



МИНИСТЕРСТВО ЗДРАВООХРАНЕНИЯ УКРАИНЫ  
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ФАРМАЦЕВТИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

**В. А. ТИМАНЮК, Е. Н. ЖИВОТОВА**

# **БИОФИЗИКА**

*УЧЕБНИК*

*для студентов фармацевтических  
и медицинских вузов*

Харьков  
Издательство НФАУ  
«Золотые страницы»  
2003

УДК 577.3(075.8)  
ББК 28.901я73  
Т 41

*Утверждено*  
*Министерством образования и науки Украины*  
*(письмо № 1/11-2124 от 27.05.2003 г.)*

**Рецензенты:**

*О. В. ЧАЛЫЙ*, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой медицинской и биологической физики Национального медицинского университета им. О. О. Богомольца;

*Э. И. ЛИЧКОВСКИЙ*, кандидат технических наук, доцент, заведующий кафедрой биофизики Львовского государственного медицинского университета им. Данила Галицкого;

*М. И. МОЙСЕЕНКО*, доктор биологических наук, профессор, заведующий кафедрой биофизики, информатики и медицинской аппаратуры Ивано-Франковской государственной медицинской академии

**Тиманюк В. А., Животова Е. Н.**

Т41 Биофизика: Учебник для студ. вузов.— Х.: Изд-во НФАУ; Золотые страницы, 2003.— 704 с.: ил.

ISBN 966-615-190-1.

ISBN 966-8032-78-0.

Учебник включает теоретический материал, примеры решения типовых задач, задачи для самостоятельного решения и вопросы тестового контроля по всем разделам курса «Биофизики». Отличается ясным и логическим изложением материала. Особое внимание уделено связи биофизики с фармацевтическими и медицинскими науками.

Предназначен для студентов фармацевтических и медицинских вузов.

**ББК 28.901я73**  
**УДК 577.3(075.8)**

ISBN 966-615-190-1  
ISBN 966-8032-78-0

© В. А. Тиманюк, Е. Н. Животова, 2003  
© Национальный фармацевтический университет, 2003

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Биофизика — наука, изучающая физические и физико-химические явления в живых организмах. Традиционно биофизику разделяют на молекулярную, объектом исследования которой являются биологические молекулы, биофизику клетки, изучающую надмолекулярные структуры живой клетки, и биофизику сложных систем, рассматривающую различные уровни организации живых систем — сообщества клеток, ткани, организмы, популяции.

Выдающийся советский биофизик Г. М. Франк сказал: «Биофизика не имеет присущего только ей объекта или предмета исследования, как, например, микробиология (наука, изучающая микроорганизмы) или энтомология (раздел зоологии, изучающий насекомых). Эта наука скорее характерна только ей присущим физическим подходом к изучению широкого круга жизненных явлений... особенно тесна связь, скорее даже «взаимопроращивание», биофизики и биохимии. И если изображать графически взаимоотношения биохимии и биофизики, нельзя ни в коем случае рисовать черту раздела между ними. Это будут скорее широкие кривые «распределения компетентности» с максимумами, сдвинутыми по отношению друг к другу». Подобные взаимоотношения связывают биофизику и с другими науками — физиологией, молекулярной биологией, фармакологией и др.

Историю развития биофизики можно начать с выдвинутой М. В. Ломоносовым теории о цветном зрении. Дальнейший вклад внесли опыты Л. Гальвани по изучению «животного электричества»; открытия Г. Гельмгольца в области биологической оптики; исследования французского физиолога и физика, основателя первой кафедры биофизики Д'арсонваля в области воздействия переменных токов на биологические объекты (что положило начало методу «д'арсонвализации» — лечению импульсным током высокой частоты, высокого напряжения и малой силы тока). Среди выдающихся достижений биофизики XX века следует выделить

расшифровку пространственных структур белка Л. Полингом и двойной спирали ДНК Дж. Уотсоном и Ф. Криком.

Биофизика в своих исследованиях широко использует физические, химические, а в последнее время — и вычислительные методы. Биофизические явления лежат в основе многих терапевтических и диагностических методов.

Необходимость всестороннего развития специалистов в области медицины и фармации известна уже давно. Еще в начале XVIII века швейцарский математик и механик Даниил Бернулли писал Леонарду Эйлеру в Россию: «Я желал бы, чтобы в Петербурге были медики, знающие начала математики, в особенности же — механику и гидравлику». Первый курс по биофизике был прочитан основателем первого в России Института биологической физики П. П. Лазаревым для врачей в 1922 году при клинике Московского университета, затем был прочитан ряд курсов для врачей при Государственном институте физиологии и ортопедии.

Бурное развитие фармации, наблюдающееся за последние десятилетия, выявило необходимость подготовки высококвалифицированных специалистов, не только обладающих глубокими знаниями в области профессионально-ориентированных дисциплин, но имеющих фундаментальную теоретическую и практическую подготовку в области физики, химии, биологии и смежных с ними дисциплин; специалистов, способных проводить научные исследования, привлекая для этого физические, химические, биофизические и биохимические методы; специалистов эрудированных, думающих, способных совершенствовать и углублять свои знания самостоятельно после окончания вуза в процессе практической деятельности.

Одним из основополагающих курсов, отвечающих указанным требованиям, является «Биофизика». Авторы считают задачей данного курса не только традиционное усвоение отдельных теоретических положений и практических умений и навыков, а и развитие у студентов способности анализировать, обобщать, углублять и эффективно применять на практике полученные знания.

Учебник охватывает широкий спектр проблем биофизики. Особое внимание уделено вопросам, имеющим непосредственное отношение к практической и научной деятельности провизоров: математическому моделированию фармакокинетических процессов, молекулярной биофизике, транспорту веществ через биологические мембраны, биофизике нервного импульса, кровообращения, методам анализа лекарственных средств и др.

В настоящем учебнике использованы материалы опубликованных ранее учебника «Физика» (В. А. Тиманюк) и учебного пособия «Биофизика» (В. А. Тиманюк и Е. Н. Животова). В связи с тем, что в учебных планах специальностей «Клиническая фармация», «Тех-

нология парфюмерно-косметических средств», «Биотехнология», «Лабораторная диагностика», для которых предназначен данный курс «Фармация», отсутствует отдельный курс общей физики, а усвоение целого ряда вопросов биофизики невозможно без этих знаний, авторы сочли необходимым включить в учебник темы, традиционно изучаемые в курсе общей физики (главы 2, 4, 7, 9, 13 и 15).

Введение в курс главы «Физические методы анализа» обусловлено необходимостью ознакомления студентов с современными физическими методами, которые используются при разработке, производстве и анализе новых лекарственных средств. Особое внимание уделено рассмотрению физических принципов, лежащих в основе каждого метода, что позволяет расширить представления о функциональных возможностях современных методов анализа.

Математический аппарат, используемый в учебнике, не выходит за рамки изучаемого курса «Высшая математика и метрология»; кроме того, в Приложениях приведены краткие сведения из высшей математики, что существенно облегчает процесс изучения курса.

Ряд теоретических выводов, полезных для студентов, желающих углубить свои знания по данному вопросу, выделен мелким шрифтом.

Успешное усвоение теории в любой естественной дисциплине проверяется при решении задач. В связи с необходимостью вынесения ряда вопросов на самостоятельное изучение каждая глава учебника завершается примерами решения типовых задач, комплектом задач для самостоятельного решения и вопросами тестового контроля. Типы и степень сложности задач и тестов, приведенных в учебнике, в полной мере соответствуют уровню экзаменационных вопросов. Поэтому, выполняя указанные задания, студент в состоянии не только обобщить и углубить усвоенные знания, но и оценить степень своей готовности к экзамену.

Значительную часть студентов Национального фармацевтического университета составляют иностранные студенты, не владеющие украинским языком, что является единственной причиной выхода настоящего издания на русском языке.

Авторы выражают глубокую благодарность профессору кафедры физики НФаУ, доктору физико-математических наук Николаю Григорьевичу Кокодию, доцентам кафедры, кандидатам физико-математических наук Аркадию Викторовичу Ключко, Анатолию Егоровичу Кабанову, Виктору Александровичу Багуле, старшему преподавателю Николаю Борисовичу Тюкину, доценту кафедры биологической и медицинской физики Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина, кандидату физико-ма-

тематических наук Элле Алексеевне Ромодановой за внимательное прочтение рукописи и полезные замечания; старшему научному сотруднику ГНЦЛС, кандидату химических наук Леониду Викторовичу Иванову за ценные советы при написании глав 10 и 11.

Авторы будут признательны всем, кто сочтет необходимым высказать свои замечания и пожелания как по структуре учебника, подаче материала курса, так и по методике изложения.

Данный учебник предназначен для студентов фармацевтических вузов и факультетов. Авторы выражают надежду, что он может быть полезен студентам и аспирантам медицинских, биологических и сельскохозяйственных специальностей вузов, а также всем, кто интересуется биофизикой.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ БИОФИЗИКА

Математическая биофизика изучает биологические системы методами математического моделирования. Математические модели представляют собой уравнения, описывающие исследуемые процессы или явления. Для построения моделей применяются системы дифференциальных и интегральных уравнений и методы математической статистики. Математическое моделирование находит применение на различных уровнях организации биологических систем: от молекулярного до популяционно-биоценотического. Ниже будут рассмотрены модели взаимодействия биологических видов и кинетики распределения лекарственного препарата в организме.

### § 1.1. МОДЕЛЬ «ХИЩНИК—ЖЕРТВА»

В 1931 году итальянский математик В. Вольтерра построил математическую модель взаимодействия видов — *модель «хищник—жертва»*. Допустим, что на определенной территории обитают зайцы (жертвы) и рыси (хищники). Обозначим численность зайцев  $x$ , а численность рысей —  $y$ . Зайцы питаются растительной пищей, имеющейся в изобилии, поэтому скорость их размножения зависит только от числа особей:

$$v_{\text{размн}} = \varepsilon_1 x, \quad (1.1.1)$$

где  $\varepsilon_1$  — коэффициент пропорциональности.

Неограниченное размножение зайцев невозможно, так как у них есть естественные враги. Данная модель предполагает, что из множества вероятных хищников имеется только один, например рыси. Убыль зайцев будет тем больше, чем выше вероятность их встречи с рысями, а эта вероятность, в свою очередь, пропорциональна численности как рысей, так и зайцев. Тогда скорость убыли зайцев описывается следующим уравнением:

$$v_{\text{убыль}} = \gamma_1 xy, \quad (1.1.2)$$

где  $\gamma_1$  — коэффициент пропорциональности. Таким образом, уравнение общей скорости изменения численности зайцев имеет вид:

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy. \quad (1.1.3)$$

Естественной смертью зайцев можно пренебречь, считая такие случаи очень редкими.

Скорость размножения рысей зависит от наличия пищи (зайцев), то есть также определяется вероятностью встречи рысей и зайцев (константа  $\gamma_2$ ). Убывание численности рысей объясняется их естественной смертностью (константа  $\varepsilon_2$ ) и пропорционально количеству особей. Тогда скорость изменения численности рысей описывается уравнением:

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_2 xy - \varepsilon_2 y. \quad (1.1.4)$$

Решим систему дифференциальных уравнений модели «хищник—жертва».

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy; \\ \frac{dy}{dt} = \gamma_2 xy - \varepsilon_2 y. \end{cases} \quad (1.1.5)$$

Пусть число жертв и хищников в системе не изменяется (стационарный случай), то есть

$$\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Тогда система уравнений (1.1.5) сведется к виду:

$$\begin{cases} \bar{x}(\varepsilon_1 - \gamma_1 \bar{y}) = 0; \\ \bar{y}(\gamma_2 \bar{x} - \varepsilon_2) = 0, \end{cases} \quad (1.1.6)$$

где  $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  — стационарные значения численности жертв и хищников.

Из системы (1.1.6) получаем стационарное решение:

$$\bar{x} = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}; \quad \bar{y} = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \quad (1.1.7)$$



(решение  $\bar{x} = 0$  и  $\bar{y} = 0$  не рассматриваем).

Предположим, что в системе произошли малые отклонения от стационарных значений численности жертв  $\xi$  и хищников  $\eta$ :

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \xi; \\ y = \bar{y} + \eta. \end{cases} \quad (1.1.8)$$

Подставим систему (1.1.8) в (1.1.5), учитывая, что  $\frac{d\bar{x}}{dt} = 0$ ;  $\frac{d\bar{y}}{dt} = 0$ ,

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = \varepsilon_1(\bar{x} + \xi) - \gamma_1(\bar{x} + \xi)(\bar{y} + \eta); \\ \frac{d\eta}{dt} = \gamma_2(\bar{x} + \xi)(\bar{y} + \eta) - \varepsilon_2(\bar{y} + \eta) \end{cases} \quad (1.1.9)$$

и преобразуем к виду:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = (\bar{x} + \xi)(\varepsilon_1 - \gamma_1\bar{y}) - \gamma_1\bar{x}\eta - \gamma_1\xi\eta; \\ \frac{d\eta}{dt} = (\bar{y} + \eta)(\gamma_2\bar{x} - \varepsilon_2) + \gamma_2\bar{y}\xi + \gamma_2\xi\eta. \end{cases} \quad (1.1.10)$$

В правых частях системы уравнений (1.1.10) первые слагаемые обращаются в нуль [см. (1.1.6)], а последние являются членами второго порядка малости, которыми можно пренебречь. Тогда

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = -\gamma_1\bar{x}\eta; \\ \frac{d\eta}{dt} = \gamma_2\bar{y}\xi. \end{cases} \quad (1.1.11)$$

Продифференцируем систему уравнений (1.1.11) по времени

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\gamma_1\bar{x} \cdot \frac{d\eta}{dt}; \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = \gamma_2\bar{y} \cdot \frac{d\xi}{dt} \end{cases} \quad (1.1.12)$$

и подставим вместо  $\frac{d\eta}{dt}$  и  $\frac{d\xi}{dt}$  выражения из системы (1.1.11):

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} = -\gamma_1\lambda_2\bar{x}\bar{y}\xi; \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} = -\gamma_1\gamma_2\bar{x}\bar{y}\eta. \end{cases} \quad (1.1.13)$$

Учитывая стационарное решение (1.1.7), система (1.1.13) сводится к виду:

$$\begin{cases} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \varepsilon_1\varepsilon_2\xi = 0; \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + \varepsilon_1\varepsilon_2\eta = 0. \end{cases} \quad (1.1.14)$$

Мы получили систему однородных дифференциальных уравнений второго порядка, решение которых имеет вид:

$$\begin{cases} \xi = \xi_{\max} \sin(\omega t + \varphi_1); \\ \eta = \eta_{\max} \sin(\omega t + \varphi_2), \end{cases} \quad (1.1.15)$$

где

$$\omega = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}. \quad (1.1.16)$$

Подставив решение (1.1.15) в выражения (1.1.8), получаем систему, описывающую гармонические колебательные процессы (подробнее о колебаниях см. в § 2.3):

$$\begin{cases} x = \bar{x} + \xi_{\max} \sin(\omega t + \varphi_1); \\ y = \bar{y} + \eta_{\max} \sin(\omega t + \varphi_2). \end{cases} \quad (1.1.17)$$

Таким образом, численности жертв и хищников совершают гармонические колебания с одинаковой частотой  $\omega = \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2}$  и смещены

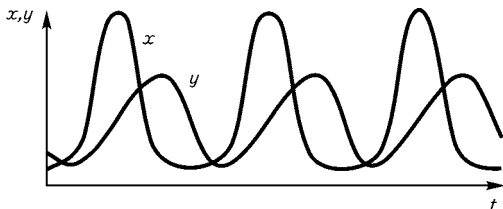


Рис. 1.1.1. Зависимость численности хищников  $x$  и жертв  $y$  от времени  $t$

относительно друг друга по фазе на величину  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  (рис. 1.1.1). Этот процесс можно наглядно описать другим способом. В каждый момент времени рассматриваются две переменные —  $x$  и  $y$ , поэтому удобно ввести систему

координат и на координатной плоскости отмечать точки, соответствующие определенным значениям  $x$  и  $y$ . Каждая такая точка  $M(x, y)$  соответствует определенному состоянию системы и называется изображающей, или представляющей точкой, а координатная плоскость — фазовой плоскостью. Значения  $x$  и  $y$  изменяются во времени, и, следовательно, изменяется положение изображающей точки. Ее движение по фазовой плоскости называется фазовой траекторией, или интегральной кривой. Значения  $x$  и  $y$  имеют определенный биологический или химический смысл (численность особей, концентрация вещества). Как правило, они не могут принимать отрицательные значения. Поэтому область их значений лежит в первой координатной четверти.

Каждому набору параметров соответствует своя фазовая траектория, то есть каждая фазовая траектория описывает все возможные состояния системы при постоянных значениях параметров (констант). По теореме Коши, через каждую точку фазовой плоскости может проходить только одна фазовая траектория. Фазовая плоскость является совокупностью всех фазовых траекторий. Для реальных систем значения параметров колеблются в узком диапазоне, и фазовые траектории занимают только часть фазовой плоскости. Изображение реальных фазовых траекторий на фазовой плоскости называется *фазовым портретом системы*.

Фазовый портрет модели (зависимость численности хищников от численности жертв) представляет собой концентрические эллипсы. Если в системе отсутствуют приток и отток особей (замкнутая система), то колебания численности хищников и жертв будут определяться только их взаимодействием и описываться собственной фазовой траекторией. При изменении численности, вызванном внешними факторами, например миграцией животных, устанавливается новое состояние системы, описываемое другой фазовой траекторией.

Каждую фазовую траекторию можно разделить на четыре части, соответствующие различным стадиям взаимодействия между хищниками и жертвами (рис. 1.1.2). Как видно из рисунка, на этапе *I* количество жертв уменьшается, а количество хищников увеличивается (стадия выедания жертвы). На этапе *II* количество жертв уменьшается настолько, что начинает сокращаться популяция хищников (стадия вымирания хищника). На этапе *III*

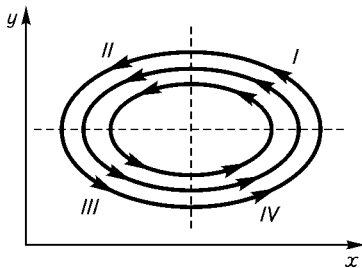


Рис. 1.1.2. Фазовый портрет модели «хищник—жертва»

количество как хищников, так и жертв столь мало, что вероятность их встречи крайне низка. Количество жертв начинает постепенно увеличиваться (стадия выхода жертв из-под контроля хищника), а количество хищников продолжает уменьшаться. На этапе *IV* количество жертв начинает интенсивно увеличиваться, что вызывает также увеличение, но более медленное, популяции хищников.

Модель Вольтерра соответствует статистическим данным численностей рысей и зайцев в Канаде за разные годы (рис. 1.1.3),

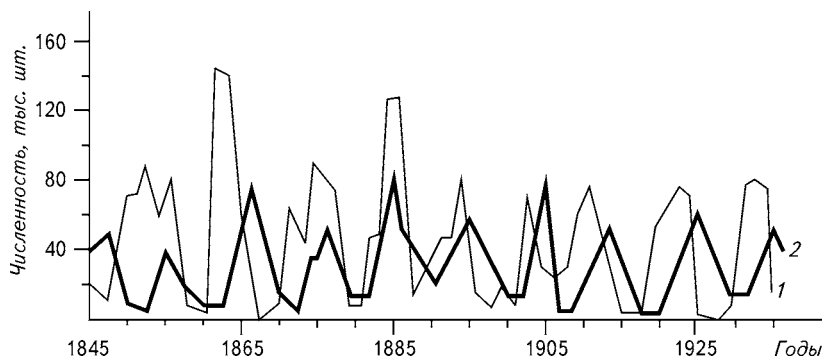


Рис. 1.1.3. Кривые численности зайца (1) и рыси (2) в Канаде

однако для более точного соответствия в модель вводится ряд поправок, например учитывающих естественную гибель жертв.

Моделью «хищник—жертва» может быть описано взаимодействие любых двух популяций, если одна из них снижает численность другой. Например, в иммунологии при изучении противоопухолевого иммунитета в качестве жертв моделируют опухолевые клетки, а в качестве хищников — уничтожающие их лимфоциты.

## § 1.2. МЕТОД ИЗОКЛИН

Полученную в § 1.1 систему дифференциальных уравнений (1.1.5) в общем виде можно записать так:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = P(x, y); \\ \frac{dy}{dt} = Q(x, y). \end{cases} \quad (1.2.1)$$

Так как правые части обоих уравнений не зависят явно от времени, то, разделив второе уравнение системы на первое, получаем дифференциальное уравнение, не содержащее время  $t$  в явном виде:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (1.2.2)$$

Решение этого уравнения имеет вид  $y = f(x, C)$ , где  $C$  — постоянная интегрирования. Решая полученное уравнение, получаем семейство интегральных кривых. Следует при этом иметь в виду, что аналитическое решение уравнений модели возможно далеко не всегда. Для построения фазового портрета обычно применяют качественные методы. Одним из них является *метод изоклин*.

*Изоклинами* называются линии, которые пересекаются интегральными кривыми под одним и тем же углом. Так как существует бесконечное множество углов, то существует и бесконечное множество изоклин.

Для получения уравнений изоклин используют уравнение (1.2.2). Если  $dy/dx = A$ , где  $A$  — определенная постоянная величина, то  $A$  является тангенсом угла наклона касательной к фазовой траектории. Тогда уравнение изоклины будет иметь вид:

$$A = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}. \quad (1.2.3)$$

Для получения фазового портрета нужно построить как минимум две изоклины. Обычно выбирают так называемые **главные изоклины**: они пересекают интегральные кривые в точках, касательные в которых наклонены под углом  $0^\circ$  и  $90^\circ$  к координатным осям (рис. 1.2.1). При  $dy/dx = 0$  ( $\operatorname{tg} \alpha = 0$ ,  $\alpha = 0^\circ$ ), полученная изоклина является изоклиной горизонтальных касательных к фазовым траекториям; ее уравнение  $Q(x, y) = 0$ . Если  $dy/dx = \infty$  ( $\operatorname{tg} \alpha = \infty$ ,  $\alpha = 90^\circ$ ), то мы имеем изоклину вертикальных касательных, уравнение которой  $P(x, y) = 0$ .

Существует точка, в которой одновременно обращаются в ноль производные  $x$  и  $y$  по времени. Эта точка называется *особой*. Для нее выполняется условие:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(\bar{x}, \bar{y})}{P(\bar{x}, \bar{y})} = \frac{0}{0}, \quad (1.2.4)$$

где  $(\bar{x}, \bar{y})$  — координаты особой точки.

Из уравнения (1.2.2) можно определить единственную касательную к данной интегральной кривой в указанной точке. Но так как в особой точке производная не определена, то в ней невозможно установить направление касательной. Поэтому в особой точке пересекаются все изоклины.

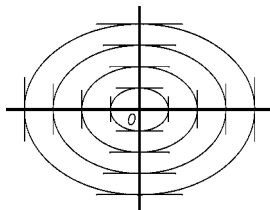


Рис. 1.2.1. Главные изоклины (жирные линии) на фазовом портрете и особая точка  $O$

В случае, когда  $\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0$ ,  $x$  и  $y$  принимают постоянные значения:

$\bar{x}(t) = \text{const}$ ,  $\bar{y}(t) = \text{const}$ . Такое состояние системы называется **стационарным**, или состоянием равновесия. Количество стационарных состояний определяется числом пересечений главных изоклин или двух любых других изоклин.

Стационарные состояния и отражающие их графически особые точки бывают устойчивыми и неустойчивыми. Если система, выведенная из стационарного состояния, самопроизвольно возвращается в него, то такое состояние называется **устойчивым**. Если же при отклонении от стационарного состояния возникают силы, еще более отклоняющие точку от положения равновесия, то такое состояние называется **неустойчивым**.

Рассмотрим **метод Пуанкаре—Ляпунова** для исследования устойчивости стационарного состояния. Допустим, что система вышла из состояния равновесия. Ее новое положение на фазовой плоскости будет определяться координатами

$$x = \bar{x} + \xi; \quad y = \bar{y} + \eta, \quad (1.2.5)$$

где  $\xi$  и  $\eta$  — смещение изображающей точки от положения равновесия, координаты которого —  $\bar{x}$ ,  $\bar{y}$ . Подставив новые координаты в систему уравнений (1.2.1), получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} \frac{d\bar{x}}{dt} + \frac{d\xi}{dt} = P(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta); \\ \frac{d\bar{y}}{dt} + \frac{d\eta}{dt} = Q(\bar{x} + \xi, \bar{y} + \eta), \end{cases} \quad (1.2.6)$$

где  $d\bar{x}/dt = d\bar{y}/dt = 0$ .

Разложив правые части уравнений (1.2.6) в ряд Тейлора по переменным  $\xi$  и  $\eta$ , отбросим нелинейные члены. Тогда система примет вид:

$$\begin{cases} \frac{d\xi}{dt} = a\xi + b\eta; \\ \frac{d\eta}{dt} = c\xi + d\eta, \end{cases} \quad (1.2.7)$$

где  $a = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ ;  $b = \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ ;  $c = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ ;  $d = \left. \frac{\partial Q}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}}$ .

Мы получили так называемую линеаризованную систему, или систему первого приближения. Данная система называется «грубой», так как для нее при малых изменениях остается неизменным характер фазовых траекторий. Для таких систем достаточно исследовать линеаризованные уравнения, чтобы установить, будет ли данное состояние равновесия устойчивым. Кроме того, исследование этих уравнений позволяет определить характер фазового портрета в окрестности особой точки.

Общее решение системы (1.2.7) находят в виде:

$$\xi = A \exp(\lambda t); \quad \eta = B \exp(\lambda t), \quad (1.2.8)$$

где  $\lambda$  — корни квадратного уравнения (1.2.10).

Подставив выражения (1.2.8) в систему (1.2.7), получаем:

$$\lambda A = aA + bB; \quad \lambda B = cA + dB. \quad (1.2.9)$$

Для того чтобы система уравнений была не вырожденной, то есть имела ненулевое решение, ее определитель должен быть равен нулю:

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0. \quad (1.2.10)$$

Полученное уравнение называется характеристическим. Его решение имеет следующий вид:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a+d}{2} \pm \sqrt{\frac{(a+d)^2}{4} + bc - ad}. \quad (1.2.11)$$

С учетом уравнения (1.2.11) общее решение системы (1.2.7) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \xi &= C_{11} \cdot \exp(\lambda_1 t) + C_{12} \cdot \exp(\lambda_2 t); \\ \eta &= C_{21} \cdot \exp(\lambda_1 t) + C_{22} \cdot \exp(\lambda_2 t), \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

где  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{22}$  — константы.

Переменные  $\xi$  и  $\eta$  позволяют судить о поведении изображающей точки вблизи положения равновесия и, следовательно, о характере и направлении фазовой траектории. В зависимости от значений  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ , определяющих  $\xi$  и  $\eta$ , существует несколько видов особых точек.

В случае, когда  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны и положительны, особая точка называется **нестойчивым узлом** (рис. 1.2.2, а). Фазовые траектории в этом случае выходят из нее. Такое равновесие является неустойчивым, поскольку если по какой-либо причине система была выведена из равновесия, то она уже не может самопроизвольно вернуться в такое состояние. Если же  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  действительны и отрицательны, то имеем **устойчивый узел** (рис. 1.2.2, б), в котором фазовые траектории сходятся. Такое состояние устойчиво, и если система, выведенная из рав-

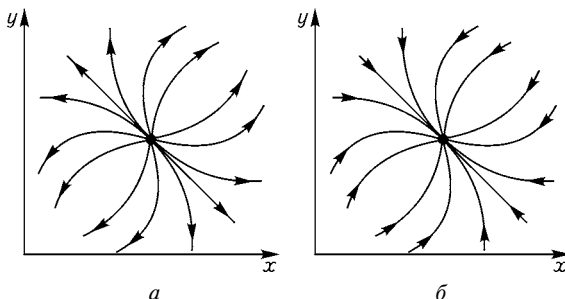


Рис. 1.2.2. Нестойчивый (а) и устойчивый (б) узлы

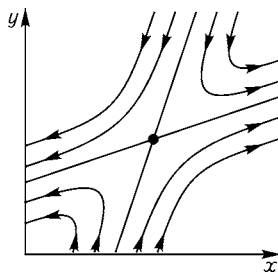


Рис. 1.2.3. Особая точка типа «седло»

новесия, не удалилась из области влияния данной особой точки, то, предоставленная самой себе, она вновь вернется к положению равновесия.

Если корни характеристического уравнения действительны, но имеют разные знаки, то особая точка носит название «седла» (рис. 1.2.3). Такое состояние всегда неустойчиво.

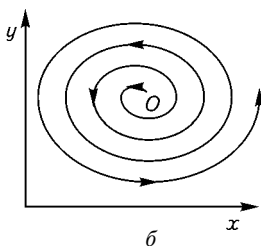
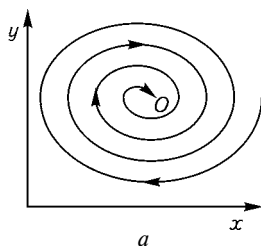


Рис. 1.2.4. Устойчивый (а) и неустойчивый (б) фокусы

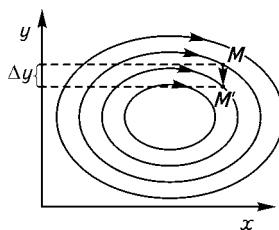


Рис. 1.2.5. Особая точка типа «центр»

Если подкоренное выражение в уравнении (1.2.11) отрицательно, то  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  являются комплексными числами. В этом случае особая точка называется *фокусом*, а фазовые траектории имеют форму спиралей. Устойчивость или неустойчивость фокуса определяется знаком действительной части  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ : если они отрицательны, то фокус устойчив (рис. 1.2.4, а); если положительны — то неустойчив (рис. 1.2.4, б).

При равенстве действительной части  $\lambda$  нулю особая точка называется *центром*. Интегральные кривые в этом случае имеют форму эллипсов, и ни одна из них не проходит через особую точку (рис. 1.2.5). Особая точка типа «центр» является неустойчивой, так как ни при каких условиях система, предоставленная самой себе, не будет стремиться к положению равновесия. Допустим, что изображающая точка в какой-то момент времени находилась в положении  $M$ . Если ее вывести из этого состояния (например, как для модели Вольтерра, отселить какое-то количество хищников  $\Delta y$  из популяции), то изображающая точка перейдет в положение  $M'$ . Тогда система будет совершать колебания с несколько меньшей амплитудой, но самопроизвольно приближаться к особой точке не будет.

### § 1.3. АНАЛИЗ МОДЕЛИ «ХИЩНИК—ЖЕРТВА» С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИЗОКЛИН

Исследуем с помощью метода изоклин модель «хищник—жертва», описываемую системой уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy; \\ \frac{dy}{dt} = \gamma_2 xy - \varepsilon_2 y. \end{cases} \quad (1.3.1)$$



Найдем уравнения фазовых траекторий, для чего разделим второе уравнение системы (1.3.1) на первое:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(\gamma_2 x - \varepsilon_2)}{x(\varepsilon_1 - \gamma_1 y)}, \quad (1.3.2)$$

или после разделения переменных:

$$\frac{\varepsilon_1 - \gamma_1 y}{y} dy = \frac{\gamma_2 x - \varepsilon_2}{x} dx. \quad (1.3.3)$$

Проинтегрировав данное уравнение, получаем:

$$\gamma_2 x - \varepsilon_2 \ln x + \gamma_1 y - \varepsilon_1 \ln y = C, \quad (1.3.4)$$

где  $C$  — константа интегрирования.

Полученное уравнение (1.3.4) позволяет, задавая значение  $C$ , построить семейство фазовых траекторий, но их вид трудно предсказать заранее. Данная задача упростится, если мы найдем уравнения изоклин, координаты особых точек и определим их тип.

Из формулы (1.3.2) следуют уравнения вертикальных

$$x = 0; \quad x = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2} \quad (1.3.5)$$

и горизонтальных изоклин:

$$y = 0; \quad y = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}. \quad (1.3.6)$$

Для нахождения координат особых точек приравняем числитель и знаменатель уравнения (1.3.2) нулю:

$$x(\varepsilon_1 - \gamma_1 y) = 0; \quad y(\gamma_2 x - \varepsilon_2) = 0,$$

откуда получаем:

$$\bar{x}_1 = 0; \quad \bar{y}_1 = 0; \quad \bar{x}_2 = \frac{\varepsilon_2}{\gamma_2}; \quad \bar{y}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}. \quad (1.3.7)$$

Определим тип особых точек, для чего найдем следующие частные производные:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \varepsilon_1 - \gamma_1 y; \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\gamma_1 x; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \gamma_2 y; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \gamma_2 x - \varepsilon_2.$$

Тогда для первой особой точки

$$a = \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} = \varepsilon_1; \quad b = \left. \frac{\partial P}{\partial y} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} = 0; \quad c = \left. \frac{\partial Q}{\partial x} \right|_{\bar{x}, \bar{y}} = 0;$$

$$d = \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} = -\varepsilon_2; \quad \lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{4} + \varepsilon_1 \varepsilon_2}.$$

Из последнего уравнения видно, что  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , что соответствует особой точке «седло».

Для второй особой точки

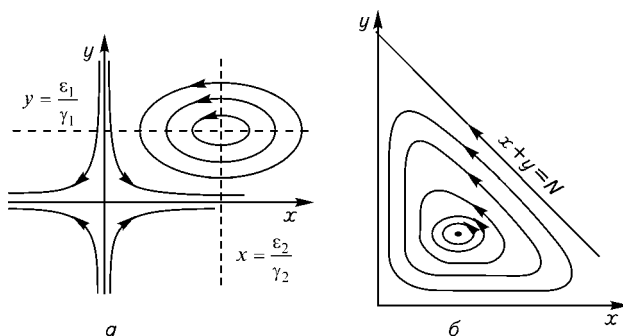


Рис. 1.3.1. Фазовый портрет модели «хищник—жертва»:

$a$  — качественный;  $b$  — реальный

$$a = \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} = 0; \quad b = \frac{\partial P}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} = -\varepsilon_2; \quad c = \frac{\partial Q}{\partial x} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} = \varepsilon_1; \quad d = \frac{\partial Q}{\partial y} \Big|_{\bar{x}, \bar{y}} = 0;$$

$$\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{-\varepsilon_1 \varepsilon_2},$$

что соответствует особой точке типа «центр».

Теперь можно представить общую картину расположения фазовых траекторий (рис. 1.3.1,  $a$ ). На самом деле все реальные фазовые траектории располагаются только в первом квадранте. Можно также показать, что фазовые траектории данной модели ограничены прямой, уравнение которой  $x + y = N$ . Реальный фазовый портрет модели «хищник—жертва» приведен на рис. 1.3.1,  $b$ .

## § 1.4. ОСОБЕННОСТИ МОДЕЛИРОВАНИЯ ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Методы математического моделирования широко применяются в фармации. При построении какой-либо математической модели невозможно учесть все факторы системы. Математическое моделирование предполагает некоторое упрощение системы и пренебрежение деталями, незначительно влияющими на процесс.

Предметом рассмотрения *фармакокинетики* является изменение во времени концентрации вещества в клетке, органе, ткани или целом организме. При этом обычно не рассматриваются причины уменьшения или увеличения концентрации препарата, то есть молекулярные механизмы мембранного транспорта, связывания и разрушения вещества.

При рассмотрении целого организма или какого-либо органа в качестве единицы системы было бы разумно выбрать клетку. Однако количество клеток в целом организме и даже в отдельном органе так велико, что рассматривать каждую из них не представляется возможным. В фармакокинетике обычно за единицу системы принимается камера. *Фармакокинетической камерой* называется часть системы, в которой распределение препарата можно считать равномерным. В зависимости от решаемой задачи в качестве камеры может выступать клетка, орган, ткань и даже весь организм.

Предположение о равномерном распределении препарата в камере с точки зрения физиологии недопустимо. Однако если проверка показала адекватность модели данному процессу, то дополнительное введение новых единиц в рассматриваемую систему, то есть разбиение фармакокинетической камеры на несколько камер, не будет способствовать повышению точности результатов. Введение новых камер может быть обусловлено только несоответствием математической модели реальным процессам, происходящим в системе. В зависимости от количества камер фармакокинетические модели разделяются на однокамерные, двухкамерные и многокамерные.

## § 1.5. ОДНОКАМЕРНАЯ ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Допустим, пациенту был введен некоторый препарат в количестве  $M_0$ . Рассмотрим модель его выведения из организма. Организм представим в виде камеры А, а окружающую среду — в виде камеры В (рис. 1.5.1). Камера В имеет бесконечно большой объем, поэтому вероятность проникновения введенного препарата обратно в камеру А мала, и с течением времени весь препарат переместится в камеру В. Данная модель является *однокамерной*, так как весь организм представлен в виде одной камеры.

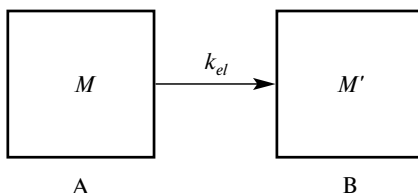


Рис. 1.5.1. Однокамерная модель:

$M$  и  $M'$  — количество препарата в камерах А и В соответственно;  $k_{el}$  — константа элиминации

Количество препарата будет убывать со временем вследствие процессов элиминации. *Элиминацией* называется совокупность процессов, способствующих уменьшению концентрации препарата в организме. К таким процессам относятся: выведение препарата почками, кишечником, легкими (в случае летучих веществ); химические превращения и необратимое связывание, приводящие к утрате биологической активности.

Препарат будет выводиться в окружающую среду со скоростью  $\frac{dM}{dt}$ , пропорциональной количеству препарата  $M$  в данный момент:

$$\frac{dM}{dt} = -k_{el}M, \quad (1.5.1)$$

где коэффициент пропорциональности  $k_{el}$  — константа элиминации. Скорость имеет отрицательный знак, так как количество препарата со временем уменьшается.

Полученное дифференциальное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Учитывая, что в начальный момент времени  $t = 0$  весь препарат был сосредоточен в камере А (организме) в количестве  $M_0$ , а по истечении времени  $t$  его количество уменьшилось и достигло  $M$ , после разделения переменных запишем:

$$\begin{aligned} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M} &= -k_{el} \int_0^t dt; \\ \ln M \Big|_{M_0}^M &= -k_{el}t \Big|_0^t; \\ \ln \frac{M}{M_0} &= -k_{el}t; \\ M &= M_0 e^{-k_{el}t}. \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

С той же скоростью, с которой препарат выводился из камеры А, он будет вводиться в камеру В (окружающую среду). Обозначив количество препарата во второй камере  $M'$ , получаем скорость его увеличения в камере В:

$$\frac{dM'}{dt} = k_{el}M. \quad (1.5.3)$$

Здесь скорость имеет положительный знак, так как количество препарата в камере В увеличивается. Решение уравнения (1.5.3) найдем исходя из условия, что суммарное количество препарата в обеих камерах остается неизменным и равным

$$M_0 = M + M'. \quad (1.5.4)$$

Тогда

$$M' = M_0 - M = M_0(1 - e^{-k_{el}t}). \quad (1.5.5)$$

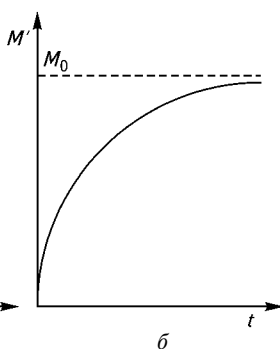
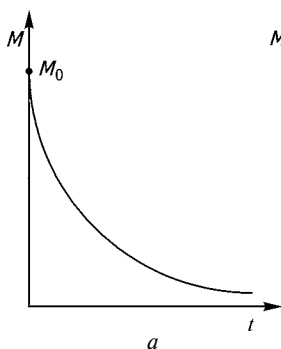


Рис. 1.5.2. Зависимость количества препарата в камерах А (а) и В (б) во времени  $t$

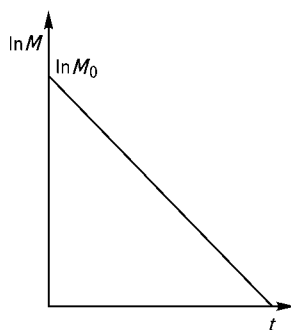


Рис. 1.5.3. Зависимость количества препарата в камере А от времени  $t$  в полулогарифмических координатах

Из уравнений (1.5.2) и (1.5.5) видно, что при  $t = 0$   $M = M_0$ ,  $M' = 0$ , а при  $t \rightarrow \infty$ , наоборот,  $M = 0$ , а  $M' = M_0$ . Графики функций (1.5.2) и (1.5.5) приведены на рис. 1.5.2.

Прологарифмировав (1.5.2), получаем следующее уравнение:

$$\ln M = \ln M_0 - k_{el}t. \quad (1.5.6)$$

Данное уравнение позволяет перейти от экспоненциальной зависимости к линейной (рис. 1.5.3) и вычислить константу скорости элиминации (или любого другого процесса), если известны начальное количество вещества и количество вещества в некоторый момент времени  $t$ :

$$k_{el} = \frac{1}{t} \ln \frac{M_0}{M}. \quad (1.5.7)$$

Допустим, что перегородка между камерами А и В пропускает препарат в обе стороны, но с разной скоростью (в качестве камер А и В в данном случае выступают не организм и окружающая сре-

да, а, например, орган и кровь). Уравнение изменения количества препарата в камере А примет вид:

$$\frac{dM_A}{dt} = -k_{AB} M_A + k_{BA} M_B, \quad (1.5.8)$$

где  $M_A$  и  $M_B$  — количества препарата в соответствующей камере;  $k_{AB}$  — константа скорости перемещения препарата из камеры А в камеру В;  $k_{BA}$  — константа скорости перемещения препарата из камеры В в камеру А.

По истечении некоторого промежутка времени между камерами установится равновесие, то есть концентрация препарата в обеих камерах не будет изменяться во времени:

$$\frac{dM_A}{dt} = 0.$$

Из этого условия следует равенство

$$k_{AB} M_A^\infty = k_{BA} M_B^\infty, \quad (1.5.9)$$

где  $M_A^\infty$  и  $M_B^\infty$  — количества препарата в камерах А и В, соответственно, после наступления равновесия. Из уравнения (1.5.9) можно получить выражение для константы равновесия  $K$ :

$$K = \frac{k_{AB}}{k_{BA}} = \frac{M_B^\infty}{M_A^\infty}. \quad (1.5.10)$$

Как видим, несмотря на то что препарат может проникать в обе стороны, его количество в камерах А и В не уравнивается ввиду неравенства констант скорости перемещения вещества в противоположных направлениях.

От количества препарата  $M$  удобнее перейти к его концентрации  $c$ :

$$M(t) = Vc(t), \quad (1.5.11)$$

где  $V$  — *кажущийся* объем распределения препарата. Кажущийся объем не соответствует реальному объему ткани, а является лишь коэффициентом пропорциональности между количеством препарата и его концентрацией в *тест-ткани*<sup>1</sup>. Величину  $V$  можно вы-

---

<sup>1</sup> *Тест-ткань* — ткань, в которой определяется концентрация препарата в ходе исследования. Чаще всего тест-тканью является кровь.

числить, разделив количество препарата в любой момент времени на концентрацию в этот же момент. Удобнее  $V$  вычислять при  $t = 0$ :

$$V = \frac{M_0}{c_0}, \quad (1.5.12)$$

где  $c_0$  — концентрация в начальный момент времени.

Если весь введенный препарат поступает в рассматриваемую камеру, то  $M_0$  равно дозе препарата.

Подставим выражение (1.5.11) в соотношение (1.5.1):

$$\frac{dVc}{dt} = -k_{el}Vc. \quad (1.5.13)$$

Сократив на постоянную величину  $V$ , получаем

$$\frac{dc}{dt} = -k_{el}c. \quad (1.5.14)$$

Решение этого уравнения

$$\ln c = \ln c_0 - k_{el}t, \quad (1.5.15)$$

или

$$c(t) = c_0 e^{-k_{el}t}. \quad (1.5.16)$$

Важным параметром процесса является *период полувыведения* препарата  $t_{1/2}$ , то есть время, в течение которого концентрация препарата в камере снижается вдвое. Подставим в уравнение (1.5.15) вместо концентрации  $c$  концентрацию  $c_0/2$ :

$$\ln c_0/2 = \ln c_0 - k_{el}t_{1/2},$$

откуда получаем

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_{el}} \cong \frac{0,693}{k_{el}}. \quad (1.5.17)$$

Другим параметром, характеризующим процесс, является *клиренс*  $C_l$ , который равен объему тест-ткани, освобождающемуся от препарата за единицу времени. Величина клиренса равна произведению кажущегося объема на константу элиминации:

$$C_l = V k_{el}. \quad (1.5.18)$$

Критериями применимости однокамерной модели для изучения фармакокинетики препарата является возможность линеаризации данных в координатах « $\ln c - t$ », « $dc/dt - c$ » или « $\ln dc/dt - t$ ».

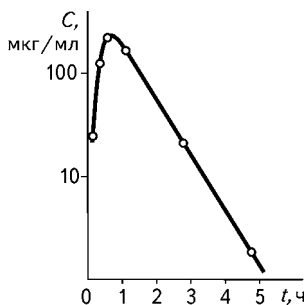


Рис. 1.6.1. Аппроксимация данных фармакокинетики цефалексина в сыворотке крови мышей, получавших препарат внутрь в дозе 400 мг/кг, однокамерной моделью со всасыванием ( $k_{in} = 4,60 \text{ ч}^{-1}$ ,  $k_{el} = 0,90 \text{ ч}^{-1}$ )

## § 1.6. ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ С ПОДКАМЕРОЙ

Лекарственные препараты часто вводят не непосредственно в кровь, а в другие ткани. Но в качестве тест-ткани по-прежнему используется кровь. В этом случае концентрация препарата в крови достигает максимального значения не сразу, а лишь через некоторое время. Поэтому график зависимости концентрации препарата от времени в полулогарифмических координатах имеет линейный характер лишь после достижения максимальной концентрации (рис. 1.6.1).

Для таких процессов кроме основной камеры, моделирующей кровь и остальные ткани, в которые проникает препарат, вводят *подкамеру*, которая моделирует ткань — место введения препарата (рис. 1.6.2).

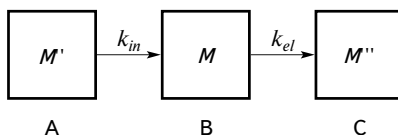


Рис. 1.6.2. Однокамерная модель с подкамерой

Для описания процесса уже требуется система из четырех уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dM''}{dt} = -k_{in}M''; \\ \frac{dM}{dt} = k_{in}M'' - k_{el}M; \\ \frac{dM'''}{dt} = k_{el}M, \end{cases} \quad (1.6.1)$$

где  $M''$ ,  $M$  и  $M'''$  — количество препарата в подкамере (A), основной камере (B) и окружающей среде (C) соответственно, причем  $M'' + M + M''' = M_0$  ( $M_0$  — количество введенного препарата);  $k_{in}$  — константа всасывания препарата из подкамеры в основную камеру;  $k_{el}$  — константа элиминации препарата из основной камеры.

Проинтегрировав систему (1.6.1) с учетом начальных условий ( $M''(0) = M_0$ ,  $M(0) = 0$ ), получаем уравнение изменения количества препарата в основной камере:



$$M(t) = \frac{M_0 k_{in}}{(k_{in} - k_{el})} (e^{-k_{el}t} - e^{-k_{in}t}). \quad (1.6.2)$$

Так как

$$M = cV,$$

где  $c$  — концентрация препарата в основной камере,  $V$  — ее кажущийся объем, то зависимость концентрации от времени имеет следующий вид:

$$c(t) = \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} - k_{el})} (e^{-k_{el}t} - e^{-k_{in}t}). \quad (1.6.3)$$

Зная параметры  $k_{in}$ ,  $k_{el}$ ,  $V$  и  $M_0$ , по формуле (1.6.3) можно рассчитать концентрацию препарата в любой момент времени.

Графики зависимостей  $M''$ ,  $M$  и  $M'''$  от времени приведены на рис. 1.6.3. Как видно, концентрация препарата в основной камере в некоторый момент времени ( $t_{max}$ ) достигает своего максимального значения ( $c_{max}$ ), после чего начинает уменьшаться.

Введем обозначение

$$B = \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} - k_{el})}.$$

Тогда уравнение (1.6.3) запишется в виде:

$$c(t) = B(e^{-k_{el}t} - e^{-k_{in}t}). \quad (1.6.4)$$

В случае, когда всасывание препарата происходит намного быстрее его выведения ( $k_{in} \gg k_{el}$ ), при больших значениях  $t$  членом уравнения  $e^{-k_{in}t}$  можно пренебречь. Тогда уравнение (1.6.4) упрощается:

$$c(t) \approx B e^{-k_{el}t}. \quad (1.6.5)$$

В этом случае нисходящая часть зависимости (рис. 1.6.1) характеризует в основном элиминацию препарата. Если же, наоборот,

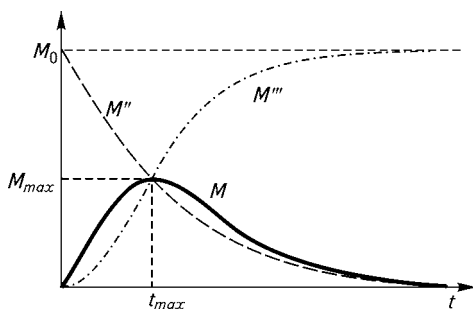


Рис. 1.6.3. Зависимость количеств препарата в подкамере  $M''$ , основной камере  $M$  и окружающей среде  $M'''$  от времени  $t$

рот, скорость всасывания намного меньше скорости выведения ( $k_{in} \ll k_{el}$ ), уравнение (1.6.4) сводится к виду:

$$c(t) \approx B e^{-k_{in} t}, \quad (1.6.6)$$

а нисходящая часть кривой характеризует в основном процесс всасывания.

Если же константы всасывания и выведения имеют одинаковый порядок, то обе части кривой характеризуют как элиминацию, так и всасывание препарата.

Определим время  $t_{\max}$ , в течение которого достигается максимальная концентрация  $c_{\max}$ , для чего продифференцируем выражение (1.6.4):

$$\frac{dc}{dt} = B(-k_{el} e^{-k_{el} t} + k_{in} e^{-k_{in} t}).$$

Приравняв это выражение нулю, определим максимальное значение функции:

$$\frac{dc}{dt} = -k_{el} e^{-k_{el} t_{\max}} + k_{in} e^{-k_{in} t_{\max}} = 0,$$

откуда получаем  $t_{\max}$ :

$$t_{\max} = \frac{\ln\left(\frac{k_{in}}{k_{el}}\right)}{k_{in} - k_{el}}. \quad (1.6.7)$$

Из уравнения (1.6.7) видно, что время достижения максимальной концентрации не зависит от дозы введенного препарата, а целиком определяется константами всасывания и выведения. Подставив (1.6.7) в (1.6.3), можно определить максимальную концентрацию препарата в основной камере.

## § 1.7. МНОГОКАМЕРНЫЕ ФАРМАКОКИНЕТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Для построения многокамерных моделей требуется составить систему из нескольких дифференциальных уравнений. Концентрация препарата в каком-либо органе зависит от скоростей нескольких процессов:

1) скорости всасывания препарата из места введения (например из кишечника) в кровь, если отсутствует непосредственное введение лекарства в кровеносное русло (этот процесс характеризуется константой  $k_{12}$ );

2) скорости транспорта препарата из крови в орган (константа  $k_{23}$ );

3) скорости обратного процесса: транспорта препарата из органа в кровь (константа  $k_{32}$ );

4) скорости выведения препарата из организма выделительной системой (константа  $k_4$ )<sup>1</sup>.

Каждый орган, в котором может находиться препарат (кишечник, кровь, орган-мишень и др.), представим в виде отдельных блоков (камер) (рис. 1.7.1), в каждом из которых распределение препарата однородно.



Рис. 1.7.1. Схема перемещения лекарственного препарата в организме

На данном этапе построения математической модели уже можно составить систему дифференциальных уравнений, описывающих указанный процесс. В нашем случае уравнения запишутся в виде:

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = -k_{12}c_1; \\ \frac{dc_2}{dt} = -(k_4 + k_{23})c_2 + k_{32}c_3 + k_{12}c_1; \\ \frac{dc_3}{dt} = k_{23}c_2 - k_{32}c_3, \end{cases} \quad (1.7.1)$$

где  $c_1$ ,  $c_2$  и  $c_3$  — концентрация вещества в первом, втором и третьем блоках.

На следующем этапе требуется решить полученные уравнения, что не всегда возможно в общем виде. В таком случае их решают с помощью ЭВМ.

Иногда число полученных уравнений можно сократить. Все процессы разделяются на быстрые, средние и медленные. Данное разделение условно. Допустим, мы наблюдаем за процессом в те-

<sup>1</sup> Предполагаем, что отсутствует инактивация и необратимое связывание препарата в организме.

чение нескольких часов. В таком случае процессы, совершающиеся в течение нескольких минут, будут являться быстрыми, нескольких часов — средними, нескольких суток — медленными. Тогда получается, что, наблюдая за процессом несколько часов, мы не успеваем проследить за медленными реакциями, и переменные, описывающие их, остаются постоянными в течение периода наблюдения. В то же время быстрые процессы успевают пройти в самом начале периода наблюдения и далее также остаются постоянными. Поэтому переменные, входящие в состав уравнений быстрых процессов, можно заменить начальными значениями, а переменные, входящие в состав уравнений медленных процессов, — стационарными. Данный метод позволяет сократить число дифференциальных уравнений и число переменных. Например, в приведенной системе уравнений (1.7.1) концентрацию  $c_2$  в некоторых случаях можно считать постоянной.

## § 1.8. МОДЕЛЬ НЕПРЕРЫВНОГО ВВЕДЕНИЯ ПРЕПАРАТА

При введении какого-либо лекарственного препарата часто требуется знать временной характер (кинетику) его распределения в организме. Если лекарство было введено в недостаточной дозе или же очень быстро разрушается или выводится из организма, то не будет достигнут его лечебный эффект. С другой стороны, излишне большая доза может вызвать нежелательные побочные эффекты. Модель, которая будет рассмотрена ниже, позволяет выбрать оптимальные дозу и периодичность введения препарата.

На практике часто приходится сталкиваться с проблемой поддержания постоянной концентрации лекарственного препарата в организме. Для этого требуется непрерывно с постоянной скоростью вводить внутривенно или внутриаптериально препарат (проще говоря — поставить капельницу) (рис. 1.8.1, *а*). При введении (инфузии) препарата со скоростью  $v$  его количество  $M$  в крови будет изменяться согласно уравнению

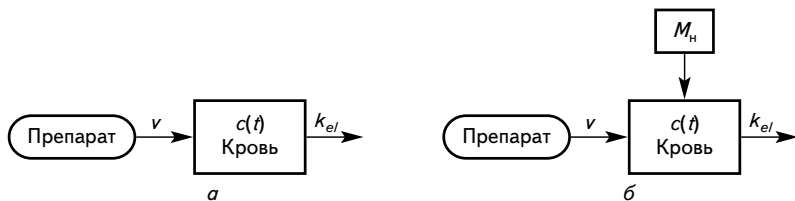


Рис. 1.8.1. Введение препарата:

*а* — с постоянной скоростью; *б* — с постоянной скоростью  $v$  и нагрузочной дозой  $M_n$

$$\frac{dM}{dt} = v - k_{el}M, \quad (1.8.1)$$

где  $k_{el}$  — константа скорости выведения препарата из крови.

Проинтегрируем это уравнение в пределах времени от 0 до  $t$  и количества препарата от 0 до  $M$ :

$$\begin{aligned} \int_0^M \frac{dM}{v - k_{el}M} &= \int_0^t dt; \\ -\frac{1}{k_{el}} \ln(v - k_{el}M) \Big|_0^M &= t \Big|_0^t; \\ \ln \frac{v - k_{el}M}{v} &= -k_{el}t. \end{aligned}$$

Выразим из последнего уравнения  $M$ :

$$M = \frac{v}{k_{el}} [1 - \exp(-k_{el}t)]. \quad (1.8.2)$$

Далее перейдем от количества препарата к его концентрации, для чего разделим обе части уравнения на кажущийся объем  $V$ :

$$c(t) = \frac{v}{Vk_{el}} [1 - \exp(-k_{el}t)]. \quad (1.8.3)$$

Как видно из уравнения (1.8.3), концентрация вещества с течением времени возрастает и асимптотически приближается при  $t \rightarrow \infty$  к постоянному значению концентрации

$$c_{\infty} = \frac{v}{Vk_{el}} \quad (1.8.4)$$

(рис. 1.8.2, кривая 2). Из выражения (1.8.4) можно получить значение скорости, с которой следует вводить препарат для того, чтобы его концентрация в крови равнялась требуемой ( $c^*$ ):

$$v = c^*Vk_{el}. \quad (1.8.5)$$

Для того чтобы как можно быстрее достигнуть желаемого эффекта, в начальный момент времени требуется ввести некоторую дозу препарата (так называемую нагрузочную  $M_n$  рис. 1.8.1, б), а после этого непрерывно вводить препарат со скоростью  $v$  (то есть сделать пациенту укол и поставить капельницу). Тогда в уравнение изменения концентрации во времени (1.8.3) добавится слабое, определяемое нагрузочной дозой  $M_n$ :

$$\begin{aligned}
 c(t) &= \frac{v}{Vk_{el}} [1 - \exp(-k_{el}t)] + \frac{M_n}{V} \exp(-k_{el}t) = \\
 &= \frac{v}{Vk_{el}} - \frac{1}{V} \left( \frac{v}{k_{el}} - M_n \right) \exp(-k_{el}t). \quad (1.8.6)
 \end{aligned}$$

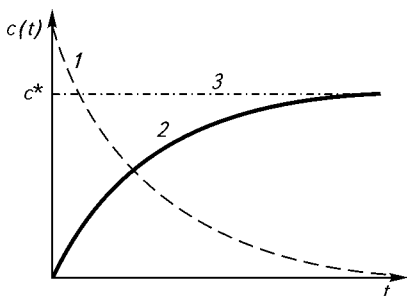


Рис. 1.8.2. Кинетика изменения концентрации препарата в крови:

1 — при однократном введении; 2 — при инфузии препарата с постоянной скоростью; 3 — при сочетании введения нагрузочной дозы и инфузии с целью мгновенного создания в крови желаемой концентрации препарата —  $c^*$

Так как при  $t \rightarrow \infty$  множитель  $\exp(-k_{el}t) \rightarrow 0$ , то конечная концентрация препарата по-прежнему равняется  $c^* = v/Vk_{el}$ , то есть не зависит от величины нагрузочной дозы. Концентрация приближается к  $c^*$ , если второе слагаемое в уравнении (1.8.6) равняется нулю, а это, в свою очередь, может быть достигнуто либо через некоторое время при  $(v/k_{el} - M_n) \neq 0$ , либо мгновенно при  $(v/k_{el} - M_n) = 0$  (рис. 1.8.2, кривая 3). Отсюда можно получить выражение для нагрузочной дозы ( $M_n^*$ ), при введении которой необходимый уровень концентрации препарата будет достигнут мгновенно:

$$M_n^* = v/k_{el} = c^* V.$$

Таким образом, данная модель позволяет определить мгновенную нагрузочную дозу лекарства  $M_n^*$  и скорость его введения  $v$  в организм.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 1.1.** Первоначальная концентрация в крови некоторого препарата равнялась  $c_0 = 50$  мкг/мл, а через  $t = 10$  ч уменьшилась до  $c = 20$  мкг/мл. Рассчитайте константу элиминации  $k_{el}$  этого препарата и время его полувыведения  $t_{1/2}$ . Процесс элиминации описывается однокамерной моделью.

**Решение.** Константу элиминации вычисляем из линеаризованного уравнения для концентрации (1.5.15):

$$k_{el} = \frac{\ln(c_0/c)}{t} = \frac{\ln(50/20)}{10 \text{ ч}} = 0,092 \text{ ч}^{-1}.$$

Время полувыведения препарата:

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_{el}} = \frac{0,693}{0,092 \text{ ч}^{-1}} = 7,5 \text{ ч.}$$

**Задача 1.2.** Пациенту было введено внутримышечно  $M_0 = 220$  мкг препарата. Вычислите:

- концентрацию  $c$  препарата в крови через  $t = 3$  ч после введения;
- скорость его выведения  $v$  через  $t = 3$  ч после введения;
- время  $t_{\max}$ , по истечении которого концентрация препарата в крови достигнет максимального значения;
- максимальную концентрацию  $c_{\max}$ ;
- максимальную скорость выведения  $v_{\max}$ .

Константы всасывания и выведения равны соответственно  $k_{in} = 2 \text{ ч}^{-1}$  и  $k_{el} = 0,5 \text{ ч}^{-1}$ . Кажущийся объем крови принять равным  $V = 4,5$  л.

