрації інформації, яка відображає процеси, що відбуваються в організмі людини, у навколишньому середовищі, у різних конструкціях медичного призначення. Склад таких апаратів у загальному випадку показаний на рис. 6.12, де ПЗ - це пристрій зняття; Під - підсилювач; П - передавач; Пр - приймач; ПВ та ПР - пристрій відображення та пристрій реєстрації відповідно.

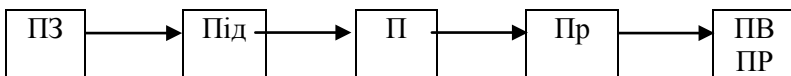


Рис. 6.12

Пристрій зняття є обов'язковою складовою частиною контрольно-діагностичних апаратів (КДА). Зазвичай отриманий сигнал на виході пристрою зняття слабкий, та його подальшому використанню повинне передувати підсилення. Тому підсилювач є майже обов'язковим блоком КДА. Іноді виникає необхідність передачі підсиленого сигналу. У цьому випадку до складу КДА входять передавач та приймач сигналу. Перетворення сигналу у форму, зручну для сприйняття користувачем, здійснюється за допомогою обов'язково присутнього в складі КДА або пристрою відображення інформації, або пристрою реєстрації.

На рис. 6.12 показані блоки, які беруть участь у передачі сигналу від досліджуваного об'єкта до користувача. Але робота всіх цих блоків вимагає витрат енергії, тому, як правило, до складу КДА входить також джерело живлення.

Терапевтична апаратура призначена для дозованого впливу на організм людини різними фізичними факторами з метою лікування. Різноманіття видів та способів впливу на організм визначає й різноманіття схем побудови електронних терапевтичних апаратів. Загальнообов'язковими для електронних пристроїв цього класу є тільки джерело живлення, генератор, який виробляє необхідний фізіотерапевтичний вплив, та контрольно-вимірювальний пристрій, який забезпечує можливість контролю рівня впливу на пацієнта.

Кібернетичні електронні пристрої призначені для переробки, зберігання та автоматичного аналізу медико-біологічної інформації, для керування процесами життєдіяльності та для автоматичного регулювання стану навколишнього середовища. Як правило, складовою частиною таких пристроїв є комп'ютер або спеціалізований мікропроцесор.

У цей час широка комп'ютеризація електронних пристроїв призводить до того, що багато контрольно-діагностичних пристроїв, а іноді й терапевтичних, є одночасно й кібернетичними. З'являються вже й пристрої, які виконують функції як КДА, так одночасно і терапевтичних та кібернетичних пристроїв.

Будь-який медичний електронний апарат, насамперед, повинен не шкодити пацієнтові. Тому при вивченні всіх класів електронних приладів та апаратів винятково важливими є питання *електробезпеки* під час роботи з цими пристроями та їхньої *надійності*.

Кажучи про електробезпеку при роботі з медичними електронними пристроями, необхідно виділити два основних аспекти цієї проблеми, які пов'язані з двома головними можливими причинами небезпеки для пацієнта або персоналу під час роботи з цими пристроями. Такими причинами є так званий *"пробій на корпус" та струми витoku*.

Кажучи про пробій на корпус, мають на увазі порушення захисної ізоляції струмонесучих частин електронного пристрою, яке призводить до виникнення електричного контакту між цими частинами та корпусом пристрою. У цьому випадку контакт пацієнта або персоналу з корпусом приладу може призвести до електротравми або навіть загибелі людини.

Найчастіше живлення електронних апаратів здійснюється від мережі змінного струму. До розеток мережі змінного струму від ліній електропередачі підводять один з лінійних проводів (у лінії електропередачі три лінійних проводи) та нейтральний провід. Лінійний провід в просторіччі часто називають «фаза», а нейтральний - «нуль». Досить частим та небезпечним варіантом пробою на корпус є порушення ізоляції, яке призводить до появи електричного контакту між лінійним проводом та корпусом апарата.

Метод, який найчастіше використовується для боротьби з небезпекою поразки при пробії на корпус, є *заземлення корпусу* приладу або апарата. При цьому корпус приладу за допомогою провідника з малим опором (зазвичай не більше 4 Ом) з'єднується із землею. Якщо для передачі електроенергії використовується не схема передачі зі штучно заземленим

нейтральним проводом, то заземлення корпусу приладу приводить до такого перерозподілу напруги в колі протікання струму від корпусу до нейтрального проводу, при якому напруга між корпусом та землею (тобто напруга, яка створює струм через людину, що контактує з корпусом приладу) виявляється невеликою (порядку декількох вольт), та не є небезпечною для життя або здоров'я людини.

Разом з тим захисне заземлення не завжди здатне забезпечити роботу з медичними електронними пристроями. По-перше, якщо людина знаходиться в приміщенні, у якому розташована велика кількість різних приладів та апаратів (наприклад, кабінети фізіотерапії або функціональної діагностики та ін.), то існує небезпека одночасного контакту людини з двома приладами, в одного з яких відбувся пробій на корпус, а в іншого виник електричний контакт між корпусом та нейтральним проводом. У цій ситуації людина опиняється в ролі електричної ділянки кола, що увімкнена між точками з різницею потенціалів у кілька сотень вольтів (найчастіше - 220 В), що надзвичайно небезпечно. По-друге, якщо використовується схема передачі електроенергії із заземленою нейтраллю, то захисне заземлення, хоча й перерозподіляє напругу в колі протікання струму, але зменшує її недостатньо, і напруга на людині при контакті з корпусом приладу у випадку пробію на корпус може виявитися величиною порядку 100 В. Правда, при цьому, на вході приладу виникає великий струм, і це повинно приводити до згоряння запобіжника, а отже, відключення приладу від мережі, але таке відключення може відбутися не відразу, і людина встигне постраждати. Тому для забезпечення вищого ступеня захищеності пацієнтів та персоналу від ушкодження електричним струмом використовується такий метод, як *занулення корпусу* апарату, при якому корпус апарату з'єднується провідником малого опору з нейтральним проводом. У цьому випадку при пробії на корпус у колі виникає струм силою в сотні ампер, що практично миттєво приводить до відключення апарату від мережі (внаслідок згоряння запобіжника або виходу з ладу якихось частин електропроводки).

Наявність струмів витоку пов'язана з тим, що для змінного струму провідність будь-якої, навіть самої кращої ізоляції не дорівнює нулю. Оскільки між струмонесучими частинами апарату та його корпусом існують ємнісні зв'язки, на корпусі завжди є невелика змінна напруга, з якою пов'язані завжди існуючі невеликі струми витоку. У більшості випадків впливом на організм цих струмів можна знехтувати, але в деяких випадках (наприклад, під час операцій на відкритому серці або головному мозку) струми витоку необхідно враховувати.

За величиною припустимого струму витоку електронні пристрої поділяються на чотири класи, з позначками Н, В, ВF та CF. Клас Н відповідає пристроям з нормальним ступенем захисту, тобто з таким же ступенем електрозахисту, як й у звичайних побутових електроприладів. У цьому випадку величина сили струму витоку (I_b) не перевищує 0,25 мА. Клас В - це пристрої з підвищеним ступенем захисту. У цих пристроїв $I_b \leq 0,1$ мА. Буква F у маркуванні класу пристрою означає наявність у цього пристрою ізолюваної робочої частини (відомий приклад - апарат для НВЧ-терапії). Позначення CF відповідає класу пристроїв з найвищим ступенем захисту та ізолюваною робочою частиною ($I_b \leq 10$ мкА). Тільки пристрої такого класу допускаються до застосування під час роботи на відкритому серці.

Для будь-яких електронних приладів та апаратів важливим є питання надійності. **Надійність електронного пристрою - це його здатність працювати безвідмовно.** Відмова пристрою відбувається внаслідок різних непередбачених причин та є випадковою подією. Тому надійність електронних медичних апаратів описують в термінах теорії ймовірностей, а однією з найважливіших характеристик надійності є *ймовірність безвідмовної роботи* електронного пристрою. Ймовірність безвідмовної роботи $P(t)$ залежить від часу та обчислюється за формулою

$$P(t) = \frac{N(t)}{N_0}, \quad (6.11)$$

де N_0 - вихідне (у початковий момент часу) число справних приладів або апаратів, а $N(t)$ - число справних приладів або апаратів у момент часу t . Величина $P(t)$ з часом зменшується. Для характеристики швидкості зміни з часом числа справних електронних пристроїв вводять таку величину, як **інтенсивність відмов (λ)**, яка дорівнює взятому зі знаком «мінус» відношенню швидкості виходу з ладу електронних пристроїв до кількості працюючих пристроїв, тобто

$$\lambda = -\frac{dN}{Ndt}.$$

Знак “мінус” в останній формулі обумовлений тим, що кількість працюючих пристроїв з часом зменшується, тобто величина $\frac{dN}{dt}$ є від’ємною.

Для встановлення зв'язку між $P(t)$ та λ необхідно знати, як інтенсивність відмов залежить від часу. Типовий вигляд цієї залежності показаний на рис. 6.13.

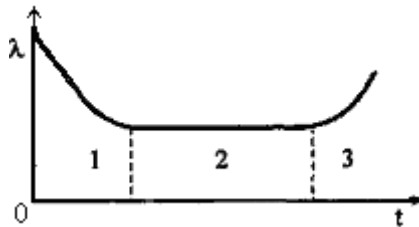


Рис. 6.13

Відзначимо, що такий вид залежності інтенсивності відмов від часу характерний для всіх складних систем. Зокрема, подібний вигляд має й відповідна крива для смертності людей. З рис. 6.13 видно, що крива залежності інтенсивності відмов від часу має три характерні ділянки (відділені на рис. 6.13 одна від одної пунктирними прямими). На першій ділянці величина λ велика, але зменшується з часом. Ця ділянка відповідає виходу з ладу приладів, початково виготовлених з якими-небудь дефектами (ділянка прироблення). На другій ділянці інтенсивність відмов невелика й не змінюється з часом -

це ділянка нормальної роботи. На третій ділянці λ з часом збільшується. Це ділянка старіння апаратури, виходу з ладу приладів, які виробили свій ресурс.

Зв'язок між імовірністю безвідмовної роботи та інтенсивністю відмов встановлюють для ділянки нормальної роботи електронних пристроїв. На цій ділянці

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

звідки, враховуючи формулу (6.11), отримуємо

$$P(t) = e^{-\lambda t}.$$

Таким чином, імовірність безвідмовної роботи експоненціально зменшується з часом.

Розглянемо тепер класифікацію медичних електронних пристроїв за критерієм надійності. Медичні електронні прилади та апарати, залежно від небезпечності для пацієнта відмови у процесі експлуатації, поділяють на такі класи:

- А - вироби, відмова яких є безпосередньою загрозою для життя пацієнта або персоналу (наприклад, системи життєзабезпечення). Для таких виробів на час експлуатації до профілактичного обслуговування або протягом встановленого терміну служби повинна виконуватися умова $P \geq 0,99$;
- В - вироби, відмова яких викликає спотворення інформації про стан організму або навколишнього середовища, яке або не становить безпосередню небезпеку для життя пацієнта, або становить небезпеку, але при умові можливості негайної заміни таких виробів справними. Для виробів цього класу на час експлуатації до профілактичного обслуговування або протягом встановленого терміну служби повинна виконуватися умова $P \geq 0,8$;
- В - вироби, відмова яких знижує ефективність або затримує лікувально-діагностичний процес у некритичних ситуаціях. Для таких пристроїв середній термін роботи до відмови повинен удвічі перевищувати або період до профілактичного ремонту, або гарантійний строк експлуатації.

Обговорення питань про використання медичних електронних пристроїв буде неповним, якщо не розглянути роль **метрології** в медико-біологічних вимірюваннях. Якщо говорити взагалі, то **метрологія - це наука про вимірювання**, тобто про те, як проводити вимірювання, як правильно обробляти результати вимірювань, як забезпечувати вірогідність результатів вимірювань. Для нас найважливіша медична метрологія, тобто галузь метрології, у якій розглядаються особливості вимірювань у медицині, а також відповідного засобу вимірювань.

При вимірюваннях необхідно, щоб результати вимірювань відповідали певній точності та були однаковими, якщо вимірюються ідентичні величини, незалежно від того, здійснюються вимірювання в той же чи в різний час, в одному або в різних місцях.

Для забезпечення необхідної точності та єдності вимірювань існує особлива державна **метрологічна служба**. У число її найважливіших завдань входять як розв'язання наукових проблем, пов'язаних з метрологією, й розробка відповідної документації (ДСТУ, нормативи та ін.), так й організація регулярної перевірки всіх використовуваних засобів вимірювань. При перевірці засобів вимірювань з метою встановлення їхньої придатності до застосування визначаються похибки цих засобів вимірювань. Для перевірки використовують *еталони й зразкові засоби вимірювань*. **Еталон - це засіб вимірювань (або комплекс засобів вимірювань), що забезпечує відтворення та зберігання узаконеної одиниці фізичної величини.** За допомогою еталонів перевіряються зразкові засоби вимірювань. **Зразковими називаються засоби вимірювань, що застосовуються для перевірки робочих засобів вимірювань.**

Розглянемо тепер найважливіші частини медичних електронних приладів й апаратів. Як самостійні пристрої або частини складніших пристроїв у медицині часто використовуються згадувані вище пристрої зняття інформації, підсилювачі, генератори, пристрої відображення та реєстрації інформації.

На даний час люди вміють працювати (перетворювати, зберігати, передавати на відстані, підсилювати) із сигналами в електричній формі, тому, якщо вихідний сигнал неелектричний, його спочатку перетворюють в електричну форму. Унаслідок цього пристрої зняття поділяють на *електроди* (пристрої зняття електричних сигналів) та *датчики* (пристрої, які перетворюють неелектричний сигнал в електричний).

Електроди звичайно є металевими провідниками спеціальної форми, які пов'язують електронний пристрій з біологічною системою. Залежно від призначення вони можуть мати різну форму, розміри, способи кріплення до тіла. Кажучи про основні вимоги до електродів, відзначимо, що вони повинні:

- швидко фіксуватися та зніматися;
- мати високу стабільність електричних параметрів;
- бути міцними;
- не створювати завад;
- не подразнювати тканину;
- забезпечувати мінімізацію втрат корисної інформації;
- допускати багаторазове використання;
- мати не занадто високу вартість.

Які з цих вимог повинні виконуватися в першу чергу, визначається сферою застосування електродів, причому в різних випадках можуть висуватися прямо протилежні вимоги. Наприклад, у більшості випадків збільшення площі контакту електрода з тілом дозволяє мінімізувати втрати інформації, але при дослідженні біологічно активних точок на шкірі людини повинні використовуватися електроди з малою площею контакту. У кабінетах функціональної діагностики при щоденному багаторазовому використанні важливо, щоб електроди могли швидко фіксуватися та зніматися, а під час досліджень у спортивній медицині одна з головних вимог - міцність і надійність кріплення.

При створенні електродів та виборі конструкції електродів при конкретному дослідженні варто враховувати можливий вплив таких явищ, як гальванізація (виникнення гальванічної ЕРС при контакті електродів з біологічною тканиною) та поляризація (електролітична поляризація електродів унаслідок

виділення на них продуктів електролізу). Поряд з металевими електродами, у мікроелектродній практиці використовують скляні мікроелектроди, заповнені провідним розчином, що мають діаметр вістря порядку 0,5 мкм. Такі електроди дозволяють проколювати мембрану клітини й проводити внутрішньоклітинні дослідження.

Датчики є більш різноманітними, ніж електроди. Існують різні класифікації датчиків. Так, датчики поділяють на *енергетичні та біокерувальні*. Енергетичні датчики самі виробляють той сигнал, який, змінюючись при взаємодії з об'єктом дослідження, потім приймається цим же датчиком. Біокерувальні датчики приймають сигнал, який приходить від об'єкта дослідження й має зовнішнє відносно датчика походження. Біокерувальні датчики підрозділяють на *генераторні та параметричні*. Генераторні датчики генерують ЕРС (електрорушійну силу), величина якої залежить від рівня сигналу, який знімається. Параметричні датчики внаслідок впливу зовнішнього сигналу змінюють свої параметри (опір, ємність або ін.), для виявлення чого необхідне зовнішнє стосовно датчика джерело постійного або змінного струму.

Датчики можуть класифікуватися за фізичною величиною, що характеризує вхідний сигнал, наприклад, фотодатчики, термодатчики, датчики тиску, тензодатчики й ін.

Можлива класифікація датчиків на основі фізичних явищ, що лежать в основі їхньої роботи. Наприклад, в основі роботи п'єзоелектричних датчиків лежить п'єзоелектричний ефект.

Може використовуватися класифікація датчиків за параметром, який змінюється під впливом зовнішнього сигналу. Так, наприклад, для виміру тиску можуть використовуватися резистивні, ємнісні та індуктивні датчики.

Нехай $x(t)$ - залежність вхідного сигналу датчика від часу, а $y(t)$ - залежність вихідного сигналу від часу. Функція $y = f(x)$ називається *функцією перетворення датчика*. Похідна функції перетворення за величиною x називається *чутливістю датчика* (z), тобто

$$z = \frac{dy}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

При практичному використанні датчиків необхідно враховувати можливі недоліки датчиків, серед яких у першу чергу відзначимо *інерційність*, температурну залежність, *гістерезис*, можливість зворотного впливу датчика на досліджуваний об'єкт.

Інерційність датчиків проявляється в тих випадках, коли при швидких змінах вхідного сигналу вихідний сигнал не встигає змінюватися за тим же законом, що й вхідний. У результаті на виході датчика утворюється якийсь усереднений "згладжений" сигнал, який відрізняється від вхідного за своєю залежністю від часу тим більше, чим швидше змінюється вхідний сигнал.

На даний час більшість датчиків є напівпровідниковими. Електричні властивості напівпровідників дуже сильно залежать від температури, тому й вихідний сигнал датчика залежить від його температури. При вимірюваннях температури це є позитивною якістю. Якщо ж датчик використовується для вимірювання не температури, а якої-небудь іншої фізичної величини, то температурна залежність властивостей датчика є його недоліком, з яким треба боротися. З цією метою використовують таблиці виправлень, які враховують фактор температури, або здійснюють термостабілізацію вимірювань, тобто здійснюють вимірювання при певній сталій температурі.

Гістерезис - це залежність сигналу на виході датчика від передісторії зміни сигналу на вході датчика. Датчик як би пам'ятає свій попередній стан, і це позначається на рівні вихідного сигналу. Так, при однаковому рівні вхідного сигналу величина вихідного сигналу буде залежати від того, як досягнуто цього рівня: при наростанні вхідного сигналу або ж при його убутті.

Датчик може впливати на досліджуваний об'єкт, змінюючи його характеристики й тим самим змінювати величину вхідного сигналу.

Говорячи про пристрої зняття в цілому, можна зазначити наступні загальні вимоги до них. Пристрої зняття повинні:

- забезпечувати одержання стійкого інформативного сигналу;

- у найменшому можливому ступені спотворювати вхідний сигнал;
- мати максимальну завадозахищеність;
- забезпечувати можливість зручного розміщення в необхідному для вимірювань місці;
- не створювати побічної подразнювальної дії на організм;
- допускати можливість стерилізації й багаторазового використання.

Підсилювачі - це пристрої, які підсилюють вхідні електричні сигнали за рахунок енергії стороннього джерела. Підсилювачі електричних сигналів поділяють на *підсилювачі змінного струму* й *підсилювачі постійного струму*. Така класифікація не цілком точно відбиває особливості сигналів, що посилюються. Насправді підсилювачі змінного струму - це підсилювачі сигналів, які швидко змінюються, а підсилювачі постійного струму - це підсилювачі сигналів, які змінюються повільно.

Для характеристики підсилювача використовується така величина, як *коефіцієнт підсилення* (k). Для підсилювачів змінного струму коефіцієнт підсилення дорівнює

$$k = \frac{U_{0\text{вих}}}{U_{0\text{вх}}},$$

де $U_{0\text{вих}}$ й $U_{0\text{вх}}$ - амплітуди вихідного й вхідного сигналів відповідно.

Для підсилювачів постійного струму коефіцієнт підсилення дорівнює

$$k = \frac{\Delta U_{\text{вих}}}{\Delta U_{\text{вх}}},$$

де $\Delta U_{\text{вих}}$ - зміна сигналу на виході підсилювача, яка відбувається внаслідок зміни вхідного сигналу на $\Delta U_{\text{вх}}$.

При підсиленні змінного струму **залежність амплітуди вихідного сигналу від амплітуди вхідного сигналу називається амплітудною характеристикою підсилювача.** В ідеалі графік цієї характеристики повинен бути лінією, яка проходить через початок координат, причому чим більший кут утворить ця лінія з віссю абсцис, тим більший коефіцієнт підсилення, тобто тим кращим є підсилювач. Однак у реальних

підсилювачів амплітудна характеристика залишається лінійною тільки в певному діапазоні величин вхідного сигналу (при не дуже великих величинах вхідного сигналу) (дивись рис. 6.14).

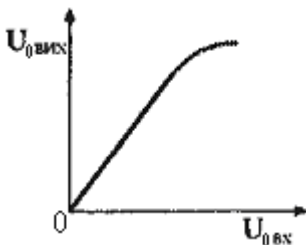


Рис. 6.14

Якщо при роботі підсилювача використовується й нелінійна ділянка амплітудної характеристики підсилювача, то відбуваються нелінійні, або амплітудні спотворення сигналу.

Залежність коефіцієнта підсилення підсилювача змінного струму від частоти вхідного сигналу називається *амплітудно-частотною характеристикою підсилювача*. В ідеального підсилювача графік амплітудно-частотної характеристики - це пряма лінія, паралельна осі абсцис. У реальних підсилювачів приблизно такою амплітудно-частотна характеристика є тільки в певному діапазоні частот. За межами цього діапазону відбувається зниження коефіцієнта підсилення (дивись рис. 6.15).

Унаслідок відмінності амплітудно-частотних характеристик реальних підсилювачів від ідеального вигляду виникають частотні, або лінійні спотворення сигналу на виході підсилювача. Щоб сигнал підсилювався без істотних спотворень, він повинен містити тільки ті частоти, які лежать у межах так званої *смуги пропускання підсилювача*.

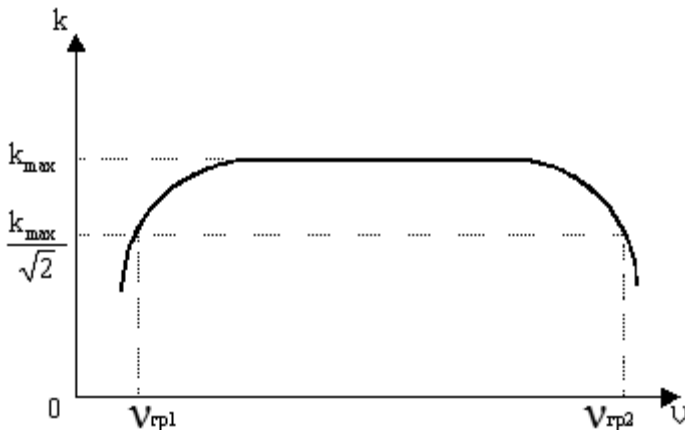


Рис. 6.15

Границі смуги пропускання визначаються в такий спосіб: спочатку знаходять максимальне значення коефіцієнта підсилення підсилювача k_{\max} , а потім визначають частоти, для яких

$$k = \frac{k_{\max}}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \cdot k_{\max}; \text{ на рис. 6.15 — частоти } \nu_{\text{гр1}} \text{ й } \nu_{\text{гр2}}$$

(граничні частоти смуги пропускання). Діапазон частот від $\nu_{\text{гр1}}$ до $\nu_{\text{гр2}}$ — це і є смуга пропускання підсилювача. Цей параметр має важливе практичне значення: так, для підсилення звуку достатня смуга пропускання 20 Гц...20 кГц, а для підсилення сигналів ЕКГ досить усього 1...100 Гц.

Підсилення сигналів, які повільно змінюються, є завданням технічно складнішим, ніж підсилення сигналів, які швидко змінюються, тому підсилювачі постійного струму конструктивно складніші за підсилювачі змінного струму. У медицині підсилювачі постійного струму використовуються для підсилення різного роду біопотенціалів, які найчастіше дуже слабкі. Це приводить до необхідності створювати підсилювачі постійного струму з великими коефіцієнтами підсилення (порядку 10^5 ... 10^6). Домогтися стійкої роботи підсилювачів постійного струму з великими значеннями коефіцієнта підсилення складно, чим визначається й складність конструкції таких підсилювачів.

Відзначимо тільки, що такі підсилювачі - це підсилювачі з глибоким *негативним зворотним зв'язком*. Про наявність зворотного зв'язку кажуть, якщо частина вихідного сигналу передається на вхід підсилювача. Якщо при цьому сигнал, який приходить по колу зворотного зв'язку, такий, що перешкоджає зміні вхідного сигналу, кажуть про негативний зворотний зв'язок.

Генератор - це пристрій, який перетворює енергію джерел живлення (зазвичай – джерел постійної напруги) в енергію електромагнітних коливань різної форми. Генератори містять підсилювальні елементи, які мають позитивний зворотний зв'язок між виходом і входом. Звичайно генератори - це автоколивальні системи.

Генератори поділяють на *генератори синусоїдальних (гармонічних) коливань* та *імпульсні (релаксаційні) генератори*. Крім того, генератори класифікують за діапазонами частот та потужностей, що генеруються.

У медицині найчастіше використовуються генератори, які входять до складу фізіотерапевтичних апаратів, електронних стимуляторів та контрольно-діагностичних апаратів з енергетичними датчиками.

Пристрої відображення та пристрої реєстрації перетворюють електричний сигнал у форму, зручну для сприйняття людиною (стрілочні прилади, монітори, індикатори на рідких кристалах та ін.). Пристрої відображення дають миттєве значення сигналу. При зміні вхідного сигналу змінюються й показання пристрою відображення, причому його попередні показання втрачаються. Прикладом пристроїв відображення є стрілочні прилади, індикатори. Пристрої реєстрації записують на якомусь носії не тільки миттєве значення сигналу, але і його передісторію. Так, відхилення пера самозаписувача відображає величину сигналу в момент реєстрації, але на стрічці залишається й графічне зображення залежності сигналу, що реєструється, від часу.

Як пристрої відображення або реєстрації нині все ширше використовуються монітори.

Контрольні запитання та завдання до розділу

1. Поясніть фізичні та біофізичні основи електрографії.
2. Поясніть фізичні та біофізичні основи реографії.
3. Поясніть поняття імпедансу. Охарактеризуйте електричні властивості біологічних тканин.
4. Назвіть та роз'ясніть основні характеристики магнітного поля.
5. Охарактеризуйте магнітні властивості речовин.
6. У чому полягають фізичні основи магнітобіології?
7. Охарактеризуйте дію постійного струму на біологічні тканини.
8. Охарактеризуйте дію імпульсного струму на біологічні тканини.
9. Охарактеризуйте дію змінного струму на біологічні тканини.
10. Охарактеризуйте дію електромагнітних полів на біооб'єкти.
11. Охарактеризуйте основні види медичних апаратів та їхнє призначення.
12. Назвіть основні методи забезпечення електробезпеки при роботі з медичною апаратурою.
13. Наведіть та поясніть основні характеристики надійності електромедичної апаратури.
14. Що таке амплітудна та амплітудно-частотна характеристики підсилювачів електричних сигналів?

Розділ 7

ОПТИЧНІ МЕТОДИ ТА ЇХ ВИКОРИСТАННЯ У БІОЛОГІЇ ТА МЕДИЦИНІ

7.1 Елементи геометричної оптики

Світло - це електромагнітні хвилі, що сприймаються людським оком. Довжина світлових хвиль лежить в діапазоні від 380 до 760 нм.