**Решение.** Так как препарат вводится не непосредственно в кровь, а в другую ткань, то данный процесс будет описываться однокамерной моделью с подкамерой. Концентрация препарата в основной камере в произвольный момент времени составляет:

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} - k_{el})} (e^{-k_{el}t} - e^{-k_{in}t}) = \\ &= \frac{220 \text{ мкг} \cdot 2 \text{ ч}^{-1}}{4,5 \text{ л} (2 \text{ ч}^{-1} - 0,5 \text{ ч}^{-1})} [\exp(-0,5 \text{ ч}^{-1} \cdot 3 \text{ ч}) - \exp(-2 \text{ ч}^{-1} \cdot 3 \text{ ч})] = 14,4 \text{ мкг/л.} \end{aligned}$$

Скорость выведения препарата равна первой производной концентрации по времени

$$\frac{dc}{dt} = \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} - k_{el})} (-k_{el} e^{-k_{el}t} + k_{in} e^{-k_{in}t}). \quad (1.1)$$

Знак «-» указывает на то, что концентрация со временем убывает. Через 3 ч после введения скорость выведения составит:

$$\begin{aligned} \frac{dc}{dt} &= \frac{220 \text{ мкг} \cdot 2 \text{ ч}^{-1}}{4,5 \text{ л} (2 \text{ ч}^{-1} - 0,5 \text{ ч}^{-1})} [-0,5 \text{ ч}^{-1} \exp(-0,5 \text{ ч}^{-1} \cdot 3 \text{ ч}) + 2 \text{ ч}^{-1} \exp(-2 \text{ ч}^{-1} \cdot 3 \text{ ч})] = \\ &= -6,95 \text{ мкг/(л} \cdot \text{ч)}. \end{aligned}$$

Время достижения максимальной концентрации вычисляем по уравнению (1.6.7):

$$t_{\max} = \frac{\ln\left(\frac{k_{in}}{k_{el}}\right)}{k_{in} - k_{el}} = \frac{\ln\left(\frac{2 \text{ ч}^{-1}}{0,5 \text{ ч}^{-1}}\right)}{2 \text{ ч}^{-1} - 0,5 \text{ ч}^{-1}} = 0,92 \text{ ч} = 55 \text{ мин.}$$

Тогда максимальная концентрация составит:

$$\begin{aligned}
 c_{\max} &= \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} - k_{el})} (e^{-k_{el} t_{\max}} - e^{-k_{in} t_{\max}}) = \\
 &= \frac{220 \text{ мкг} \cdot 2 \text{ ч}^{-1}}{4,5 \text{ л} (2 \text{ ч}^{-1} - 0,5 \text{ ч}^{-1})} [\exp(-0,5 \text{ ч}^{-1} \cdot 0,92 \text{ ч}) - \exp(-2 \text{ ч}^{-1} \cdot 0,92 \text{ ч})] = \\
 &= 30,8 \text{ мкг/л}.
 \end{aligned}$$

Определим момент времени  $t^*$ , в который скорость выведения достигает максимального значения, для чего вторую производную концентрации по времени приравняем нулю:

$$\frac{d^2 c}{dt^2} = \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} - k_{el})} (k_{el}^2 e^{-k_{el} t^*} - k_{in}^2 e^{-k_{in} t^*}) = 0,$$

откуда

$$t^* = \frac{2 \ln \left( \frac{k_{in}}{k_{el}} \right)}{k_{in} - k_{el}} = \frac{2 \ln \left( \frac{2 \text{ ч}^{-1}}{0,5 \text{ ч}^{-1}} \right)}{2 \text{ ч}^{-1} - 0,5 \text{ ч}^{-1}} = 1,84 \text{ ч}.$$

Подставив  $t^*$  в выражение для скорости (1.1), получим:

$$\begin{aligned}
 \frac{dc}{dt} &= \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} - k_{el})} (-k_{el} e^{-k_{el} t^*} + k_{in} e^{-k_{in} t^*}) = \\
 &= \frac{220 \text{ мкг} \cdot 2 \text{ ч}^{-1}}{4,5 \text{ л} (2 \text{ ч}^{-1} - 0,5 \text{ ч}^{-1})} [-0,5 \text{ ч}^{-1} \exp(-0,5 \text{ ч}^{-1} \cdot 1,84 \text{ ч}) + 2 \text{ ч}^{-1} \exp(-2 \text{ ч}^{-1} \cdot 1,84 \text{ ч})] = \\
 &= -24,4 \text{ мкг}/(\text{л} \cdot \text{ч}).
 \end{aligned}$$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.1.** Вычислите время полувыведения  $t_{1/2}$  нальбуфина, если его константа элиминации составляет  $k_{el} = 0,17 \text{ ч}^{-1}$ .

**1.2.** Вычислите константу элиминации  $k_{el}$  люминала, если его время полувыведения составляет  $t_{1/2} = 3$  суток.

**1.3.** Пациенту ввели внутривенно препарат  $m_0 = 200$  мкг. Вычислите массу  $m$  препарата в крови через  $t = 2$  ч после введения. Константа элиминации данного препарата  $k_{el} = 0,17 \text{ ч}^{-1}$ . Процесс элиминации описывается однокамерной моделью.

**1.4.** Определите время полувыведения  $t_{1/2}$  препарата, если за время  $t = 3$  ч наблюдения за пациентом концентрация препарата в крови уменьшилась с  $c_0 = 100$  до  $c = 30$  мкг/л. Процесс элиминации описывается однокамерной моделью.

**1.5.** Найдите начальную концентрацию  $c_0$  препарата в крови, если через время  $t = 10$  ч после внутривенного введения его концентрация составляла  $c = 30$  мкг/л. Время полувыведения данного препарата  $t_{1/2} = 8$  ч. Процесс элиминации описывается однокамерной моделью.



**1.6.** Через какое время  $t$  концентрация препарата в крови уменьшится в 4 раза, если время полувыведения  $t_{1/2} = 6$  ч. Процесс элиминации описывается однокамерной моделью.

**1.7.** Через какое время  $t$  после введения концентрация препарата в крови сократится на 40 %, если время полувыведения составляет  $t_{1/2} = 10$  ч. Процесс элиминации описывается однокамерной моделью.

**1.8.** Пациенту поставили капельницу и вводят препарат с постоянной скоростью  $v = 2$  мкг/мин. Вычислите массу  $m$  препарата в крови через время  $t = 1$  ч, если константа элиминации для него  $k_{el} = 0,25$  ч<sup>-1</sup>.

**1.9.** Пациенту поставили капельницу и вводят препарат с постоянной скоростью  $v = 1,5$  мкг/мин. Вычислите наибольшую возможную концентрацию  $c^*$  препарата в крови и величину нагрузочной дозы  $M_n$ , которую необходимо ввести пациенту, чтобы концентрация  $c^*$  была достигнута мгновенно. Константа элиминации данного препарата  $k_{el} = 0,46$  ч<sup>-1</sup>, кажущийся объем крови —  $V = 4,5$  л.

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**1.1.** Модель «хищник—жертва» описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 y + \gamma_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma_2 xy + \varepsilon_2 y; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 y^2 - \gamma_1 x^2, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma_2 x^2 - \varepsilon_2 y^2; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 y - \gamma_1 \sqrt{xy}, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma_2 \sqrt{xy} - \varepsilon_2 x; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \varepsilon_1 x - \gamma_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma_2 xy - \varepsilon_2 y. \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \gamma_1 xy, \\ \frac{dy}{dt} = -\gamma_2 xy; \end{cases} & \end{array}$$

**1.2.** В модели «хищник—жертва» особые точки относятся к типу:

- а) «седло» и неустойчивый фокус;
- б) устойчивый и неустойчивый фокусы;
- в) устойчивый узел и «центр»;
- г) устойчивый и неустойчивый узлы;
- д) «центр» и «седло».

**1.3.** В однокамерной модели дифференциальное уравнение, описывающее изменение количества препарата в камере, имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \frac{dM}{dt} = v - k_{el} M; & \text{г) } \frac{dM}{dt} = k_{in} M; \\ \text{б) } \frac{dM}{dt} = -k_{el} M; & \text{д) } \frac{dM}{dt} = v - k_{in} M. \\ \text{в) } \frac{dM}{dt} = k_{in} M'' - k_{el} M; & \end{array}$$

**1.4.** Изменение концентрации препарата в крови в случае однократного введения описывается уравнением:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } c(t) = c_0 + e^{-k_{el}t}; & \text{г) } c(t) = c_0 e^{-k_{el}t}; \\ \text{б) } c(t) = c_0 e^{k_{el}t}; & \text{д) } c(t) = c_0 e^{-2k_{el}t}. \\ \text{в) } c(t) = c_0 - e^{k_{el}t}; & \end{array}$$

**1.5.** Время полувыведения препарата составляет:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } t_{1/2} = k_{el} \ln \frac{1}{2}; & \text{г) } t_{1/2} = \frac{2}{k_{el}}; \\ \text{б) } t_{1/2} = \frac{\ln 2}{k_{el}}; & \text{д) } t_{1/2} = k_{el} \ln 2. \\ \text{в) } t_{1/2} = \frac{\lg 2}{k_{el}}; & \end{array}$$

**1.6.** Препарат вводится внутримышечно, откуда всасывается в кровь с константой  $k_1$ , а выводится из кровеносного русла с константой  $k_2$ . Составьте систему дифференциальных уравнений, описывающих концентрацию препарата в мышечной ткани ( $c_1$ ) и крови ( $c_2$ ):

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = -k_1 c_2, \\ \frac{dc_2}{dt} = k_2 c_2 - k_1 c_1; \end{cases} & \text{г) } \begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = -k_2 c_1, \\ \frac{dc_2}{dt} = k_2 c_1 + k_2 k_1 c_1; \end{cases} \\ \text{б) } \begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = k_1 c_2, \\ \frac{dc_2}{dt} = k_2 c_2 - k_2 c_2; \end{cases} & \text{д) } \begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = k_1 c_1, \\ \frac{dc_2}{dt} = k_1 c_1 + k_2 c_2. \end{cases} \\ \text{в) } \begin{cases} \frac{dc_1}{dt} = -k_1 c_1, \\ \frac{dc_2}{dt} = k_1 c_1 - k_2 c_2; \end{cases} & \end{array}$$

**1.7.** Препарат вводится внутримышечно. Его концентрация в крови в момент времени  $t$  описывается следующим уравнением:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } c(t) = \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} - k_{el})} (e^{-k_{el}t} - e^{-k_{in}t}); & \text{г) } c(t) = \frac{M_0 k_{el}}{(k_{el} - k_{in})} (e^{k_{in}t} - e^{k_{el}t}); \\ \text{б) } c(t) = \frac{M_0 k_{in}}{(k_{el} - k_{in})} (e^{-k_{el}t} - e^{-k_{in}t}); & \text{д) } c(t) = \frac{M_0 k_{in}}{V(k_{in} + k_{el})} (e^{k_{el}t} + e^{k_{in}t}). \\ \text{в) } c(t) = \frac{M_0 k_{el}}{V(k_{in} - k_{el})} (e^{k_{in}t} - e^{k_{el}t}); & \end{array}$$

**1.8.** Препарат вводится внутримышечно. Время достижения его максимальной концентрации в крови составляет:

$$\begin{aligned} \text{а) } t_{\max} &= \frac{\ln \left( \frac{k_{el}}{k_{in}} \right)}{k_{in} - k_{el}}; & \text{г) } t_{\max} &= \frac{\ln \left( \frac{k_{in}}{k_{el}} \right)}{k_{in} - k_{el}}; \\ \text{б) } t_{\max} &= \frac{k_{in} - k_{el}}{\ln \left( \frac{k_{in}}{k_{el}} \right)}; & \text{д) } t_{\max} &= \frac{k_{el} - k_{in}}{\ln \left( \frac{k_{in}}{k_{el}} \right)}. \\ \text{в) } t_{\max} &= \frac{\ln \left( \frac{k_{el}}{k_{in}} \right)^2}{k_{el} - k_{in}}; \end{aligned}$$

**1.9.** В модели непрерывной инфузии дифференциальное уравнение, описывающее изменение количества препарата в камере, имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{dM}{dt} &= -k_{el}M; & \text{г) } \frac{dM}{dt} &= k_{in}M; \\ \text{б) } \frac{dM}{dt} &= v - k_{in}M; & \text{д) } \frac{dM}{dt} &= v - k_{el}M. \\ \text{в) } \frac{dM}{dt} &= k_{in}M'' - k_{el}M; \end{aligned}$$

**1.10.** В модели, описывающей непрерывную инфузию препарата, с течением времени его концентрация:

- а) уменьшается по экспоненциальному закону;
- б) линейно возрастает;
- в) остается неизменной;
- г) возрастает и асимптотически приближается к постоянному значению  $c^*$ ;
- д) увеличивается до некоторого значения  $t_{\max}$ , а потом снижается.

**1.11.** Выражение для нагрузочной дозы  $M_H$ , при введении которой необходимый уровень концентрации  $c^*$  препарата будет достигнут мгновенно, имеет вид:

$$\begin{aligned} \text{а) } M_H^* &= \frac{c^* V v}{k_{el}}; & \text{г) } M_H^* &= \frac{c^*}{V k_{el}}; \\ \text{б) } M_H^* &= \frac{c^* V}{k_{el}}; & \text{д) } M_H^* &= \frac{c^* V}{v k_{el}}. \\ \text{в) } M_H^* &= c^* V; \end{aligned}$$

**1.12.** Скорость введения препарата, необходимая для того, чтобы его концентрация в крови была постоянной и равнялась  $c$ , составляет:

$$\begin{aligned} \text{а) } v &= c^2 V k_{el}; & \text{г) } v &= c V k_{el} k_{in}; \\ \text{б) } v &= c V k_{el}; & \text{д) } v &= c V^2 k_{el}. \\ \text{в) } v &= -2c V k_{el}; \end{aligned}$$

## Глава 2

---

# МЕХАНИКА

Механика занимает центральное место в физике и связана со всеми ее разделами. Механика изучает движение, равновесие тел и происходящие между ними взаимодействия. Основными разделами механики являются *статика*<sup>1</sup> — учение о равновесии тел под действием сил; *кинематика* — учение о движении тел без учета их масс и действующих на них сил; *динамика* — учение о движении тел под действием приложенных к ним сил.

Значительная часть физических явлений связана с колебательными и волновыми процессами. В физике различают механические и электромагнитные колебания и волны. Законы, описывающие *механические колебания* и волны, лежат в основе таких биологических процессов, как биение сердца, распространение нервного импульса и пульсовой волны.

### § 2.1. КИНЕМАТИКА

Движение какого-либо тела можно представить как изменение его положения относительно другого, называемого *телом отсчета*. К телу отсчета привязывается система координат, которая вместе со способами согласованного измерения промежутков времени, расстояний и углов называется *системой отсчета*.

*Абсолютно твердым телом* в механике называется тело, расстояние между любыми двумя точками которого не изменяется в процессе движения и под действием сил. Это понятие применяется и в случае, когда изменением размеров и форм тела можно пренебречь.

Если при движении абсолютно твердого тела прямая, соединяющая любые две точки, остается параллельной самой себе, то та-

---

<sup>1</sup> *Статика* не рассматривается в данном учебнике.

кое движение тела называется **п о с т у п а т е л ь н ы м**. При поступательном движении все точки тела описывают одинаковую траекторию, поэтому можно ограничиться рассмотрением движения одной точки.

Если при движении абсолютно твердого тела прямая, проходящая через какую-либо точку, остается неподвижной, то такое движение называется **в р а щ е н и е м** тела относительно этой прямой — **о с и в р а щ е н и я**.

Любое движение тела в каждый момент времени можно представить как сумму поступательного движения и вращения относительно оси, которая может изменять свое положение относительно тела и системы отсчета с течением времени.

Движение материальной точки определено, если известен **закон ее движения**, то есть закон, по которому изменяется положение точки в пространстве с течением времени.

Положение точки в пространстве может быть задано **радиус-вектором**  $\vec{r}$ , проведенным от начала координат выбранной системы отсчета к этой точке (рис. 2.1.1), или посредством проекций  $r_x$ ,  $r_y$ ,  $r_z$  радиус-вектора на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Эти проекции одновременно являются координатами точки, так что  $r_x = x$ ,  $r_y = y$ ,  $r_z = z$ .

Закон движения точки можно представить в виде одного векторного уравнения:

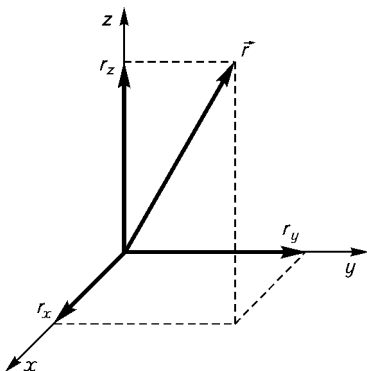


Рис. 2.1.1. Радиус-вектор  $\vec{r}$  на координатной плоскости

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \quad (2.1.1)$$

или трех скалярных уравнений:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t). \quad (2.1.2)$$

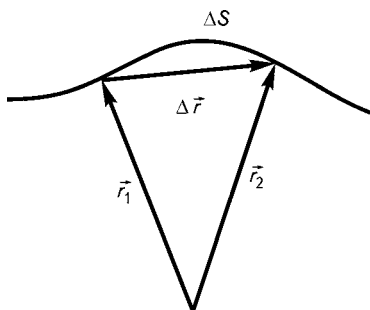


Рис. 2.1.2. Траектория  $\Delta S$  и соответствующее перемещение  $\Delta \vec{r}$

**Поступательное движение.** Пусть за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$  точка переместится из положения, определяемого радиус-вектором  $\vec{r}_1$ , в положение, определяемое  $\vec{r}_2$  (рис. 2.1.2).

Вектор  $\Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  называется **перемещением** точки. Непрерывная

линия, описываемая концом радиус-вектора, называется *траекторией* точки. Длина участка  $\Delta S$  траектории, по которой движется точка, называется *путем* точки и является скаляром. Величины  $|\Delta \vec{r}|$  и  $\Delta S$  совпадают лишь в случае прямолинейного движения. В СИ<sup>1</sup> перемещение и путь измеряются в метрах:  $[\Delta \vec{r}] = [\Delta S] = \text{м}$ .

**Скоростью (линейной скоростью)** называется вектор, направленный в каждой точке траектории по касательной к ней и равный производной радиус-вектора по времени.

В векторной форме

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (2.1.3)$$

в скалярной форме

$$v = \frac{dS}{dt}. \quad (2.1.4)$$

Единица измерения скорости — метр в секунду:  $[v] = \text{м/с}$ .

Производная скорости по времени называется **ускорением**.

В векторной форме

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}, \quad (2.1.5)$$

в скалярной форме

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}. \quad (2.1.6)$$

Единица измерения ускорения — метр в секунду в квадрате:  $[a] = \text{м/с}^2$ .

Если известны зависимости ускорения и скорости от времени, а также значения скорости и радиус-вектора в некоторый момент времени  $t_1$ , то значения скорости и радиус-вектора в момент времени  $t_2$  определяются с помощью интегральных формул:

$$\vec{v}(t_2) = \vec{v}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{a}(t) dt, \quad (2.1.7)$$

$$\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(t) dt. \quad (2.1.8)$$

---

<sup>1</sup> Далее единицы измерения всех вводимых величин приведены в СИ без указания на это.

Путь, пройденный телом за промежуток времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , равен

$$\Delta S = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt. \quad (2.1.9)$$

*Равномерное прямолинейное движение* описывается следующими уравнениями в векторной форме:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= 0; \\ \vec{v} &= \text{const}; \\ \vec{r} - \vec{r}_0 &= \vec{v}t, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

где  $\vec{r}_0$  — радиус-вектор в момент времени  $t = 0$ ;  $\vec{r}$  — радиус-вектор в произвольный момент времени  $t$ .

*Равнопеременное прямолинейное движение* описывается следующими уравнениями в векторной форме:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \text{const}; \\ \vec{v} &= \vec{v}_0 + \vec{a}t; \\ \vec{r} - \vec{r}_0 &= \vec{v}_0t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2, \end{aligned} \quad (2.1.11)$$

где  $\vec{v}_0$  — вектор скорости в момент времени  $t = 0$ ;  $\vec{v}$  — мгновенное значение скорости в момент времени  $t$ .

**Вращательное движение.** Пусть точка вращающегося тела описывает дугу  $\Delta S$  окружности радиуса  $R$ . Центр окружности лежит на оси вращения. Радиус-вектор точки при этом описывает угол  $\Delta\varphi$  (рис. 2.1.3). Законы вращательного движения применимы к описанию движения вдоль любой плоской кривой. Для этого выбирается бесконечно малый ее участок  $dS$ , на котором строится соприкасающаяся окружность. Ее радиус называется радиусом кривизны данной точки кривой, а центр — центром кривизны. Радиус кривизны определяется выражением  $dR = dS/d\varphi$ , где  $d\varphi$  — угол, описываемый радиусом-вектором при движении вдоль кривой на участке  $dS$ . Между дугой  $\Delta S$ , радиусом  $R$  и углом  $\Delta\varphi$  существует соотношение:

$$\Delta S = \Delta\varphi R. \quad (2.1.12)$$

Производная угла поворота по времени называется *угловой скоростью*:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (2.1.13)$$

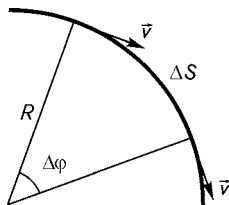


Рис. 2.1.3. Движение точки по окружности

Угловая скорость характеризует быстроту вращения тела. Единица измерения угловой скорости — радиан в секунду:  $[\omega] = \text{рад/с}$ .

Угловая скорость связана с линейной следующим соотношением:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} R \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega. \quad (2.1.14)$$

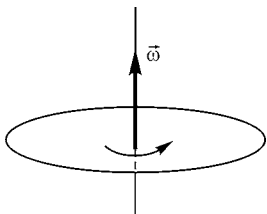


Рис. 2.1.4. Направление вектора (псевдовектора) угловой скорости

Угловая скорость является псевдовектором, направление которого зависит от направления вращения и определяется по правилу правого винта (рис. 2.1.4).

Быстрота изменения угловой скорости характеризуется **угловым ускорением**:

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2 \varphi}{dt^2}. \quad (2.1.15)$$

Единица измерения углового ускорения — радиан в секунду в квадрате:  $[\varepsilon] = \text{рад/с}^2$ .

Угловое ускорение также является псевдовектором, направление которого совпадает с направлением вектора угловой скорости при ускоренном движении или противоположно ей при замедленном.

*Равномерное вращательное движение* совершается с постоянной угловой скоростью и описывается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= 0, \\ \omega &= \text{const}, \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega t, \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

где  $\varphi_0$  — начальное значение угла поворота (при  $t = 0$ ).

*Равнопеременное вращательное движение* совершается с постоянным угловым ускорением и описывается следующими уравнениями

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{const}, \\ \omega &= \omega_0 + \varepsilon t, \\ \varphi &= \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{\varepsilon t^2}{2}, \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

где  $\omega_0$  — начальная угловая скорость (при  $t = 0$ ).

Время  $T$ , в течение которого совершается один оборот, называется **периодом вращения**. Частота вращения в единицу времени обозначается  $\nu$ . Очевидно, что



$$v = \frac{1}{T}. \quad (2.1.18)$$

Угловая скорость  $\omega$  и частота  $\nu$  связаны соотношением

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \quad (2.1.19)$$

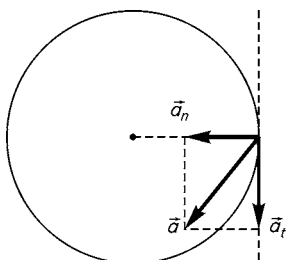


Рис. 2.1.5. Направления векторов нормального  $\vec{a}_n$ , тангенциального  $\vec{a}_t$  и полного  $\vec{a}$  ускорений

При равномерном движении точки по окружности линейная скорость изменяется только по направлению. Ускорение при этом направлено по радиусу к центру окружности и называется *центростремительным*, или *нормальным* ускорением:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \omega^2 R = \omega v. \quad (2.1.20)$$

При неравномерном движении точки по окружности скорость изменяется не только по направлению, но и по абсолютному значению. В этом случае вектор полного ускорения состоит из двух составляющих: центростремительного ускорения  $a_n$  и тангенциального ускорения  $a_t$ , направленного по касательной вдоль скорости при ускоренном движении или против — при замедленном и характеризующего изменение только модуля скорости точки:

$$a_t = \varepsilon R. \quad (2.1.21)$$

При равномерном движении  $a_t = 0$ .

Из рис. 2.1.5. видно, что модуль вектора полного ускорения

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}. \quad (2.1.22)$$

Характеристики и уравнения кинематики поступательного и вращательного движений сопоставлены в табл. 2.1.1.

## § 2.2. ДИНАМИКА

В динамике каждое тело характеризуется массой. Масса тела определяет инерционные и гравитационные свойства материи. Общая масса системы тел равна сумме масс составляющих ее тел.

Таблица 2.1.1

**Кинематические характеристики и уравнения поступательного  
и вращательного движений**

Поступательное движение		Вращательное движение	
$\vec{r}$ — радиус-вектор $\vec{S}$ — путь	$S = \varphi R$		$\bar{\varphi}$ — угол
$\vec{v}$ — скорость	$v = \omega R$		$\bar{\omega}$ — угловая скорость
$\vec{a}$ — ускорение	$a_t = \varepsilon R; a_n = \omega^2 R$		$\bar{\varepsilon}$ — угловое ускорение
Форма уравнения			
Дифференциальная	Интегральная	Дифференциальная	Интегральная
$\vec{r}(t)$	$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \int_0^t \vec{v} \, dt$	$\bar{\varphi}(t)$	$\bar{\varphi}(t) = \bar{\varphi}_0 + \int_0^t \bar{\omega} \, dt$
$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \int_0^t \vec{a} \, dt$	$\bar{\omega}(t) = \frac{d\bar{\varphi}}{dt}$	$\bar{\omega}(t) = \bar{\omega}_0 + \int_0^t \bar{\varepsilon} \, dt$
$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	$\vec{a}(t)$	$\bar{\varepsilon}(t) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2}$	$\bar{\varepsilon}(t)$
Равномерное			
$\vec{r} = \vec{r}_0 + v t$		$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 + \bar{\omega} t$	
Равнопеременное			
$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a} t$		$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\varepsilon} t$	
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2$		$\bar{\varphi} = \bar{\varphi}_0 + \bar{\omega}_0 t + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon} t^2$	

Это согласуется с экспериментом в классической и нерелятивистской квантовой механике.

Немаловажную роль играют и другие характеристики тел, например размер, форма и их изменение при различных взаимодействиях. Когда таковые не существенны, удобно вводить понятие *материальной точки*, то есть объекта, лишенного размеров и фор-

мы, но имеющего массу. Разбивая условно каждое тело на части, размеры которых пренебрежимо малы, можно представить тело как систему материальных точек.

Количественной мерой взаимодействия тел является **сила**. Сила является векторной величиной и характеризуется значением, направлением и точкой приложения. Если к материальной точке приложено несколько сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , то их действия можно заменить действием силы  $\vec{F}$ , которая называется *равнодействующей* и представляет собой векторную сумму данных сил:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i. \quad (2.2.1)$$

Если мы имеем дело не с точкой, а с материальным телом, то действие нескольких сил в общем случае нельзя свести к действию одной силы. Однако это действие можно свести к действию одной силы и одной пары сил (момента силы), вызывающих поступательное и вращательное движение соответственно.

Тела взаимодействуют посредством силовых полей. *Силовое поле* — это область пространства, в каждой точке которой на тело действует сила, зависящая от свойств тела.

Методы измерения массы и силы следуют из основных законов динамики. Вид основных уравнений динамики зависит от системы отсчета, относительно которой рассматривается движение. Законы динамики формулируются для инерциальных систем, характеризующихся тем, что в таких системах отсчета тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, пока на него не подействует какая-либо сила. Иначе говоря, если

$$\vec{F} = 0 \text{ или } \sum \vec{F}_i = 0, \text{ то } \vec{v} = \text{const или } \vec{v} = 0. \quad (2.2.2)$$

Это определение инерциальной системы называется **законом инерции**, или **первым законом Ньютона**.

Основное уравнение динамики формулируется во **втором законе Ньютона**: ускорение, которое приобретает материальная точка массой  $m$  под действием силы  $\vec{F}$ , прямо пропорционально силе и обратно пропорционально массе точки:

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m} \vec{F}. \quad (2.2.3)$$

Согласно **третьему закону Ньютона**, при взаимодействии двух тел силы, действующие на них, равны по значению и противоположны по направлению:

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}. \quad (2.2.4)$$

Измерив ускорения, полученные телами при взаимодействии, можно получить отношения их масс, то есть сравнить любую массу с эталонной. В СИ эталоном массы является килограмм (кг). Измеряя ускорения, придаваемые одной и той же массе различными силами, можно измерять силы. Таким образом, система трех законов Ньютона позволяет определить все входящие в них кинематические величины, поэтому является замкнутой и полной.

За единицу измерения силы принят ньютон (Н) — сила, которая массе 1 кг придает ускорение 1 м/с<sup>2</sup>:  $[F] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м/с}^2$ .

**Импульсом** тела массой  $m$ , движущегося со скоростью  $\vec{v}$ , называется вектор

$$\vec{P} = m\vec{v}. \quad (2.2.5)$$

Согласно второму закону Ньютона,

$$d(m\vec{v}) = \vec{F} dt \quad (2.2.6)$$

или

$$\Delta \vec{P} = \vec{P}(t_2) - \vec{P}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt, \quad (2.2.7)$$

где  $\Delta \vec{P}$  — изменение импульса тела;  $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$  — импульс силы, действующий на тело за время  $\Delta t = t_2 - t_1$ . Единица измерения импульса:  $[P] = \text{кг} \cdot \text{м/с}$ .

**Импульсом системы** тел называется векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему:

$$M\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \dots + m_n\vec{v}_n = \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i. \quad (2.2.8)$$

В системе материальных точек массами  $m_1, m_2, \dots, m_n$  существует точка, которой можно приписать полную массу системы  $M = \sum m_i$  и полный импульс  $M\vec{v} = \sum m_i\vec{v}_i$ . Такая точка называется **центром масс**, или **центром инерции системы**. Если радиус-вектор  $i$ -й точки равен  $\vec{r}_i$ , то радиус-вектор центра масс равен:

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}. \quad (2.2.9)$$

**Закон сохранения импульса:** если на систему тел не действуют внешние силы (такая система называется замкнутой), то внутренние силы не могут изменить импульс системы, и он остается постоянным:

$$\text{при } \vec{F} = 0 \quad \vec{P} = M\vec{v} = \sum_i m_i \vec{v}_i = \text{const}. \quad (2.2.10)$$

Если тело движется под действием силы  $\vec{F}$ , то **работой**, совершаемой силой  $\vec{F}$  при перемещении на величину  $\Delta\vec{r}$ , называется скалярное произведение векторов силы и перемещения:

$$A = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} = F \cdot \Delta r \cdot \cos \alpha, \quad (2.2.11)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{S}$ .

Работа силы  $\vec{F}$  за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  составляет:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} d\vec{r}. \quad (2.2.12)$$

Единицей измерения механической работы является джоуль (Дж) — работа, которую совершает сила в 1 Н на пути в 1 м:  $[A] = = \text{Дж} = \text{Н} \cdot \text{м}$ .

Работа, совершаемая силой  $\vec{F}$  в единицу времени, называется **мощностью**

$$N = \frac{dA}{dt} = \frac{d(\vec{F} \cdot \vec{S})}{dt} = \frac{\vec{F} d\vec{S}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos \alpha, \quad (2.2.13)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{F}$  и  $\vec{v}$ .

Единицей мощности является ватт (Вт). Это мощность, при которой за 1 с совершается работа в 1 Дж:  $[N] = \text{Вт} = \text{Дж/с}$ .

**Кинетической энергией** движущегося тела называется скалярная величина

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}. \quad (2.2.14)$$

Изменение кинетической энергии тела за время  $\Delta t = t_2 - t_1$  равно работе  $A$  сил, действующих на него за это время:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} d\vec{r} = \frac{mv^2 t_2}{2} - \frac{mv^2 t_1}{2} = \Delta E_{\text{кин}}. \quad (2.2.15)$$

**Потенциальной энергией** тела или системы тел называется энергия, зависящая только от взаимного расположения взаимодейству-

ющих материальных точек тела или тел, составляющих эту систему, и от их положения во внешнем силовом поле (например, гравитационном, электромагнитном и т. п.). Если кинетическая энергия называется энергией движения, то потенциальная — энергией положения.

Понятие потенциальной энергии имеет место только для систем, в которых действуют так называемые консервативные силы. *Консервативными* называются силы, работа которых не зависит от пути, по которому частица переходит из одного положения в другое, то есть работа этих сил на любом замкнутом пути равна нулю. Примером консервативных сил служит сила тяжести, неконсервативных — сила трения.

Уменьшение потенциальной энергии  $E_{\text{пот}}$  тела при его перемещении из одного положения в пространстве в другое численно равно работе, которую совершают при этом действующие на него консервативные силы:

$$E_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = A. \quad (2.2.16)$$

Сила, действующая на частицу в каждой точке поля, связана с потенциальной энергией частицы в этой точке поля следующим образом:

$$\vec{F} = -\text{grad } E_{\text{пот}}. \quad (2.2.17)$$

Формула (2.2.17) позволяет вычислить потенциальную энергию системы в различных случаях. Например, потенциальная энергия в поле силы тяжести составляет

$$E_{\text{пот}} = mgh,$$

а потенциальная энергия упругой деформации —

$$E_{\text{пот}} = \frac{kx^2}{2}, \quad (2.2.18)$$

где  $m$  — масса тела;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h$  — высота тела относительно начала отсчета;  $k$  — коэффициент упругости;  $x$  — смещение тела от положения равновесия, где  $E_{\text{пот}} = 0$ .

Из формулы (2.2.17) видно, что к величине  $E_{\text{пот}}$  может быть добавлена произвольная постоянная, и это не изменит значение силы  $\vec{F}$ . Поэтому потенциальная энергия не может быть определена однозначно. Неопределенность потенциальной энергии устраняют, задав такое положение системы, в котором ее потенциальная энергия условно равна нулю.

Приравняв формулы (2.2.15) и (2.2.16), получаем

$$\frac{mv^2(t_2)}{2} - \frac{mv^2(t_1)}{2} = E_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - E_{\text{пот}}(\vec{r}_2), \quad (2.2.19)$$

или

$$\frac{mv^2(t_1)}{2} + E_{\text{пот}}(\vec{r}_1) = \frac{mv^2(t_2)}{2} + E_{\text{пот}}(\vec{r}_2). \quad (2.2.20)$$

Данные формулы выражают закон сохранения механической энергии: сумма кинетической и потенциальной энергий тела сохраняется:

$$E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \text{const}. \quad (2.2.21)$$

Необходимо отметить, что закон сохранения механической энергии выполняется только при отсутствии сил трения в системе. Наличие сил трения вызывает диссипацию энергии — уменьшение механической энергии и превращение ее во внутреннюю энергию, то есть в тепло.

Если для материальной точки существует связь, не позволяющая ей удалиться на расстояние, большее, чем  $\vec{R}$ , от центра вращения, то она движется по окружности.

*Центростремительной* силой называется сила  $\vec{F}_n$ , создающая центростремительное ускорение (2.1.20)  $a_n = \frac{v^2}{R}$ , необходимое для того, чтобы материальная точка массой  $m$  двигалась по окружности радиусом  $R$  со скоростью  $v$ .

По второму закону Ньютона,

$$F_n = ma_n = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R. \quad (2.2.22)$$

Равная центростремительной силе и противоположно ей направленная сила, с которой материальная точка, согласно третьему закону Ньютона, действует на связь, называется *центробежной* силой.

При центрифугировании сила, действующая на некоторый малый объем  $V$  жидкости со стороны окружающей жидкости, равна

$$dF_l = \rho_l \omega^2 R dV, \quad (2.2.23)$$

где  $\rho_l$  — плотность жидкости;  $\omega$  — угловая скорость вращения;  $R$  — расстояние от частицы до оси вращения.

Сила, действующая на частицу, занимающую данный объем  $dV$ ,

$$dF_2 = \rho_2 \omega^2 R dV, \quad (2.2.24)$$

где  $\rho_2$  — плотность вещества частицы.

При  $F_1 > F_2$  частицы перемещаются к оси вращения, а при  $F_1 < F_2$  — от оси вращения.

Эффективность центрифугирования определяется разностью сил  $dF_1$  и  $dF_2$ :

$$dF_{ц} = dF_2 - dF_1 = (\rho_2 - \rho_1) \omega^2 R dV, \quad (2.2.25)$$

то есть эффект тем больше, чем в большей степени отличаются плотности сепарируемых частиц и окружающей жидкости и чем больше угловая скорость вращения центрифуги.

Вращение тела происходит под действием силы  $\vec{F}$ , приложенной к точке тела, находящейся на расстоянии  $\vec{r}$  от оси вращения. При этом возникает **момент силы**, или **вращающий момент**  $\vec{M}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}] \quad (2.2.26)$$

или в скалярной форме:

$$M = rF \sin \alpha, \quad (2.2.27)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$ . Если  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  взаимно перпендикулярны, то  $\sin \alpha = 1$  и  $M = rF$ .

При действии нескольких вращающих моментов  $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \dots, \vec{M}_n$  их можно заменить одним моментом, равным векторной сумме данных моментов:

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i. \quad (2.2.28)$$

**Моментом импульса** материальной точки называется вектор  $\vec{L}$ :

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}], \quad (2.2.29)$$

где  $\vec{P}$  — импульс материальной точки;  $\vec{r}$  — расстояние от точки до оси вращения.

Так как  $\vec{P} = m\vec{v}$  и  $\vec{v} = [\vec{\omega} \times \vec{r}]$ , то

$$\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{P}] = m[\vec{r} \times \vec{v}] = mr^2 \vec{\omega} = I \vec{\omega}. \quad (2.2.30)$$

Из формулы (2.2.30) видно, что направление вектора момента импульса совпадает с направлением вектора угловой скорости.

Величина  $I = mr^2$  называется **моментом инерции** материальной точки относительно оси вращения. Момент инерции служит мерой инертности тела при вращении вокруг некоторой оси, так же как масса служит мерой инертности при поступательном движении [сравните формулы (2.2.5) и (2.2.30)].



Если рассматривать твердое тело, вращающееся вокруг оси, как совокупность материальных точек  $m_i$ , каждая из которых находится на расстоянии  $r_i$  от оси вращения, то момент инерции этого тела относительно оси вращения можно представить как

$$I = \sum_i m_i r_i^2, \quad (2.2.31)$$

или

$$I = \int_V r^2 dm. \quad (2.2.32)$$

где  $V$  — объем тела.

Единица измерения момента инерции:  $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$ .

Моменты инерции однородных тел правильной формы относительно оси, проходящей через центр масс:

шара радиусом  $R$  —

$$I = \frac{2}{5} m R^2; \quad (2.2.33)$$

цилиндра с внутренним  $r$  и внешним  $R$  (ось вращения совпадает с геометрической осью цилиндра) радиусами —

$$I = \frac{1}{2} m (r^2 + R^2); \quad (2.2.34)$$

тонкостенного цилиндра ( $R \approx r$ ) —

$$I = m r^2; \quad (2.2.35)$$

сплошного цилиндра ( $r = 0$ ) —

$$I = \frac{1}{2} m R^2; \quad (2.2.36)$$

тонкого стержня длиной  $l$  (ось вращения проходит перпендикулярно стержню через его середину) —

$$I = \frac{1}{12} m l^2. \quad (2.2.37)$$

Согласно теореме Гюйгенса—Штейнера, момент инерции  $I$  относительно произвольной оси определяется формулой:

$$I = I_0 + m d^2, \quad (2.2.38)$$

где  $I_0$  — момент инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела и параллельной заданной;  $m$  — масса тела;  $d$  — расстояние между осями. Эта теорема сводит вычисление момента инерции относительно произвольной оси к вычислению момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс тела.

Основное уравнение динамики вращательного движения, или второй закон Ньютона для вращательного движения:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (2.2.39)$$

или

$$\vec{M} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\varepsilon}, \quad (2.2.40)$$

где  $I$  — момент инерции;  $\vec{\varepsilon}$  — угловое ускорение;  $\vec{M}$  — момент силы.

Из основного уравнения динамики вращательного движения следует первый закон Ньютона для вращательного движения: если равнодействующая всех моментов сил, приложенных к телу  $\vec{M} = \sum \vec{M}_i = 0$ , то  $\vec{\omega} = \text{const}$  или  $\vec{\omega} = 0$  и закон сохранения момента импульса: момент импульса замкнутой системы материальных точек остается постоянным:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{ или } \vec{L} = \text{const}. \quad (2.2.41)$$

Третий закон Ньютона для вращательного движения:

$$\vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21}. \quad (2.2.42)$$

При вращении тела внутренние силы работы не совершают. Элементарная работа внешних сил при повороте на малый угол  $d\varphi$  равна

$$A = M_z d\varphi, \quad (2.2.43)$$

где  $M_z$  — проекция момента сил на ось вращения.

Тогда работа внешних сил при повороте тела на угол  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$  равна

$$A = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_z d\varphi = M_z \Delta\varphi. \quad (2.2.44)$$

Мощность  $N$  в случае вращательного движения

$$N = \frac{dA}{dt} = M_z \frac{d\varphi}{dt} = M_z \omega. \quad (2.2.45)$$

Кинетическая энергия тела при вращательном движении

$$E_{\text{кин}} = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.2.46)$$

Кинетическая энергия тел, совершающих одновременно поступательное и вращательное движения, равна арифметической сумме энергий обоих типов движений:

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}. \quad (2.2.47)$$

Характеристики и уравнения динамики поступательного и вращательного движений сопоставлены в табл. 2.2.1.

Таблица 2.2.1

**Характеристики и уравнения динамики поступательного  
и вращательного движений**

Поступательное движение	Вращательное движение
Масса $m$	Момент инерции $I$
Сила $\vec{F}$	Момент силы $\vec{M}$
Импульс $\vec{P}$	Момент импульса $\vec{L}$
Первый закон Ньютона	
$\vec{v} = \text{const}$ или $\vec{v} = 0$ при $\sum \vec{F}_i = 0$	$\vec{\omega} = \text{const}$ или $\vec{\omega} = 0$ при $\sum \vec{M}_i = 0$
Второй закон Ньютона	
$\sum \vec{F}_i = m\vec{a}$	$\sum \vec{M}_i = I\vec{\varepsilon}$
Третий закон Ньютона	
$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$	$\vec{M}_{12} = -\vec{M}_{21}$
Закон сохранения импульса	Закон сохранения момента импульса
$\vec{P} = \text{const}$	$\vec{L} = \text{const}$
Работа	
$A = F\Delta\vec{r}$	$A = \vec{M}\Delta\varphi$
Кинетическая энергия	
$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$	$E_{\text{кин}} = \frac{I\omega^2}{2}$
Закон сохранения энергии	
$\frac{mv^2}{2} + E_{\text{пот}} = \text{const}$	$\frac{I\omega^2}{2} + E_{\text{пот}} = \text{const}$
Мощность	
$N = \frac{A}{t} = \vec{F}\vec{v}$	$N = \frac{A}{t} = \vec{M}\vec{\omega}$

## § 2.3. МЕХАНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

**Механическими колебаниями**, или колебательным движением, называются движения тел, характеризующиеся той или иной степенью повторяемости через определенные промежутки времени.

Для характеристики колебаний вводятся следующие величины:

1) **отклонение**, или **смещение**  $x$ , от положения равновесия:

$$x = f(t), \quad x = f(t + T), \quad (2.3.1)$$

где  $f(t)$  — периодическая функция времени;

2) **амплитуда**  $A$  колебания — максимальное отклонение от положения равновесия;

3) **период**  $T$  — длительность одного полного колебания;

4) **частота**  $\nu$  — число колебаний в единицу времени,

$$\nu = \frac{1}{T}; \quad (2.3.2)$$

5) **круговая**, или **циклическая**, **частота**:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}; \quad (2.3.3)$$

5) **фаза** колебания:

$$\varphi = \omega t + \varphi_0. \quad (2.3.4)$$

где  $\varphi_0$  — начальная фаза при  $t = 0$ .

Фаза определяется с точностью до произвольного слагаемого, кратного  $2\pi$ . Поэтому обычно рассматриваются значения  $\varphi_0$ , лежащие в пределах от  $-\pi$  до  $+\pi$ .

Единицы измерения этих величин: частота  $[\nu] = \text{Гц} = \text{с}^{-1}$ ; период  $[T] = \text{с}$ ; циклическая частота  $[\omega] = \text{рад/с}$ ; амплитуда и смещение  $[A] = [x] = \text{м}$ .

Ниже будут рассмотрены так называемые *гармонические колебания*, то есть колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется по закону синуса или косинуса.

**Незатухающие гармонические колебания.** Гармонические колебания совершаются под действием упругих или квазиупругих<sup>1</sup> сил, описываемых законом Гука:

$$F = -kx, \quad (2.3.5)$$

---

<sup>1</sup> *Квазиупругими* называются силы, неупругие по природе, но аналогичные по свойствам упругим, возникающие при малых деформациях упругих тел. В качестве примера квазиупругих сил можно привести силы, под действием которых колеблется математический маятник.

где  $F$  — возвращающая сила;  $x$  — смещение от положения равновесия (где  $x = 0$ );  $k$  — коэффициент квазиупругой силы, или жесткость. Знак «—» указывает на то, что возвращающая сила стремится вернуть тело в исходное положение, то есть направлена против смещения.

Согласно второму закону Ньютона, уравнение (2.3.5) может быть пробразовано у виду

$$ma = -kx, \quad (2.3.6)$$

где  $m$  — масса колеблющегося тела.

Учитывая, что  $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$ , и введя обозначение  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0. \quad (2.3.7)$$

Уравнение (2.3.7) является дифференциальным уравнением незатухающих гармонических колебаний. Его решение имеет вид

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.3.8)$$

или

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi_0).$$

Для любых незатухающих гармонических колебаний справедливы формулы:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad v = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}; \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (2.3.9)$$

Периоды колебаний для простейших колебательных систем: *математического маятника* — материальной точки, подвешенной на нити,

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (2.3.10)$$

где  $l$  — длина маятника;  $g$  — ускорение свободного падения; *пружинного маятника* — материальной точки, подвешенной на пружине,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, \quad (2.3.11)$$

где  $k$  — жесткость пружины;

*физического маятника* — твердого тела, совершающего под действием силы тяжести колебания вокруг горизонтальной оси подвеса,

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgl}},$$

где  $I$  — момент инерции физического маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса;  $l$  — расстояние между точкой подвеса и центром тяжести маятника.

Скорость и ускорение материальной точки при гармоническом колебании равны соответственно:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi_0) = \\ &= A\omega \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right) = v_{\max} \cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right); \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned} a(t) &= \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) = \\ &= A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = a_{\max} \cos(\omega t + \varphi_0 + \pi), \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

где  $v_{\max} = A\omega$  — максимальная скорость (амплитуда скорости);  $a_{\max} = A\omega^2$  — максимальное ускорение (амплитуда ускорения).

Таким образом, скорость и ускорение, так же как и смещение, изменяются по гармоническому закону. Сравнив выражения (2.3.8), (2.3.12) и (2.3.13) замечаем, что скорость опережает смещение по фазе на  $\pi/2$ , а ускорение — на  $\pi$ , то есть смещение и ускорение находятся в противофазе (рис. 2.3.1).

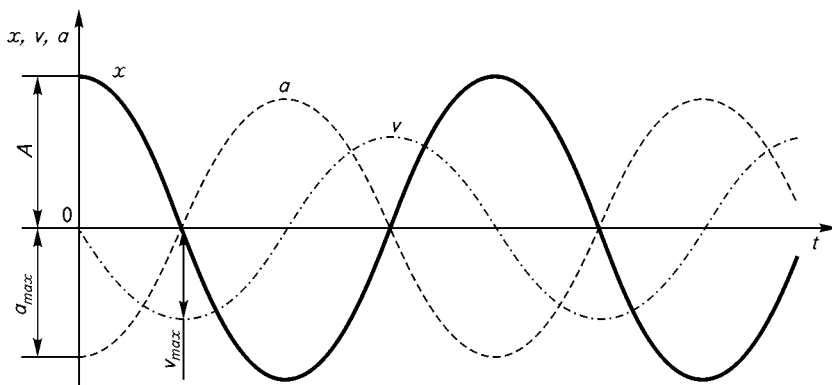


Рис. 2.3.1. Графические зависимости смещения  $x$ , скорости  $v$  и ускорения  $a$

Кинетическая и потенциальная энергии гармонических колебаний равны:

$$E_{\text{кин}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi_0), \quad (2.3.14)$$

$$E_{\text{пот}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi_0). \quad (2.3.15)$$

Учитывая, что  $\omega^2 = \frac{k}{m}$ , полная энергия гармонических колебаний равна:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2 = \frac{1}{2}kA^2. \quad (2.3.16)$$

Таким образом, полная энергия гармонических колебаний сохраняется:  $E = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \text{const}$ , в то время как кинетическая и потенциальная изменяются по гармоническому закону, взаимно превращаясь друг в друга (рис. 2.3.2).

#### Затухающие колебания.

В реальных физических системах, участвующих в колебательном движении, всегда присутствуют силы сопротивления, действие которых уменьшает энергию системы.

Уменьшение энергии проявляется в затухании колебаний.

При не очень больших скоростях и амплитудах колебаний сила сопротивления пропорциональна скорости движения тела:

$$F_c = -r \frac{dx}{dt} = -rv, \quad (2.3.17)$$

где  $r$  — коэффициент сопротивления или вязкого трения. Так как возвращающая сила пропорциональна смещению, то из второго закона Ньютона

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} \quad (2.3.18)$$

следует дифференциальное уравнение затухающих колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (2.3.19)$$

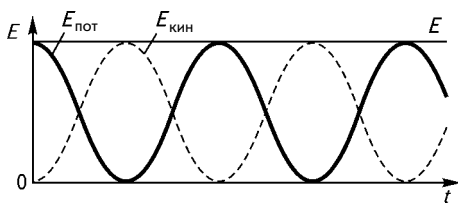


Рис. 2.3.2. Зависимости кинетической  $E_{\text{кин}}$ , потенциальной  $E_{\text{пот}}$  и полной энергии  $E$  системы от времени  $t$

где  $\beta = \frac{r}{2m}$  — коэффициент затухания, характеризующий степень затухания колебаний;  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  — собственная круговая частота колебательной системы, то есть частота, с которой совершались бы свободные колебания системы в отсутствие сопротивления среды (при  $r = 0$ ).

Решение этого уравнения при слабом затухании  $\beta < \omega_0$  следующее:

$$x = A e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.3.20)$$

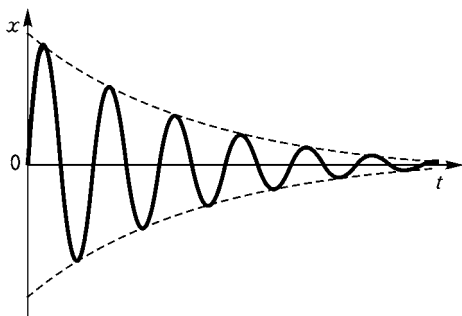


Рис. 2.3.3. Затухающие колебания ( $\beta < \omega_0$ )

где  $A_0$  — амплитуда колебаний в начальный момент времени ( $t = 0$ );  $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  — круговая частота затухающих колебаний. График функции (2.3.20) приведен на рис. 2.3.3.

Движение системы можно рассматривать как гармоническое колебание с частотой  $\omega$  и амплитудой  $A$ , изменяющейся во времени по закону:

$$A = A(t) = A_0 e^{-\beta t}. \quad (2.3.21)$$

Период затухающего колебания

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.3.22)$$

Затухающие колебания принято характеризовать декрементом затухания

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T} \quad (2.3.23)$$

или *логарифмическим декрементом затухания*

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T. \quad (2.3.24)$$



Логарифмический декремент затухания  $\lambda$  так же как и коэффициент затухания  $\beta$ , характеризует скорость убывания амплитуды колебаний.

Если затухание в системе значительно ( $\beta > \omega_0$ ), то в этом случае движение является неперiodическим (аперiodическим). Система возвращается в положение равновесия, не совершая колебаний. Возможны два варианта такого возвращения. Если выведенной из положения равновесия системе сообщают достаточно сильный толчок (в сторону равновесия) так, что возвращение к исходному состоянию происходит с начальной скоростью, определяемой условием

$$|v_0| > |x_0|(\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}), \quad (2.3.25)$$

где  $x_0$  — смещение от положения равновесия, то процесс описывается кривой 1 (рис. 2.3.4). Если же возвращение к положению равновесия происходит самопроизвольно — без толчка или сопровождается толчком недостаточной силы для выполнения условия (2.3.25), — то движение описывается кривой 2 (рис. 2.3.4).

**Вынужденные колебания.** Для получения незатухающих колебаний необходимо воздействие внешней силы, работа которой восполняла бы вызванное силами сопротивления уменьшение энергии колеблющейся системы. Такие колебания называются вынужденными.

Если колебательная система подвергается действию внешней силы с амплитудой  $F_0$ , изменяющейся по гармоническому закону с частотой  $\omega$ ,

$$F_{\text{в}} = F_0 \cos \omega t, \quad (2.3.26)$$

то из второго закона Ньютона

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = F + F_c + F_{\text{в}} \quad (2.3.27)$$

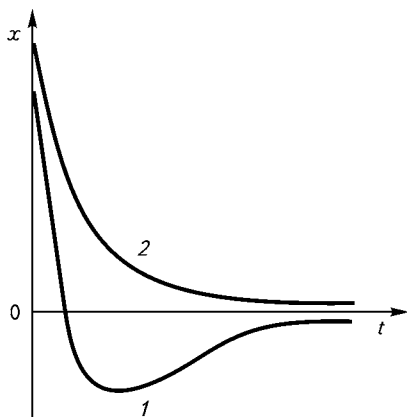


Рис. 2.3.4. Два возможных способа возвращения системы к положению равновесия при аперидическом движении ( $\beta > \omega_0$ )

следует дифференциальное уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (2.3.28)$$

где  $2\beta = \frac{r}{m}$ ;  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ ;  $f_0 = \frac{F_0}{m}$ .

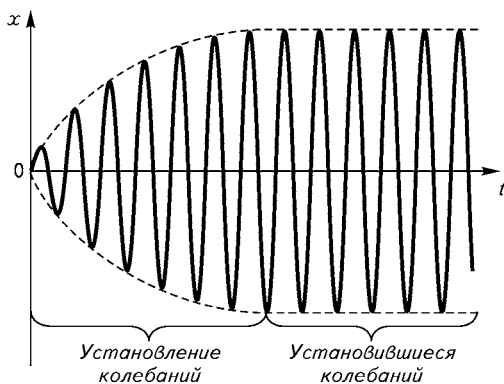


Рис. 2.3.5. Вынужденные колебания

Решение уравнения (2.3.28) состоит из двух слагаемых. Одно из них соответствует процессу установления колебаний (рис. 2.3.5), со временем им можно пренебречь; второе — установившимся колебаниям.

Решение уравнения (2.3.28), отвечающее установившимся колебаниям, имеет вид:

$$x = A \cos(\omega t - \alpha), \quad (2.3.29)$$

где

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}; \quad (2.3.30)$$

$$\alpha = \arctg \frac{2\omega\beta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (2.3.31)$$

Частота вынужденных колебаний равна частоте  $\omega$  вынуждающей силы  $F_{\text{в}}$ . Вынужденные колебания сдвинуты по фазе относительно вынуждающей силы.

Из формулы (2.3.30) видно, что амплитуда вынужденных колебаний прямо пропорциональна амплитуде вынуждающей силы  $F_0$

$\left(f_0 = \frac{F_0}{m}\right)$  и сложным образом зависит от коэффициента затухания

$\beta$ , собственной круговой частоты  $\omega_0$  и внешней  $\omega$ . При некотором значении  $\omega$  амплитуда достигнет своего максимального значения. Явление достижения максимальной амплитуды называется *резонансом*, а соответствующая частота  $\omega_{\text{рез}}$  — резонансной.

Амплитуда достигает максимального значения, когда знаменатель выражения (2.3.30) достигает минимального. Продифференцировав его по  $\omega$ , приравняв нулю и решив полученное уравнение относительно  $\omega$ , получаем значение резонансной частоты:

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (2.3.32)$$

Подставив (2.3.32) в (2.3.30), получаем значение амплитуды при резонансе:

$$A_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (2.3.33)$$

Из формулы (2.3.32) видно, что чем меньше коэффициент затухания  $\beta$ , тем ближе резонансная частота  $\omega_{\text{рез}}$  к собственной  $\omega_0$ . В пределе при  $\beta \rightarrow 0$   $\omega_{\text{рез}} \rightarrow \omega_0$  и  $A_{\text{рез}} \rightarrow \infty$ . При очень большом затухании ( $2\beta^2 > \omega_0^2$ ) выражение (2.3.32) становится мнимым и резонанс не наблюдается. При этом с увеличением внешней частоты амплитуда вынужденных колебаний монотонно уменьшается (см. нижнюю кривую на рис. 2.3.6). Графические зависимости амплитуды вынужденных колебаний  $A$  от внешней частоты  $\omega$ , соответствующие различным значениям коэффициента затухания  $\beta$ , приведены на рис. 2.3.6. Такие кривые называются **резонансными**.

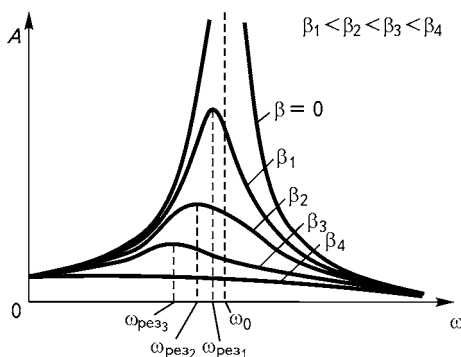


Рис. 2.3.6. Резонансные кривые

В живых организмах наблюдается множество колебательных процессов (биение сердца, пульсация кровеносных сосудов, а также случайные механические сотрясения). Для биологических объектов резонанс мог бы быть крайне опасен и вызывать сильные разрушения, однако коэффициент затухания внутренних органов достаточно велик, чтобы это не происходило. Тем не менее явление резонанса в живых организмах наблюдается и иногда приводит к вредным воздействиям. Например, резонанс, по-видимому, является одной из причин вредного воздействия инфразвука<sup>1</sup> и вибраций на организм.

<sup>1</sup> Частота собственных колебаний тела человека в положении лежа составляет 3...4 Гц, в положении стоя — 5...12 Гц; частота собственных колебаний грудной клетки — 5...8 Гц, брюшной полости — 3...4 Гц, что соответствует инфразвуковому диапазону.

## § 2.4. УПРУГИЕ ВОЛНЫ. ЗВУК

Колеблющееся тело расходует часть энергии, вовлекая в колебательное движение окружающую упругую среду. Процесс распространения колебаний в пространстве, сопровождающийся переносом энергии, называется *волной*. Волны, распространяющиеся в упругой среде (твердой, жидкой, газообразной), называются *упругими*. При этом частицы той среды, в которой распространяется волна, не вовлекаются в поступательное движение, а лишь колеблются около своего положения равновесия. Поэтому распространение волны не сопровождается переносом вещества.

Волновой процесс характеризуется *фазовой скоростью* (скоростью распространения волны)  $v$ , длиной волны  $\lambda$ , частотой  $\nu$  или периодом колебаний  $T$ . *Длиной волны* называется расстояние, на которое распространяется волна за время, равное периоду колебаний частиц среды. Очевидно, что

$$\lambda = vT = \frac{v}{\nu},$$

тогда фазовая скорость волны:

$$v = \lambda \nu = \frac{\lambda}{T}. \quad (2.4.1)$$

Волны могут быть двух типов: поперечные и продольные. При возбуждении *поперечных* волн колебания частиц перпендикулярны направлению распространения волны, а при возбуждении *продольных* волн совпадают с направлением распространения волны.

Геометрическое место всех частиц, колеблющихся с одинаковой фазой, называется *волновым фронтом*. Если волновой фронт представляет собой плоскость, цилиндр или сферу, волну называют плоской, цилиндрической или сферической соответственно.

Выведем уравнение плоской волны. Для этого направим ось  $x$  вдоль направления распространения волны. Все точки, лежащие в каждой плоскости, перпендикулярной оси  $x$ , колеблются одинаково. Выделим на оси  $x$  точку с координатой  $x = 0$  (источник волны). Пусть все частицы, находящиеся в плоскости, перпендикулярной оси  $x$  и проходящей через точку  $x = 0$ , совершают колебания по закону

$$S(t) = A \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (2.4.2)$$

Возбуждение достигнет плоскости с произвольной координатой  $x$  через время  $\tau = x/v$ , где  $v$  — скорость распространения волны. Колебания точек с координатой  $x$  запаздывают и совершаются по закону

$$\begin{aligned}
 S(x, t) &= A \cos[\omega(t - \tau) + \varphi_0] = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi_0\right] = \\
 &= A \cos\left[\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi_0\right].
 \end{aligned}
 \quad (2.4.3)$$

Таким образом, уравнение плоской монохроматической волны имеет вид:

$$S(x, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi_0\right), \quad (2.4.4)$$

или

$$S(x, t) = A \sin\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \varphi_0\right), \quad (2.4.5)$$

где  $S$  — смещение частиц с координатой  $x$  от положения равновесия в момент времени  $t$ ;  $x$  — расстояние до источника колебания;  $A$  — амплитуда (полагаем, что волна распространяется без затухания, поэтому  $A = \text{const}$ ).

Иногда уравнение плоской волны записывается в виде:

$$S(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi_0), \quad (2.4.6)$$

где  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$  — волновое число.

Как видим, уравнение плоской волны включает две переменные — координату  $x$  и время  $t$ :  $S = f(x, t)$ . На рис. 2.4.1. приведены зависимости  $S = f(x)$  и  $S = f(t)$ .