Значну частину оптичних явищ, зокрема тих, які лежать в основі роботи багатьох оптичних приладів, можна розглядати, виходячи з уявлень про світлові промені. Розділ оптики, що ґрунтується на таких уявленнях, називається геометричною оптикою.

Підходи геометричної оптики можна застосовувати тоді, коли не виявляється хвильова природа світла і, отже, можна нехтувати явищами інтерференції та дифракції світла. Нагадаємо, що явище дифракції виявляється тоді, коли розміри (ℓ) перешкод, на які падає світло, або отворів, через які воно проходить, близькі до довжини хвилі (λ) світла. Таким чином, підходи геометричної оптики можуть застосовуватися при виконанні умови $\lambda \ll \ell$.

Робота багатьох оптичних приладів ґрунтується на явищах відбивання та заломлення (рефракції) світла при падінні світла на межу поділу двох середовищ.

Нагадаємо закони відбивання та заломлення світла. Закон відбивання світла: **промінь падаючий, промінь відбитий і перпендикуляр до межі поділу середовищ, поставлений у точці падіння променя, лежать в одній площині; кут падіння дорівнює куту відбивання.** Закон заломлення світла: **промінь падаючий, промінь заломлений і перпендикуляр до межі поділу середовищ, поставлений у точці падіння променя, лежать в одній площині; відношення синуса кута падіння до синуса кута заломлення є величиною сталою для двох середовищ.** Цю величину називають показником заломлення другого середовища відносно першого, або відносним показником заломлення. Показник заломлення другого середовища відносно першого показує, у скільки разів швидкість світла у першому середовищі більша, ніж у другому, і дорівнює відношенню абсолютних показників заломлення другого і першого середовищ. Абсолютний показник заломлення середовища показує, у скільки разів швидкість світла у вакуумі більша, ніж у середовищі. Під час переходу світла з одного середовища в інше змінюються його швидкість поширення та довжина хвилі, а частота не змінюється.

Якщо світло падає на межу поділу двох середовищ з боку оптично густішого середовища (середовища, яке має більший показник заломлення), то може спостерігатися явище *повного внутрішнього відбивання*. При цьому світло не переходить в друге середовище, повністю відбиваючись від межі поділу середовищ. Спостерігається явище повного внутрішнього

відбивання при виконанні умови $\alpha > \alpha_{\text{гр}}$, де α - кут падіння світла, а $\alpha_{\text{гр}}$ - *граничний кут повного відбивання* (повного внутрішнього відбивання). Величина граничного кута повного відбивання визначається за формулою

$$\sin \alpha_{\text{гр}} = \frac{n_2}{n_1}, \quad (7.1)$$

де n_2 - показник заломлення середовища, у яке при заломленні переходить світло, n_1 - показник заломлення середовища, з боку якого світло падає на межу поділу. Якщо світло падає з боку якогось середовища на межу поділу з повітрям, то $n_2 \approx 1$ та

$$\sin \alpha_{\text{гр}} \approx \frac{1}{n}, \quad \text{де } n - \text{абсолютний показник заломлення}$$

середовища, з боку якого падає світло.

Явище повного відбивання лежить в основі використання *світловодів*, які є довгими гнучкими волокнами з прозорих матеріалів. Якщо світло потрапляє у світловод, рухаючись вздовж осі такого волокна, то при не дуже значному згинанні цього волокна світло падатиме на бічну поверхню цього волокна в умовах великих значень кута падіння, внаслідок чого світло повністю відбиватиметься від цієї поверхні і розповсюджуватиметься далі, багаторазово відбиваючись від бічної поверхні волокна. При цьому послаблення інтенсивності світла відбуватиметься лише внаслідок деякого поглинання світла матеріалом світловода.

Цей принцип лежить в основі будови приладів з так званою *волоконної оптики*. Прикладом таких приладів є *ендоскопи*, в яких використовуються пучки паралельних тонких скляних волокон, оболонка яких має показник заломлення, менший ніж у скла, чим і обумовлюється явище повного відбивання від бічної поверхні волокна світла, що розповсюджується вздовж волокна. Зазвичай один з таких пучків волокон використовується для передачі світла у досліджувані частини тіла пацієнта, а інший – для одержання зображення, яке створюється при освітленні вивчаємих об'єктів світлом, що прийшло першим пучком.

Під час переходу світла з середовища з меншим показником заломлення в середовище з більшим показником заломлення кут заломлення (β) менший за кут падіння (α). Оскільки кут падіння не може бути більшим за 90° , кут заломлення не може бути більшим за деяке граничне значення, що називається *граничним кутом заломлення* ($\beta_{\text{гр}}$). Значення граничного кута заломлення визначається формулою

$$\sin \beta_{\text{гр}} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (7.2)$$

Якщо перше середовище є повітрям, то $n_1 \approx 1$ та $\sin \beta_{\text{гр}} \approx \frac{1}{n}$, де n - абсолютний показник заломлення другого середовища.

Найважливішою частиною багатьох оптичних приладів є *лінзи*. Лінза - це прозоре тіло, обмежене двома сферичними поверхнями, показник заломлення якого відрізняється від показника заломлення навколишнього середовища. Лінія, що проходить через центри цих сферичних поверхонь, називається *головною оптичною віссю* лінзи. Якщо товщина лінзи значно менша за радіус кривизни сферичних поверхонь, що обмежують лінзу, то лінза називається *тонкою*. Надалі, говорячи про лінзи, будемо мати на увазі тільки тонкі лінзи.

Товщиною тонкої лінзи можна нехтувати й вважати, що головна оптична вісь перетинає лінзу в точці. Ця точка називається *оптичним центром* лінзи. Будь-яка пряма, що проходить через оптичний центр лінзи і не є головною оптичною віссю, називається *побічною оптичною віссю* лінзи, або просто віссю лінзи. Промінь, що падає на лінзу вздовж її оптичної осі (головної чи побічної), проходячи через лінзу, не змінює свого напрямку.

Якщо при заломленні в лінзі промені відхиляються нею убік головної оптичної осі, то така лінза називається *збирною*, якщо ж промені відхиляються від напрямку головної оптичної осі, то лінза називається *розсіювальною*.

Якщо на збирну лінзу падає пучок променів, паралельних головній оптичній осі, то після заломлення в лінзі ці промені перетинаються в точці, яка лежить на головній оптичній осі. Ця точка називається *фокусом* збирної лінзи.

Якщо на розсіювальну лінзу падає пучок променів, паралельних головній оптичній осі, то після заломлення в лінзі утворюється розбіжний пучок променів, а продовження цих променів перетинаються в точці, яка лежить на головній оптичній осі. Ця точка називається *уявним фокусом* розсіювальної лінзи.

Відстань між оптичним центром лінзи і її фокусом називається *фокусною відстанню* лінзи (F). Величина, обернена фокусній відстані лінзи, називається *оптичною силою* лінзи (D),

тобто $D = \frac{1}{F}$. Оптична сила лінзи вимірюється в діоптріях (дптр). Для визначення оптичної сили лінзи або фокусної відстані може використовуватися формула

$$D = \frac{1}{F} = (n - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right),$$

де n - відносний показник заломлення матеріалу лінзи, R_1 і R_2 - радіуси сферичних поверхонь, що обмежують лінзу. Якщо поверхня лінзи опукла, то відповідне R беруть зі знаком "+", а якщо увігнута - зі знаком "-". Якщо величини D і F виходять позитивними, то лінза збирна, якщо ж негативними, то лінза розсіювальна.

Площина, що містить фокус лінзи, перпендикулярна головній оптичній осі, називається *фокальною площиною*. Якщо на збирну лінзу падає паралельний пучок променів, то після заломлення в лінзі ці промені перетинаються в точці, що належить фокальній площині. Якщо на розсіювальну лінзу падає паралельний пучок променів, то після заломлення в лінзі утворюється розбіжний пучок, але продовження цих променів перетинаються в точці, що належить фокальній площині.

Якщо промені, що виходять з деякої точки A , після заломлення в лінзі перетинаються в деякій точці A' , то точка A' називається дійсним *зображенням* точки A . Якщо промені, що

виходять з точки А, після заломлення в лінзі утворюють розбіжний пучок, то точка А', у якій перетинаються продовження цих променів, називається уявним зображенням точки А. Положення зображення точки А в лінзі зазвичай знаходять як точку, у якій після заломлення в лінзі перетинаються характерні (типові) промені, що виходять з точки А. Таких характерних променів три. Один промінь - це промінь, що проходить через оптичний центр лінзи. Такий промінь, проходячи через лінзу, не змінює свого напрямку. Інший промінь - це промінь, що падає на лінзу паралельно головній оптичній осі. Після заломлення в лінзі він (у випадку розсіювальної лінзи – його продовження) проходить через фокус лінзи. Ще один промінь - це промінь, що проходить через фокус лінзи. Після заломлення в збірній лінзі цей промінь йде паралельно головній оптичній осі.

Зображення предмета в лінзі є геометричним місцем точок, що є зображеннями у лінзі кожної з точок предмета. Зазвичай для побудови зображення предмета в лінзі будують зображення його крайніх точок.

Зображення предмета в лінзі може бути дійсним або уявним, прямим або переверненим, збільшеним або зменшеним. Характер зображення визначається тим, якою є лінза (збирна або розсіювальна), а також взаємним розміщенням предмета та лінзи. Зазвичай відстань від предмета до лінзи позначають d , а від лінзи до зображення - f .

Розглянемо спочатку випадок збірної лінзи. Якщо предмет розміщено між лінзою та її фокусом, то зображення є уявним, прямим, збільшеним. Якщо $d = F$, то промені виходять з лінзи паралельно один одному, ніде не перетинаються і зображення відсутнє. Якщо предмет віддалено від збірної лінзи на відстань, що задовольняє умові $F < d < 2F$, то зображення дійсне, збільшене, перевернене. Якщо $d = 2F$, то зображення дійсне, перевернене та дорівнює за величиною предмету. Якщо ж $d > 2F$, то зображення дійсне, перевернене, зменшене.

Розсіювальна лінза завжди дає уявне, пряме, зменшене зображення предмета.

Формулу, що зв'язує величини F , d та f часто називають *формулою тонкої лінзи*, або просто формулою лінзи. Вона має вигляд

$$D = \frac{1}{F} = \frac{1}{d} + \frac{1}{f}.$$

Якщо зображення уявне, величина f береться зі знаком "-".

Під лінійним збільшенням (k) предмету в лінзі розуміють відношення розмірів зображення (H) до розмірів предмета (h),

тобто $k = \frac{H}{h}$. Легко довести, що $k = \frac{f}{d}$.

Усі наведені вище формули точно виконуються тільки для *параксіальних* променів, тобто променів, що йдуть поблизу головної оптичної осі під малими кутами до неї. Якщо ж зображення утворюються при використанні не параксіальних променів, то ці зображення виявляються спотвореними. Спотворення зображень у лінзах називаються *абераціями*. Ми стисло розглянемо такі види аберацій: *сферичну аберацію*, *хроматичну аберацію*, *астигматизм*, *дисторсію*.

Сферична аберація пов'язана з тим, що краї лінзи заломлюють промені сильніше, ніж це потрібно для створення чіткого зображення. Тому зображення предмета на екрані виявляється дещо розмитим.

Хроматична аберація пов'язана з явищем дисперсії (тобто із залежністю показника заломлення речовини від довжини хвилі світла), внаслідок чого оптична сила лінзи для променів з різними довжинами хвиль є різною. В результаті краї зображення предмета на екрані спостерігаються забавленими.

Говорячи про *астигматизм*, зазначимо, що, коли поверхні, що обмежують лінзу, строго сферичні, то може спостерігатися тільки астигматизм косих пучків. Такий астигматизм буде в тому випадку, якщо промені падають на лінзу, утворюючи великі кути з головною оптичною віссю. При цьому залежно від положення екрана зображення точкового об'єкта є або розмитою плямою, або чітким відрізком, причому положень екрана, при яких зображення є чітким, два, і цим положенням відповідають два взаємно перпендикулярні відрізки.

Дисторсією називають спотворення зображення великих предметів, викликане тим, що промені, які йдуть від різних точок предмета, падають на лінзу під істотно різними кутами. Це, у свою чергу, призводить до різного збільшення лінзою центральних та периферичних частин предмета, тобто до спотворення зображення.

В оптичних приладах для усунення аберацій використовують спеціально підібрані системи лінз.

Наведений вище матеріал досить повно описує властивості окремо взятих тонких лінз та методи побудови зображень у них. Однак цей матеріал не містить інформації про методи побудови зображень у більш складних оптичних системах, ніж окремо взяті тонкі лінзи, зокрема, в оптичних системах, що складаються з кількох сферичних лінз. Деякі з таких систем можна розглядати, спираючись на теорію так званих *центрованих оптичних систем* (ЦОС), розроблену Гаусом.

Теорія центрованих оптичних систем може застосовуватися тоді, коли використовується система сферичних поверхонь, які розділяють ділянки з різною оптичною густиною, причому центри всіх цих сферичних поверхонь лежать на одній прямій (тому система і зветься центрованою оптичною системою). Ця пряма для такої ЦОС називається (як і для лінзи) головною оптичною віссю (ГОВ). На рис. 7.1 вона позначена O_1O_2 .

Порівняно простим прикладом центрованої оптичної системи є мікроскоп.

Важливо зазначити, що достатня точність при застосуванні теорії ЦОС для систем лінз досягається лише при використанні параксимальних променів.

При побудові зображень в окремо взятих тонких лінзах вище пропонувалося використовувати два з трьох характерних променів, для проведення яких необхідно знати положення оптичного центра лінзи та її фокусів. Для побудови ходу променів у ЦОС потрібна більша кількість особливих точок та пов'язаних з ними площин.

Нехай M_1 та M_2 на рис. 7.1 – граничні сферичні поверхні центрованої оптичної системи. Якщо промінь A_1 падає на поверхню M_1 , рухаючись паралельно головній оптичній осі, то з поверхні M_2 виходить промінь A_2 , який перетинає ГОВ у точці, яка на рис. 7.1 позначена як F_2 і називається другим (або заднім) фокусом системи. Аналогічно, якщо промінь B_2 падає на поверхню M_2 , рухаючись паралельно головній оптичній осі системи на той самій відстані від ГОВ, що і промінь A_1 , то він виходить з поверхні M_1 як промінь B_1 . Цей промінь перетинає ГОВ у точці F_1 , яка називається першим (або переднім) фокусом системи. Площини, що проходять через фокуси перпендикулярно до ГОВ, називаються фокальними.

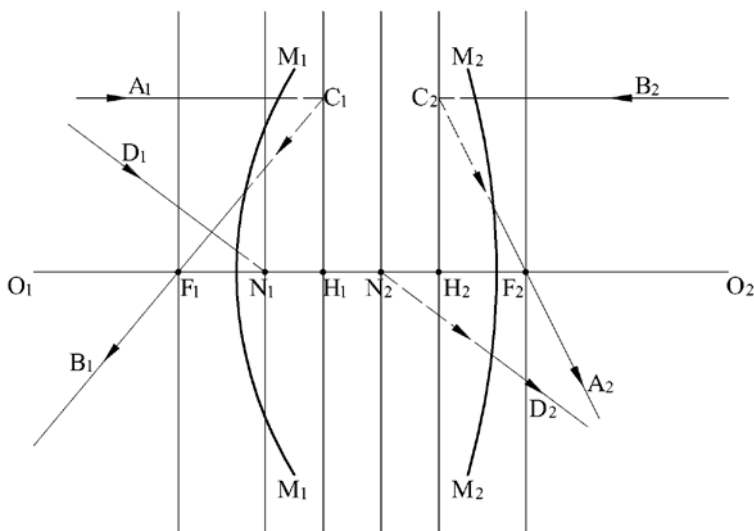


Рис. 7.1

Нехай точка C_1 – це точка перетину продовжень променів A_1 та B_1 , а точка C_2 – продовжень променів B_2 та A_2 . Площини, що проведені через точки C_1 та C_2 перпендикулярно до ГОВ, називають головними, а точки перетину цих площин з головною оптичною віссю системи (H_1 та H_2 на рис. 7.1) називають *головними точками* ЦОС.

Відстані H_1F_1 та H_2F_2 називають фокусними відстанями центрованої оптичної системи.

Головні точки та фокуси є так званими *кардинальними точками*. До кардинальних точок відносяться також *вузлові точки*. Ці точки лежать на головній оптичній осі та мають таку особливість, що промінь, який потрапляє в одну з вузлових точок під якимось кутом (промінь D_1 на рисунку), виходить з іншої вузлової точки (як промінь D_2) під тим самим кутом до ГОВ. На рисунку 7.1 вузлові точки позначені як N_1 та N_2 .

Площини, проведені через кардинальні точки перпендикулярно до ГОВ, називають *кардинальними площинами*.

Методи побудови зображень у ЦОС подібні до таких у тонких лінзах і базуються на використанні властивостей кардинальних точок та площин. При цьому вузлові точки для ЦОС виконують таку саму роль, що і оптичний центр для тонкої лінзи, а головні площини – ту саму роль, що і площини тонкої лінзи. Приклад побудови зображення точки показаний на рис. 7.2. На цьому рисунку S_2 – зображення точки S_1 . Промені, які при цьому можна використовувати, позначені цифрами 1, 2 та 3.

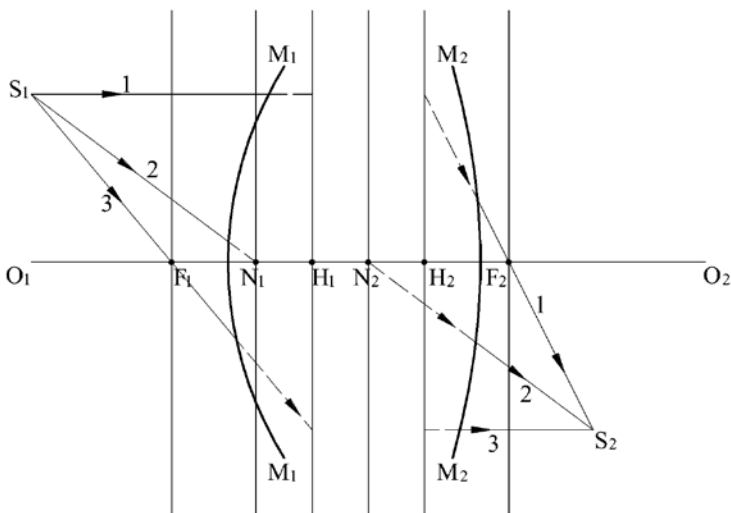


Рис. 7.2

Як зазначалося вище, прикладом центрованої оптичної системи є мікроскоп. Основною частиною оптичного мікроскопа є його тубус, тобто трубка, у якій розміщено дві збирні лінзи - *об'єтив* та *окуляр*. Хід променів в мікроскопі показаний на рис.7.3. З нього видно, що об'єтив дає збільшене, перевернене, дійсне зображення. Зображення, що створюється об'єктивом, розміщене між окуляром та його фокусом поблизу цього фокуса. Тому зображення в окулярі виходить уявним, а зображення об'єкта, що вивчається, в мікроскопі в цілому є уявним, збільшеним, переверненим.

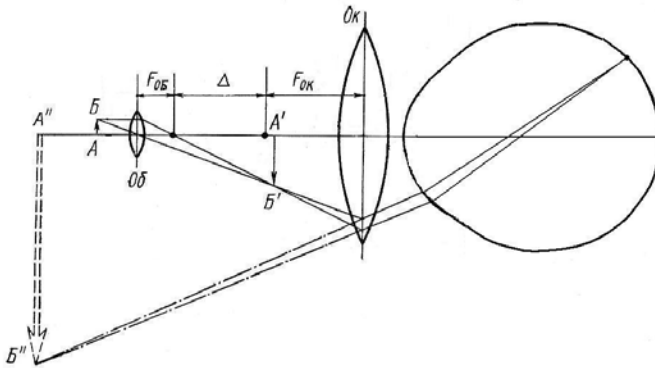


Рис. 7.3

Важливою характеристикою мікроскопа є його *кутове збільшення* (Γ). Кутим збільшенням оптичної системи називають відношення кута зору β_1 , під яким видно зображення предмета в оптичній системі, до кута зору β_2 , під яким видно предмет, що знаходиться на відстані найкращого зору, тобто

$$\Gamma = \frac{\beta_1}{\beta_2}.$$

Можна показати, що збільшення мікроскопа дорівнює добутку збільшення об'єктива ($\Gamma_{об}$) на збільшення окуляра ($\Gamma_{ок}$), тобто

$$\Gamma = \Gamma_{\text{об}} \cdot \Gamma_{\text{ок}}.$$

Збільшення об'єктива та окуляра обчислюються відповідно за формулами

$$\Gamma_{\text{об}} = \frac{\Delta}{F_{\text{об}}} \quad \text{та} \quad \Gamma_{\text{ок}} = \frac{a_0}{F_{\text{ок}}},$$

де Δ - *оптична довжина тубуса* мікроскопа, тобто відстань від заднього фокуса об'єктива до переднього фокуса окуляра; a_0 - *відстань найкращого зору*, яка дорівнює 25 см; $F_{\text{об}}$ та $F_{\text{ок}}$ - фокусні відстані об'єктива та окуляра відповідно.

Таким чином, для визначення збільшення мікроскопа можна використовувати формулу

$$\Gamma = \frac{\Delta \cdot a_0}{F_{\text{об}} \cdot F_{\text{ок}}}.$$

Здавалося б, з останньої формули виходить, що, підбираючи належним чином значення величин Δ , $F_{\text{об}}$ та $F_{\text{ок}}$, можна одержати скільки завгодно велике збільшення мікроскопа і розглядати скільки завгодно малі об'єкти. Проте це не так. Формула для збільшення мікроскопа одержана на основі законів геометричної оптики. Тому вона не може застосовуватися тоді, коли починає виявлятися явище дифракції світла, тобто при вивченні об'єктів, розміри яких близькі до довжини хвилі. Таким чином, існують мінімальні розміри предметів, які можна розглянути в мікроскоп, точніше існує *межа розрізнення мікроскопа* (z). Межа розрізнення мікроскопа - це мінімальна відстань між двома точками, які видно в мікроскопі як дві різні точки. На підставі формул, що описують явище дифракції, можна одержати формулу обчислення межі розрізнення оптичного мікроскопа. При нормальному падінні променів на об'єкт, що розглядається за допомогою мікроскопа, ця формула має вигляд

$$z = \frac{\lambda}{n \cdot \sin(u/2)} = \frac{\lambda}{A}, \quad (7.3)$$

де λ - довжина хвилі світла у вакуумі, n - показник заломлення середовища, що знаходиться між об'єктом і об'єктивом (найчастіше це рідина, яка називається імерсійною рідиною, або

імерсійним середовищем), u – *апертурний кут*, або *кутова апертура*. *Апертурний кут* - це кут між променями, що йдуть від об'єкта, що вивчається, до протилежних країв об'єктива. Величина $A = n \cdot \sin(u/2)$ називається *числовою апертурою*.

У сучасних потужних мікроскопах об'єкт, що вивчається, освітлюється спеціальною системою, яка складається з освітлювальної лампи й декількох конденсорів (лінз), що забезпечують похиле падіння променів на об'єкт. Мікроскопи з похилим падінням променів на об'єкт мають межу розрізнення, що обчислюється за формулою

$$z = \frac{0,5 \cdot \lambda}{n \cdot \sin(u/2)} \quad \text{або} \quad z = \frac{0,5 \cdot \lambda}{A}. \quad (7.4)$$

Таким чином, використання похилого падіння променів на об'єкт збільшує роздільну здатність мікроскопа (зменшує межу розрізнення) в два рази.

Отже, у мікроскоп не можна побачити об'єкти, розміри яких менші за межу розрізнення мікроскопа. У зв'язку з цим вводиться поняття *корисного збільшення* мікроскопа (Γ_k), величина якого обчислюється за формулою

$$\Gamma_k = \frac{z'}{z},$$

де z' - мінімальний розмір предмета, розміщеного на відстані найкращого зору від ока, при якому зберігається зручна розпізнаваність предмета оком. Вважають, що найменший кут зору, який відповідає умові зручної розпізнаваності, дорівнює $2'$ - $4'$. Це відповідає величині z' , яка дорівнює 140-280 мкм. Тоді для $\lambda = 555$ нм та $A = 1,43$ (числова апертура об'єктива з масляною імерсією) одержимо

$$500 A < \Gamma_k < 1000 A \quad \text{або} \quad 715 < \Gamma_k < 1430.$$

З останніх двох формул видно, що зменшити межу розрізнення мікроскопа можна або зменшуючи довжину хвилі, або збільшуючи числову апертуру. Тому одним зі шляхів підвищення роздільної здатності мікроскопа є використання імерсійної рідини. Як таку рідину найчастіше використовують кедрову олію ($n = 1,515$). Використання імерсійної рідини

збільшує числову апертуру як за рахунок збільшення n в порівнянні з «сухим» об'єктивом, так і за рахунок того, що при використанні «сухого» об'єктива промені, які йдуть від об'єкту до периферичних ділянок об'єктива, повністю відбиваються на межі покривного скла з повітрям і не потрапляють до об'єктива. Це призводить до зменшення величини u у формулах (7.3 та 7.4). Хід променів в «сухому» та імерсійному об'єктивах показаний на рис. 7.4а та 7.4б відповідно.

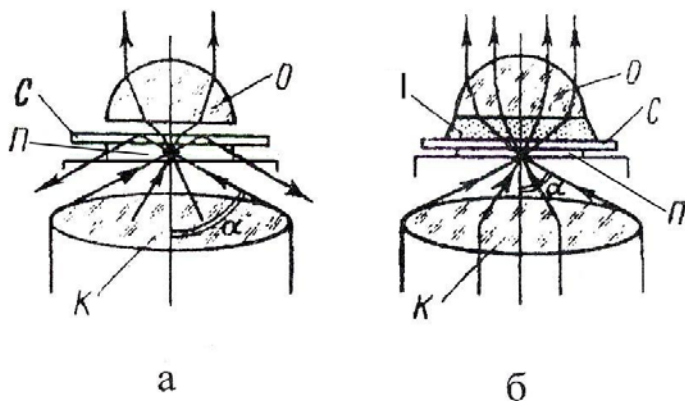


Рис.7.4

На цих рисунках П - препарат, С - покривне скло, І - імерсійна рідина, О - об'єктив, К - конденсор. Перевагою імерсійного об'єктива також є більша яскравість зображення, що пов'язано з попаданням в об'єктив у цьому випадку ширшого пучка променів, ніж у разі «сухого об'єктива».

Зменшити межу розрізнення (збільшити роздільну здатність мікроскопа) можна, зменшуючи довжину хвилі світла, що використовується для освітлення об'єкта. Тому вивчення мікроскопічних об'єктів не за допомогою видимого світла, а за допомогою ультрафіолетового випромінювання дозволило б побачити об'єкти, які неможливо побачити в оптичному мікроскопі. Але око людини не сприймає світло з довжиною хвилі, меншою за 380 нм. Крім того, звичайне скло, що використовується для створення лінз у мікроскопах, непрозоре

для ультрафіолетового випромінювання. Названі перешкоди долаються шляхом використання в *ультрафіолетовому мікроскопі* кварцової оптики (кварц прозорий для ультрафіолету) та створення спеціальних пристроїв, що перетворюють зображення, отримане в ультрафіолетовому світлі, у зображення, що сприймається людським зором (фотопластини, люмінесцентні екрани, електронно-оптичні перетворювачі). Для створення ультрафіолетового випромінювання, що освітлює об'єкт, зазвичай використовують ртутні лампи.

Найвищу роздільну здатність має *електронний мікроскоп*, про який докладніше розповідатиметься далі.

Ціла низка спеціальних методів мікроскопії не збільшують межу розрізнення мікроскопа, але мають якісь інші переваги в порівнянні зі звичайною мікроскопією. До таких методів належать *поляризаційна мікроскопія*, *люмінесцентна мікроскопія*, метод *темного поля*, метод *фазового контрасту*, методи *мікропроекції* та *мікрофотографії*.

Потреба у використанні методів темного поля та фазового контрасту пов'язана з тим, що мікроскопічні об'єкти, що вивчаються, зазвичай неможливо побачити без фарбування, оскільки вони прозорі. У той же час фарбування зазвичай ушкоджує об'єкти, що вивчаються, зокрема, убиваючи дані мікроорганізми. Цим обумовлена корисність методів мікроскопії, що дозволяють вивчати незабарвлені об'єкти.

При використанні методу темного поля мікроскоп обладнують спеціальним конденсором, який так спрямовує промені світла на досліджуваний зразок, що за відсутності розсіювання ці промені проходять повз об'єктива. Тому, якщо даний зразок - це однорідне середовище, що не розсіює світло, то промені світла в об'єktiv не потрапляють і спостерігач бачить в мікроскопі темне (неосвітлене) поле. Якщо ж зразок містить об'єкти, показник заломлення яких відрізняється від показника заломлення навколишнього середовища (такими є мікроорганізми), то на поверхні цих об'єктів відбувається розсіювання світла. Розсіяне світло розповсюджується в усі боки і, зокрема, потрапляє в об'єktiv. У результаті на фоні

темного поля видно світлі контури досліджуваних об'єктів (мікроорганізмів).

Ідея методу фазового контрасту полягає в тому, що світло, яке падає на прозорий об'єкт, частково проходить через цей об'єкт, а частково розсіюється на ньому. Ті промені, що пройшли, та ті, що розсіялись, дещо розрізняються за фазою і, зустрічаючись на екрані, інтерферують. Оскільки їхня різниця фаз невелика, у разі прозорого об'єкта промені створюють на екрані освітленість, що мало відрізняється від освітленості сусідніх точок екрана. Якщо ж збільшити різницю фаз променів, що пройшли прямо через об'єкт і тих, що розсіялися на ньому, то можна досягти того, щоб при інтерференції ці промені послаблювали один одного, і освітленість відповідної ділянки екрану істотно відрізнялася від освітленості його сусідніх точок (виникав, як то кажуть, фазовий контраст). Зміна фаз променів проводиться таким чином. При нормальному падінні паралельних променів світла на об'єкт промені, що пройшли через нього, після заломлення в об'єктиві пройдуть через фокус об'єктива. Ті промені, що розсіялися на об'єкті, через фокус об'єктива не пройдуть. Тому, розмістивши у фокусі об'єктива фазову пластинку, що збільшує оптичну довжину шляху променів, можна змінити фазу променів, що пройшли прямо через об'єкт. Іноді роблять інакше: використовують фазову пластинку, що розташована в фокальній площині об'єктива та має в центрі отвір. У цьому випадку змінюється оптична довжина шляху, а отже, і фаза променів, що розсіялись на об'єкті.

Зображення, що створюється мікроскопом при звичайній мікроскопії, є уявним. Одержання дійсного зображення на сітківці пов'язане з тим, що око, маючи чималу оптичну силу, збирає розбіжні промені, що виходять з окуляра. Якщо ж спробувати одержати зображення не на сітківці ока, а на якому-небудь екрані, то для цього треба зробити зображення, що створюється мікроскопом, дійсним. Цього можна досягти, збільшуючи відстань між об'єктивом та окуляром таким чином, щоб зображення, що створюється об'єктивом, розміщувалося не між окуляром і його фокусом, як це відбувається при звичайній мікроскопії, а було віддалене від окуляра на відстань, трохи

більшу фокусної відстані. Якщо при цьому зображення одержують на екрані, то говорять про мікропроекцію, якщо ж зображення виходить на фотопластині, то говорять про мікрофотографію.

7.2 Оптична рефрактометрія

Залежність граничних кутів повного відбивання і заломлення від показників заломлення середовищ дозволяє за значеннями цих кутів визначати показники заломлення різних речовин, зокрема рідин. Такі вимірювання проводяться за допомогою *рефрактометра*, причому рефрактометр дозволяє вимірювати показники як прозорих так і непрозорих рідин. Такі вимірювання базуються на використанні формул (7.1) та (7.2).

Найчастіше у склад рефрактометра входять дві прямокутні призми, компенсатор, об'єктив зорової труби, поворотна призма, шкала або шкали вимірюваних величин, окуляр зорової труби та деякі інші деталі. Одна з шкал рефрактометра – це шкала показників заломлення. Враховуючи, що в медико-лабораторній практиці часто визначається концентрація білків у сироватці крові, рефрактометри часто мають також шкалу концентрацій.

Основною частиною рефрактометра є дві прямокутні призми, зроблені з того самого сорту скла з показником заломлення більшим за показник заломлення досліджуваних рідин.

Призми обернені одна до одної гіпотенузними гранями, між якими є зазор. На гіпотенузну грань нижньої призми поміщають краплю досліджуваної рідини. Потім верхню призму притискають до нижньої призми.

Якщо вимірюється показник заломлення прозорої рідини, то світло до рідини потрапляє через верхню призму. Нижня грань цієї призми є матовою. Світло розсіюється на цій грані, внаслідок чого падає на поверхню рідини під усіма можливими кутами, у тому числі, і під кутами, близькими до 90° . На поверхні рідини світло заломлюється, причому кути заломлення приймають усі значення від нуля до граничного кута заломлення. Внаслідок цього, коли світло нарешті потрапляє на

шкалу, частина цієї шкали виявляється освітленою, а частина – ні, причому положення межі світло-тінь на шкалі залежить від величини граничного кута заломлення, а отже, – від показника заломлення досліджуваної рідини.

Якщо призма освітлюється білим світлом, то внаслідок явища дисперсії межа світло-тінь на шкалі виявляється забарвленою та розмитою. Для усунення забарвлення та отримання чіткої межі використовується вищевказаний компенсатор, який складається з кількох призм з різними показниками заломлення. Компенсатор розташовується одразу ж за другою прямокутною призмою.

При вимірюванні показника заломлення непрозорої рідини світло до рідини потрапляє через нижню призму. Передня грань цієї призми є матовою. Світло розсіюється на цій грані, внаслідок чого падає на поверхню рідини під всіма можливими кутами, у тому числі, і під кутами, близькими до 90° . Якщо кут падіння на межу розділу скло-рідина менший за граничний кут повного внутрішнього відбивання, то світло частково відбивається, але більша його частина проходить до рідини та поглинається. Якщо ж кут падіння на межу розділу скло-рідина більший за граничний кут повного внутрішнього відбивання, то світло повністю відбивається від межі скло-рідина. У результаті, коли світло потрапляє на шкалу, частина цієї шкали виявляється добре освітленою, а частина – погано, причому положення межі добре освітлення-погане освітлення на шкалі залежить від величини граничного кута повного внутрішнього відбивання, а отже, – від показника заломлення досліджуваної рідини.

Корисно вказати на те, що друга методика вимірювання показника заломлення може використовуватися також і у випадку прозорих рідин, але точність вимірювань показника заломлення прозорих рідин за першою методикою вище, оскільки положення межі світло-тінь визначити легше, ніж положення межі добре освітлення-погане освітлення.

7.3 Поляризація світла

Поляризація світла є одним з проявів хвильової природи світла. Тому спочатку слід коротко розглянути основні поняття хвильової оптики.

Хвильова оптика є одним з розділів фізичної оптики, що вивчає сукупність явищ, у яких виявляється хвильова природа світла, зокрема таких явищ, як інтерференція світла, дифракція світла, поляризація світла тощо.

На відміну від геометричної, хвильова оптика дає можливість розглядати процеси поширення світла не тільки в тих випадках, коли розміри систем, що формують або розсіюють світлові пучки, набагато більші за довжини хвиль, але й при будь-якому співвідношенні між ними.

Коротко розглянемо інтерференцію та дифракцію світла, а також деякі застосування їх у медицині.

Почнемо з інтерференції світла. Нагадаємо, що хвилі є когерентними, якщо вони мають однакову частоту та сталу різницю фаз. Для когерентних хвиль (і лише для них) може спостерігатися явище інтерференції.

Інтерференція хвиль (зокрема світлових) - це таке складання в просторі двох або декількох когерентних хвиль, при якому в різних точках простору відбувається посилення або послаблення амплітуди результуючої хвилі.

Величина напруженості (E) електричного поля світлової хвилі в деякій точці простору в момент часу (t) описується формулою

$$E = E_0 \cos \varphi = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0),$$

де E_0 - амплітуда напруженості електричного поля світлової хвилі, φ - фаза коливань, ω - циклічна частота коливань, φ_0 - початкова фаза.

Найпростіший випадок складання когерентних світлових хвиль спостерігається тоді, коли напрями коливань електричних векторів цих хвиль (векторів напруженості електричного поля) співпадають. При цьому відповідно до принципу суперпозиції, результуюче коливання від двох хвиль дорівнює їхній сумі, тобто

$$E = E_1 + E_2 = E_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

В останній формулі E_0 та φ_0 - амплітуда та початкова фаза результуючого коливання відповідно, причому амплітуда результуючого коливання визначається виразом

$$E_0^2 = E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos \Delta\varphi, \quad (7.5)$$

де E_{01} та E_{02} - амплітуди напруженостей електричних полів хвиль, що інтерферують, $\Delta\varphi$ - їхня різниця фаз.

Залежно від цієї різниці фаз результат складання хвиль може бути істотно різним. Величина амплітуди результуючих коливань визначається останньою формулою і залежно від значень різниці фаз лежить в межах

$$|E_{01} - E_{02}| \leq E_0 \leq E_{01} + E_{02}.$$

З формули (7.5) виходить, що при виконанні умови

$$\Delta\varphi = 2\pi k,$$

де $k = 0; \pm 1; \pm 2; \dots$, амплітуда результуючого коливання при інтерференції є максимальною й дорівнює $E_0 = E_{01} + E_{02}$, а при виконанні умови

$$\Delta\varphi = (2k + 1)\pi$$

амплітуда є мінімальною й дорівнює $E_0 = |E_{01} - E_{02}|$.

Природні джерела світла випромінюють некогерентні світлові хвилі, оскільки кожен атом таких джерел випромінює світло незалежно від інших. З погляду хвильової теорії світла випромінювання кожного атома можна розглядати як деяку порцію («цуг») хвиль, що випромінюються за час порядку 10^{-8} с. Тому в кожній точці простору відбувається накладання цугів хвиль, що випромінені різними атомами джерела світла та мають різні частоти, напрями коливань вектора \vec{E} , амплітуди й початкові фази. Такі хвилі є некогерентними, а отже, не створюють стійкої інтерференційної картини. Внаслідок цього для спостереження явища інтерференції світла найчастіше використовують хвилі, що випромінені одним джерелом світла в приблизно одному напрямку, але які пройшли різні шляхи до зустрічі в точці, у якій спостерігається інтерференція.

Час випромінювання одного атома обмежений, і різниця ходу променів, що інтерферують, при будь-якому способі спостереження інтерференції не може бути дуже великою,

оскільки, інакше, у точці спостереження зустрінуться некогерентні хвилі, що випромінені різними атомами джерела. Найбільша різниця ходу для інтерференції хвиль, що йдуть від одного джерела, визначається, виходячи із швидкості світла й часу випромінювання атома. Вона дорівнює $\sigma\tau = 3 \cdot 10^8 \cdot 10^{-8} = 3 \text{ м}$.

Якщо світлова хвиля поширюється в оптично ізотропному середовищі, то оптичною довжиною шляху цієї хвилі називається величина xn , де x - довжина шляху світла в речовині, n - показник заломлення речовини.

Якщо в деякій точці простору складаються дві когерентні хвилі зі співпадаючим напрямом вектора \vec{E} , що мали при випусканні однакові початкові фази, то величина $\Delta\varphi$ у формулі (7.5) залежить від різниці оптичних довжин шляхів цих хвиль. Ця різниця називається оптичною різницею ходу (δ).

Точніше

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(x_1 n_1 - x_2 n_2) = \frac{2\pi\delta}{\lambda}.$$

У зв'язку із цим умови максимуму та мінімуму при інтерференції можуть бути записані відповідно у вигляді

$$\delta = k\lambda \quad \text{та} \quad \delta = (2k + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Таким чином, при інтерференції максимумами спостерігаються в тих точках, для яких оптична різниця ходу дорівнює парному числу напівхвиль, мінімумами – в точках, для яких оптична різниця ходу дорівнює непарному числу напівхвиль.

Цікавим та важливим методом, що ґрунтується на явищі інтерференції світла, є *голографія*.

Голографія - це спосіб запису та відновлення інтерференційної картини, яка утворена хвилями, одна з яких відбита предметом, що освітлюється джерелом світла (предметна хвиля), а інша йде безпосередньо від джерела світла (опорна хвиля). Ці хвилі є когерентними. Зареєстрована інтерференційна картина називається голограмою. Голограма,

освітлена опорною хвилею, створює таку ж картину, яку створювала при записі предметна хвиля.

Основна властивість голограми, що відрізняє її від звичайного фотографічного знімка, полягає в тому, що на знімку реєструється лише розподіл амплітуди падаючої на неї предметної світлової хвилі, у той час, як на голограмі, крім того, реєструється й розподіл фази предметної хвилі відносно фази опорної хвилі. Інформація про амплітуду предметної хвилі записана на голограмі у вигляді контрасту інтерференційного рельєфу, а інформація про фазу - у вигляді форми та частоти інтерференційних смуг. У результаті голограма при освітленні опорною хвилею відновлює копію предметної хвилі, тобто спостерігається об'ємне зображення предмета.

Оскільки об'ємне зображення містить значно більшу кількість інформації, ніж звичайне плоске, голографія має широкі перспективи застосування в різних галузях науки, зокрема в біології та медицині. Прикладом цього є голографічний гастроскоп. У ньому опорний та предметний пучки лазерного випромінювання передаються до головки приладу по двох волоконних світловодах; одержана голограма фіксується на мікроплівці. При відновленні об'ємне зображення стінок порожнини спостерігається поза тілом.

Розглянемо тепер дифракцію світла. Кажучи про дифракцію світла, зазвичай мають на увазі відхилення світла від прямолінійного поширення під час огинання світловими хвилями країв перешкод або отворів, розміри яких порівнянні з довжиною хвилі.

Важливим для подальшого викладу матеріалу є поняття хвильової поверхні. Хвильовою поверхнею (поверхнею рівної фази) називають поверхню, утворену точками, у яких фаза хвилі в даний момент часу однакова.

Для опису явища дифракції світла використовується принцип Гюйгенса-Френеля. Згідно з цим принципом кожна точка хвильової поверхні є джерелом вторинних хвиль, а подальші хвильові поверхні утворюються як результат інтерференції цих вторинних хвиль.

Точок хвильової поверхні, що є джерелами вторинних хвиль, незліченна кількість. Тому розрахунок результату

інтерференції цих хвиль зводиться до досить громіздкого інтегрування. Для спрощення такого інтегрування Френелем був запропонований метод поділу фронту хвилі на такі зони, що хвилі від відповідних ділянок сусідніх зон, приходять в точку спостереження в протилежній фазі й послаблюють (гасять) одна одну.

Використовуючи цей метод, можна розрахунковим шляхом визначити вигляд дифракційної картини в найпростіших випадках. Наприклад, якщо монохроматичне світло дифрагує на одиночній тонкій щілині, за якою розміщена збирна лінза, а у фокальній площині лінзи розміщено екран, то на екрані можна спостерігати результат інтерференції променів – вузькі чітко виражені максимуми (світлі смуги), розділені ширшими майже неосвітленими ділянками. Найяскравіші ділянки світлих смуг (дифракційні максимуми) задовольняють умові

$$a \sin \varphi = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (7.6)$$

де a – ширина щілини, φ – кут відхилення при дифракції тих променів, що формують максимум, λ – довжина хвилі світла, k – ціле число ($0; \pm 1; \pm 2; \dots$).

Найменш освітлені ділянки темних смуг (дифракційні мінімуми) задовольняють умові

$$a \sin \varphi = k\lambda,$$

де φ – кут відхилення при дифракції тих променів, що формують мінімум.

Смуга, що відповідає $k = 0$ (центральный максимум) у формулі (7.6) є найяскравішою, а освітленість бічних смуг (максимумів) зменшується від центрального максимуму до периферії.

Ширина та число цих смуг залежать від співвідношення довжини хвилі й ширини щілини. Чітко виражені дифракційні максимуми та мінімуми спостерігаються лише тоді, коли ширина щілини не на багато разів перевищує довжину хвилі.

З наведених вище співвідношень видно, що положення максимуму (окрім центрального) залежить від довжини хвилі.

Тому при освітленні щілини природним світлом дифракційні максимуми для різних кольорів розділяться. Відбудеться розкладання світла в спектр. Проте якість такого спектра низька. Тому для збільшення інтенсивності та чіткішого розділення кольорів використовують дифракційну решітку.

Дифракційна решітка є рядом прозорих паралельних ділянок однакової ширини (a), що розділені між собою непрозорими проміжками однакової ширини (b). Сума $a + b = d$ називається періодом, або сталою, дифракційної решітки. Для видимого світла дифракційну решітку зазвичай виготовляють шляхом нанесення на прозору скляну пластину тонких паралельних штрихів, непрозорих для світла.

При дифракції світла на дифракційній решітці інтерферують як промені, що йдуть від різних точок однієї щілини, так і промені, що йдуть від різних щілин.

При цьому відбувається різке зростання амплітуди результуючого коливання тільки в тих випадках, коли різниці фаз променів, що йдуть від відповідних точок усіх щілин, кратні 2π , а різниці оптичних шляхів кратні довжині хвилі світла. Тому умова головних максимумів дифракційної решітки має вигляд

$$d \sin \varphi_k = \lambda k, \quad k = 0; \pm 1; \pm 2 \dots$$

Якщо число щілин решітки дорівнює N , то результуюча амплітуда головних максимумів є пропорційною N , а інтенсивність - N^2 . Зі збільшенням кількості щілин зростає також чіткість дифракційної картини, тобто збільшується інтенсивність та зменшується ширина головних максимумів.

Якщо на дифракційну решітку падає монохроматичне світло, то дифракційні максимуми для променів різного кольору просторово розділяються. Нульовий максимум ($k = 0$), що відповідає $\varphi = 0$, для всіх довжин хвиль співпадає, але вже максимуми першого порядку ($k = 1$) для фіолетових променів розташовуються ближче до центру, ніж для червоних. Між ними розташовуються максимуми проміжних кольорів. Таким чином, спостерігаються дифракційні спектри. У цьому випадку k визначає порядок (номер) дифракційного спектру. Як

зазначалося, при зростанні кількості щілин дифракційної решітки спектральні лінії стають вужчими та різкішими.

Здатність дифракційної решітки розкласти падаюче на неї світло в спектр використовується в спектральних приладах.

Основними характеристиками дифракційної решітки щодо якості одержаних спектрів є *кутова дисперсія* та *роздільна здатність*.

Кутова дисперсія $\frac{d\varphi}{d\lambda}$, що характеризує кутову ширину спектру для даної довжини хвилі λ , дорівнює

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{k}{d \cdot \cos \varphi} = \frac{k}{\sqrt{d^2 - k^2 \lambda^2}}.$$

Роздільна здатність R дорівнює відношенню довжини хвилі λ до найменшого інтервалу довжин хвиль $\Delta\lambda$, який ще може розділити решітка

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN.$$

Перейдемо, нарешті, до поляризації світла. Світло, як й інші електромагнітні хвилі - це поперечні хвилі. У світловій хвилі напрями коливань вектора напруженості електричного поля (\vec{E}) та вектора індукції магнітного поля (\vec{B}) перпендикулярні напрями поширення хвилі, причому напрями коливань векторів \vec{E} та \vec{B} також взаємно перпендикулярні.

Як зазначалося вище, у загальному випадку світло створюється різними елементарними випромінювачами (атомами), причому напрями коливань вектора \vec{E} у хвилях, створених кожним з атомів, відрізняються один від одного. У результаті у світла, створеного природними джерелами, амплітуда коливань у кожному з напрямів у площині, перпендикулярній напрями поширення світла, виявляється приблизно однаковою. Таке світло, в якому амплітуди коливань вектора \vec{E} у всіх напрямках, перпендикулярних напрями поширення світла, майже однакові, називається природним

світлом. Якщо ж коливання вектора \vec{E} відбуваються точно вздовж однієї прямої, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі, то таке світло (така хвиля) є поляризованим, точніше, повністю поляризованим, або плоскополяризованим. При цьому площина, утворена напрямом коливання вектора \vec{E} та напрямом поширення хвилі, називається площиною поляризації світла. Світлова хвиля, що випромінюється елементарним випромінювачем (окремим атомом), є поляризованою. Якщо коливання вектора \vec{E} відбуваються в різних напрямках, перпендикулярних напрямку поширення світла, але амплітуда коливань в одних напрямках помітно відрізняється від амплітуди коливань в інших напрямках, то таке світло називається частково поляризованим. На рис. 7.5а, 7.5б та 7.5в показані напрями коливань вектора \vec{E} у разі природного, плоскополяризованого та частково поляризованого світла відповідно. Напрямок поширення світла на рис. 7.5 перпендикулярний до площини рисунка.

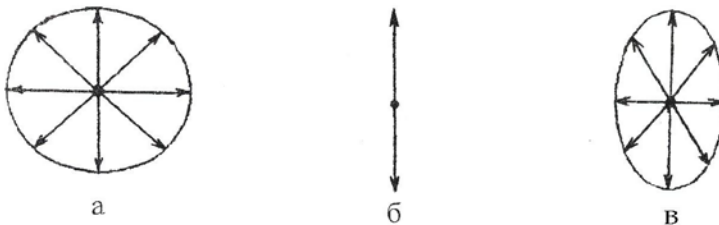


Рис. 7.5

Пристрої, за допомогою яких з природного світла виділяють поляризоване світло, називаються *поляризаторами*. Перетворення природного світла на повністю або частково поляризоване називається поляризацією світла.

Якщо на поляризатор падає природне світло, то інтенсивність поляризованого світла, що вийшло із поляризатора, удвічі менша за інтенсивність падаючого на поляризатор світла. Якщо плоскополяризоване світло, одержане за допомогою одного поляризатора, падає на інший поляризатор, який при цьому називають *аналізатором*, то інтенсивність світла, що вийшло з аналізатора, залежить від

величини кута між площинами, у яких поляризують світло поляризатор й аналізатор (площини, в яких поляризують світло поляризатор і аналізатор називаються їх головними площинами). Ця залежність називається *законом Малюса* і має вигляд

$$I = I_0 \cdot \cos^2 \varphi,$$

де I - інтенсивність світла, що вийшло з аналізатора, I_0 - інтенсивність світла, падаючого на аналізатор (що вийшло з першого поляризатора), φ - кут між площиною поляризації падаючого світла (головною площиною поляризатора) і площиною, у якій поляризує світло аналізатор (головною площиною аналізатора). Очевидно, що, якщо, $\varphi = 0$, то $I = I_0$, а

якщо $\varphi = 90^\circ$, то $I = 0$.

При падінні світла на межу поділу двох діелектриків утворюються відбитий та заломлений промені, причому в загальному випадку обидва промені є частково поляризованими, тобто відбувається поляризація світла. Якщо падаюче світло природне, то заломлений промінь здебільшого поляризований в площині падіння, а відбитий - у площині, перпендикулярній площині падіння. Якщо кут падіння (α) задовольняє співвідношенню

$$\operatorname{tg} \alpha = n, \quad (7.7)$$

де n - показник заломлення другого середовища відносно першого, то відбитий промінь є повністю поляризованим, а заломлений - частково, хоча ступінь поляризації його при цьому максимальний. Співвідношення (7.7) називається *законом Брюстера*, а кут падіння, при якому виконується співвідношення (7.7), називають *кутом Брюстера*.

Явище поляризації світла при його падінні на межу поділу діелектриків використовують для одержання поляризованого світла. При цьому використовують набір тонких прозорих пластин (стопу Столетова). На кожній з граней кожної з пластин відбувається часткова поляризація заломленого променя, внаслідок чого ступінь поляризації світла збільшується й на виході із стопи світло є вже майже повністю поляризованим.

Поляризація світла відбувається також при *подвійному променезаломленні*. Явище подвійного променезаломлення спостерігається в *оптично анізотропних* середовищах, тобто середовищах, оптичні властивості яких залежать від напрямку поширення світла в них. Типовим прикладом оптично анізотропних середовищ є кристали, наприклад, ісландський шпат. Швидкість поширення світла в оптично анізотропних кристалах у різних напрямках є різною, причому існує напрям, у якому швидкість поширення світла екстремальна (тобто або максимальна, або мінімальна). Цей напрям називається *оптичною віссю кристала*.

Зазначимо, що подвійне променезаломлення може спостерігатися й у середовищах, які в звичайних умовах є оптично ізотропними, якщо ці середовища піддати деформуючій дії. Ступінь оптичної анізотропії, що виникає при цьому, тим більший, чим більші ті механічні напружки в цих середовищах, які викликані їхньою деформацією.

Якщо промінь природного світла падає на оптично анізотропний кристал, то в результаті заломлення світла в загальному випадку утворюються два промені. Для одного з цих променів виконується закон заломлення світла, тобто заломлений промінь поширюється в площині падіння променя, і такий промінь називається *звичайним*. Інший промінь, який називається *незвичайним* променем, поширюється в площині, утвореній падаючим променем і оптичною віссю кристала, що проходить через точку падіння променя. Цю площину називають *головною оптичною площиною*. Подвійне променезаломлення не спостерігається, якщо промінь поширюється вздовж оптичної осі.

Обидва промені (звичайний, і незвичайний) повністю поляризовані, причому незвичайний промінь поляризований в головній площині, а звичайний - у площині, яка перпендикулярна до головної.

Швидкість поширення звичайного променя не залежить від напрямку його поширення в оптично анізотропному середовищі. Швидкість поширення незвичайного променя залежить від напрямку його поширення. Тому швидкості поширення звичайного та незвичайного променів в оптично

анізотропному середовищі різні, а отже, різні й показники заломлення середовища для цих променів. Кристали, у яких швидкість поширення звичайного променя (v_o) більша за швидкість поширення незвичайного променя (v_e), називаються позитивними. Якщо ж в кристалі $v_o < v_e$, то такий кристал називається негативним.

У деяких кристалах з подвійним променезаломленням (турмалін, герпатит тощо) один з променів поглинається значно сильніше за інший. Таке явище називається *дихроїзмом*. У результаті при достатній товщині кристала, що має властивість дихроїзму, з нього виходить тільки один повністю поляризований промінь. Такі кристали можуть використовуватися як поляризатори світла.

Поляризатори, засновані на використанні явища дихроїзму, є дрібними кристалами (найчастіше - герпатиту), штучно орієнтованими та закріпленими на целулоїдній плівці. При цьому вдається отримати поляризатори з великою поверхнею. Проте такі поляризатори мають важливий недолік - вони зафарбовують біле світло (внаслідок різного поглинання світла з різними довжинами хвиль).

Для одержання незабарвленого поляризованого світла може використовуватися *призма Ніколя*, або просто *ніколь*. Призма Ніколя, показана на рис. 7.6, виготовляється з ісландського шпату та складається з двох частин, грані яких склеєні канадським бальзамом. Показник заломлення канадського бальзаму ($n = 1,55$) більший показника заломлення ісландського шпату для незвичайного променя ($n_e = 1,49$), але менший показника заломлення ісландського шпату для звичайного променя ($n_o = 1,66$).

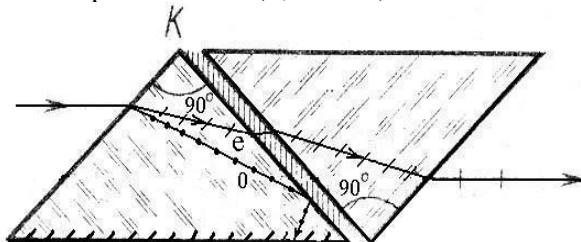


Рис. 7.6.