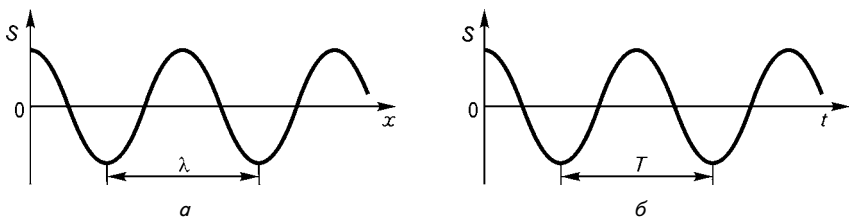


Рис. 2.4.1. Графическое изображение плоской волны:

$a$  — зависимость смещения от положения равновесия точек с различными координатами  $x$  в некоторый момент времени;  $b$  — зависимость смещения от положения равновесия точек с некоторой фиксированной координатой  $x$  в различные моменты времени ( $\lambda$  — длина волны;  $T$  — период)

Уравнения (2.4.4) и (2.4.5) справедливы как для поперечных, так и продольных волн и являются частным решением дифференциального волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (2.4.7)$$

Если в среде распространяется несколько волн, то происходит их сложение. *Интерференцией* называется явление сложения когерентных волн, в результате которого наблюдается усиление их амплитуды в одних точках пространства и ослабление в других. Под *когерентными* понимаются волны, которые характеризуются одинаковой частотой  $\omega$  и не зависящей от времени разностью фаз  $\Delta\varphi$ ,

$$\Delta\varphi = \frac{\omega}{v} \Delta x = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta x, \quad (2.4.8)$$

$\Delta x$  называется *разностью хода волн*.

Условие максимального усиления волн —

$$\Delta x = 2n \frac{\lambda}{2}; \quad \Delta\varphi = 2\pi n, \quad (2.4.9)$$

а их максимального ослабления —

$$\Delta x = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}; \quad \Delta\varphi = (2n + 1)\pi, \quad (2.4.10)$$

где  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Подробнее явление интерференции будет рассмотрено в параграфе 13.2.

Распространение волны сопровождается переносом энергии, включающей в себя кинетическую энергию колеблющихся частиц и потенциальную энергию упругой деформации. Из выражения (2.3.16) следует, что средняя по времени *объемная плотность энергии* (энергия единицы объема), переносимой волной, равна

$$w = \frac{dE}{dV} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \frac{dm}{dV} = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 \rho, \quad (2.4.11)$$

где  $dE$  — энергия, заключенная в объеме  $dV$ ;  $A$  — амплитуда колебания частиц;  $\omega$  — их циклическая частота;  $\rho = dm/dV$  — плотность среды, в которой распространяется волна.

*Потоком энергии* волны называется количество энергии, переносимой через некоторую поверхность за единицу времени:

$$\Phi = \frac{dE}{dt} = wSv, \quad (2.4.12)$$

где  $v$  — скорость волны.

Поток энергии, приходящийся на единицу площади поверхности, перпендикулярной распространению волны, называется *интенсивностью*:

$$I = \frac{d\Phi}{dt} = wv = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 v. \quad (2.4.13)$$

Единица измерения объемной плотности энергии — джоуль на метр в кубе:  $[w] = \text{Дж/м}^3$ ; потока энергии — ватт:  $[\Phi] = \text{Вт}$ ; интенсивности — ватт на метр в квадрате:  $[I] = \text{Вт/м}^2$ .

Выражение (2.4.14) может быть записано в векторной форме:

$$\vec{I} = w\vec{v}. \quad (2.4.14)$$

Вектор  $\vec{I}$  называют *вектором Умова*. Вектор Умова показывает направление распространения волны и равен количеству энергии, переносимой за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению распространения волны.

Продольные упругие волны с частотами от 16 до 20 000 Гц, воспринимаемые органами слуха человека, называются **звуковыми волнами**. Колебания с частотой  $\nu > 20\,000$  Гц называются **ультразвуком**, а с  $\nu < 16$  Гц — **инфразвуком**. Скорость звука в воздухе при  $t = 0^\circ\text{С}$  равна  $v_0 = 331,6$  м/с. Энергетической характеристикой звука, как и любой волны, является интенсивность. На частоте 1000 Гц человек способен воспринимать звуки в диапазоне интенсивности от  $I_0 = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> до  $I_{\text{max}} = 10$  Вт/м<sup>2</sup>, где  $I_0$  — *порог слышимости* (наименьшая интенсивность звука, при которой звук еще воспринимается органами слуха);  $I_{\text{max}}$  — *порог болевого ощущения* (наибольшая интенсивность звука, при которой восприятие звука органами слуха еще не вызывает болевого ощущения). Порог слышимости и порог болевого ощущения зависят от частоты воспринимаемого звука (рис. 2.4.2) и могут отличаться у разных людей. Как правило, с возрастом порог слышимости увеличивается, а порог болевого ощущения — уменьшается.

Так как диапазон интенсивностей звуков, воспринимаемых человеком, очень велик, то для сравнения интенсивностей звука удобно использовать логарифмические единицы и логарифмическую шкалу:

$$L_B = \lg \frac{I}{I_0}, \quad (2.4.15)$$

где  $I_0 = 10^{-12}$  Вт/м<sup>2</sup> — стандартный порог слышимости на частоте  $\nu = 1$  кГц;  $L_B$  — уровень интенсивности звука. Несмотря на то что  $L_B$  — безразмерная величина, для ее числового значения принята единица бел (Б).

Как правило, уровень интенсивности звука измеряется не в белах, а в децибелах<sup>1</sup> (1 дБ = 0,1 Б). Уровень интенсивности звука в децибелах выражается как

<sup>1</sup> Уровень интенсивности звука принято измерять в децибелах, так как в промежуточном диапазоне частот и интенсивностей звуков минимальное заметное различие в уровне интенсивности звука, воспринимаемое ухом человека, соответствует примерно 1 дБ.

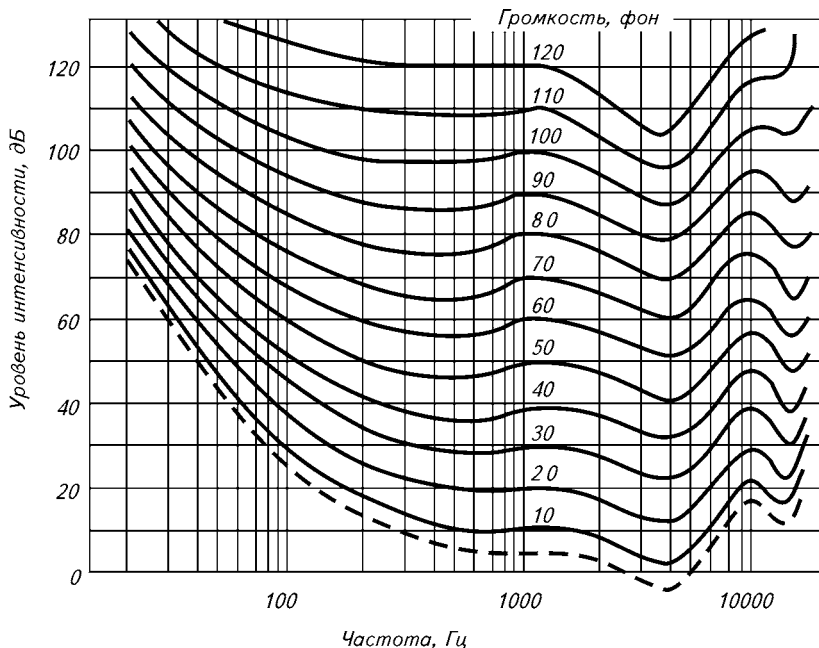


Рис. 2.4.2. Кривые равной громкости — зависимость уровня интенсивности от частоты при заданной громкости. Нижняя кривая соответствует порогу слышимости; верхняя — порогу болевого ощущения

$$L_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (2.4.16)$$

По мере распространения в среде звуковая волна вызывает ее сгущение и разрежение, которые создают добавочные изменения давления по отношению к его среднему значению в среде. Поэтому звук иногда оценивают в единицах звукового давления, которое связано с интенсивностью звука следующим образом:

$$I = \frac{p^2}{2\rho v}, \quad (2.4.17)$$

где  $p$  — средняя амплитуда звукового давления;  $\rho$  — плотность среды, в которой распространяется звук;  $v$  — скорость звука.

На частоте 1000 Гц порогу слышимости соответствует давление  $p_0 = 2 \cdot 10^{-5}$  Па, порогу болевого ощущения —  $p_{\text{max}} = 60$  Па.

Так же как и интенсивность звука, звуковое давление удобно выражать в логарифмических единицах:



$$L_{\text{дБ}} = 10 \lg \frac{p^2}{p_0^2} = 20 \lg \frac{p}{p_0}. \quad (2.4.18)$$

*Громкостью* звука называется величина, характеризующая звуковое ощущение для данного звука. Громкость сложным образом зависит от интенсивности звука (а следовательно, и звукового давления) и частоты.

Согласно закону Вебера — Фехнера, увеличение раздражения в геометрической прогрессии вызывает увеличение его ощущения в арифметической прогрессии. Поэтому громкость измеряется в логарифмических единицах (фонах):

$$E = k \lg \frac{I}{I_0}, \quad (2.4.19)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности, зависящий от частоты и интенсивности звука. Условно принимают, что на частоте 1000 Гц  $k = 1$ , поэтому на указанной частоте уровень громкости совпадает с уровнем интенсивности (рис. 2.4.2).

Громкость — субъективная величина, но, тем не менее, громкость звука данной частоты может быть оценена путем сравнения с громкостью чистого тона частотой 1000 Гц. На основании средних данных, полученных у людей с нормальным слухом, были построены кривые равной громкости (рис. 2.4.2), позволяющие определить связь между громкостью и интенсивностью звука на разных частотах.

Изменение частоты звуковых колебаний, связанное с относительным движением источника и наблюдателя, называется *акустическим эффектом Доплера*. Когда источник и приемник звука сближаются, частота звука повышается (так как при этом наблюдатель встречает за один и тот же интервал времени больше волн, чем при отсутствии движения), а если они удаляются, — понижается.

При одновременном движении наблюдателя и источника частота звука, воспринимаемая наблюдателем, определяется формулой

$$\nu = \nu_0 \frac{v_0 \pm v_{\text{н}}}{v_0 \mp v_{\text{н}}}, \quad (2.4.20)$$

где  $\nu_0$  — частота звука, посылаемого источником;  $v_{\text{н}}$  — скорость движения источника звука;  $v_{\text{н}}$  — скорость движения наблюдателя;  $v_0$  — скорость распространения звука в данной среде. В этой формуле верхние знаки соответствуют взаимному сближению источника и наблюдателя, а нижние — удалению.

Эффект Доплера позволяет измерять скорость движения объектов. В медицине он используется для определения скорости кровотока, скорости движения клапанов и стенок сердца.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 2.1.** Число оборотов ротора центрифуги достигает  $n = 2 \cdot 10^4$  об/мин. После отключения двигателя вращение прекращается через  $t_1 = 8$  мин. Определите угловое ускорение  $\varepsilon$ , зависимость угла поворота центрифуги от времени  $\varphi(t)$  и число оборотов  $N$ , сделанное ротором до полной остановки, считая движение равнозамедленным.

**Решение.** Угловая скорость при равнозамедленном движении описывается уравнением:

$$\omega(t) = \omega_0 - \varepsilon t,$$

где  $\varepsilon$  — угловое ускорение;  $\omega_0 = 2\pi n$  — начальная угловая скорость.

При  $t = t_1$  ротор останавливается и  $\omega(t_1) = 0$ , тогда

$$\varepsilon = \frac{\omega_0}{t_1} = \frac{2\pi n}{t_1}.$$

Переведа данные величины в систему единиц СИ ( $n = 333$  об/с;  $t_1 = 480$  с), получаем:

$$\varepsilon = \frac{2\pi \cdot 333}{480} = 4,36 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-2}.$$

Зависимость угла поворота ротора от времени при равнозамедленном движении

$$\varphi(t) = \omega_0 t - \frac{\varepsilon t^2}{2}.$$

За время  $t_1$ , прошедшее с момента выключения до полной остановки, ротор повернется на угол

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{\varepsilon t_1^2}{2},$$

или, учитывая выражение для углового ускорения,

$$\varphi_1 = \omega_0 t_1 - \frac{\omega_0}{t_1} \frac{t_1^2}{2} = \frac{\omega_0 t_1}{2} = \pi n t_1 -$$

Количество оборотов ротора за этот промежуток времени составит:

$$N = \frac{\varphi_1}{2\pi} = \frac{\pi n t_1}{2\pi} = \frac{n t_1}{2} = \frac{333 \cdot 480}{2} \approx 8 \cdot 10^4 \text{ об.}$$

**Задача 2.2.** В центрифуге производится сепарация ядер клеток печени, диаметр которых  $d = 8$  мкм, плотность  $\rho_1 = 1,3 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Радиус ротора центрифуги  $R = 0,05$  м, частота вращения  $\nu = 2$  кГц. Найдите силу  $F$ , действующую на эти частицы.

**Решение.** Сила, действующая на объем жидкости  $V$  при центрифугировании со стороны окружающей жидкости,

$$F_0 = m\omega^2 R = \rho_0 V \omega^2 R,$$

где  $\rho_0$  — плотность жидкости (вода);  $V = \frac{1}{6}\pi d^3$  — объем частицы;  $\omega = 2\pi\nu$  — угловая скорость;  $R$  — расстояние от частицы до оси вращения (радиус ротора центрифуги).

С другой стороны, центростремительная сила, необходимая для удержания частицы на расстоянии  $R$  от оси вращения, равна

$$F_1 = m_1 \omega^2 R = \rho_1 V \omega^2 R,$$

где  $\rho_1$  — плотность частицы.

Так как  $\rho_1 > \rho_0$ , то  $F_1 > F_0$ , тогда частица движется от оси вращения под действием силы

$$F = F_1 - F_0 = \frac{1}{6}\pi d^3 (\rho_1 - \rho_0) 2\pi^2 \nu^2 R.$$

Подставляя численные данные, в единицах СИ ( $d = 8 \cdot 10^{-6}$  м), имеем:

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{6}\pi (8 \cdot 10^{-6})^3 (1,3 \cdot 10^3 - 1 \cdot 10^3) (2\pi \cdot 2 \cdot 10^3)^2 0,05 \approx \\ &\approx 634 \cdot 10^{-9} \text{ Н} = 634 \text{ нН.} \end{aligned}$$

**Задача 2.3.** Определите разность фаз  $\Delta\varphi$  в пульсовой волне между двумя точками артерии, расположенными на расстоянии  $\Delta x = 20$  см друг от друга, считая скорость пульсовой волны равной  $v = 10$  м/с, колебания сердца — гармоническими с частотой  $\nu = 1,2$  Гц.

**Решение.** Фаза волны в точке, расположенной на расстоянии  $x$  в момент времени  $t$ :

$$\varphi_1 = \omega t - \frac{\omega}{v} x = 2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{v} x.$$

Для точки, расположенной на расстоянии  $(x + \Delta x)$  в тот же момент времени,

$$\varphi_2 = 2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{v}(x + \Delta x).$$

Тогда разность фаз составит:

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi\nu t - \frac{2\pi\nu}{v}x - 2\pi\nu t + \frac{2\pi\nu}{v}(x + \Delta x) = \frac{2\pi\nu}{v}\Delta x.$$

Подставляя численные данные в единицах СИ ( $\Delta x = 0,2$  м), имеем:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi \cdot 1,2}{10} 0,2 = 0,48\pi.$$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**2.1.** Колесо радиусом  $R = 0,1$  м вращается согласно закону  $\varphi = A + Bt + Ct^2$ , где  $B = 14$  рад/с;  $C = 2$  рад/с<sup>2</sup>. Определите линейную скорость  $v$  точек на ободе колеса в конце третьей секунды после начала вращения.

**2.2.** Колесо вращается с постоянным угловым ускорением. Найдите радиус колеса, если известно, что к концу десятого оборота после начала вращения его обод вращается со скоростью  $v = 2,24$  м/с, испытывая тангенциальное ускорение  $a_t = 0,1$  м/с<sup>2</sup>.

**2.3.** Точка движется по окружности радиусом  $R = 0,3$  м с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon = 1$  рад/с<sup>2</sup>. Найдите полное ускорение  $a$  точки к концу второй секунды после начала вращения.

**2.4.** Однородный диск радиусом  $R = 20$  см и массой  $m = 2$  кг вращается согласно закону  $\varphi = A + Bt + Ct^2$ , где  $C = 3$  рад/с<sup>2</sup>. Найдите касательную силу  $F$ , приложенную к его ободу.

**2.5.** Драже массой  $m = 0,2$  г катится со скоростью  $v = 0,5$  м/с. Найдите его кинетическую энергию  $E_{\text{кин}}$ .

**2.6.** Лизосомы осаждают в центрифуге. Найдите действующую на них силу  $F$ , если известно, что угловая скорость вращения ротора  $\omega = 2\pi \cdot 10^3$  рад/с, его радиус  $R = 0,1$  м, плотность вещества лизосом  $\rho = 1200$  кг/м<sup>3</sup>, радиус лизосомы  $r = 0,7$  мкм.

**2.7.** Напишите уравнение гармонического колебания с амплитудой  $A = 5$  см, периодом  $T = 1$  с и начальной фазой  $\varphi_0 = \pi/4$ .

**2.8.** Материальная точка массой  $m = 1$  г совершает гармонические колебания по закону  $x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{4}t + \frac{\pi}{3}\right)$  см. Найдите максимальную силу  $F_{\text{max}}$ , действующую на точку.

**2.9.** Используя условие задачи 2.8, найдите полную энергию  $E$  колеблющейся точки.

**2.10.** Логарифмический декремент затухания математического маятника  $\lambda = 0,093$ . За сколько времени амплитуда колебаний маятника уменьшается в 2 раза, если его длина  $l = 1$  м.

**2.11.** Точка, отстоящая от источника волны на расстоянии  $x = \frac{\lambda}{8}$ , совершает колебания с амплитудой  $A = 10$  см. Определите ее смещение  $S$  от положения равновесия в момент времени  $\frac{T}{4}$ . Начальная фаза равна нулю.

**2.12.** Уравнение незатухающих колебаний имеет вид:  $x = 5 \cos 2\pi t$ , где  $[x] = \text{см}$ . Определите ускорение  $a$  точки, находящейся на расстоянии  $x = 100$  м от источника волны, в момент времени  $t = 1$  с после начала ее распространения. Скорость волны  $v = 300$  м/с.

**2.13.** Две точки, расстояние между которыми  $\Delta x = 1$  м, лежат на прямой, вдоль которой распространяется волна со скоростью  $v = 200$  м/с. Период колебаний  $T = 0,04$  с. Найдите разность фаз  $\Delta\varphi$  колебаний этих двух точек.

**2.14.** Максимальная частота звука, воспринимаемого человеческим ухом,  $\nu = 20$  кГц. Найдите длину волны  $\lambda$ , соответствующую этой частоте, если скорость звука в воздухе равна  $v = 340$  м/с.

**2.15.** После прохождения звука через перегородку его интенсивность уменьшилась в 1000 раз. На сколько уменьшилась его громкость, если частота звука  $\nu = 1$  кГц?

## ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**2.1.** Скорость является:

- а) второй производной ускорения по времени;
- б) первой производной перемещения по времени;
- в) второй производной перемещения по времени;
- г) первой производной импульса по времени;
- д) первой производной импульса по координате.

**2.2.** Равнопеременное вращательное движение описывается следующей системой уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} \varepsilon = \text{const}, \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} \varepsilon = \text{const}, \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon t + \varepsilon t^2/2, \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} \varepsilon = 0, \\ \omega = \text{const}, \\ \varphi = \varphi_0 + \omega t; \end{cases} \quad \text{д) } \begin{cases} \varepsilon = 0, \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \\ \varphi = \varphi_0 + \varepsilon t^2/2. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} \varepsilon = \text{const}, \\ \omega = \omega_0 + \varepsilon t, \\ \varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \varepsilon t^2/2; \end{cases}$$

**2.3.** Линейная скорость  $v$  связана с угловой скоростью  $\omega$  следующим соотношением:

а)  $v = \omega^2 R$ ; б)  $\omega = vR$ ; в)  $\omega = \frac{2\pi}{v}$ ; г)  $\omega = 2\pi v$ ; д)  $v = \omega R$ .

**2.4.** Нормальное ускорение определяется соотношением:

а)  $a_n = \omega R$ ; б)  $a_n = \frac{v^2}{R}$ ; в)  $a_n = \frac{I\omega^2}{2}$ ; г)  $a_n = \varepsilon R$ ; д)  $a_n = \frac{\omega^2}{R}$ .

**2.5.** Тангенциальное ускорение направлено:

- а) по радиусу к центру;
- б) по радиусу от центра;
- в) перпендикулярно плоскости вращения (направление определяется по правилу правого винта);
- г) перпендикулярно плоскости вращения (направление определяется по правилу левой руки);
- д) по касательной вдоль скорости (при ускоренном движении) или против (при замедленном).

**2.6.** Момент импульса равен:

а)  $\vec{L} = \vec{r} \cdot \vec{P}$ ; б)  $\vec{L} = \frac{I\vec{\omega}}{2}$ ; в)  $\vec{L} = \vec{F} \cdot \vec{r}$ ; г)  $\vec{L} = I\vec{\varepsilon}$ ; д)  $\vec{L} = I\vec{v}$ .

**2.7.** Основное уравнение динамики вращательного движения имеет вид:

а)  $\vec{M} = \frac{I\vec{\omega}}{2}$ ; б)  $\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{P}$ ; в)  $\vec{M} = I\vec{\omega}$ ; г)  $\vec{M} = \vec{r} \cdot \vec{\varepsilon}$ ; д)  $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$ .

**2.8.** Момент инерции сплошного шара радиуса  $R$  равен:

а)  $I = \frac{1}{3}mR^2$ ; г)  $I = \frac{1}{12}mR^2$ ;  
 б)  $I = \frac{1}{2}mR^2$ ; д)  $I = \frac{2}{5}mR^2$ .  
 в)  $I = mR^2$ ;

**2.9.** Кинетическая энергия вращающегося тела равна:

а)  $E_{\text{кин}} = Iv$ ; г)  $E_{\text{кин}} = \frac{I\omega^2}{2}$ ;  
 б)  $E_{\text{кин}} = I\varepsilon$ ; д)  $E_{\text{кин}} = \frac{I\varepsilon^2}{2}$ .  
 в)  $E_{\text{кин}} = \frac{Iv^2}{2}$ ;

**2.10.** Мощность в случае вращательного движения определяется по формуле:

а)  $N = I\varepsilon$ ; б)  $N = \frac{I\omega^2}{2}$ ; в)  $N = Fv$ ; г)  $N = M\omega$ ; д)  $N = \frac{Iv^2}{2}$ .

**2.11. Скорость колеблющейся точки:**

- а) опережает смещение на  $\pi/2$ ;
- б) находится в противофазе смещению;
- в) отстает от смещения на  $\pi/2$ ;
- г) совпадает по фазе со смещением;
- д) изменяется не по гармоническому закону.

**2.12. Уравнение затухающих колебаний имеет вид:**

- а)  $x = Ae^{-\omega t} \cos(\beta^2 t + \varphi_0)$ ;
- б)  $x = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ;
- в)  $x = Ae^{-\beta t} \cos(\beta^2 t + \varphi_0)$ ;
- г)  $x = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0)$ ;
- д)  $x = A^2 \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ .

**2.13. Дифференциальное уравнение вынужденных колебаний имеет вид:**

- а)  $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ ;
- б)  $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$ ;
- в)  $2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$ ;
- г)  $\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$ ;
- д)  $\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t$ .

**2.14. Уравнение плоской волны имеет вид:**

- а)  $S(x, t) = A \cos(\omega t + \varphi_0)$ ;
- б)  $S(x, t) = Ae^{-\beta t} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0\right)$ ;
- в)  $S(x, t) = A \cos(\omega x - 2\pi t + \varphi_0)$ ;
- г)  $S(x, t) = A \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v} x + \varphi_0\right)$ ;
- д)  $S(x, t) = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$ .

**2.15. Уровень интенсивности звука измеряется:**

- а) в герцах;
- б) фонах;
- в) децибелах;
- г) ваттах;
- д) ваттах на секунду в квадрате.

## Глава 3

# БИОФИЗИКА МЫШЕЧНОГО СОКРАЩЕНИЯ

В данной главе рассматриваются молекулярные основы мышечного сокращения и механические свойства мышц. Без понимания этих вопросов невозможно изучение механизмов действия целого ряда лекарственных препаратов: спазмолитических, а также препаратов, стимулирующих мышечную деятельность, например сокращение сердечной мышцы.

Все мышцы организма разделяются на гладкие и поперечнополосатые. Среди последних различают два типа: скелетные и сердечная. Ниже будут рассмотрены только скелетные мышцы.

### § 3.1. СТРОЕНИЕ МЫШЕЧНОГО ВОЛОКНА

Мембрана мышечных клеток — *сарколемма* — также, как и мембрана нервных клеток, электровозбудима и способна проводить потенциал действия. Эти процессы в мышечных клетках происходят по тому же принципу, что и в нервных. Потенциал покоя ( $V_0$ ) мышечного волокна составляет приблизительно  $-90$  мВ, что ниже такового в нервном волокне ( $-70$  мВ), а критическая деполаризация ( $V_K$ ), по достижении которой возникает потенциал действия, имеет одинаковое значение с нервным. Поэтому возбудимость мышечного волокна несколько ниже, чем нервного, так как клетку требуется деполаризовать на большую величину.

$$\Delta V_M > \Delta V_N,$$

где  $\Delta V = V_K - V_0$ , индексы «М» и «Н» относятся соответственно к мышечным и нервным клеткам.

Ответом мышечного волокна на возбуждение является *сокращение*, которое совершает сократительный аппарат клетки — *миофибриллы*. Они представляют собой тяжи, состоящие из двух видов нитей: толстых — *миозиновых*, и тонких — *актиновых*.



Толстые нити (диаметром 15 нм и длиной 1,5 мкм) имеют в своем составе только один белок — миозин; тонкие (диаметром 7 нм и длиной 1 мкм) содержат три вида белков: актин, тропомиозин и тропонин.

Актин представляет собой длинную белковую нить, однако его нельзя отнести к фибриллярным белкам. Он состоит из отдельных глобулярных белков, сцепленных между собой таким образом, что вся структура представляет собой вытянутую цепь. Молекулы глобулярного актина (*G*-актина) имеют боковые и концевые центры связывания с другими такими же молекулами. В результате они объединяются таким образом, что образуют структуру, которую часто сравнивают с двумя нитками бус, соединенных вместе (рис. 3.1.1). Образованная из молекул *G*-актина лента закручена в спираль. Такая структура называется фибриллярным актином (*F*-актином). Шаг спирали (длина витка) составляет 38 нм, на каждый виток спирали приходится 7 пар *G*-актина. Полимеризация *G*-актина, то есть образование *F*-актина, происходит за счет энергии АТФ, и, наоборот, при разрушении *F*-актина выделяется энергия.

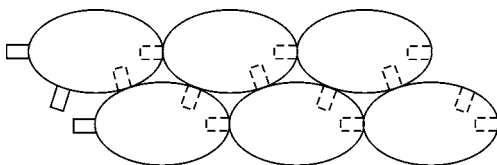


Рис. 3.1.1. Объединение отдельных глобул *G*-актина в *F*-актин

Вдоль спиральных желобков актиновых филаментов (нитей) располагается белок тропомиозин (греч. *trope* — поворачивать, *mys* — мышца). Каждая нить тропомиозина, имеющая длину 41 нм, состоит из двух идентичных  $\alpha$ -цепей, вместе закрученных в спираль с длиной витка 7 нм. Вдоль одного витка *F*-актина расположены две молекулы тропомиозина. Каждая тропомиозиновая молекула соединяется, немного перекрываясь, со следующей, в результате тропомиозиновая нить простирается вдоль актина непрерывно (рис. 3.1.2).

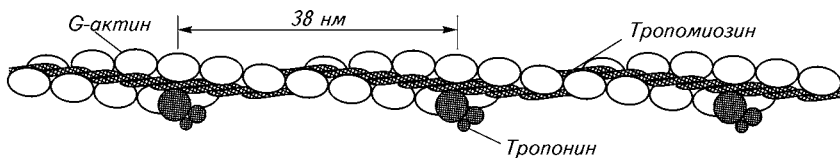


Рис. 3.1.2. Строение тонкой нити миофибриллы

В клетках поперечнополосатых мышц в состав тонких нитей кроме актина и тропомиозина входит еще и белок тропонин. На каждый шаг спирали *F*-актина приходится две молекулы тропони-

на. Этот глобулярный белок имеет сложное строение. Он состоит из трех субъединиц, каждая из которых выполняет свою функцию в процессе сокращения.

Толстая нить состоит из большого числа молекул миозина, собранных в пучок. Каждая молекула миозина длиной около 155 нм

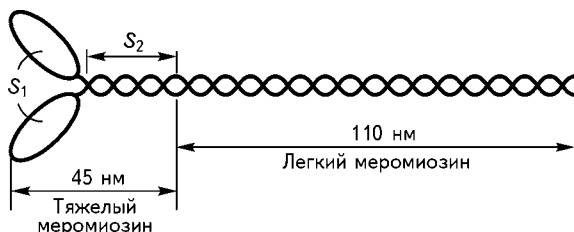


Рис. 3.1.3. Строение молекулы миозина

и диаметром 2 нм состоит из шести полипептидных нитей: двух длинных и четырех коротких (рис. 3.1.3). Длинные цепи вместе закручены в спираль с шагом 7,5 нм и образуют фибриллярную часть миозина.

миозиновой молекулы. На одном из концов молекулы эти цепи раскручиваются и образуют раздвоенный конец. Каждый из этих концов образует комплекс с двумя короткими цепями, то есть на каждой молекуле имеются две головки. Это глобулярная часть миозиновой молекулы. В миозине выделяют два фрагмента: легкий меромиозин (ЛММ) и тяжелый меромиозин (ТММ), между ними находится шарнир. ТММ состоит из двух субфрагментов:  $S_1$  и  $S_2$ . ЛММ и фрагмент  $S_2$  ТММ вложены в пучок нитей, а субфрагмент  $S_1$  выступает над поверхностью. Этот выступающий конец (миозиновая головка) способен связываться с активным центром на актиновой нити и изменять угол наклона к пучку миозиновых нитей.

Объединение отдельных молекул миозина в пучок (рис. 3.1.4) происходит, скорее всего, за счет электростатических взаимодействий между ЛММ. Центральная часть нити (около 300 нм) не имеет головок. Весь комплекс миозиновых молекул простирается на 1,5 мкм. Это одна из самых больших биологических молекулярных структур, известных в природе.

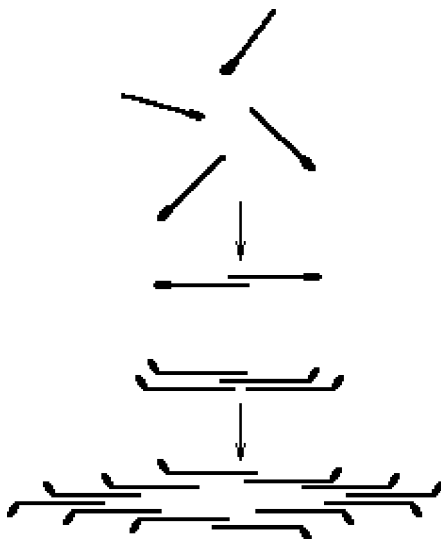


Рис. 3.1.4. Схема агрегации молекул миозина

При рассматривании в поляризационный микроскоп продольного среза поперечнополосатой мышцы видны светлые и темные участки. Темные участки (диски) являются анизотропными: в поляризованном свете они выглядят прозрачными в продольном направлении и непрозрачными — в поперечном, обозначаются буквой *A*. Светлые участки являются изотропными и обозначаются буквой *I* (рис. 3.1.5).

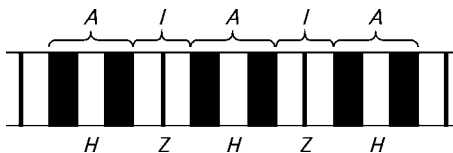


Рис. 3.1.5. Структура миофибриллы (поперечный срез)

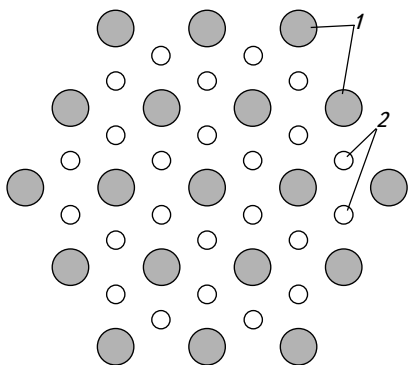


Рис. 3.1.6. Поперечный срез миофибриллы:

1 — миозиновые нити, 2 — актиновые нити

Диск *I* включает в себя только тонкие нити, диск *A* — и толстые, и тонкие. В середине диска *A* видна светлая полоса, называемая *H*-зоной. Она не имеет тонких нитей. Диск *I* разделен тонкой полосой *Z*, которая представляет собой мембрану, содержащую структурные элементы, скрепляющие между собой концы тонких нитей. Участок между двумя *Z*-линиями называется *саркомером*.

Каждая толстая нить окружена шестью тонкими, а каждая тонкая — тремя толстыми. Таким образом, в поперечном срезе мышечное волокно имеет правильную гексагональную структуру (рис. 3.1.6).

## § 3.2. СОКРАЩЕНИЕ МЫШЦЫ

При сокращении мышцы длина актиновых и миозиновых филаментов не изменяется. Происходит лишь их смещение относительно друг друга: тонкие нити задвигаются в промежутки между толстыми. При этом длина диска *A* остается неизменной, а диск *I* укорачивается, полоса *H* почти исчезает. Такое скольжение оказывается возможным благодаря существованию поперечных мостиков (миозиновых головок) между толстыми и тонкими нитями. При сокращении возможно изменение длины саркомера приблизительно от 2,5 до 1,7 мкм.

Как уже указывалось, миозиновая нить имеет на себе множество головок, которыми она может связываться с актином. Актиновая же нить, в свою очередь, имеет участки (*активные центры*), к которым могут прикрепляться головки миозина (рис. 3.2.1). В по-

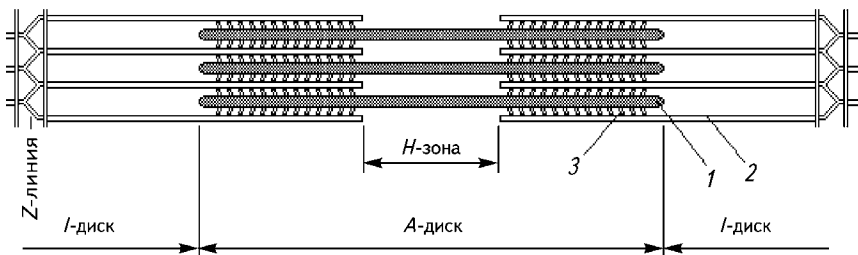


Рис. 3.2.1. Строение поперечнополосатой мышцы (продольный срез):

1 — толстая (миозиновая) нить; 2 — тонкая (актиновая) нить; 3 — поперечные мостики, обеспечивающие связь между актиновыми и миозиновыми нитями

коящейся мышечной клетке эти центры связывания прикрыты молекулами тропомиозина, что препятствует образованию связи между тонкими и толстыми нитями.

Для того чтобы актин и миозин могли взаимодействовать, необходимо присутствие ионов кальция. В покое они находятся в саркоплазматическом ретикулуме. Эта органелла представляет собой ограниченные мембранами полости, содержащие кальциевый насос, который за счет энергии АТФ транспортирует ионы кальция внутрь саркоплазматического ретикулума. Его внутренняя поверхность содержит белки, способные связывать  $\text{Ca}^{2+}$ , что несколько уменьшает разность концентраций этих ионов между цитоплазмой и полостью саркоплазматического ретикулума. Распространяющийся по клеточной мембране потенциал действия активирует близко расположенную к поверхности клетки мембрану саркоплазматического ретикулума и вызывает выход  $\text{Ca}^{2+}$  в цитоплазму.

Молекула тропомина обладает высоким сродством к кальцию. Под его влиянием она изменяет положение тропомиозиновой нити на актиновой таким образом, что открывается активный центр, ранее прикрытый тропомиозином. К открывшемуся активному центру теперь может присоединиться поперечный мостик. Это приводит к взаимодействию актина с миозином (рис. 3.2.2, а, б). После образования связи миозиновая головка, ранее расположенная почти под прямым углом к нитям, наклоняется и протаскивает актиновую нить относительно миозиновой приблизительно на 10 нм (рис. 3.2.2, в).

Образовавшийся актин-миозиновый комплекс препятствует дальнейшему скольжению нитей относительно друг друга, поэто-

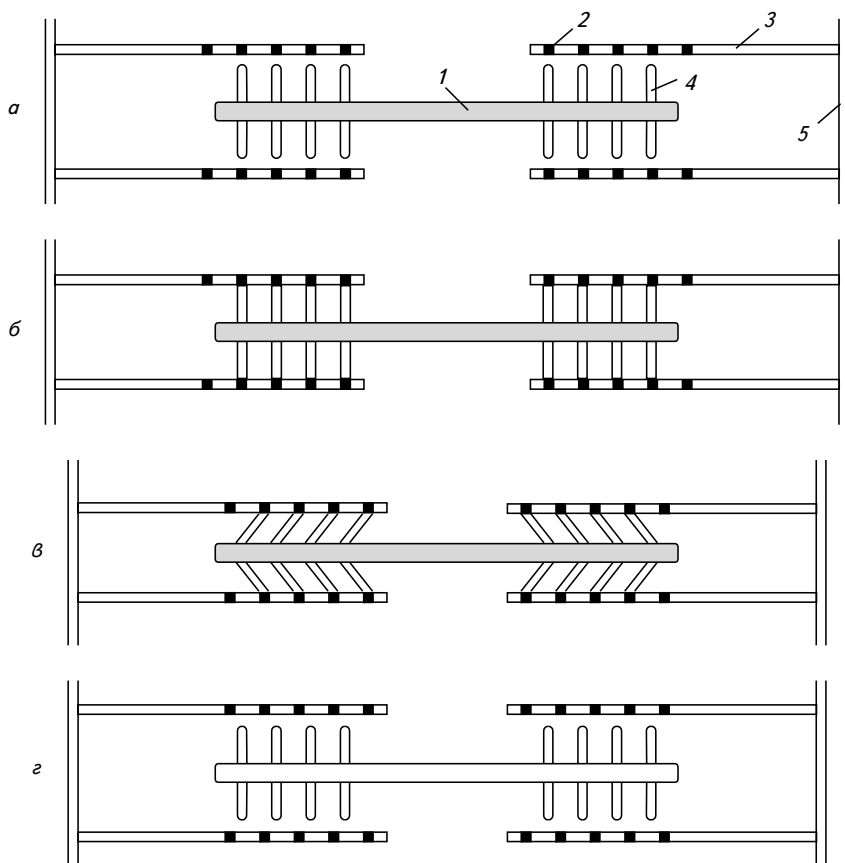


Рис. 3.2.2. Сокращение саркомера:

1 — миозиновая нить; 2 — активный центр; 3 — актиновая нить; 4 — миозиновая головка;  
5 — Z-линия;

а — взаимодействие между тонкими и толстыми нитями отсутствует; б — в присутствии  $\text{Ca}^{2+}$  миозиновая головка связывается с активным центром на актиновой нити; в — поперечные мостики наклоняются и протаскивают тонкую нить относительно толстой, вследствие чего длина саркомера уменьшается; г — связи между нитями разрываются за счет энергии АТФ, миозиновые головки готовы взаимодействовать с новыми активными центрами

му необходимо его разъединение. Это возможно только за счет энергии АТФ. Миозин обладает АТФ-азной активностью, то есть способен вызывать гидролиз АТФ. Выделяющаяся при этом энергия разрывает связь между актином и миозином (рис. 3.2.2, г), и миозиновая головка способна взаимодействовать с новым участком молекулы актина. Работа мостиков синхронизирована таким

образом, что связывание, наклон и разрыв всех мостиков одной нити происходит одновременно.

При расслаблении мышцы активизируется работа кальциевого насоса, что понижает концентрацию  $\text{Ca}^{2+}$  в цитоплазме; следовательно, связи между тонкими и толстыми нитями уже не могут образовываться. В этих условиях при растяжении мышцы нити беспрепятственно скользят относительно друг друга. Однако такая растяжимость возможна только в присутствии АТФ. Если в клетке отсутствует АТФ, то актин-миозиновый комплекс не может разорваться. Нити остаются жестко сцепленными между собой. Это явление наблюдается при трупном окоченении.

Существует два режима сокращения мышцы: *изотоническое* (изменяется длина волокна, а напряжение остается неизменным) и *изометрическое* (концы мышцы неподвижно закреплены, вследствие чего изменяется не длина, а напряжение).

### § 3.3. МОЩНОСТЬ И СКОРОСТЬ СОКРАЩЕНИЯ МЫШЦЫ

Важными характеристиками работы мышцы являются сила и скорость сокращения. Уравнения, выражающие эти характеристики, были эмпирически получены А. Хиллом и впоследствии подтверждены кинетической теорией мышечного сокращения (модель Дешеревского).

У р а в н е н и е Х и л л а, связывающее между собой силу и скорость сокращения мышцы, имеет следующий вид:

$$(P + a)(v + b) = (P_0 + a)b = a(v_{\max} + b), \quad (3.3.1)$$

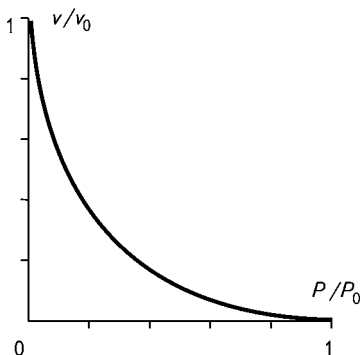


Рис. 3.3.1. Зависимость относительной скорости укорочения мышцы от относительной силы

где  $v$  — скорость укорочения мышцы;  $P$  — мышечная сила или приложенная к ней нагрузка (внешняя сила, действующая на мышцу);  $v_{\max}$  — максимальная скорость укорочения мышцы ( $v = v_{\max}$  при  $P = 0$ );  $P_0$  — сила, развиваемая мышцей в изометрическом режиме сокращения, то есть при такой нагрузке, при которой не происходит изменение длины мышцы ( $P = P_0$  при  $v = 0$ );  $a$  и  $b$  — константы. Приведенное уравнение имеет вид гиперболы (рис. 3.3.1).

При сокращении за время  $t$  мышца совершает работу  $A$ :

$$A = Pvt . \quad (3.3.2)$$

Выразив  $v$  из уравнения Хилла (3.3.1), получаем:

$$A = bP \frac{P_0 - P}{P + a} t . \quad (3.3.3)$$

В процессе сокращения мышцы выделяется некоторое количество теплоты  $Q$ . Эта величина называется *теплопродукцией*. Как показал Хилл, теплопродукция зависит только от изменения длины  $x$  мышцы и не зависит от нагрузки  $P$ :

$$Q = ax . \quad (3.3.4)$$

Общая мощность  $N_{\text{общ}}$ , развиваемая мышцей, определяется скоростями выполнения мышцей работы и выделения теплоты:

$$N_{\text{общ}} = \frac{dA}{dt} + \frac{dQ}{dt} = Pv + \frac{dQ}{dt} . \quad (3.3.5)$$

Подставив выражение (3.3.4) в (3.3.5), получаем следующее:

$$N_{\text{общ}} = Pv + a \frac{dx}{dt} = (P + a)v , \quad (3.3.6)$$

или, как следует из уравнения Хилла,

$$\begin{aligned} N_{\text{общ}} &= (P + a)v = \\ &= b(P_0 - P) , \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

то есть зависимость мощности  $N_{\text{общ}}$  от нагрузки  $P$  является линейной (рис. 3.3.2).

Коэффициент полезного действия мышцы  $\eta$  записывается в виде:

$$\eta = \frac{A}{A + Q} = \frac{Pv}{N_{\text{общ}}} , \quad (3.3.8)$$

где  $Pv = N_{\text{пол}}$  — полезная мощность. КПД мышцы  $\eta$  сохраняет постоянное значение (около 40 %) в диапазоне значений силы от  $0,2P_0$  до  $0,8P_0$ .

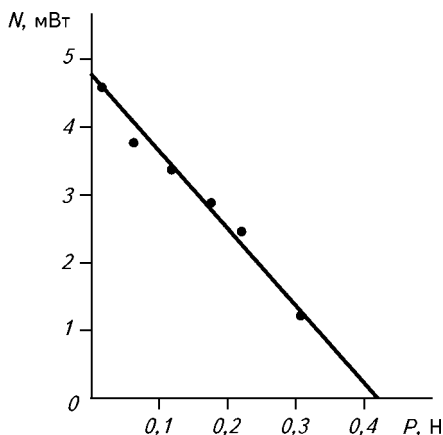


Рис. 3.3.2. Зависимость суммарной мощности портняжной мышцы лягушки от нагрузки при тетаническом изотоническом сокращении

Константы  $a$  и  $b$  имеют постоянные значения для данной мышцы. Константа  $a$  имеет размерность силы, а  $b$  — скорости. Константа  $b$  в значительной степени зависит от температуры, например, при нагревании на  $10^\circ\text{C}$  вблизи  $0^\circ\text{C}$   $b$  удваивается. Константа  $a$  находится в диапазоне значений от  $0,25P_0$  до  $0,4P_0$ . По этим данным легко оценить максимальную скорость сокращения для данной мышцы. Так как (следует из последнего равенства уравнения Хилла)

$$v_{\max} = b \frac{P_0}{a}, \quad (3.3.9)$$

то, следовательно,  $v_{\max}$  превышает константу  $b$  в 2,5—4 раза.

### ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

#### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 3.1.** Для некоторой мышцы при нагрузке  $P = 0,3$  Н скорость сокращения составляет  $v = 24$  мм/с. Нагрузка в изометрическом режиме сокращения равна  $P_0 = 1,1$  Н, постоянная  $a$  равна  $0,2$  Н. Вычислите максимальную скорость  $v_{\max}$  сокращения.

**Решение.** Запишем уравнение Хилла:

$$(P + a)(v + b) = (P_0 + a)b = a(v_{\max} + b).$$

Из последнего равенства найдем  $v_{\max}$ :

$$v_{\max} = b \frac{P_0}{a},$$

а из первого — константу  $b$ :

$$b = \frac{v(P + a)}{P_0 - P}.$$

Тогда

$$v_{\max} = \frac{v(P + a)}{P_0 - P} \frac{P_0}{a}.$$

Подставив числовые данные (в единицах СИ  $v = 24 \cdot 10^{-3}$  м/с), получаем:

$$v_{\max} = \frac{24 \cdot 10^{-3} \cdot (0,3 + 0,2)}{1,1 - 0,3} \cdot \frac{1,1}{0,2} = 82,5 \cdot 10^{-3} \text{ м/с} = 82,5 \text{ мм/с}.$$

**Задача 3.2.** Мышца, сокращаясь со скоростью  $v = 6$  мм/с, развивает общую мощность  $N_{\text{общ}} = 2,7$  мВт. Нагрузка в изометрическом режиме сокращения для этой мышцы составляет  $P_0 = 0,8$  Н, константа  $b$  равна  $23$  мм/с. Вычислите работу  $A$ , произведенную мышцей за  $t = 0,5$  с.



**Решение.** Работа мышцы равна

$$A = Pvt.$$

Нагрузку  $P$  найдем из формулы для мощности:

$$N_{\text{общ}} = b(P_0 - P),$$

откуда

$$P = \frac{bP_0 - N_{\text{общ}}}{b}.$$

Тогда

$$A = \frac{bP_0 - N_{\text{общ}}}{b} vt.$$

Подставив числовые данные (в единицах СИ  $N_{\text{общ}} = 2,7 \cdot 10^{-3}$  Вт,  $b = 23 \cdot 10^{-3}$  м/с,  $v = 6 \cdot 10^{-3}$  м/с), получаем:

$$A = \frac{23 \cdot 10^{-3} \cdot 0,8 - 2,7 \cdot 10^{-3}}{23 \cdot 10^{-3}} 6 \cdot 10^{-3} \cdot 0,5 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ Дж} = 2,0 \text{ мДж}.$$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**3.1.** Какова была бы температура  $t_1$  мышцы, если бы она работала как тепловая машина с КПД  $\eta = 40\%$  при температуре окружающей среды  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ ?

**3.2.** В изотоническом режиме мышца поднимает груз массой  $m = 100$  г на высоту  $h = 20$  см. Вычислите теплопродукцию  $Q$  мышцы, если ее КПД  $\eta = 40\%$ .

**3.3.** Какой максимальный груз может поднять мышца на высоту  $h = 1$  м за счет энергии  $Q = 1$  кДж? КПД мышцы  $\eta = 30\%$ .

**3.4.** При сокращении мышцы за время  $t = 0,3$  с выделилось  $Q = 5,5$  кДж теплоты. Вычислите полезную мощность  $N_{\text{пол}}$ , развиваемую мышцей, если ее КПД  $\eta = 45\%$ .

**3.5.** Максимальная общая мощность, развиваемая мышцей, составляет  $N_{\text{общ, max}} = 10$  Вт, а нагрузка в изометрическом режиме сокращения  $P_0 = 300$  Н. Вычислите общую мощность  $N_{\text{общ}}$  мышцы при нагрузке  $P = 180$  Н.

**3.6.** В экспериментах на портняжной мышце лягушки было определено, что нагрузка в изометрическом режиме сокращения равнялась  $P_0 = 0,65$  Н, максимальная скорость сокращения  $v_{\text{max}} = 50$  мм/с, а при нагрузке  $P = 0,3$  Н скорость сокращения составила  $v = 10$  мм/с. Вычислите значение констант  $a$  и  $b$  для данной мышцы.

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**3.1.** В состав тонких нитей мышечного волокна входят:

- а) актин и тропонин;
- б) актин, миозин и тропомиозин;

- в) миозин;
- г) актин, тропомиозин и тропонин;
- д) актин и миозин.

**3.2.** В состав толстых нитей мышечного волокна входят:

- а) актин и тропонин;
- б) актин, миозин и тропомиозин;
- в) миозин;
- г) актин, тропомиозин и тропонин;
- д) актин и миозин.

**3.3.** При изотоническом сокращении:

- а) длина волокна изменяется, напряжение постоянно;
- б) напряжение изменяется, длина волокна постоянна;
- в) длина и напряжение неизменны;
- г) длина и напряжение изменяются.

**3.4.** При изометрическом сокращении:

- а) длина волокна изменяется, напряжение постоянно;
- б) напряжение изменяется, длина волокна постоянна;
- в) длина и напряжение неизменны;
- г) длина и напряжение изменяются.

**3.5.** Уравнение Хилла имеет следующий вид:

а)  $(P + a)(v + b) = (P_0 + a)b = a(v_{\max} + b)$  ;

б)  $(P + a)(v + b) = \frac{(P_0 - b)a}{b(v_{\max} - b)}$  ;

в)  $(P + a) \frac{(v + b)}{a(v_{\max} - b)} = (P_0 + a)b$  ;

г)  $(P + a)(v + b) = \frac{(P_0 + b)a}{b(v_{\max} + b)}$  ;

д)  $(P + a)(v + b) = P_0 - ab = av_{\max}$  .

**3.6.** Общая мощность  $N_{\text{общ}}$  , развиваемая мышцей, равна:

а)  $N_{\text{общ}} = aP - \frac{dQ}{dt}$  ;

г)  $N_{\text{общ}} = av + \frac{dQ}{dt}$  ;

б)  $N_{\text{общ}} = bP - \frac{dQ}{dt}$  ;

д)  $N_{\text{общ}} = (P + a)v = b(P_0 - P)$  .

в)  $N_{\text{общ}} = (P - a)v = b\sqrt{P_0 + P}$  ;

**3.7.** КПД мышцы равно:

а)  $\eta = \frac{N_{\text{общ}}v}{P}$  ;

г)  $\eta = \frac{Pv}{N_{\text{общ}}}$  ;

б)  $\eta = \frac{PN_{\text{общ}}}{v}$  ;

д)  $\eta = \sqrt{\frac{N_{\text{общ}}}{Pv}}$  .

в)  $\eta = \frac{P^2v}{N_{\text{общ}}}$  ;

# МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА И ТЕРМОДИНАМИКА

*Молекулярная физика* изучает физические свойства, строение и агрегатные состояния вещества на основе молекулярно-кинетических представлений. Эти представления были сформулированы М. В. Ломоносовым и заключаются в следующем: вещество состоит из частиц (атомов или молекул); частицы находятся в непрерывном хаотическом движении, интенсивность и характер которого зависят от температуры и агрегатного состояния вещества; частицы в зависимости от расстояния между ними взаимодействуют друг с другом через силы притяжения или отталкивания.

*Термодинамика* рассматривает макроскопические системы без учета их молекулярного строения, изучает процессы превращения энергии и направление термодинамических процессов. Понятия и законы термодинамики широко используются в химических и биологических дисциплинах, в особенности в биохимии и молекулярной биофизике.

В данной главе также рассматриваются явления переноса, понимание которых необходимо для изучения процессов транспорта веществ через мембрану и механизмов распределения лекарственных веществ в организме.

## § 4.1. ОСНОВЫ МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГАЗОВ

Вещество состоит из огромного количества микрочастиц, принимающих участие в хаотическом тепловом движении, характер которого определяется агрегатным состоянием. Из известных агрегатных состояний ниже будут рассмотрены три состояния вещества: жидкое, газообразное и твердое. Проще всего начинать рассмотрение приложений молекулярно-кинетической теории к газам,

находящимся в условиях, близких к нормальным, то есть таких, которые существуют вблизи поверхности земли.

Газообразное состояние, несмотря на его высокую разреженность по сравнению с другими состояниями вещества (при нормальных условиях воздух имеет плотность  $1,29 \text{ кг/м}^3$ ), представляет собой систему, состоящую из огромного числа частиц. Так, в одном кубическом сантиметре воздуха при нормальных условиях содержится  $2,7 \cdot 10^{19}$  молекул, при этом среднее расстояние между молекулами примерно в 10 раз превышает их диаметр. Большое расстояние между молекулами газа по сравнению с их размерами дает возможность пренебречь потенциальной энергией взаимодействия между молекулами и считать, что внутренняя энергия газа определяется только энергией хаотического движения молекул. Газы, подчиняющиеся этим условиям и находящиеся в равновесном состоянии, называются *идеальными*.

**Равновесным состоянием** называется такое состояние, при котором в каждом элементе объема газа давление, температура и другие термодинамические параметры одинаковы и не изменяются во времени. Если газ находится в равновесном состоянии, то характер хаотического движения не зависит от места, в котором оно происходит, то есть по характеру хаотического движения невозможно отличить одну область пространства, занимаемого газом, от другой.

Одним из фундаментальных понятий молекулярной физики и термодинамики является **температура**. Температура ассоциируется с понятиями теплоты и холода, которые имеют субъективный характер. Переход от субъективных оценок тепловых градаций к объективному измерению температуры произошел сравнительно недавно. Современная шкала Цельсия была предложена в 1742 г. Согласно этой шкале, точка замерзания воды соответствует  $0^\circ\text{C}$ , а точка кипения воды —  $100^\circ\text{C}$ . В некоторых странах используются температурные шкалы Фаренгейта и Реомюра<sup>1</sup>. Соотношения между шкалами Фаренгейта и Цельсия следующие:

$$\begin{aligned} t^\circ\text{C} &= \frac{5}{9}(t^\circ\text{F} - 32); \\ t^\circ\text{F} &= \frac{9}{5}t^\circ\text{C} + 32, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

---

<sup>1</sup> По шкале Фаренгейта температура смеси снега с нашатырем соответствует  $0^\circ\text{F}$ , а точка кипения воды при нормальном атмосферном давлении —  $+212^\circ\text{F}$ . Первоначально в качестве второй реперной (постоянной) точки была выбрана температура тела человека ( $+96^\circ\text{F}$ ). По шкале Реомюра  $0^\circ\text{R}$  соответствует точка таяния льда, а  $80^\circ\text{R}$  — точка кипения воды.

где  $t\text{ }^{\circ}\text{C}$  — температура по шкале Цельсия;  $t\text{ }^{\circ}\text{F}$  — температура по шкале Фаренгейта.

Для шкал Цельсия и Реомюра справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} t\text{ }^{\circ}\text{C} &= \frac{5}{4} t\text{ }^{\circ}\text{R}; \\ t\text{ }^{\circ}\text{R} &= \frac{4}{5} t\text{ }^{\circ}\text{C}. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

где  $t\text{ }^{\circ}\text{R}$  — температура по шкале Реомюра.

Выбор температурных шкал был довольно произвольным. Впоследствии обнаружилось, что, несмотря на равномерность деления шкалы между точками кипения и замерзания воды на 100 частей, градус около  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  отличался от градуса вблизи  $100\text{ }^{\circ}\text{C}$  в силу нелинейности коэффициента теплового расширения жидкостей, используемых в качестве рабочего вещества термометров. Исследования газов дали возможность изготовить термометр с более равномерной шкалой, который может работать в очень широком диапазоне температур. Дело в том, что газы переходят в жидкое состояние при очень низких температурах и при малых плотностях в различных температурных диапазонах ведут себя почти одинаково.

Согласно закону Гей-Люссака, объем газа линейно зависит от температуры следующим образом:

$$V = V_0(1 + \alpha t), \quad (4.1.3)$$

где  $t$  — температура в  $^{\circ}\text{C}$ ;  $\alpha = 1/273,15$  — коэффициент объемного расширения;  $V_0$  — объем, занимаемый газом при температуре  $0\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Таким образом, измеряя объем газа при постоянном давлении, можно уточнить градуировку термометров, в которых в качестве рабочего вещества используются жидкости.

Другим важным следствием закона Гей-Люссака является то, что при температуре  $t = -273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$  все газы, независимо от их начального объема  $V_0$ , должны иметь объемы, равные нулю. На основании этого была введена новая шкала температур, в которой нулем является температура  $-273,15\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Такая шкала температур называется *термодинамической*, или *идеально-газовой*, и была предложена Уильямом Кельвином. В качестве единицы измерения в этой шкале используется кельвин (К). 1 К практически идентичен  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Соотношение между шкалами Цельсия и термодинамической следующее:

$$t = T - 273,15^{\circ}, \quad (4.1.4)$$

где  $t$  — температура в градусах Цельсия;  $T$  — в кельвинах.

Термодинамическая шкала показывает, что при температуре 0 К или  $-273,15^\circ\text{C}$  объем идеального газа должен стать равным нулю, нулевым должно стать также и давление газа  $p$  на стенки сосуда, в котором он находится, поскольку, согласно закону Шарля,

$$p = p_0(1 + \alpha t), \quad (4.1.5)$$

где  $\alpha$  — тот же самый коэффициент, который используется в законе Гей-Люссака, а  $p_0$  — давление при температуре  $0^\circ\text{C}$ .

Молекулярно-кинетическая теория устанавливает, что энергия хаотического движения молекул пропорциональна термодинамической температуре, что подтверждается также целым рядом экспериментов. Из опыта получается, что средние кинетические энергии поступательного движения молекул разных газов, находящихся при одинаковой температуре, равны между собой, то есть

$$\frac{m_1 \langle v_1^2 \rangle}{2} = \frac{m_2 \langle v_2^2 \rangle}{2} = \dots = \frac{m_n \langle v_n^2 \rangle}{2}, \quad (4.1.6)$$

где  $m_i$  — массы газов ( $i = 1, 2, \dots, n$ );  $\langle v_i^2 \rangle$  — средние квадраты скоростей молекул газа.

**Средняя энергия молекулы.** Энергия каждой молекулы в самом общем случае складывается из кинетической энергии поступательного движения, кинетической энергии вращательного движения и энергии колебательного движения, то есть

$$\varepsilon = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} + \sum_k \varepsilon_k, \quad (4.1.7)$$

где  $m$  — масса молекулы;  $v$  — скорость молекулы;  $I$  — момент инерции относительно оси вращения;  $\omega$  — угловая скорость;  $\varepsilon_k$  — энергия колебательного движения  $k$ -го нормального колебания молекулы.

Для определения средней энергии молекулы необходимо ввести понятие о степенях свободы. **Числом степеней свободы** механической системы называется количество независимых величин, с помощью которых может быть задано положение системы.

Например, одноатомная молекула, которую можно представить материальной точкой, обладает тремя степенями свободы, так как ее положение в пространстве целиком определяется тремя координатами (рис. 4.1.1, а). При изменении координат точка совершает поступательное движение, поэтому эти три степени свободы называются *поступательными*.

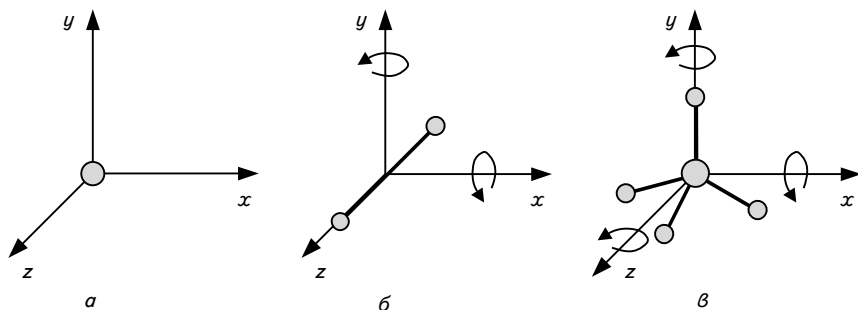


Рис. 4.1.1. Определение степеней свободы одноатомных (а), двухатомных (б) и многоатомных нелинейных (в) молекул

Многоатомная молекула может совершать не только поступательное, но и вращательное и колебательное движение. Вращательное движение молекулы как целого определяется углами поворота вокруг трех координатных осей (рис. 4.1.1, в), поэтому такая молекула имеет три вращательные степени свободы. Атомы, смещаясь относительно друг друга, совершают колебательное движение. Поскольку каждый атом, как материальная точка, обладает в трехмерном пространстве тремя степенями свободы, то молекула из  $K$  атомов в целом имеет  $3K$  степеней свободы. Из них три приходятся на поступательное и три — на вращательное движение жесткой молекулы, так что на колебательное движение остается

$$n_{\text{колеб}} = 3K - 6 \quad (4.1.8)$$

степеней свободы.

Для линейных молекул на вращательное движение приходится только две степени свободы, так как их вращение вокруг одной из координатных осей не имеет смысла (рис. 4.1.1, б). Для таких молекул число колебательных степеней свободы равно

$$n_{\text{колеб}} = 3K - 5. \quad (4.1.9)$$

Таким образом, любое взаимное перемещение атомов в молекуле относительно друг друга может быть представлено суммой  $F$  независимых колебаний. Это так называемые нормальные колебания.

Одноатомная молекула обладает тремя поступательными степенями свободы; двухатомная — тремя поступательными, двумя вращательными и одной колебательной степенями свободы. Трехатомная молекула, если все атомы не лежат на одной прямой, имеет по три поступательных, вращательных и колебательных степени свободы.

Больцман и Максвелл доказали теорему о равнораспределении энергии по степеням свободы молекул, согласно которой: *если описываемая классической статистической механикой система находится в равновесии при термодинамической температуре  $T$ , то на каждую степень свободы одной молекулы приходится в среднем одинаковая энергия, равная*

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{2} kT, \quad (4.1.10)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана ( $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К).

Необходимо учесть, что поступательное и вращательное движение молекулы связано только с кинетической энергией этой молекулы, а колебательное — и с кинетической, и потенциальной, средние величины которых можно считать равными. Поэтому на каждую колебательную степень свободы приходится вдвое большая энергия, равная  $kT$ .

Следовательно, средняя энергия молекулы составляет:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{i}{2} kT, \quad (4.1.11)$$

где  $i = n_{\text{пост}} + n_{\text{вр}} + 2n_{\text{колеб}}$  — сумма числа поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы.

Двухатомная молекула, в зависимости от температуры, может иметь среднюю энергию:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{3}{2} kT, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{5}{2} kT \quad \text{или} \quad \bar{\varepsilon} = \frac{7}{2} kT.$$

Это связано с тем, что колебательные и вращательные степени свободы возбуждаются в различной степени при разных температурах. Причиной этого, в свою очередь, является квантовый характер энергетического спектра молекул.

Энергия поступательного движения молекул может принимать произвольные значения, а колебательная и вращательная энергии квантованы. Для того чтобы молекула перешла с одного вращательного (колебательного) уровня энергии на другой вращательный (колебательный) уровень, она должна обладать дополнительной энергией, равной разности этих уровней. Интервалы между дискретными колебательными уровнями на порядок больше, чем интервалы между дискретными вращательными уровнями.

Таким образом, при низких температурах молекулы газа в основном имеют энергию, связанную с поступательным движением. С ростом температуры начинают возбуждаться вращательные, а затем — колебательные уровни энергии.



Наглядное представление о характере возбуждения степеней свободы с ростом температуры дает приведенный на рис. 4.1.2 график температурной зависимости молярной теплоемкости водорода.

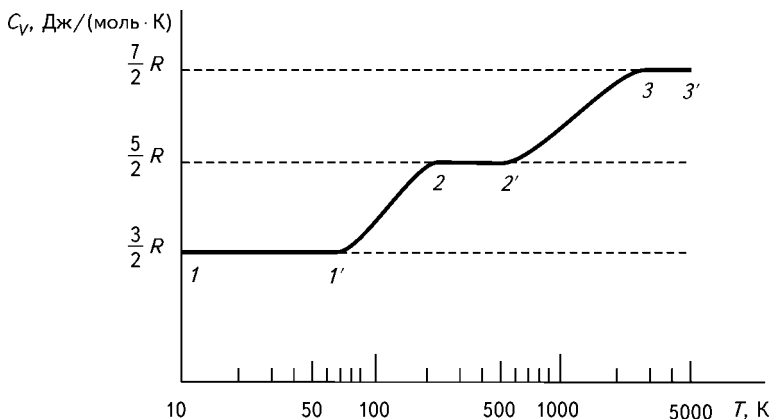


Рис. 4.1.2. Кривая зависимости молярной теплоемкости водорода от температуры. Теплоемкость дается в единицах  $R/2$ , где  $R = 8,31$  Дж/(моль · К)

Согласно рис. 4.1.2, для водорода число степеней свободы при температурах до 70 К равно 3 (участок  $1-1'$ ), от 200 К до 700 К  $i = 5$  (участок  $2-2'$ ), а при температуре свыше 2000 К  $i = 7$  (участок  $3-3'$ ). В промежутках между этими температурами теплоемкость растет монотонно. При этом постепенно все больше и больше молекул включается сначала во вращательное (участок  $1'-2$ ), а затем в колебательное (участок  $2'-3$ ) движение.

Если принять во внимание закон равнораспределения энергии по степеням свободы, то для средней энергии поступательного движения одной молекулы можно получить

$$\bar{\epsilon}_{\text{пост}} = \left\langle \frac{mv^2}{2} \right\rangle = \frac{m \langle v^2 \rangle}{2} = \frac{3}{2} kT, \quad (4.1.12)$$

где  $\langle v^2 \rangle$  — средний квадрат скорости (обратите внимание:  $\langle v^2 \rangle \neq \langle v \rangle^2$ ).

**Распределение Максвелла.** Молекулы газа участвуют в непрерывном хаотическом движении. Скорости молекул неодинаковы и непрерывно изменяются при столкновениях. Максвелл вывел закон распределения молекул по скоростям, согласно которому плотность вероятности для скорости  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$  равна

$$f(v) = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 \exp \left( -\frac{mv^2}{2kT} \right), \quad (4.1.13)$$

где  $m$  — масса молекулы;  $T$  — температура газа.

В основе этого закона лежит нормальный закон распределения проекций скоростей молекул на декартовы оси координат. График функции  $f(v)$  представлен на рис. 4.1.3.

Умножив функцию (4.1.13) на  $dv$ , получаем вероятность того, что модуль скорости произвольной молекулы заключается в интервале от  $v$  до  $v + dv$ .

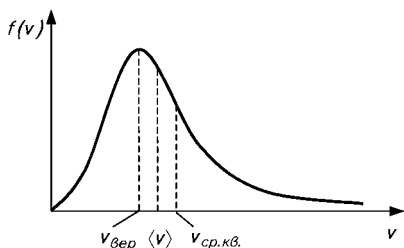


Рис. 4.1.3. Функция распределения молекул газа по скоростям

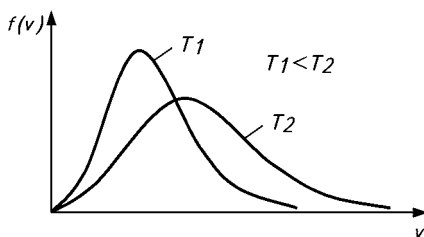


Рис. 4.1.4. Кривые распределения молекул одного и того же газа по скоростям для двух различных температур

Функции  $f(v)$  для двух различных температур представлены на рис. 4.1.4, где показано, что с ростом температуры максимум кривой распределения уменьшается и смещается в сторону больших скоростей. При дальнейшем росте температуры будет увеличиваться размытие кривой и уменьшаться максимум. Так как площадь под кривой  $f(v)$  должна равняться единице, то

$$\int_0^{\infty} f(v) dv = 1.$$

Максимуму функции  $f(v)$  соответствует *наиболее вероятная скорость*:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}, \quad (4.1.14)$$

где  $m$  — масса одной молекулы газа;  $k$  — постоянная Больцмана.

Умножим числитель и знаменатель выражения (4.1.14) на число Авогадро ( $N_A = 6,023 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ ), равное числу молекул, содержащихся в одном моле вещества. Произведение числа Авогадро на постоянную Больцмана дает константу  $R$ , которая называется **универсальной газовой постоянной**  $R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ , то есть

$$R = N_A k. \quad (4.1.15)$$

Произведение массы одной молекулы газа на число Авогадро равно молярной массе этого газа ( $mN_A = M$ ). Тогда выражение (4.1.14) сводится к более удобному для вычисления виду:

$$v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2RT}{M}}. \quad (4.1.16)$$

Асимметрия распределения Максвелла приводит к тому, что наиболее вероятная скорость не равна *средней арифметической скорости*, которая определяется следующим соотношением:

$$\langle v \rangle = \int_0^{\infty} v f(v) dv = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}. \quad (4.1.17)$$

*Среднюю квадратичную скорость* можно найти с помощью соотношения (4.1.12), из которого следует

$$v_{\text{ср. кв}} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}. \quad (4.1.18)$$

Для значений наиболее вероятной, средней арифметической и средней квадратичной скоростей справедливы неравенство

$$v_{\text{вер}} < \langle v \rangle < v_{\text{ср. кв}} \quad (4.1.19)$$

и соотношение

$$v_{\text{вер}} : \langle v \rangle : v_{\text{ср. кв}} = 1,41 : 1,60 : 1,73. \quad (4.1.20)$$

Для приближенного определения среднего числа молекул, скорости которых лежат в относительно небольшом интервале скоростей, можно воспользоваться очевидным соотношением:

$$\Delta N = N \left[ f\left(\frac{v_1 + v_2}{2}\right) \right] (v_1 - v_2). \quad (4.1.21)$$

В этой формуле скорости  $v_1$  и  $v_2$  определяют границы интервала, внутри которого лежат скорости молекул, число которых определяется.

**Основное уравнение кинетической теории газов.** Очевидно, что чем выше температура газа и чем больше концентрация молекул  $n$ ,

тем больше давление  $p$  газа на стенки сосуда, которое определяется суммарным изменением импульса молекул, ударяющихся о поверхность площадью  $1 \text{ м}^2$  в  $1 \text{ с}$ . Таким образом, давление газа на стенки сосуда можно объяснить ударами молекул, причем давление пропорционально среднему квадрату скорости:

$$p = \frac{1}{3} nm \langle v^2 \rangle, \quad (4.1.22)$$

где  $p$  — давление;  $n = N/V$  — концентрация, то есть количество молекул  $N$  газа в единице объема  $V$ ,  $[n] = \text{м}^{-3}$ ;  $m$  — масса молекулы газа;  $\langle v^2 \rangle$  — средний квадрат скорости.

Из соотношений (4.1.22) и (4.1.12) следует *основное уравнение кинетической теории газов*:

$$p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_{\text{пост}}, \quad (4.1.23)$$

где  $\bar{\epsilon}_{\text{пост}}$  — энергия поступательного движения молекул газа, концентрация которых равна  $n$ .

Из соотношения (4.1.23) следует, что, если имеется смесь  $k$  газов с концентрациями  $n_1, n_2, \dots, n_k$ , то

$$p = \frac{2}{3} [n_1 \bar{\epsilon}_{\text{пост}} + n_2 \bar{\epsilon}_{\text{пост}} + \dots + n_k \bar{\epsilon}_{\text{пост}}],$$

то есть

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_k, \quad (4.1.24)$$

что составляет содержание **закона Дальтона: давление смеси газов равно сумме парциальных давлений**. **Парциальным давлением** называется давление, при котором находился бы этот газ, если из смеси были бы удалены все остальные газы, а объем и температура остались бы прежними.

**Уравнение Менделеева-Клапейрона.** Если принять во внимание, что  $\bar{\epsilon}_{\text{пост}} = \frac{3}{2} kT$ , соотношение (4.1.23) можно привести к виду:

$$p = nkT. \quad (4.1.25)$$

Умножив обе части этого уравнения на объем газа  $V$ , получаем следующее уравнение:

$$pV = VnkT = NkT,$$

где  $N$  — число молекул газа в объеме  $V$ .

Умножив и разделив правую часть полученного уравнения на число Авогадро  $N_A$ , и, принимая во внимание, что

$$\frac{N}{N_A} = \nu, \quad (4.1.26)$$

где  $\nu$  — количество вещества в молях, получаем уравнение

$$pV = \nu N_A kT. \quad (4.1.27)$$

Используя соотношение (4.1.15), получаем уравнения состояния идеального газа — *уравнение Менделеева—Клапейрона*:

$$pV = \nu RT. \quad (4.1.28)$$

Уравнение Менделеева—Клапейрона сыграло важнейшую роль в становлении и развитии молекулярно-кинетической теории. Оно явилось прототипом целого ряда более сложных уравнений состояния, применимых к реальным газам.

#### Распределение Больцмана.

Газ, находящийся в поле сил тяготения, оказывает давление на нижележащие слои, в результате чего плотность газа и давление зависят от высоты. Если температура газа всюду одинакова (изотермический газ), то зависимость давления газа от высоты дается *барометрической формулой*

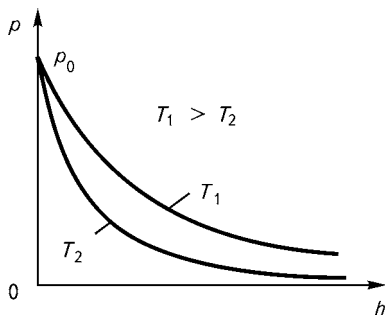


Рис. 4.1.5. Графики функции (4.1.29) (барометрическая формула) для двух различных температур

$$p = p_0 \exp\left(-\frac{Mgh}{RT}\right), \quad (4.1.29)$$

где  $M$  — молярная масса газа;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T$  — температура;  $h$  — высота над уровнем моря;  $p_0$  — давление над уровнем моря ( $h = 0$ ). Графики функции (4.1.29) для двух различных температур приведены на рис. 4.1.5.

Если принять во внимание, что  $p = nkT$ , а

$$\frac{Mgh}{RT} = \frac{mgh}{kT} = \frac{E_{\text{п}}}{kT},$$

где  $m$  — масса молекулы газа;  $k$  — постоянная Больцмана;  $E_{\text{пот}} = mgh$  — энергия молекулы газа в поле силы тяжести, то формула (4.1.29) преобразуется в более общую формулу (*распределение Больцмана*):

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E_{\text{пот}}}{kT}\right). \quad (4.1.30)$$

Соотношение (4.1.30) можно обобщить, считая его справедливым для произвольных силовых полей.

## § 4.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕРМОДИНАМИКИ. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

Термодинамика является разделом физики, в котором рассматриваются процессы, происходящие во Вселенной, с самых общих позиций. В термодинамике не используются в явном виде какие-либо физические образы или модели, а устанавливаются соотношения между такими величинами, как внутренняя энергия, тепло, энтропия, свободная энергия и др. Термодинамика оперирует такими понятиями, как термодинамическая система, термодинамические параметры, термодинамический процесс.

Термодинамика изучает макроскопические процессы обмена и превращения энергии в системе без учета микроскопического строения тел, составляющих данную систему. При этом размеры рассматриваемых систем и время их существования достаточны для проведения нормальных процессов измерения. Такого рода системы состоят из большого числа материальных частиц (например молекул, атомов, электронов и т. п.); системы с малым числом частиц в термодинамике не рассматриваются.

**Основные понятия термодинамики.** Если изучается часть системы, то оставшаяся часть называется окружающей средой. Окружающую среду можно рассматривать как *термостат*, который налагает некоторые условия на изучаемую часть системы (например, условия постоянства температуры, давления и пр.).

В термодинамике различают три вида систем: и з о л и р о в а н н ы е — не обмениваются с окружающей средой ни веществом, ни энергией; з а к р ы т ы е — обмениваются с окружающей средой энергией, но не веществом; и о т к р ы т ы е — обмениваются с окружающей средой и веществом, и энергией. Изолированных систем в природе не существует, так как невозможно изготовить абсолютно теплоизолирующую оболочку. Таковыми можно лишь

с некоторым приближением считать достаточно теплоизолированные системы, но только в течение определенного промежутка времени.

Величины, характеризующие состояние термодинамической системы (например, давление  $p$ , удельный и молярный объем  $V$ , температура  $T$ ), называются *термодинамическими параметрами*. Совокупность всех значений термодинамических параметров, необходимых для описания системы, определяет *термодинамическое состояние*. Всякая изолированная система со временем приходит к состоянию *термодинамического равновесия*, в котором прекращаются все необратимые процессы; термодинамические параметры не изменяются с течением времени, и отсутствуют их градиенты.

*Функцией состояния* называется такая физическая характеристика системы, изменение которой при переходе системы из одного состояния в другое определяется значениями параметров начального и конечного состояний и не зависит от того, каким образом совершается этот переход. Функциями состояния являются внутренняя энергия, энтальпия, энтропия, свободная энергия Гельмгольца, термодинамический потенциал Гиббса, химический и электрохимический потенциалы.

*Уравнением состояния* называется функциональное соотношение между термодинамическими параметрами системы, находящейся в равновесии.

*Термодинамический процесс* представляет собой изменение состояния системы. Если начальное состояние было равновесным, то процесс может быть вызван только изменением внешних условий.

*Равновесный, или квазистатический термодинамический процесс* происходит в том случае, если внешние условия изменяются так медленно, что в любой момент времени систему можно считать равновесной. Процесс называется *обратимым*, если он может быть проведен в обратном направлении, причем система будет проходить в обратном порядке через те же состояния, что и прямым процессом; в противном случае процесс называется *необратимым*. Обратимые процессы являются квазистатическими, но обратное утверждение не всегда верно. Например, бесконечно медленное расширение газа в пустоту является квазистатическим, но необратимым процессом. Все реальные процессы необратимы; обратимые процессы являются физической идеализацией.

*Термодинамическим контактом* называется такая связь между системами, при которой возможен хотя бы один из следующих типов взаимодействий.

1. *Механическое взаимодействие* — взаимодействие, при котором одна система совершает работу над другой системой с помощью механических, электромагнитных или иных сил.

2. *Тепловое взаимодействие* — взаимодействие, которое приводит к изменению энергии и происходит в форме передачи теплоты посредством теплопроводности или тепловой радиации.

3. *Материальное взаимодействие* — взаимодействие, которое приводит к обмену веществом между двумя системами, например взаимодействие через полупроницаемую мембрану или поверхность тела человека.

**Первый закон термодинамики** является законом сохранения энергии. Он гласит: *теплота, сообщенная системе, расходуется на приращение внутренней энергии системы и совершение системой работы над внешними телами.*

Математическая запись первого закона термодинамики имеет следующий вид:

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (4.2.1)$$

где  $\delta Q, \delta A$  — функционалы (малые изменения) теплоты и работы;  $dU$  — полный дифференциал внутренней энергии, являющейся функцией состояния. Внутренняя энергия в общем случае может зависеть от многих термодинамических параметров, например:  $U = f(p, V, T)$ ; для идеальных газов внутренняя энергия зависит только от температуры, то есть  $U = f(T)$ . Символы  $\delta$  указывают на то, что теплота и работа не являются функциями состояния, то есть зависят от вида термодинамического процесса и не являются в общем случае полными дифференциалами. Другими словами,

в данном термодинамическом состоянии система обладает определенным значением внутренней энергии, в то время как работа и теплота характеризуют переход между двумя состояниями.

**Работа расширения газа.** Вычислим работу, совершаемую газом при изменении его объема. Пусть газ, находящийся под поршнем (рис. 4.2.1), изобарически (при постоянном давлении) расширяется от объема  $V_1$  до  $V_2$ . Газ действует на поршень с силой  $F = pS$  (где  $p$  — давление, оказываемое газом на поршень площадью  $S$ ) и перемещает его на расстояние  $\Delta l = l_2 - l_1$ . Тогда работа, совершаемая газом по перемещению поршня, равна

$$A = F\Delta l = pS\Delta l = p\Delta V, \quad (4.2.2)$$

где  $\Delta V = S\Delta l = V_2 - V_1$  — изменение объема газа.

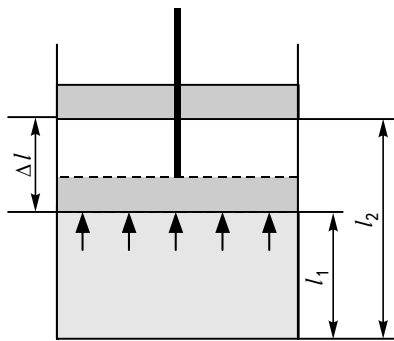


Рис. 4.2.1. Расширение газа, находящегося в цилиндрическом сосуде под поршнем



В том случае, если в процессе расширения давление изменяется, формула (4.2.2) становится непригодной для вычисления работы. В этом случае выбирают достаточно малое изменение объема  $dV$ , которому соответствует постоянное значение давления. Тогда элементарная работа составит:

$$\delta A = p dV. \quad (4.2.3)$$

Таким образом, работа, совершаемая газом, при конечном изменении объема на  $\Delta V = V_2 - V_1$  равна сумме элементарных работ, то есть интегралу в пределах от  $V_1$  до  $V_2$ :

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (4.2.4)$$

При этом следует обратить внимание, что при расширении газа ( $\Delta V > 0$ ) работа, совершаемая газом, положительна, а при сжатии ( $\Delta V < 0$ ) — отрицательна. С другой стороны, работа внешних сил над газом при его расширении отрицательна, а при сжатии — положительна.

Если изобразить процесс расширения (сжатия) газа в координатах  $p$ ,  $V$  (рис. 4.2.2), то из формулы (4.2.4) следует, что работа численно равна площади фигуры, ограниченной осью  $V$ , кривой  $p = f(V)$  и прямыми  $V_1$  и  $V_2$ .

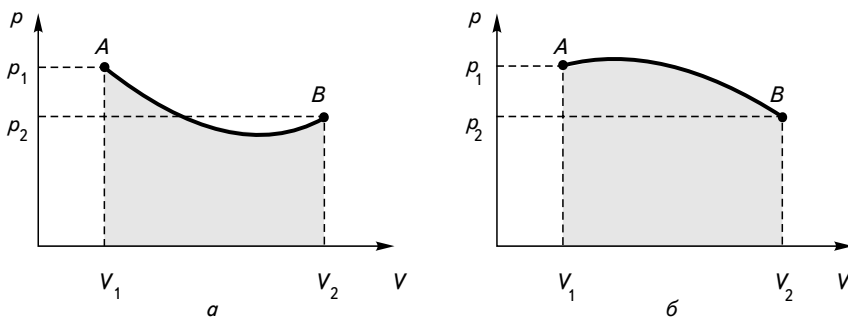


Рис. 4.2.2. Работа, совершаемая газом, при различных способах перехода из состояния А в состояние В

Из графиков, приведенных на рис. 4.2.2, *а* и *б*, видно, что величина работы зависит от того, каким образом система переходила из одного состояния в другое. Это иллюстрирует тот факт, что работа не является функцией состояния.

**Теплоемкость газов.** *Теплоемкостью тела* называется величина, численно равная количеству теплоты, которое необходимо сооб-

щить этому телу, чтобы нагреть его на один кельвин. Единицей измерения теплоемкости является джоуль на кельвин (Дж/К).

На практике удобнее рассматривать теплоемкость одного моля — *молярную теплоемкость*,  $[C_\mu] = \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ , или теплоемкость единицы массы — *удельную теплоемкость*,  $[C_m] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

$$C = C_m m = C_\mu \nu, \quad (4.2.5)$$

где  $\nu$  — количество вещества в молях;  $m$  — масса в килограммах.

Теплоемкость системы зависит от того, при каких условиях происходит теплопередача.

Теплоемкость при постоянном объеме  $C_V$  соответствует нагреванию термодинамической системы при постоянном объеме, то есть

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V. \quad (4.2.6)$$

Подставим в формулу (4.2.6) выражение для первого закона термодинамики (4.2.1) с учетом уравнения (4.2.3):

$$C_V = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_V = \left( \frac{dU + p dV}{dT} \right)_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V + \left( \frac{p dV}{dT} \right)_V = \left( \frac{dU}{dT} \right)_V \quad (4.2.7)$$

( $dV = 0$  при  $V = \text{const}$ ).

Изменение внутренней энергии идеального газа зависит только от температуры. Поэтому можно записать, что

$$dU = C_V dT, \quad (4.2.8)$$

или — после интегрирования —

$$U = C_V T. \quad (4.2.9)$$

Молекулы идеального газа не взаимодействуют между собой (то есть потенциальная энергия взаимодействия равна нулю), поэтому внутреннюю энергию идеального газа можно представить как произведение средней энергии одной молекулы  $\bar{\epsilon} = \frac{i}{2} kT$  [см. (4.1.11)] на число молекул газа  $N = \nu N_A$ .

$$U = N \bar{\epsilon} = \nu N_A \frac{i}{2} kT = \frac{i}{2} \nu RT. \quad (4.2.10)$$

Сравнение формул (4.2.10) и (4.2.9) дает, что

$$C_V = \frac{i}{2} \nu R, \quad (4.2.11)$$

тогда молярная теплоемкость при постоянном объеме равна

$$C_{V\mu} = \frac{i}{2} R. \quad (4.2.12)$$

Теплоемкость при постоянном давлении  $C_p$  соответствует нагреванию при постоянном давлении

$$C_p = \left( \frac{\delta Q}{dT} \right)_p = \left( \frac{dU}{dT} \right)_p + p \left( \frac{dV}{dT} \right)_p. \quad (4.2.13)$$

Из уравнения Менделеева—Клапейрона (4.1.28) следует, что при постоянном объеме  $p dV = \nu R dT$ . Тогда с учетом выражения (4.2.8) получаем:

$$C_p = C_V + \nu R = \frac{i+2}{2} \nu R, \quad (4.2.14)$$

или для одного моля:

$$C_{p\mu} = C_{V\mu} + R. \quad (4.2.15)$$

Таким образом, молярная теплоемкость при постоянном давлении равна

$$C_{p\mu} = \frac{i+2}{2} R. \quad (4.2.16)$$

Соотношение (4.2.15) называется с о о т н о ш е н и е м М а й е р а , которое раскрывает физический смысл универсальной газовой постоянной: универсальная газовая постоянная  $R$  равна работе, производимой одним молем идеального газа при изобарическом процессе, если температура газа повышается на один Кельвин.

Рассмотрим применение первого закона термодинамики к идеальным газам.

**Изобарический процесс.** При изобарическом процессе давление постоянно, а переменными величинами являются объем  $V$  и температура  $T$ . Используя соотношения (4.2.3) и (4.2.8), из первого закона термодинамики получаем:

$$\delta Q = C_V dT + p dV. \quad (4.2.17)$$

Изменение внутренней энергии в этом процессе равно

$$\Delta U = C_V \Delta T, \quad (4.2.18)$$

а совершаемая работа, поскольку давление постоянно, составляет

$$A = p \Delta V. \quad (4.2.19)$$

Для изобарического процесса можно записать, что  $\frac{V}{T} = \frac{\nu R}{p}$ , или  $\frac{V}{T} = \text{const}$

(уравнение изобары, закон Гей-Люссака). Графически этот процесс лучше всего представить в координатах  $V$ — $T$  (рис. 4.2.3).

**Изохорический процесс.** Если объем газа не изменяется ( $V = \text{const}$ ), то с повышением температуры возрастает давление. Работа в этом случае не производится, то есть

$$A = 0,$$

и, значит,

$$\delta Q = C_V dT. \quad (4.2.20)$$

Для изохорического процесса  $p = \frac{\nu RT}{V}$ , или  $\frac{p}{T} = \text{const}$  (уравнение изохоры, закон Шарля), и, следовательно, давление изменяется линейно при изменении температуры (рис. 4.2.4).

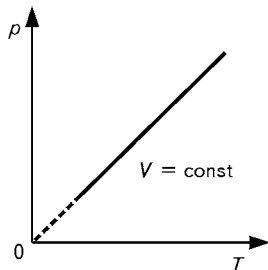


Рис. 4.2.4. Изохора в координатах  $p, T$

**Изотермический процесс.** Происходит при постоянной температуре ( $T = \text{const}$ ), а переменными величинами являются объем  $V$  и давление  $p$ . В изотермическом процессе для идеального газа внутренняя энергия не изменяется:

$$dU = 0,$$

поэтому вся поглощенная теплота расходуется на совершение работы:

$$\delta Q = \delta A = p dV. \quad (4.2.21)$$

Выразим давление из уравнения Менделеева—Клапейрона и подставим его в формулу (4.2.21):

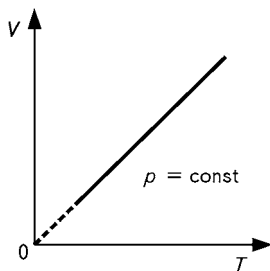


Рис. 4.2.3. Изобара в координатах  $V, T$

$$\delta Q = \delta A = \frac{\nu RT}{V} dV. \quad (4.2.22)$$

Интегрирование в пределах изменения объема дает

$$Q = A = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (4.2.23)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  — начальный и конечный объемы газа.

В изотермическом процессе вся теплота, поглощенная системой, преобразуется в работу, поэтому в указанном процессе идеальный газ производит наибольшую работу.

Для изотермического процесса  $pV = \text{const}$  (уравнение изотермы, закон Бойля—Мариотта). График изотермического процесса приведен на рис. 4.2.5.

**Адиабатический процесс.** При адиабатическом процессе система теплоизолирована, то есть  $\delta Q = 0$ , откуда следует, что

$$p dV = -C_V dT \quad (4.2.24)$$

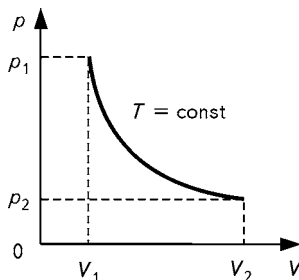


Рис. 4.2.5. Изотерма в координатах  $p, V$

и производимая системой работа равна убыли внутренней энергии

$$A = -C_V (T_2 - T_1), \quad (4.2.25)$$

при этом температура идеального газа понижается. Если идеальный газ адиабатически сжимать, то будет производиться работа над газом и его температура повысится.

Из соотношения (4.2.24) и уравнения Менделеева—Клапейрона (4.1.28) можно получить уравнение адиабаты (уравнение Пуассона):

$$pV^\gamma = \text{const}, \quad (4.2.26)$$

где  $\gamma$  — показатель адиабаты, равный отношению теплоемкости при постоянном давлении к теплоемкости при постоянном объеме:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{i+2}{i}. \quad (4.2.27)$$

Уравнение (4.2.26) можно преобразовать, получив зависимость между объемом и температурой:

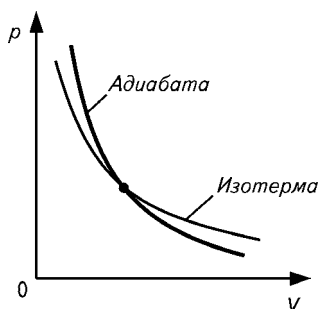


Рис. 4.2.6. Адиабата (1) и изотерма (2) в координатах  $p$ — $V$

$$TV^{\gamma-1} = \text{const.} \quad (4.2.28)$$

График адиабатического процесса (адиабата) отличается от изотермы тем, что если из одной точки сначала пойти по изотерме, а затем по адиабате, то последняя пойдет круче, то есть для точки  $C$  (рис. 4.2.6) выполняется условие:

$$\left| \left( \frac{dp}{dV} \right)_{\Delta Q=0} \right| > \left| \left( \frac{dp}{dV} \right)_T \right|. \quad (4.2.29)$$

### § 4.3. ЦИКЛ КАРНО. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ

Прежде чем приступить к рассмотрению второго закона термодинамики, удобно рассмотреть принцип действия **тепловых машин**. Тепловая машина включает в себя *рабочее тело* — вещество, над которым осуществляется циклический процесс, и два термостата: один, имеющий более высокую температуру  $T_1$ , — *нагреватель*; другой, имеющий более низкую температуру  $T_2$ , — *холодильник*, или теплоприемник. Для описания устройства тепловых машин используют термодинамические циклы. *Циклом*, или *круговым процессом*, называют процесс, по завершении которого система возвращается в исходное состояние.

Как правило, термодинамические циклы изображаются графически в виде замкнутой кривой на координатной плоскости  $p$ — $V$  (рис. 4.3.1). Пусть система переходит из состояния  $A$  в состояние  $B$  через точку  $C$ , а затем возвращается обратно в состояние  $A$  через точку  $D$ , то есть совершает обход кривой  $ACBD$  по часовой стрелке (так называемый **прямой цикл**). В процессе  $ACB$  газ расширяется, при этом совершаемая работа положительна и численно равна площади фигуры  $V_1ACBV_2$ . Возвращение из состояния  $B$  в состояние  $A$  сопровождается сжатием газа, то есть совершением газом отрицательной работы или положительной над газом, численно равной площади фигуры  $V_2BDV_1$ . Тогда суммарная механическая работа, совершенная си-

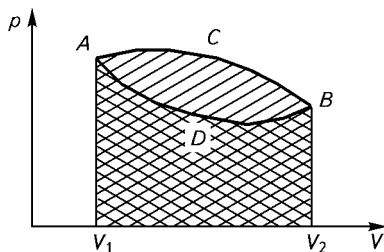


Рис. 4.3.1. Циклический процесс

стемой за один цикл, равна площади фигуры  $ACBDA$ . Машина, работающая по прямому циклу, называется *тепловой*, ее рабочее тело совершает положительную работу за счет передачи тепла от нагревателя к холодильнику.

Возможен также *о б р а т н ы й* ц и к л, при котором обход кривой осуществляется в направлении  $ADBCA$  (против часовой стрелки). В этом случае совершается положительная работа расширения на участке  $ADB$  и отрицательная работа сжатия на участке  $BCA$ . Работа, совершаемая рабочим телом за цикл, здесь отрицательна, теплота отбирается от более холодного тела и передается более горячему. Такой процесс невозможен сам по себе и осуществляется только за счет работы внешних сил. Машина, работающая по этому принципу, называется *холодильной*.

Сади Карно предложил цикл идеальной тепловой машины. На основании рассмотрения работы этой машины были получены важнейшие термодинамические соотношения. Рабочий цикл машины состоит из двух обратимых изотермических и двух обратимых адиабатических процессов. В машине отсутствуют потери на лучеиспускание, трение и т. п. Рассмотрим работу тепловой машины по *циклу Карно*, используя диаграмму, представленную на рис. 4.3.2.

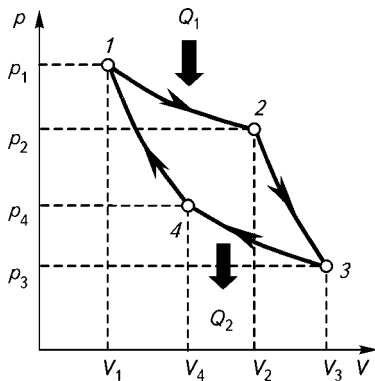


Рис. 4.3.2. Цикл Карно

Машина состоит из цилиндра, заполненного рабочим веществом (идеальным газом). Поршень цилиндра, перемещаясь, совершает работу. Точка 1 на диаграмме соответствует тепловому контакту цилиндра с нагревателем, при этом происходит изотермическое расширение при температуре  $T_1$ , соответствующее участку 1—2. В точке 2 цилиндр теплоизолируется и начинается адиабатическое расширение (участок 2—3), в конце которого температура понижается до температуры холодильника  $T_2$ . Затем цилиндр приводится в состояние контакта с холодильником и начинается изотермическое сжатие (участок 3—4). Точка 4 соответствует теплоизоляции цилиндра и началу адиабатического сжатия (участок 4—1). Таким образом, после завершения цикла тепловая машина совершает работу, равную площади, ограниченной кривыми, и приводится в исходное положение, соответствующее точке 1.

Для вычисления работы, производимой машиной за один цикл, можно просуммировать работы, совершаемые на каждом из участков диа-

граммы, то есть  $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$ . Принимая во внимание то, что работы на адиабатных участках подчиняются соотношению  $A_{23} = -A_{41}$ , достаточно вычислить  $A_{12}$  и  $A_{34}$ . В дальнейших вычислениях откажемся от понятий теплоты и работы как алгебраических величин (то есть таких, которые могут быть как положительными, так и отрицательными) и будем учитывать только их абсолютные значения.

Используя формулу (4.2.23), для изотермических участков 1—2 и 3—4 можно записать:

$$Q_1 = A_{12} = \nu RT_1 \ln \frac{V_2}{V_1}, \quad (4.3.1)$$

$$Q_2 = A_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_3}{V_4}, \quad (4.3.2)$$

где  $Q_1$  — количество теплоты, поглощенной рабочим телом от нагревателя;  $Q_2$  — количество теплоты, отданной рабочим телом холодильнику.

Из уравнения Пуассона (4.2.26) для адиабатических процессов (участки 2—3 и 4—1) следует, что

$$p_2 V_2^\gamma = p_3 V_3^\gamma, \quad (4.3.3)$$

$$p_1 V_1^\gamma = p_4 V_4^\gamma. \quad (4.3.4)$$

Разделим (4.3.3) на (4.3.4)

$$\frac{p_2 V_2^\gamma}{p_1 V_1^\gamma} = \frac{p_3 V_3^\gamma}{p_4 V_4^\gamma}$$

и преобразуем полученное выражение следующим образом:

$$\frac{(p_2 V_2) V_2^{\gamma-1}}{(p_1 V_1) V_1^{\gamma-1}} = \frac{(p_3 V_3) V_3^{\gamma-1}}{(p_4 V_4) V_4^{\gamma-1}}. \quad (4.3.5)$$

Для изотермических процессов (участки 1—2 и 3—4) выполняются условия  $p_2 V_2 = p_1 V_1$  и  $p_3 V_3 = p_4 V_4$ . Тогда из формулы (4.3.5) получаем:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3}{V_4}. \quad (4.3.6)$$

Выражение (4.3.2) в этом случае принимает вид:

$$Q_2 = A_{34} = \nu RT_2 \ln \frac{V_1}{V_2}. \quad (4.3.7)$$

Работа, совершаемая за весь цикл, равна разности теплоты  $Q_1$ , поглощенной рабочим телом от нагревателя, и теплоты  $Q_2$ , отданной рабочим телом холодильнику, и определяется следующим выражением:



$$A = Q_1 - Q_2 = \nu R(T_1 - T_2) \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (4.3.8)$$

Коэффициент полезного действия тепловой машины — безразмерная величина, равная отношению тепловой энергии, преобразованной в работу, ко всему количеству тепла, поглощенному машиной, то есть

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}. \quad (4.3.9)$$

Формулы (4.3.8) и (4.3.1) дают возможность получить важнейшее соотношение термодинамики:

$$\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (4.3.10)$$

Из этого соотношения следует, что коэффициент полезного действия идеальной тепловой машины не зависит от свойств рабочего вещества и определяется только температурами нагревателя и холодильника. Это позволяет установить абсолютную температурную шкалу, не зависящую от свойств термометрического тела. Соотношение (4.3.10) определяет максимально возможный КПД тепловой машины и указывает, что он будет тем больше, чем больше разность температур между нагревателем и холодильником. Это необходимо учитывать при конструкции тепловых машин.

Если цикл Карно обратить, то есть начать двигаться по диаграмме, представленной на рис. 4.3.2, против часовой стрелки, то в данном случае внешние силы будут совершать работу над машиной, при этом будет отбираться теплота от холодильника и передаваться нагревателю. Такой режим работы соответствует холодильной машине.

До сих пор мы рассматривали обратимые процессы, в которых отсутствуют тепловые потери. Все реальные процессы необратимы, в них часть энергии, которая могла бы быть использована для совершения работы, рассеивается в тепловую энергию хаотического движения молекул. Из соотношения (4.3.10) следует, что если при работе тепловой машины происходят потери, то

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_2} < \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (4.3.11)$$

Из неравенства (4.3.11) вытекают две формулировки **второго закона термодинамики**. Допустим, что в цикле не производится

работа ( $A = Q_1 - Q_2 = 0$ ), то есть все тепло, поглощенное от нагревателя, передается холодильнику, тогда  $\frac{T_1 - T_2}{T_1} > 0$  и  $T_1 > T_2$ . Та-

ким образом, температура нагревателя всегда больше температуры холодильника. Отсюда следует, что *невозможен самопроизвольный переход тепла от тел с более низкой температурой к телам с более высокой температурой* (ф о р м у л и р о в к а К л а у з и у с а).

Предположим, что теплота  $Q_1$ , переданная рабочему телу от нагревателя, без потерь расходуется на совершение работы рабочим телом (т. е.  $Q_2 = 0$ ). В этом случае неравенство (4.3.11) сво-

дится к виду  $1 < 1 - \frac{T_2}{T_1}$ . Однако его выполнение невозможно, так

как  $T_2 > 0$ ,  $T_1 > 0$  и  $T_2 < T_1$ . Отсюда следует вторая формулировка второго закона термодинамики (ф о р м у л и р о в к а Т о м с о н а): *невозможно создание вечного двигателя второго рода, то есть такого циклического процесса, в результате которого все поглощенное системой тепло расходовалось бы на совершение этой системой работы*.

В самом общем случае, объединив соотношение (4.3.10) и неравенство (4.3.11), можно записать:

$$\frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \leq \frac{T_1 - T_2}{T_1}. \quad (4.3.12)$$

Знак равенства соответствует идеальному циклу Карно, а знак неравенства — необратимому циклическому процессу. Таким образом, КПД необратимых машин всегда меньше КПД обратимых.

Итак, рассмотрение работы тепловой машины показывает, что ее КПД не может равняться единице, то есть вся теплота, забранная от нагревателя, не может превратиться в работу. Из опыта известно, что полное преобразование работы в теплоту, в конечном счете, происходит всегда. Таким образом, направление термодинамических процессов в природе соответствует рассеянию полезной энергии и превращению ее в энергию хаотического движения микрочастиц.

Соотношение (4.3.12) может быть переписано в следующем виде:

$$\frac{Q_1}{T_1} - \frac{Q_2}{T_2} \leq 0. \quad (4.3.13)$$

Отношение поглощенной или отданной теплоты в изотермическом процессе к температуре, при которой производится теплообмен, называется *приведенным количеством теплоты*.

Произвольный цикл можно представить в виде суммы бесконечно малых циклов, в которых на изотермических участках поглощаются или выделяются бесконечно малые количества теплоты  $\delta Q$ . Используя такой прием, соотношение (4.3.13) можно переписать в следующем виде:

$$\sum \frac{\delta Q_i}{T_i} \leq 0. \quad (4.3.14)$$

При непрерывном изменении состояния можно считать, что рабочее тело вступает в теплообмен с непрерывным рядом теплоотдатчиков и теплоприемников с постоянно изменяющейся температурой. Тогда сумма в неравенстве (4.3.14) заменяется интегралом

$$\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0. \quad (4.3.15)$$

Это соотношение, являющееся математическим выражением второго закона термодинамики, называется *неравенством Клаузиуса*.

Из соотношения (4.3.15) следует, что можно ввести функцию состояния системы, названной Клаузиусом энтропией и обозначаемой  $S$ . *Энтропией* называется функция состояния системы, дифференциал которой в бесконечно малом обратимом процессе равен отношению бесконечно малого количества тепла, сообщенного системе, к абсолютной температуре последней:

$$dS = \frac{\delta Q}{T}, \quad (4.3.16)$$

где дифференциал  $dS$  является полным.

Единицей измерения энтропии в системе СИ является Дж/К.

В случае обратимого перехода системы из состояния 1 в состояние 2 сумма приведенных количеств теплоты равна изменению энтропии в этом процессе:

$$\Delta S = S_2 - S_1 = \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}. \quad (4.3.17)$$

Рассмотрим цикл, состоящий из необратимого  $1-A-2$  и обратимого  $2-B-1$  процессов (рис. 4.3.3). Если хотя бы один участок цикла необратим, то и весь цикл необратим, то есть

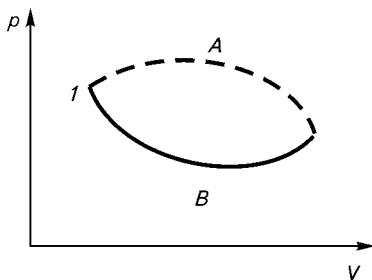


Рис. 4.3.3. Необратимый цикл

$$\oint \frac{\delta Q}{T} = \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{необр}}}{T} + \int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} < 0. \quad (4.3.18)$$

Для обратимого участка цикла можно записать:

$$\int_2^1 \frac{\delta Q_{\text{обр}}}{T} = S_1 - S_2.$$

Подставим это выражение в соотношение (4.3.18):

$$\int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{необр}}}{T} + S_1 - S_2 < 0$$

и выразим изменение энтропии в необратимом процессе:

$$\Delta S = S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{\delta Q_{\text{необр}}}{T}. \quad (4.3.19)$$

Для произвольного процесса

$$\Delta S = S_2 - S_1 \geq \int_1^2 \frac{\delta Q}{T}, \quad (4.3.20)$$

где равенство имеет место для обратимого процесса, а неравенство — для необратимого.

Для изолированных систем ( $\delta Q = 0$ ), можно записать, что

$$dS \geq 0. \quad (4.3.21)$$

Таким образом, *энтропия изолированной системы либо возрастает (в необратимых процессах), либо остается неизменной (в обратимых процессах)*. Другими словами, энтропия изорванной системы не может убывать, что является еще одной формулировкой второго закона термодинамики, а выражение (4.3.21) — его математической записью.

Процесс перехода из состояния 1 в состояние 2 не может быть реализован, если нарушается неравенство (4.3.20). Если система не находится в состоянии равновесия, то она будет самопроизвольно приближаться к этому состоянию равновесия, причем энтропия ее будет увеличиваться, достигая максимума в положении равновесия.

Больцман показал, что энтропия термодинамической системы определяется **статистическим весом** или **термодинамической вероятностью**  $W$ , равной числу равновероятных микросостояний системы, с помощью которых может реализоваться данное макро-

состояние этой системы. Согласно Больцману, связь между термодинамической вероятностью  $W$  и энтропией  $S$  имеет вид:

$$S = k \ln W ,$$

(4.3.22)

где  $k$  — постоянная Больцмана. Выражение (4.3.22) носит название *формулы Больцмана*.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в некотором объеме, разделенном на два отсека (рис. 4.3.4), могут находиться четыре молекулы газа:  $a, b, c$  и  $d$ . В табл. 4.3.1 показаны возможные способы их распределения между отсеками. Любой из этих способов определяет микросостояние системы. Каждое микросостояние равновероятно. А поскольку общее число таковых равно 16, то вероятность реализации любого из них равна 1/16. Состояние, в кото-

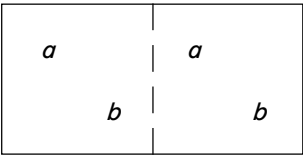


Рис. 4.3.4. Распределение молекул по двум отсекам

Таблица 4.3.1.

Макро- и микросостояния системы

Макросостояние		Микросостояния (способы реализации данного макросостояния)		Реализация данного макросостояния (термодинамическая вероятность)	
Число молекул		Молекулы, расположенные			
слева	справа	слева	справа	число способов	вероятность
0	4	—	$a\ b\ c\ d$	1	1/16
1	3	$a$ $b$ $c$ $d$	$b\ c\ d$ $a\ c\ d$ $a\ b\ d$ $a\ b\ c$	4	4/16
2	2	$a\ b$ $a\ c$ $a\ d$ $b\ c$ $b\ d$ $c\ d$	$c\ d$ $b\ d$ $b\ c$ $a\ d$ $a\ c$ $a\ b$	6	6/16
3	1	$a\ b\ c$ $a\ b\ d$ $a\ c\ d$ $b\ c\ d$	$d$ $c$ $b$ $a$	4	4/16
4	0	$a\ b\ c\ d$	—	1	1/16
		Всего способов:		16	

ром в каждом из отсеков находится определенное число молекул (не важно каких), является макросостоянием данной системы. Например, макросостояние, в котором слева находится одна молекула, а справа — три, реализуется четырьмя способами, а вероятность его реализации равна  $4/16$ . Понятно, что наиболее вероятным макросостоянием (вероятность  $6/16$ ) будет состояние с равномерным распределением частиц (по два в каждом отсеке).

Для системы из  $k$ -отсеков и общего числа молекул  $N$ , термодинамическая вероятность макросостояния рассчитывается по формуле

$$W = \frac{N!}{N_1! N_2! \dots N_k!}, \quad (4.3.23)$$

где  $N_1, N_2, \dots, N_k$  — количество молекул в соответствующем отсеке.

Из формул (4.3.23) и (4.3.22) следует, что наиболее вероятному макросостоянию отвечает наибольшее значение энтропии. В этом состоянии частицы распределены наиболее хаотично, то есть порядок в системе минимальный. Для изолированных систем с очень малым числом частиц (как в приведенном примере) вероятность отклонения от наиболее вероятного макросостояния не так уж мала, то есть возможно самопроизвольное уменьшение энтропии. Поэтому для систем с малым числом частиц второй закон термодинамики неприменим. С увеличением числа частиц вероятность случайного отклонения от наиболее вероятного макросостояния уменьшается и становится практически невозможной для числа частиц порядка числа Авогадро. Поэтому состояние с максимальной энтропией является равновесным, так как не способно самопроизвольно изменяться во времени.

Таким образом, энтропия является мерой неупорядоченности системы, и ее возрастание в изолированной системе указывает на стремление системы перейти из упорядоченного в хаотическое состояние. Классическая термодинамика утверждает, что самопроизвольный переход изолированной системы от хаоса к порядку невозможен.

Состояние макроскопических систем характеризуется термодинамическими параметрами. При этом в малых объемах пространства, занимаемого системой, возможно случайное увеличение или уменьшение плотности, давления, температуры и так далее по сравнению со средними величинами указанных параметров для всей системы. Такие отклонения (флуктуации) являются кратковременными и незначительными.

Клаузиус обобщил второй закон термодинамики на всю Вселенную, считая ее изолированной системой, в которой со време-

нем должно произойти выравнивание термодинамических параметров и равномерное распределение вещества. Теория Клаузиуса получила название теории «тепловой смерти» Вселенной. С самого начала она подвергалась критике и на данный момент опровергнута. Во-первых, если Вселенная должна прийти в состояние равновесия, то возникает вопрос, почему это не произошло до сих пор. Во-вторых, Вселенная состоит из бесконечного числа частиц, и для нее невозможно указать наиболее равновероятное макросостояние.

Первый и второй законы термодинамики можно объединить в *основном уравнении термодинамики*:

$$T dS \geq dU + \delta A . \quad (4.3.23)$$

Если работа выполняется посредством расширения газа против внешних сил, то основное уравнение термодинамики приобретает вид:

$$T dS \geq dU + p dV . \quad (4.3.24)$$

В заключение укажем, что первый закон термодинамики устанавливает количественное соотношение между теплотой, работой и изменением внутренней энергии термодинамической системы, но не определяет направление термодинамических процессов. Первый закон выполняется всегда для любых систем. Второй закон термодинамики является статистическим законом и справедлив для систем с большим, но конечным числом частиц. Этот закон указывает наиболее вероятное направление процессов, и если утверждается, что данный процесс невозможен, то следует понимать, что вероятность его совершения существует, но ничтожно мала.

## § 4.4. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПОТЕНЦИАЛЫ

Проведение любых термодинамических расчетов невозможно без использования термодинамических потенциалов. *Термодинамическим потенциалом* называется функция состояния, изменение которой в некотором процессе, протекающем при постоянных значениях определенной пары термодинамических параметров, равно полезной работе, совершаемой системой.

Термодинамическими потенциалами являются уже известная внутренняя энергия  $U$ , а также энтальпия  $H$ , свободная энергия Гельмгольца  $F$ , термодинамический потенциал Гиббса  $G$ , химический потенциал  $\mu$  и электрохимический потенциал  $\tilde{\mu}$ .

Полная работы системы  $\delta A$  равна сумме работы против внешнего давления  $p dV$  и полезной работы  $\delta A_{\text{п}}$  (работы, совершаемой против других внешних сил):

$$\delta A = \delta A_{\text{п}} + p dV. \quad (4.4.1)$$

Объединим записи первого и второго законов термодинамики для обратимых процессов (при этом  $T dS = \delta Q$ ):

$$T dS = dU + \delta A. \quad (4.4.2)$$

Подставив формулу (4.4.1) в уравнение (4.4.2), выразим полезную работу:

$$-\delta A_{\text{п}} = dU + p dV - T dS. \quad (4.4.3)$$

Данное выражение позволяет определить полезную работу в условиях постоянства той или иной пары термодинамических параметров. Например, при постоянных температуре и объеме полезная работа совершается за счет изменения изохорно-изотермического потенциала, или *свободной энергии Гельмгольца*  $F$ :

$$dF = -\delta A_{\text{п}} = dU - T dS. \quad (4.4.4)$$

Полезная работа, совершаемая системой в различных условиях, представлена в табл. 4.4.1.

Процессы, протекающие в биологических системах, чаще всего совершаются при постоянных температуре и давлении. Поэто-

Таблица 4.4.1

#### Термодинамические потенциалы

Постоянные параметры	Название потенциала	Вид функции	Условие равновесия
$V, S$	Внутренняя энергия, или изохорно-изоэнтروпийный потенциал	$dU$	$U = U_{\min}$
$P, S$	Энтальпия, или изобарно-изоэнтропийный потенциал	$dH = dU + p dV$	$H = H_{\min}$
$T, V$	Свободная энергия Гельмгольца, или изохорно-изотермический потенциал	$dF = dU - T dS$	$F = F_{\min}$
$T, P$	Термодинамический потенциал Гиббса, или изобарно-изотермический потенциал	$dG = dU + p dV - T dS$	$G = G_{\min}$



му полезная работа в биосистемах определяется изменением *термодинамического потенциала Гиббса*<sup>1</sup>:

$$dG = -\delta A_{\Pi} = dU + pdV - TdS = dH - TdS. \quad (4.4.5)$$

где  $dH = dU + pdV$  — изменение энтальпии.

При этом слагаемое  $dH$  определяет изменение потенциальной энергии системы, а слагаемое  $TdS$  — ту часть энергии системы, которая не может быть использована на совершение полезной работы, следовательно, характеризует необратимость процесса. При  $TdS = 0$  процесс обратим.

В реальных необратимых процессах

$$TdS > \delta Q. \quad (4.4.6)$$

Используя данное выражение, можно показать, что процессы всегда протекают в том направлении, при котором свободная энергия Гельмгольца и термодинамический потенциал Гиббса уменьшаются. Так как эти величины всегда стремятся к минимальному значению, то в состоянии равновесия

$$F = F_{\min}; \quad (4.4.7)$$

$$G = G_{\min}. \quad (4.4.8)$$

## § 4.5. РЕАЛЬНЫЕ ГАЗЫ

Уравнение Менделеева—Клапейрона справедливо только для достаточно разреженных газов, так как для них можно пренебречь, во-первых, суммарным объемом молекул, он должен быть пренебрежимо мал по сравнению с общим объемом, занимаемым газом в сосуде (то есть считать, что объем, доступный для движения молекул газа, равен общему объему сосуда); во-вторых, межмолекулярным взаимодействием. Эти условия выполняются при средних температурах и низких давлениях.

При понижении температуры и увеличении давления (то есть с ростом плотности газа) начинают сказываться силы межмолекулярного взаимодействия, в результате чего уравнение Менделеева—Клапейрона уже непригодно для описания таких газов. Некоторые газы, например водород и гелий, подчиняются закону Бойля—Мариотта в довольно широком диапазоне давлений и температур, другие газы, например углекислый, уже при температуре 250 К дают значительные отклонения от закона Бойля—Мариотта.

---

<sup>1</sup> Иногда в литературе термодинамический потенциал Гиббса называют свободной энергией Гиббса или просто — свободной энергией.

С увеличением давления молекулы сближаются. В результате роста сил межмолекулярного притяжения молекулы газа испытывают большее давление по сравнению с давлением газа на стенки сосуда, в котором он находится. Кроме того, с увеличением плотности уменьшается свободный объем, доступный для движения молекул газа. Таким образом, для реальных газов необходимо вводить поправки в уравнение состояния, с помощью которых можно улучшить совпадение реальных изотерм с теоретическими.

Наиболее простым уравнением состояния реального газа является *уравнение Ван-дер-Ваальса*, которое содержит всего две дополнительные константы:

$$\left(p + \frac{v^2 a}{V^2}\right)(V - vb) = v RT, \quad (4.5.1)$$

где  $p$  — давление;  $V$  — объем;  $v$  — число молей молекул газа;  $a$  и  $b$  — константы Ван-дер-Ваальса, определяемые экспериментально для каждого газа. Единицы измерения констант  $a$  и  $b$  следующие:  $[a] = \text{Н} \cdot \text{м}^4/\text{моль}^2$ ;  $[b] = \text{м}^3/\text{моль}$ .

Слагаемое  $+v^2 a/V^2$  определяет значение дополнительного давления, которое связано с силами межмолекулярного взаимодействия; слагаемое  $-vb$  дает поправку, учитывающую суммарный объем молекул.

Очевидно, что минимальный объем, занимаемый одним молем газа, несколько больший, чем  $N_A V_0$ , где  $N_A$  — число Авогадро;  $V_0$  — объем одной молекулы. Наиболее простой расчет, в котором молекула считается сферической, дает следующее соотношение для константы  $b$ :

$$b \approx 4N_A V_0. \quad (4.5.2)$$

Изотермы, соответствующие уравнению Ван-дер-Ваальса (рис. 4.5.1, *а*), при высоких температурах практически совпадают с изотермами идеального газа, однако с понижением температур нарастают отклонения, которые приводят к принципиальному отличию изотерм реального газа от изотерм идеального газа. Появляются области неустойчивости газового состояния, которые соответствуют сосуществованию жидкой и газообразной фаз, то есть при определенных давлениях и температурах экспериментально наблюдается переход из газообразного в жидкое состояние.

Экспериментальные изотермы (рис. 4.5.1, *б*) реальных газов несколько отличаются от изотерм, построенных по уравнению Ван-дер-Ваальса (рис. 4.5.1, *а*). Рассмотрим следующий эксперимент. Газ, находящийся в закрытом сосуде под поршнем, начинают сжи-

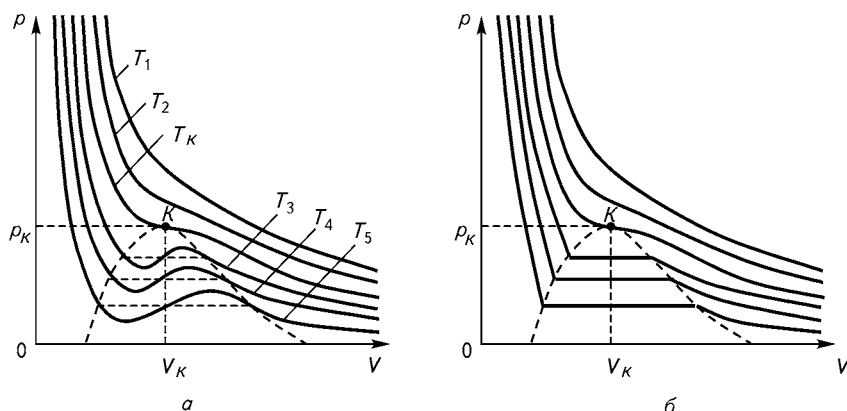


Рис. 4.5.1. Изотермы реальных газов:

*a* — построенные по уравнению Ван-дер-Ваальса; *б* — экспериментальные изотермы углекислого газа; *K* — критическая точка;  $p_K$  — критическое давление;  $V_K$  — критический объем;  $T_K$  — критическая температура; соотношение между температурами, при которых получены изотермы:  $T_1 > T_2 > T_K > T_3 > T_4 > T_5$ ; кривой пунктирной линией показана область одновременного сосуществования жидкого и газообразного состояний

мать. С уменьшением объема газа его давление возрастает (участок *AB* на рис. 4.5.2, *б*). При достижении давления насыщенного пара (точка *B*) начинается процесс конденсации газа в жидкость. На участке *BF* все больше молекул газа переходит в жидкое состояние, при этом давление оставшегося газа не изменяется и остается равным давлению насыщенного пара. После того как газ полностью конденсируется, давление вновь начинает возрастать (участок *FG*), но уже значительно быстрее, чем на участке *AB*, так как жидкости слабо сжимаются. Участки *AB* и *FG* экспериментальной изотермы хорошо совпадают с аналогичными участками изотермы Ван-дер-Ваальса (рис. 4.5.2, *а*).

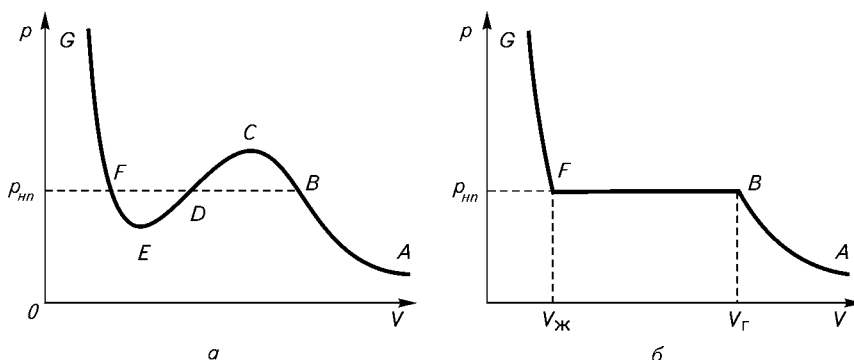


Рис. 4.5.2. Изотерма, рассчитанная по уравнению Ван-дер-Ваальса (*а*), и экспериментальная изотерма (*б*) реального газа

Прямому участку  $BF$  экспериментальной изотермы соответствует петля  $BCDEF$  изотермы Ван-дер-Ваальса (рис. 4.5.2,  $a$  и  $b$ ), а давлению насыщенного пара — три значения объема (уравнение Ван-дер-Ваальса является кубическим относительно объема). Участки  $BC$  и  $EF$  иногда наблюдаются в эксперименте. Участок  $BC$  соответствует *пересыщенному пару* — состоянию газа, находящегося при давлении, превышающем давление насыщенного пара; такое состояние возникает при отсутствии в газе центров конденсации (пылинок твердого вещества, мелких капелек жидкости, электрически заряженных частиц). Участок  $EF$  соответствует *перегретой жидкости*, то есть некипящей жидкости, находящейся при температуре выше температуры кипения. Это состояние реализуется в хорошо очищенной жидкости, в которой отсутствуют центры кипения (песчинки, пузырьки газов). Состояния пересыщенного пара и перегретой жидкости являются метастабильными. Состояние, соответствующее участку  $CDE$  изотермы Ван-дер-Ваальса, практически неосуществимо, так как на этом промежутке уменьшение объема должно было бы сопровождаться уменьшением давления.