Призма побудована так, що кут падіння звичайного променя, позначеного на рисунку літерою (о), на межу поділу ісландський шпат - канадський бальзам більший кута повного внутрішнього відбивання. У результаті незвичайний промінь, позначений на рисунку літерою (е), проходить через склеєні грані призми і виходить з неї, а звичайний промінь зазнає повного відбивання на межі поділу шпату з канадським бальзамом, а потім поглинається зачорненою бічною гранню призми. Таким чином, з призми Ніколя виходить тільки повністю поляризований незвичайний промінь. Недоліком призми Ніколя є її порівняно невеликі розміри, що не дозволяє працювати із широкими пучками світла.

Існують речовини, що здатні обертати площину поляризації світла. Такі речовини називаються *оптично активними*.

Якщо через оптично активну речовину пропускати плоскополяризоване світло, то можна виявити, що світло, яке вийшло з цієї речовини, залишається плоскополяризованим, але його площина поляризації обернена щодо площини поляризації початкового променя навколо напрямку поширення променя на деякий кут α . При цьому величина кута α пропорційна довжині шляху (ℓ), пройденого світлом в оптично активній речовині, тобто

$$\alpha = \alpha_0 \ell,$$

де α_0 - коефіцієнт пропорційності, який називають *сталою обертання*. Стала обертання речовини залежить від її температури та від довжини хвилі світла. Залежність сталої обертання від довжини хвилі світла є причиною такого явища як *обертальна дисперсія*, тобто залежності кута повороту оптично активною речовиною площини поляризації світла, що проходить через нього, від довжини хвилі світла.

Оптичну активність мають як деякі кристалічні речовини (наприклад, кварц), так і деякі рідини (наприклад, скипидар), а також деякі гази (наприклад, пари камфори). Оптична активність речовин пов'язана з асиметричністю будови молекул цих речовин або їх кристалічних решіток (у кристалів). При

цьому залежно від особливостей будови молекул (решіток) оптично активні речовини можуть бути або правообертаючими, або лівообертаючими, тобто можуть обертати площину поляризації світла, що проходить через них, або за годинниковою стрілкою, або проти годинникової стрілки (якщо дивитися назустріч світловому променю). Окрім описаної природної оптичної активності може існувати і штучна (наведена) оптична активність. Вона виникає, якщо помістити оптично неактивну речовину в магнітне поле. Це явище називається *ефектом Фарадея*.

Розчини оптично активних речовин (наприклад, цукру) в неактивних розчинниках (наприклад, у воді) також оптично активні, причому кут повороту площини поляризації світла шаром такого розчину залежить від концентрації оптично активної речовини. Ця залежність визначається формулою

$$\alpha = [\alpha_0] \cdot c \ell,$$

де c - концентрація оптично активної речовини в розчині, а $[\alpha_0]$ - коефіцієнт пропорційності, який називається *питомим обертанням*. Питоме обертання розчину оптично активної речовини залежить від довжини хвилі, температури розчину та властивостей розчинника.

Залежність величини $[\alpha_0]$ від довжини хвилі визначається *законом Біо*:

$$[\alpha_0] \sim 1/\lambda^2.$$

Залежність кута повороту площини поляризації світла розчином оптично активної речовини від концентрації цієї речовини лежить в основі методу визначення концентрації оптично активних речовин у розчині, який називається *поляриметриєю*, або *цукрометриєю*. Використовувані при цьому вимірювальні пристрої називаються *поляриметрами*, або *цукрометрами*.

Молекули найважливіших біохімічних сполук (білків, цукрів, нуклеїнових кислот тощо) асиметричні, унаслідок чого ці речовини (та їх розчини) мають оптичну активність. При цьому для всіх названих речовин можуть існувати і правообертаючі, і лівообертаючі молекули, але їх біологічна

значущість для людини істотно різна. Суміш, у якій концентрації лівообертаючих і правообертаючих молекул однакові, називається рацемічною.

На явищі поляризації світла заснована робота поляризаційного мікроскопа. Поляризаційний мікроскоп відрізняється від звичайного тим, що до його складу входять поляризатор і аналізатор. Поляризатор розташований перед конденсором та здійснює поляризацію світла, що освітлює досліджуваний об'єкт. Аналізатор розташований в тубусі мікроскопа. Якщо площини поляризації світла поляризатором та аналізатором (головні площини поляризатора та аналізатора) взаємно перпендикулярні (схрещені поляризатор та аналізатор), то за наявності ізотропного зразка, що не має оптичної активності, поле зору в поляризаційному мікроскопі буде темним. Спостерігатися в поляризаційному мікроскопі при цьому можуть об'єкти або оптично анізотропні, або оптично активні. Тканини живих організмів містять різні право- та лівообертаючі речовини, причому сумарна оптична активність біологічних тканин практично дорівнює нулю. Тому поляризаційний мікроскоп використовується тільки для вивчення структур, що мають оптичну анізотропію. До таких в людському організмі належать, наприклад, м'язова, кісткова та нервова тканини.

Поляризоване світло можна використовувати для вивчення розподілу механічної напруги в моделях різних анатомічних складових людського тіла (кістках) або стоматологічних конструкціях. Якщо ці моделі зроблені з прозорих оптично ізотропних речовин, то, як вказувалося вище, при деформаціях ці речовини стають оптично анізотропними, причому ступінь анізотропії тим більший, чим більша механічна напруга, що виникає в моделі при деформації. Унаслідок подвійного променезаломлення виникають два когерентні промені (звичайний та незвичайний). Після проходження поляризатора, площина поляризації якого не перпендикулярна площинам поляризації звичайного та незвичайного променів, ці промені інтерферують. Різниця ходу променів, а отже, й колір (довжина хвилі) світла, для якого при інтерференції виконується умова максимуму, залежить від величини механічної напруги в

тих або інших елементах моделі. У результаті по картині кольорових смуг та плям, що спостерігається, можна робити висновок про ступінь напруженості тих або інших елементів моделі. Описаний метод називається методом *фотопружності*.

7.4 Поглинання, розсіяння та дисперсія світла

Серед явищ, що спостерігаються при взаємодії світла з речовиною, у цьому розділі розглядатимуться *поглинання, розсіяння* та дисперсія світла.

Поглинанням світла називають зменшення інтенсивності світла при проходженні через речовину внаслідок перетворення енергії світла в інші види енергії.

Поглинання світла речовиною описується законом Бугера:

$$I = I_0 e^{-k\ell}, \quad (7.8)$$

де I - інтенсивність світла, що пройшло через шар речовини товщиною ℓ , I_0 - інтенсивність падаючого на цю речовину світла, k - *натуральний показник поглинання*. Натуральний показник поглинання є характеристикою поглинаючого середовища та залежить від довжини хвилі світла. Тому формула (7.8) точно виконується тільки для монохроматичного світла, і показник (k) вірніше називати натуральним монохроматичним показником поглинання. Натуральний монохроматичний показник поглинання речовини чисельно дорівнює величині, що зворотна відстані, яку повинне пройти світло в цій речовині, щоб його інтенсивність зменшилася в e ($\approx 2,7$) разів.

Практично важливим є випадок, коли світло поглинається речовиною, розчиненою в деякому розчиннику, причому поглинанням світла розчинником можна знехтувати. У цьому випадку інтенсивність світла, що пройшло через розчин, залежить від концентрації розчиненої речовини. Ця залежність для розбавлених (не дуже концентрованих) розчинів має вигляд

$$I = I_0 e^{-\chi'c\ell}, \quad (7.9)$$

де c - молярна концентрація розчину, а χ' - *натуральний молярний показник поглинання*. Формулу (7.9) називають

законом Бугера - Ламберта - Бера. Цей закон часто записується у вигляді

$$I = I_0 \cdot 10^{-\chi c \ell}, \quad (7.10)$$

де χ - *молярний показник поглинання*. Очевидно, що $\chi = \chi' \lg e \approx 0,43\chi'$.

Показники χ' та χ залежать від довжини світла. Тому формули (7.9) та (7.10) точно виконуються тільки для монохроматичного світла, а показники χ' та χ слід називати монохроматичними показниками поглинання.

Для характеристики поглинання світла речовиною можуть також використовуватися такі величини як *коефіцієнт пропускання* (τ) та *оптична густина розчину* (D):

$$\tau = \frac{I}{I_0}, \quad D = \lg\left(\frac{1}{\tau}\right) = \lg\left(\frac{I_0}{I}\right) = \chi c \ell.$$

Звідси випливає, що закон Бугера - Ламберта - Бера можна записати у вигляді

$$I = I_0 \cdot 10^{-D}.$$

Оптична густина розчину, як і показники поглинання, залежить від довжини хвилі світла. Залежності показників поглинання речовини або оптичної густини розчину речовини від довжини хвилі світла називаються спектрами поглинання цієї речовини.

Формула $D = \lg \frac{I_0}{I} = \chi' C \ell$ використовується для

визначення концентрації розчинів речовин, що поглинають світло, шляхом вимірювання оптичної густини цих розчинів. Відповідна фотометрична методика називається *концентраційною колориметрією*.

Явище розсіяння світла полягає в тому, що при проходженні через речовину частина світлових хвиль змінює напрям поширення. Причиною розсіювання світла при поширенні в будь-якому середовищі є наявність в цьому середовищі оптичних неоднорідностей, тобто ділянок

середовища, які відрізняються за величиною показника заломлення.

Розрізняють два види розсіювання: *розсіювання в мутних середовищах* та *молекулярне розсіювання*. Розсіювання в мутних середовищах (іноді кажуть – в дисперсійних середовищах) - це розсіювання на дрібних чужорідних частинках в однорідній прозорій речовині (наприклад, дим, туман тощо). Розсіювання в мутних середовищах називають також *явищем Тіндаля*.

Молекулярне розсіювання відбувається через те, що в прозорому середовищі через хаотичність руху частинок, що утворюють його, весь час виникають і зникають ділянки, в яких густина (від якої залежить показник заломлення середовища) більша або менша за середню густину речовини.

Розсіювання світла описується формулою, аналогічною закону Бугера:

$$I = I_0 \cdot 10^{-m\ell},$$

де m - *показник розсіювання* (точніше - монохроматичний показник розсіювання).

Показник розсіювання світла залежить від довжини хвилі, причому, чим менша довжина хвилі світла, тим сильніше воно розсіюється. У результаті при розсіянні білого світла найсильніше розсіюються блакитні, сині та фіолетові промені, а найкраще проходять, не розсіюючись, оранжеві та червоні. Саме тому небо вдень має блакитний колір, а сонце при заході - червоний.

Залежність інтенсивності розсіяного світла від довжини хвилі цього світла називається *законом Релея*. Релей встановив, що під час розсіювання світла у мутному середовищі на частинках, менших за розміром, ніж $0,2\lambda$, де λ - довжина хвилі світла, що розсіюється, а також при молекулярному розсіянні, інтенсивність розсіяного світла обернено пропорційна четвертій степені довжини хвилі:

$$I_{\text{розс}} = \frac{\text{const}}{\lambda^4}.$$

Визначення показників, що характеризують розсіяння світла, називається *нефелометрією*, а вимірювальні прилади, які при цьому використовуються, - *нефелометрами*.

Дисперсією світла називають залежність показника заломлення (n) речовини від частоти (ν) або довжини хвилі (λ) світла. Причиною існування цієї залежності є те, що під дією світлової хвилі виникають вимушені коливання електронів в атомах речовини, що спричиняє випромінювання цими атомами вторинних хвиль. Ці вторинні хвилі, що складаються з первинною хвилею, утворюють результуючу хвилю. Відмінність фаз первинної хвилі та вторинних хвиль приводить до того, що швидкість поширення результуючої хвилі відрізняється від швидкості первинної хвилі у вакуумі. Амплітуда вимушених коливань електронів в атомах речовини тим більша, чим ближче частота світлової хвилі до власної частоти коливань електронів в атомі. Тому швидкість світла в речовині залежить від частоти світла, а отже, і від його довжини хвилі. Враховуючи, що показник заломлення - це відношення швидкості світла у вакуумі до швидкості світла в речовині, зрозуміло, що при зміні частоти (або довжини хвилі) світла змінюється й показник заломлення речовини. Залежність показника заломлення речовини від довжини хвилі світла показана на рис.7.6.

З рис.7.6 видно, що на графіку залежності (n) від (λ) чергуються ділянки, у яких із зростанням довжини хвилі світла показник заломлення зменшується $\left(\frac{dn}{d\lambda} < 0\right)$, та ділянки, у яких із зростанням довжини хвилі показник заломлення зростає $\left(\frac{dn}{d\lambda} > 0\right)$. Перші ділянки - це ділянки *нормальної дисперсії*, другі - це ділянки *аномальної дисперсії*. Для ділянок аномальної дисперсії характерне інтенсивне поглинання світла речовиною, унаслідок чого аномальну дисперсію дуже важко спостерігати.

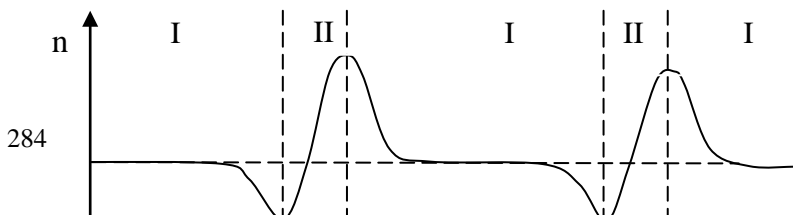


Рис. 7.6

У ділянках нормальної дисперсії для опису залежності показника заломлення речовини від довжини хвилі світла може використовуватися формула

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2}.$$

Для опису явища дисперсії світла використовують таку величину (характеристику) як *дисперсія речовини*

$$D = \frac{dn}{d\lambda}$$

Для ділянок нормальної дисперсії дисперсія речовини дорівнює

$$D = -\frac{2b}{\lambda^3}.$$

Залежність показника заломлення речовини від довжини хвилі світла приводить до того, що біле світло, заломлюючись на межі поділу середовищ, розкладається в спектр, тобто поділяється на промені з різною довжиною хвилі (різного кольору). Це дозволяє використовувати явище дисперсії для одержання та вивчення спектрів світла, що випускається різними джерелами. Найчастіше з цією метою використовують різні скляні (іноді кварцові) призми.

Контрольні запитання та завдання до розділу

1. Поясніть основні поняття геометричної оптики.

2. Як обчислюються кутове збільшення та роздільна здатність мікроскопа?
3. Поясніть фізичні основи оптичної рефрактометрії.
4. Фізична суть та практичне застосування явища інтерференції світла.
5. Фізична суть та практичне застосування явища дифракції світла.
6. Фізична суть явища поляризації світла.
7. Поясніть явище подвійного променезаломлення.
8. Що таке оптично активні речовини? Поясніть методику поляриметрії.
9. Запишіть закони, які описують явище поглинання світла.
10. У чому полягає суть явища розсіювання світла та якими формулами це явище описується?

Розділ 8

ЕЛЕМЕНТИ КВАНТОВОЇ МЕХАНІКИ

8.1 Теплове випромінювання тіл, його характеристики

Будь-яке тіло, абсолютна температура якого вища за нуль, створює теплове випромінювання, що є електромагнітними хвилями. Будь-яке тіло здатне поглинати теплове випромінювання інших тіл. Опис законів випромінювання та поглинання тілами теплового випромінювання потребує введення деяких понять.

Якщо теплове випромінювання створюється якоюсь поверхнею, то фізична величина, що визначається відношенням потоку випромінювання, що виходить від малої ділянки поверхні, до площі цієї ділянки, називається *енергетичною світністю* (R), тобто

$$R = \frac{d\Phi_e}{dS},$$

де $d\Phi_e$ - потік випромінювання, що виходить від ділянки поверхні, що випромінює, площею dS .

Енергетична світність вимірюється у ватах на квадратний метр ($\text{Вт}/\text{м}^2$) і є, по суті, інтенсивністю випромінювання, що створюється поверхнею.

Теплове випромінювання має неперервний спектр. Для того, щоб охарактеризувати розподіл інтенсивності за довжинами хвиль у спектрі теплового випромінювання вводиться поняття *спектральної щільності енергетичної світності* (r), причому

$$r = \frac{dR}{d\lambda}, \quad (8.1)$$

де dR - енергетична світність пов'язана з випромінюванням, довжина хвилі якого лежить в діапазоні від λ до $\lambda + d\lambda$. Спектральна щільність енергетичної світності вимірюється у ватах на кубічний метр ($\text{Вт}/\text{м}^3$).

З формули (8.1) виходить, що

$$R = \int_0^{\infty} r d\lambda.$$

Залежність спектральної щільності енергетичної світності тіла від довжини хвилі випромінювання називають *спектром теплового випромінювання* цього тіла.

Здатність тіла поглинати теплове випромінювання характеризується величиною, що визначається відношенням поглиненого потоку випромінювання до падаючого потоку випромінювання й називається *коефіцієнтом поглинання* (α), причому

$$\alpha = \frac{\Phi_{\text{погл}}}{\Phi_{\text{пад}}},$$

де $\Phi_{\text{пад}}$ - падаючий потік теплового випромінювання, а $\Phi_{\text{погл}}$ - поглинений потік випромінювання.

Оскільки здатність тіла поглинати випромінювання залежить від довжини хвилі цього випромінювання, для характеристики поглинаючої здатності тіла слід використовувати *монохроматичний коефіцієнт поглинання* (α_{λ}), що дорівнює

$$\alpha_{\lambda} = \frac{d\Phi_{\text{погл}}}{d\Phi_{\text{пад}}},$$

де $d\Phi_{\text{пад}}$ та $d\Phi_{\text{погл}}$ - потік теплового випромінювання, що падає на тіло, та потік теплового випромінювання, що поглинається цим тілом, відповідно, причому ці потоки відносяться до діапазону довжин хвиль, від λ до $\lambda + d\lambda$.

Оскільки $0 \leq d\Phi_{\text{погл}} \leq d\Phi_{\text{пад}}$, значення

монохроматичного коефіцієнта поглинання лежить в діапазоні від 0 до 1. Тіло, коефіцієнт поглинання якого не залежить від довжини хвилі випромінювання і дорівнює одиниці, називається *чорним*. Чорне тіло поглинає все випромінювання, що падає на нього.

Тіло, коефіцієнт поглинання якого не залежить від довжини хвилі випромінювання і є меншим за одиницю, називається *сірим*. Точно кажучи, сірих тіл не існує, але деякі тіла для певних діапазонів довжин хвиль можна вважати сірими. Так, людське тіло вважається сірим для інфрачервоного випромінювання. При цьому його коефіцієнт поглинання приблизно дорівнює 0,9.

Між спектральною щільністю енергетичної світності та монохроматичним коефіцієнтом поглинання тіл існує залежність. Цією залежністю є **закон Кирхгофа: при однаковій температурі відношення спектральної щільності енергетичної світності до монохроматичного коефіцієнта поглинання однакове для всіх тіл, у тому числі, й для чорних, тобто**

$$\frac{\epsilon_1}{\alpha_{\lambda 1}} = \frac{\epsilon_2}{\alpha_{\lambda 2}} = \frac{\epsilon_3}{\alpha_{\lambda 3}} = \dots = \frac{\epsilon}{1},$$

де індекси 1, 2, 3 ... відповідають першому, другому, третьому і таке інше тілам, а ϵ - спектральна щільність енергетичної світності чорного тіла. Закон Кирхгофа можна також записати у вигляді

$$r = \alpha_{\lambda} \epsilon.$$

З останньої формули виходить, що якщо відомі спектр випромінювання чорного тіла (тобто залежність $\epsilon = f(\lambda)$) та

залежність монохроматичного коефіцієнта поглинання тіла від довжини хвилі, то можна визначити спектр випромінювання цього тіла, тобто знайти залежність спектральної щільності енергетичної світності від довжини хвилі випромінювання, що створюється.

Формулу, що відповідає експериментальним даним про залежність спектральної щільності енергетичної світності чорного тіла від довжини хвилі (частоти) випромінювання, теоретично одержано Планком. Формула Планка має вигляд

$$\varepsilon = \frac{2\pi \cdot hc^2}{\lambda^5} \cdot (e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1)^{-1}, \quad (8.2)$$

де h - стала Планка, c - швидкість світла у вакуумі, k - стала Больцмана, T - абсолютна температура, λ - довжина хвилі випромінювання.

Графік залежності ε від λ , що визначається формулою (8.2), показаний на рис. 8.1.

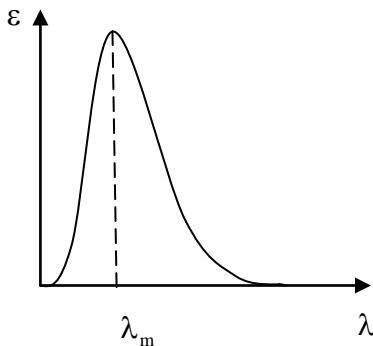


Рис. 8.1

Використовуючи формулу Планка для спектральної щільності енергетичної світності чорного тіла, можна за формулою

$$R = \int_0^{\infty} \varepsilon \cdot d\lambda$$

обчислити залежність енергетичної світності чорного тіла від температури. Ця залежність має вигляд

$$R = \sigma \cdot T^4,$$

де σ - стала Стефана - Больцмана, що дорівнює $\sigma \approx 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$. Остання формула визначає закон Стефана - Больцмана: енергетична світність чорного тіла пропорційна четвертому ступеню його абсолютної температури.

Спектр теплового випромінювання, що описується формулою (8.2), як це видно з рис. 8.1, має максимум. Довжина хвилі (λ_m), що відповідає максимуму спектральної щільності енергетичної світності чорного тіла, може бути визначена за формулою (8.2). При цьому для λ_m одержимо вираз

$$\lambda_m = \frac{b}{T},$$

де b - деяка стала. Цей вираз називають *законом зсуву Віна*, а стала (b) в цьому виразі називається *сталю Віна*. Стала Віна дорівнює $b \approx 0,29 \cdot 10^{-2} \text{ м} \cdot \text{К}$. Відмітимо, що закон Віна виконується і для сірих тіл.

Із закону Віна виходить, що довжина хвилі, яка відповідає максимуму спектру теплового випромінювання тіла, однозначно визначається температурою тіла. Таким чином, вимірюючи значення λ_m , можна визначити температуру тіла. Такий спосіб визначення температури тіл називається *оптичною пірометрією*.

Говорячи про медико-біологічні аспекти дії теплового випромінювання на біологічні об'єкти, почнемо з теплового випромінювання, яке створює Сонце.

Сонце - джерело потужного теплового випромінювання. Спектр сонячного випромінювання на межі земної атмосфери при найвищому стоянні Сонця близький до спектра чорного тіла. Максимум спектральної щільності енергетичної світності Сонця спостерігається при довжині хвилі $\lambda = 470 \text{ нм}$, що відповідає температурі поверхні Сонця 6100 К . Максимум спектральної щільності енергетичної світності в спектрі

сонячного випромінювання на поверхні Землі внаслідок розсіювання світла атмосферою спостерігається при довжині хвилі $\lambda = 555$ нм.

Дозовану сонячну радіацію застосовують як *сонцелікування (геліотерапія)*, а також як засіб гартування організму.

Інтенсивність прямої сонячної радіації вимірюють *актинометром*. Принцип дії його базується на використанні нагрівання зачорнених поверхонь тіл від сонячної радіації.

У лікувальних цілях у медицині використовують штучні джерела теплового випромінювання: лампи розжарювання (*соллюкс*) та інфрачервоні випромінювачі (*інфраруж*), що укріплені в спеціальних рефлекторах на штативі.

Температура тіла здорової людини змінюється мало внаслідок балансу процесів теплоутворення та тепловіддачі.

Тепловіддача здійснюється шляхом тепловипромінювання, конвекції (рух та переміщення нагрітих тілом шарів повітря), теплопередачі (віддача тепла речовиною, безпосередньо дотичною до поверхні тіла) та випаровування води з поверхні шкіри і з легенів. У стані спокою при температурі повітря 20°C оголена людина в нормі віддає шляхом випромінювання приблизно 66% теплоти, шляхом конвекції 15%, шляхом випаровування 19%.

Температура внутрішніх органів у людини в нормі складає 37°C - 38°C . У різних частинах тіла температура неоднакова. Вона залежить від розташування органа, ступеня кровопостачання, функціональної активності, температури зовнішнього середовища.

Поверхня тіла людини випромінює потік теплового випромінювання в ділянці інфрачервоної (ІЧ) частини спектра в діапазоні довжин хвиль від 3 до 20 мкм з максимумом випромінювання при $\lambda_m = 9,5$ мкм (при температурі поверхні шкіри 32°C).

Діапазон ІЧ-хвиль поділяється на короткохвильовий, середньохвильовий та довгохвильовий з довжинами хвиль 0,78 ... 1,4 мкм, 1,4 ... 3 мкм та 3 ... 1000 мкм відповідно.

Розподіл потоку теплового випромінювання людини, що випускається тілом в інфрачервоному діапазоні, є таким: на ділянку довжин хвиль 0,8 - 5 мкм доводиться всього 1% потоку випромінювання, 5 - 9 мкм - 20%, 9 - 16 мкм - 38% та від 16 мкм і вище - 41%.

Серед діагностичних методик, пов'язаних з реєстрацією теплового випромінювання, що створюється пацієнтом, розрізняють *термоскопію* (візуалізацію теплового поля на екрані електронно-променевої трубки), *термографію* (реєстрацію теплового поля на фотоплівці або електрохімічному папері) та *термометрію* (дистанційне вимірювання температури тіла людини).

Так, виявлення явних відмінностей в термограмах здорових і уражених злоякісним новоутворенням молочних залоз, поклало початок медичної термографії.

Для здорової людини характерний симетричний розподіл температури по поверхні тіла. Будь-яке захворювання або травма супроводжується різними змінами кровопостачання, обмінних процесів, а отже приводить до зміни місцевої температури в зоні обстеження та створює асиметрію тепловипромінювання. У результаті на фоні звичних контурів посилюється або слабшає яскравість ділянки тіла з наявністю патологічного процесу. Ці зміни відбиваються на термограмі.

Термодіагностика заснована на порівнянні величин температури симетричних ділянок поверхні тіла людини та порівняння характеру розподілу теплових полів на термотопограмі із стандартним їх розподілом, характерним для здорової людини тієї ж статі та тієї ж маси тіла.

Термографія може бути контактною і дистанційною. Усе частіше використовується контактна термодіагностика, яка здійснюється за допомогою методу рідкокристалічної термографії. Рідкі кристали холестерину, що мають спірально-гвинтову структуру, під впливом зовнішніх теплових дій змінюють крок спіралі, а отже й довжину хвилі світла, що відбивається. Тому колір рідких кристалів, нанесених на ділянки шкіри пацієнта визначається температурою цих ділянок. Методика рідкокристалічної термографії залежить від виду

термоіндикатора (мазеві композиції або плівкові), що використовується.

Дистанційна термодіагностика здійснюється за допомогою термографів. В ІЧ-термографах приймачами теплового випромінювання є термопари, термоелементи, болометри. Болометр - тепловий неселективний приймач випромінювання, заснований на зміні електричного опору термочуттєвого елемента при його нагріванні внаслідок поглинання потоку випромінювання, що вимірюється. Термочуттєвий елемент металевого болометра є шаром металу (Pt, Ni, Au, Bi) товщиною 0,1 - 1 мкм, поверхня якого покрита чорню для поліпшення поглинання в широкій ділянці спектра. Болометр використовується для вимірювання сумарної потужності випромінювання, а у поєднанні із спектральним приладом - для визначення спектрального складу випромінювання. До селективних приймачів теплового випромінювання належать фоторезистори із антимоніду або арсеніду індію, сульфід, селенід або телурид свинцю, германієві та інші фотоопори. Особливістю їх є те, що максимальної чутливості вони набувають лише при охолодженні рідким азотом до температури -196°C або аргонном до -186°C . В ІЧ-термографах використовується електронно-оптичний перетворювач (ЕОП), призначений для перетворення зображення з ІЧ ділянки спектру у видиму, а також для посилення яскравості зображень. Простий ЕОП складається з фотокатода, електродів для формування електронного пучка та люмінесцентного екрана.

Апаратура для комп'ютерної термодіагностики складається з тепловізора та пристроїв візуалізації і управління, які забезпечують формування термозображення, його обробку, зберігання тощо.

Застосовувати ІЧ-термографії корисно у випадках, якщо є:

- ✓ уроджені аномалії, судинні пухлини;
- ✓ місцеві розлади кровообігу (травми, тромбоз, склероз судин);
- ✓ зміни тонуусу судин;
- ✓ порушення венозного кровотоку (застій тощо);

- ✓ локальні зміни теплопродукції (запальні вогнища, пухлини тощо);
- ✓ зміни теплопровідності тканин (набряк, ущільнення тканин тощо).

Тепловидіння, як діагностичний метод, має ряд важливих переваг. Тепловидіння - метод безкровний та безболісний. Крім того, діагностичні можливості можуть бути розширені за рахунок активної термографії (зняття термотопограми шкіри людини під впливом різних дій: холодових та теплових, функціональних, фармакологічних, гіпербаричної оксигенації, електромагнітного поля НВЧ, опромінювання лазером або ультразвуком, акупунктури, електростимуляції, припікання, акупресури тощо).

8.2 Основні уявлення квантової механіки

Квантовою механікою називають сучасну теорію фізичних явищ і процесів, що відбуваються в мікросвіті. Під мікросвітом розуміють сукупність об'єктів, що мають розміри порядку $10^{-10} \dots 10^{-15}$ м (елементарні частинки, ядра, атоми, молекули).

В основі сучасної квантової механіки лежать уявлення про те, що, по-перше, будь-яка мікрочастинка має хвильові властивості та характеризується *хвильовою функцією* (ψ), яка є функцією координат частинки та часу, а по-друге, в атомах усі характеристики мікрочастинки можуть набувати не яких завгодно значень, а тільки тих, які задовольняють деяким співвідношенням.

Хвильова функція має такий сенс: квадрат модуля хвильової функції мікрочастинки при певних значеннях координат та часу пропорційний імовірності знайти частинку в точці з цими координатами та в цей момент часу.

Наприклад, хвильова функція вільної частинки, що рухається вздовж осі x , має вигляд

$$\psi(x, t) = A \cos \left[2\pi \left(\frac{vt - x}{\lambda} \right) \right],$$

де t - час, A - деяка стала, v - швидкість мікрочастинки, λ - довжина хвилі, що обчислюється за формулою де Бройля

$$\lambda = \frac{h}{p},$$

де h - стала Планка, p - імпульс частинки.

Важливе значення має квантово-механічний принцип, який називається *співвідношення невизначеностей Гейзенберга*. Відповідно до нього для мікрочастинки неможливе абсолютно точне одночасне визначення координати та проекції імпульсу на цю координату, причому $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h/2\pi$, де Δx - точність визначення координати частинки, Δp_x - точність визначення проекції її імпульсу на цю координату. Іноді співвідношення невизначеностей записують у вигляді: $\Delta E \cdot \Delta t \approx h/2\pi$, де ΔE - невизначеність енергії при часі її вимірювання Δt .

У цьому підрозділі головну увагу ми будемо приділяти використанню квантово-механічних уявлень при вивченні будови атомів, описанні процесів випромінювання і поглинання ними електромагнітних хвиль.

Залежності хвильових функцій електронів в атомах від координат і часу можна отримати, розв'язуючи *рівняння Шредінгера*. Найпростіше це рівняння розв'язується для систем мікрочастинок, що знаходяться в стаціонарних станах. Стан називається стаціонарним, якщо вирази, що описують сили, які діють на мікрочастинки, не залежать від часу. Наприклад, стаціонарне рівняння Шредінгера для мікрочастинки в одновимірному випадку (ψ залежить тільки від однієї координати - x) має вигляд

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi m}{h^2}(E - W(x))\psi = 0,$$

де E - повна енергія частинки, $W(x)$ - її потенціальна енергія, m - маса частинки.

Найпростішою атомною системою, аналіз якої однак виключно важливий для розуміння процесів, що відбуваються в складніших системах, є атом водню.

Враховуючи сферичну симетрію системи, при розв'язанні рівняння Шредінгера використовуються сферичні координати - r , θ та φ .

Унаслідок сферичної симетрії системи величина W залежить лише від відстані (r) між електроном та ядром атома, причому

$$W(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r},$$

де e - елементарний заряд, ϵ_0 - електрична стала.

Розділяючи змінні, можна розв'язати рівняння Шредінгера для атома водню.

Виявляється, що рівняння Шредінгера для електрона в атомі водню можна розв'язати тільки при деяких певних значеннях (*власних значеннях*), яким відповідають певні вирази для хвильової функції (*власні функції*).

Власні функції, що одержують при розв'язанні рівняння Шредінгера для атома водню, містять три цілочисельні параметри (числа). Їх прийнято позначати буквами n , ℓ та m і називати *квантовими числами*.

Число n - *головне* квантове число - визначає енергію електрона в атомі, а також середню відстань від електрона до ядра. Число n - це також номер рівня (оболонки), якому належить електрон. Це число може приймати значення 1, 2, 3

Власні значення енергії електрона в атомі водню обчислюються за формулою

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

Число ℓ - *орбітальне* квантове число - визначає можливі значення орбітального моменту імпульсу електрона (L) при його русі відносно ядра. Ця залежність дається формулою

$$L = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\ell(\ell + 1)},$$

При цьому різним значенням числа ℓ відповідають різні види залежності хвильової функції від відстані між електроном і ядром, тобто різні види (форми) орбіталей (s, p, d, f - орбіталі). Число ℓ може мати значення 0, 1, 2 ..., $n - 1$.

Число m - *магнітне* квантове число - визначає величину проекції орбітального моменту імпульсу електрона на заданий напрям у просторі. Назва "магнітне" пов'язана з тим, що, коли атом помістити в магнітне поле, то в станах, які відповідають різним значенням числа m , атомна система має різну енергію. При цьому різниця енергій станів пропорційна різниці значень числа m в них. Число m може набувати значення 0, ± 1 , ± 2 ..., $\pm \ell$. Якщо вищезгаданий заданий напрям - це напрям осі z , то

$$L_z = \frac{mh}{2\pi},$$

де L_z - проекція орбітального моменту імпульсу електрона на напрям осі z .

Деякі явища, наприклад, аномальний ефект Зеемана, можна пояснити тільки в тому випадку, якщо припустити, що квантується (може набувати лише дискретних значень) не тільки орбітальний момент імпульсу електрона, але й власний момент імпульсу електрона. Це обумовлює необхідність введення четвертого квантового числа s .

Число s - *спінове* квантове число - визначає величину проекції власного моменту імпульсу частинки на заданий напрям. Для електрона, протона й нейтрона число s може мати значення $+1/2$ та $-1/2$.

Зв'язок указаної проекції власного моменту імпульсу електрона (L_s) зі спіновим числом описується формулою

$$L_s = \frac{sh}{2\pi}.$$

Для електронів в атомі завжди виконується *принцип Паулі*: **в атомі не може бути двох електронів, що мають однакові значення всіх чотирьох квантових чисел.**

Якщо стани атома мають різну енергію, то при переході з одного стаціонарного стану в інший атом зазвичай випромінює або поглинає квант електромагнітного випромінювання. Разом з

тим, в атомі з достатньо високою ймовірністю можуть відбуватися переходи не між будь-якими стаціонарними станами, а тільки між певними станами, причому ймовірні (дозволені) переходи визначаються так званими *правилами відбору*. Зокрема, при переходах квантові числа ℓ та m можуть змінюватися за модулем тільки на одиницю. Одночасно зі зміною числа s не можуть змінюватися значення інших квантових чисел. Це не означає, що переходи, які не підкоряються правилам відбору, взагалі неможливі. Просто вони дуже мало ймовірні.

Квантова механіка є теоретичною основою *спектроскопії*, метою якої є визначення якісного та кількісного складу речовин, вивчення будови молекул, що складають цю речовину, на основі вивчення *спектрів поглинання (адсорбційна спектроскопія)* та *спектрів випромінення (емісійна спектроскопія)* речовин, що вивчаються. Під спектрами випромінення та поглинання розуміють залежність величини, що характеризує енергію електромагнітних хвиль, що випромінюються або поглинаються речовиною при певному значенні довжини хвилі (або в певному діапазоні значень довжин хвиль), від довжини хвилі.

Як зазначалося, випромінення й поглинання квантів електромагнітного випромінювання обумовлене переходами атомів або молекул речовини з одних стаціонарних станів в інші. Такі переходи можуть бути пов'язані з переходами електронів в атомі з одного рівня на інший, з коливальними рухами атомів в молекулах, з обертальними рухами молекул або частин молекул. При цьому зміни енергії молекул (атомів) при електронних, коливальних та обертальних переходах ($\Delta E_{\text{ел}}$, $\Delta E_{\text{к}}$ та $\Delta E_{\text{об}}$ відповідно) задовольняють співвідношенню: $\Delta E_{\text{ел}} \gg \Delta E_{\text{к}} \gg \Delta E_{\text{об}}$. Внаслідок цього електронні переходи супроводжуються випромінюванням або поглинанням електромагнітних хвиль, що належать до рентгенівської, ультрафіолетової або видимої частин спектра, коливальні переходи – до хвиль, що належать до ближньої інфрачервоної (ІЧ) частини спектра, а обертальні - до дальньої інфрачервоної або мікрохвильової (МКХ) частин спектра.

Емісійна та адсорбційна спектроскопія в УФ та видимій частинах спектру використовується для визначення концентрацій речовин, ідентифікації атомів і молекул речовини, визначення структурних параметрів молекул, вивчення хімічних реакцій тощо. Наприклад, процеси денатурації ДНК і білків спричиняють зміни їхніх УФ адсорбційних спектрів.

В ІЧ та МКХ частинах спектра використовується адсорбційна спектроскопія. Такі дослідження дозволяють проводити кількісний та якісний аналіз речовин, що вивчаються, отримувати інформацію про структуру й просторову будову біологічно важливих макромолекул, вивчати механізми біохімічних реакцій і взаємодії між молекулами. При цьому, зокрема, можна ідентифікувати біологічно активні ділянки макромолекул, вивчити фармакокінетику лікарських препаратів, виявляти речовини, що свідчать про перебіг тих або інших патологічних процесів, проводити аналіз складу окремих частин клітин.

Дослідження поглинання світла різними речовинами здійснюють за допомогою *спектрофотометрів*.

Принцип роботи спектрофотометра полягає у вимірюванні інтенсивностей світла, що пройшло через розчинник, а також через розчин речовини у тому самому розчиннику. Різниця цих інтенсивностей дає змогу зробити висновок про ступінь поглинання світла розчиненою речовиною. Для одержання спектра ця операція повторюється для багатьох довжин хвиль.

Важливе місце в наукових, а останніми роками й медичних дослідженнях займає спектроскопія *магнітного резонансу* та пов'язані з нею методики. Методики досліджень, пов'язані з *електронним парамагнітним резонансом* (ЕПР) і з *ядерним магнітним резонансом* (ЯМР), ґрунтуються на поглинанні енергії електромагнітних випромінювань електронами або ядрами атомів при переходах між стаціонарними станами, що відрізняються орієнтаціями магнітного моменту електрона (у електронній оболонці атома) або ядра. Найчастіше магнітний резонанс спостерігається при переходах між станами, що відрізняються значенням спінового квантового числа. Такі стани мають різну енергію в тому

випадку, якщо атоми, на яких спостерігається резонанс, поміщені в магнітне поле. Поглинання енергії спостерігається тільки при виконанні певного співвідношення між індукцією магнітного поля та частотою випромінювання, внаслідок чого і виникла назва "магнітний резонанс".

Спочатку стисло розглянемо явище електронного парамагнітного резонансу, а потім докладніше зупинимося на ядерному магнітному резонансі, що має значно ширше медичне застосування.

Електронний парамагнітний резонанс спостерігається для систем зі спіновим числом, яке не дорівнює нулю, що зазвичай пов'язане з наявністю в атомній системі неспареного електрона. Прикладами таких систем є атоми деяких елементів (наприклад, марганець) та вільні радикали, що утворюються в результаті деяких фізичних процесів або хімічних реакцій.

ЕПР спостерігається при виконанні резонансного співвідношення

$$h\nu = g\mu_B B,$$

де ν - частота електромагнітного випромінювання, що викликає електронні переходи, g - коефіцієнт пропорційності, який називається g - фактором, B - індукція магнітного поля, у якому спостерігається резонанс, μ_B - магнетон Бора, який дорівнює

$$\mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}.$$

На практиці при реєстрації ЕПР фіксують частоту електромагнітного випромінювання ν , змінюючи з певною швидкістю магнітну індукцію, визначають інтенсивність того випромінювання, що поглинене речовиною. З технічних причин зазвичай реєструють не саму інтенсивність, а похідну інтенсивності за магнітною індукцією, отримуючи при цьому спектр ЕПР. Пристрої, що дозволяють зареєструвати такі спектри, називаються ЕПР-спектрометрами.

Сpektри ЕПР несуть інформацію, яка дозволяє виявляти і досліджувати вільні радикали, що виникають у живих організмах. Це, у свою чергу, дозволяє розв'язувати задачі вивчення:

- первинних та вторинних механізмів радіаційно-хімічних процесів при променевому ураженні клітин;
- різних типів біохімічних реакцій, пов'язаних з процесами клітинного дихання;
- процесів біосинтезу;
- ролі вільних радикалів при різних патологічних процесах, зокрема, при онкологічних захворюваннях.

У санітарно-гігієнічних дослідженнях спектри ЕПР використовуються для виявлення вільних радикалів та визначення їхньої концентрації в повітрі, воді, продуктах харчування тощо.

Нині широко поширені методики дослідження, які пов'язані з використанням "спінових міток" та "спінових зондів". При цьому парамагнітні утворення (наприклад, молекули), на яких може спостерігатися ЕПР, штучно вводяться в систему, що вивчається. Якщо ці утворення приєднуються до досліджуваних структур хімічними зв'язками, то їх називають спіновими мітками. Якщо ж вони розподіляються в об'єкті, що вивчається, без утворення з ним хімічних зв'язків, то в цьому випадку їх називають спіновими зондами. Ця група методик дозволяє вивчати розміщення різних груп атомів у біологічно важливих молекулах, взаємодії цих груп, природу та орієнтацію хімічних зв'язків, а також визначати різні властивості елементів багатьох важливих біоструктур.

Ядерний магнітний резонанс можна спостерігати у речовин, ядра яких мають відмінний від нуля магнітний момент, тобто характеризуються відмінним від нуля значенням спінового квантового числа (наприклад, H, P, N, ¹³C, ¹⁷O та ін.). Поміщені в магнітне поле такі ядра можуть, переходячи зі стану з меншою енергією в стан з більшою енергією, поглинати енергію електромагнітного випромінювання при виконанні резонансної умови

$$\nu = \frac{\gamma B}{2\pi},$$

де ν - частота електромагнітного випромінювання, при якій спостерігається ЯМР, γ - коефіцієнт, який називається *гіромагнітним відношенням*.

Зворотний перехід ядер даного типу (ядер, на яких спостерігається резонанс) із збудженого стану в незбуджений відбувається за рахунок двох факторів: взаємодії з атомами навколишньої речовини та взаємодії з іншими ядрами даного типу. У першому випадку говорять про поздовжню, або спін-решіткову *релаксацію* та характеризують її часом T_1 (часом спін-решіткової релаксації), а в другому - про поперечну, або спін-спінову *релаксацію*, що характеризується часом T_2 .

Величини T_1 і T_2 досить інформативні при вивченні стану молекул, до яких входять ядра, на яких спостерігається резонанс.

Поблизу ядер знаходяться електрони, що частково екранують внаслідок свого руху ядра від зовнішнього магнітного поля. Тому індукція магнітного поля поблизу ядра відрізняється від індукції магнітного поля, у яке поміщена речовина. У різних хімічних сполуках ступінь екранування ядра електронами може бути різним. При цьому резонансне співвідношення має вигляд

$$\nu = \frac{\gamma}{2\pi}(1 - \sigma)B,$$

де σ - константа екранування. Значення цієї константи залежить від того, до складу якої молекули входить ядро, на якому спостерігається резонанс. При спостереженні ЯМР зазвичай фіксують величину магнітної індукції (B) та добиваються резонансу, змінюючи частоту електромагнітного випромінювання. Резонансна частота для тих самих ядер у молекулах різних хімічних сполук буде різною внаслідок відмінності значень величини σ . Ці відмінності резонансних частот однакових ядер у різних хімічних сполуках називаються *хімічним зсувом*.

Інтенсивність сигналу при резонансному поглинанні електромагнітного випромінювання прямо пропорційна кількості поглинаючих ядер.

У біологічних та медичних дослідженнях найчастіше використовують протонний магнітний резонанс, тобто ядрами, на яких спостерігається резонанс, є ядра водню.

За допомогою методу ЯМР вивчають будову молекул білків, нуклеїнових кислот, інших біологічно активних молекул, а також динаміку взаємодії цих молекул.

Важливу інформацію дає вимірювання значень T_1 і T_2 для різних тканин. Для всіх тканин значення часів релаксації істотно менші, ніж у чистій воді. Ці величини змінюються з віком. Цікаво, що в тканинах злоякісних пухлин часи релаксації помітно більші, ніж в нормальних тканинах. Більш того, підвищення значень T_1 і T_2 (але менше, ніж при раку) спостерігається в тканинах в передраковому стані.

Із медичних застосувань ЯМР найбільше значення має *ЯМР-інтроскопія*. При ЯМР-інтроскопії одержують зображення внутрішніх перерізів тіла. Роздільна здатність методу становить частки міліметра. Ідея методу полягає в тому, що об'єкт, який вивчається (наприклад, людина), розміщується в магнітному полі, яке створюється декількома магнітами. Один з магнітів створює однорідне поле у всій досліджуваній ділянці. Інший (інші) магніт створює додаткове поле таким чином, що резонансне співвідношення між індукцією поля та частотою випромінювання, необхідне для поглинання ядрами водню енергії випромінювання, виконується тільки в деякому тонкому плоскому шарі. Змінюючи індукцію цього додаткового поля, реєструють сигнал ЯМР при різних положеннях та орієнтаціях шару, у якому виконується резонансне співвідношення. Потім, спеціальним чином обробляючи результати вимірювань, розраховують характеристики резонансу (інтенсивність, часи релаксації) для кожної точки (точніше - невеликої ділянки) внутрішнього перерізу об'єкта, що вивчається. Існують різні модифікації методу ЯМР-інтроскопії, що дозволяють дещо поліпшити ті або інші характеристики методу (площу перерізу, що вивчається, роздільовальну здатність, час дослідження тощо).

Від рентгенівської комп'ютерної томографії (РКТ) метод відрізняється відсутністю шкідливих променевих навантажень. Роздільовальна здатність методів схожа, хоча у ЯМР-інтроскопії дещо вища. Практика застосування ЯМР-інтроскопії показала, що при деяких захворюваннях, зокрема при багатьох неонкологічних захворюваннях, інформативність методу вища, ніж інформативність РКТ.

Одна з основних концепцій квантової фізики - корпускулярно-хвильовий дуалізм матерії - стала теоретичною основою створення такого пристрою, як електронний мікроскоп. Електрон, як і будь-яка мікрочастинка, що рухається, проявляє хвильові властивості, причому, чим більша швидкість (а отже, і енергія) електрона, тим менша його довжина хвилі. Якщо електрон прискорювався, пройшовши в електричному полі між точками з різницею потенціалів $U = 50 \text{ кВ}$, то його довжина хвилі дорівнює $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-12} \text{ м}$, що приблизно в сто тисяч разів менше довжини хвилі видимого світла. Тому, використовуючи замість світлових променів прискорені електрони, можна одержати прилад з розділювальною здатністю, що значно перевищує роздільну здатність світлового мікроскопа. Для електронного мікроскопа теоретично досяжна межа розрізнення (z) може бути обчислена за формулою

$$z = \frac{0,5h}{\sqrt{2emU} \sin(u/2)}$$

де h - стала Планка, e - елементарний заряд, m - маса електрона, u - кутова апертура. Реально межа розрізнення в найкращих електронних мікроскопах складає величину близько 50...100 нм.

При електронній мікроскопії об'єкт, що вивчається, опромінюється пучком електронів, які випромінюються катодом мікроскопа. Прискорення електронів та створення електронного пучка забезпечується електронною гарматою, що містить анод та фокусуючий електрод. Необхідна форма пучка забезпечується роботою електронних лінз, що є системами електродів та конденсорів, а також катушок зі струмом. При взаємодії з об'єктом, що вивчається, частина електронів розсіюється. Електрони, що пройшли через зразок, утворюють зображення або на спеціальній фотопластинці, або на катодолюмінесуючому екрані.

Для електронної мікроскопії потрібна спеціальна дуже складна підготовка зразків. Зразки повинні бути дуже тонкими, спеціальним чином зафіксованими. Знаходячись в електронному мікроскопі зразки перебувають у вакуумі. Найчастіше перебування у вакуумі та особлива підготовка до дослідження

пошкоджують структуру об'єктів, які вивчаються, що примушує з певною обережністю ставитись до результатів електронної мікроскопії. Разом з тим, електронна мікроскопія дає унікальну інформацію про внутрішню будову клітин та їхніх органоїдів, яку неможливо сьогодні отримати будь-яким іншим методом.

8.3 Люмінесценція. Фотоефект

Важливу медико-біологічну інформацію можна отримати, вивчаючи спектри *люмінесценції* різних речовин. **Люмінесценцією називають надлишкове над тепловим випромінювання тіла за даної температури, тривалість якого значно перевищує період випромінюваних світлових хвиль.** Залежно від причин, що викликають люмінесценцію, розрізняють фото-, іоно-, катодо-, радіо-, хемілюмінесценцію та деякі інші види.

Причиною фотолюмінесценції є поглинання атомом кванта світла (або УФ-випромінювання), унаслідок чого електрон переходить на вищий енергетичний рівень. Для люмінесценції, як це впливає з визначення, характерне *післясвітіння*. Це означає, що випромінювання кванта світла збудженим атомом відбувається через певний (іноді досить великий) час після збудження. Наявність післясвітіння пов'язана з тим, що після збудження (переходу з рівня 1 на рівень 2 (див. рис. 8.2)) атом не одразу переходить до основного незбудженого стану. Спочатку відбувається перехід електрона на нижчий рівень (з рівня 2 на рівень 3) без випромінювання фотона, а потім — перехід з рівня 3 на початковий рівень 1 з випромінюванням кванта світла (див. рис.8.2 а).

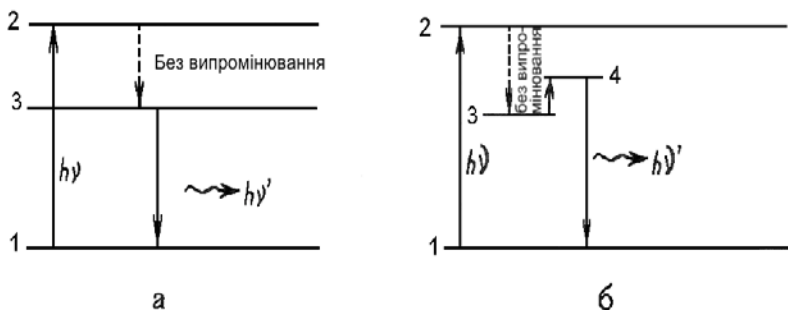


Рис. 8.2

У деяких випадках рівень 3 такий, що перехід електрона з цього рівня на рівень 1 не відбувається (такий перехід заборонений правилами відбору). В цьому випадку електрон досить довго може знаходитися у стані 3, і такий стан називається метастабільним. Повернення на рівень 1 відбувається тільки в результаті попереднього переходу електрона (див. рис. 8.2 б) з рівня 3 на рівень 4 (цей перехід здійснюється за рахунок енергії теплового руху молекул), а потім вже електрон з випромінюванням кванта світла повертається в стан 1 (перехід, дозволений правилами відбору).

Люмінесценція, що відбувається за першим з розглянутих механізмів, називається *флюоресценцією*, а за другим — *фосфоресценцією*. Тривалість післясвічення при флюоресценції складає величину близько 10^{-8} с, а при фосфоресценції може досягати 10^3 с.

Оскільки рівень, з якого відбувається повернення електрона на рівень 1 (рівень 3 — при флюоресценції та рівень 4 — при фосфоресценції) має меншу енергію, ніж рівень 2, то при фотолюмінесценції зазвичай виконуються співвідношення $\nu > \nu'$ та $\lambda < \lambda'$, де ν і λ — частота та довжина хвилі світла, що викликало люмінесценцію, а ν' і λ' — частота та довжина хвилі світла, що випромінюється при люмінесценції. Ці співвідношення відображають суть *закону Стокса*, який зазвичай формулюють так: **спектр фотолюмінесценції**

зміщений у бік довгих хвиль відносно спектру випромінювання, що викликало цю люмінесценцію. Іноді зустрічаються відхилення від закону Стокса (*антистоксівська люмінесценція*), які пов'язані з тим, що випромінювання, яке викликає люмінесценцію, переводить на вищий рівень електрон, який до цього моменту вже знаходився у збудженому стані.

Флюоресценція характерна для ряду біологічно важливих молекул, наприклад, білків. Вивчаючи спектри люмінесценції цих молекул, можна отримати інформацію про конформації молекул, механізми зв'язування комплексів, взаємодії молекул з розчинником та іншими молекулами, що знаходяться в розчині, про перетворення молекул під час хімічних реакцій, а також про значення різних параметрів, що характеризують структуру молекул.

Вивчення спектрів речовин, що зв'язуються з мембранами клітин (флюоресцентні мітки) дозволяє вивчати конформаційні переходи в мембранах та їх компонентах.

Люмінесцентний аналіз використовується також в гігієні травлення (продукти, що псуються, дають характерні спектри люмінесценції), діагностиці деяких захворювань, зокрема, грибкових.

Люмінесцентний аналіз мікроскопічних об'єктів проводять за допомогою спеціальних люмінесцентних мікроскопів, в яких, на відміну від звичайних джерел світла, як правило, використовуються ртутні лампи, в спектрі яких присутні УФ-промені. Крім того, використовуються два світлофільтри, один з яких розміщується перед конденсором та виділяє випромінювання, що викликає люмінесценцію, а інший знаходиться між об'єктивом і окуляром та виділяє люмінесцентне випромінювання.

На основі явища фотолюмінесценції створені джерела "денного" світла, тобто світла за спектральними характеристиками ближчого до денного, ніж світло, що створюється лампами розжарювання.

Явищем, у якому дуже яскраво проявляються корпускулярні властивості електромагнітних випромінювань, є *фотоефект*. Існують різні види фотоефекта (зовнішній,

внутрішній, вентиляний тощо), внаслідок чого нелегко дати узагальнююче визначення поняття фотоефект. Можливе таке визначення: фотоефект – це вивільнення електрона за рахунок поглинання енергії кванта електромагнітного випромінювання.

Зовнішній фотоефект знайомий студентам ще з шкільного курсу фізики. Нагадаємо, що при зовнішньому фотоефекті електрон, що належав зоні провідності металу, виривається з поверхні цього металу. При цьому відбувається поглинання металом фотона, за рахунок енергії якого і відбувається фотоефект. Це явище описується рівнянням Ейнштейна для фотоефекта, яке може бути записане у такому вигляді:

$$E_{\phi} = A_{\text{в}} + K_{\text{м}},$$

де E_{ϕ} – енергія фотона, внаслідок поглинання якого відбувається фотоефект; $A_{\text{в}}$ – робота виходу електрона з металу; $K_{\text{м}}$ – максимально можлива при даному значенні енергії кванта кінетична енергія фотоелектрона.