Горизонтальные участки на изотермах (рис. 4.5.1,  $b$ , рис. 4.5.2,  $b$ ) соответствуют равновесию жидкости и насыщенного пара. Границы этих участков отвечают объемам газообразной ( $V_g$ ) и жидкой ( $V_{ж}$ ) фаз. При повышении температуры участок изотермы, соответствующий двухфазной области, сужается и, наконец, при определенной температуре стягивается в точку, которая называется *критической* (рис. 4.5.1, точка  $K$ ). Температура  $T_k$ , соответствующая этой точке, называется *критической*. При данной температуре исчезает различие между жидким и газообразным состоянием вещества, удельная теплота парообразования и коэффициент поверхностного натяжения обращаются в нуль. При температуре выше критической никаким сжатием невозможно перевести газ в жидкое состояние.

Критическая точка характеризуется критическими параметрами  $T_k$ ,  $p_k$ ,  $V_k$ . Состояние вещества, в котором термодинамические параметры равны критическим, называется *критическим состоянием*. Из уравнения Ван-дер-Ваальса можно получить значения критических параметров, в которые входят в различных комбинациях константы  $a$  и  $b$ :

$$T_k = \frac{8a}{27Rb}; \quad (4.5.3)$$

$$p_k = \frac{a}{27b^2}; \quad (4.5.4)$$

$$V_k = 3b. \quad (4.5.5)$$

где  $V_k$  — критический объем одного моля газа.

Получив в эксперименте значения критических параметров вещества  $T_k$  и  $p_k$  или любую другую пару критических параметров, можно определить константы Ван-дер-Ваальса  $a$  и  $b$ .

Внутренняя энергия реального газа включает в себя кинетическую энергию  $E_{\text{кин}}$  движения молекул и потенциальную энергию  $E_{\text{пот}}$  их взаимодействия. Кинетическая энергия зависит только от температуры газа ( $E_{\text{кин}} = \nu C_{V\mu} T$ , где  $C_{V\mu}$  — молярная теплоемкость при постоянном объеме), а потенциальная энергия — от объема, поскольку взаимодействие между молекулами газа зависит от среднего расстояния между ними, которое, в свою очередь, определяется объемом. Добавочное молекулярное давление, определяющее межмолекулярное взаимодействие,  $p' = \nu^2 a/V^2$  [см. формулу (4.5.1)], приводит к тому, что при изменении объема газа выполняется дополнительная работа молекулярных сил, равная изменению потенциальной энергии:

$$E_{\text{пот}} = A = \int p' dV = \frac{-\nu^2 a}{V} + \text{const}.$$

Таким образом, внутренняя энергия реального газа с точностью до константы интегрирования равна

$$U = \nu C_{V\mu} T - \frac{\nu^2 a}{V}. \quad (4.5.6)$$

Адиабатическое расширение реального газа в определенных условиях может приводить как к повышению, так и к понижению его температуры. Это зависит от того, какие силы, притяжения или отталкивания, преобладают в данных условиях. Если молекулы располагаются на больших расстояниях друг от друга, то преобладают силы притяжения. В этом случае расширение газов приводит к увеличению потенциальной энергии притяжения и уменьшению кинетической энергии молекул, а следовательно, — к уменьшению температуры газа. При значительном сближении силы отталкивания преобладают над силами притяжения. Расширение газа в этих условиях сопровождается уменьшением потенциальной энергии отталкивания и увеличением кинетической энергии, то есть повышением температуры.

Изменение температуры газа при стационарном адиабатическом протекании его через пористую перегородку называется *эффектом Джоуля—Томсона*. В этом процессе газ, который первоначально занимал объем  $V_1$  при температуре  $T_1$  и высоком давлении  $p_1$ , перетекает через пористую перегородку в область с малым дав-

лением  $p_2$ , занимая после перехода объем  $V_2$  и принимая температуру  $T_2$ .

В адиабатических условиях результирующая работа  $(p_1 V_1 - p_2 V_2)$ , совершаемая газом, может пойти только на изменение его внутренней энергии

$$U_2 - U_1 = p_1 V_1 - p_2 V_2. \quad (4.5.7)$$

Из соотношения (4.5.7) следует, что энтальпия в вышеописанном процессе остается постоянной:

$$H = U + pV, \quad (4.5.8)$$

Изменение температуры в эффекте Джоуля—Томсона определяется формулой:

$$\Delta T = T_2 - T_1 = \frac{\nu}{C_{p\mu}} \left( RT_1 \frac{b}{V_1 - \nu b} - \frac{2a\nu}{V_1} \right), \quad (4.5.9)$$

где  $C_{p\mu} = C_{V\mu} + R$  — молярная теплоемкость при постоянном давлении;  $\nu$  — количество вещества. Соотношение (4.5.9) получено в предположении, что  $V_2 \gg V_1$ .

Если изменение температуры в процессе Джоуля—Томсона меньше нуля ( $\Delta T = T_2 - T_1 < 0$ ), то эффект считается положительным и газ охлаждается. Это наблюдается при небольших значениях давления  $p_1$ , когда преобладают силы притяжения. В отрицательном эффекте Джоуля—Томсона температура газа повышается ( $\Delta T > 0$ ), что происходит при больших значениях давления  $p_1$ , когда преобладают силы отталкивания.

Знак эффекта Джоуля—Томсона определяется множителем в уравнении (4.5.9):

$$\left( RT_1 \frac{b}{V_1 - \nu b} - \frac{2a}{V_1} \right). \quad (4.5.10)$$

Если выражение (4.5.10) меньше нуля, то  $\Delta T$  также меньше нуля и эффект Джоуля—Томсона положителен, то есть

$$T_1 < \frac{2a(V_1 - \nu b)}{RbV_1}. \quad (4.5.11)$$

При отрицательном эффекте Джоуля—Томсона

$$T_1 > \frac{2a(V_1 - \nu b)}{RbV_1}. \quad (4.5.12)$$

Из соотношений (4.5.11) и (4.5.12) следует, что уравнение

$$T_1 = \frac{2a(V_1 - vb)}{RbV_1} \quad (4.5.13)$$

дает соотношение между начальными температурой и объемом, при которых изменение температуры не происходит (в этом случае силы притяжения и отталкивания взаимно компенсируются).

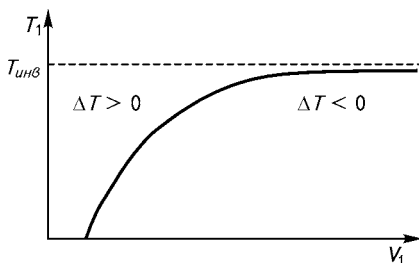


Рис. 4.5.3. Кривая, определяющая знак эффекта Джоуля—Томсона

Кривая, соответствующая данному уравнению, приведена на рис. 4.5.3. Область над кривой соответствует отрицательному эффекту Джоуля—Томсона ( $\Delta T > 0$ ), область под кривой — положительному эффекту ( $\Delta T < 0$ ). Точки кривой соответствуют температуре, при переходе через которую знак эффекта Джоуля—Томсона изменяется. Эта температура называется *температурой инверсии*.

Кривая, выражаемая уравнением (4.5.13), при  $V_1 \rightarrow \infty$ , асимптотически стремится к значению

$$T_{инв} = \frac{2a}{Rb}. \quad (4.5.14)$$

Это наибольшее значение температуры, при которой возможно изменение знака эффекта Джоуля—Томсона. Выше этой температуры эффект всегда отрицателен.

С помощью эффекта Джоуля—Томсона можно понижать температуру газа вплоть до температур, при которых происходит превращение газа в жидкость. Указанный процесс применяется в промышленном производстве сжиженных газов.

Жидкие газы и низкие температуры, при которых они находятся, получили широкое применение в медицине. Например, жидкий азот используется в автономных криохирургических аппаратах (криодеструкторах), предназначенных для лечения тканевых патологий методом бескровной криохирургии. Некоторые приборы не требуют доступа жидких хладагентов, а непосредственно используют для получения жидких газов эффект Джоуля—Томсона: предварительно сжатый газ охлаждается и становится жидким непосредственно в наконечнике прибора. Такое использование эффекта Джоуля—Томсона устраняет проблемы, связанные с получением, транспортировкой и хранением жидких хладагентов.

Криометоды, применяемые в медицине, заключаются в разрушении патологических клеток при их замораживании до низких температур, например температуры жидкого азота ( $-196\text{ }^{\circ}\text{C}$ ), и широко применяются в гинекологии для лечения патологий шейки матки; отоларингологии — для лечения хронического ринита, фарингита, тонзиллита и ринхопатии (храпа); дерматологии и косметологии — для лечения множественных кондилом, удаления бородавок и папиллом; проктологии — для лечения геморроя; онкологии — для лечения новообразований различного происхождения.

Криотерапевтические методы обладают рядом преимуществ: локальным замораживанием патологически измененных клеток без повреждения здоровых клеток; минимальными болевыми ощущениями (так как холод замораживает и нервные окончания); отсутствием потребности в анестезии; полной безопасностью, исключаящей травму пациента; отсутствием кровотечения (холодовое воздействие блокирует мелкие и средние артериальные и венозные сосуды); быстрым заживлением операционной раны без образования грубых рубцов и спаек; обычно требуют госпитализации пациентов.

## § 4.6. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ

В термодинамике *фазой* называется термодинамически равновесное состояние вещества, отличающееся по физическим свойствам от других возможных равновесных состояний (других фаз) того же вещества. *Агрегатными состояниями* называются состояния, отличающиеся друг от друга структурой и характером теплового движения структурных элементов (атомов, молекул, ионов и т. п.). Существует только три агрегатных состояния<sup>1</sup> данного вещества: твердое, жидкое и газообразное, а количество фаз может быть и большим. Например, алмаз и графит являются различными твердыми фазами углерода.

Переход вещества из одной фазы в другую называют *фазовым переходом*. Различают фазовые переходы первого и второго рода. Фазовые переходы первого рода всегда связаны с выделением или поглощением некоторого количества теплоты, называемой *теплотой* (или скрытой теплотой) *фазового перехода*. К таким переходам относятся испарение, плавление, сублимация, многие переходы твердых тел из одной кристаллической модификации в другую.

---

<sup>1</sup> Иногда четвертым агрегатным состоянием называют плазму.



Теплота фазовых переходов второго рода всегда равна нулю. Примером такого перехода является переход обычного проводника в сверхпроводящее состояние. Мы ограничимся рассмотрением фазовых переходов первого рода.

Переход жидкости в газообразное состояние называется *испарением*. В процессе испарения жидкость покидают наиболее быстрые молекулы, обладающие наибольшей энергией, вследствие чего температура жидкости понижается. Для поддержания процесса испарения при одной и той же температуре необходимо сообщить жидкости определенное количество теплоты, называемое *теплотой испарения* или *парообразования*. Теплота испарения  $Q_{\text{исп}}$  определяется формулой:

$$Q_{\text{исп}} = rm, \quad (4.6.1)$$

где  $m$  — масса испарившегося вещества;  $r$  — удельная теплота испарения, численно равная количеству теплоты, необходимого для испарения 1 кг этого вещества при данной температуре,  $[r] = \text{Дж/кг}$ . Теплота испарения зависит от температуры, при которой происходит указанный процесс.

Пар, находящийся в состоянии термодинамического равновесия со своей жидкостью (или твердым телом — см. явление сублимации), называется *насыщенным паром*. В равновесии число молекул, переходящих из жидкости (твердого тела) в пар в единицу времени, равно числу молекул пара, возвращающихся в жидкое (твердое) состояние за то же время. Давление, при котором наблюдается равновесие, называется *давлением насыщенного пара*. С повышением температуры давление насыщенного пара возрастает.

Твердые тела могут переходить в газообразное состояние, минуя жидкое. Такой процесс называется *сублимацией*. Так же, как и для испарения, для поддержания процесса сублимации при данной температуре требуется приток тепла (*теплоты сублимации*). Сублимации подвержены все твердые тела, но одни из них при обычных температурах сублимируют с довольно высокой скоростью (например углекислота), а другие — крайне медленно.

Процесс, обратный испарению или сублимации, называется *конденсацией*. При конденсации теплота, затраченная на испарение (сублимацию), передается обратно в окружающую среду. Поэтому конденсация всегда сопровождается выделением тепла. Теплота конденсации равна теплоте испарения (сублимации) при данной температуре.

Температура, при которой происходит фазовый переход из жидкого состояния в газообразное при данном значении давления, называется *температурой кипения*. Температура кипения рав-

на температуре конденсации и остается постоянной в течение процесса фазового перехода.

В твердом кристаллическом теле молекулы вещества колеблются относительно своих положений равновесия. Если такому телу сообщить некоторое количество теплоты, то колебания усилятся, и кристаллическая решетка может разрушиться. Фазовый переход кристаллического тела в жидкое состояние называется **плавлением** и при данном значении давления происходит при определенной для каждого вещества температуре, называемой *температурой плавления*. Затраченное при этом переходе количество теплоты  $Q_{\text{пл}}$  называется *теплотой плавления* и определяется формулой:

$$Q_{\text{пл}} = \lambda m, \quad (4.6.2)$$

где  $m$  — масса расплавленного вещества;  $\lambda$  — *удельная теплота плавления*, численно равная количеству теплоты, необходимого для того, чтобы превратить 1 кг твердого вещества в жидкое состояние при температуре плавления  $[\lambda] = \text{Дж/кг}$ .

Обратный плавлению процесс **кристаллизации** сопровождается выделением такого же количества теплоты  $Q_{\text{кр}}$ , которое поглощается при плавлении. Температура плавления совпадает с температурой кристаллизации и остается постоянной в течение всего процесса плавления или кристаллизации.

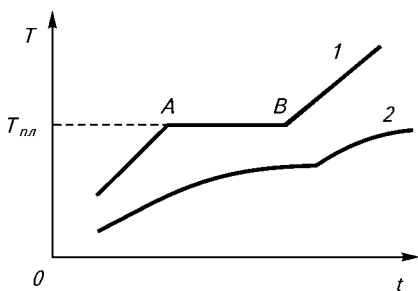


Рис. 4.6.1. Кривые нагревания кристаллического (1) и аморфного (2) тел

Кривые нагревания (зависимости температуры тела от времени при постоянной скорости притока тепла) кристаллических и аморфных тел (см. § 7.4) отличаются друг от друга (рис. 4.6.1). Если к кристаллическому телу, находящемуся при температуре ниже температуры плавления, подводить тепло с постоянной скоростью, то с течением времени температура

тела будет повышаться, пока не достигнет температуры плавления (точка А на кривой 1). Начиная с этого момента, температура тела перестает изменяться. На участке АВ кривой 1 сообщаемое тепло расходуется не на повышение температуры тела, а на разрушение кристаллической решетки и превращение кристалла в жидкость. Температура вновь начнет повышаться только, когда весь кристалл расплавится. Процесс кристаллизации происходит в обратной последовательности.

Аморфные тела не имеют правильной кристаллической решетки, поэтому им не требуется энергия для ее разрушения. Все подводимое тепло расходуется на увеличение кинетической энергии молекул аморфного тела, постепенное его размягчение и превращение в жидкое состояние (рис. 4.6.1, кривая 2). Для аморфных тел невозможно установить точное значение температуры плавления. Как правило, указывают температурный интервал, в течение которого происходит размягчение.

Температура кипения зависит от давления, увеличиваясь с его повышением, то есть каждому значению давления соответствует определенное значение температуры кипения. Если изобразить эти значения на координатной плоскости  $p$ — $T$ , то получим так называемую кривую испарения (рис. 4.6.2). Эта кривая служит границей между жидким и газообразными состояниями вещества, а каждая ее точка соответствует равновесию жидкости и газа в данных условиях. Кривая испарения обрывается в критической точке  $K$ , так как при более высокой температуре невозможно существование жидкого состояния (см. § 4.5).

Температура плавления вещества также зависит от давления. Для большинства веществ с ростом давления температура плавления повышается, а для некоторых (например для воды) — понижается. Совокупность значений температуры плавления и соответствующие им значения давления образуют кривую плавления (рис. 4.6.2). Кривая плавления служит границей между твердым и жидким состояниями вещества, а каждая ее точка соответствует равновесию жидкости и твердого тела. Кривая, определяющая равновесие твердого и газообразного состояний, называется кривой сублимации (рис. 4.6.2).

На рис. 4.6.2. представлена так называемая *диаграмма состояния*. Кривые плавления, испарения и сублимации разбивают координатную плоскость  $p$ — $T$  на три области, соответствующие жидкому, твердому или газообразному состоянию данного вещества. Каждая точка диаграммы состояния изображает равновесие между

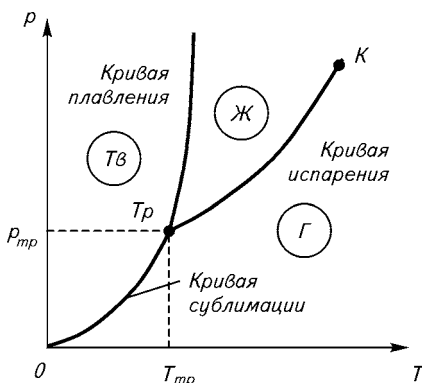


Рис. 4.6.2. Диаграмма состояния вещества:

Tr — тройная точка; K — критическая точка; фазы: Тв — твердая; Ж — жидкая; Г — газообразная

двумя соответствующими фазами. Все три кривые пересекаются в одной точке, так называемой **тройной**, соответствующей равновесию трех состояний. Для данного вещества каждой тройной точке<sup>1</sup> соответствует только одно определенное значение температуры и давления.

Зависимость температуры фазового перехода от давления описывается *уравнением Клапейрона—Клаузиуса*:

$$\frac{dT}{dp} = \frac{T(V_2 - V_1)}{q_{12}}, \quad (4.6.3)$$

где  $q_{12}$  — удельная теплота фазового перехода из фазы 1 в фазу 2;  $V_1$  и  $V_2$  — удельные объемы (объемы единицы массы вещества) первой и второй фаз.

Уравнение Клапейрона—Клаузиуса справедливо для любого фазового перехода первого рода для чистого вещества. Например, для процесса кипения можно записать:

$$\frac{dT_{\text{кип}}}{dp} = \frac{T_{\text{кип}}(V_{\text{г}} - V_{\text{ж}})}{r}, \quad (4.6.4)$$

а для процесса плавления —

$$\frac{dT_{\text{пл}}}{dp} = \frac{T_{\text{пл}}(V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}})}{\lambda}, \quad (4.6.5)$$

где  $T_{\text{кип}}$  и  $T_{\text{пл}}$  — температуры кипения и плавления;  $r$  и  $\lambda$  — удельные теплоты кипения и плавления;  $V_{\text{г}}$ ,  $V_{\text{ж}}$  и  $V_{\text{тв}}$  — удельные объемы газа, жидкости и твердого тела.

Из уравнения Клапейрона—Клаузиуса (4.6.3) следует, что температура фазового перехода будет повышаться или понижаться с ростом давления в зависимости от того, какая из фаз обладает большим удельным объемом. Например, для большинства веществ удельный объем твердой фазы меньше удельного объема жидкой фазы ( $V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}} > 0$ ), поэтому с ростом давления температура плавления возрастает ( $dT_{\text{пл}}/dp > 0$ ), а для некоторых, например воды ( $V_{\text{ж}} - V_{\text{тв}} < 0$ ), наоборот, понижается ( $dT_{\text{пл}}/dp < 0$ ).

Уравнение Клапейрона — Клаузиуса позволяет рассчитать удельные теплоты фазовых переходов, если экспериментальное определение этих величин вызывает затруднения.

---

<sup>1</sup> Вещество может иметь не одну, а несколько тройных точек, каждая из которых соответствует равновесию каких-либо трех фаз (например, жидкой и двух кристаллических модификаций). Равновесие более чем трех фаз одного и того же вещества невозможно.

## § 4.7. ЯВЛЕНИЯ ПЕРЕНОСА

Если термодинамическая система находится в неравновесном состоянии, то пространственная неоднородность значений параметров приводит к тому, что в такой системе происходит перенос энергии, импульса, вещества и т. п. Например, неоднородность концентрации в системе вызывает перенос вещества в сторону убывания концентрации (диффузию); неоднородность температуры — перенос тепла в сторону убывания температуры (теплопроводность). Эти явления, называемые **явлениями переноса**, обусловлены стремлением термодинамической системы перейти в равновесное состояние. В изолированной системе эти явления приводят к постепенному выравниванию значений термодинамических параметров; и система со временем переходит к равновесному состоянию.

При рассмотрении явлений переноса вводят такие понятия, как поток и плотность потока. *Потоком* некоторой величины называется количество этой величины, переносимое в единицу времени через некоторую поверхность. Отношение потока величины к площади поверхности, через которую осуществляется перенос, называется *плотностью потока*.

Потоки и плотности потоков переносимых величин пропорциональны градиентам параметров, определяющих перенос той или иной физической величины. Для плотности потока  $\vec{j}_A$  переносимой величины  $A$  можно записать уравнение

$$\vec{j}_A = -K \operatorname{grad} H, \quad (4.7.1)$$

где  $K$  — коэффициент переноса величины  $A$ ;  $H$  — параметр, определяющий перенос (например, концентрация в случае диффузии, температура в случае теплопроводности). Знак «—» перед градиентом  $H$  указывает на то, что перенос происходит в направлении, противоположном  $\operatorname{grad} H$ , то есть в сторону убывания параметра  $H$ . Если физическая величина  $H$  изменяется только вдоль какого-либо одного направления, например оси  $x$ , тогда плотность потока составляет:

$$\vec{j}_A = -K \operatorname{grad}_x H = -K \frac{dH}{dx} \vec{i}, \quad (4.7.2)$$

где  $dH/dx$  — градиент величины  $H$  в направлении оси  $x$ ;  $\vec{i}$  — единичный вектор направленный вдоль оси  $x$ .

Часто встречается ситуация, когда градиенты параметров системы не изменяются со временем и, следовательно, потоки физи-

ческих величин также являются постоянными во времени, при этом термодинамическая система не является изолированной.

Коэффициенты переноса  $K$  зависят от *средней длины свободного пробега* молекул  $\langle \lambda \rangle$ , то есть средней длины пути, проходимого частицей между двумя последовательными столкновениями. Для газов средняя длина свободного пробега равна

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n}, \quad (4.7.3)$$

где  $d$  — *эффективный диаметр* молекул (минимальное расстояние, на которое могут сблизиться центры двух молекул);  $n$  — концентрация молекул,  $[n] = \text{м}^{-3}$  (количество молекул в единице объема).

**Диффузия.** Перенос вещества, определяемый градиентом концентраций, называется диффузией, которая для стационарного переноса молекул описывается первым *уравнением Фика*:

$$\vec{j}_N = -D \text{grad } n, \quad (4.7.4)$$

где  $j_N$  — плотность потока числа молекул,  $[j_N] = \text{м}^{-2} \cdot \text{с}^{-1}$ ;  $n$  — концентрация молекул;  $D$  — коэффициент диффузии,  $[D] = \text{м}^2/\text{с}$ .

*Коэффициент диффузии* для газов равен

$$D = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle, \quad (4.7.5)$$

где  $\langle \lambda \rangle$  — средняя длина свободного пробега молекул;  $\langle v \rangle$  — средняя арифметическая скорость.

Плотность потока массы равна:

$$j_m = -D \frac{dc}{dx}. \quad (4.7.6)$$

где  $c$  — массовая концентрация,  $[c] = \text{кг}/\text{м}^3$ ;  $\frac{dc}{dx}$  — градиент концентрации в направлении оси  $x$ .

Для определения переносимой массы необходимо умножить уравнение (4.7.4) на площадь  $\Delta S$ , через которую переносится масса и на интервал времени  $\Delta t = t_2 - t_1$ , в течение которого происходит перенос, после чего получаем уравнение:

$$\Delta M_x = -D \frac{dc}{dx} \Delta S \Delta t. \quad (4.7.7)$$

Явление диффузии играет важную роль в биологических процессах и распределении лекарственных веществ в организме. Этот вопрос будет изложен подробнее в главе 11.

**Вязкость.** Рассмотрим два соприкасающихся слоя газа, перемещающихся с различными скоростями. Слой, имеющий большую скорость и, следовательно, больший импульс, будет передавать его слою, имеющему меньшую скорость и меньший импульс. В результате этого более быстрый слой будет замедляться, а более медленный — ускоряться, от более быстрого слоя будет переноситься импульс к более медленному.

Перенос импульса описывается уравнением

$$\Delta P = -\eta \frac{dv}{dx} \Delta S \Delta t \quad (4.7.8)$$

и определяет *силу внутреннего трения* ( $F = \Delta P / \Delta t$ )

$$\Delta F_x = -\eta \frac{dv}{dx} \Delta S, \quad (4.7.9)$$

где  $v$  — скорость течения слоя жидкости или газа, перемешающегося перпендикулярно оси  $x$ , например вдоль оси  $y$ ;  $\frac{dv}{dx}$  — градиент скорости в направлении оси  $x$ ;  $\eta$  — *коэффициент внутреннего трения (вязкости)*,  $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}$ ;  $\Delta S$  — площадь соприкасающихся слоев. Уравнение (4.7.9) называется *уравнением Ньютона* для вязкости.

Уравнение (4.7.8) можно привести к стандартному виду:

$$j_{px} = -\eta \frac{dv_y}{dx}, \quad (4.7.10)$$

где  $j_{px}$  — плотность потока импульса вдоль направления  $x$  (касательное напряжение вязкости).

Коэффициент внутреннего трения  $\eta$  для газов равен

$$\eta = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho, \quad (4.7.11)$$

где  $\rho$  — плотность газа.

Подставив в формулу (4.7.11) выражения для средней длины свободного пробега (с учетом того, что  $n = p/kT$ , где  $p$  — давление), средней скорости и плотности  $\rho = \frac{pM}{RT}$ , получаем

$$\eta = \frac{1}{3} \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p} \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} \cdot \frac{pM}{RT} = \frac{2k}{3\pi d^2} \sqrt{\frac{TM}{\pi R}}. \quad (4.7.12)$$

Таким образом, из соотношения (4.7.12) следует, что коэффициент внутреннего трения  $\eta$  для газов не зависит от давления и пропорционален  $\sqrt{T}$ . В самом деле, с понижением давления увеличивается длина свободного пробега, но одновременно уменьшается плотность. Эти два фактора взаимно компенсируют друг друга, и в результате коэффициент вязкости остается неизменным. Однако это справедливо до тех пор, пока  $\langle \lambda \rangle$  мало по сравнению с размерами зазора, в котором течет газ (например по сравнению с диаметром трубы). По мере того как это условие перестает выполняться,  $\eta$  начинает все в большей степени зависеть от давления, уменьшаясь с его понижением. При величине  $\langle \lambda \rangle$ , большей расстояния между стенками зазора, средняя длина свободного пробега не зависит от давления и определяется только величиной этого расстояния, но так как с уменьшением давления плотность продолжает уменьшаться, то уменьшается и коэффициент вязкости. В этом случае соотношения (4.7.11) и (4.7.12) становятся неприменимыми.

**Теплопроводность.** При наличии в среде градиента температуры происходит перенос тепла. Тепловой поток, как показывает опыт, можно рассчитать с помощью *уравнения Фурье*:

$$Q = -\kappa \frac{dT}{dx} \Delta S \Delta t, \quad (4.7.13)$$

где  $Q$  — количество теплоты, прошедшее за интервал времени  $\Delta t$  через площадку площадью  $\Delta S$ , перпендикулярную оси  $x$ ;  $dT/dx$  — градиент температуры в направлении оси  $x$ ;  $\kappa$  — *коэффициент теплопроводности*,  $[\kappa] = \text{Вт}/(\text{м} \cdot \text{К})$ , который определяется с коэффициентом вязкости следующим соотношением:

$$\kappa = \eta C_{Vm} = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho C_{Vm}, \quad (4.7.14)$$

где  $C_{Vm}$  — удельная теплоемкость при постоянном объеме.

Из соотношений (4.7.14) и (4.7.12) следует, что при тех условиях, когда коэффициент вязкости не зависит от давления, коэффициент теплопроводности также не зависит от давления, то есть  $\kappa \sim \sqrt{T}$ ; если же  $\langle \lambda \rangle$  больше расстояния между стенками сосуда, в котором находится газ, то коэффициент теплопроводности понижается с понижением давления. Вот почему давление между наружной и внутренней стенками колбы термоса стараются сделать как можно меньшим, а расстояние между ними — как можно большим.



## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 4.1.** В колбу вместимостью  $V = 1$  л, в которой находится воздух при температуре  $T = 300$  К и давлении  $p = 100$  кПа, заливается  $V_{\text{хл}} = 0,7$  см<sup>3</sup> хлороформа, после чего она закрывается пробкой. Удержится ли пробка в горловине колбы после полного испарения хлороформа, если диаметр горловины равен  $d = 2,5$  см, а усилие, которое необходимо приложить, чтобы вынуть пробку, равно  $F = 9$  Н? Плотность хлороформа  $\text{CHCl}_3$   $\rho = 1,498$  г/см<sup>3</sup>. Температура окружающей среды  $T = 300$  К. Давление снаружи  $p = 100$  кПа.

**Решение.** После того как полностью испарится хлороформ и установится температура 300 К, в колбе создается дополнительное давление, равное парциальному давлению паров хлороформа:

$$p_{\text{хл}} = n_{\text{хл}} k T, \quad (4.1)$$

где  $n_{\text{хл}}$  — концентрация молекул хлороформа, по определению равная

$$n_{\text{хл}} = \frac{N_{\text{хл}}}{V}, \quad (4.2)$$

где  $N_{\text{хл}}$  — общее число молекул хлороформа, а  $V$  — вместимость колбы. Число молекул хлороформа определим из соотношения

$$\frac{m}{M} = \frac{N}{N_A},$$

откуда следует, что

$$N_{\text{хл}} = \frac{m_{\text{хл}} N_A}{M_{\text{хл}}}, \quad (4.3)$$

где  $m_{\text{хл}}$  — масса хлороформа, а  $M_{\text{хл}}$  — его молярная масса.

Определим массу хлороформа:

$$m_{\text{хл}} = \rho_{\text{хл}} V_{\text{хл}}, \quad (4.4)$$

где  $\rho_{\text{хл}}$  — плотность хлороформа, а  $V_{\text{хл}}$  — его объем в жидком состоянии.

Подставляя выражение (4.4) в формулу (4.3), получаем

$$N_{\text{хл}} = \frac{\rho_{\text{хл}} V_{\text{хл}} N_A}{M_{\text{хл}}}.$$

Разделив число молекул хлороформа на вместимость колбы, определим из формулы (4.2) концентрацию паров хлороформа в колбе:

$$n_{\text{хл}} = \frac{\rho_{\text{хл}} V_{\text{хл}} N_A}{M_{\text{хл}} V}.$$

Тогда, согласно формуле (4.1), парциальное давление паров хлороформа равно

$$p_{\text{хл}} = \frac{\rho_{\text{хл}} V_{\text{хл}} N_A}{M_{\text{хл}} V} kT,$$

или — с учетом соотношения  $kN_A = R$  —

$$p_{\text{хл}} = \frac{\rho_{\text{хл}} V_{\text{хл}} RT}{M_{\text{хл}} V}. \quad (4.5)$$

Теперь можно определить обусловленную этим давлением силу, действующую на пробку:

$$F = p_{\text{хл}} S, \quad (4.6)$$

где  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  — площадь горловины колбы.

Подставив выражение (4.5) и формулу для  $S$  в выражение (4.6), получаем

$$F = \frac{\rho_{\text{хл}} V_{\text{хл}} RT}{M_{\text{хл}} V} \cdot \frac{\pi d^2}{4}.$$

Подставляя численные значения величин, входящих в это уравнение, и учитывая, что молярная масса хлороформа  $M_{\text{хл}} = 119,5 \cdot 10^{-3}$  кг/моль, в СИ  $V = 1 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>,  $V_{\text{хл}} = 0,7 \cdot 10^{-6}$  м<sup>3</sup>,  $d = 2,5 \cdot 10^{-2}$  м,  $\rho = 1498$  кг/м<sup>3</sup>, получаем:

$$F = \frac{1498 \cdot 0,7 \cdot 10^{-6} \cdot 8,31 \cdot 300}{119,5 \cdot 10^{-3} \cdot 1 \cdot 10^{-3}} \cdot \frac{\pi (2,5 \cdot 10^{-2})^2}{4} = 10,7 \text{ Н}.$$

Следовательно, сила, действующая на пробку, больше усилия, которое необходимо приложить для извлечения пробки из горловины колбы, поэтому пробка не удержится и будет вытолкнута.

**Задача 4.2.** В сосуде вместимостью  $V = 0,5$  л содержится воздух с примесью молекул фенаcetина  $\text{C}_{10}\text{H}_{13}\text{NO}_2$ , концентрация которых составляет  $n = 10^{20}$  м<sup>-3</sup>. Температура внутри сосуда  $t = 27$  °С. Определите среднее число  $\Delta N$  молекул фенаcetина, скорости которых находятся в интервале скоростей от  $v_1 = 200$  до  $v_2 = 210$  м/с.

**Решение.** Скорости молекул подчиняются распределению Максвелла, согласно которому число молекул, скорости которых заключены в интервале  $dv$ , равно

$$dN = 4\pi N \left( \frac{M}{2\pi RT} \right)^{\frac{3}{2}} v^2 \exp \left( -\frac{Mv^2}{2RT} \right) dv.$$

Принимая во внимание малый интервал скоростей, можно для расчета среднего числа молекул воспользоваться приближенной формулой:

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} N u^2 \exp(-u^2) \Delta u,$$

где  $\Delta N$  — число молекул, скорости которых находятся в интервале от  $v_1$  до  $v_2$ ;  $N$  — общее число частиц в сосуде  $N = nV$ ;  $u = \frac{(v_1 + v_2)/2}{v_b}$  — относительная скорость;  $v_b = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$  — наиболее вероятная скорость молекул;  $\Delta u = \frac{v_2 - v_1}{v_b}$  — интервал относительных скоростей, малый по сравнению со скоростью  $u$ .

Принимая во внимание, что молярная масса фенацетина  $179 \cdot 10^{-3}$  кг/моль,  $V = 0,5 \cdot 10^{-3}$  м<sup>3</sup>,  $T = 300$  К и подставляя численные данные, получаем

$$N = 10^{20} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} = 5 \cdot 10^{16};$$

$$v_b = \sqrt{\frac{2 \cdot 8,31 \cdot 300}{179 \cdot 10^{-3}}} = 167 \text{ м/с};$$

$$u = \frac{(200 + 210)/2}{167} = 1,23;$$

$$\Delta u = \frac{210 - 200}{167} = 0,06,$$

тогда

$$\Delta N = \frac{4}{\sqrt{\pi}} 5 \cdot 10^{16} \cdot 1,23^2 \exp(-1,23^2) \cdot 0,06 = 2,26 \cdot 10^{15}.$$

**Задача 4.3.** При прессовании таблеток аспирина  $C_9H_8O_4$  массой  $m = 0,5$  г их температура возрастает на  $\Delta t = 20$  °С. Считая молярную теплоемкость аспирина постоянной и равной  $C_\mu = 20R$ , определите работу прессования. Вычислите энергию  $W$ , необходимую для работы пресса за смену ( $t = 8$  ч), если его производительность равна 10 000 таблеток в час, а КПД пресса составляет  $\eta = 80$  %.

**Решение.** При прессовании практически вся работа превращается в теплоту, то есть  $Q \approx A$ , откуда следует, что

$$A = C_m m \Delta T,$$

где  $C_m$  — удельная теплоемкость.

Вычислим удельную теплоемкость по формуле

$$C_m = \frac{C_\mu}{M},$$

где  $C_\mu$  — молярная теплоемкость.

Таким образом работа, совершаемая при прессовании одной таблетки,

$$A = \frac{C_{\mu}}{M} m \Delta T.$$

Работа, производимая прессом за смену,

$$A_{\text{см}} = NtA = Nt \frac{C_{\mu}}{M} m \Delta T,$$

где  $N$  — производительность пресса;  $t$  — длительность смены.

Энергия, необходимая для работы пресса, составляет

$$W = \frac{A_{\text{см}}}{\eta} = \frac{NtC_{\mu}m\Delta T}{M\eta}.$$

Принимая во внимание, что молярная масса аспирина  $M = 180 \cdot 10^{-3}$  кг/моль,  $m = 0,5 \cdot 10^{-3}$  кг,  $\Delta t = \Delta T = 20$  К и подставляя численные данные, получаем:

$$\begin{aligned} W &= \frac{10\,000 \text{ ч}^{-1} \cdot 8 \text{ ч} \cdot 20 \cdot 8,31 \text{ Дж} \cdot \text{моль} \cdot \text{К} \cdot 0,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot 20 \text{ К}}{180 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{моль} \cdot 0,8} = \\ &= 0,923 \cdot 10^6 \text{ Дж} = 0,923 \text{ МДж}. \end{aligned}$$

**Задача 4.4.** В теплоизолированном сосуде при температуре 800 К находится  $\nu = 1$  моль углекислого газа и  $\nu = 1$  моль водорода. Происходит химическая реакция:



Во сколько раз возрастет давление в сосуде после окончания реакции?

**Решение.** До реакции давление в сосуде равнялось сумме парциальных давлений  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2$ , то есть

$$p_1 = p_{\text{CO}_2} + p_{\text{H}_2} = \frac{\nu RT_1}{V} + \frac{\nu RT_1}{V} = 2 \frac{\nu RT_1}{V},$$

где  $\nu$  — количество вещества  $\text{CO}_2$  и  $\text{H}_2$ ;  $T_1$  — температура до реакции;  $V$  — вместимость сосуда.

Для определения давления после реакции необходимо учесть теплоемкости газов и то, что процесс происходит при постоянном объеме, то есть

$$\nu Q_{\mu} = [\nu_1 \cdot C_{V\mu}(\text{H}_2\text{O}) + \nu_2 \cdot C_{V\mu}(\text{CO})] + (T_2 - T_1),$$

где  $T_2$  — температура после реакции;  $C_{V\mu}(\text{г. в.})$  и  $C_{V\mu}(\text{з. в.})$  — соответствующие молярные теплоемкости веществ при постоянном объеме;  $Q_{\mu}$  — количество теплоты, выделившейся при реакции. Из этого соотношения следует, что поскольку  $\nu_1 = \nu_2$ , то

$$T_2 = T_1 - \frac{Q_\mu}{C_{V\mu(\text{H}_2\text{O})} + C_{V\mu(\text{CO})}}.$$

Молекулы CO имеют три поступательные и две вращательные степени свободы, и, следовательно,  $C_{V\mu(\text{CO})} = \frac{5}{2}R$ , молекулы  $\text{H}_2\text{O}$  имеют три поступательные и три вращательные степени свободы, то есть  $C_{V\mu(\text{H}_2\text{O})} = 3R$ , и, следовательно,

$$T_2 = T_1 + \frac{2Q_\mu}{11R}.$$

Приняв во внимание то, что в продуктах реакции образуются газы, количество которых одинаково, можем записать:

$$p_2 = p_{\text{H}_2\text{O}} + p_{\text{CO}} = \frac{\nu RT_2}{V} + \frac{\nu RT_2}{V} = 2 \frac{\nu RT_2}{V}.$$

Отношение давлений равно

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1} = 1 + \frac{2Q_\mu}{11RT_1}.$$

Подставляя численные значения  $Q_\mu = 40,1 \cdot 10^3$  Дж/моль, имеем:

$$\frac{p_2}{p_1} = 1 + \frac{2 \cdot 40,1 \cdot 10^3}{11 \cdot 8,31 \cdot 800} = 2,1.$$

**Задача 4.5.** Вычислите среднюю длину свободного пробега  $\lambda$ , среднее время  $\tau$  между двумя последовательными столкновениями и среднее число столкновений  $\nu$  в единицу времени молекул хлороформа  $\text{CHCl}_3$  при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул хлороформа равен 0,46 нм.

**Решение.** Для газов средняя длина свободного пробега равна:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n},$$

где  $d$  — эффективный диаметр молекул;  $n$  — концентрация молекул.

Концентрацию молекул выразим из формулы (4.1.25)

$$n = \frac{p}{kT}$$

и подставим в выражение для  $\lambda$ :

$$\langle \lambda \rangle = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi d^2 p}.$$

Тогда при нормальных условиях ( $T = 273 \text{ К}$ ;  $p = 101325 \text{ Па}$ ) средняя длина свободного пробега молекул хлороформа составит

$$\langle \lambda \rangle = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 273}{\sqrt{2} \pi (0,46 \cdot 10^{-9})^2 101325} = 4 \cdot 10^{-8} \text{ м.}$$

Среднее время между двумя последовательными столкновениями молекул определим, разделив среднюю длину свободного пробега молекул на их среднюю скорость:

$$\tau = \frac{\langle \lambda \rangle}{\langle v \rangle}.$$

Среднюю скорость вычислим по формуле (4.1.17), учитывая, что молярная масса хлороформа равна  $119,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 8,31 \cdot 273}{\pi \cdot 119,5 \cdot 10^{-3}}} = 220 \text{ м/с.}$$

Тогда

$$\tau = \frac{4 \cdot 10^{-8}}{220} = 1,82 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Среднее число столкновений в единицу времени обратно пропорционально среднему времени между двумя последовательными столкновениями:

$$\nu = \frac{1}{\tau} = 5,5 \cdot 10^5 \text{ с}^{-1}.$$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**4.1.** Найдите число  $n_{\text{кол}}$  колебательных степеней свободы молекулы аспирина  $\text{C}_9\text{H}_8\text{O}_4$ .

**4.2.** Сколько молекул идеального газа содержится в пробирке вместимостью  $V = 10 \text{ см}^3$  при нормальном атмосферном давлении и температуре  $t = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ ?

**4.3.** Вычислите плотность  $\rho$  азота при температуре  $t = 25 \text{ }^\circ\text{C}$  и нормальном атмосферном давлении.

**4.4.** Вычислите среднюю энергию  $E_{\text{пост}}$  поступательного движения молекул газа, занимающего объем  $V = 5 \text{ л}$  при давлении  $p = 100 \text{ кПа}$ .

**4.5.** Некоторый газ находится при нормальном атмосферном давлении и имеет плотность  $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$ . Вычислите наиболее вероятную скорость  $v_{\text{вер}}$  движения его молекул.

**4.6.** На какой высоте  $h$  атмосферное давление в два раза меньше давления над уровнем моря? Температуру воздуха считать постоянной и равной  $0 \text{ }^\circ\text{C}$ .

**4.7.** Вычислите молярную теплоемкость  $C_{V_m}$  кислорода при постоянном объеме.

**4.8.** Вычислите удельную теплоемкость  $C_{pm}$  хлороформа  $\text{CHCl}_3$  при постоянном давлении.

**4.9.** Кислородная подушка вместимостью  $V = 10$  л содержит газ под давлением  $p = 1013,25$  кПа (10 атм). Какое количество теплоты  $Q$  необходимо сообщить, чтобы нагреть кислород от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 37$  °С?

**4.10.** Углекислый газ массой  $m = 6,6$  г изобарически нагревают на  $\Delta t = 24$  °С. Определите работу  $A$  расширения газа.

**4.11.** Некоторому газу массой  $m = 10$  г в изотермических условиях передают  $Q = 740$  Дж теплоты. Во сколько раз расширится газ, если при данной температуре средняя квадратичная скорость  $v_{\text{ср. кв}}$  его молекул составляет 400 м/с?

**4.12.** Двухатомный газ адиабатически расширился в 3 раза. Во сколько раз при этом изменилась его температура?

**4.13.** Машина, работающая по обратимому циклу Карно, за один цикл совершает работу  $A = 1$  кДж и отдает холодильнику  $Q_2 = 5,7$  кДж тепла. Определите КПД  $\eta$  цикла.

**4.14.** Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Температура нагревателя равна 100 °С. Во сколько раз изменится КПД цикла, если температуру холодильника  $T_2$  снизить с 0 до  $-100$  °С?

**4.15.** Вычислите изменение энтропии  $\Delta S$  при плавлении  $m = 200$  г льда. Удельная теплота плавления льда составляет  $\lambda = 335$  кДж/кг.

**4.16.** Вычислите изменение свободной энергии Гиббса  $\Delta G$  в реакции сгорания этилового спирта при температуре 25 °С, если в этих условиях энтальпия уменьшается на  $\Delta H = 1368$  кДж/моль, а энтропия увеличивается на  $\Delta S = 476$  Дж/(моль · К).

**4.17.** В сосуде вместимостью  $V = 1$  л находится  $\nu = 4$  моль углекислого газа при температуре 20 °С. Вычислите давление  $p$  в сосуде, пользуясь уравнениями Менделеева—Клапейрона и Ван-дер-Ваальса. Постоянные Ван-дер-Ваальса для углекислого газа:  $a = 0,361$  Н · м<sup>4</sup>/моль;  $b = 4,28 \cdot 10^{-5}$  м<sup>3</sup>/моль.

**4.18.** На сколько необходимо понизить давление, чтобы температура плавления льда повысилась на 1 К? Плотность воды при температуре 0 °С  $\rho_1 = 1000$  кг/м<sup>3</sup>; льда —  $\rho_2 = 917$  кг/м<sup>3</sup>; удельная теплота плавления льда  $\lambda = 335$  кДж/кг.

**4.19.** Определите среднюю длину свободного пробега  $\lambda$  кислорода при температуре  $t = 20$  °С и давлении  $p = 100$  кПа. Эффективный диаметр молекулы кислорода  $d = 0,36$  нм.

**4.20.** При какой температуре  $t$  находится азот, если при давлении  $p = 50$  кПа его коэффициент диффузии составляет  $D = 1,31 \cdot 10^{-5}$  м<sup>2</sup>/с?

**4.21.** Определите среднее число столкновений  $\nu$  в единицу времени молекул гелия при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекулы гелия  $d = 0,22$  нм.

**4.22.** Определите коэффициент вязкости  $\eta$  воздуха при нормальных условиях. Эффективный диаметр молекул воздуха  $d = 0,27$  нм.

**4.23.** Между двумя рамами окна, расстояние между которыми  $d = 5$  см, а их площадь  $S = 3$  м<sup>2</sup>, находится воздух. Какое количество теплоты  $Q$  теряет помещение за  $t = 1$  ч за счет теплопроводности воздуха, если температура внутри помещения  $t_1 = 20$  °С, а снаружи  $t_2 = -10$  °С? Температуру воздуха между рамами считать равной среднему арифметическому между внутренней и наружной температурами. Эффективный диаметр молекулы воздуха  $d = 0,27$  нм.

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**4.1.** Средняя арифметическая скорость движения молекул газа равна:

а)  $\langle v \rangle = \frac{3}{2} kT$ ;

г)  $\langle v \rangle = \sqrt{MkT}$ ;

б)  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$ ;

д)  $\langle v \rangle = \sqrt{\frac{2RT}{M}}$ .

в)  $\langle v \rangle = \sqrt{MkT}$ ;

**4.2.** Для средней арифметической  $\langle v \rangle$ , средней квадратичной  $v_{\text{ср. кв.}}$  и наиболее вероятной  $v_{\text{вер}}$  скоростей справедливо следующее неравенство:

а)  $\langle v \rangle < v_{\text{ср. кв.}} < v_{\text{вер}}$ ;

г)  $v_{\text{вер}} < \langle v \rangle < v_{\text{ср. кв.}}$ ;

б)  $\langle v \rangle < v_{\text{вер}} < v_{\text{ср. кв.}}$ ;

д)  $v_{\text{ср. кв.}} < \langle v \rangle < v_{\text{вер}}$ .

в)  $v_{\text{вер}} < v_{\text{ср. кв.}} < \langle v \rangle$ ;

**4.3.** Основное уравнение кинетической теории газов имеет вид:

а)  $p = \frac{3}{2} kT$ ;

г)  $\bar{\epsilon}_{\text{пост}} = nkT$ ;

б)  $p = \nu RT$ ;

д)  $p = \frac{2}{3} n \bar{\epsilon}_{\text{пост}}$ .

в)  $\bar{\epsilon}_{\text{пост}} = \frac{3}{2} pV$ ;

**4.4.** Молярные теплоемкости газов при постоянном объеме и постоянном давлении связаны следующим соотношением:

а)  $C_{p\mu} = C_{V\mu} + R$ ;

г)  $C_{V\mu} = C_{p\mu} + R$ ;

б)  $C_{p\mu} = \frac{3}{2} C_{V\mu}$ ;

д)  $C_{V\mu} = \sqrt{\frac{3}{2}} C_{p\mu}$ .

в)  $C_{p\mu} = \sqrt{C_{V\mu} + 2R}$ ;

**4.5.** Работа, совершаемая идеальным газом при изотермическом расширении, равна:

а)  $A = p \Delta V$ ;

г)  $A = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}$ ;

б)  $A = -\nu C_{V\mu} \Delta T$ ;

д)  $A = 0$ .

в)  $A = \nu C_{p\mu} \Delta T$ ;



a)  $pV = \text{const}$ ;                      r)  $\frac{V}{T} = \text{const}$ ;  
б)  $pV^\gamma = \text{const}$ ;                  д)  $pT = \text{const}$ .  
в)  $\frac{p}{T} = \text{const}$ ;

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \eta = \frac{T_2 - T_1}{T_1}; & \text{г) } \eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \\ \text{б) } \eta = \frac{T_2}{T_1 - T_2}; & \text{д) } \eta = \frac{T_1}{T_2 - T_1}, \\ \text{в) } \eta = \frac{T_2 - T_1}{T_2}; & \end{array}$$

д) все приведенные в пунктах (а—г) формулировки содержат ошибки или неточности.

б)  $T dS \geq dU + \delta A$ ;  
в)  $dS \geq 0$ ;

в) объема и давления;

$$\text{б) } \left( p + \frac{v^2 a}{V^2} \right) (V - v b) = v R T ; \quad \text{д) } p = C_{V\mu} \Delta T .$$
$$\text{B) } (p - \nu b) \left( V + \frac{\nu^2 a}{V^2} \right) = \nu RT ;$$

**4.12.** Внутренняя энергия реального газа зависит:

- а) от температуры и объема;
- б) только от температуры;
- в) только от давления;
- г) только от объема;
- д) только от температуры при  $t$  ниже температуры инверсии; от температуры и давления при  $t$  выше температуры инверсии.

**4.13.** Критическим состоянием называется:

- а) состояние с наибольшей температурой, при которой еще возможно изменение знака эффекта Джоуля—Томсона;
- б) состояние, в котором отсутствуют различия между жидким и газообразным состояниями вещества;
- в) состояние, в котором три фазы одного и того же вещества находятся в равновесии;
- г) состояние пересыщенного пара;
- д) состояние перегретой жидкости.

**4.14.** Тройной точкой называется:

- а) состояние с наибольшей температурой, при которой еще возможно изменение знака эффекта Джоуля—Томсона;
- б) состояние, в котором отсутствуют различия между жидким и газообразным состояниями вещества;
- в) состояние, в котором три фазы одного и того же вещества находятся в равновесии;
- г) состояние пересыщенного пара;
- д) состояние перегретой жидкости.

**4.15.** Сублимацией называется переход:

- а) из газообразного в жидкое состояние;
- б) из газообразного в твердое состояние;
- в) из жидкого в твердое кристаллическое состояние;
- г) из жидкого в газообразное состояние;
- д) из твердого кристаллического в газообразное состояние.

**4.16.** Плотностью потока какой-либо величины называется:

- а) количество данной величины, переносимое за единицу времени через единицу площади поверхности;
- б) количество данной величины, переносимое за единицу времени через некоторую поверхность;
- в) количество данной величины, переносимое за некоторое время через единицу площади поверхности;
- г) количество данной величины в единице объема;
- д) количество данной величины в единице объема при нормальных условиях.

**4.17.** Средней длиной свободного пробега молекул называется:

- а) минимальное расстояние, на которое могут сближаться молекулы;
- б) среднее расстояние, проходимое молекулой между двумя последовательными столкновениями;
- в) среднее расстояние между атомами в молекуле;
- г) амплитуда колебаний частиц в узлах кристаллической решетки;
- д) среднее расстояние между узлами кристаллической решетки.

**4.18.** Коэффициент диффузии газов определяется по следующей формуле:

а)  $D = \sqrt{\frac{RT}{M}}$  ;

г)  $D = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle \rho$  ;

б)  $D = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle$  ;

д)  $D = \frac{3}{2} kT$  .

в)  $D = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}$  ;

**4.19.** Уравнение Ньютона, определяющее силу вязкого трения между двумя слоями газа или жидкости, в одномерном случае имеет вид:

а)  $F = \frac{1}{3} \langle \lambda \rangle \langle v \rangle$  ;

г)  $F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r^2}$  ;

б)  $F = ma$  ;

д)  $F_x = \eta \frac{dv}{dx} t$  .

в)  $F_x = -\eta \frac{dv}{dx} S$  ;

# ТЕРМОДИНАМИКА БИОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

Одним из условий нормального функционирования отдельной клетки и целого организма является поддержание постоянства их параметров (концентраций веществ, электрических потенциалов и других) и в случае необходимости изменение их в нужном направлении. Это требует обмена веществом и энергией с окружающей средой, превращения одних видов энергии в другие, как, например, в случае процессов мышечного сокращения, передачи нервного импульса, зрительного и слухового восприятия и др.

Изучением этих вопросов занимается термодинамика, законы которой справедливы как для неживой, так и живой природы. Термодинамику подразделяют на два раздела: *классическую* (равновесную) и *термодинамику необратимых процессов* (неравновесную). Равновесная термодинамика изучает в основном изолированные и закрытые системы, находящиеся в термодинамическом равновесии или стремящиеся к нему (вопросы классической термодинамики рассматривались в главе 4). Биологическая система ввиду ее сложности не может быть описана с использованием подобных приближений. Поэтому при изучении биологических процессов используются методы неравновесной термодинамики.

### § 5.1. ОСОБЕННОСТИ БИОЛОГИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ КАК ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Каждая клетка и весь живой организм в целом являются открытыми системами, и лишь в отдельных частях клетки имеются условия для существования закрытых и изолированных систем. Процессы, протекающие в биосистемах, как и в любых других системах, необратимы (неравновесны), то есть при переходе системы из одного состояния в другое обратный переход в начальное

состояние невозможен без дополнительного притока энергии извне.

Фундаментальным понятием классической термодинамики является равновесное состояние системы, в котором термодинамические параметры (объем, давление, температура и другие) имеют одинаковое значение во всех точках системы и не могут меняться самопроизвольно во времени. Равновесное состояние для живого организма недопустимо, так как в этом случае невозможно прохождение никаких направленных процессов, кроме случайных отклонений от положения равновесия. Поэтому в термодинамике биологических процессов основным понятием является *стационарное состояние* системы. В стационарном состоянии параметры также не меняются с течением времени, но могут отличаться в различных частях системы, то есть в таких системах существуют и постоянно поддерживаются градиенты параметров. Это возможно только за счет притока энергии или вещества из окружающей среды. Таким образом, в стационарном состоянии могут находиться только открытые и закрытые системы.

Рассмотрим стационарное состояние системы на примере ионного баланса клетки. Концентрация ионов калия внутри клеток теплокровных в 15—50 раз выше, чем снаружи, а концентрация ионов натрия — в 10—15 раз ниже. Разность концентраций ионов  $K^+$  поддерживается наличием отрицательного потенциала на внутренней стороне мембраны, который препятствует выходу катионов из клетки. Это, а также градиент концентраций способствуют просачиванию ионов натрия внутрь клетки, несмотря на низкую проницаемость для них цитоплазматической мембраны. Поддержание разности концентраций  $Na^+$  требует затрат энергии. Ионы натрия выкачиваются из клетки  $Na$ - $K$ -насосами, работающими за счет энергии, выделяющейся при гидролизе АТФ. Энергии одной молекулы АТФ достаточно для вывода из клетки  $3Na^+$  и ввода  $2K^+$ .

Следует иметь в виду, что любой живой организм постоянно развивается и изменяется и поэтому в целом не является стационарной системой. Однако в течение небольшого интервала времени состояние некоторых его участков принимают за стационарное.

## § 5.2. ПЕРВЫЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ В ХИМИИ И БИОЛОГИИ

Первый закон термодинамики имеет вид:

$$\delta Q = dU + \delta A, \quad (5.2.1)$$

где  $Q$  — количество теплоты, полученное системой;  $U$  — внутренняя энергия системы;  $A$  — работа (если таковая совершается над системой, то  $\delta A > 0$ ; если работа совершается самой системой, то  $\delta A < 0$ ).

Элементарная работа системы (см. § 4.2), совершаемая против внешнего давления  $p$ , равна

$$\delta A = p dV, \quad (5.2.2)$$

где  $dV$  — изменение объема.

Тогда

$$\delta Q = dU + p dV. \quad (5.2.3)$$

Данное уравнение позволяет вычислить количество выделившейся теплоты для процессов, протекающих в изохорических или изобарических условиях. При  $V = \text{const}$

$$\delta Q = dU; \quad (5.2.4)$$

при  $p = \text{const}$  —

$$\delta Q = dU + p dV = d(U + pV) = dH, \quad (5.2.5)$$

где  $H$  — *энтальпия* — функция состояния, определяющая количество выделившейся теплоты в изобарическом процессе.

Вышесказанное позволяет сформулировать первый закон термодинамики для химических процессов (з а к о н Г е с с а): *тепловой эффект химической реакции не зависит от пути реакции, а определяется лишь только разностью внутренних энергий исходных веществ и продуктов реакции (при  $V = \text{const}$ ) или разностью энтальпий (при  $p = \text{const}$ )*. В биологических системах процессы совершаются при постоянном давлении, следовательно, тепловой эффект биохимических реакций равен изменению энтальпии в ходе реакции.

Существование живого организма требует поддержания его в неравновесном состоянии, а это невозможно без притока энергии извне. Животные в качестве источника энергии используют пищу, точнее химическую энергию, заключенную в ней. Эта энергия высвобождается при окислении веществ, что сопровождается потреблением кислорода и выделением углекислого газа.

В 1780 году Антуан Лавуазье и Пьер Лаплас доказали справедливость первого закона термодинамики для биологических объектов. Они измеряли количества теплоты (по скорости таяния льда) и углекислого газа, выделяемых морской свинкой в процессе жизнедеятельности, и сравнивали эти величины с тепловым эффектом реакции сжигания потребленных продуктов до  $\text{CO}_2$ . Получен-

ные результаты показали равенство внутренней энергии продуктов питания и выделяемой теплоты. Это доказывает, что живые организмы не являются независимым источником энергии, а только осуществляют превращение одних видов энергии в другие.

### § 5.3. ВТОРОЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМИКИ ДЛЯ ОТКРЫТЫХ СИСТЕМ

Согласно второму закону термодинамики, изменение энтропии ( $dS$ ) больше или равно поглощенной системой элементарной приведенной теплоты:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}. \quad (5.3.1)$$

Для изолированной системы ( $\delta Q = 0$ ) второй закон термодинамики принимает вид:

$$dS \geq 0. \quad (5.3.2)$$

В обратимых (равновесных) процессах энтропия остается неизменной (знак «=»), в необратимых — возрастает до максимального значения (знак «>»). Это является *критерием эволюции классической термодинамики* (к р и т е р и й К л а у з и у с а): *изолированная система стремится достигнуть конечного равновесного состояния с максимальной энтропией*. При этом даже, если в результате случайных флуктуаций энтропия уменьшится на некоторую величину, то в системе самопроизвольно произойдут такие процессы, которые вернут ее в состояние с максимальной энтропией. Таким образом, второй закон термодинамики указывает направление хода процессов в системе.

В процессе функционирования живой системы возможны следующие ситуации: уровень организации системы уменьшается, остается на неизменном уровне (стационарное состояние) или возрастает. Последние два случая, на первый взгляд, не согласуются со вторым законом термодинамики, так как в стационарном состоянии значение энтропии поддерживается на постоянном уровне и отлично от минимального, а при повышении уровня организации энтропия уменьшается.

Развитие живых систем оказывается возможным благодаря тому, что все они являются открытыми и могут обмениваться с окружающей средой и веществом, и энергией. Поэтому общее изменение энтропии  $dS$  в них происходит как за счет выделения теплоты в ре-

зультате необратимых процессов в самой системе  $\delta Q_i$ , так и за счет притока теплоты извне<sup>1</sup>  $\delta Q_e$ :

$$dS = \frac{\delta Q_e}{T} + \frac{\delta Q_i}{T} = d_e S + d_i S, \quad (5.3.3)$$

где  $d_e S$  — изменение энтропии, вызванное взаимодействием системы с окружающей средой;  $d_i S$  — изменение энтропии в самой системе в ходе необратимых процессов внутри нее.

В случае обратимых процессов  $d_i S = 0$ , в случае необратимых —  $d_i S > 0$ . Если система изолирована, то  $d_e S = 0$ . В последнем случае выражение (5.3.3) сводится к виду:

$$d_i S \geq 0, \quad (5.3.4)$$

то есть к формулировке второго закона в классической термодинамике.

Продифференцировав выражение (5.3.3) по времени, получаем:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_e S}{dt} + \frac{d_i S}{dt}. \quad (5.3.5)$$

Таким образом, скорость изменения энтропии открытой системы равна сумме скорости изменения энтропии за счет взаимодействия системы с внешней средой и скорости изменения энтропии, вызванного необратимыми процессами внутри системы.