При внутрішньому фотоефекті поглинання фотона атомом приводить до виривання електрона з одного з найнижчих енергетичних рівнів цього атома. Докладніше про це йтиметься у наступному розділі.

Фотоефект достатньо широко використовується в медицині, точніше – в медичній електроніці. Існує багато фотоелектронних виробів та приладів, принцип роботи яких базується на фотоефекті, і які застосовуються в медицині: фоторезистори, фотодіоди, фототранзистори, вакуумні та вентиляні (напівпровідникові) фотоелементи, фотоелектронні помножувачі, електронно-оптичні перетворювачі тощо.

8.4 Індуковане випромінювання. Лазери

Процеси випромінювання електромагнітних хвиль при переходах атомів з одних стаціонарних станів до інших лежать в основі роботи лазерів - пристроїв, що створюють *індуковане випромінювання*.

Якщо при взаємодії фотона з атомом енергія фотона дорівнює різниці енергій яких-небудь стаціонарних станів цього атома, то в результаті такої взаємодії атом може перейти з одного стану в інший. Якщо атом знаходився в стані з меншою

енергією, то при цьому відбувається поглинання фотона та перехід атома в стан з більшою енергією. Якщо ж атом знаходився в стані з більшою енергією, то в результаті взаємодії він перейде в стан з меншою енергією, що приведе до випромінювання атомом фотона. Випромінювання, викликане взаємодією збудженого атома з фотоном, називається індукованим випромінюванням. При індукованому випромінюванні відбувається збільшення числа фотонів, тобто посилення світла. При індукованому випромінюванні частота, фаза, поляризація та напрям руху фотона, що випускається, співпадають з відповідно частотою, фазою, поляризацією та напрямом фотона, що індукував це випромінювання.

Індуковане випромінювання, що отримується за допомогою лазерів, має ряд унікальних та в практичному відношенні дуже важливих властивостей. Лазери можуть створювати пучки світла з дуже малим кутом розбіжності. Лазер є джерелом строго монохроматичних та когерентних хвиль. Лазери можуть розвивати (зазвичай в імпульсному режимі) дуже високу потужність (до 10^{18} Вт/м²).

Зазвичай спостерігається так звана *больцманівська заселеність* енергетичних рівнів, за якої кількість атомів, що знаходяться в стані з більшою енергією (у збудженому стані), менша за кількість атомів, що знаходяться у стані з меншою енергією (у незбудженому стані). При больцманівській заселеності поглинання світла у речовині переважає над випромінюванням. Щоб індуковане випромінювання переважало над поглинанням світла необхідно, щоб кількість атомів, які знаходяться в стані з більшою енергією, перевищувала кількість атомів, що знаходяться в стані з меншою енергією (за наявності такої ситуації говорять про *інверсну заселеність* рівнів). У різних видах лазерів інверсна заселеність рівнів досягається різними способами. Ми розглянемо механізм виникнення індукованого випромінювання у гелій-неоновому лазері.

У гелій-неоновому лазері індуковане випромінювання створюють атоми неону. Енергія одного зі збуджених станів атомів гелію співпадає з енергією одного зі збуджених станів атомів неону (стан 3 на рис. 8.3).

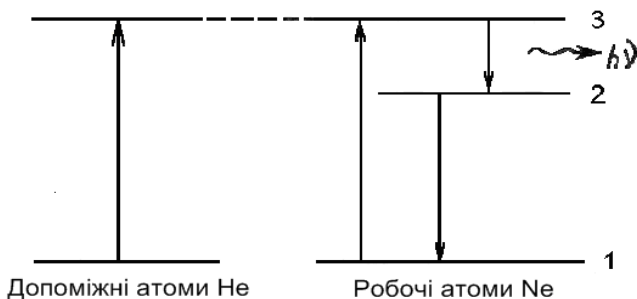


Рис. 8.3

У газовій суміші, що заповнює гелій-неоновий лазер, гелію істотно більше, ніж неону. При пропусканні через газову суміш електричного розряду атоми гелію переходять до збудженого стану. Частина цих атомів взаємодіє з атомами неону. При такій взаємодії атоми неону переходять до збудженого стану 3, а атоми гелію повертаються до незбудженого стану. Тим самим, виникає велика кількість атомів неону, що знаходяться в стані 3 (створюється висока заселеність рівня 3). Із стану 3 атоми неону можуть переходити, випромінюючи фотони, до стану 2, а потім – до стану 1. Розмір газорозрядної трубки лазера підбирається так, щоб при зіткненні з її стінками атоми неону віддавали енергію, переходячи зі стану 2 до стану 1. Унаслідок цього кількість атомів неону, що знаходяться в стані 2, невелика, тобто тим самим забезпечується "розвантаження" рівня 2 та створюється стаціонарна інверсна заселеність рівнів 2 та 3. Перші самовільні переходи атомів неону зі стану 3 до стану 2 породжують фотони, які потім, взаємодіючи з іншими атомами неону, що знаходяться в стані 3, викликають випромінювання цими атомами фотонів. У результаті інтенсивність індукованого випромінювання наростає.

Звичайно речовина, у якій генерується лазерне випромінювання, має форму довгого вузького циліндра, у торцях якого розміщуються дзеркала (хоч би одне з них напівпрозоре). Це приводить до того, що лазери випромінюють

світло точно вздовж осі циліндра, оскільки фотони, що рухаються в інших напрямках, покидають речовину, не викликавши великої кількості індукованих переходів, тоді як фотони, що рухаються вздовж осі циліндра, багато разів відбиваються від дзеркал та викликають все нові й нові переходи атомів з випромінюванням фотонів уздовж осі циліндра.

Нині лазери знаходять чимале застосування в різних сферах нашого життя і, зокрема, у медицині. Серед таких застосувань відзначимо:

- діагностичні методи, пов'язані з використанням волоконної оптики та застосуванням лазерного випромінювання для ендоскопічного вивчення внутрішніх органів;

- лазерна хірургія, зокрема, офтальмокоагуляція, при якій лазерне випромінювання використовується для приварювання сітківки, що відслоїлася; створення мікроотворів в очних оболонках для забезпечення відтоку рідини при глаукомі тощо;

- лазерна терапія з використанням низькоінтенсивного лазерного випромінювання (НЛІВ).

Терапія з використанням НЛІВ викликає у відповідь такі реакції організму, як активація метаболізму та підвищення функціональної активності клітин, стимуляція репаративних процесів, активація мікроциркуляції крові та підвищення рівня трофічного забезпечення тканин. Укажемо також на протизапальну, анальгезуючу, імуностимулюючу та рефлексогенну дії НЛІВ.

Контрольні запитання та завдання до розділу

1. Що таке теплове випромінювання і якими величинами воно характеризується?
2. Запишіть та поясніть закони Стефана-Больцмана та Віна. Поясніть суть методики термографії.
3. Що таке хвильова функція мікрочастинки?
4. Запишіть та поясніть співвідношення невизначеностей Гейзенберга.
5. Що таке квантові числа? Які значення вони можуть приймати?

6. Поясніть принцип Паулі.
7. Яка інформація може бути одержана за допомогою спектроскопії?
8. У чому суть магнітного резонансу?
9. Поясніть застосування ядерного магнітного резонансу в медицині.
10. Що таке люмінесценція? Які види люмінесценції ви знаєте?
11. У чому полягає закон Стокса?
12. Що таке індуковане випромінювання? Поясніть принцип роботи лазера?

Розділ 9

РАДІАЦІЙНА ФІЗИКА. ОСНОВИ ДОЗИМЕТРІЇ

У цьому розділі ми розглядатимемо питання, що пов'язані з *іонізуючими випромінюваннями*. Іонізуючі випромінювання - це випромінювання, дія яких на речовину призводить до іонізації атомів цієї речовини. Найчастіше зустрічаються і тому є практично найзначущими такі види іонізуючих випромінювань: альфа-, бета-, гамма- та рентгенівське випромінювання, потоки нейтронів та протонів. З усіх видів іонізуючих випромінювань у медицині найбільше застосовується рентгенівське випромінювання.

9.1 Рентгенівське випромінювання

Рентгенівське випромінювання - це електромагнітні хвилі, які на шкалі довжин хвиль знаходяться між ультрафіолетовим випромінюванням і гамма-випромінюванням. Діапазони рентгенівського і гамма-випромінювань частково перекриваються, внаслідок чого різні літературні джерела по-різному вказують межі між цими діапазонами. Перекриття діапазонів рентгенівського і гамма-випромінювань пов'язане з тим, що ці випромінювання часто класифікують не за довжинами хвиль, а за механізмами їхнього виникнення. При цьому короткохвильове випромінювання, пов'язане з гальмуванням електронів в рентгенівських трубках, або з електронними переходами в атомах, називають рентгенівським.

Випромінювання, що виникає при внутрішньоядерних процесах, називають гамма-випромінюванням. Тому визначення діапазону довжин хвиль рентгенівського випромінювання є досить умовним. Однак, все ж таки, зазвичай вважається, що рентгенівське випромінювання має довжину хвилі, яка належить діапазону від 80 нм до 10^{-5} нм, а гамма-випромінювання має довжину хвилі, меншу за 10^{-5} нм.

За механізмом виникнення рентгенівське випромінювання підрозділяють на *гальмівне* та *характеристичне*.

Гальмівне рентгенівське випромінювання отримують в рентгенівських трубках при різкому гальмуванні електронів, які рухаються з великими швидкостями. Гальмування електронів відбувається при їх зіткненні з електронними оболонками атомів анода (*антикатада*) рентгенівської трубки. Гальмівне рентгенівське випромінювання має безперервний спектр, який у випадках різної напруги (U_1 та U_2) між анодом і катодом трубки показаний на рис. 9.1. Говорячи про спектр, ми у цьому випадку маємо на увазі залежність спектральної щільності потоку

випромінювання $\left(\frac{d\Phi}{d\lambda}\right)$ від довжини хвилі (λ) випромінювання.

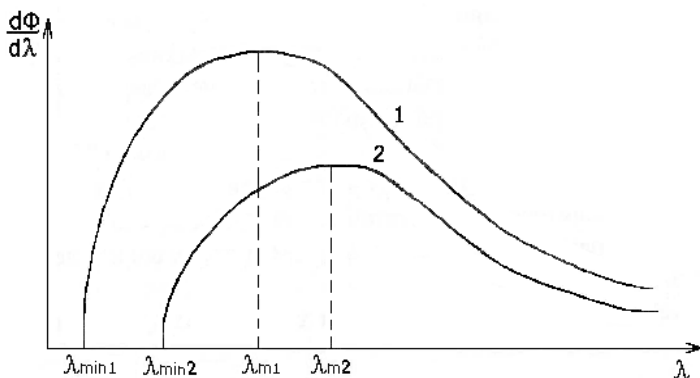


Рис. 9.1

На цьому рисунку $U_1 > U_2$. З рисунка також видно, що спектр гальмівного випромінювання обмежений з боку малих

значень довжин хвиль величиною λ_{\min} та має максимум при довжині хвилі, яка позначена λ_m , причому $\lambda_{\min 1} < \lambda_{\min 2}$ та $\lambda_{m1} < \lambda_{m2}$, тобто із збільшенням напруги спектр гальмівного випромінювання (його короткохвильова межа й максимум) зміщується у бік менших довжин хвиль.

Указані властивості спектра гальмівного рентгенівського випромінювання пов'язані з тим, що при зіткненні з анодом кінетична енергія електронів частково переходить в енергію квантів рентгенівського випромінювання. Енергія електрона перед його зіткненням з анодом трубки дорівнює (якщо нехтувати початковою енергією електрона при емісії) роботі електричного поля при переміщенні електрона від катода до анода, тобто дорівнює eU , де e - елементарний заряд. Тому енергія рентгенівського кванта, який утворюється, (вона дорівнює $\frac{hc}{\lambda}$, де h - стала Планка, а c - швидкість світла)

повинна задовольняти умові $\frac{hc}{\lambda} \leq eU$, звідки

$$\lambda \geq \frac{hc}{eU}.$$

З останньої нерівності видно, що в спектрі гальмівного рентгенівського випромінювання дійсно можуть бути присутніми всі довжини хвиль, якщо вони більші або дорівнюють λ_{\min} , де

$$\lambda_{\min} = \frac{hc}{eU}.$$

Можна показати, що

$$\lambda_m \approx \frac{3}{2} \lambda_{\min}.$$

Характеристичне рентгенівське випромінювання створюють атоми елементів з достатньо великими порядковими номерами (Z). Випромінювання виникає при переходах електронів в оболонках цих атомів з одного з верхніх рівнів на один з найнижчих. При таких переходах різниця енергій рівнів

велика та довжина хвилі виникаючого фотона належить діапазону довжин хвиль рентгенівського випромінювання. Оскільки будова нижніх рівнів усіх важких атомів подібна, схожими є й спектри характеристичного рентгенівського випромінювання різних важких атомів. Ці спектри є лінійчатими та підкоряються *закону Мозлі*, відповідно до якого

$$\sqrt{\nu} = A(Z - B),$$

де ν - частота, що відповідає лінії характеристичного рентгенівського випромінювання, яке виникає при переході атома з порядковим номером Z з n -го стаціонарного стану в k -ий, A і B - константи, значення яких визначаються значеннями чисел n і k .

При проходженні рентгенівського випромінювання через речовину потік випромінювання (Φ) послаблюється. Якщо рентгенівське випромінювання монохроматичне, то процес послаблення потоку випромінювання речовиною описується законом Бугера

$$\Phi = \Phi_0 \cdot e^{-\mu \ell},$$

де Φ_0 - потік випромінювання, падаючого на речовину, Φ - потік випромінювання, що пройшло через шар речовини товщиною ℓ та не змінило напрямку розповсюдження, μ - *лінійний коефіцієнт послаблення* рентгенівського випромінювання.

Послаблення потоку рентгенівського випромінювання речовиною відбувається внаслідок взаємодії випромінювання з електронними оболонками атомів речовини. При цьому існують три механізми такої взаємодії: *когерентне розсіяння*, *некогерентне розсіяння* (яке називається також *ефектом Комптона*, або *комптонівським розсіянням*) та *фотоефект*.

Когерентне розсіяння спостерігається у випадку, якщо енергія кванта рентгенівського випромінювання менша за енергію іонізації атома (тобто енергії, яку необхідно витратити, щоб відірвати від атома електрон). Таким чином, когерентне розсіяння характерне для довгохвильового рентгенівського випромінювання. При когерентному розсіянні змінюється напрямок розповсюдження рентгенівського випромінювання без поглинання енергії випромінювання речовиною, а отже, без

зміни довжини хвилі та частоти фотона рентгенівського випромінювання.

Причиною некогерентного розсіювання квантів рентгенівського випромінювання є їх взаємодія з електронами зовнішніх оболонок атомів, тобто з тими електронами, які зв'язані з ядром слабкіше, ніж електрони внутрішніх оболонок. При такій взаємодії електрон відривається від атома (відбувається іонізація атома) і набуває кінетичної енергії. На здійснення роботи по відриву електрона та наданню йому кінетичної енергії витрачається частина енергії кванта рентгенівського випромінювання. Внаслідок цього утворюється квант випромінювання з меншою енергією (з більшою довжиною хвилі), який рухається в напрямку, що відрізняється від напрямку руху початкового кванта, тобто відбувається розсіювання випромінювання. Саме тому, що довжина хвилі розсіяного випромінювання відрізняється від довжини хвилі початкового випромінювання, такий вид розсіювання і називається некогерентним. Електрони, які відриваються від атомів при ефекті Комптона, називаються *електронами віддачі*.

При фотоэффекті кванти рентгенівського випромінювання взаємодіють з електронами внутрішніх оболонок атомів. При цьому також відбувається виривання електрона з атома (іонізація атома). Але, оскільки електрони внутрішніх оболонок сильніше зв'язані з ядром, ніж електрони зовнішніх оболонок, на виривання електрона з атома витрачається вся енергія рентгенівського кванта, тобто відбувається не розсіювання, а поглинання випромінювання.

У загальному випадку при взаємодії рентгенівського випромінювання з речовиною можуть спостерігатися всі три ефекти, що вносять свій внесок до сумарного значення коефіцієнта послаблення. Тому можна записати

$$\mu = \mu_k + \mu_n + \mu_f,$$

де μ_k , μ_n та μ_f , - компоненти сумарного μ , обумовлені когерентним розсіюванням, некогерентним розсіюванням та фотоэффектом відповідно.

Загальне послаблення потоку рентгенівського випромінювання речовиною обумовлене процесами розсіювання

випромінювання і процесами, що приводять до поглинання енергії випромінювання речовиною. Тому вираження для μ частіше записують у вигляді

$$\mu = \tau + \sigma,$$

де τ та σ - компоненти μ , пов'язані з поглинанням випромінювання та розсіянням випромінювання відповідно. Дослідження показують, що величина τ пропорційна густині речовини (ρ), четвертому ступеню Z (порядкового номера елемента) та третьому ступеню довжини хвилі випромінювання.

Враховуючи, що лінійний коефіцієнт послаблення пропорційний густині речовини, для характеристики здатності речовини послаблювати потік рентгенівського випромінювання часто використовують масовий коефіцієнт послаблення (μ_m),

який дорівнює $\mu_m = \frac{\mu}{\rho}$ та не залежить від густини

поглинаючої речовини.

Сильна залежність здатності речовини поглинати рентгенівське випромінювання від величини порядкового номера елемента Z лежить в основі рентгенодіагностики. При проходженні рентгенівського випромінювання через тіло людини різні тканини істотно по-різному поглинають випромінювання, що пов'язане з їх різним хімічним складом. Так, кісткова тканина, що містить атоми кальцію і фосфору (величини Z дорівнюють 20 і 15 відповідно) в десятки разів сильніше поглинає рентгенівське випромінювання, ніж м'які тканини, у яких переважають вуглець, кисень та водень (величини Z дорівнюють 6, 8 та 1 відповідно). Тому при просвічуванні людського тіла рентгенівськими променями потік випромінювання, проходячи через м'які тканини, поглинається мало, а кістки при такому просвічуванні поглинають значно більшу частину падаючого випромінювання. Для реєстрації рентгенівського випромінювання, що пройшло через тіло людини, використовуються або фотоплівка, або спеціальні екрани, що світяться під дією рентгенівського випромінювання. Таке свічення деяких речовин під дією рентгенівського випромінювання називається *рентгенолюмінесценцією*.

Вивчення внутрішніх органів людини за допомогою рентгенівських променів при використанні екранів, що люмінесціюють, називається *рентгеноскопією*, а при використанні фотоплівки - *рентгенографією*.

У ряді методик рентгенодіагностики використовуються контрастні речовини, які добре поглинають рентгенівські промені. Так, при дослідженні шлунково-кишкового тракту порожнина шлунка, а потім і кишечник заповнюються сульфатом барію. При рентгенівському дослідженні кровоносних судин (ангіографія) у кров людини вводять речовини, що містять йод.

Рентгенівське випромінювання несприятливо впливає на живі тканини. Тому з метою зменшення цього впливу розроблені методики, що дозволяють отримувати зображення при малих потоках випромінювання, наприклад, методики, які використовують електронно-оптичні перетворювачі.

Найінформативнішою, але й технічно найскладнішою є методика *рентгенівської комп'ютерної томографії* (РКТ). Ідея методу РКТ є такою. Через ділянку тонкого плоского шару людського тіла пропускають тонкий промінь рентгенівського випромінювання і реєструють величину потоку, що пройшов через цю ділянку. Посилаючи промінь через різні ділянки шару у різних напрямках можна при чималій кількості вимірювань розрахувати величину поглинання випромінювання в кожній невеликій ділянці шару, що вивчається. Величина поглинання випромінювання в кожній з ділянок залежить від її властивостей (густини, порядкового номера елементів, що входять в речовину ділянки). Якщо результати розрахунку вивести на екран монітора у вигляді двовимірної картини, де ділянки шару, які відрізняються за величиною поглинання випромінювання, розрізняються на моніторі за яскравістю зображення або за кольором, то виходить наочне зображення внутрішньої будови вибраного шару організму. Застосовуючи цю методику для декількох шарів, можна отримувати пошарові зображення будови різних органів. Найінформативнішим є метод РКТ при виявленні злоякісних пухлин. Роздільна здатність сучасних комп'ютерних томографів дозволяє виявляти пухлини розміром в декілька міліметрів.

Дія рентгенівського випромінювання на тканини в лікувальних цілях називається *рентгенотерапією*, що є окремим випадком променевої терапії, яку докладніше розглядатимемо далі.

Для реалізації різних методик, зв'язаних з використанням рентгенівського випромінювання, потрібні рентгенівські апарати, що створюють випромінювання необхідної інтенсивності та *жорсткості*. Кажучи про рентгенівське випромінювання, м'яким вважають випромінювання з більшою довжиною хвилі, а жорстким - з меншою довжиною хвилі.

Основною частиною рентгенівського апарату є рентгенівська трубка. Рентгенівська трубка зазвичай є скляною посудиною, з якої відкачане повітря, та містяться два електроди - катод і антикатод (анод). Катод нагрівається електричним струмом й внаслідок термоелектронної емісії є джерелом електронів. Термоелектрони, прискорені електричним полем між антикатодом і катодом, ударяються об антикатод, що породжує гальмівне рентгенівське випромінювання. Потік рентгенівського випромінювання, що генерується трубкою, може бути обчислений за формулою

$$\Phi = kIU^2Z, \quad (9.1)$$

де k - коефіцієнт пропорційності, I - сила струму в трубці, U - напруга між антикатодом і катодом, Z - порядковий номер елемента, з якого виготовлений антикатод (точніше, та ділянка антикатада, об який ударяються електрони).

Напруга, що створюється між антикатодом і катодом, складає величину від 60 до 120 кВ. Змінюючи величину цієї напруги, можна одержувати необхідну жорсткість випромінювання. При великих значеннях U генерується жорсткіше випромінювання, при менших значеннях - м'якіше. Як видно з формули (9.1), зміна напруги приводить й до зміни величини потоку випромінювання. Разом з тим, рентгенівський апарат повинен дозволяти змінювати величину Φ , не змінюючи жорсткості випромінювання, тобто без зміни величини U . Тому зміна потоку випромінювання досягається в трубці шляхом зміни сили струму в ній, що, у свою чергу, досягається шляхом зміни температури катода, а отже, і кількості електронів, що

випускаються ним за одиницю часу.

З формули (9.1) також виходить, що антикатод слід виготовляти з матеріалів з якомога більшим значенням Z . Проте це не єдина вимога до матеріалу антикатада. При бомбардуванні електронами антикатада в енергію рентгенівського випромінювання перетворюється тільки 1-2 % енергії електронів, решта енергії електронів йде на нагрів антикатада. Тому частина антикатада, яка бомбардується електронами й називається дзеркальцем антикатада, нагрівається до високої температури і повинна виготовлятися з тугоплавких матеріалів. Таким двом вимогам до матеріалу дзеркальця відповідає вольфрам, і саме з нього виготовляють дзеркальця антикатодів.

Сильне розігрівання антикатада призводить до того, що в потужних рентгенівських апаратах доводиться вживати заходів до його охолодження. З цією метою в деяких трубках використовують антикатоди, що обертаються, а в інших - антикатоди, всередині яких зроблені канали для циркуляції тепловідвідної рідини.

Живлення рентгенівських трубок повинне здійснюватися постійним струмом, оскільки електрони в трубці мають летіти від катода до антикатада, але не навпаки. Проте в не дуже потужних рентгенівських апаратах трубка живиться змінним струмом. Це можливо тому, що тільки нагрітий катод є джерелом електронів, і трубка внаслідок цього сама виконує роль випрямляча струму. Разом з тим, в дуже потужних апаратах антикатод може розігріватися до таких температур, при яких відбувається термоелектронна емісія. Тому для живлення потужних рентгенівських трубок використовують постійний струм, який отримується за допомогою спеціальних випрямлячів.

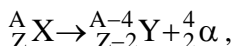
9.2 Радіоактивність

Іонізуючі випромінювання за винятком рентгенівського найчастіше утворюються внаслідок *радіоактивного розпаду* ядер атомів. Цим визначається необхідність докладного вивчення явища *радіоактивності*.

Зазвичай радіоактивність визначають як самовільний розпад нестійких ядер з утворенням інших ядер і (зазвичай)

випусканням елементарних частинок. Найчастіше спостерігаються α -розпад і β -розпад ядер.

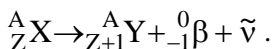
При α -розпаді утворюються α -частинка, тобто ядро атома гелію (${}^4_2\text{He}$), і ядро атома, масове число (A) якого менше за масове число первинного ядра на 4, а порядковий номер (Z) менший за порядковий номер первинного ядра на 2. Таким чином, рівняння α -розпаду має вигляд



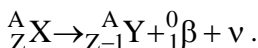
де Y - ядро, що утворилося при α -розпаді ядра X. При α -розпаді виникає також γ -випромінювання.

Розрізняють три види β -розпаду: *електронний*, або β^- -розпад, *позитронний*, або β^+ -розпад, і, так зване, *е-захват* (іноді використовується термін K-захват).

При електронному розпаді виділяється β^- -частинка, тобто електрон, що швидко рухається. При цьому також утворюється нове ядро, порядковий номер якого на одиницю більший, ніж у первинного ядра, а масове число не змінюється, і випускається антинейтрино ($\tilde{\nu}$). Таким чином, рівняння β^- -розпаду має вигляд

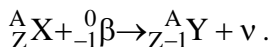


При позитронному розпаді виділяється β^+ -частинка, тобто позитрон, або антиелектрон. При цьому також утворюється нове ядро, порядковий номер якого на одиницю менший, ніж у первинного ядра, а масове число не змінюється, і випускається нейтрино (ν). Таким чином, рівняння β^+ -розпаду має вигляд



При е-захваті відбувається захоплення атомним ядром одного з внутрішніх електронів цього ж атома. При цьому також утворюється нове ядро, порядковий номер якого на одиницю менший, ніж у первинного ядра, а масове число не змінюється, і

випускається нейтрино (ν). Таким чином, рівняння β -захвату має вигляд



При всіх видах β -розпаду може виникати рентгенівське або γ -випромінювання.

Радіоактивним розпадом є також самовільний поділ ядер.

При радіоактивному розпаді речовини число атомів цієї речовини зменшується з часом. Залежність числа (N) атомів, що не розпалися, від часу (t) при радіоактивному розпаді називається законом *радіоактивного розпаду*. Ця залежність має вигляд

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

де N_0 - початкове (при $t = 0$) число атомів радіоактивної речовини, а λ - стала для даної речовини величина, яка називається *сталою розпаду*. Закон радіоактивного розпаду часто записують в іншому вигляді

$$N = N_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}},$$

де T - величина, яка називається *періодом піврозпаду речовини*. Така назва випливає з останньої формули, з якої видно, що період піврозпаду - це час, за який кількість радіоактивних атомів зменшується в 2 рази. Період піврозпаду речовини обернено пропорційний сталій розпаду цієї речовини

$$T = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx \frac{0,7}{\lambda}.$$

Інтенсивність іонізуючих випромінювань, що утворюються при радіоактивному розпаді, прямо пропорційна швидкості розпаду атомів, тобто числу атомів, які розпадаються за одиницю часу. Для характеристики швидкості розпаду радіоактивної речовини використовується така величина, як *активність* (A). Активність речовини дорівнює

$$A = -\frac{dN}{dt}.$$

Використовуючи формулу закону радіоактивного розпаду,

легко показати, що активність речовини змінюється з часом за таким законом

$$A = \lambda \cdot N = \lambda \cdot N_0 e^{-\lambda t}.$$

Активність речовини вимірюється в бекерелях (Бк). Активність речовини дорівнює одному бекерелю, якщо за одну секунду розпадається ядро одного атома речовини. Бекерель надто мала одиниця вимірювання, тому на практиці активність радіоактивних препаратів частіше вимірюють в мегабекерелях (МБк). Крім того, іноді використовуються позасистемні одиниці вимірювання активності: кюрі (Ки) та резерфорд (Рд). $1 \text{ Ки} = 3,7 \cdot 10^{10} \text{ Бк}$, $1 \text{ Рд} = 1 \text{ МБк}$.