Необратимые процессы, протекающие внутри системы, вызывают повышение энтропии, поэтому всегда  $d_i S/dt > 0$ . Однако общая энтропия системы может как возрастать, так и убывать за счет того, что член  $d_e S/dt$  может быть как положительным, так и отрицательным. В случае  $d_e S/dt < 0$  энтропия продуктов, поступающих в систему, меньше энтропии продуктов, выходящих из системы, и наоборот. Возможны следующие три случая:

$$1) \frac{dS}{dt} > 0, \text{ если } \frac{d_e S}{dt} > 0 \text{ или если } \frac{d_e S}{dt} < 0 \text{ и } \left| \frac{d_e S}{dt} \right| < \frac{d_i S}{dt}; \quad (5.3.6)$$

$$2) \frac{dS}{dt} < 0, \text{ если } \frac{d_e S}{dt} < 0 \text{ и } \left| \frac{d_e S}{dt} \right| > \frac{d_i S}{dt}; \quad (5.3.7)$$

$$3) \frac{dS}{dt} = 0, \text{ если } \frac{d_e S}{dt} < 0 \text{ и } \left| \frac{d_e S}{dt} \right| = \frac{d_i S}{dt}. \quad (5.3.8)$$

<sup>1</sup> Индексы «i» и «e» происходят от англ. *internal* — внутренний и *external* — внешний.



Первый случай ( $dS / dt > 0$ ) соответствует патологическому состоянию организма, так как при этом уменьшается степень упорядоченности системы. Это наблюдается, например, при разложении тканей, наличии онкологических заболеваний (в последнем случае происходит неконтролируемый неупорядоченный рост клеток). Второй случай ( $dS / dt < 0$ ) соответствует повышению уровня организации организма (росту, формированию органов, тканей, систем); третий случай ( $dS / dt = 0$ ) — установлению стационарного состояния в системе.

Общий энергообмен живых организмов можно представить следующим образом. Солнечный свет, поглощенный растительными организмами, энергетически обеспечивает синтез углеводов из  $H_2O$  и  $CO_2$  (фотосинтез). Окисление синтезированных углеводов в процессе дыхания сопровождается выделением энергии, которую используют для своей жизнедеятельности растения и животные. Поглощение света вызывает понижение энтропии в живом организме, однако одновременно идет повышение энтропии на Солнце в процессе ядерных реакций, которое по модулю превышает понижение энтропии на Земле. В целом в системе Земля—Солнце энтропия повышается. Таким образом, развитие живых организмов происходит за счет уменьшения упорядоченности окружающей среды.

## § 5.4. ИЗМЕНЕНИЕ СТАНДАРТНОЙ СВОБОДНОЙ ЭНЕРГИИ. ХИМИЧЕСКИЙ И ЭЛЕКТРОХИМИЧЕСКИЙ ПОТЕНЦИАЛЫ

Критерием способности системы совершить то или иное термодинамическое превращение является знак приращения термодинамического потенциала, соответствующего условиям протекания процесса. Биоэнергетические процессы, как правило, характеризуются изменением потенциала Гиббса  $\Delta G$ . При  $\Delta G < 0$  (или  $dF < 0$ ) процесс происходит самопроизвольно с выделением энергии, так как при этом энергия конечного состояния меньше энергии начального. Изменения в системе будут происходить до тех пор, пока термодинамический потенциал Гиббса не примет минимальное значение [см. (4.4.7) и (4.4.8)]. Химические реакции, протекающие с уменьшением термодинамического потенциала, называются *экзергоническими*. Если же совершение какого-либо термодинамического процесса требует увеличения энергии ( $\Delta G > 0$ ), то такой процесс самопроизвольно произойти не может и требует притока энергии из окружающей среды. Химические реакции, протекающие с увеличением термодинамического потенциала, называются *эндергоническими*.

Изменение свободной энергии зависит от условий протекания процесса (температуры, давления, pH, концентраций реагирующих веществ). Поэтому в химии вводится понятие изменения **стандартной свободной энергии** химической реакции  $\Delta G^0$ , то есть изменения свободной энергии химической системы, каждый из реагентов которой, вступающих в химическую реакцию, находится в концентрации 1 моль/л в стандартных условиях ( $p = 101,325$  кПа (1 атм),  $pH = 7,0$ ,  $T = 298$  К).

Изменение стандартной свободной энергии в ходе химической реакции связано с *константой химического равновесия*  $K$  этой реакции следующим образом:

$$\Delta G^0 = -RT \ln K, \quad (5.4.1)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T$  — температура. Зависимость (5.4.1) позволяет при известном значении константы равновесия химической реакции определить изменение свободной энергии в ней.

Термодинамический потенциал Гиббса одного моля вещества называется **химическим потенциалом**  $\mu$  (в случае незаряженных частиц) или **электрохимическим потенциалом**  $\tilde{\mu}$  (в случае заряженных частиц).

Изменение электрохимического потенциала равно

$$\Delta \mu = \frac{\Delta G}{\nu}, \quad (5.4.2)$$

где  $\nu$  — количество молей заряженных частиц.

Изменение химического потенциала аналогично (5.4.2):

$$\Delta \tilde{\mu} = \frac{\Delta G}{\nu}, \quad (5.4.3)$$

где  $\nu$  — количество молей незаряженных частиц.

Если система состоит из нескольких компонентов, то электрохимический потенциал  $i$ -того компонента  $\tilde{\mu}_i$  определяется как

$$\Delta \tilde{\mu}_i = \frac{\Delta G_i}{\nu_i}, \quad (5.4.4)$$

где  $\nu_i$  — количество молей  $i$ -того компонента;  $\Delta G_i$  — термодинамический потенциал Гиббса  $i$ -того компонента.

Для разбавленных растворов незаряженных частиц химический потенциал равен

$$\mu_i = \mu_{0i} + RT \ln c_i, \quad (5.4.5)$$

где  $c_i$  — молярная концентрация раствора;  $\mu_{0i}$  — стандартный химический потенциал  $i$ -того компонента, численно равный химическо-

му потенциалу этого компонента при его концентрации в растворе 1 моль/л.

Электрохимический потенциал разбавленных растворов равен

$$\tilde{\mu}_i = \mu_i + zF\varphi = \mu_{0i} + RT \ln c_i + zF\varphi, \quad (5.4.6)$$

где  $z$  — заряд иона,  $F = eN_A = 9,65 \cdot 10^4$  Кл/моль — число Фарадея (заряд одного моля одновалентных ионов);  $\varphi$  — электрический потенциал.

Запишем изменение электрохимического потенциала  $\Delta\tilde{\mu}$  для частиц одного сорта при переходе системы из состояния 1 в состояние 2:

$$\Delta\tilde{\mu} = \mu_{01} - \mu_{02} + RT \ln(c_2 / c_1) + zF(\varphi_2 - \varphi_1). \quad (5.4.7)$$

Изменение электрохимического потенциала имеет физический смысл работы, которую необходимо совершить, чтобы:

1) вызвать химическое превращение одного моля соединения при переходе из состояния 1 в состояние 2 (первое слагаемое, определяющее *химическую работу*);

2) изменить молярную концентрацию от  $c_1$  до  $c_2$  (второе слагаемое, определяющее *осмотическую работу*);

3) преодолеть силы электрического отталкивания, возникающие при переносе вещества из области с электрическим потенциалом  $\varphi_1$  в область с потенциалом  $\varphi_2$  (третье слагаемое, определяющее *электрическую работу*).

## § 5.5. СКОРОСТЬ ВОЗРАСТАНИЯ ЭНТРОПИИ И ДИССИПАТИВНАЯ ФУНКЦИЯ

В отличие от классической равновесной термодинамики термодинамика необратимых процессов рассматривает изменение термодинамических параметров во времени. Особое значение здесь имеет скорость возрастания энтропии. Информация об этой величине позволяет оценить скорость диссипации различных видов энергии, которые могут быть превращены в работу, в тепловую энергию, за счет которой при постоянной температуре совершение работы невозможно.

Изменение энтропии в открытой системе составляет:

$$dS = d_e S + d_i S, \quad (5.5.1)$$

причем  $d_e S = \frac{\delta Q}{T}$ , а  $\delta Q = dU + pdV$ . Отсюда

$$d_i S = dS - \frac{\delta Q}{T}, \quad (5.5.2)$$

$$d_i S = \frac{TdS - dU - pdV}{T}. \quad (5.5.3)$$

Выражение в числителе является термодинамическим потенциалом Гиббса, взятым с обратным знаком.

$$TdS - dU - pdV = -dG. \quad (5.5.4)$$

С учетом формул (5.5.4) и (5.3.4) выражение (5.5.3) примет вид:

$$d_i S = -\frac{dG}{T} > 0 \quad (5.5.5)$$

(знак «>» указывает на необратимость процессов). Тогда скорость изменения энтропии составит:

$$\frac{d_i S}{dt} = -\frac{1}{T} \cdot \frac{dG}{dt} > 0. \quad (5.5.6)$$

Таким образом, скорость возрастания энтропии в самопроизвольных необратимых процессах при постоянных температуре и давлении прямо пропорциональна скорости уменьшения термодинамического потенциала Гиббса.

Можно показать, что для химических реакций скорость продукции энтропии составляет

$$\frac{d_i S}{dt} = \frac{Av}{T} > 0, \quad (5.5.7)$$

где  $v$  — скорость химической реакции;  $A$  — химическое сродство, или движущая сила химической реакции, причем

$$A = -\sum_i \mu_i n_i, \quad (5.5.8)$$

где  $\mu_i$ ,  $n_i$  — соответственно химический потенциал и стехиометрический коэффициент  $i$ -того реагента или продукта. Химическое сродство имеет физический смысл разности химических потенциалов начального и конечного состояний ( $A = \mu_{\text{нач}} - \mu_{\text{кон}}$ ) при  $n_i = 1$ . Если в системе протекают несколько необратимых реакций, то скорость изменения энтропии в этой системе составит:

$$\frac{d_i S}{dt} = \frac{1}{T} \sum_k A_k v_k > 0, \quad (5.5.9)$$

где  $A_k$  и  $v_k$  — соответственно скорость и химическое сродство  $k$ -той химической реакции.

В термодинамике необратимых процессов вводится понятие *диссипативной функции*<sup>1</sup>  $\beta$ :

$$\beta = T \frac{d S_i}{dt}. \quad (5.5.10)$$

Из формулы (5.5.7) следует, что для необратимых процессов

$$\beta > 0. \quad (5.5.11)$$

Для идеальных обратимых процессов  $\beta = 0$ .

*Диссипативная функция, определяющая скорость возрастания энтропии в системе, в которой протекают необратимые процессы, является мерой рассеяния энергии системы в тепло.* Чем больше величина диссипативной функции, тем быстрее энергия всех видов превращается в тепловую. Диссипативная функция также определяет возможность самопроизвольного протекания того или иного процесса: при  $\beta > 0$  процесс возможен, при  $\beta < 0$  — нет.

## § 5.6. СОПРЯЖЕННЫЕ ПРОЦЕССЫ

В процессе функционирования биологических систем происходят как экзергонические процессы, в ходе которых высвобождается энергия ( $\Delta G < 0$ ), так и эндергонические, в ходе которых затрачивается энергия ( $\Delta G > 0$ ). Последние процессы термодинамически невыгодны и не могут совершаться без дополнительного притока энергии, источником которой в живом организме служат экзергонические процессы. Если энергия, выделяющаяся в ходе какого-либо экзергонического процесса, превышает энергию, необходимую для совершения эндергонического процесса, то первый процесс может энергетически обеспечить второй. При этом суммарное изменение потенциала Гиббса остается отрицательным.

Явление, при котором один процесс энергетически обеспечивает протекание второго, называется *сопряжением*. Процесс, являющий-

---

<sup>1</sup> Часто в литературе диссипативной функцией называют скорость продукции энтропии  $\sigma$  в единице объема  $V$ . В силу второго закона термодинамики  $\frac{d_i S}{dt} = \int \sigma dV \geq 0$ .

ся источником энергии, называется *сопрягающим*, а процесс, на который затрачивается энергия, — *сопряженным*. Рассмотрим это явление подробнее на примере сопряженных химических реакций.

Пусть в системе одновременно протекают две необратимые реакции. Из формулы (5.5.9) следует:

$$\beta = T \frac{dS_i}{dt} = A_1 v_1 + A_2 v_2 > 0. \quad (5.6.1)$$

Это условие может выполняться в двух случаях:

$$1) A_1 v_1 > 0, A_2 v_2 > 0; \quad (5.6.2)$$

$$2) A_1 v_1 > 0, A_2 v_2 < 0, \text{ если } |A_1 v_1| > |A_2 v_2|. \quad (5.6.3)$$

В первом случае обе реакции являются термодинамически выгодными, так как в ходе каждой происходит увеличение энтропии [см. соотношение (5.5.9)], и тогда, как следует из формулы (5.5.6) — уменьшение термодинамического потенциала Гиббса. Эти реакции могут совершаться независимо друг от друга.

Во втором случае реакция 1) является термодинамически выгодной, а реакция 2) — термодинамически невыгодной ( $d_i S/dt < 0$ ,  $dG/dt > 0$ ). Вторая реакция (сопряженная) может быть совершена только в том случае, если будет сопряжена с первой (сопрягающей). В ходе сопряжения этих двух реакций суммарная энтропия системы увеличится, а суммарный потенциал Гиббса — уменьшится.

Из анализа вышесказанного и формулы (5.5.10) следует, что критерием возможности сопряжения двух или нескольких процессов является положительное значение диссипативной функции для суммарного процесса.

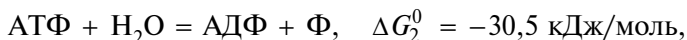
Из условия (5.6.1) можно найти *максимальную скорость сопряженной реакции*:

$$v_2 = v_{\max} < \frac{A_1 v_1}{A_2}. \quad (5.6.4)$$

Рассмотрим явление сопряжения на следующем примере. Начальная реакция гликолиза — фосфорилирование глюкозы — является эндергонической реакцией и протекает по схеме:

Глюкоза +  $\Phi$  = Глюкоза-6-фосфат +  $H_2O$ ,  $\Delta G_1^0 = 13,4$  кДж/моль,  
где  $\Phi$  — фосфатная кислота.

Повышение свободной энергии в этом случае компенсируется сопряжением с реакцией гидролиза аденозинтрифосфатной кислоты (АТФ), являющейся наиболее распространенной сопрягающей химической реакцией в живых системах:



где АДФ — аденозиндифосфатная кислота.

Таким образом, общее изменение свободной энергии в ходе этих двух реакций составляет

$$\begin{aligned} \Delta G = \Delta G_1^0 + \Delta G_2^0 &= 13,4 \text{ кДж/моль} + (-30,5 \text{ кДж/моль}) = \\ &= -17,1 \text{ кДж/моль}. \end{aligned}$$

Явление химического сопряжения обеспечивает превращение энергии одних химических связей в энергию других, снижая таким образом потери энергии в виде тепла. В отсутствие сопряжения величина диссипативной функции выше, чем в случае наличия сопряжения. Чем меньше значение диссипативной функции, тем энергетически экономичнее работает система.

## § 5.7. ПОЛОЖЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ НЕРАВНОВЕСНОЙ ТЕРМОДИНАМИКИ. УРАВНЕНИЯ ОНЗАГЕРА

Линейная неравновесная термодинамика изучает процессы, протекающие вблизи термодинамического равновесия. Можно показать, что в этих условиях между обобщенным потоком  $J$  (скоростью процесса) и обобщенной силой  $X$  (причиной процесса), его вызывающей, существует линейная зависимость:

$$J = LX, \quad (5.7.1)$$

где  $L$  — коэффициент пропорциональности.

Примером линейного процесса является закон Ома:  $I = (1/R)U$ , где в роли потока выступает электрический ток  $I$ , движущей силы — напряжение  $U$ , а коэффициента пропорциональности — величина  $1/R$ , обратная электрическому сопротивлению (проводимость). Некоторые примеры линейных процессов приведены в табл. 5.7.1.

Допустим, в системе совершается два процесса, сопряженных друг с другом. В таком случае поток первого процесса  $J_1$  будет зависеть как от собственной движущей силы  $X_1$  (коэффициент пропорциональности  $L_{11}$ ), так и от движущей силы второго процесса  $X_2$  (коэффициент пропорциональности  $L_{12}$ ). Аналогичные рассуждения применяем и для второго потока  $J_2$ . Выражения для потоков в случае сопряженных процессов называются *уравнениями Онзагера*:

$$\begin{cases} J_1 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2; \\ J_2 = L_{21}X_1 + L_{22}X_2. \end{cases} \quad (5.7.2)$$

Таблица 5.7.1

**Линейные процессы и соответствующие им сопряженные потоки и силы**

Процесс	Поток $J$	Обобщенная сила $X$	Закон
Диффузия	Плотность потока $J$ незаряженных частиц	Градиент концентрации ( $dc/dx$ )	Закон Фика $J = -D \frac{dc}{dx}$
Электро-диффузия	Плотность потока $J$ ионов	Градиент электрохимического потенциала ( $d\bar{\mu}/dx$ )	Уравнение Теорелла $J = -cu \frac{d\bar{\mu}}{dx}$
Электрический ток	Плотность электрического тока $j$	Градиент электрического потенциала ( $d\phi/dx$ )	Закон Ома $j = -\sigma \frac{d\phi}{dx}$
Теплопроводность	Плотность потока $J$ тепла	Градиент температуры $dT/dx$	Закон Фурье $J = -\kappa \frac{dT}{dx}$
Течение жидкости	Объемная скорость $Q$ жидкости через трубку	Градиент гидростатического давления ( $dp/dx$ )	Формула Пуазейля $Q = -\frac{\pi r^4}{8\eta} \cdot \frac{dp}{dx}$

**Примечание:**  $D$  — коэффициент диффузии;  $c$  — молярная концентрация вещества;  $\bar{\mu}$  — электрохимический потенциал;  $u$  — подвижность ионов;  $\sigma$  — удельная электрическая проводимость;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности;  $r$  — радиус трубки;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости.

Коэффициенты  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются *коэффициентами взаимности Онзагера* и отражают явление сопряжения процессов: поток первого процесса зависит от движущей силы второго и наоборот — поток второго процесса зависит от движущей силы первого. Коэффициенты  $L_{12}$  и  $L_{21}$  связаны друг с другом соотношением взаимности Онзагера:

$$L_{12} = L_{21}, \quad (5.7.3)$$

то есть воздействие одного процесса на второй вызывает такую же ответную реакцию со стороны второго процесса на первый.



В выражении (5.7.7) сродство реакции  $A$  играет роль движущей силы реакции, а скорость  $v$  — роль потока. По аналогии с формулой (5.5.7), учитывая выражение (5.5.10), можно показать, что в общем случае

$$\beta = T \frac{d_i S}{dt} = JX > 0. \quad (5.7.4)$$

Для системы, в которой одновременно протекают  $n$  сопряженных линейных процессов, выполняется соотношение:

$$\beta = T \frac{d_i S}{dt} = \sum_k J_k X_k > 0. \quad (5.7.5)$$

Система уравнения (5.7.2) справедлива для любых двух взаимосвязанных процессов, например, сопряженных химических реакций, диффузии какого-либо вещества и связанного с этим переноса теплоты, переноса через мембрану воды и сопряженного переноса растворенного в ней вещества. В живых организмах одним из самых распространенных сопряженных процессов является активный транспорт, то есть перенос вещества из области с меньшей его концентрации в область с большей концентрацией. Такой процесс самопроизвольно не протекает, ибо сопровождается увеличением степени упорядоченности системы и, следовательно, понижением энтропии. Активный транспорт требует затраты энергии и может совершаться только в случае сопряжения с другим процессом — источником энергии. В качестве сопрягающего процесса может выступать, например, реакция гидролиза АТФ, транспорт каких-либо других веществ. Подробнее явление активного транспорта будет рассмотрено в главе 11.

Если поток и движущая сила сопряженного процесса равны соответственно  $J_1$  и  $X_1$ , а сопрягающего —  $J_2$  и  $X_2$ , то  $J_1 X_1 < 0$ ,  $J_2 X_2 > 0$ .

Количественно степень сопряжения  $q$  определяется соотношением:

$$q = \frac{L_{12}}{\sqrt{L_{11} L_{22}}}, \quad (5.7.6)$$

которая изменяется в пределах  $-1 \leq q \leq 1$ .

При  $q = 0$ ,  $L_{12} = L_{21} = 0$ . Тогда уравнения (5.7.2) сводятся к виду:

$$J_1 = L_{11} X_1; \quad (5.7.7)$$

$$J_2 = L_{22} X_2, \quad (5.7.8)$$

то есть процессы полностью не зависят друг от друга и каждый из потоков определяется только «собственной» движущей силой.

При  $q = \pm 1$  потоки полностью сопряжены. Если  $q < 0$  (то есть  $L_{12} < 0$ ), тогда, как следует из формулы (5.7.2), увеличение движущей силы одного процесса будет сопровождаться уменьшением потока сопряженного с ним другого процесса.

В процессе сопряжения не вся энергия, выделяющаяся в ходе сопрягающего процесса, передается сопряженному: часть энергии переходит в тепло. Для определения КПД превращения энергии вводят понятие эффективности сопряжения:

$$\eta = \left| \frac{J_1 X_1}{J_2 X_2} \right|, \quad (5.7.9)$$

где  $J_1$ ,  $X_1$  и  $J_2$ ,  $X_2$  — соответственно потоки и движущие силы сопряженного и сопрягающего процессов. Для биологических процессов эффективность сопряжения довольно высока и может достигать 80—90 %.

## § 5.8. КРИТЕРИИ ДОСТИЖЕНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ СОСТОЯНИЙ

В классической термодинамике увеличение энтропии до некоторого максимального значения является критерием установления в системе равновесного состояния; знак изменения энтропии, таким образом, определяет направление хода процесса. Неравновесная термодинамика рассматривает стационарные состояния. Аналогичной проблемой здесь является вопрос о предсказании установления в системе стационарного состояния по характеру изменения энтропии за счет внутренних процессов.

Рассмотрим систему, в которой одновременно происходят два сопряженных процесса: например, поток тепла  $J_1$ , вызванный градиентом температур (движущей силой  $X_1$ ), и поток вещества  $J_2$ , вызванный разностью концентраций (движущей силой  $X_2$ ). Вблизи положения термодинамического равновесия для них справедливы уравнения Онзагера:

$$J_1 = L_{11}X_1 + L_{12}X_2; \quad (5.8.1)$$

$$J_2 = L_{21}X_1 + L_{22}X_2. \quad (5.8.2)$$

Согласно соотношению (5.7.5), диссипативная функция в этом случае запишется в виде:

$$\beta = J_1 X_1 + J_2 X_2 > 0. \quad (5.8.3)$$

С учетом уравнений Онзагера и соотношения (5.7.3) получаем:

$$\begin{aligned}\beta &= J_1 X_1 + J_2 X_2 = (L_{11} X_1 + L_{12} X_2) X_1 + (L_{21} X_1 + L_{22} X_2) X_2 = \\ &= L_{11} X_1^2 + (L_{12} + L_{21}) X_1 X_2 + L_{22} X_2^2 = \\ &= L_{11} X_1^2 + 2 L_{12} X_1 X_2 + L_{22} X_2^2 > 0.\end{aligned}\quad (5.8.4)$$

Допустим, в системе установилось стационарное состояние, в котором количество вещества, входящего в систему, равно количеству вещества, покидающего систему, то есть  $J_2 = 0$ , а поток теплоты совершается с постоянной скоростью.

Продифференцируем соотношение (5.8.4) по  $X_2$  при  $X_1 = \text{const}$  и приравняем нулю:

$$\frac{\partial \beta}{\partial X_2} = 2(L_{12} X_1 + L_{22} X_2) = 2J_2 = 0. \quad (5.8.5)$$

Данное уравнение определяет экстремум функции, описываемой уравнением (5.8.4).

Так как вторая производная

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial X_2^2} = 2L_{22} > 0 \quad (5.8.6)$$

положительна (при  $L_{22} > 0$ ), то данная экстремальная точка соответствует минимуму диссипативной функции.

Аналогично можно доказать, что при  $J_1 = 0$

$$\frac{\partial \beta}{\partial X_1} = 2J_1. \quad (5.8.7)$$

Сказанное можно обобщить и на любое число сопряженных процессов в системе вблизи положения равновесия. Выражения (5.8.5) или (5.8.7) позволяют сформулировать один из основных принципов неравновесной термодинамики линейных процессов (теорема Пригожина): *при постоянных внешних условиях в системе, находящейся вблизи положения термодинамического равновесия в стационарном состоянии, скорость возрастания энтропии за счет внутренних необратимых процессов, определяемая величиной  $\beta$ , принимает постоянное минимальное, отличное от нуля положительное значение.*

Таким образом, по изменению во времени скорости возрастания энтропии за счет внутренних необратимых процессов можно судить о том, приведут ли данные процессы систему в стационарное состояние или нет. Если скорость возрастания энтропии уменьшается, то есть

$$\frac{d\beta}{dt} < 0, \quad (5.8.8)$$

то система стремится к состоянию с минимальной скоростью продукции энтропии, а именно к стационарному состоянию. Выражение (5.8.8) определяет **критерий эволюции открытой системы** к стационарному состоянию вблизи положения равновесия.

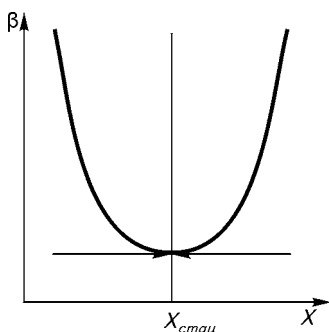


Рис. 5.8.1. Зависимость диссипативной функции  $\beta$  от движущих сил около стационарной точки  $X_{\text{стац}}$

Как видно из графика на рис. 5.8.1, диссипативная функция  $\beta$  монотонно уменьшается до минимального значения, то есть система стремится к стационарному состоянию. Такая система не может самостоятельно выйти из стационарного состояния, поскольку увеличение  $\beta$  приводит к возрастанию скорости продукции энтропии. Если система в силу каких-либо флуктуаций все-таки вышла из стационарного состояния, то в ней возникают силы, стремящиеся свести скорость возрастания энтропии к минимуму. Такое стационарное состояние является устойчивым (отклонение от него приводит к увеличению диссипативной функции). Таким образом, **критерием устойчивости стационарного состояния** является условие:

$$d\beta > 0. \quad (5.8.9)$$

При значительных изменениях внешних условий система выходит из одного стационарного состояния и переходит в другое. Это наблюдается, например, при проведении нервного импульса или при мышечном сокращении. Смена одного стационарного состояния на другое при изменении внешних условий означает приспособление (адаптацию) к ним организма. Неспособность адаптироваться может привести к гибели.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 5.1.** Внутриклеточная концентрация ионов  $\text{Na}^+$  составляет  $c = 0,015$  моль/л, а внеклеточная —  $c_o = 0,15$  моль/л, внутриклеточный потенциал равен  $\phi_i = -60$  мВ относительно наружного, равного нулю. Температура клетки  $t = 37$  °C. Рассчитайте осмотическую  $A_{\text{осм}}$ , электрическую

работу  $A_{\text{эл}}$ , а также изменение электрохимического потенциала  $\Delta\tilde{\mu}$  при переносе ионов натрия через мембрану нервной клетки наружу.

**Решение.** Осмотическая работа при переносе ионов в область с концентрацией  $c_o$  из области с концентрацией  $c_i$  равна:

$$A_{\text{осм}} = RT \ln \frac{c_o}{c_i} = 8,31 \cdot 310 \cdot \ln \frac{0,15}{0,015} = 5932 \text{ Дж/моль} \approx 5,9 \text{ кДж/моль}.$$

Электрическая работа при переносе ионов в область с потенциалом  $\phi_o$  из области с потенциалом  $\phi_i$  составляет:

$$\begin{aligned} A_{\text{эл}} &= zF(\phi_o - \phi_i) = 1 \cdot 9,65 \cdot 10^4 \cdot (0 + 60 \cdot 10^{-3}) = \\ &= 5790 \text{ Дж/моль} \approx 5,8 \text{ кДж/моль}. \end{aligned}$$

Так как с  $\text{Na}^+$  не происходит никаких химических изменений, то  $\Delta\mu_0 = 0$ . Тогда изменение электрохимического потенциала

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{\mu} &= \Delta\mu_0 + A_{\text{осм}} + A_{\text{эл}} = 0 + 5,9 \text{ кДж/моль} + 5,8 \text{ кДж/моль} = \\ &= 11,7 \text{ кДж/моль}. \end{aligned}$$

Изменение электрохимического потенциала положительно, то есть данный процесс невыгоден и может совершаться только за счет притока энергии, в данном случае — за счет энергии АТФ.

**Задача 5.2.** Рассчитайте изменение свободной энергии  $\Delta G^0$  реакции  
 изопропанол + НАД<sup>+</sup>  $\rightleftharpoons$  ацетон + НАДН + Н<sup>+</sup>,

где НАД — никотинамидадениндинуклеотид; НАДН — восстановленный никотинамидадениндинуклеотид. Концентрации веществ следующие: [изопропанол] =  $8,49 \cdot 10^{-2}$  моль/л, [НАД<sup>+</sup>] =  $6,00 \cdot 10^{-5}$  моль/л; [ацетон] =  $1,54 \cdot 10^{-2}$  моль/л; [НАДН] =  $4,51 \cdot 10^{-5}$  моль/л, pH среды 7,28, температура  $t = 25^\circ\text{C}$ .

**Решение.** Изменение свободной энергии реакции зависит от константы равновесия реакции следующим образом:

$$\Delta G^0 = -RT \ln K. \quad (5.1)$$

Константа равновесия данной реакции:

$$K = \frac{[\text{ацетон}][\text{НАДН}][\text{H}^+]}{[\text{изопропанол}][\text{НАД}^+]}. \quad (5.2)$$

Концентрацию ионов водорода определим из уравнения

$$\text{pH} = -\lg[\text{H}^+],$$

откуда

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}. \quad (5.3)$$

Подставим (5.3) в (5.2):

$$K = \frac{[\text{ацетон}][\text{НАДН}] \cdot 10^{-\text{pH}}}{[\text{изопропанол}][\text{НАД}^+]}, \quad (5.4)$$

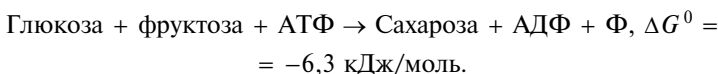
а затем (5.4) в (5.1):

$$\Delta G^0 = -RT \ln \frac{[\text{ацетон}][\text{НАДН}] \cdot 10^{-\text{pH}}}{[\text{изопропанол}][\text{НАД}^]}.$$

Температура реакции по шкале Кельвина 298 К. Подставим числовые значения:

$$\begin{aligned} \Delta G^0 &= -8,31 \cdot 298 \cdot \ln \frac{1,54 \cdot 10^{-2} \cdot 4,51 \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-7,28}}{8,49 \cdot 10^{-2} \cdot 6,00 \cdot 10^{-5}} = 46445 \text{ Дж/моль} \approx \\ &\approx 46,4 \text{ кДж/моль}. \end{aligned}$$

**Задача 5.3.** Синтез сахарозы осуществляется по следующей схеме:



Определите константу равновесия этой реакции.

**Решение.** Запишем:

$$\Delta G^0 = -RT \ln K,$$

откуда

$$K = \exp \left( -\frac{\Delta G^0}{RT} \right).$$

Учитывая, что  $\Delta G^0 = -6300$  Дж/моль, а температура в стандартных условиях  $T = 298$  К, вычислим:

$$K = \exp \left( -\frac{-6300}{8,31 \cdot 298} \right) = 12,7.$$

**Задача 5.4.** Вычислите эффективность  $\eta$  сопряжения синтеза сахарозы с реакцией гидролиза АТФ ( $\Delta G_{\text{АТФ}}^0 = -30,5$  кДж/моль), используя схему задачи 5.3.

**Решение.** Эффективность сопряжения определяется как отношение полезной работы (в данном случае — энергии, которую необходимо затратить на синтез сахарозы,  $\Delta G_{\text{сах}}^1$ ) к затраченной энергии ( $\Delta G_{\text{н\Phi}}^1$ ):

$$\eta = \frac{\Delta G_{\text{сах}}^0}{\Delta G_{\text{АТФ}}^0} = \frac{\Delta G_{\text{АТФ}}^0 - \Delta G^0}{\Delta G_{\text{АТФ}}^0} = \frac{-30,5 \text{ кДж/моль} - (-6,3 \text{ кДж/моль})}{-30,5 \text{ кДж/моль}} = 0,79.$$

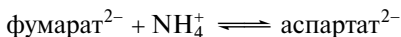
Таким образом, эффективность сопряжения составляет 79 %.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**5.1.** Вычислите общее изменение энтропии  $\Delta S$  в открытой системе, если известно, что в результате необратимых процессов внутри нее выделилось  $Q_i = 1240$  кДж теплоты, 25 % которой передалось в окружающую среду. Температура системы поддерживается постоянной и равна  $37^\circ\text{C}$ .

**5.2.** Вычислите изменение стандартной свободной энергии реакции, константа равновесия которой  $K = 10$ .

**5.3.** Для реакции



изменение свободной энергии  $\Delta G^0 = -15565$  Дж/моль при температуре  $t = 37^\circ\text{C}$ . Определите константу равновесия  $K$  реакции.

**5.4.** Фермент малатдегидрогеназа катализирует следующую реакцию:



При  $\text{pH} = 8,81$  и температуре  $t = 25^\circ\text{C}$  концентрации веществ, определенные в эксперименте, следующие:  $[L\text{-малат}] = 5,27 \cdot 10^{-3}$  моль/л,  $[\text{НАД}^+] = 32,4 \cdot 10^{-5}$  моль/л,  $[\text{оксалоацетат}] = 2,82 \cdot 10^{-5}$  моль/л;  $[\text{НАДН}] = 2,82 \cdot 10^{-5}$  моль/л. Вычислите изменение свободной энергии  $\Delta G^0$  реакции.

**5.5.** Осмотическая работа  $A_{\text{осм}}$ , затраченная на перенос 3 нмоль ионов хлора из гигантского аксона кальмара наружу, составила 8,7 мкДж при температуре  $t = 27^\circ\text{C}$ . Определите отношение концентраций  $c_o/c_i$  снаружи и внутри клетки.

**5.6.** При переносе 5 нмоль ионов калия из мышечного волокна лягушки в межклеточную среду работа, затраченная на преодоление сил электрического отталкивания, составила  $A_{\text{эл}} = 42,24$  мкДж. Вычислите разность потенциалов  $\Delta\phi$  на цитоплазматической мембране.

**5.7.** Вычислите изменение электрохимического потенциала  $\Delta\mu$  при переносе ионов натрия в клетку из внеклеточной среды, если известно, что концентрация этих ионов снаружи в 10 раз больше, чем внутри клетки, а внутренняя сторона мембраны клетки имеет потенциал  $\phi_i = -70$  мВ (наружный потенциал принят равным нулю). Температура  $t = 37^\circ\text{C}$ .

**5.8.** В результате необратимого процесса внутри системы энтропия возрастает на  $\Delta_r S = 8,5$  кДж/К за время  $t = 10$  с. Вычислите диссипативную функцию  $\beta$  этого процесса, если система поддерживается при температуре  $T = 300$  К.

**5.9.** Изменение свободной энергии в процессе переноса двух электронов от восстановленного никотинамидадениндинуклеотида на кислот род составляет  $\Delta G^0 = -220$  кДж/моль. Этот процесс сопряжен с синтезом трех молекул АТФ ( $\Delta G^0 = -30,5$  кДж/моль). Вычислите эффективность  $\eta$  сопряжения.

## ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**5.1.** Система находится в стационарном состоянии. При этом:

- а) термодинамические параметры постоянны во времени и одинаковы во всех частях системы, система является открытой или закрытой;
- б) термодинамические параметры не изменяются во времени, но могут отличаться в различных частях системы, система изолирована;
- в) система не изменяется во времени, в ней поддерживаются постоянные градиенты параметров, система является открытой или закрытой;
- г) термодинамические параметры постоянны во времени и одинаковы во всех частях системы, система изолирована;
- д) термодинамические параметры изменяются во времени, система является открытой.

**5.2.** Степень упорядоченности открытой системы увеличивается

$\left(\frac{dS}{dt} < 0\right)$ , если выполняется следующее:

- а)  $\frac{d_e S}{dt} < 0$  и  $\left|\frac{d_e S}{dt}\right| > \frac{d_i S}{dt}$ ;      г)  $\frac{d_e S}{dt} = 0$ ;
- б)  $\frac{d_e S}{dt} > 0$ ;      д)  $\frac{d_e S}{dt} < 0$  и  $\left|\frac{d_e S}{dt}\right| = \frac{d_i S}{dt}$ .
- в)  $\frac{d_e S}{dt} < 0$  и  $\left|\frac{d_e S}{dt}\right| < \frac{d_i S}{dt}$ ;

**5.3.** Осмотическая работа, совершаемая системой при изменении концентрации от  $c_1$  до  $c_2$ , составляет:

- а)  $zF(c_2 - c_1)$ ;      г)  $pV(c_2/c_1)$ ;
- б)  $PV(c_2 - c_1)$ ;      д)  $RT \ln(c_2/c_1)$ .
- в)  $RT(c_2 - c_1)$ ;

**5.4.** Электрическая работа, совершаемая системой при переносе вещества из области с электрическим потенциалом  $\varphi_1$  в область с потенциалом  $\varphi_2$ , составляет:

- а)  $zF(\varphi_2 - \varphi_1)$ ;      г)  $RT \ln(\varphi_2 - \varphi_1)$ ;
- б)  $RT \ln(\varphi_2/\varphi_1)$ ;      д)  $PV(\varphi_2/\varphi_1)$ .
- в)  $PV(\varphi_2 - \varphi_1)$ ;

**5.5.** Электрохимический потенциал  $i$ -й компоненты системы равен:

- а)  $\tilde{\mu}_i = H_i - TS_i$ ;      г)  $\tilde{\mu}_i = U_i - pV_i + TS_i$ ;
- б)  $\tilde{\mu}_i = -RT \ln K_i$ ;      д)  $\tilde{\mu}_i = \sum J_i X_i$ .
- в)  $\tilde{\mu}_i = \mu_{0i} + RT \ln c_i + zF\varphi_i$ ;

**5.6.** Изменение стандартной свободной энергии в ходе химической реакции связано с константой химического равновесия  $K$  этой реакции следующим образом:



а)  $\Delta G^0 = cRK^3$ ;

г)  $\Delta G^0 = mRK^2$ ;

б)  $\Delta G^0 = -RT \ln K$ ;

д)  $\Delta G^0 = RK \Delta T$ .

в)  $\Delta G^0 = -RT \Delta K$ ;

**5.7.** Для химических реакций скорость продукции энтропии составляет:

а)  $\frac{d_i S}{dt} = \frac{A^2 v}{K} > 0$ ;

г)  $\frac{d_i S}{dt} = \frac{AK}{T} > 0$ ;

б)  $\frac{d_i S}{dt} = \frac{Kv}{T} > 0$ ;

д)  $\frac{d_i S}{dt} = \frac{AvK}{T} > 0$ ;

в)  $\frac{d_i S}{dt} = \frac{Av}{T} > 0$ ;

где  $A$  — сродство химической реакции;  $v$  — ее скорость;  $K$  — константа химического равновесия.

**5.8.** В системе происходит  $n$  сопряженных линейных процессов, характеризующихся потоками  $J_i$  и движущими силами  $X_i$ . Диссипативная функция результирующего процесса равна:

а)  $\beta = J_i \sum_i X_i$ ;

г)  $\beta = \sum_i J_i X_i^2$ ;

б)  $\beta = \frac{1}{J_i} \sum_i X_i$ ;

д)  $\beta = \sum_i J_i X_i$ .

в)  $\beta = \sum_i J_i^2 X_i$ ;

**5.9.** Согласно теореме Пригожина, в стационарном состоянии при фиксированных внешних параметрах скорость продукции энтропии открытой системы:

а) неограниченно возрастает;

б) принимает постоянное, отличное от нуля положительное значение;

в) неограниченно убывает;

г) принимает отрицательное значение;

д) равна нулю.

**5.10.** Стационарное состояние является устойчивым, если отклонение от него приводит:

а) к возрастанию внутренней энергии системы;

б) снижению внутренней энергии системы;

в) увеличению диссипативной функции;

г) снижению диссипативной функции;

д) в приведенных пунктах правильного ответа нет.

# МОЛЕКУЛЯРНАЯ БИОФИЗИКА

*Молекулярная биофизика* изучает структуру биологически важных молекул, физические процессы, лежащие в основе их функционирования, связь структуры и свойств молекул с их биологической функцией. Объектами исследования молекулярной биофизики являются белки и нуклеиновые кислоты, формирующие основу всего живого.

Молекулярная масса белков и нуклеиновых кислот составляет от  $10^3$  до  $10^{10}$  а. е. м. Поэтому их называют *макромолекулами*. Белки и нуклеиновые кислоты состоят из большого числа однотипных звеньев: белки — из аминокислот; нуклеиновые кислоты — из нуклеотидов.

Все биологические макромолекулы являются динамичными системами. Благодаря возможности поворотов вокруг единичных связей и наличия большого числа степеней свободы, каждая макромолекула имеет огромное число конформаций. Эти конформации не являются равновероятными из-за возможности возникновения невыгодных межатомных взаимодействий, что накладывает ограничения на количество возможных в данных условиях конформаций.

Для исследования макромолекул используют множество физических методов: рентгеноструктурный анализ, ЯМР- и ЭПР-спектроскопию, спектрофотометрию, ИК-спектроскопию и др. В последнее время, благодаря появлению мощных ЭВМ, для изучения структуры макромолекул широко используются вычислительные методы исследования, которые позволяют рассчитать наиболее выгодные в данных условиях конформации, соответствующие минимуму потенциальной энергии молекулы.

## § 6.1. ВИДЫ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В МАКРОМОЛЕКУЛАХ

Связи, стабилизирующие биологические макромолекулы, можно условно разделить на сильные и слабые. К сильным взаимодействиям относятся ковалентные связи, образующиеся при взаим-

ном перекрывании электронных облаков двух соседних атомов. Энергия ковалентных связей составляет 200—800 кДж/моль, например, энергия C—C-связи равна 348,6 кДж/моль, C—N-связи — 336 кДж/моль.

Однако, как мы увидим далее, макромолекулы не представляют собой жесткую, застывшую структуру. Наоборот, выполнение их биологической функции невозможно без наличия молекулярной подвижности. Поэтому, кроме сильных ковалентных связей, макромолекулы стабилизированы и взаимодействуют друг с другом или с надмолекулярными структурами (например с мембранами) и с помощью слабых связей, к которым относятся ионные, ион-дипольные, ван-дер-ваальсовы, водородные и гидрофобные.

**Ионные связи** образуются между заряженными атомами. Энергия ионной связи определяется по формуле:

$$W_{\text{ион}} = -\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r}, \quad (6.1.1)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — заряды взаимодействующих ионов;  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная;  $\epsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость среды;  $r$  — расстояние между ионами.

Многие боковые группы аминокислот, входящих в состав белков, заряжены. Между противоположно заряженными группами возникают ионные связи, или солевые мостики, например, между  $\text{NH}_3^+$ -группой лизина и  $\text{COO}^-$ -группой глутаминовой кислоты. Ионные связи также образуются между положительно заряженными фосфатными группами нуклеиновых кислот и катионами.

Энергия ионной связи зависит от диэлектрической проницаемости среды. Так, в воде ( $\epsilon = 80$ ) связь будет менее крепкой, чем внутри белковой глобулы ( $\epsilon = 2 \div 5$ ). Энергия ионной связи составляет от 40 до 400 кДж/моль.

**Ион-дипольные взаимодействия** возникают между ионами и молекулами или атомными группами, обладающими дипольным моментом, например, между ионами  $\text{Na}^+$  и молекулами воды. Энергия ион-дипольных взаимодействий составляет от 4 до 40 кДж/моль.

Атомы, находящиеся на небольшом расстоянии друг от друга, взаимодействуют за счет **ван-дер-ваальсовых связей**, которые включают ориентационные, индукционные и дисперсионные взаимодействия.

*Ориентационные (диполь-дипольные) связи* возникают между молекулами, обладающими дипольным моментом (см. § 9.1). Энергия диполь-дипольного взаимодействия равна:

$$W_{\text{дд}} = -\frac{p_1^2 p_2^2}{6\pi\epsilon_0 \epsilon k T r^6}, \quad (6.1.2)$$

где  $p_1$  и  $p_2$  — дипольные моменты взаимодействующих молекул;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура.

Молекула, имеющая постоянный дипольный момент, способна индуцировать его в соседней молекуле. Энергия *индукционного взаимодействия* равна:

$$W_{\text{инд}} = -\frac{\alpha p^2}{2\pi\epsilon_0\epsilon r^6}, \quad (6.1.3)$$

где  $\alpha$  — поляризуемость молекулы или атомной группы [см. (9.3.4)].

Энергия ориентационных и индукционных связей составляет 0,4—4 кДж/моль. Формулы (6.1.2) и (6.1.3) справедливы только для точечных диполей.

*Дисперсионные взаимодействия* возникают между нейтральными или неполярными группами и имеют квантово-механическую природу. Их энергия определяется следующим образом:

$$W = -\frac{2I_1 I_2}{3(I_1 + I_2)} \cdot \frac{\alpha_1 \alpha_2}{r^6}, \quad (6.1.4)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — потенциалы ионизации групп (см. § 15.1);  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  — поляризуемости групп. Энергия дисперсионных связей равна 4—40 кДж/моль.

**Водородные связи** образуются между группами, содержащими атом водорода (О—Н, N—Н, F—Н, Cl—Н), и атомами О, N, F, Cl за счет электростатических и ван-дер-ваальсовых взаимодействий. Водородная связь является направленной и образуется только в том случае, если все три атома, участвующие в ее образовании, лежат на одной прямой. Энергия водородных связей составляет от 4 до 30 кДж/моль. Как мы увидим в дальнейшем, водородные связи во многом определяют строение и свойства воды, играют важнейшую роль в формировании структуры белков и ДНК.

**Гидрофобные взаимодействия** способствуют отталкиванию друг от друга неполярных незаряженных групп и молекул воды. Эти силы определяют формирование структуры биологических мембран и глобулярных белков. Подробнее о гидрофобных взаимодействиях будет рассказано ниже.

## § 6.2. СТРУКТУРА ВОДЫ И ГИДРОФОБНЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Биологические макромолекулы функционируют в водной среде, их пространственное строение во многом определяется вод-

ным окружением. Поэтому одной из самых важных проблем молекулярной биофизики является вопрос о структуре воды.

Воду называют аномальной жидкостью. В отличие от других гидридов VI группы таблицы Менделеева ( $\text{H}_2\text{Po}$ ,  $\text{H}_2\text{Te}$ ,  $\text{H}_2\text{Se}$ ,  $\text{H}_2\text{S}$ ) вода имеет слишком высокие температуры плавления и кипения, а также большой температурный диапазон между этими величинами. Сопоставление температур плавления и кипения гидридов IV группы показывает, что вода должна плавиться при температуре  $-95^\circ\text{C}$ , а закипать при температуре  $-80^\circ\text{C}$ , то есть существовать в жидком виде в диапазоне всего лишь  $15^\circ\text{C}$ .

При понижении температуры вода, как и все жидкости, сжимается, однако уменьшение удельного объема продолжается только до  $4^\circ\text{C}$ . Ниже указанной температуры вода начинает расширяться. Поэтому максимальная плотность воды достигается при  $4^\circ\text{C}$  и составляет  $1 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$  (для сравнения: при  $0^\circ\text{C}$  плотность воды —  $0,9167 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ). Плотность льда оказывается меньше плотности воды, благодаря чему лед не тонет в воде, а плавает на поверхности. Это свойство воды препятствует полному вымерзанию водоемов зимой и сохраняет жизнь в них. Даже в самые сильные морозы температура придонных слоев не опускается ниже  $4^\circ\text{C}$ .

Вода имеет аномально высокие теплоемкость, удельную теплоту плавления и кипения, диэлектрическую проницаемость. Последняя величина для воды равна 80, в то время как для большинства других веществ — меньше 10.

Большинство вышеописанных аномальностей можно объяснить, предположив в воде наличие связей, скрепляющих между собой отдельные молекулы. Такими связями являются водородные связи. Для того чтобы понять, каким образом вода образует разветвленную систему водородных связей, рассмотрим строение ее молекулы.

В молекуле воды атомы расположены нелинейно. Угол, образуемый между связями  $\text{O—H}$ , составляет  $104,5^\circ$ . Атом кислорода имеет на внешней оболочке четыре электрона, два из которых образуют ковалентные связи с двумя атомами водорода. Электроны водорода оказываются смещенными в сторону атома кислорода. Неподделенная пара электронов кислорода, в свою очередь, стремится удалиться от электронов водорода. Поэтому электронные орбитали неподделенной пары сильно вытянуты в противоположную от водорода сторону. В результате атом кислорода оказывается расположенным в центре тетраэдра, в двух вершинах которого находятся атомы водорода. По направлению к двум другим вершинам тетраэдра располагаются орбитали неподделенной электронной пары кислорода. Эти электроны создают локальный отрицательный заряд, в то время как атомы водорода — положительный.

Благодаря такому строению молекула воды является диполем с довольно большим дипольным моментом<sup>1</sup> ( $6 \cdot 10^{-30}$  Кл·м).

Электронная структура воды определяет ее способность выступать одновременно и донором, и акцептором при образовании водородной связи: каждый атом водорода одной молекулы связывается с атомом кислорода другой молекулы, а атом кислорода данной молекулы — с двумя атомами водорода других молекул.

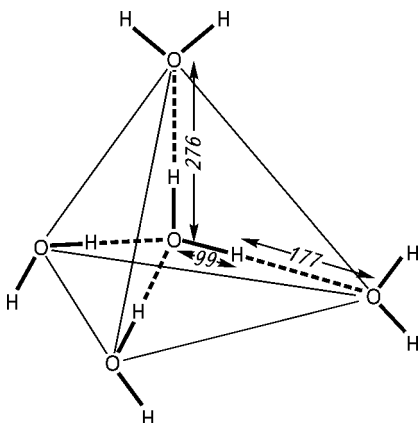


Рис. 6.2.1. Тетраэдрическая структура воды. Длины связей выражены в пикометрах

Таким образом, каждая молекула воды связана водородными связями с четырьмя соседними молекулами (рис. 6.2.1), то есть координационное число воды в твердой фазе равно 4. Комплексы тетраэдров образуют гексагональную кристаллическую решетку льда. Так как при этом между молекулами остается большое свободное пространство, то лед имеет относительно низкую плотность.

Что касается структуры жидкой воды, то по этому вопросу нет единого мнения. Во время плавления кристаллическая решетка частично разрушается и часть воды оказывается несвязанной.

Однако, как показали данные рентгенографического анализа, в воде сохраняются признаки упорядоченной структуры.

Образование упорядоченной структуры воды вызывает уменьшение энтропии системы ( $\Delta S < 0$ ), что термодинамически невыгодно. Однако это явление сопровождается образованием четырех водородных связей, что приводит к уменьшению энтальпии ( $\Delta H < 0$ ), причем  $|\Delta H| > |T\Delta S|$ . Таким образом, полное изменение термодинамического потенциала Гиббса отрицательно:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S < 0, \quad (6.2.1)$$

то есть данный процесс является энергетически выгодным.

Наличие водородных связей в структуре льда объясняет высокое значение удельной теплоты плавления льда, а их присутствие

<sup>1</sup> Высокое значение дипольного момента молекул воды объясняет большую диэлектрическую проницаемость этой жидкости. В жидкой воде диполи ориентированы хаотично, и результирующее электрическое поле, создаваемое ими, равно нулю. Во внешнем электрическом поле диполи выстраиваются таким образом, чтобы их собственное поле ослабляло внешнее. Благодаря высокому дипольному моменту молекул воды внешнее поле ослабляется в 80 раз.

в жидкой воде — ее высокие теплоемкость и теплоту парообразования, так как разрушение водородных связей, происходящее во время плавления льда или нагревания воды, требует высоких затрат энергии.

Согласно одной из моделей жидкой воды, **модели мерцающих кластеров**, в воде имеются упорядоченные области, сходные со структурой льда, — **кластеры** — и неупорядоченные области, представляющие собой не связанные водородными связями молекулы (рис. 6.2.2). Кластеры и неструктурированные области постоянно

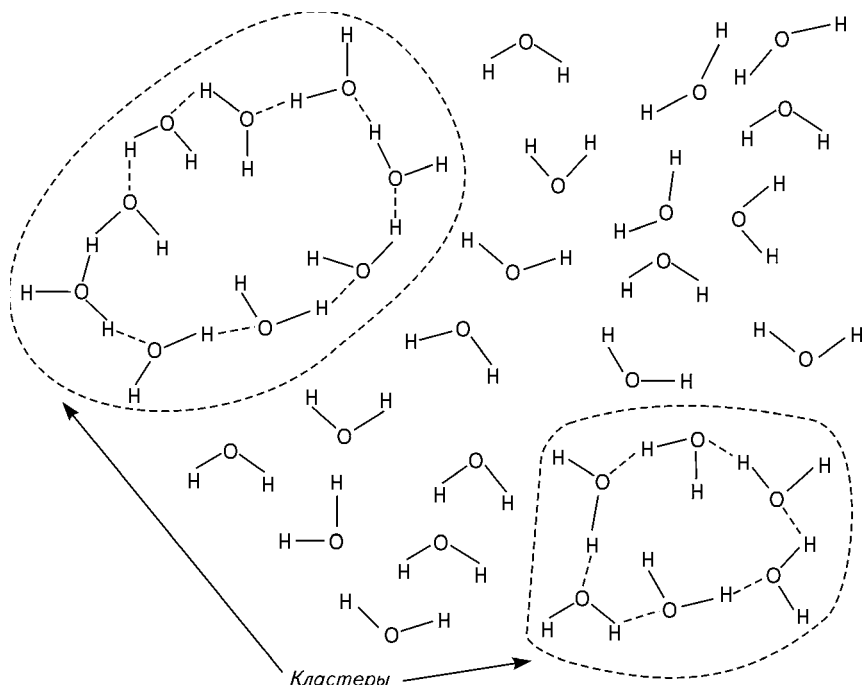


Рис. 6.2.2. Модель мерцающих кластеров

обмениваются молекулами. Согласно расчетам Г. Немети и Х. Шерага, при температуре 20 °С доля молекул, объединенных в кластеры, составляет 70 %, а свободных молекул — 30 %. С повышением температуры все больше молекул переходит в несвязанное состояние, а средний размер кластеров и их количество уменьшаются.

В кластерах не всегда сохраняется правильная кристаллическая решетка, свойственная льду. Согласно **модели Самойлова**, плавление льда, сопровождающееся частичным разрушением кристаллической решетки, приводит к тому, что часть молекул, утративших

водородные связи, располагается в полостях тетраэдров, формирующих кристаллическую решетку. Размер тетраэдра таков, что в его полости может разместиться одна молекула воды, не разрушая и не задевая водородных связей, формирующих данный тетраэдр. Этим объясняется повышение плотности воды при плавлении льда. Однако с повышением температуры возрастает тепловая энергия молекул, и, следовательно, увеличивается амплитуда их колебаний, что уменьшает плотность воды. При температуре ниже 4 °С преобладающим является первый фактор (заполнение полостей решетки), а при более высоких температурах — второй (увеличение амплитуды колебаний), то есть максимальная плотность воды достигается при температуре 4 °С.

При нарушениях правильной гексагональной структуры воды увеличивается число соседних молекул, окружающих данную молекулу. Поэтому координационное число воды в жидкой фазе выше, чем в кристаллической, и приблизительно равно 4,4.

Молекулы воды, находясь в узлах кристаллической решетки или образуя упорядоченную структуру в жидкой воде, совершают колебания вокруг положения равновесия с периодом  $\tau_{\text{колеб}} \approx 2 \cdot 10^{-13}$  с и вращения ( $\tau_{\text{вр}} \approx 10^{-5}$  с для льда и  $10^{-11}$  с для жидкой воды). Если время наблюдения  $\tau$  намного меньше времени колебательной диффузии ( $\tau \ll \tau_{\text{колеб}}$ ), то возникает мгновенная, или М-структура (рис. 6.2.3, а); при условии  $\tau_{\text{колеб}} \ll \tau \ll \tau_{\text{вр}}$  — колебательно-усредненная, или К-структура (рис. 6.2.3, б); при  $\tau \gg \tau_{\text{вр}}$  — диффузионно-усредненная, или Д-структура (рис. 6.2.3, в). Молекулы способны совершать и трансляционные переходы, но в кри-

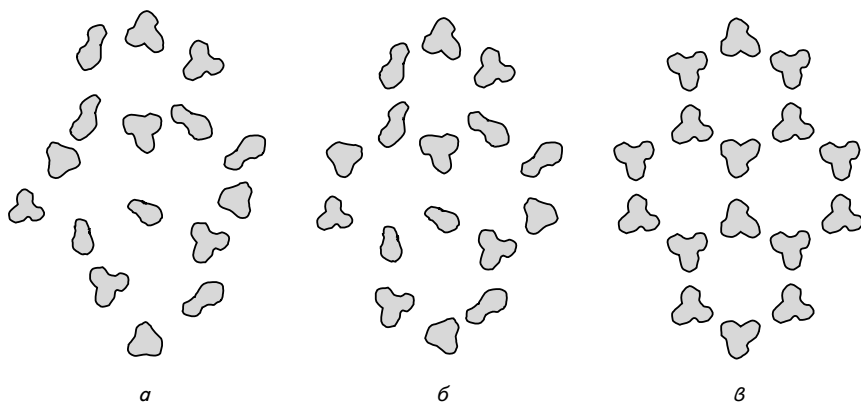


Рис. 6.2.3. Структура воды:

а — мгновенная (М-структура); б — колебательно-усредненная (К-структура); в — диффузионно-усредненная (Д-структура)



сталле их частота очень мала, а в жидком состоянии — уже значительна, поэтому Д-структура жидкой воды размыта.

Вокруг растворенных в воде макромолекул и ионов образуется так называемая *сольватная*, или *гидратная оболочка*. Свойства воды, образующей эту оболочку, отличаются от свойств обычной воды. Так, среднее время оседлой жизни молекулы увеличивается в несколько раз.

В зависимости от степени растворимости в воде различают *гидрофильные* и *гидрофобные соединения*. Для количественного описания гидрофильности или гидрофобности соединения используют величину изменения термодинамического потенциала Гиббса  $\Delta G^0$  при переносе соединения из неполярного растворителя в полярный, например из этанола в воду. Чем меньше величина  $\Delta G^0$ , тем лучше растворимость соединения. Гидрофильными, как правило, являются полярные соединения, а гидрофобными — неполярные, однако имеются некоторые исключения. Например, полярная аминокислота аргинин и неполярная аланин имеют одинаковое значение  $\Delta G^0$  (3070 Дж/моль), за счет того, что в состав аргинина входит большой углеводородный остаток.

Качественная картина взаимодействия растворенных веществ с водой заключается в следующем. Вокруг растворенного соединения среднее время оседлой жизни молекул воды увеличивается, доля молекул, образующих упорядоченные области, возрастает по сравнению с их долей в остальном растворе. В результате энтропия системы уменьшается ( $\Delta S < 0$ ). Образование большего числа водородных связей снижает энтальпию системы ( $\Delta H < 0$ ), но в случае растворения неполярных соединений в воде  $|\Delta H| < |T \Delta S|$ , то есть

$$\Delta G = \Delta H - T \Delta S > 0, \quad (6.2.2)$$

что и определяет энергетическую невыгодность этого процесса.

Неполярные соединения выталкиваются из водного окружения и ассоциируют друг с другом (рис. 6.2.4). Такие взаимодей-

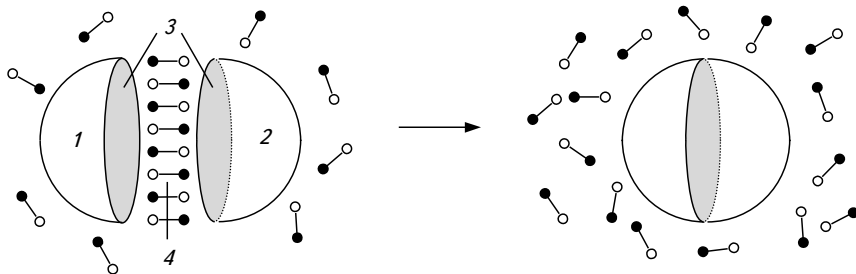


Рис. 6.2.4. Схематическое изображение возникновения гидрофобных взаимодействий:

1, 2 — молекулы с неполярными областями; 3, 4 — упорядоченный участок воды

ствия называются гидрофобными. Из вышесказанного следует, что эти взаимодействия возникают не в силу каких-либо специфических сил притяжения между неполярными соединениями, а целиком определяются свойствами воды.

### § 6.3. СТРУКТУРА И СВОЙСТВА БИОПОЛИМЕРОВ

*Структура макромолекул* имеет несколько уровней организации. *Первичной структурой* называется последовательность мономеров, образующих полимерную цепь; в белках это последовательность аминокислот, в нуклеиновых кислотах — нуклеотидов. Первичная структура стабилизирована ковалентными связями, в то время как все остальные уровни организации — в основном слабыми связями (водородными, гидрофобными, электростатическими и др.). Под *вторичной структурой* понимается регулярное расположение в пространстве элементов цепи, например, вторичная структура нуклеиновых кислот представляет собой спираль. *Третичной структурой* называется взаимное расположение в пространстве регулярных и нерегулярных элементов цепи, хотя на самом деле различие между вторичной и третичной структурой является условным. Некоторые макромолекулы состоят из нескольких цепей, называемых субъединицами. Взаимное расположение субъединиц называется *четвертичной структурой* биополимера.

Полимеры, синтезируемые в живом организме, обладают свойством *хиральности*. Большинство сложных органических молекул асимметричны, то есть не имеют ни плоскости, ни центра симметрии. Такие молекулы существуют в двух формах — правой и левой — и являются зеркальным отражением друг друга. Термин «хиральность» произошел от древнегреческого слова «хейр» — рука, так как наши ладони также являются зеркально-симметричными. Левую и правую формы одной молекулы, которые обычно называют *стереоизомерами*, нельзя совместить друг с другом никаким поворотом системы как целого в пространстве (так, например, правую перчатку нельзя надеть на левую руку).

В природе обычно приходится сталкиваться с асимметричным атомом углерода (в химических формулах он помечается звездочкой). Такой атом связан с четырьмя разными группами ( $C^*XYZR$ ). Если хотя бы две группы из четырех являются одинаковыми, то такая молекула имеет плоскость симметрии, то есть не является хиральной. Так, в молекуле  $CX_2YZ$  такой плоскостью является плоскость  $CYZ$ . Хиральными являются все аминокислоты (за исключением глицина), углеводы, нуклеиновые кислоты. Азотистые осно-

вания этим свойством не обладают, поэтому хиральность нуклеиновых кислот определяется углеводной компонентой.

Физической стороной хиральности является способность раствора одного стереоизомера данного соединения вращать плоскость поляризации плоскополяризованного света (см. § 18.7). Одни стереоизомеры вращают плоскость поляризации влево (против часовой стрелки для наблюдателя, смотрящего навстречу лучу), они называются л е в о в р а щ а ю щ и м и, и перед ними ставят знак «-»; другие вращают плоскость поляризации вправо (по часовой стрелке) и называются п р а в о в р а щ а ю щ и м и («+»). Раствор, состоящий из одного стереоизомера хирального соединения, является оптически активным, то есть способен вращать плоскость поляризации. Смесь двух стереоизомеров, взятых в равных количествах, оптической активностью не обладает.

Обычно стереоизомеры различают не по направлению вращения плоскости поляризации, а сравнивают с неким эталоном, которым для органических соединений является глицеральдегид (рис. 6.3.1). Различают *D*- и *L*-стереоизомеры (рис. 6.3.1).

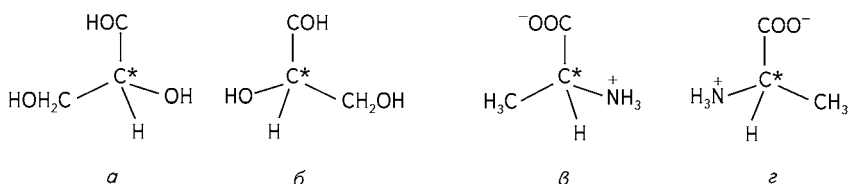


Рис. 6.3.1. Различные конфигурации глицеральдегида и аланина:

*a* — *D*-глицеральдегид; *б* — *L*-глицеральдегид; *в* — *D*-аланин; *г* — *L*-аланин

В лабораторных условиях невозможно получить вещество, состоящее из одного стереоизомера. Полученный раствор будет содержать 50 % левого изомера и 50 % правого, то есть будет являться *рацемической смесью*. Такое соотношение отвечает максимальной энтропии. Стереоизомеры обладают одинаковой химической активностью, однако в живой природе хиральные соединения существуют обычно в какой-либо одной форме. Организм различает *L*- и *D*-изомеры при поглощении извне (так некоторые соединения являются ядовитыми в одной конфигурации и безвредными — в другой; фармпрепарат фенамин в *L*-форме оказывает в 25 раз большее влияние на двигательную активность мышей, чем в *D*-форме) и синтезирует соединения в одной стереоконфигурации. В живых организмах аминокислоты присутствуют в *L*-форме, а углеводы — в *D*-форме.

Вокруг одинарных атомных связей в молекуле возможно вращение. С помощью физических методов исследований (в частности, спектроскопии и ЯМР) было установлено, что не все значе-

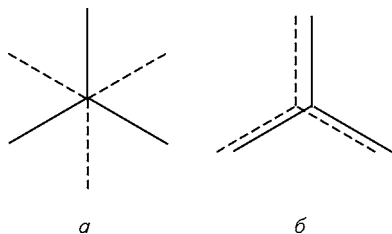


Рис. 6.3.2. Молекулы этана в *транс*-(а) и *цис*-(б) конформации (проекция даны на плоскость, перпендикулярную С—С-связи)

ния углов поворота равновероятны. Так, в молекуле этана наиболее вероятны значения углов поворота одной группы  $\text{CH}_3$  относительно другой, кратные  $120^\circ$ . В этом случае молекула находится в *транс*-конформации (рис. 6.3.2, а). Углы, отвечающие *цис*-конформации ( $60^\circ$ ,  $180^\circ$  и  $300^\circ$ , рис. 6.3.2, б), наименее вероятны. Зависимость потенциальной энергии этана и других молекул, имеющих осевую

симметрию  $C_3$ , приближенно описывается следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} U_0 (1 - \cos 3\varphi), \quad (6.3.1)$$

где  $U_0$  — высота потенциального барьера между двумя *транс*-состояниями (для этана  $U_0 = 12,5$  кДж/моль); — угол поворота вокруг С—С-связи (отсчет ведется от *транс*-конформации). Графически зависимость  $U(\varphi)$  приведена на рис. 6.3.3.

Причины, по которым *транс*-конформация является более выгодной, чем *цис*-, имеют квантово-механическую природу и заключаются в отталкивании близко расположенных валентно не связанных атомов (в данном случае атомов водорода одной группы  $\text{CH}_3$  от атомов водорода другой группы  $\text{CH}_3$ ), а также во взаимодействиях связей, примыкающих к оси вращения (так называемый **эффект ориентации связей**).

Энергия взаимодействия зависит от расстояния  $r$  между атомами и определяется соотношением сил отталкивания и притяжения. Как следует из формул (6.1.2), (6.1.3) и (6.1.4), энергия притяжения, определяемая ориентационными, индукционными и дисперсионными взаимодействиями, обратно пропорциональна  $r^6$ . На близких расстояниях становится значительной энергия отталкивания, обратно пропорциональная  $r^{12}$ . Поэтому полную энергию ван-дер-ваальсовых взаимодействий можно представить в виде:

$$U(r) = \frac{A}{r^{12}} - \frac{B}{r^6}, \quad (6.3.2)$$

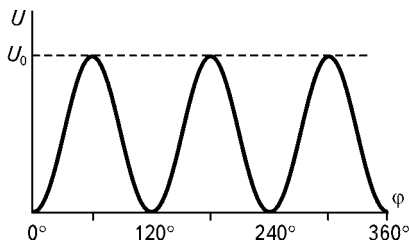


Рис. 6.3.3. Зависимость потенциальной энергии  $U$  от угла поворота  $\varphi$  для этана

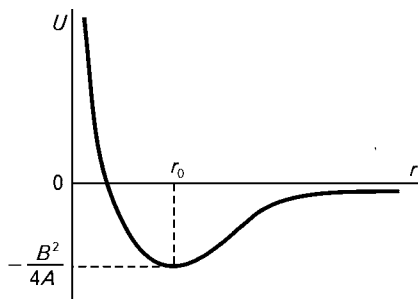


Рис. 6.3.4. Зависимость потенциальной энергии взаимодействия от межмолекулярного расстояния

где  $U(r)$  — потенциал «6—12» Леннарда—Джонса;  $A$  и  $B$  — эмпирические константы. На рис. 6.3.4 приведен вид соответствующей кривой.

Продифференцировав выражение  $U(r)$ , можно получить значение  $r$ , на котором энергия взаимодействия минимальна, то есть система находится в равновесии

$$r_0 = \sqrt[6]{\frac{2A}{B}}, \quad (6.3.3)$$

тогда минимальная энергия составляет:

$$U_{\min} = -\frac{B^2}{4A}. \quad (6.3.4)$$

Для молекул, не обладающих коаксиальной симметрией, зависимость внутренней энергии от угла поворота вокруг одинарной связи принимает более сложный характер, чем в уравнении (6.3.1).

Например, внутренняя энергия для  $n$ -бутана (рис. 6.3.5) в зависимости от угла поворота вокруг связи между двумя группами  $C_2H_5$ , так же как и для этана, имеет три минимума (рис. 6.3.6).

Однако они имеют неодинаковую глубину. Это объясняется тем, что для молекулы бутана конформации, соответствующие минимуму потенциальной энергии, отличаются друг от друга, в то время как для этана они одинаковы. На рис. 6.3.6 схематически представлены три наиболее выгодные конформации  $n$ -бутана.

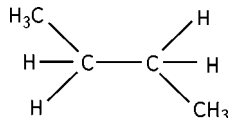


Рис. 6.3.5.  $n$ -Бутан

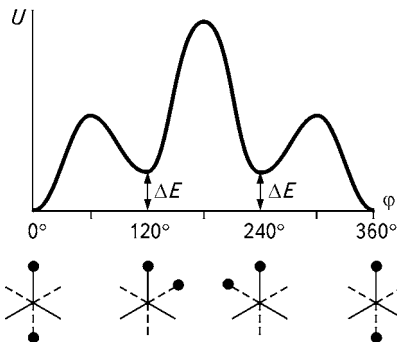


Рис. 6.3.6. Зависимость внутренней энергии  $U$  от угла поворота  $\varphi$  для  $n$ -бутана и его конформаций, соответствующих минимуму потенциальной энергии (сплошными линиями обозначены связи ближайшей группы  $C_2H_5$ ; штриховыми — дальней группы; черными кружками обозначены группы  $CH_3$ ; проекции даны на плоскость, перпендикулярную центральной  $C-C$ -связи).

Наиболее глубокий минимум энергии отвечает *транс*-конформации, а два других — так называемым свернутым, или *гош*-конформациям.

Энергетически выгодные конформации, возникающие при поворотах вокруг единичных связей, называются *поворотными изомерами*. Молекула будет переходить из одной выгодной конформации в другую со скоростью, которая определяется высотой потенциального барьера, отделяющего эти конформации. Так, при высоте потенциального барьера около 12,5 кДж/моль время превращения одного поворотного изомера в другой составляет  $10^{-10}$  с.

Макромолекулы обладают несколькими видами изомерии. Различные изомеры одного и того же соединения, переход между которыми возможен только при условии разрыва и образования новых ковалентных связей, называются *конфигурациями* этого соединения. Примером конфигураций являются *L*- и *D*-изомеры. Если же переход из одного изомера в другой осуществляется за счет поворота вокруг одинарных ковалентных связей без их разрыва, то такие изомеры называются *конформациями*.

## § 6.4. СТРУКТУРА БЕЛКОВ

В составе природных белков встречаются 20 аминокислот. Все они являются производными карбоновых кислот, у которых к атому углерода, находящемуся в  $\alpha$ -положении (рис. 6.4.1), присоединена аминогруппа ( $-\text{NH}_2$ ). Как видно из общей формулы (рис. 6.4.1), аминокислоты отличаются друг от друга радикалом  $\text{R}$ , который может содержать алифатические, ароматические, гидроксильные, карбоксильные группы и включать атомы углерода, водорода, кислорода, азота и серы. Образование белковой цепи из нескольких аминокислот происходит путем образования ковалентной пептидной связи (рис. 6.4.2). Цепь из нескольких аминокислот называется **полипептидом**. Определенная последовательность аминокислот в цепи составляет первичную структуру белка.

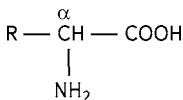


Рис. 6.4.1.  $\alpha$ -Аминокислота

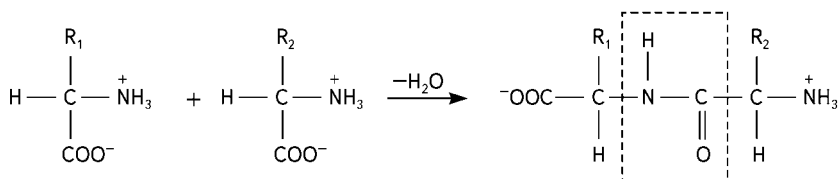


Рис. 6.4.2. Образование пептидной связи (обозначена пунктирной линией)

При образовании пептидной связи N—C-связь приобретает частично двойной характер (ее длина составляет 0,132 нм, что меньше длины одинарной связи и больше длины двойной связи), а C=O-связь — частично одинарный (при этом ее длина увеличивается от 0,121 до 0,124 нм). Вследствие сопряжения N—C- и C=O-связей вращение вокруг N—C-связи невозможно. Поэтому все четыре атома O, C, N, H, участвующих в образовании пептидной связи, а также связанные с ними ковалентно два соседних атома C<sub>α</sub> лежат в одной плоскости. Существует множество конформаций макромолекул обеспечивается возможностью вращения вокруг C—C<sub>α</sub>- (на угол  $\psi$ ) и C<sub>α</sub>—N-связей (на угол  $\phi$ ) (рис. 6.4.3).

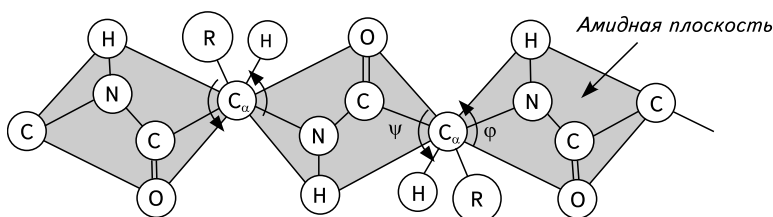


Рис. 6.4.3. Расположение пептидных групп белковой молекулы

Не все значения углов  $\phi$  и  $\psi$  допустимы вследствие возможного стерического несоответствия двух соседних аминокислотных остатков. Индийский ученый Г. Рамачандран рассчитал допустимые значения углов  $\phi$  и  $\psi$  (углы отсчитываются от плоской *транс*-конформации полипептидной цепи) и построил стерические карты, на которых по оси абсцисс откладываются значения углов  $\phi$  от 0 до 360°, а по оси ординат — значения углов  $\psi$ . На карте отмечаются полностью разрешенные (при обычных межатомных расстояниях) и частично разрешенные (при минимальных межатомных расстояниях) области значений этих углов (рис. 6.4.4).

Молекулы белков стремятся находиться в состоянии с минимальной внутренней энергией. Это достигается за

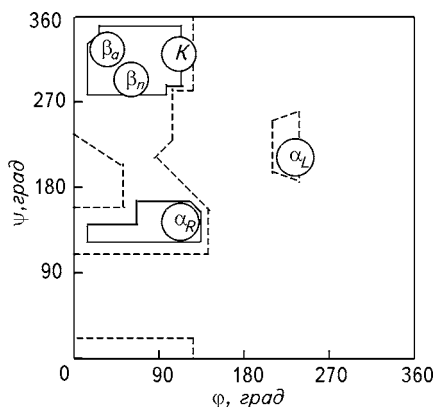


Рис. 6.4.4. Стерическая карта для поли-L-аланина.

Сплошные линии обозначают границы полностью разрешенных областей; пунктирные — частично разрешенных. На карте указаны области значений углов  $\phi$  и  $\psi$  для параллельной ( $\beta_p$ ) и антипараллельной ( $\beta_n$ )  $\beta$ -форм, спирали белка коллагена (K), правой ( $\alpha_R$ ) и левой ( $\alpha_L$ )  $\alpha$ -спиралей.

счет пространственной стабилизации химических групп водородными связями. Таким образом, образуется некая упорядоченная система, которая называется вторичной структурой белка. Как установили Полинг и Кори, полипептидные цепи могут образовывать спиральные и складчатые структуры.

$\alpha$ -Спираль бывают левозакрученными ( $\phi = 228^\circ$ ,  $\psi = 237^\circ$ ) и правозакрученными ( $\phi = 132^\circ$ ,  $\psi = 123^\circ$ ). Водородные связи, стабили-

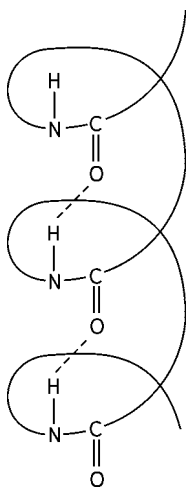


Рис. 6.4.5. Расположение водородных связей в  $\alpha$ -спирали белка

зирующие такую структуру, образуются между  $\text{C}=\text{O}$ -группой  $i$ -й аминокислоты и  $\text{N}-\text{H}$ -группой  $(i + 4)$ -й аминокислоты (рис. 6.4.5). Каждый мономер поворачивается вокруг оси спирали на  $100^\circ$  и перемещается вдоль оси на 0,15 нм. Таким образом, на каждый виток спирали приходится 3,6 пептидных единицы, а длина витка составляет 0,54 нм. Существуют спиральные структуры с параметрами, отличными от вышеприведенных, например коллагеновая спираль. Некоторые спирали закручиваются одна вокруг другой, образуя суперспиральные структуры, например, в белках тропомиозин и тропоколлаген.

Другим типом конформаций является  $\beta$ -форма (рис. 6.4.6). Такая структура образуется совокупностью нескольких полипептидных цепей (рис. 6.4.7) или из одной цепи, несколько раз изогнутой (кросс- $\beta$ -форма) (рис. 6.4.8), и стабилизируется водородными связями, возникающими между рядом расположенными цепями. В результате образуется структура типа складчатого слоя. Отдельные

цепи в такой структуре могут располагаться параллельно и анти-

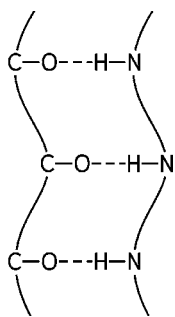


Рис. 6.4.6. Расположение водородных связей в  $\beta$ -форме

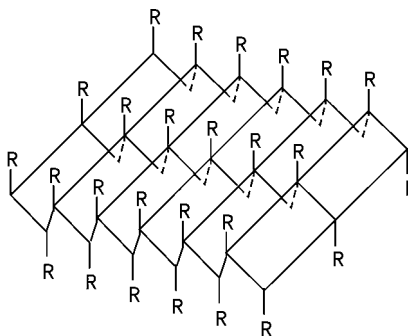


Рис. 6.4.7.  $\beta$ -Слой из нескольких полипептидных цепей

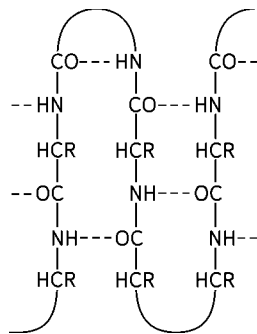


Рис. 6.4.8. Кросс- $\beta$ -форма



параллельно. В параллельной  $\beta$ -форме углы  $\phi$  и  $\psi$  составляют  $61^\circ$  и  $239^\circ$ , а в антипараллельной —  $380^\circ$  и  $325^\circ$  соответственно.

В белках встречаются и неупорядоченные участки, на которых углы  $\phi$  и  $\psi$  имеют значения, отличные от тех, которые были указаны выше. Доля неупорядоченных участков в некоторых белках может составлять до 50—60 %. Так, например, в гемоглобине 75 % полипептидных цепей находятся в виде  $\alpha$ -спирали, а оставшиеся 25 % представляют собой неупорядоченные участки. Последние обеспечивают изгибы цепей в пространстве, в частности, такие участки находятся в месте изгиба кросс- $\beta$ -формы.

Вероятность встретить ту или иную аминокислоту в  $\alpha$ -,  $\beta$ -формах или неупорядоченных участках различна. Так, например, в  $\alpha$ -спиралях чаще всего встречаются такие аминокислоты, как глутаминовая кислота, аланин, лейцин; в  $\beta$ -формах — метионин, валин, изолейцин; в неупорядоченных участках — глицин и пролин (последний не способен образовывать водородных связей, так как на самом деле является не амино-, а иминокислотой). Зная частоту встречаемости аминокислот в различных видах конформаций белка, можно на основании информации о первичной структуре с вероятностью до 70 % предсказать вторичную.

Полипептидная цепь стабилизируется в пространстве не только водородными связями, но и гидрофобными взаимодействиями, ионными и дисульфидными ( $\text{—S—S—}$ ) связями; которые могут образовываться между аминокислотными остатками, далеко отстоящими друг от друга в цепи. В результате этих взаимодействий белковая цепь оказывается уложенной в некую компактную структуру, в которой чередуются упорядоченные и неупорядоченные участки (третичная структура белка).

Некоторые белковые молекулы содержат в своем составе не одну, а несколько полипептидных цепей (субъединиц). Каждая цепь имеет свою третичную структуру и связана с другими цепями нековалентными связями. В результате формируется четвертичная структура. Белки, обладающие четвертичной структурой, имеют в своем составе строго определенное число субъединиц, например, в гемоглобине их четыре.

Связи, стабилизирующие вторичную, третичную и четвертичную структуры, являются слабыми (кроме ковалентных дисульфидных). Поэтому изменение условий окружающей среды может привести к их разрыву и образованию новых связей. Образуется новая конформация, энергетически выгодная в данных условиях, то есть происходит *конформационный переход*.

Среди аминокислот, входящих в состав белков, есть как гидрофильные (аргинин, аспарагин, гистидин, глутамин, лизин, серин, тирозин и треонин), так и гидрофобные (остальные 12). В состав одного и того же белка входят, как правило, и те, и другие аминокис-

кислоты. Белковая молекула в воде (полярном растворителе) стремится свернуться таким образом, чтобы ее гидрофильные аминокислоты контактировали с ним, а гидрофобные были «спрятаны» внутри. В результате внутри молекулы образуется гидрофобное ядро, покрытое сверху гидрофильной оболочкой. Такая структура называется *белковой глобулой* (от лат. globulus — шарик). Ее образование обеспечивает формирование компактной структуры при большой молекулярной массе.

Основную роль в формировании белковой глобулы играют именно гидрофобные взаимодействия, способствующие выталкиванию неполярных аминокислот из водной среды, а не выигрыш энергии при образовании водородных связей между полярными аминокислотами и водой, так как примерно такое же количество энергии выделяется и при формировании водородных связей между аминокислотами в белке.

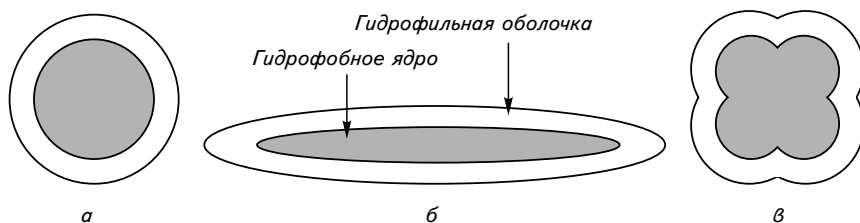


Рис. 6.4.9. Различные формы белковой глобулы:

$a$  — сфера ( $b = b_s$ );  $b$  — эллипсоид ( $b > b_s$ );  $v$  — надмолекулярные структуры ( $b < b_s$ )

Форма глобулы определяется соотношением числа полярных и неполярных аминокислотных остатков. Если в белке  $b = b_s$  (где  $b$  — отношение числа полярных остатков к неполярным;  $b_s$  — отношение объема гидрофильной фазы к объему гидрофобного ядра), то глобула будет стремиться образовать сферу. При  $b > b_s$ , то есть полярных остатков больше, чем необходимо, чтобы покрыть сферическое гидрофобное ядро, глобула примет вытянутую форму. При  $b < b_s$  полярных остатков не хватает и части гидрофобного ядра приходится контактировать с водой. Во избежание этого несколько таких молекул образуют комплекс друг с другом. На рис. 6.4.9 приведены возможные формы белковых глобул в зависимости от параметра  $b$ .

## § 6.5. ПЕРЕХОДЫ СПИРАЛЬ — КЛУБОК

Вторичная структура макромолекул является стабильной лишь в определенных условиях. Изменения температуры, растворителя, pH, ионного состава среды может привести к разрушению слабых

водородных связей и превращению упорядоченной структуры в клубок, характеризующийся случайным расположением элементов цепи. Происходит так называемый *переход спираль — клубок*. Такой переход сходен с фазовым переходом, поэтому иногда этот процесс называют плавлением.

Кривая плавления имеет S-образную форму, так как плавление белка носит кооперативный характер. Это объясняется расположением водородных связей в  $\alpha$ -спирали белка. Связи между  $i$ -тым и  $(i + 4)$ -м мономером фиксируют положение в пространстве  $(i + 1)$ -го,  $(i + 2)$ -го и  $(i + 3)$ -го мономеров. Поэтому для разрушения одного участка спиральной структуры требуется разорвать подряд как минимум три водородные связи. Только в случае таких кооперативных разрывов свободная энергия системы будет уменьшаться.

Плавление спирали происходит при условии равенства свободной энергии Гиббса  $\alpha$ -спирали  $G_\alpha$  и образующегося клубка  $G_{\text{кл}}$ :

$$G_\alpha = H_\alpha - T_{\text{пл}} S_\alpha = H_{\text{кл}} - T_{\text{пл}} S_{\text{кл}} = G_{\text{кл}}, \quad (6.5.1)$$

или

$$\Delta G = G_{\text{кл}} - G_\alpha = \Delta H - T_{\text{пл}} \Delta S = 0. \quad (6.5.2)$$

Отсюда следует, что

$$T_{\text{пл}} = \frac{\Delta H}{\Delta S}. \quad (6.5.3)$$

Введем параметр  $\theta$ , обозначающий долю спирализованных звеньев в цепи ( $\theta = 1$  для полностью спирализованной цепи,  $\theta = 0$  для полностью расплавленной цепи):

$$\theta = \frac{s^n}{1 + s^n}, \quad (6.5.4)$$

где  $n$  — параметр, определяющий длину кооперативности ( $1 < n < N$ ,  $N$  — число звеньев  $\alpha$ -спирали);

$$s = \exp\left(-\frac{\Delta G}{RT}\right) \quad (6.5.5)$$

является константой равновесия процесса образования водородной связи в звене, следующим за уже связанным звеном.

При большой длине кооперативности ( $n \gg 1$ ) возможны несколько случаев:  $\theta \approx 0$  при  $s < 1$ ,  $\theta = 0,5$  при  $s = 1$  (то есть при  $\Delta G = 0$ ) и  $\theta = 1$  при  $s > 1$ .

Условие  $n = 1$  выполняется только в том случае, если велика свободная энергия, необходимая для разрыва одной водородной связи. Это в свою очередь происходит, если мала константа равновесия  $\sigma$  для такого процесса

$$\sigma = \exp\left(-\frac{G_{\text{разр}}}{RT}\right). \quad (6.5.6)$$

Расчет показывает, что

$$n \approx \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \quad (6.5.7)$$

где  $\sigma$  — параметр кооперативности, определяющий крутизну кривой плавления. Длина кооперативности максимальна ( $n \rightarrow N$ ) при  $G_{\text{разр}} \rightarrow \infty$  и  $\sigma \rightarrow 0$  и минимальна ( $n \rightarrow 1$ )  $G_{\text{разр}} \rightarrow 0$  и  $\sigma \rightarrow 1$ . В последнем случае получаем:

$$\theta = \frac{s}{1+s}. \quad (6.5.8)$$

На рис. 6.5.1 приведены теоретические кривые  $\theta(s)$  при различных значениях  $\sigma$ .

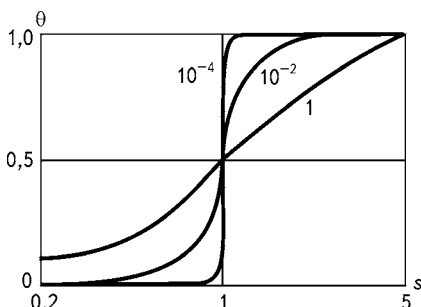


Рис. 6.5.1. Зависимость доли  $\theta$  спирализованных звеньев от константы  $s$  при различных значениях  $\sigma$

## § 6.6. ФЕРМЕНТНЫЙ КАТАЛИЗ

Одной из основных функций белков является ферментативная. Белки-ферменты способны ускорять биохимические реакции в  $10^8$ – $10^{10}$  раз по сравнению с тем, если бы эти реакции происходили бы без участия ферментов.

Согласно *формуле Аррениуса*, константа скорости реакции равна

$$k = A \exp\left(-\frac{E_{\text{акт}}}{RT}\right), \quad (6.6.1)$$

где  $A$  — константа, определяющая частоту столкновений реагирующих молекул;  $E_{\text{акт}}$  — энергия активации — высота потенциального барьера, который должна преодолеть система для осуществления реакции;  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T$  —

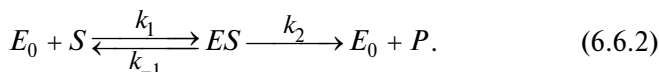
температура; множитель  $\exp\left(-\frac{E_{\text{акт}}}{RT}\right)$  определяет долю молекул,

энергия которых превышает энергию активации.

Ферменты никогда не сдвигают химическое равновесие в реакциях, определяемое разностью свободных энергий продукта и субстрата. Эти реакции совершаются и в отсутствие фермента, но со значительно меньшей скоростью. Роль ферментов сводится к уменьшению энергии активации данной реакции, а следовательно, согласно формуле (6.6.1), — увеличению константы скорости реакции.

Ферменты обладают высокой специфичностью и, как правило, катализируют только определенные реакции или реакции с участием узкого класса соединений. Первой моделью, объясняющей специфичность фермента, явилась модель Фишера, согласно которой субстрат стерически соответствует активному центру фермента (участку фермента, к которому присоединяется субстрат). Эта модель получила название *ключ—замок*. Согласно более поздней модели Кошланда — *модели индуцированного соответствия*, — присоединение определенного субстрата вызывает конформационные перестройки в ферменте, в результате чего его каталитические группы ориентируются в пространстве таким образом, что оказываются способными осуществить превращение субстрата в продукт. Эта модель объясняет тот факт, что присоединение к ферменту некоторых веществ, структурно похожих на субстрат, не ускоряет их химическое превращение.

Рассмотрим кинетику ферментативных реакций. В простейшем случае присоединение субстрата к свободному ферменту  $E_0$  приводит к образованию фермент-субстратного комплекса  $[ES]$  с константой скорости реакции  $k_1$ , из которого образуется продукт  $P$  (константа  $k_2$ ) или комплекс распадается на субстрат и фермент (константа  $k_{-1}$ ):



Общая концентрация фермента в этом случае равна

$$[E] = [E_0] + [ES]. \quad (6.6.3)$$

Скорость изменения концентрации фермент-субстратного комплекса составляет:

$$v_1 = \frac{d[ES]}{dt} = k_1[E_0][S] - (k_{-1} + k_2)[ES], \quad (6.6.4)$$

или с учетом формулы (6.6.3)

$$v_1 = \frac{d[ES]}{dt} = k_1\{[E] - [ES]\}[S] - (k_{-1} + k_2)[ES]. \quad (6.6.5)$$

Если в системе концентрация субстрата намного превышает концентрацию фермента ( $[S] \gg [E]$ ), то число существующих в каждый момент фермент-субстратных комплексов остается постоянным ( $v_1 = 0$ ), то есть система находится в стационарном состоянии. В этом случае из формулы (6.6.5) получаем концентрацию фермент-субстратного комплекса

$$[ES] = \frac{k_1[E][S]}{k_{-1} + k_2 + k_1[S]} = \frac{[E][S]}{(k_{-1} + k_2)/k_1 + [S]} = \frac{[E][S]}{k_m + [S]}, \quad (6.6.6)$$

где

$$k_m = \frac{k_{-1} + k_2}{k_1} \quad (6.6.7)$$

константа Михаэлиса.

С учетом формулы (6.6.6) скорость ферментативной реакции равна

$$v = \frac{d[P]}{dt} = k_2[ES] = k_2 \frac{[E][S]}{k_m + [S]}. \quad (6.6.8)$$

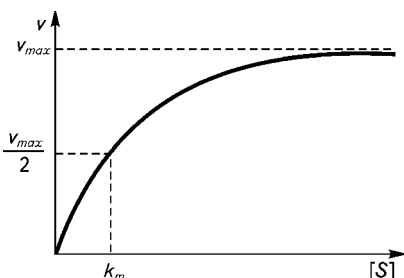


Рис. 6.6.1. Зависимость скорости  $v$  ферментативной реакции от концентрации субстрата  $[S]$

Зависимость скорости ферментативной реакции от концентрации субстрата приведена на рис. 6.6.1. При увеличении концентрации субстрата скорость стремится к некоторому максимальному значению:

$$v_{max} = \lim_{[S] \rightarrow \infty} v = k_2[E]. \quad (6.6.9)$$

Тогда выражение (6.6.8) примет вид (уравнение Михаэлиса—Ментен)

$$v = \frac{v_{max}[S]}{k_m + [S]}. \quad (6.6.10)$$

Как видим, константа Михаэлиса численно равна концентрации субстрата, при которой скорость реакции равна половине максимальной.

Для численного определения величин  $k_m$  и  $v_{\max}$  по методу Лайнуивера—Берка уравнение (6.6.10) преобразуют к виду:

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_{\max}} + \frac{k_m}{v_{\max}} \cdot \frac{1}{[S]}. \quad (6.6.11)$$

График уравнения (6.6.11) приведен на рис. 6.6.2. При  $\frac{1}{[S]} = 0$  получаем  $\frac{1}{v} = \frac{1}{v_{\max}}$ , величина  $k_m$  определяется как тангенс угла наклона прямой.

Некоторые вещества, связываясь с ферментом, уменьшают скорость ферментативной реакции (**ингибиторы**) или увеличивают (**активаторы**). В качестве ингибиторов или активаторов, имеющих общее название модификаторов, могут выступать естественные физиологические вещества, регулирующие ферментативную активность, а также целый ряд лекарственных препаратов.

Различают конкурентные и неконкурентные ингибиторы. *Конкурентные ингибиторы* связываются с активным центром фермента, образуя комплекс фермент-ингибитор  $EI$ , но в продукт не превращаются.

В случае присутствия в системе конкурентного ингибитора, согласно схеме, приведенной на рис. 6.6.3, а, скорости изменения концентрации комплексов фермент-субстрат  $ES$  и фермент-ингибитор  $EI$  примут вид соответственно:

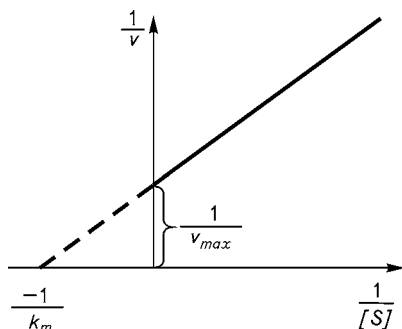


Рис. 6.6.2. График Лайнуивера—Берка

$$v_1 = \frac{d[ES]}{dt} = k_1[E_0][S] - (k_{-1} + k_2)[ES]; \quad (6.6.12)$$

$$v_2 = \frac{d[EI]}{dt} = k_3[E_0][I] - k_{-3}[EI], \quad (6.6.13)$$

а общая концентрация фермента составит:

$$[E] = [E_0] + [ES] + [EI]. \quad (6.6.14)$$

Решая совместно уравнения (6.6.12), (6.6.13) и (6.6.14) при условии установления стационарного состояния ( $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$  при

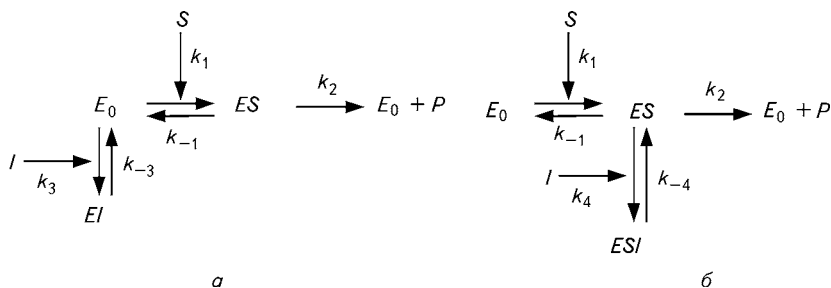


Рис. 6.6.3. Схемы процессов с конкурентным (*a*) и неконкурентным (*б*) ингибированием

$[S] \gg E$  и  $[I] \gg E$ ) выразим концентрацию фермент-субстратного комплекса в присутствии конкурентного ингибитора:

$$[ES] = \frac{[E][S]}{k_m + [S] + k_m k_i [I]}, \quad (6.6.15)$$

где  $k_i = k_3/k_{-3}$ .

Отсюда скорость ферментативной реакции в присутствии конкурентного ингибитора составит:

$$v = \frac{d[P]}{dt} = k_2[ES] = \frac{k_2[E][S]}{k_m + [S] + k_m k_i [I]}. \quad (6.6.16)$$

В этом случае максимальная скорость реакции не изменяется по сравнению с максимальной скоростью в отсутствие конкурентного ингибитора:

$$v_{\max} = \lim_{[S] \rightarrow \infty} v = k_2[E]. \quad (6.6.17)$$

Однако при малых концентрациях субстрата скорость реакции уменьшается по сравнению с той, которая была в отсутствие конкурентного ингибитора (рис. 6.6.4). Это можно объяснить тем, что при высоких концентрациях субстрата ( $[S] \rightarrow \infty$ ) фермент связывается преимущественно с ним, а не с ингибитором, концентрация которого оказывается значительно ниже концентрации субстрата ( $[I] \ll [S]$ ). При сравнимых с концентрацией ингибитора концентрациях субстрата  $[I] \approx [S]$  фермент образует комплексы как с субстратом, так и с ингибитором, что уменьшает скорость реакции. В этом случае для достижения скорости, составляющей половину максимальной, концентрацию субстрата нужно увеличить в  $(1 + k_i[I])$  раз.

В координатах Лайнуивера—Берка уравнение (6.6.16) примет вид:



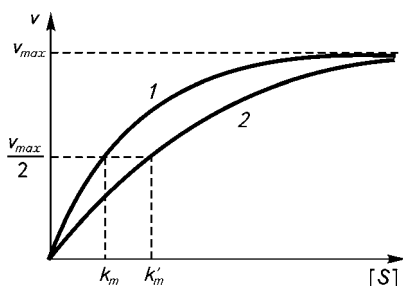


Рис. 6.6.4. Зависимость скорости ферментативной реакции от концентрации субстрата в отсутствие (1) и присутствии (2) конкурентного ингибитора

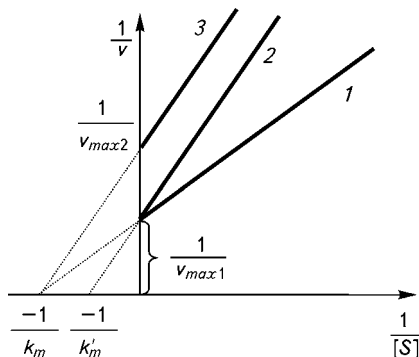


Рис. 6.6.5. График Лайнуивера—Берка: 1 — без ингибитора; 2 — в присутствии конкурентного ингибитора; 3 — в присутствии неконкурентного ингибитора

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{v_{\max}} + \frac{k_m + k_m k_i [I]}{v_{\max} [S]} = \frac{1}{v_{\max}} + \frac{k'_m}{v_{\max} [S]}, \quad (6.6.18)$$

где  $k'_m = k_m(1 + k_i[I])$  — константа Михаэлиса в присутствии конкурентного ингибитора (рис. 6.6.5, кривая 2).

**Неконкурентный ингибитор** связывается с фермент-субстратным комплексом, образуя неактивный комплекс  $ESI$ . В этом случае, согласно схеме, приведенной на рис. 6.6.3, б, скорости изменения концентрации комплексов фермент-субстрат  $ES$  и фермент-ингибитор  $EI$  составляют соответственно:

$$v_1 = \frac{d[ES]}{dt} = k_1[E_0][S] - (k_{-1} + k_2 + k_4 I)[ES] + k_{-4}[ESI]; \quad (6.6.19)$$

$$v_2 = \frac{d[ESI]}{dt} = k_4[ES][I] - k_{-4}[ESI], \quad (6.6.20)$$

а общая концентрация фермента

$$[E] = [E_0] + [ES] + [ESI]. \quad (6.6.21)$$

Тогда скорость ферментативной реакции в стационарном состоянии в присутствии неконкурентного ингибитора составит:

$$v = \frac{d[P]}{dt} = k_2[ES] = \frac{k_2[E][S]}{k_m + [S] + k_i[S][I]}, \quad (6.6.22)$$

где  $k_i = k_4/k_{-4}$ .

В этом случае максимальная скорость реакции будет равна

$$v_{\max} = \lim_{[S] \rightarrow \infty} v = \frac{k_2[E]}{1 + k_i I}, \quad (6.6.23)$$

то есть уменьшится по сравнению с максимальной скоростью в отсутствие неконкурентного ингибитора в  $(1 + k_i[I])$  раз (рис. 6.6.5, кривая 3).

Существует ряд ферментов, кинетика которых не подчиняется уравнению Михаэлиса—Ментен. Зависимость скорости ферментативной реакции от концентрации субстрата для них имеет вид, отличный от гиперболы. В большинстве случаев это явление можно объяснить следующим образом.

Некоторые ферменты состоят из нескольких субъединиц и имеют несколько центров связывания субстрата. Присоединение субстрата к одному из центров связывания вызывает такие конформационные перестройки в ферменте, которые облегчают присоединение субстрата к следующему центру (так называемый кооперативный эффект). В этом случае зависимость скорости ферментативной реакции от концентрации субстрата имеет S-образный вид.

Рассмотрим явление кооперативности на примере белка гемоглобина, состоящего из четырех субъединиц и четырех центров связывания, и сравним его кинетику с миоглобином, мономерным белком с одним центром связывания. Несмотря на то что эти белки являются не ферментами, а транспортными белками, снабжающими организм кислородом, кинетические уравнения для них сходны с уравнениями для ферментов, проявляющих свойство кооперативности, как гемоглобин, или не проявляющих, как миоглобин.

Реакцию образования комплекса лиганда  $L$  с мономерным белком  $E$  можно представить как



где  $k$  — константа связывания, равная

$$k = \frac{[EL]}{[L][E]}. \quad (6.6.25)$$

Запишем степень насыщения белка лигандом, то есть отношение занятых центров связывания к их общему числу:

$$Y = \frac{[EL]}{[E] + [EL]}, \quad (6.6.26)$$

или с учетом формулы (6.6.25)

$$Y = \frac{k[E][L]}{[E] + k[E][L]} = \frac{k[L]}{1 + k[L]}. \quad (6.6.27)$$

Уравнение (6.6.27), подобно уравнению Михаэлиса—Ментен, и графически представляет собой гиперболу (рис. 6.6.6, кривая 1).

Для описания степени насыщения гемоглобина используют уравнение, предложенное Хиллом:

$$Y = \frac{k_h[L]^h}{1 + k_h[L]^h}, \quad (6.6.28)$$

где  $k_h$  — константа связывания;  $h$  — параметр кооперативности.

При  $h = 1$  кооперативность отсутствует и уравнение (6.6.28) сводится к виду уравнения (6.6.27). При  $h > 1$  кооперативность положительна, то есть присоединение одного лиганда к центру связывания облегчает связывание с остальными, при  $h < 1$  кооперативность отрицательна. Для гемоглобина  $h = 2,8$ . На рис. 6.6.6 приведена зависимость насыщения миоглобина и гемоглобина в зависимости от парциального давления кислорода  $pO_2$ , пропорционального его концентрации.

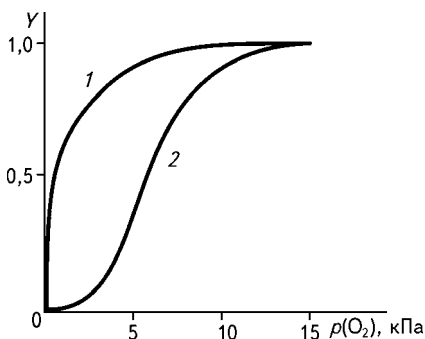


Рис. 6.6.6. Кривые насыщения кислородом миоглобина (1) и гемоглобина (2) в зависимости от парциального давления кислорода  $p(O_2)$

В организме парциальное давление кислорода меняется в небольших пределах, однако кооперативные свойства гемоглобина, проявляющиеся в S-образной форме кривой, приводят к тому, что даже при небольших изменениях парциального давления кислорода значительно меняется степень насыщения им гемоглобина. Если бы гемоглобин не проявлял свойство кооперативности, то отщепление кислорода в тканях происходило бы не столь интенсивно.

## § 6.7. БИОФИЗИКА НУКЛЕИНОВЫХ КИСЛОТ

Строение и свойства нуклеиновых кислот определяются их функцией в организме: хранением и передачей генетической информации.

В цепи дезоксирибонуклеиновой кислоты (ДНК) чередуются в определенном порядке мономеры и нуклеотиды, связанные между собой ковалентными фосфодиэфирными связями фосфатных групп с углеводами. Каждый из нуклеотидов имеет в своем составе дезоксирибозу и остаток фосфорной кислоты и отличается от других азотистым основанием, которых в ДНК имеется четыре вида: аденин (А), гуанин (Г), тимин (Т) и цитозин (Ц). Первые два — (А) и (Г) — являются пуриновыми, а вторые — (Т) и (Ц) — пиримидиновыми основаниями. Определенная последовательность нуклеотидов в цепи составляет первичную структуру нуклеиновой кислоты.

Вторичная структура ДНК была расшифрована с помощью рентгенструктурного анализа в 1952 году Р. Франклин, Ф. Криком, Дж. Уотсоном и М. Уилкинзом. Молекула ДНК, как правило, состоит из двух нуклеотидных цепей, и лишь в некоторых вирусах встречаются одноцепочечные молекулы ДНК. Две цепи ДНК связаны друг с другом через азотистые основания водородными связями, причем аденин всегда образует пару с тимином, а гуанин — с цитозином (рис. 6.7.1), то есть аденин комплементарен тимину, а гуанин — цитозину, одна цепь ДНК комплементарна другой. Это объясняет *правила Чаргоффа*, которые были сформулированы раньше открытия структуры ДНК:

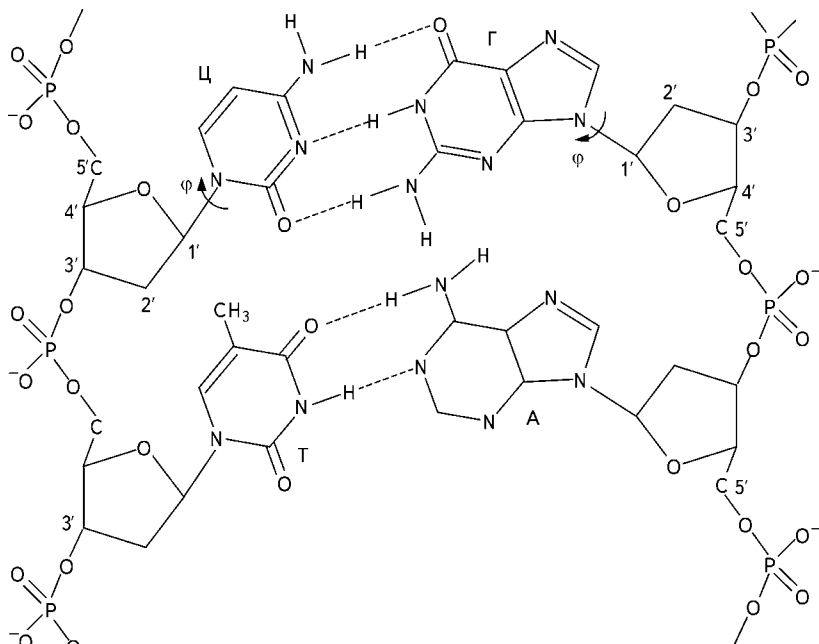


Рис. 6.7.1. Участок цепи ДНК:

$\varphi$  — угол между перпендикуляром к оси спирали и плоскостью оснований, град

$$1) A = T; \quad 2) G = C; \quad 3) \frac{A + G}{T + C} = 1; \quad 4) \frac{A + C}{G + T} = 1. \quad (6.7.1)$$

Кроме водородных связей между, парами оснований стабилизация структуры ДНК достигается также межплоскостными взаимодействиями оснований (стэкинг-взаимодействиями). Каждая комплементарная пара нуклеотидов поворачивается относительно предыдущей на некоторый угол вокруг оси спирали, в результате образуется вторичная структура ДНК — двойная спираль.

Модель Уотсона—Крика объяснила явление самоудвоения ДНК — редупликацию. В процессе редупликации в ДНК разрываются водородные связи между основаниями, и на каждой из двух цепей строится новая, при этом каждая материнская цепь используется как матрица для дочерней. Новые нуклеотиды присоединяются по принципу комплементарности, то есть к аденину присоединяется тимин, к гуанину — цитозин, к тимину — аденин, к цитозину — гуанин. Такая модель редупликации называется полуконсервативной, так как каждая новая молекула ДНК включает в себя одну материнскую и одну дочернюю цепи.

Цепи ДНК могут быть линейными или кольцевыми. У последних концы молекул ковалентно замкнуты. Две нуклеотидные цепи одной молекулы ДНК всегда располагаются антипараллельно: одна цепь — от 3' — к 5'-концу, вторая — наоборот (рис. 6.7.1).

Двойная спираль ДНК может существовать в различных конформациях, переход между которыми осуществляется при изменении влажности кристаллических препаратов ДНК, соли ДНК и ряда

Таблица 6.7.1

### Геометрические характеристики ДНК в различных формах

Соль ДНК	Влажность, %	Число звеньев на виток спирали	Шаг спирали, нм	Перемещение на один нуклеотид, нм	Поворот на нуклеотид, град	Угол φ между перпендикуляром к оси спирали и плоскостью оснований, град
Na, A-форма	75	11	2,82	0,255	32,7	20
Na, B-форма	92	10	3,46	0,346	36	2
Li, B-форма	66	10	3,37	0,337	36	2
Li, C-форма	66	9,3	3,10	0,332	39	6

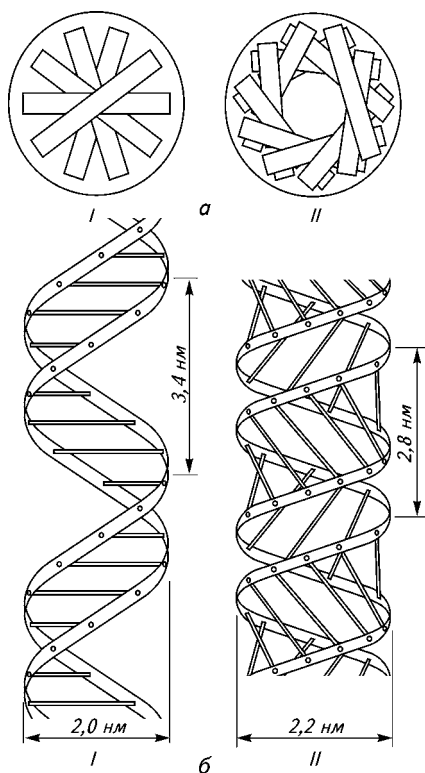
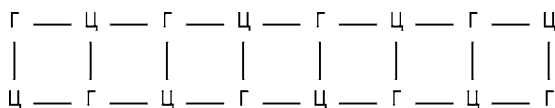


Рис. 6.7.2. Схема строения А- и В-форм ДНК: I — В-форма, II — А-форма;  
а — вид сверху; б — вид сбоку

других условий, а также может быть вызван взаимодействием ДНК с белками. Считается, что физиологическим условиям отвечает В-форма ДНК. Характеристики А-, В- и С-форм ДНК приведены в табл. 6.7.1, схематические изображения А- и В-форм ДНК — на рис. 6.7.2. В В-форме центры тяжести пар оснований находятся на оси спирали, а в А-форме сдвинуты к периферии, поэтому в центре остается отверстие около 4 нм.

А-, В- и С-формы ДНК являются правыми. В 1978 году была получена левая спираль ДНК — молекула синтетического полимера полидезоксиси-ГЦ. Его сахарофосфатный остов имеет зигзагообразный вид. Поэтому такая конформация ДНК получила название Z-форма. Z-Форма может быть энергетически выгодна только в том случае, если цепь ДНК образована чередованием пуриновых и пиримидиновых азотистых оснований, например — Г и Ц. Таким образом, повторяющейся единицей в такой структуре являются две пары нуклеотидов:



Z-Форма имеет 12 пар оснований на виток спирали, то есть поворот пары нуклеотидов относительно предыдущей пары вокруг оси спирали равен  $30^\circ$ .

Для любой конформации ДНК, кроме Z-формы, характерно наличие широкой и узкой бороздки на поверхности спирали.

Молекула *рибонуклеиновой кислоты* (РНК) так же, как и ДНК, образована определенной последовательностью нуклеотидов, но, как правило, состоит из одной цепи. Молекула сахара в РНК представлена рибозой, и вместо тимина в ее состав входит пиримидиновое основа-

ние — гуанин. Во время синтеза матричной РНК (транскрипции) генетическая информация, содержащаяся на определенном участке ДНК, по принципу комплементарности переходит на РНК, на которой как на матрице происходит синтез белка (трансляция) в рибосомах. Присоединение нужных аминокислот к синтезирующейся полипептидной цепи осуществляется с помощью транспортной РНК. Таким образом, РНК является посредником между ДНК и белком, а в некоторых вирусах — носителем генетической информации.

Различные конформации полинуклеотидной цепи достигаются благодаря возможности поворотов вокруг некоторых связей (рис. 6.7.3). Конформация нуклеиновых кислот в значительной степени определяется конформацией дезоксирибозы в ДНК или рибозы в РНК. Молекула углевода является циклической. В зависимости от того, какой из атомов углерода (C2' или C3') находится вне плоскости остальных четырех атомов, различают следующие конформации. Если атом C2' или C3' находится с той же стороны от плоскости, что и атом C5', то такая конформация называется *эндо*-, если с другой стороны, то — *экзоконформация*. Следовательно, возможны четыре

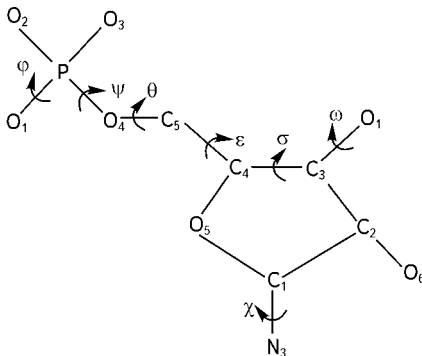


Рис. 6.7.3. Углы поворота в звене полинуклеотидной цепи

случая: C2'-эндо, C3'-эндо-, C2'-экзо- и C3'-экзоконформации (рис. 6.7.4). В зависимости от конформации углевода, различают два семейства конформаций ДНК: *A*-семейство (C3'-эндоконформация, *A*-форма ДНК) и *B*-семейство (C2'-эндоконформация, *B*-, *C*- и *T*-формы ДНК). Из рис. 6.7.4 видно, что в C<sub>2</sub>'-эндо- и C<sub>3</sub>'-экзоконформациях угол φ невелик (составляет 2—6°), поэтому

в *B*-семействах ДНК нуклеотидные пары расположены почти перпендикулярно к оси спирали, для C<sub>3</sub>'-эндоконформации φ = 20°. Конформационные переходы ДНК внутри одного семейства осуществляются плавно, а переход из *A*- в *B*-семейства — скачкообразно, сопровождаясь изменением конформации углевода от C<sub>3</sub>'-эндо к C<sub>2</sub>'-экзо.

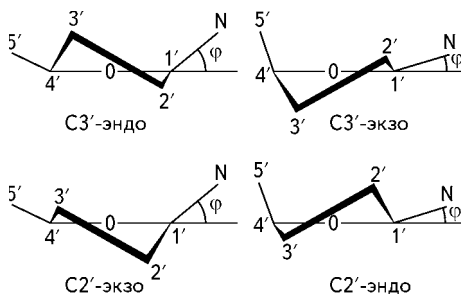


Рис. 6.7.4. Четыре наиболее устойчивые конформации сахарного кольца в нуклеотиде

Молекулы ДНК являются самыми большими в природе. Например, кольцевые ДНК фага Т2 имеют длину 49 мкм, а ДНК *E. coli* — 400 мкм, молекулярная масса последней составляет  $10^9$ . Каждая хромосома содержит только одну молекулу ДНК, которая имеет длину от нескольких миллиметров до нескольких сантиметров. Суммарная длина всех молекул ДНК одной клетки человека составляет около двух метров.

Огромные размеры молекул нуклеиновых кислот требуют их особой укладки в пределах малых размеров клеток или вирусов. Это достигается за счет возможности образования в молекуле ДНК перегибов, петель, суперспиралей, что формирует ее третичную структуру.

Особое строение молекулы ДНК — плотная упаковка азотистых оснований, связанных сильными и слабыми взаимодействиями, — обеспечивает высокую сохранность генов даже при значительных вариациях условий окружающей среды. Комплементарные пары оснований связаны друг с другом водородными связями, которые относятся к слабым взаимодействиям. Например, для Г—Ц пар энергия связи  $E_{\text{св}}$  составляет всего лишь 5 кДж/моль, а константа диссоциации  $K$ , согласно уравнению Больцмана, —

$$K = \exp\left(-\frac{E_{\text{св}}}{RT}\right) = \exp\left(-\frac{5000}{8,31 \cdot 309}\right) = 0,14 = \frac{1}{7}, \quad (6.7.2)$$

то есть в одномолярном растворе на каждые 7 пар оснований приходится одна разорванная. Для двух пар оснований константа диссоциации составляет  $(1/7)^2 = 1/49$ . Для цепи из нескольких тысяч пар нуклеотидов константа диссоциации уже настолько мала, что равновесие почти полностью смещено в сторону образования комплексов пар оснований.

Вторичная структура ДНК является стабильной лишь в определенных условиях. Изменения температуры, растворителя, pH, ионного состава среды может привести к разрушению слабых водородных связей между парами нуклеотидов и образованию вместо двойной спирали ДНК или двуспиральных участков РНК отдельных нуклеотидных цепей, сворачивающихся в клубок. Этот процесс называется *денатурацией* или *плавлением нуклеиновых кислот*.

В процессе плавления ДНК происходит уменьшение вязкости раствора, а в области максимального поглощения (260 нм) — увеличение оптической плотности (гипохромизм). Поэтому явление плавления легко обнаружить по спектру поглощения ДНК (рис. 6.7.5). Изменение поглощения ДНК при переходе спираль—клубок дает количественную оценку спиральности ДНК<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Этот метод также можно использовать при измерении степени спиральности белков, однако максимум их поглощения лежит в далекой ультрафиолетовой области (200 нм), что усложняет спектрофотометрические измерения.



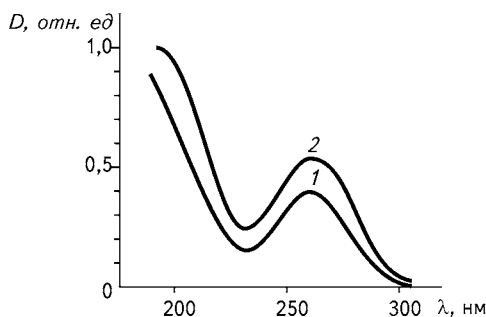


Рис. 6.7.5. Зависимость оптической плотности  $D$  от длины волны  $\lambda$  для спиральной (1) и клубкообразной (2) конформаций ДНК тельца в тяжелой воде

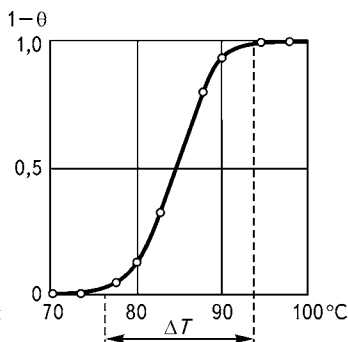


Рис. 6.7.6. Переход спираль—клубок в ДНК:

$\theta$  — доля спирализованных звеньев;  
 $\theta = 1$  для полностью спирализованной ДНК;  
 $\theta = 0$  для полностью расплетенной ДНК

ДНК характеризуется не определенной температурой плавления, а некоторым температурным интервалом, в котором происходит переход спираль—клубок. S-образный вид кривой плавления (рис. 6.7.6) свидетельствует о кооперативности этого процесса.

Температура плавления двойной спирали ДНК зависит от соотношения АТ- и ГЦ-пар. Аденин связан с тиминном двумя водородными связями, а гуанин с цитозином — тремя. Поэтому, чем больше в составе ДНК ГЦ-пар, тем выше ее температура плавления. Так, для синтетического полимера поли-АТ температура плавления составляет  $65\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а для поли-ГЦ —  $104\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Значение температуры плавления нуклеиновых кислот зависит также от концентрации катионов в растворе: чем она выше, тем выше температура плавления (зависимость близка к логарифмической). Это объясняется тем, что в растворе происходит диссоциация фосфатной кислоты. Образующиеся отрицательные заряды отталкивают друг от друга комплементарные цепи. Катионы в этом случае компенсируют отрицательный заряд и уменьшают силы отталкивания.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 6.1.** При переносе этана из бензола в воду при температуре  $t = 25\text{ }^{\circ}\text{C}$  энтальпия  $H$  уменьшилась на  $9240\text{ Дж/моль}$ , а энтропия  $S$  — на  $84\text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}$ . Рассчитайте изменение полного термодинамического потенциала  $\Delta G$  в этом процессе. Будет ли бензол растворяться в воде?

**Решение.** Изменение полного термодинамического потенциала составит:

$$\Delta G = \Delta H - T\Delta S,$$

$$\Delta G = -9240 - 298 \cdot (-84) \approx 15,8 \cdot 10^3 \text{ Дж/моль} = 15,8 \text{ кДж/моль}.$$

Так как  $\Delta G > 0$ , то бензол слабо растворим в воде.