Внаслідок дії іонізуючих випромінювань на речовину відбувається іонізація атомів цієї речовини. Механізми іонізації неоднакові у різних видів іонізуючих випромінювань.

Основним механізмом іонізації речовини під дією заряджених корпускулярних випромінювань, зокрема, α - та β^- - випромінювань, є іонізаційне гальмування. При русі заряджених α - та β^- - частинок в речовині відбувається електрична взаємодія цих частинок з електронами, що входять в електронні оболонки атомів. При цьому електрони вириваються або виштовхуються з атомів, які перетворюються при цьому на позитивно заряджені іони, а частинки, втрачаючи енергію на іонізацію атомів, гальмуються. Вирвані електрони можуть захоплюватися іншими атомами, внаслідок чого утворюються негативні іони. Взаємодія α - частинки з речовиною завершується тим, що, віднявши два електрони в атомів речовини, вона перетворюється на нейтральний атом гелію. β^- - частинка, загальмувавшись до теплових швидкостей руху частинок, зазвичай захоплюється яким-небудь атомом, що перетворюється при цьому на негативний іон.

Специфічним є механізм взаємодії β^+ -частинок з речовиною. β^+ -частинки (позитрони) взаємодіють з електронами атомів. Реакція взаємодії позитронів з електронами

називається реакцією *анігіляції*. При реакції анігіляції позитрон й електрон зникають, а на їх місці утворюються декілька (зазвичай два) γ -фотонів. Зникнення електрона з оболонки атома перетворює цей атом на іон. Крім того, γ -випромінювання, яке при цьому утворюється, взаємодіючи з речовиною, також викликає її іонізацію.

Для β -частинок разом з розглянутими механізмами іонізації слід згадати й можливість виникнення гальмівного рентгенівського випромінювання при різкому гальмуванні частинок у процесі їх проходження через речовину. При достатній енергії рентгенівських фотонів вони також можуть викликати іонізацію речовини.

Існують три основні механізми взаємодії γ -випромінювання з речовиною, які призводять до іонізації речовини: фотоэффект, некогерентне розсіювання (ефект Комптона) та *утворення електрон-позитронних пар*. Перші два механізми розглянуто раніше в цьому розділі. Утворення електрон-позитронних пар спостерігається тільки при достатньо великих енергіях γ -квантів (не менше 1,2 МеВ, але зазвичай більше 2 МеВ). При цьому γ -фотон зникає, а на його місці утворюються електрон і позитрон. Електрон, що утворився, може приєднуватися до нейтрального атома, перетворюючи його на негативний іон, а позитрон - вступати в розглянуту вище реакцію анігіляції.

Фотоэффект частіше за інші механізми спостерігається при відносно невеликих енергіях γ -квантів, некогерентне розсіювання переважає при середніх енергіях, а утворення електрон-позитронних пар - при великих енергіях γ -фотонів.

При взаємодії γ -випромінювання з речовиною разом з розглянутими первинними механізмами можуть спостерігатися і вторинні механізми іонізації речовини. Так, при фотоэффекті вирваний електрон може приєднуватися до іншого атома, утворюючи негативний іон; на нижній енергетичний рівень, що звільнився у атомі, може переходити електрон з верхнього рівня, внаслідок чого може утворюватися рентгенівський фотон, який, взаємодіючи з речовиною, також створює іонізацію. При

некогерентному розсіянні іонізацію викликають як розсіяні кванти, так і електрони віддачі. При достатній енергії вони можуть іонізувати речовину по механізму іонізаційного гальмування, а при різкому гальмуванні в речовині - породжувати гальмівне рентгенівське випромінювання, що іонізує речовину. При утворенні електрон-позитронних пар електрони можуть мати достатньо велику енергію та іонізувати речовину за рахунок тих же механізмів, що й електрони віддачі, які утворюються при Комптон - ефекті. Вторинні ефекти, які спостерігаються при анігіляції позитрона, що утворився, розглянуті вище.

Окрім трьох основних розглянутих механізмів взаємодії γ -випромінювання з речовиною необхідно згадати також *фотоядерні реакції*. Фотоядерні реакції - це радіоактивні перетворення ядер атомів після поглинання ними γ -фотонів.

Нейтрони безпосередньо не викликають іонізацію речовини, але, вступаючи у взаємодію з ядрами атомів речовини, породжують випромінювання, які безпосередньо іонізують речовину.

У результаті взаємодії нейтронів з ядрами відбувається або розсіяння нейтронів, або їх захоплення ядрами.

При розсіянні частина кінетичної енергії нейтрона передається ядру. Якщо ядро легке, воно при такій взаємодії може набути значної швидкості. *Ядра віддачі*, що утворилися у такий спосіб, мають кінетичну енергію достатню для іонізації речовини по механізму іонізаційного гальмування.

При захопленні нейтрона ядро переходить в збуджений стан, найчастіше нестійкий. В останньому випадку відбувається радіоактивний розпад ядра, найчастіше або у формі β^- -розпаду, або у формі поділу ядра, хоча можуть відбуватися і реакції з виділенням протонів або α -частинок.

У багатьох випадках при взаємодії нейтронів з ядрами атомів утворюються і гамма-випромінювання.

При проходженні через речовину γ -випромінювання його потік послаблюється. Послаблення потоку монохроматичного γ -випромінювання відбувається відповідно до закону Бугера:

$$\Phi = \Phi_0 e^{-\mu \ell},$$

де величина μ - може бути представлена у вигляді

$$\mu = \mu_{\text{ф}} + \mu_{\text{н}} + \mu_{\text{п}},$$

де $\mu_{\text{ф}}$, $\mu_{\text{н}}$ та $\mu_{\text{п}}$ - складові загального коефіцієнта ослаблення (μ), обумовлені фотоелементом, некогерентним розсіюванням та утворенням електрон-позитронних пар відповідно.

Графік залежності величини μ та її складових від енергії випромінювання показаний на рис. 9.2.

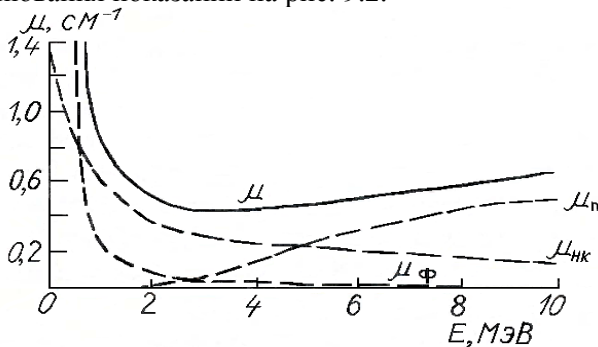


Рис. 9.2

Проходження через речовину випромінювань, що є потоками заряджених частинок, характеризують такими величинами, як *лінійна щільність іонізації*, *лінійна гальмівна здатність*, *середній лінійний пробіг*.

Лінійна щільність іонізації (i) - це відношення числа іонів одного знака (n), утворених частинкою на шляху довжиною ℓ , до довжини цього шляху. Оскільки при проходженні частинок через речовину величина i змінюється (тобто залежить від ℓ), для обчислення цієї величини точнішим вважається використання формули

$$i = \frac{dn}{d\ell}.$$

Лінійна гальмівна здатність (S) - це відношення енергії (E), що втрачається частинкою при проходженні шляху (ℓ), до довжини цього шляху. Оскільки величина (S) також змінюється

при проходженні частинкою через речовину, для обчислення лінійної гальмівної здатності точнішим вважається використання формули

$$S = \frac{dE}{d\ell}.$$

Середній лінійний пробіг частинки - це середня відстань, яку проходить частинка в речовині доти, поки її швидкість не знизиться до значення швидкості теплового руху частинок.

Важкі заряджені частинки мають характерну залежність лінійної щільності іонізації від відстані (x), пройденої в речовині. Графік цієї залежності показаний на рис. 9.3.

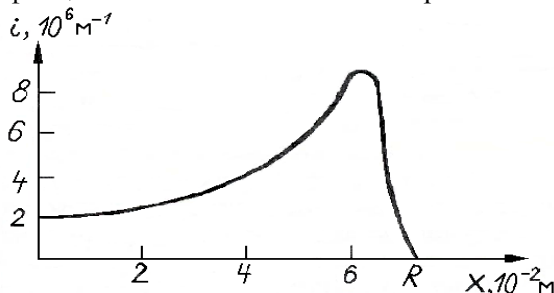


Рис. 9.3

Такий характер залежності між величинами i та x обумовлений тим, що при великих швидкостях частинки настільки швидко пролітають мимо атомів, що майже не іонізують їх, тобто створюють невисоку лінійну щільність іонізації. Пройшовши деякий шлях в речовині, вони уповільнюються до таких швидкостей, при яких починають ефективніше взаємодіяти з електронними оболонками атомів, іонізуючи їх та забезпечуючи великі значення лінійної щільності іонізації. Ділянка високих значень величини (i) на рис. 9.3 називається *піком Брегга*.

Послаблення потоку β -випромінювання речовиною в основному описується експоненціальною залежністю, яка має вигляд

$$N = N_0 e^{-\mu \ell},$$

де N_0 - кількість β -частинок, які падають на речовину протягом

деякого часу, N - кількість тих частинок, які досягли глибини ℓ , μ - лінійний коефіцієнт послаблення потоку β -випромінювання речовиною. Відхилення від експоненціального характеру залежності величини N від ℓ спостерігається тільки при малих значеннях N .

Здатність випромінювань проникати в речовину визначає їхню проникаючу здатність. Високу проникаючу здатність мають нейтронне, γ -та рентгенівське випромінювання. Заряджені частинки мають значно меншу проникаючу здатність. Зазвичай, чим більша проникаюча здатність випромінювання, тим менша його іонізуюча здатність і навпаки.

Дія іонізуючих випромінювань на клітини, біологічні тканини й організм в цілому має, в основному, негативний характер і характеризується деякими особливостями, а саме:

- значний біологічний ефект створюється дуже малими з енергетичної точки зору дозами іонізуючих випромінювань;

- дії іонізуючих випромінювань на біологічні об'єкти властивий *латентний* (прихований) період, тобто наслідки опромінювання біологічних об'єктів найчастіше виявляються через деякий час після опромінювання;

- різні тканини організму, різні клітини, різні частини клітин відрізняються за чутливістю до іонізуючих випромінювань. Найчутливішими до опромінювання є тканини, у яких відбувається активний поділ клітин. Найнебезпечнішою для життєдіяльності клітин є дія іонізуючих випромінювань на ядро, точніше, пошкодження випромінюваннями генетичного апарату клітини;

- пошкодження генетичного апарату клітин позначається на стані не тільки тих організмів, які опромінювалися, але часто проявляється й в подальших поколіннях.

Негативний характер впливу іонізуючих випромінювань на біооб'єкти обумовлює актуальність задачі захисту від таких випромінювань. Відомі різні методи (фактори) захисту від іонізуючого випромінювання, а саме:

1. Захист часом. Чим менший час контакту з джерелом іонізуючого випромінювання, тим менша отримана доза опромінювання.

2. Захист відстанню. Чим далі об'єкт, що опромінюється, від джерела іонізуючого випромінювання, тим менша отримана доза. Залежність є обернено квадратичною, оскільки від джерела промені йдуть радіально і розподіляються по сфері, площа якої пропорційна квадрату відстані.

3. Захист матеріалом базується на різній здатності речовин поглинати різні види іонізуючого випромінювання. Альфа-промені може затримати тонкий захисний бар'єр, наприклад, аркуш паперу. Високоенергетичні бета-промені може затримати пластинка алюмінію товщиною в декілька міліметрів. Гамма-промені та рентгенівське випромінювання здатні проникати глибоко в речовину або проходити крізь товсті бар'єри. В цьому випадку захисні бар'єри виготовляють з матеріалів з достатньо великою густиною (цегла, бетон, барибетон). Якщо потрібен компактний захист, використовується свинець або інші важкі елементи. Нейтрони краще поглинаються екранами, які містять багато водню – вода, парафін тощо.

Чорнобильська аварія поставила перед радіобіологією та радіаційною медициною низку нових проблем, які обумовили розвиток нових напрямів досліджень. Зокрема зазначимо такі напрямки:

- вивчення біологічної дії випромінювань в малих дозах і віддалених наслідків опромінення;
- дослідження комбінованої дії широкого спектру радіонуклідів з хімічними забруднювачами середовища;
- пошук нових засобів захисту від хронічного опромінення.

9.3 Дозиметрія іонізуючих випромінювань

Для вивчення та опису радіобіологічних ефектів необхідне введення кількісних характеристик дії іонізуючих випромінювань на біологічні об'єкти (*доз*), а також розробка методів і створення апаратів, що дозволяють ці характеристики визначати. Розв'язання цих задач є предметом такої галузі науки і техніки, як *дозиметрія*.

Радіобіологічний ефект іонізуючих випромінювань тим більший, чим більша енергія випромінювання, поглиненого

речовиною. Тому незалежно від природи випромінювання його дія на об'єкти може бути охарактеризована відношенням енергії випромінювання (E), поглиненого речовиною об'єкта, до маси (m) цієї речовини. Така характеристика називається *поглиненою*

дозою, або *дозою випромінювання* (D). Таким чином $D = \frac{E}{m}$. У

СІ поглинена доза вимірюється в *греях* (Гр). При дозі випромінювання в 1 Гр 1 кг речовини поглинає 1 Дж енергії іонізуючого випромінювання. Існує також позасистемна одиниця дози випромінювання - *рад*. 1 Гр = 100 рад.

Величину, яка дорівнює відношенню дози до часу, за який вона одержана, називають *потужністю дози*.

Потужність дози випромінювання (потужність поглиненої дози) (\dot{D}) дорівнює

$$\dot{D} = \frac{D}{t}$$

і вимірюється в *греях за секунду* (Гр/с) та в *радах за секунду* (рад/с).

Практично виміряти поглинену дозу складно. Тому дозу випромінювання, поглинену тілом, оцінюють, вимірюючи ступінь іонізації випромінюванням повітря, що оточує тіло. Характеристикою іонізації рентгенівським або γ -випромінюванням повітря є *експозиційна доза* (X). Експозиційна доза дорівнює відношенню заряду (q) іонів одного знака, що утворилися в повітрі під дією рентгенівського або γ -випромінювання, до маси (m) цього повітря, тобто

$$X = \frac{q}{m}.$$

Одиницею вимірювання експозиційної дози в СІ є *кулон на кілограм* (Кл/кг). На практиці широко використовується позасистемна одиниця експозиційної дози - *рентген* (Р). Один рентген - це доза рентгенівського або γ -випромінювання, під дією якої при повній іонізації в 1 см³ повітря, що знаходиться за нормальних умов (при температурі 0⁰ С і тиску 760 мм рт. ст.), утворюються 2,08·10⁹ пар іонів кожного знака. Кажучи про

повну іонізацію, мають на увазі, що враховуються іони, які утворилися не тільки за рахунок первинних, але й усіх механізмів іонізації. $1P = 2,58 \cdot 10^{-4}$ Кл/кг.

Потужність експозиційної дози (\dot{X}) дорівнює

$$\dot{X} = \frac{X}{t}$$

і вимірюється в амперах на кілограм (А/кг) та рентгенах за секунду (Р/с).

Визначивши експозиційну дозу, поглинену дозу знаходять як добуток виміряного значення експозиційної дози на деякий коефіцієнт (f), величина якого залежить від властивостей опромінюваної речовини, а також від енергії фотонів. Таким чином,

$$D = fX.$$

Якщо дозу випромінювання виражати в радах, а експозиційну дозу - в рентгенах, то значення коефіцієнта f для води та м'яких тканин організму з достатньою точністю дорівнює одиниці. Для кісткової тканини значення коефіцієнта f при використанні зазначених одиниць вимірювання зменшується зі зростанням енергії фотонів приблизно від 4,5 до 1.

Радіобіологічний ефект іонізуючих випромінювань при визначеній дозі випромінювання залежить від виду випромінювання. Так, повільні (теплові) нейтрони ефективніші за фотонне (рентгенівське та гамма) випромінювання в 3 рази, а α -випромінювання - в 20 разів.

Для характеристики радіобіологічного ефекту, що створюється різними видами випромінювання вводиться поняття *еквівалентної дози*. Біологічний ефект, що створюється випромінюванням, при певній еквівалентній дозі не залежить від виду випромінювання і повністю визначається величиною дози. Еквівалентна доза (H) прямо пропорційна дозі випромінювання та дорівнює

$$H = kD,$$

де k - коефіцієнт пропорційності, який називається *коефіцієнтом якості*. У радіобіології цей коефіцієнт часто називають *відносною біологічною ефективністю* (ВБЕ).

У СІ еквівалентна доза вимірюється в *зівертах* (Зв). Використовується також позасистемна одиниця вимірювання еквівалентної дози - *бер*. $1 \text{ Зв} = 100 \text{ бер}$.

Для гігієнічного нормування променевих навантажень на людину використовується поняття *гранично допустимої дози* (ГДД). Гранично допустима доза - це найбільше значення індивідуальної еквівалентної річної дози, яка при рівномірній дії протягом 50 років не викличе змін здоров'я людини. Гранично допустимою річною еквівалентною дозою при професійному опромінюванні прийнята величина 5 бер.

Поняття еквівалентної дози використовується при значеннях, менших ніж 10 ГДД. При дозах опромінювання більших, ніж 10 ГДД слід враховувати те, що при великих дозах відносна біологічна ефективність уже не є сталою та залежить від величини D.

Для оцінки віддалених наслідків опромінювання, що мають імовірнісний (стохастичний) характер, необхідно враховувати різну радіочутливість різних тканин. Із цією метою вводиться поняття *ефективної еквівалентної дози* (H_E). Ефективна еквівалентна доза обчислюється за формулою

$$H_E = \sum_{i=1}^n W_i \cdot H_{Ti},$$

де H_{Ti} - середнє значення еквівалентної дози для i -ї тканини (органа), W_i - ваговий коефіцієнт, що враховує внесок i -ї тканини (органа) в загальну радіочутливість організму (у інтегральний радіобіологічний ефект при опромінюванні). Коефіцієнт (W) характеризує відношення стохастичного ризику для тканини до загального стохастичного ризику при рівномірному опромінюванні всього тіла. Значення коефіцієнта (W) для різних органів наведені в таблиці 9.1.

Таблиця 9.1

Тканина або орган	W
Гонади	0,2
Червоний кістковий мозок	0,12

Легені	0,12
Шлунок	0,12
Сечовий міхур	0,05
Грудна залоза	0,05
Печінка	0,05
Щитовидна залоза	0,05
Шкіра	0,01
Надкисниця	0,01

Окремим важливим питанням є *внутрішнє опромінювання* людини. Таке опромінювання виникає, коли джерела іонізуючих випромінювань потрапляють всередину організму при диханні, з їжею або водою, при пошкодженні шкірних покривів. Внутрішньому опромінюванню притаманний ряд особливостей:

- збільшується час опромінювання тканин організму, оскільки опромінювання продовжується протягом усього часу знаходження радіоактивної речовини в організмі;

- доза випромінювання для внутрішніх органів зростає внаслідок малої відстані між органами (тканинами) та джерелами випромінювання;

- при внутрішньому опромінюванні виключно небезпечними стають види опромінювання, практично безпечні при зовнішньому опромінюванні, наприклад, α -випромінювання, яке повністю затримується шкірою при зовнішньому опромінюванні;

- більшість радіоактивних речовин розподіляються в організмі нерівномірно, що підсилює локальне опромінювання окремих органів.

За локалізацією розподілу в організмі людини радіоактивні речовини поділяють на:

- ті, що накопичуються в скелеті: ^{90}Sr , ^{90}Y , ^{226}Ra , ^{228}Th , ^{239}Pu ;

- ті, що накопичуються в кровотворних органах та лімфатичній системі: ^{198}Au , ^{209}Po ;

- ті, що накопичуються в щитовидній залозі: радіоізотопи йоду;

- ті, що рівномірно розподіляються в органах і тканинах:
 ^3H , ^{95}Zr , ^{95}Nb , ^{103}Ru , ^{137}Cs , ^{14}C .

При внутрішньому опромінюванні в якості норм радіаційної безпеки використовуються:

- *границя річного надходження* (ГРН) радіоактивних речовин в організм людини;

- *граничний допустимий вміст* (ГДВ) випромінювачів в критичних органах;

- *границьно допустимі концентрації* (ГДК) радіоактивних речовин у повітрі, воді, харчових продуктах.

Природні джерела іонізуючих випромінювань створюють деякий рівень випромінювань, що постійно впливає на всі організми на Землі. Цей рівень називається фоновим, або просто *фоном*. Діяльність людини призводить до зростання величини фону. Річна еквівалентна доза, пов'язана з природним фоном, складає в даний час за різними даними 125 - 200 мбер.

Дія іонізуючих випромінювань може призводити до загибелі організму. Для характеристики організмів за критерієм ймовірності летального ефекту вводять такі величини, як *мінімальна летальна доза* та ЛД_{50} .

Мінімальна летальна доза від γ -випромінювання за умов опромінювання всього організму складає для людини величину близько 600 бер.

ЛД_{50} - це величина дози випромінювання, при якій гине 50% опромінених організмів. Для людини при опромінюванні γ -випромінюванням величина ЛД_{50} за наслідками різних досліджень становить величину 2,5 - 3,5 Гр.

Для виявлення іонізуючих випромінювань, визначення їхніх характеристик, вимірювання доз випромінювань у даний час використовується значна кількість різних приладів. Ці прилади можна розділити на дві великі групи: *детектори* іонізуючих випромінювань та *дозиметри*.

Детектори іонізуючих випромінювань використовуються для реєстрації цих випромінювань, а також для вимірювання їхніх деяких характеристик (наприклад, енергії та швидкості частинок, відношення їхнього заряду до маси та ін.). До

детекторів відносяться камера Вільсона, бульбашкова камера, лічильник Гейгера, товстошарові фотопластини та ін.

Дозиметрами називають пристрої для вимірювання доз іонізуючих випромінювань або величин, пов'язаних з дозами. Залежно від фізичного явища, яке лежить в основі дії дозиметра, розрізняють іонізаційні, люмінесцентні, напівпровідникові та фотодозиметри.

Іонізуючі випромінювання широко застосовуються в медицині. Можна вказати на діагностичне і терапевтичне застосування цих випромінювань, а також використання в наукових дослідженнях.

Застосування іонізуючих випромінювань лежить в основі радіонуклідної діагностики, у якій розрізняють динамічні та статичні методи. Нагадаємо, що поняття *нукліди* еквівалентно поняттю атомні ядра, а радіонукліди - це радіоактивні атоми.

Під час динамічної радіонуклідної діагностики пацієнтові вводиться (зазвичай внутрішньовенно в кров) *радіофармпрепарат*, тобто речовина, яка мітиться яким-небудь радіонуклідом. Найчастіше використовуються речовини, *тропні* певному органу, тобто такі, що специфічно накопичуються або виводяться цим органом. Над цим органом розміщують детектор, що дозволяє вимірювати величину потоку випромінювання, створеного препаратом, який знаходиться в досліджуваному органі. Реєструючи залежність потоку випромінювання від часу, отримують інформацію, яка є важливою для функціональної діагностики органа, що вивчається. Таким чином, динамічні методи - це, в основному, методи функціональної діагностики.

Під час статичної радіонуклідної діагностики зазвичай вивчають просторовий розподіл радіофармпрепарату в досліджуваному органі. Особливості накопичення або розподілу препарату в органі відображають, в першу чергу, порушення його структури, тобто морфологічні зміни.

Променева терапія використовується, головним чином, для знищення клітин злоякісних пухлин. Найчастіше застосовується дистанційна променева терапія, при якій використовується зовнішнє по відношенню до пацієнта джерело

іонізуючого випромінювання. У даний час при променевій терапії все ще широко використовуються рентгенівське та γ -випромінювання. Можливе використання прискорених до високих швидкостей електронів. Але найбільш ефективним на сьогодні є застосування при променевій терапії важких заряджених частинок. Це пов'язано з тим, що наявність характерного для цих частинок піку Бреґга в залежності лінійної щільності іонізації від глибини проникнення частинок у речовину, призводить до того, що ураження клітин відбувається в основному на певній глибині. Підбираючи належним чином цю глибину за рахунок зміни початкової енергії частинок, можна добитися того, щоб при опромінюванні знищувалися головним чином клітини пухлини і майже не страждали клітини тканин, що оточували пухлину. Найкращий ефект при цьому одержують, використовуючи прискорені π -мезони.

Разом з дистанційною терапією у ряді випадків використовуються й інші методики променевої терапії. Наприклад, при раку щитовидної залози, якщо пухлина зберегла здатність накопичувати йод, пацієнт приймає перорально розчин, що містить радіоактивний йод, який, поступаючи в пухлину, вибірково знищує саме її клітини. При раку шийки матки за допомогою спеціальних укладань поряд з пухлиною розміщують ампулу з високоактивними радіонуклідами, що також призводить до того, що знищуються в основному клітини пухлини, а навколишні тканини страждають мало.

Одним з інформативних методів у наукових медико-біологічних дослідженнях є *авторадіографія*. При авторадіографічних дослідженнях піддослідній тварині вводяться речовини, які беруть активну участь у клітинному метаболізмі, мічені якимось радіонуклідом, наприклад, амінокислоти, попередники ДНК та ін. Після одержання зрізів тканин піддослідної тварини можна, покриваючи ці зрізи спеціальною фотоемulsion, а потім проявляючи її, вивчити інтенсивність тих або інших метаболічних процесів у різних клітинах і тканинах.

Контрольні запитання та завдання до розділу

1. Що таке рентгенівське випромінювання? Охарактеризуйте види рентгенівського випромінювання.
2. Назвіть механізми взаємодії рентгенівського випромінювання з речовиною та наведіть формули, що описують цю взаємодію.
3. Поясніть основні методики рентгенодіагностики.
4. Що таке радіоактивність? Види радіоактивного розпаду.
5. Запишіть та поясніть закон радіоактивного розпаду.
6. Назвіть та поясніть механізми взаємодії іонізуючих випромінювань з речовиною.
7. Які ви знаєте види доз? Наведіть їхні одиниці вимірювання.
8. Поясніть особливості дії іонізуючих випромінювань на біоб'єкти.

Додатки

Таблиця значень функції Лапласа

t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$	t	$\Phi(t)$
0,00	0,0000	1,00	0,3413	2,00	0,47725
0,05	0,0199	1,05	0,3531	2,05	0,47981
0,10	0,0398	1,10	0,3643	2,10	0,48214
0,15	0,0596	1,15	0,3749	2,15	0,48422
0,20	0,0793	1,20	0,3849	2,20	0,48610
0,25	0,0987	1,25	0,3944	2,25	0,48778
0,30	0,1179	1,30	0,4032	2,30	0,48928
0,35	0,1368	1,35	0,4115	2,35	0,49061
0,40	0,1554	1,40	0,4192	2,40	0,49180
0,45	0,1736	1,45	0,4265	2,45	0,49286
0,50	0,1915	1,50	0,4332	2,50	0,49379
0,55	0,2088	1,55	0,4394	2,55	0,49461
0,60	0,2257	1,60	0,4452	2,60	0,49534
0,65	0,2422	1,65	0,4505	2,70	0,49653
0,70	0,2580	1,70	0,4554	2,80	0,49744
0,75	0,2734	1,75	0,4599	2,90	0,49813
0,80	0,2881	1,80	0,4641	3,00	0,49865
0,85	0,3023	1,85	0,4678	4,00	0,499968

0,90	0,3159	1,90	0,4713	5,00	0,49999997
0,95	0,3289	1,95	0,4744		

Таблиця значень коефіцієнта Стьюдента

$\backslash \alpha$ k \	0,95	0,99	0,999
2	4,303	9,925	31,598
3	3,182	5,841	12,924
4	2,776	4,604	8,610
5	2,571	4,032	6,869
6	2,447	3,707	5,959
7	2,365	3,499	5,408
8	2,306	3,355	5,041
9	2,262	3,250	4,781
10	2,228	3,169	4,587
12	2,179	3,055	4,318
14	2,145	2,977	4,140
16	2,120	2,921	4,015
18	2,101	2,878	3,922
20	2,086	2,845	3,850
22	2,074	2,819	3,792
24	2,064	2,797	3,745
26	2,056	2,779	3,707
28	2,048	2,763	3,674
30	2,042	2,750	3,646
40	2,021	2,704	3,551
60	2,000	2,660	3,460
120	1,980	2,617	3,373
∞	1,960	2,576	3,291

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Биофизика: учебник для вузов / П.Г. Костюк, Д.М. Гродзинский, В.Л. Зима и др.; Под общ. ред. П.Г. Костюка. - К.: Вища шк., 1988. - 504 с.
2. Биофизика / Ю.А. Владимиров, Д.И. Рошупкин, А.Я. Потапенко, А.И. Деев. - М.: Медицина, 1983. - 272 с.
3. Волькенштейн М.В. Биофизика. - М.: Наука, 1988. - 590 с.
4. Вибрационная безопасность. Общие требования. ГОСТ 12.1.012-90. - М., 1990.
5. Гамалая Н.Ф., Рудых З.М., Стадник В.Я. Лазеры в медицине. - К.: Здоровье, 1988. - 43 с.
6. Гродзинський Д.М. Радіобіологія. - К.: Либідь, 2000. - 448 с.
7. Губанов В.И., Утепбергенов А.А. Медицинская биофизика. - М.: Медицина, 1978. - 336 с.
8. Ємчик Л.Ф., Кміт Я.М. Медична і біологічна фізика. - Львів.: Світ, 2003. - 592 с.
9. Кольченко В.В., Паничкин Ю.В. Ультразвук и сердце. - К.: Здоровья, 1988. - 45 с.
10. Кортуков Е.В., Воеводский В.С., Павлов Ю.К. Основы материаловедения. - М.: Высшая школа, 1988. - 322 с.
11. Котык А., Яначек К. Мембранный транспорт. Междисциплинарный подход. - М.: Мир, 1980. - 341 с.
12. Котык А., Яначек К. Мембранный транспорт. Междисциплинарный подход. - М.: Мир, 1980. - 341 с.
13. Луизов А.В. Физика зрения. - М., Знание, 1976. - 62 с.
14. Маршелл Э. Биофизическая химия. Принципы, техника и приложения. В 2-х томах. - М.: Мир, 1981. - 824 с.
15. Мэрион Дж. Общая физика с биологическими примерами. - М.: Высшая школа, 1986. - 623 с.
16. Медична і біологічна фізика. Том 1. / О.В.Чалий, Б.Т.Агапов, А.В. Меленевська та ін. - К.: ВІПОЛ, 1999. - 425 с.
17. Медична і біологічна фізика. Том 2. / О.В.Чалий, Б.Т.Агапов, А.В. Меленевська та ін. - К.: ВІПОЛ, 2001. - 415 с.
18. Проблемы прочности в биомеханике / И.Ф.Образцов, И.С.Адамович, А.С.Барер и др. - М.: Высшая школа, 1988. - 311 с.
19. Рего К.Г. Метрологическая обработка результатов технических измерений. - К.: Техніка, 1987. - 128 с.

20. Ремизов А.Н. Медицинская и биологическая физика. – М.: Высшая школа, 1999. – 616 с.
21. Рубин А.Б. Биофизика / Учеб. пособие для биол. спец. вузов. – М.: Высш. шк., 1987. – 319 с. (1 том) 302 с (2 том)
22. Рубин А.Б. Термодинамика биологических процессов / Учеб. пособие для вузов. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 285 с.
23. Стенли А. Гельфанд. Слух: введение в психологическую и физиологическую акустику. – М.: Медицина, 1984. – 352 с.
24. Тиманюк В.А., Животова Е.Н. Биофизика. – Харьков: Изд-во НФАУ; Золотые страницы, 2003. – 704 с.
25. Ультразвук. Маленькая энциклопедия. Глав. ред. И.П.Голямина. – М.: Советская Энциклопедия, 1979. – 400 с.
26. Ультразвук. Общие требования безопасности. ГОСТ 12.1.001-89. – М., 1989.
27. Физика визуализации изображений в медицине: В 2-х т. Том 1; пер. с англ./Под ред. С.Уэбба. – М.: Мир, 1991. – 408 с.
28. Физика визуализации изображений в медицине: В 2-х т. Том 2; пер. с англ./Под ред. С.Уэбба. – М.: Мир, 1991. – 423 с.
29. Фотометрия. Термины и определения. ГОСТ 26148-84. – М., 1984.
30. Хауссер К.Х., Кальбитцер Х.Р. ЯМР в медицине и биологии: структура молекул, томография, спектроскопия in-vivo. – К.: Наук. Думка, 1993. – 259 с.
31. Холл Э. Дж. Радиация и жизнь. – М.: Медицина, 1989. – 256 с.
32. Шандала М.Г., Думанский Ю.Д., Иванов Д.С. Санитарный надзор за источниками электромагнитных излучений в окружающей среде. – К.: Здоровье, 1990. – 150 с.
33. Шум. Допустимые уровни в жилых и общественных зданиях. ГОСТ 12.1.036-81. – М., 1981.
34. Электростатические поля. Допустимые уровни на рабочих местах и требования к проведению контроля. ГОСТ 12.1.045-84. – М., 1984.
35. Ярмоненко С.П. Радиобиология человека и животных. – М.: Высшая школа, 1988. – 423 с.

ПРЕДМЕТНИЙ ПОКАЖЧИК

Аберації лінз 267
Авторадіографія 354
Адаптація 182
Аероіонотерапія 244
Акомодація 179
Активність 332
Актинометр 302
Акустика 101
Аналізатор 286
Анігіляція 333
Анізотропне середовище 287
Апарат слуху 109
Апертурний кут (кутова апертура) 272
Астигматизм 179, 180
Аудіометрія 108
Аускультация 108

Білки 155
Біологічні мембрани 185
Біомагнетизм 228, 230
Біореологія 116

Варіанта 54
Векторкардіографія 211
Векторні діаграми 215
Вектор Умова 101
Вестибулярний апарат 91
Взаємодії
- ван-дер-вальсові 158
- гідрофобні 161
- дисперсійні 157
- іон-дипольні 157
- іонні 157
- індукційні 157
- орієнтаційні 157
- слабкі 158
- стекінг- 164
Видовження 119
- відносне 119
Вимірювання 69
- непрямі 69
- прямі 69
- сумісні 69

- Вимірювань
- збіжність 72
- правильність 72
- точність 71
- Випадкова величина 41
- дискретна 41
- неперервна 41
- Випадкова(і) подія(ї) 32
- вірогідна 34
- залежні 35
- незалежні 34
- неможлива 34
- несумісні 34
- протилежні 34
- умовна 35
- Випробування 32
- Випромінювання
- іонізуючі 322
- рентгенівське 322
- гальмівне 323
- характеристичне 323
- теплове 297
- Висота тона 105
- Вібраційна хвороба 96
- Вібрація 96, 115
- Віброприскорення 115
- Віброшвидкість 115
- Відносна частота події 32
- Відносний зсув 123
- Відстань найкращого зору 179
- Вірогідність 60
- Віскозиметр 139, 143, 144
- Водневі зв'язки 159
- Волокна
- еластинові 128
- колагенові 128
- Вторинна структура
- білків 159
- ДНК 163
- Вузлові точки центрованої оптичної системи 270
- В'язкість
- динамічна 139
- кінематична 141

- Гальванізація 231
- Генератор 260

Гіромагнітне відношення 312
Гіперметропія (далекозорість) 179, 180
Гіперполяризація мембрани 197
Гістерезис 256
Гістограма 54
Головна оптична вісь
- лінзи 264
- центрованої оптичної системи 268
Головна оптична площина 288
Головні точки центрованої оптичної системи 269
Голографія 281
Гострота зору 182
Градiєнт 14
Гранична напруга зсуву 146
Границя річного надходження 343
Граничний допустимий вміст 343
Гранично допустима доза 341
Гранично допустимі концентрації 343
Грудні відведення 211
Гучність звуку 105

Дарсонвалізація місцева 240
Датчики 254, 255
Денатурація 161
Деполаризація мембрани 197
Детектор 344
Дефібриляція 237
Деформація 116
- високо еластична 116
- залишкова 116
- згину 116
- зсуву 116, 122
- кручення 116
- непружна (пластична) 116
- пружна 116
- розтягу 116
- стиску 116
Дивергенція 14
Диполь
- електричний 203
- струмовий 207
Дипольний момент 203
Дисперсія
- випадкової величини 44
- кутова 284
- оберտальна 290

- речовини 296
- світла 295
 - аномальна 296
 - нормальна 296
- Диференціал функції 12
 - вищого порядку 12
 - застосування для наближених обчислень 14
 - повний 13
 - частинний 13
- Диференціальне рівняння 24
 - звичайне 24
 - зі змінними, що розділяються 25
 - зі сталими коефіцієнтами 31
 - лінійні 25, 28
 - однорідні 25, 27
 - порядок рівняння 24
 - початкові (граничні) умови 24
 - розв'язання диференціального рівняння 24
 - розв'язок
 - аналітичний 24
 - загальний 25
 - частинний 25
 - у частинних похідних 24
- Дифракційна решітка 283
- Дифракція світла 282
- Дифузія 188
 - електродифузія 190, 191
 - обмінна 190
 - полегшена 190
- Дихроїзм 288
- Діамагнетики 222
- Діатермія 239
- Доза
 - еквівалентна 341
 - експозиційна 340
 - ефективна еквівалентна 341
 - поглинута (випромінювання) 339
- Дозиметр 344
- Дозиметрія 339
- Допустимий рівень 115

- Електричний еквівалент біологічної тканини 218
- Електробезпека 248
- Електрогімнастика м'язів 237
- Електроди 254
- Електроенцефалограма 212

Електроенцефалографія 212
Електрокардіограма 210
Електрокардіографія 201
Електроміографія 213
Електрони віддачі 326
Електросон 237, 238
Електростатичний душ (франклінізація) 244
Електроретинографія 213
Електрофорез 231, 232
Електрохімічний потенціал 191
Електрохірургія 239
Ендоскоп 263
Енергетична світність 298
Енергія
- вільна Гельмгольца 172
- вільна Гіббса 172
- внутрішня 168
- кінетична 83
- потенціальна 83
Ентальпія 172
Ентропія 170
ЕПР 310
Ергометрія 90
Еталон 254
Ефект
- бінауральний 110
- Допплера 99
- Комптона 325
- Фарадея 290

Жовта пляма 181

Завиток 111
Заземлення 249
Закон(и)
- Біо 291
- Біо-Савара-Лапласа 224
- Брюстера 287
- Бугера 292, 325, 335
- Бугера-Ламберта-Бера 293
- Вебера-Фехнера 105
- відбивання світла 262
- Дюбуа-Реймона 235
- Гесса 169
- Гука 120
- другий термодинаміки 171

- електромагнітної індукції 224
- заломлення світла 262
- зсуву Віна 301
- Кирхгофа 299
- лінійний термодинаміки незворотних процесів 174
- Мозлі 325
- Нернста 238
- Ома в диференціальній формі 205
- перший термодинаміки 168
- радіоактивного розпаду 332
- Релея 295
- розподілу випадкової величини 41, 42
- Стефана-Больцмана 301
- Стокса 317

Занулення 250

Заселеність енергетичних рівнів

- больцманівська 319
- інверсна 319

Звуковий тиск 101

Зворотний зв'язок 97

Зіниця 178

Змочування 135

Значення

- вимірне 69
- дійсне 69
- істинне 69

Зорова вісь 181

Зорова рецепція 177

Зорові рецептори

- колбочки 180, 181
- палички 180, 181

Зразкові засоби вимірювань 254

Імерсія 273

Імпеданс (повний опір) 216

Індукція електричного поля 226

Індуковане випромінювання 319

Індуктотермія 241

Інерціальна орієнтація 91

Інерційність 256

Інтеграл 16

- визначений 20
- властивості 16, 21
- геометричний зміст 22
- методи обчислення 17, 18, 19, 20, 21, 22
 - інтегрування частинами 19, 22

- заміни змінної 18, 21
- невизначений 16
- Інтегральний електричний вектор серця 208
- Інтенсивність 101
- Інтенсивність відмов 251
- Інтерференція світла 279
- Інфразвук 114
- Інфраруж 302
- Іонізаційне гальмування 333
- Іонні насоси 192

Ймовірність

- випадкової події 33
- безвідмовної роботи 251

Кардинальні площини центрованої оптичної системи 270

Кардинальні точки центрованої оптичної системи 270

Кардіостимуляція 237

Кількість теплоти 168

Когерентні хвилі 279

Коефіцієнт

- в'язкості 139
- дисперсії 218
- дифузії 189
- загасання 93
- запасу міцності 118
- кінетичний 174
- кореляції 64
- підсилення 257
- Пірсона 67
- Спірмена 68
- поверхневого натягу 134
- поглинання 298
- монохроматичний 299
- послаблення
- лінійний 325, 335
- масовий 327
- пропускання 293
- Пуассона 121
- регресії 63
- Стюдента 59
- теплового розширення 124
- якості (відносна біологічна ефективність) 341

Коливання

- автоколивання 92
- вимушені 92, 94

- вільні загасаючі 92, 93
- вільні незагасаючі 92
- механічні 92
- Константа екранування 313
- Концентраційна колориметрія 294
- Кореляційна залежність 63
- Кореляційне поле 64
- Корисне збільшення мікроскопа 273
- Кортієв орган 112
- Кришталік 178
- Крутість фронту 233
- Кут
 - Брюстера 287
 - граничний
 - заломлення 264
 - повного відбивання 263
 - діелектричних втрат 242
 - зору 182
 - зсуву 123
 - крайовий (змочування) 135
- Кутова швидкість 85
- Кутове збільшення мікроскопа 271
- Кутове прискорення 86

- Лазер 319
- ЛД₅₀ - 344
- Лінза 264
- Лінійна гальмівна здатність 336
- Лінійна щільність іонізації 336
- Лінія регресії 63
- Логарифмічний декремент загасання 94
- Люмінесценція 315

- Магнетон Бора 221
- Магнітна проникність 222
- Магнітний момент 221
- Магнітний потік 224
- Магнітобіологія 227
- Магнітокардіографія 230
- Магнітотерапія 228
- Математична статистика 53
- Математичне сподівання 44, 57
 - умовне 63
- Матеріали
 - ізотропні 123
 - крихкі 120

- пластичні 120
- Медична апаратура
 - кібернетична 247, 248
 - контрольно-діагностична 247
 - терапевтична 247, 248
- Межа
 - міцності 120
 - пропорційності 120
 - пружності 120
 - розрізнення
 - мікроскопа 272
 - ока 182
 - текучості 120
- Мембранні потенціали
 - дії 197
 - Доннана 195
 - рівноважний Нернста 195
 - спокою 194
- Метод
 - найменших квадратів 66
- Метрологія 253
- Механічна напруга 117
 - гранична 118
 - дотична 118
 - максимальна робоча 118
 - нормальна 118
 - припустима 118
- Мікроскоп 271
 - електронний 274, 314
 - люмінесцентний 317
 - поляризаційний 291
 - темного поля 275
 - ультрафіолетовий 274
 - фазового контрасту 275
- Мікропроекція 276
- Мікрофотографія 276
- Мінімальна летальна доза 344
- Міопія (короткозорість) 179, 180
- Модуль пружності
 - при зсуві (другого роду) 123
 - Юнга 120
- Момент
 - імпульсу 87
 - інерції 87
 - обертальний 117
 - сили 86

Мультипольний розклад 207

Надійний інтервал 56

Надійна ймовірність 58

Надійна оцінка 56

Надійність 248, 251

Напруженість магнітного поля 223

Наслідок 32

Нативна конформація 161

НВЧ-терапія 241, 243

Негентропія 175

Нефелометрія 295

Обертони 104

Опорно-руховий апарат 88

Оптична вісь

- кристала 287

- ока 178

Оптична густина розчину 293

Оптична пірометрія 301

Оптично активні речовини 289

Осмо́с 173

Параксіальні промені 267

Парамагнетики 222

Первинна структура

- білків 156

- ДНК 163

Первісна функції 15

Перехоплення Ранв'є 200

Період піврозпаду 332

Перкусія 109

Питомий(а)(е)

- електропровідність 205

- обертання 290

- опір 205

Підсилювач 257

- змінного струму 257

- постійного струму 257, 259

Пік Бреґґа 337

Плече диполя 203

Плин рідини

- ламінарний 139

- турбулентний 139

Площина поляризації світла 285

Поверхневий натяг 134

Повна група подій 34
Повне внутрішнє відбивання 262
Поглинання світла 292
Подвійне променезаломлення 287
Показник
- гематокрита 147
- поглинання
- молярний 293
- натуральний 292
- натуральний молярний 293
- розсіяння 294
Поляризатор 286
Поляризація світла 278, 285
Поляризоване світло 285
Поляриметр 291
Поляриметрія 291
Потік
- енергії 100
Похибка
- абсолютна 71
- адитивна 72
- вимірювання 71
- вимірювань 72
- випадкова 72
- відліку 74
- відносна 71
- інструментальна 71
- методична 71
- мультиплікативна 72
- приведена 74
- середнього 58
- систематична 72
- суб'єктивна 71
Похідна функції 6
- вищого порядку 10
- властивості 7
- геометричне тлумачення 6
- складної функції 9
- частинна 11
Правила відбору 308
Приведене око Вербицького 178
Призма Ніколя 289
Принцип
- Гюйгенса-Френеля 282
- Онсагера 174
- Паулі 308

- Пригожина-Глансдорфа 177
- суперпозиції полів 203
- Променева терапія 345
- Промені звичайний та незвичайний 288
- Проникність мембрани 196
- Протестична група 162
- Процеси переноса
 - непрямі 174
 - прямі 174
- Пульсова хвиля 153

- Радіоактивний розпад
 - α -розпад 330
 - β -розпад 330
- Радіоактивність 330
- Радіонуклідна діагностика 344
- Рацемічні суміші 157
- Реверсія потенціалу 197
- Резонанс 96
- Релаксаційні коливання 98
- Релаксація
 - спін-решіткова 312
 - спін-спінова 312
- Рентгенівська комп'ютерна томографія (РКТ) 328
- Рентгенівський апарат 329
- Рентгенодіагностика 328
- Рентгенотерапія 328
- Реобаза 236
- Реографія (імпеданс-плетізмографія) 214, 219
- Реодентографія 219
- Рефрактометр 277
- Рецепторні волоскові клітини 91
- Реполаризація мембрани 197
- Рівень
 - значущості 58
 - інтенсивності 102
- Рівняння
 - Бернуллі 138
 - Ейнштейна для фотоефекта 318
 - Максвелла 226
 - Нернста-Планка 190, 191
 - Теорелла 191
 - Фіка 189
 - хвильове 100, 227
 - Хілла 133

- Ходжкіна-Хакслі 199
- Шредінгера 306
- Рідина
 - в'язкопластична 146
 - дилатантна 146
 - ідеальна 137
 - неньютонівська 140
 - ньютонівська 140
 - псевдопластична 146
 - реальна 138
- Робота мязів
 - динамічна 89
 - статична 89
- Рогівка 178
- Роздільна здатність
 - дифракційної решітки 284
 - ока 182
- Розподіл
 - біномний (Бернуллі) 46
 - нормальний (Гаусса) 46, 48
- Розсіяння
 - когерентне 325
 - некогерентне (комптонівське) 325
 - світла 294
- Ротомери (поворотні ізомери) 159
- Ротор 14

- Середнє квадратичне відхилення 45
- Середній лінійний пробіг 336
- Сила(и)
 - Ампера 220
 - внутрішні 116
 - в'язкого тертя 138
 - змушуюча 94
 - Лоренца 222
 - поверхневого натягу 135
 - термодинамічні 173
- Синергетика 177
- Сітківка (ретина) 178
- Слухові кісточки 110
- Смуга пропускання 259
- Солюкс 302
- Сонцелікування (геліотерапія) 302
- Спектр
 - гармонічний (акустичний) 103
 - лінійчастий 103

- суцільний (безперервний) 104
- теплового випромінювання 298
- Спектроскопія 308
 - адсорбційна 308
 - емісійна 309
- Спектрофотометр 310
- Співвідношення невизначеностей Гейзенберга 305
- Спінові зонди 311
- Спінові мітки 311
- Стала
 - Віна 301
 - обертання 290
 - Планка 300
 - розпаду 332
 - Стефана Больцмана 301
- Стандартні відведення 209
- Статистичні гіпотези 60
- Статистичні характеристики
 - генеральної сукупності 56
 - вибіркові 56, 57
- Стопа Столетова 287
- Струм(и)
 - витоку 249
 - змінний 231
 - зміщення 226
 - імпульсний 231
 - постійний 231
- Ступені волі 59
- Сукупність 53
 - генеральна 54
 - вибіркова 54
- Тембр звуку 105
- Температура (точка) Кюрі 223
- Теплообмін (теплопередача) 168
- Теорема
 - додавання ймовірностей 35
 - множення ймовірностей 35, 36
 - Пригожина 176
- Теорія
 - Ейнтховена 208
 - ймовірностей 31
- Термодинамічна система 167
- Термодіагностика 303
- Тіло
 - абсолютно тверде 85

- сіре 299
- чорне 299
- Тони
 - музичні 104
 - прості 103
 - складні 103
- Точкове джерело струму 206
 - виток 206
 - сток 206
- Транспорт речовин 188
 - активний 188, 192
 - пасивний 188
- Третинна структура
 - білків 161
 - ДНК 165
- УВЧ-терапія 241
- Ультразвук 112
- Ультразвукові дослідження 112
- Умова нормування випадкової величини
 - дискретної 42
 - неперервної 42
- Утворення електрон-позитрон-них пар 334
- Феромагнетики 222
- Фізичні (об'єктивні) характеристики звуку 101
- Фізіологічні (суб'єктивні) характеристики слухового відчуття 105
- Флюоресценція 316
- Фокус
 - лінзи 265
 - центрованої оптичної системи 269
- Фонокардіографія 109
- Формула
 - Байєса 36, 37
 - Бернуллі 36
 - Гольдмана-Ходжкіна-Катца 196
 - Журена 136
 - Кессона 148
 - Ньютона для сили в'язкого тертя 139
 - Ньютона-Лейбніца 20
 - Планка 300
 - повної ймовірності 36, 37
 - Пуазейля 142
 - тонкої лінзи 267
 - Хорвега-Вейса-Лапіка 235
 - Шведова-Бінгама 148

Фосфоліпіди 186
Фосфоресценція 316
Фотоефект 315, 318, 325
Фотопружність 292
Фотоядерні реакції 335

Функція

- Лапласа 47
- перетворення датчика 256
- регресії 63
- розподілу 43
- хвильова 305

Характеристика підсилювача

- амплітудна 258
- амплітудно-частотна 258

Хвиля(і)

- акустичні 101
- де Бройля 305
- механічні 98
- поздовжні 98
- поперечні 98

Хвильова поверхня 282

Хімічний зсув 313

Хімічний потенціал 172

Хіральність 157

Хронаксія 236

Центрована оптична система 268

Четвертинна структура білків 161

Число(а)

- квантові 307
- головне 307
- магнітне 307
- орбітальне 307
- спінове 308
- Рейнольдса 140

Числова апертура 273

Числові характеристики випадкових величин 44, 45

Чутливість датчика 256

Швидкість зсуву 145

Шкірногальванична реакція 213

Шум 103, 114

Щільність енергії 100

Щільність ймовірності 42
- спектральна 104
- енергетичної світності 298
- умовна 63

Явище(а)
- гальванізму 233
- електромагнітної індукції 224
- капілярні 136
- самоіндукції 225
- Тіндаля 294
Ядерний магнетон 222
Ядра віддачі 335
ЯМР 310, 312
ЯМР-інтроскопія 313

ЗМІСТ

Розділ 1. Основи математичного аналізу	5
1.1. Основи диференціального числення	5
1.2. Основи інтегрального числення	15
1.3. Поняття про диференціальні рівняння	24
Розділ 2. Основи теорії ймовірностей та математичної статистики	31
2.1. Елементи теорії ймовірностей	32
2.2. Елементи математичної статистики	53
Розділ 3. Основи біомеханіки, біоакустики, біореології та гемодинаміки	81
3.1. Основні поняття механіки. Механічні коливання та хвилі	81
3.2. Фізика слуху. Ультразвук та інфразвук	101
3.3. Основи біореології	115
3.4. Поверхневий натяг. Коефіцієнт поверхневого натягу	134
3.5. Основи механіки рідин	137
3.6. Реологічні властивості крові. Окремі питання гемодинаміки	145
Розділ 4. Термодинаміка вікритих біологічних систем. Елементи молекулярної біофізики	154
Розділ 5. Біофізика мембранних процесів	185
5.1. Біологічні мембрани	185
5.2. Транспорт речовин крізь мембрани	188
5.3. Мембранні потенціали спокою та дії	194
Розділ 6. Електродинаміка, її медичне застосування. Основи медичної апаратури	201
6.1. Поняття про електрографію органів і тканин	201
6.2. Фізичні та біофізичні основи реографії	214
6.3. Магнітні явища. Елементи магнітобіології	219
6.4. Дія електричних струмів та електромагнітних полів на біологічні об'єкти	231
6.5. Основи медичної електроніки	247
Розділ 7. Оптичні методи та їх використання у біології та медицині	261
7.1. Елементи геометричної оптики	261

7.2. Оптична рефрактометрія	276
7.3. Поляризація світла	278
7.4. Поглинання розсіяння та дисперсія світла	292
Розділ 8. Елементи квантової механіки	297
8.1. Теплове випромінювання тіл, його характеристики	297
8.2. Основні уявлення квантової механіки	305
8.3. Люмінесценція. Фотоефект	315
8.4. Індуковане випромінювання. Лазери	318
Розділ 9. Радіаційна фізика. Основи дозиметрії	322
9.1. Рентгенівське випромінювання	322
9.2. Радиоактивність	330
9.3. Дозиметрія іонізуючих випромінювань	339
Додатки	347
Список літератури	349
Предметний покажчик	351

Навчальне видання

Автори:

Кнігавко Володимир Гілярієвич
Зайцева Ольга Василівна
Бондаренко Марина Анатоліївна
Батюк Лілія Василівна
Мещерякова Оксана Петрівна
Радзішевська Євгенія Борисівна
Гордієнко Ніна Олександрівна
Пономаренко Наталя Сергіївна
Гранкіна Світлана Семенівна
Лад Світлана Миколаївна
Левченко Тетяна Володимирівна
Польотова Наталія Петрівна
Рисована Любов Михайлівна
Шуба Ірина Вікторівна

МЕДИЧНА ТА БІОЛОГІЧНА ФІЗИКА

Підручник для студентів медичних вузів.

За редакцією Кнігавка В.Г.

Харківський медичний національний університет
Пр. Науки, 4, Харків, 61022