**Задача 6.2.** При неферментативном разложении перекиси водорода энергия активации реакции составляет  $E_{\text{акт. н}} = 75 \text{ кДж/моль}$ , а при участии фермента каталазы снижается до  $E_{\text{акт. ф}} = 8 \text{ кДж/моль}$ . Рассчитайте, во сколько раз увеличится скорость ферментативной реакции по сравнению с неферментативной при температуре  $t = 25^\circ\text{C}$ .

**Решение.** Отношение скоростей реакции равно отношению констант этих реакций:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{k_2}{k_1},$$

или, согласно уравнению Аррениуса,

$$\frac{v_{\text{ф}}}{v_{\text{н}}} = \frac{\exp\left(-\frac{E_{\text{акт. ф}}}{RT}\right)}{\exp\left(-\frac{E_{\text{акт. н}}}{RT}\right)} = \exp\left(\frac{E_{\text{акт. н}} - E_{\text{акт. ф}}}{RT}\right),$$

где  $v_{\text{ф}}$  и  $v_{\text{н}}$  — скорости;  $E_{\text{акт. ф}}$  и  $E_{\text{акт. н}}$  — энергии активации ферментативной и неферментативной реакций соответственно. Подставляя численные данные, получаем:

$$\frac{v_{\text{ф}}}{v_{\text{н}}} = \exp\left(\frac{75 \cdot 10^3 - 8 \cdot 10^3}{8,81 \cdot 298}\right) = 5,6 \cdot 10^{11}.$$

**Задача 6.3.** Используя условие задачи (6.2), рассчитайте, при какой температуре среды  $t_2$  скорость неферментативной реакции будет равна скорости ферментативной при температуре  $t_1 = 25^\circ\text{C}$ .

**Решение.** При условии, что  $v_{\text{н}} = v_{\text{ф}}$ , из уравнения Аррениуса получаем:

$$\exp\left(-\frac{E_{\text{акт. н}}}{RT_2}\right) = \exp\left(-\frac{E_{\text{акт. ф}}}{RT_1}\right),$$

откуда

$$T_2 = \frac{T_1 E_{\text{акт. н}}}{E_{\text{акт. ф}}}.$$

Подставляя численные данные, получаем:

$$T_2 = \frac{T_1 E_{\text{акт. н}}}{E_{\text{акт. ф}}} = \frac{298 \cdot 75 \cdot 10^3}{8 \cdot 10^3} = 2794 \text{ К},$$

$$t_2 \approx 2500^\circ\text{C}.$$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**6.1.** В энергию водородной связи основной вклад вносит энергия электростатического притяжения между атомом водорода и атомами O, N, F или Cl. Считая, что взаимодействующие атомы несут дробный заряд, равный половине элементарного, и находятся на расстоянии  $r = 0,17$  нм, вычислите энергию водородной связи в воде ( $\epsilon = 80$ ) и белке ( $\epsilon = 3,5$ ). Сравните полученный ответ с энергией теплового движения ( $\sim kT$ ) при температуре  $T = 300$  К.

**6.2.** Ион  $\text{Na}^+$  и группа  $-\text{PO}_4^-$  находятся на расстоянии  $r = 1$  нм. Какую работу  $A$  необходимо совершить, чтобы увеличить это расстояние вдвое? Диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon = 80$ .

**6.3.** Вычислите энергию диполь-дипольного взаимодействия молекул этилового спирта, находящихся в водном растворе ( $\epsilon = 80$ ) на расстоянии  $r = 1,2$  нм при температуре  $t = 17$  °С. Дипольный момент молекулы этилового спирта  $p = 5,67 \cdot 10^{-30}$  Кл · м.

**6.4.** Сила взаимодействия молекул воды и кислорода на расстоянии  $r = 0,3$  нм равна  $F = 0,06$  пН. Вычислите поляризуемость  $\alpha$  молекул кислорода. Дипольный момент воды  $p = 6,1 \cdot 10^{-30}$  Кл · м; диэлектрическая проницаемость среды  $\epsilon = 80$ .

**6.5.** При переносе неполярного соединения из полярного растворителя в воду при температуре  $t = 25$  °С энтальпия понижается на  $\Delta H = -8,3$  кДж/моль, а энтропия — на  $\Delta S = -68$  Дж/(моль · К). Вычислите изменение свободной энергии Гиббса  $\Delta G^0$  в этом процессе.

**6.6.** При переносе некоторого количества неполярного соединения из неполярного растворителя в воду свободная энергия Гиббса увеличилась на 3,85 кДж, энтальпия и энтропия уменьшились, соответственно на 2,7 и 22,5 Дж/К. Вычислите температуру  $t$  раствора.

**6.7.** Потенциальный барьер перехода молекул этана из одной *транс*-конформации в другую через *цис*-форму при повороте вокруг C—C-связи на угол  $\varphi = 120^\circ$  равен  $U_0 = 12,5$  кДж/моль. Рассчитайте потенциальную энергию молекул этана при значениях угла  $\varphi = 0, 30, 60, 120, 180, 240$  и  $360^\circ$ .

**6.8.** Определите эффективный радиус  $r_0$  ван-дер-ваальсового взаимодействия атомов углерода и азота. Эмпирические константы потенциала Леннарда—Джонса равны  $A = 907,2 \cdot 10^{-9}$  и  $B = 1537,2 \cdot 10^{-6}$  кДж · нм<sup>6</sup>/моль.

**6.9.** Эффективный радиус  $r_0$  ван-дер-ваальсового взаимодействия двух атомов кислорода равен 0,32 нм. Вычислите минимальную энергию их взаимодействия, если константа потенциала Леннарда—Джонса равна  $A = 609 \cdot 10^{-9}$  кДж · нм<sup>12</sup>/моль.

**6.10.** Денатурация некоторого белка происходит при температуре  $t = 45$  °С и сопровождается изменением энтальпии на величину  $\Delta H = 175$  кДж/моль. Вычислите изменение энтропии  $\Delta S$ .

**6.11.** Скорость химической реакции увеличивается с повышением температуры. Этот эффект характеризуется температурным коэффициентом, равным отношению скорости при температуре  $(t + 10^\circ)$  к скорости при

температуре  $t$ . Вычислите энергию активации  $E_{\text{акт}}$  реакции, для которой при температуре  $t = 27^\circ$  температурный коэффициент равен 2.

**6.12.** При концентрации субстрата  $[S] = 3$  ммоль/л ферментативная реакция протекает со скоростью  $v = 12$  ммоль/мин. Константа Михаэлиса  $k_m = 3,7$  ммоль/л. Вычислите максимальную скорость  $v_{\text{max}}$  этой реакции. При какой концентрации субстрата  $[S']$  скорость реакции равна половине максимальной?

**6.13.** Используя условие задачи (6.12), вычислите скорости реакции  $v_k$  и  $v_n$  в присутствии конкурентного и неконкурентного ингибиторов, взятых в одинаковой концентрации  $[I] = 2$  ммоль/л. Константа ингибирования  $k_i = 0,4$  ммоль/л.

**6.14.** Рассчитайте константу диссоциации нуклеотидной цепи, состоящей из четырех пар нуклеотидов, если константа диссоциации одной пары нуклеотидов равна  $1/7$ .

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**6.1.** Энергия ван-дер-ваальсового притяжения обратно пропорциональна:

- а)  $r$ ; б)  $r^2$ ; в)  $r^6$ ; г)  $r^8$ ; д)  $r^{12}$ ,

где  $r$  — расстояние между атомами.

**6.2.** Координационное число воды в структуре льда составляет:

- а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 5.

**6.3.** Координационное число воды в жидком состоянии составляет около:

- а) 2,3; б) 3; в) 4; г) 4,4; д) 5,7.

**6.4.** При образовании упорядоченной структуры воды:

- а)  $\Delta S < 0$ ,  $\Delta H < 0$ ,  $\Delta G < 0$ ; г)  $\Delta S < 0$ ,  $\Delta H > 0$ ,  $\Delta G < 0$ ;  
 б)  $\Delta S > 0$ ,  $\Delta H > 0$ ,  $\Delta G > 0$ ; д)  $\Delta S < 0$ ,  $\Delta H > 0$ ,  $\Delta G > 0$ .  
 в)  $\Delta S > 0$ ,  $\Delta H < 0$ ,  $\Delta G > 0$ ;

**6.5.** При растворении в воде гидрофобного соединения:

- а)  $\Delta S > 0$ ,  $\Delta H > 0$ ,  $\Delta G < 0$ ; г)  $\Delta S < 0$ ,  $\Delta H > 0$ ,  $\Delta G < 0$ ;  
 б)  $\Delta S > 0$ ,  $\Delta H > 0$ ,  $\Delta G > 0$ ; д)  $\Delta S < 0$ ,  $\Delta H < 0$ ,  $\Delta G > 0$ .  
 в)  $\Delta S < 0$ ,  $\Delta H < 0$ ,  $\Delta G < 0$ ;

**6.6.** Зависимость энергии молекул, имеющих осевую симметрию  $C_3$ , от угла поворота  $\phi$  приближенно определяется формулой:

- а)  $U = 1/2 U_0 (1 - \sin 3\phi)$ ; г)  $U = 1/3 U_0 (1 + \cos 3\phi)$ ;  
 б)  $U = 1/2 U_0 (1 - \cos 3\phi)$ ; д)  $U = 1/4 U_0 (1 - \cos 2\phi)$ .  
 в)  $U = 1/3 U_0 (1 + \sin 2\phi)$ ;

**6.7.** В белках ковалентными связями стабилизированы преимущественно:

- а) только первичная структура;  
 б) первичная и вторичная структуры;  
 в) первичная, вторичная и третичная структуры;  
 г) только четвертичная структура;  
 д) все типы организации белка.

**6.8.** Если в белке отношение числа полярных остатков к неполярным (b) превышает отношение объема гидрофильной фазы к объему гидрофобного ядра ( $b_s$ ), то глобула будет стремиться:

- а) принять сферическую форму;
- б) принять вытянутую форму;
- в) образовать надмолекулярную структуру;
- г) правильный ответ не приведен.

**6.9.** Действие ферментов сводится:

- а) к увеличению свободной энергии конечного продукта;
- б) уменьшению свободной энергии конечного продукта;
- в) увеличению энергии активации катализируемой реакции;
- г) уменьшению энергии активации катализируемой реакции;
- д) изменению химического равновесия в реакциях.

**6.10.** Уравнение Михаэлиса—Ментен имеет вид:

- а)  $v = \frac{v_{\max} + [S]}{k_m [S]}$  ;
- б)  $v = \frac{k_m + [S]}{v_{\max}}$  ;
- в)  $v = \frac{v_{\max}}{k_m + [S]v_{\max}}$  ;
- г)  $v = \frac{v_{\max}}{k_m + [S]^2}$  ;
- д)  $v = \frac{v_{\max} [S]}{k_m + [S]}$  .

**6.11.** В присутствии конкурентного ингибитора:

- а) скорость реакции не изменяется;
- б) скорость реакции увеличивается;
- в) максимальная скорость реакции не изменяется;
- г) максимальная скорость реакции уменьшается;
- д) максимальная скорость реакции увеличивается.

**6.12.** В присутствии неконкурентного ингибитора:

- а) скорость реакции не изменяется;
- б) скорость реакции увеличивается;
- в) максимальная скорость реакции не изменяется;
- г) максимальная скорость реакции уменьшается;
- д) максимальная скорость реакции увеличивается.

**6.13.** Явление гипохромизма ДНК заключается:

- а) в увеличении оптической плотности в области 260 нм при переходе спираль—клубок;
- б) увеличении вязкости;
- в) значительном сдвиге максимума спектра поглощения в коротковолновую область;
- г) увеличении количества водородных связей между нуклеотидами;
- д) уменьшении константы диссоциации нуклеотидных пар.

# СВОЙСТВА ЖИДКОСТЕЙ И ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Жидкости составляют наибольшую часть любого живого организма, представляя собой среду, в которой растворены вещества, располагаются макромолекулы, органеллы, клетки. Жидкости принимают непосредственное участие в обмене веществ и распределении лекарств в организме. Знание их молекулярной структуры, законов перемещения, таких свойств, как вязкость, поверхностное натяжение, необходимо при изучении законов кровообращения и ряда других биофизических проблем.

Информация о структуре и свойствах твердых тел позволяет изучать работу опорно-двигательного аппарата, процессы деформации тканей, органов, клеток.

### § 7.1. СТРОЕНИЕ ЖИДКОСТЕЙ

При понижении температуры и уменьшении объема газ переходит в жидкое состояние, которое является промежуточным между газообразным и твердым. Область существования жидкости ограничена при низких температурах фазовым переходом в твердое состояние (кристаллизация), а при высоких — в газообразное (испарение).

Расстояние между молекулами вещества, находящегося в жидком состоянии, существенно меньше, чем между молекулами газа, поэтому в жидкостях большое значение имеют силы межмолекулярного взаимодействия, которые удерживают молекулы жидкости друг возле друга значительное время. Обладая довольно высокой подвижностью и постоянно перемещаясь из одного положения в другое, молекулы жидкости совершают хаотические колебания.

В жидкости существуют изменяющиеся скопления (кластеры) атомов и молекул, обладающие определенной упорядоченностью.

Рентгеновские исследования показали, что микроструктура жидкости значительно ближе к твердым телам, чем к газам. В жидкостях не только образуются и разрушаются кластеры, но и происходят флуктуации движения массы в микрообъемах жидкости, даже в том случае, если средняя скорость движения жидкости как целого равна нулю.

Для жидкостей характерен так называемый *ближний порядок* расположения частиц, а именно частицы, находящиеся на небольшом, сравнимом с межмолекулярным, расстоянии от заданной частицы, расположены в той или иной степени упорядоченно по отношению к ней. По мере увеличения расстояния этот порядок исчезает, в то время как для кристаллических тел упорядоченность сохраняется в значительных объемах (так называемый *дальний порядок*).

Все это в целом обуславливает физико-механические свойства жидкости, такие, как текучесть, малая сжимаемость, большая самодиффузия и т. п.

По мере уменьшения расстояния между молекулами жидкости быстро возрастают силы отталкивания, и поэтому *коэффициент сжимаемости*

$$K = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \quad (7.1.1)$$

очень мал. Числовое значение  $K$  для большинства жидкостей порядка  $0,2\text{—}1,5 \text{ ГПа}^{-1}$ . Поэтому в большинстве случаев жидкость можно считать несжимаемой.

Жидкости имеют общие свойства и с газами, и с твердыми телами. Подобно газам, жидкости принимают форму сосуда, в котором находятся, не имеют дальнего порядка расположения частиц; подобно твердым телам, занимают определенный объем, имеют большую плотность и малую сжимаемость, сохраняют упорядоченность в расположении частиц, но только на небольших расстояниях.

В целом проблема строения жидкостей изучена еще недостаточно. До настоящего времени отсутствует строгая и общепризнанная теория этого вопроса. Отчасти это вызвано промежуточным положением жидкостей между газами и твердыми телами. Согласно наиболее распространенной теории Я. И. Френкеля, вдали от критической точки молекулы жидкости совершают нерегулярные колебания со средней частотой  $1/\tau_0$  (близкой к частотам колебаний частиц в кристаллах) около положения равновесия, время от времени перескакивая в новое положение на расстояние  $\delta$ , равное среднему расстоянию между соседними частицами:

$$\delta \approx \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = \sqrt[3]{\frac{M}{N_A \cdot \rho}}, \quad (7.1.2)$$

где  $n$  — концентрация молекул жидкости (число частиц в единице объема);  $M$  — ее молярная масса;  $N_A$  — число Авогадро;  $\rho$  — плотность жидкости. По порядку величины  $\delta$  равно размеру самих молекул ( $\delta \sim 10^{-10}$  м).

Каждый скачок происходит при сообщении молекуле энергии активации  $E_{\text{акт}}$ , достаточной для разрыва связей с окружающими молекулами и перехода в окружение других молекул. Среднее время жизни молекулы во временном положении равновесия, так называемое *время релаксации*, может быть вычислено по формуле, вытекающей из распределения Больцмана:

$$\tau = \tau_0 \exp\left(\frac{E_{\text{акт}}}{kT}\right), \quad (7.1.3)$$

где  $\tau_0$  — средний период колебаний молекулы около положения равновесия в данных условиях ( $\tau_0 \sim 10^{-12}$  с);  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура. Величина  $\tau$  составляет  $10^{-12} - 10^{-11}$  с для низкомолекулярных жидкостей и уменьшается с ростом молекулярной массы.

Источником энергии активации является тепловое движение соседних молекул, поэтому частота перескоков резко возрастает с увеличением температуры, что влечет за собой значительное уменьшение вязкости жидкости. Так, для воды повышение температуры от 0 до 70 °С вызывает понижение вязкости в 4,5 раза.

В результате большого числа перескоков молекул в жидкостях происходит самодиффузия, описываемая законом Фика. Коэффициент диффузии для жидкости зависит от температуры  $T$ , размеров диффундирующих молекул и вязкости среды  $\eta$ . Для сферических молекул коэффициент диффузии может быть вычислен по формуле:

$$D = \frac{kT}{6\pi R\eta}, \quad (7.1.4)$$

где  $R$  — радиус диффундирующих молекул.

Коэффициент диффузии в жидкостях на четыре-пять порядков меньше, чем в газах. Это обусловлено тем, что средняя длина свободного пробега в жидкостях примерно на три порядка, а средняя скорость  $\langle v \rangle = \delta / \tau$  — на один-два порядка меньше, чем в газах.

Теплоемкость жидкости мало отличается от теплоемкости твердой фазы вблизи точки плавления и зависит от молекулярной структуры. Жидкости с большим молекулярным весом обладают обыч-



но большими значениями теплоемкостей. Особенно отчетливо это проявляется для органических жидкостей, молекулы которых состоят из большого числа атомов легких элементов Н, О, С, N. Теплоемкости таких жидкостей существенно зависят от температуры. Для органических жидкостей эта зависимость имеет вид:

$$C = a + bt, \quad (7.1.5)$$

где  $a$  и  $b$  — коэффициенты, одинаковые для данного класса жидкостей;  $t$  — температура,  $[t] = ^\circ\text{C}$ .

Существуют твердые тела, называемые аморфными (например, стекло, смолы), которые по своим свойствам более близки к жидкостям, чем к твердым телам. По сути аморфные тела являются переохлажденными жидкостями с очень низкими значениями коэффициента вязкости и большими величинами времен релаксации.

Как правило, жидкости изотропны, то есть их свойства одинаковы по всем направлениям. Исключение составляют так называемые *жидкие кристаллы* — жидкости, состоящие из удлинённых, упорядоченно ориентированных молекул, взаимное расположение которых, так же, как и в обычных жидкостях, не обнаруживает дальнего порядка. Подробнее явления изотропии и анизотропии рассмотрены в § 7.4.

## § 7.2. ГИДРОСТАТИКА И ГИДРОДИНАМИКА

*Гидростатикой* называется раздел гидромеханики, в котором изучается равновесие жидкости и воздействие покоящейся жидкости на погруженные в нее тела.

**Закон Паскаля** гласит: давление, оказываемое на жидкость в какой-либо ее точке (сила тяжести при этом не учитывается), передается этой жидкостью одинаково во всех направлениях.

Давление, оказываемое несжимаемой жидкостью на глубине  $h$  в поле силы тяжести, равно:

$$p = \rho gh, \quad (7.2.1)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Отсюда непосредственно следует **закон Архимеда**: на тело, погруженное в жидкость (газ), действует *выталкивающая (подъемная) сила*  $F_B$ , численно равная весу жидкости (газа) в объеме, вытесненном телом:

$$F_B = \rho g V, \quad (7.2.2)$$

где  $V$  — объем жидкости (газа), вытесненный телом;  $\rho$  — плотность жидкости (газа).

**Гидродинамикой** называется раздел гидромеханики, в котором изучается движение несжимаемых жидкостей и их взаимодействие с твердыми телами.

Рассмотрим основные положения **гидродинамики идеальной жидкости**. *Идеальной жидкостью* называется несжимаемая и не имеющая вязкости жидкость. В движущейся жидкости можно выделить *линии тока* — кривые, касательные в каждой точке которых совпадают с направлением вектора скорости частиц в этих точках. Поверхность, образованная линиями тока, проведенными через все точки малого замкнутого контура, называется *трубкой тока*.

Движение жидкости называется *стационарным*, если скорость движения жидкости в каждой точке пространства ее течения не изменяется во времени. В противном случае движение жидкости *нестационарно*.

Для рассмотрения законов гидродинамики удобно ввести понятия линейной и объемной скорости течения жидкости. *Линейной скоростью*  $v$  называется путь, проходимый частицами жидкости за единицу времени. *Объемной скоростью*  $Q$ , или *потоком жидкости*, называется объем жидкости, протекающий через поперечное сечение трубки тока за единицу времени. Линейная и объемная скорости связаны между собой простым соотношением:

$$Q = vS, \quad (7.2.3)$$

где  $S$  — площадь поперечного сечения трубки тока.

Если течение жидкости стационарно, то через произвольное поперечное сечение одной и той же трубки тока протекает одинаковый объем несжимаемой жидкости в единицу времени, то есть

$$Q = vS = \text{const}. \quad (7.2.4)$$

Выражение (7.2.4) представляет собой сущность *теоремы о неразрывности струи*.

При стационарном движении идеальной жидкости в поле сил тяготения вдоль трубки тока остается постоянной величина:

$$\frac{\rho v^2}{2} + \rho gh + p = \text{const}, \quad (7.2.5)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $v$  — скорость элемента объема жидкости;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $h$  — высота расположения элемента объема жидкости, измеренная относительно некоего уровня отсчета;  $p$  — давление.

Соотношение (7.2.5) называется *уравнением Бернулли*. Первый член в этом уравнении — гидродинамическое давление, второй — гидростатическое давление, а третий — статическое давление, сжимающее частицу жидкости.

Слагаемые, входящие в уравнение Бернулли, имеют и другой физический смысл. Первое из них равно кинетической энергии единицы объема жидкости; сумма двух вторых — потенциальной энергии единицы объема. Таким образом, уравнение Бернулли отражает закон сохранения энергии для стационарного потока идеальной жидкости.

Теорема о неразрывности струи и уравнение Бернулли были доказаны для течения идеальных жидкостей в узких трубках тока. Однако эти законы применимы и для течения реальных жидкостей по трубам в том случае, если: 1) в каждой точке произвольного сечения трубы скорости течения жидкости мало отличаются, и для каждого поперечного сечения можно задать одно значение скорости и 2) сжимаемость и вязкость жидкости невелики, и в данных условиях ими можно пренебречь.

До сих пор мы не учитывали такое важное свойство жидкости, как вязкость, или внутреннее трение. Идеальная жидкость, в которой отсутствует вязкость, является одной из физических абстракций. Свойство вязкости присуще всем **реальным жидкостям**.

Вязкость жидкостей существенно зависит от температуры и давления. С повышением температуры вязкость жидкостей быстро уменьшается [см. § 4.6], с увеличением давления — возрастает. Вязкость зависит от молярного объема жидкости следующим образом:

$$\eta = \frac{c}{V_\mu - b}, \quad (7.2.6)$$

где  $V_\mu$  — молярный объем жидкости;  $b$  — константа в уравнении Ван-дер-Ваальса (см. § 4.4);  $c$  — постоянная.

Основным законом вязкого течения жидкости является формула Ньютона:

$$F = -\eta \frac{dv}{dx} S, \quad (7.2.7)$$

где  $F$  — сила вязкого трения, направленная против вектора скорости перпендикулярно ее градиенту;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости,  $[\eta] = \text{Па} \cdot \text{с}$ ;  $v$  — скорость течения слоя жидкости или газа, перемещающегося перпендикулярно оси  $x$ ;  $dv/dx$  — градиент скорости в направлении оси  $x$ ;  $S$  — площадь соприкасающихся слоев жидкости.

Жидкости, течение которых подчиняется уравнению (7.2.7), называются *ньютоновскими*. Для них коэффициент вязкости является постоянной величиной при данных температуре и давлении и не зависит от условий течения жидкости, а сила вязкого трения прямо пропорциональна градиенту скорости ( $F \sim dv/dx$ ).

Для некоторых, так называемых *неньютоновских*, жидкостей коэффициент вязкости зависит не только от температуры и давления, но и от градиента скорости, а зависимость силы вязкого трения от градиента скорости нелинейна [ $F \sim (dv/dx)^n$ ], где  $n$  — некий параметр, зависящий от условий течения жидкости]. Для таких жидкостей вводится понятие условного коэффициента вязкости, характеризующего вязкость жидкости в определенных условиях течения. Неньютоновскими жидкостями являются растворы из крупных и сложных молекул, суспензии, в частности, кровь.

Для медицины особый интерес представляет течение вязкой жидкости по трубам, так как таким образом можно смоделировать течение крови по кровеносным сосудам. Согласно *формуле Пуазейля*, объемная скорость течения жидкости через трубу радиусом  $R$  и длиной  $l$  равна

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p, \quad (7.2.8)$$

где  $\Delta p$  — разность давлений на концах трубы.

Как видно из формулы (7.2.8), поток жидкости пропорционален величине перепада давления, приходящегося на единицу длины ( $\Delta p/l$ ), четвертой степени радиуса трубы и обратно пропорционален коэффициенту вязкости жидкости. Следует помнить, что формула Пуазейля справедлива только для ламинарного (см. ниже) течения гомогенной жидкости по жестким трубкам.

Формула Пуазейля (7.2.8) может быть переписана в следующем виде:

$$Q = \frac{\Delta p}{X}, \quad (7.2.9)$$

где величина

$$X = \frac{8\eta l}{\pi R^4} \quad (7.2.10)$$

называется *гидравлическим*, или *гидродинамическим сопротивлением*.

Таким образом, формула Пуазейля в гидродинамике аналогична закону Ома в электродинамике: объемная скорость течения соответствует электрическому току, а перепад давлений на концах трубы — электрическому напряжению на участке цепи. Подобная

аналогия позволяет вычислять гидравлическое сопротивление последовательно или параллельно соединенных труб так же, как вычисляется сопротивление в последовательных и параллельных электрических цепях:

$$X_{\text{посл}} = X_1 + X_2 + X_3 \dots; \quad (7.2.11)$$

$$\frac{1}{X_{\text{парал}}} = \frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} \dots, \quad (7.2.12)$$

где  $X_{\text{посл}}$  и  $X_{\text{парал}}$  — суммарное гидравлическое сопротивление последовательно и параллельно соединенных трубок соответственно.

Формула Пуазейля лежит в основе одного из методов определения вязкости жидкости<sup>1</sup> — капиллярного метода. Пропуская жидкость через капилляр известного радиуса и измеряя перепад давлений и объемную скорость течения, можно вычислить вязкость данной жидкости.

Одним из проявлений свойства вязкости является сопротивление жидкостей продвижению тел в них. Сила сопротивления сложным образом зависит от скорости и геометрии движущегося тела. При малых скоростях и небольших размерах тел, то есть при небольших значениях числа Рейнольдса (см. ниже), сила сопротивления прямо пропорциональна вязкости жидкости, размерам тела и скорости его продвижения, а коэффициент пропорциональности определяется формой тела.

Так, для тел сферической формы сила сопротивления движению в вязкой жидкости равна

$$\vec{F}_{\text{сопр}} = -6\pi\eta R\vec{v}, \quad (7.2.13)$$

где  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости жидкости;  $R$  — радиус тела;  $\vec{v}$  — скорость тела. Сила сопротивления  $\vec{F}_{\text{сопр}}$  называется *силой Стокса*, а выражение (7.2.13) — *формулой Стокса*. Формула Стокса лежит в основе другого метода вискозиметрии — метода Стокса.

Существуют два вида течения жидкостей: ламинарное и турбулентное. *Ламинарным* (от лат. *lamina* — пластинка, полоска) называется такое течение жидкости, при котором ее частицы движутся вдоль плавных траекторий, не перемешиваясь. При ламинарном течении жидкость может быть представлена в виде слоев, скользящих относительно друг друга. Такое движение стационарно. При этом соседние слои, движущиеся с различными скоростями, испы-

<sup>1</sup> Совокупность методов определения вязкости жидкостей называется *вискозиметрией*.

тывают действие касательных сил, обусловленных силами внутреннего трения.

При ламинарном течении скорость слоев жидкости изменяется с расстоянием от оси трубы по параболическому закону

$$v(r) = v_0 \left( 1 - \frac{r^2}{R^2} \right), \quad (7.2.14)$$

где  $v$  — скорость слоя, находящегося на расстоянии  $r$  от оси трубы;  $R$  — радиус трубы;  $v_0$  — осевая (максимальная) скорость течения. Профиль скоростей при ламинарном течении приведен на рис. 7.2.1, а.

*Турбулентным* (от лат. *turbulentus* — бурный, беспорядочный) называется такое течение жидкости, при котором ее скорость и давление быстро и нерегулярно изменяются со временем, что

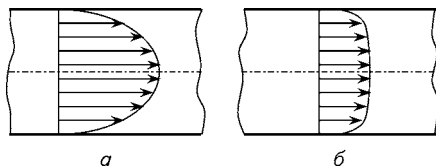


Рис. 7.2.1. Профиль осредненной скорости при ламинарном (а) и турбулентном (б) течении

приводит к интенсивному перемешиванию между слоями жидкости. Турбулентное течение связано с дополнительными затратами энергии. Несмотря на нерегулярность, при неизменных внешних условиях средняя по времени скорость в каждой точке сечения трубы остается постоянной.

Профиль осредненной скорости при турбулентном течении (рис. 7.2.1, б) отличается от параболического профиля, характерного для ламинарного течения.

При определенных условиях ламинарное течение становится неустойчивым. Характер течения жидкости определяется значением безразмерной величины:

$$\text{Re} = \frac{\rho v l}{\eta}, \quad (7.2.15)$$

называемой *числом Рейнольдса*. Здесь  $\rho$  — плотность жидкости;  $v$  — средняя по поперечному сечению скорость потока;  $l$  — характерный размер, указывающий поперечный размер трубы, по которой течет жидкость, или поперечный размер обтекаемого жидкостью тела;  $\eta$  — динамическая вязкость жидкости. Отношение динамической вязкости жидкости к ее плотности называется *кинематической вязкостью*:

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}, \quad (7.2.16)$$

$[v] = \text{м}^2/\text{с}$ . Тогда формулу (7.2.15) можно переписать в виде:

$$\text{Re} = \frac{vl}{\nu}. \quad (7.2.17)$$

При величинах  $\text{Re}$ , меньших некоторого значения, называемого критическим ( $\text{Re} < \text{Re}_{\text{кр}}$ ), течение жидкости является ламинарным; при  $\text{Re} > \text{Re}_{\text{кр}}$  — турбулентным. Например, в случае течения вязкой несжимаемой жидкости в трубе круглого сечения с  $l$ , равным диаметру<sup>1</sup> трубы,  $\text{Re}_{\text{кр}} \approx 2300$ . Как видно из формулы (7.2.15), чем больше величина  $l$ , тем при более меньшей скорости течение переходит из ламинарного в турбулентное.

### § 7.3. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ

Молекулы жидкости расположены на довольно близких расстояниях, в связи с чем между ними возникают значительные силы притяжения. Рассмотрим молекулу, находящуюся внутри жидкости (рис. 7.3.1, а). Так как данная молекула симметрично окружена другими молекулами, то равнодействующая всех сил взаимодействия, испытываемых ею, равна нулю. Для молекулы, находящейся на поверхности, подобная симметрия нарушается (рис. 7.3.1, б), в результате чего на нее действует результирующая сила, направленная внутрь жидкости. Это приводит к тому, что поверхностный слой жидкости стремится сократиться, вызывая появление силы поверхностного натяжения:

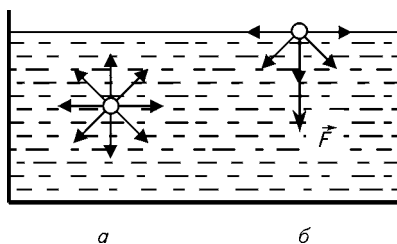


Рис. 7.3.1. Силы, действующие на молекулу, находящуюся внутри (а) и на поверхности (б) жидкости

$$F_{\text{п}} = \sigma l, \quad (7.3.1)$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения  $[\sigma] = \text{Н}/\text{м}$ ;  $l$  — длина элемента границы «жидкость—окружающая среда», перпендикулярно которой действует сила  $F_{\text{п}}$ .

Поверхностное натяжение обусловлено повышенной энергией поверхностного слоя молекул жидкости по сравнению с энергией

<sup>1</sup> Если в качестве характерного размера  $l$  взять не диаметр, а радиус трубы, то критическое значение числа Рейнольдса будет в два раза меньше.

молекул, находящихся в глубине жидкости. Поэтому жидкость в отсутствие внешних сил, стремясь максимально уменьшить энергию, принимает форму с минимальной поверхностью, то есть форму шара. Это же приводит к тому, что на создание поверхности жидкости необходимо затратить энергию, которая может затем превратиться в работу, совершаемой жидкостью при уменьшении площади поверхности, то есть  $\sigma$  — это величина свободной энергии единицы поверхности жидкости. Коэффициент поверхностного натяжения можно также определить как отношение работы  $A$ , затраченной на увеличение площади поверхности жидкости на единицу площади:

$$\sigma = \frac{A}{\Delta S}, \quad (7.3.2)$$

где  $\Delta S$  — изменение площади поверхности жидкости. С повышением температуры  $\sigma$  уменьшается и в критической точке обращается в нуль.

Некоторые вещества, называемые *поверхностно-активными*, при добавлении в жидкость изменяют ее поверхностное натяжение. Такими веществами являются, например, мыла и жирные кислоты.

На границе раздела жидкости и твердого тела или двух жидкостей могут наблюдаться явления смачивания или несмачивания, которые обусловлены силами взаимодействия молекул этих веществ между собой, а также с молекулами окружающих газов. Поместим каплю жидкости на поверхность твердого тела. Угол между поверхностью твердого тела и плоскостью, касательной к поверхности жидкости, граничащей с телом, называется *краевым углом*  $\theta$

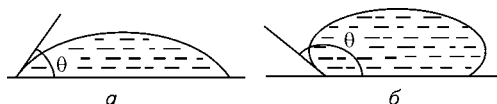


Рис. 7.3.2. Частичное смачивание (а) и несмачивание (б)

(рис. 7.3.2). Краевой угол характеризует силы взаимодействия молекул жидких, твердых и газообразных веществ между собой и, следовательно, служит мерой смачивания.

Если  $0 < \theta < 90^\circ$ , то жидкость смачивает вещество. В этом случае силы сцепления между молекулами жидкости и твердого тела больше сил сцепления между молекулами твердого тела и газа, поэтому жидкость растекается по поверхности (рис. 7.3.2, а). Это явление называется *смачиванием*, а поверхность — *лиофильной*. При  $\theta = 0$  жидкость неограниченно растекается по поверхности твердого тела (явление полного смачивания). При  $90^\circ < \theta < 180^\circ$  (рис. 7.3.2, б) имеет место *несмачивание*. Молекулам твердого тела энергетически выгоднее взаимодействовать с молекулами газа, чем с молекулами жидкости, в результате чего жидкость отталкивается от поверхнос-



ти твердого тела, которая в этом случае называется *лиофобной*. При  $\theta = 180^\circ$  имеет место полное несмачивание.

Стремление искривленной поверхности жидкости к сокращению приводит к возникновению давления  $\Delta p$ , дополнительного к внешнему. Величина избыточного давления  $\Delta p$  определяется по формуле Лапласа:

$$\Delta p = \sigma \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad (7.3.3)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны двух взаимно перпендикулярных сечений поверхности жидкости. Для сферической поверхности  $R_1 = R_2 = R$  и, следовательно:

$$\Delta p = \frac{2\sigma}{R}. \quad (7.3.4)$$

Результирующая сил поверхностного натяжения всегда направлена к центру кривизны. Поэтому в случае вогнутой вверх поверхности избыточное давление отрицательно, а в случае выпуклой вверх — положительно (рис. 7.3.3).

Явление поверхностного натяжения обуславливает так называемый **капиллярный эффект** — изменение высоты уровня жидкости в узких трубках (капиллярах) или зазорах. Эффект смачивания (несмачивания) приводит к тому, что поверхность жидкости в капилляре, опущенном в сосуд, имеет вогнутую (выпуклую) форму. Такие изогнутые поверхности называют *менисками*. В первом случае силы избыточного давления направлены вверх (к центру кривизны) и обеспечивают поднятие жидкости в капилляре по сравнению с уровнем жидкости в сосуде (рис. 7.3.4, а), а во втором — вниз, в связи с чем уровень жидкости в капилляре понижается (рис. 7.3.4, б).

В равновесии избыточное давление  $\Delta p$  уравнивается гидростатическим давлением  $\rho gh$ :

$$\rho gh = \frac{2\sigma}{R}, \quad (7.3.5)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости;  $h$  — разность уровней жидкости в сосуде и капилляре;  $\sigma$  — поверхностное натяжение на границе «жидкость — газ»;  $R$  — радиус кривизны мениска.

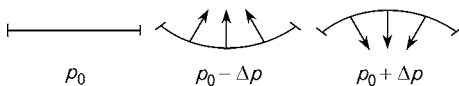


Рис. 7.3.3. Давление над прямой и изогнутыми поверхностями раздела «жидкость—газ»:  $p_0$  — давление над плоской поверхностью;  $\Delta p$  — величина избыточного давления, дополнительного к тому, которое испытывает жидкость с плоской поверхностью

Из рис. 7.3.4 видно, что  $R = \frac{r}{\cos \theta}$ . Подставив это выражение в формулу (7.3.5) и выразив  $h$ , получаем:

$$h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}. \quad (7.3.6)$$

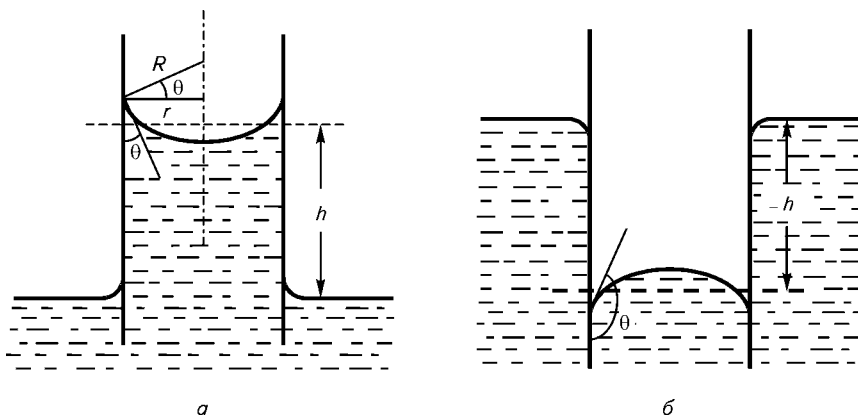


Рис. 7.3.4. Капиллярный эффект в случае смачивания (а) и несмачивания (б) жидкостью стенок капилляра

Это выражение известно как *формула Жюрена*.

Так как при смачивании  $0 < \theta < 90^\circ$ , то  $\cos \theta > 0$  и  $h > 0$  (жидкость поднимается); при несмачивании  $90^\circ < \theta < 180^\circ$ , тогда  $\cos \theta < 0$  и  $h < 0$  (жидкость опускается). Если  $\theta = 90^\circ$ , то изменение уровня жидкости не происходит ( $h = 0$ ).

Капиллярный эффект играет важную роль в снабжении растений водой и передвижении воды в почве и пористых телах. Наличие избыточного давления у искривленной поверхности объясняет опасность попадания пузырьков воздуха в кровеносные сосуды.

Рассмотрим пузырек, находящийся в кровеносном сосуде (диаметры пузырька и кровеносного сосуда приблизительно равны). Если перемещение крови отсутствует, то две стороны пузырька имеют одинаковые радиусы кривизны и соответственно одинаковые величины избыточного давления, компенсирующие друг друга. Давление, под действием которого кровь движется по сосудам, приводит к искривлению поверхностей пузырька, вследствие чего разность избыточных давлений с разных сторон пузырька становится отличной от нуля, что может воспрепятствовать движению крови и вызвать закупорку сосуда. Возникающее при этом заболевание называется эмболией.

## § 7.4. СТРОЕНИЕ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Твердыми телами называются тела, сохраняющие свою форму и объем. Различают кристаллические и аморфные твердые тела.

**Кристаллические твердые тела** имеют правильное периодическое расположение составляющих их частиц, образующих кристаллическую решетку. В расположении частиц кристаллического тела имеет место дальний порядок. В данном случае энергия взаимодействия частиц намного превышает энергию их теплового движения  $kT$ , которой хватает лишь на колебание частиц около положений равновесия (так называемых узлов кристаллической решетки, где потенциальная энергия частиц минимальна), но недостаточно для разрушения правильной кристаллической структуры.

Отличительной особенностью кристаллического состояния является **анизотропия** (от греч. *ánisos* — неравный и *trópos* — направление) — зависимость физических свойств (механических, тепловых, электрических, магнитных, оптических) от направления. Тела, проявляющие свойство анизотропии, называются **анизотропными**; не проявляющие — **изотропными**. Изотропными телами являются газы, жидкости (за исключением жидких кристаллов), а также аморфные тела.

Причина анизотропии кристаллов кроется в упорядоченном расположении составляющих их частиц. Например, кристаллы слюды можно расслоить на пластинки только вдоль определенной плоскости, так как параллельно этой плоскости силы сцепления между частицами слюды наименьшие.

В действительности большинство кристаллических тел не проявляет свойство анизотропии, так как состоят из большого числа сросшихся, беспорядочно ориентированных кристалликов. Анизотропия проявляется только в пределах этих кристалликов. Создав соответствующие условия кристаллизации, можно получить так называемые монокристаллы — кристаллы, имеющие во всем объеме единую кристаллическую решетку.

По характеру сил взаимодействия, типу связи и тому, какие частицы расположены в узлах кристаллической решетки, различают следующие типы кристаллических твердых тел.

**Ионные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки расположены правильно чередующиеся положительные и отрицательные ионы. Ионная (гетерополярная) связь осуществляется в основном электростатическими взаимодействиями. Типичным примером ионных кристаллов являются кристаллы поваренной соли.

**Атомные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки находятся нейтральные атомы, взаимодействующие за счет ковалент-

ных (гомеополярных) связей, имеющих квантовомеханическую природу. Связь между каждым двумя атомами возникает за счет взаимодействия их валентных электронов, образующих общую электронную пару. Число связей, в которых может участвовать каждый атом, равно числу его валентных ионов. Примерами атомных кристаллов являются алмаз и графит, а также типичные полупроводники — германий и кремний.

**Металлические кристаллы.** В узлах кристаллической решетки расположены положительные ионы, образовавшиеся при отщеплении от атомов валентных электронов. Последние совершают беспорядочное движение между узлами решетки, образуя газ свободных электронов. Металлическая связь обусловлена электростатическим и обменным взаимодействием. Металлические решетки характерны для металлов.

**Молекулярные кристаллы.** В узлах кристаллической решетки находятся определенным образом ориентированные нейтральные молекулы. Силами взаимодействия в молекулярных кристаллах являются силы Ван-дер-Ваальса, имеющими ту же природу, что и силы взаимодействия между молекулами газов, приводящие к их отклонению от идеальности. Молекулярные кристаллы образуют вода, углекислый газ, азот, водород, кислород.

Кристаллы образуются также из таких сложных веществ, как белки, нуклеиновые кислоты и даже вирусы. Биологические кристаллы имеют большие периоды кристаллических решеток, что позволяет изучать их методами электронной микроскопии. Способность биологических молекул к кристаллизации делает возможным применение рентгеноструктурного анализа для их исследования.

**Аморфными** называются вещества, не обладающие в конденсированном состоянии кристаллическим строением. Их структура близка к структуре жидкостей: для аморфных тел, как и для жидкостей, характерны ближний порядок расположения частиц и отсутствие анизотропии. Аморфные тела делятся на две группы: *простые аморфные вещества* (низкомолекулярные жидкости, неорганические стекла, плавленый кварц и т. п.) и *высокополимерные соединения* (каучуки, резина, органические стекла, смолы).

## § 7.5. СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

**Упругие свойства.** Внешние силы изменяют форму и объем реального тела, то есть деформируют его. При деформации происходит относительное смещение элементов тела (его атомов или молекул). Деформации, исчезающие с прекращением действия силы,

называются *упругими*. При превышении предела упругости в кристаллической решетке возникают необратимые изменения: происходит пластическая деформация тела, оно не возвращается к исходной форме после прекращения действия внешних сил.

В случае упругой деформации продольного растяжения (или одностороннего сжатия) стержня относительное изменение его длины, согласно закону Гука, равно

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{S}, \quad (7.5.1)$$

или

$$\sigma = E\varepsilon, \quad (7.5.2)$$

где  $F$  — растягивающая (сжимающая) сила;  $S$  — площадь поперечного сечения;  $l$  — начальная длина стержня;  $\Delta l$  — изменение длины под действием внешней силы;  $E$  — модуль упругости, или модуль Юнга,  $[E] = \text{Н/м}^2 = \text{Па}$ ;  $\sigma = F/S$  — напряжение,  $[\sigma] = \text{Н/м}^2 = \text{Па}$ ;  $\varepsilon = \Delta l/l$  — относительная продольная деформация.

Механическое растяжение в продольном направлении, кроме удлинения, вызывает поперечное сжатие тела. Относительное изменение толщины стержня при продольном растяжении равно

$$\frac{\Delta d}{d} = -\mu \frac{\Delta l}{l}, \quad (7.5.3)$$

где  $d$  — поперечный размер тела;  $\Delta d$  — изменение поперечного сечения;  $\mu$  — коэффициент Пуассона.

Для закручивания стержня (проволоки) на некоторый угол  $\varphi$  необходимо приложить момент пары сил

$$M = \frac{\pi G R^4 \varphi}{2l}, \quad (7.5.4)$$

где  $M$  — момент пары сил,  $[M] = \text{Н} \cdot \text{м}$ ;  $R$  — радиус стержня;  $l$  — длина стержня;  $G$  — модуль сдвига материала стержня,  $[G] = \text{Н/м}^2 = \text{Па}$ .

Модуль упругости, коэффициент Пуассона и модуль сдвига связаны между собой соотношением:

$$G = \frac{1}{2} E (1 + \mu). \quad (7.5.5)$$

**Тепловое расширение.** При нагревании твердых тел амплитуда колебаний молекул увеличивается, расстояние между ними возрастает, и тело увеличивается в своем объеме.

Для линейного теплового расширения в хорошем приближении справедливы равенства

$$\Delta l = l_1 \alpha \Delta t \quad \text{и} \quad l_2 = l_1 (1 + \alpha \Delta t), \quad (7.5.6)$$

где  $l_1$  — начальная длина тела при температуре  $t_1$ ;  $l_2$  — конечная длина тела при температуре  $t_2$ ;  $\Delta l = l_2 - l_1$  — удлинение тела;  $\Delta t = t_2 - t_1$  — разность температур;  $\alpha$  — температурный коэффициент линейного расширения,  $[\alpha] = \text{K}^{-1}$ .

Двумерное расширение твердого тела можно рассматривать как линейное расширение в двух направлениях:

$$\Delta S = S_1 \cdot 2\alpha \Delta t \quad \text{или} \quad S_2 = S_1 (1 + 2\alpha \Delta t), \quad (7.5.7)$$

где  $S_1$  — площадь тела при температуре  $t_1$ ;  $S_2$  — площадь тела при температуре  $t_2$ ;  $\Delta S = S_2 - S_1$  — изменение площади тела.

Объемное расширение можно рассматривать как линейное расширение в трех направлениях:

$$\Delta V = V_1 \cdot 3\alpha \Delta t \quad \text{и} \quad V_2 = V_1 (1 + 3\alpha \Delta t), \quad (7.5.8)$$

где  $V_1$  — начальный объем тела при температуре  $t_1$ ;  $V_2$  — конечный объем тела при температуре  $t_2$ ;  $\Delta V = V_2 - V_1$  — изменение объема тела.

Каждый материал характеризуется собственным значением коэффициента линейного расширения  $\alpha$ . При охлаждении разность температур  $\Delta t$  отрицательна.

**Теплоемкость.** Отношение подведенного к телу количества теплоты к достигнутой разности температур называется *теплоемкостью* данного тела:

$$C = \frac{Q}{\Delta t}, \quad (7.5.9)$$

или в дифференциальной форме

$$C = \frac{\delta Q}{dt}. \quad (7.5.10)$$

Отношение теплоемкости тела к его массе называется *удельной теплоемкостью* вещества данного тела:

$$c_m = C/m, \quad (7.5.11)$$

учитывая формулы (7.5.9) и (7.5.10), получаем

$$c_m = \frac{Q}{m\Delta t} \quad \text{или} \quad c_m = \frac{1}{m} \cdot \frac{\delta Q}{dt}. \quad (7.5.12)$$

Удельная теплоемкость равна количеству теплоты, которое необходимо подвести к одному килограмму вещества, для того чтобы нагреть его на один градус:  $[c_m] = \text{Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

*Молярной теплоемкостью* называется количество теплоты, которое необходимо подвести к одному молю вещества, для того чтобы нагреть его на один градус. Молярная теплоемкость  $C_\mu$  связана с удельной следующим образом:

$$C_\mu = M \cdot c_m, \quad (7.5.13)$$

где  $M$  — молярная масса вещества. Единица молярной теплоемкости:  $[C_\mu] = \text{Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$ .

При не очень низких температурах (выше температуры Дебая, при которой возбуждаются все нормальные колебания решетки) для химически простых твердых тел справедлив закон Дюлонга и Пти:

$$C_\mu = 3R \approx 25 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}), \quad (7.5.14)$$

где  $C_\mu$  — молярная теплоемкость всех химически простых твердых тел;  $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$  — универсальная газовая постоянная.

**Теплообмен, уравнение теплового баланса.** Если два тела с различными температурами помещены в термостат и приведены в соприкосновение, между ними происходит теплообмен, который приводит к выравниванию температур тел. По закону Рихмана:

$$Q_1 = Q_2,$$

или

$$c_1 m_1 (T_1 - T_{\text{общ}}) = -c_2 m_2 (T_2 - T_{\text{общ}}), \quad (7.5.15)$$

где  $Q_1$  — количество теплоты, отдаваемое телом;  $Q_2$  — количество теплоты, воспринимаемое другим телом;  $c_1$ ,  $m_1$ ,  $t_1$  и  $c_2$ ,  $m_2$ ,  $t_2$  — удельные теплоемкости, массы и начальные температуры тел 1 и 2;  $t_{\text{общ}}$  — конечная равновесная температура обоих тел.

Если в теплообмене участвуют более двух тел, то при достижении теплового равновесия справедливо уравнение:

$$\sum_{i=1}^n m_i c_i (T_{\text{общ}} - T_i) = 0. \quad (7.5.16)$$

При изменении в процессе теплообмена агрегатного состояния одного из компонентов необходимо учесть высвободившееся при этом количество теплоты.

**Теплопроводность.** Теплопроводность тела определяет его способность проводить теплоту. Теплопроводность называется *ста-*

ционной, если вызывающая ее разность температур  $\Delta T$  сохраняется неизменной во времени. В противном случае речь идет о *нестационарной* теплопроводности. Для однородного стержня, концы которого находятся при температуре  $T_1$  и  $T_2$ ,

$$Q = -\kappa \frac{\Delta T}{l} S \Delta t, \quad (7.5.17)$$

где  $Q$  — передаваемое количество теплоты;  $S$  — площадь поперечного сечения стержня;  $t$  — продолжительность процесса теплопередачи;  $\Delta T$  — разность температур на концах стержня;  $l$  — длина стержня;  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности материала стержня.

В случае нестационарной теплопроводности

$$Q = -\kappa S \Delta t \operatorname{grad} T, \quad (7.5.18)$$

где  $\operatorname{grad} T$  — градиент температуры.

Отношение

$$\Phi = \frac{Q}{\Delta t} \quad (7.5.19)$$

называется *тепловым потоком*,  $[\Phi] = \text{Вт}$ , а отношение

$$I_Q = \frac{\Phi}{S} \quad (7.5.20)$$

*плотностью теплового потока*,  $[I_Q] = \text{Вт/м}^2$ .

В соответствии с отношением (7.5.19) формула (7.5.17) может быть записана в виде:

$$\Phi = -\frac{\kappa S \Delta T}{l} = -\frac{\Delta T}{R_T}, \quad (7.5.21)$$

где величина

$$R_T = \frac{l}{\kappa S} \quad (7.5.22)$$

*тепловое сопротивление*. Единица теплового сопротивления:  $[R_T] = \text{К/Вт}$ .

Как видим, явления теплопроводности и электропроводности формально аналогичны друг другу. По аналогии с законом Ома —  $I = U/R$ , закон для участка теплопроводящей цепи имеет вид:

$$\Phi = -\frac{\Delta T}{R_T}. \quad (7.5.23)$$

Тепловое сопротивление может состоять из ряда отдельных сопротивлений, включенных параллельно или последовательно. Для вычисления полного сопротивления следует пользоваться правилами вычисления полного сопротивления электрической цепи.



## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 7.1.** На аптечный склад поступил этиловый спирт в количестве  $m = 200$  кг. Для проведения лабораторных работ было выдано на кафедры  $V = 200$  л спирта. Определите оставшееся на складе количество спирта, если он выдавался при температуре  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ ? Как изменился бы остаток спирта, если бы температура во время выдачи составляла  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ ?

**Решение.** Как правило, получаемый спирт содержит 96 % объемных долей чистого спирта. По справочнику находим плотность 96 %-ного спирта при температуре  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Она равна  $808,7\text{ кг/м}^3$ .

Определим массу выданного спирта при температуре  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

$$m_{\text{выд. } 20} = \rho_{20} V_{\text{выд.}},$$

где  $V_{\text{выд.}}$  — объем выданного спирта;  $\rho_{20}$  — плотность спирта при температуре  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Подстановка численных данных дает:

$$m_{\text{выд. } 20} = 808,7 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 161,7\text{ кг.}$$

Таким образом, остаток спирта на складе составляет:

$$m_{20} = 200 - 161,7 = 38,3\text{ кг,}$$

или объем спирта, равный

$$V_{20} = \frac{m_{20}}{\rho_{20}} = \frac{38,3}{808,7} = 0,0474\text{ м}^3 = 47,4\text{ л.}$$

Рассмотрим другой вариант, когда спирт выдавался при температуре  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Очевидно, что при температуре  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  плотность спирта станет еще меньше.

Определим плотность спирта при температуре  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Коэффициент объемного расширения  $\beta$  спирта в интервале температур  $0\text{—}39\text{ }^{\circ}\text{C}$  равен  $0,745 \cdot 10^{-3}\text{ К}^{-1}$ . Объем спирта, равный  $1\text{ м}^3$  и имеющий массу, равную  $808,7\text{ кг}$ , при повышении температуры на  $10\text{ К}$  станет равным

$$V_{30} = V_{20} + \Delta V = V_{20} + V_{20} \beta \Delta T,$$

где  $V_{20}$  и  $V_{30}$  — объемы спирта при температурах  $20\text{ }^{\circ}\text{C}$  и  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  соответственно. Плотность спирта при температуре  $30\text{ }^{\circ}\text{C}$  составит:

$$\begin{aligned} \rho_{30} &= \frac{m}{V_{30}} = \frac{m}{V_{20} + V_{20} \beta \Delta T} = \frac{m / V_{20}}{1 + \beta \Delta T} = \frac{\rho_{20}}{1 + \beta \Delta T} = \\ &= \frac{808,7}{1 + 0,745 \cdot 10^{-3} \cdot 10} = 802,7\text{ кг/м}^3. \end{aligned}$$

Масса спирта, выданного при температуре 30 °С, будет равна

$$m_{\text{выд. 30}} = \rho_{30} V_{\text{выд}} = 802,7 \cdot 200 \cdot 10^{-3} = 160,5 \text{ кг},$$

а остаток его составит:

$$m_{30} = 200 - 160,5 = 39,5 \text{ кг}.$$

Из решения задачи следует, что если выдавать спирт при более высокой температуре, то разница при выдаче 200 л спирта при 30 °С по сравнению с 20 °С составит:

$$\Delta m = 39,5 - 38,3 = 1,2 \text{ кг}.$$

**Задача 7.2.** Для изготовления настоек из лекарственных трав используется, как правило, 70 %-ный (по объему) раствор этилового спирта. Чему равны объемы 96 %-ного раствора спирта и воды, необходимые для получения 10 л 70 %-ного раствора спирта? Определите плотность 70 %-ного раствора спирта. Плотность чистого этилового спирта составляет  $\rho_c = 796,3 \text{ кг/м}^3$ , плотность воды —  $\rho_v = 999 \text{ кг/м}^3$ .

**Решение.** Обозначим объем 96 %-ного спирта, необходимого для приготовления раствора, через  $V_x$ . Тогда объем чистого спирта будет равен

$$V = 0,96V_x.$$

Если обозначить общий объем 70 %-ного раствора спирта через  $V_{70}$ , то можно составить уравнение:

$$0,7V_{70} = 0,96V_x,$$

откуда получаем:

$$V_x = \frac{0,7V_{70}}{0,96}.$$

Подставляя численные значения, имеем:

$$V_x = \frac{0,7 \cdot 10 \text{ л}}{0,96} = 7,29 \text{ л}.$$

Таким образом, объем 96 %-ного раствора спирта равен 7,29 л, а объем воды тогда составляет:

$$10 \text{ л} - 7,29 \text{ л} = 2,71 \text{ л}.$$

Для вычисления плотности полученного раствора определим массу спирта и массу воды:

$$m_{\text{сп}} = \rho_{\text{сп}} V_{\text{сп}};$$

$$m_v = \rho_v V_v,$$

где  $\rho_{\text{сп}}$ ,  $\rho_v$  — плотности спирта и воды соответственно.

Общая масса смеси равна:

$$m = \rho_{\text{сп}} V_{\text{сп}} + \rho_{\text{в}} V_{\text{в}},$$

а плотность смеси можно вычислить, разделив массу смеси на ее объем  $V_0$ , то есть

$$\rho = \frac{\rho_{\text{сп}} V_{\text{сп}} + \rho_{\text{в}} V_{\text{в}}}{V_0}. \quad (7.1)$$

Подставив численные значения, получаем

$$\rho = \frac{796,3 \cdot 7,29 \cdot 10^{-3} + 999 \cdot 2,71 \cdot 10^{-3}}{10 \cdot 10^{-3}} = 851 \text{ кг/м}^3.$$

Этот результат справедлив, если сумма объемов спирта и воды равна объему смеси. В действительности объем смеси будет несколько меньшим и, следовательно, истинная плотность раствора будет несколько больше вычисленной, а для получения 10 л раствора необходимо взять большие объемы компонентов. В соответствующей справочной литературе приводятся объемные и массовые соотношения. Так, например, для 70 %-ного раствора  $\rho_{70} = 889 \text{ кг/м}^3$  массовая доля спирта  $\omega_{70} = 0,624$ . Используя эти данные, пересчитаем объемы смешиваемых спирта и воды. Определим для начала массу смеси:

$$m_{71} = \rho_{71} V_{71}.$$

Для составления раствора нужно 62,4 % чистого спирта по массе. Тогда масса спирта в 70 %-ном растворе составит:

$$m_c = \rho_{70} V_{70} \omega_{70}.$$

Такая же масса спирта, но в 96 %-ном растворе, равна

$$m_c = \rho_{96} V_{96} \omega_{96},$$

где  $\rho_{96}$ ,  $V_{96}$ ,  $\omega_{96}$  — соответственно плотность, объем и массовая доля 96 %-ного раствора спирта.

Приравняв два последних уравнения, получаем:

$$V_{96} = \frac{\rho_{70} V_{70} \omega_{70}}{\rho_{96} \omega_{96}}.$$

Из таблиц находим значения  $\rho_{96} = 811,7 \text{ кг/м}^3$ ,  $\omega_{96} = 0,939$ . Подставив численные данные, получаем объем 96 %-ного раствора спирта, необходимый для получения 10 л 70 %-ного раствора спирта:

$$V_{96} = \frac{889,6 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 0,624}{811,7 \cdot 0,939} = 7,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 7,28 \text{ л}.$$

Для определения объема воды учтем, что массовая доля воды составляет:

$$\omega_{\text{в}} = 1 - \omega_{70},$$

то есть масса воды равна

$$m_{\text{в}} = \rho_{70} V_{70} (1 - \omega_{70}).$$

Объем воды  $V_{\text{в}}$  определим, разделив массу воды на ее плотность:

$$V_{\text{в}} = \frac{\rho_{70} V_{70} (1 - \omega_{70})}{\rho_{\text{в}}}.$$

Подставив численные данные, получаем:

$$V_{\text{в}} = \frac{889,6 \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - 0,624)}{999} = 3,35 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 3,35 \text{ л}.$$

Плотность 70 %-ного раствора, согласно формуле (7.1):

$$\rho = \frac{811,7 \cdot 7,28 \cdot 10^{-3} + 999 \cdot 3,35 \cdot 10^{-3}}{10^{-3}} = 925,6 \text{ кг/м}^3.$$

Сумма объемов 96 %-ного раствора спирта и воды тогда составит 10,63 л. Таким образом, правильный ответ: объем 96 %-ного раствора спирта равен 7,28 л, объем воды — 3,35 л.

**Задача 7.3.** Согласно некоторым техническим условиям, ампулы должны содержать  $V = 10$  мл раствора лекарственного препарата при температуре 20 °С. Заполнение ампул происходит раствором, имеющим температуру 40 °С. Чему должен быть равен объем раствора при заполнении ампулы, если коэффициент объемного расширения раствора  $\beta = 91 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ ?

**Решение.** С повышением температуры раствора его объем увеличивается. Изменение объема с изменением температуры должно происходить линейно, то есть пропорционально первоначальному объему  $V$  и изменению температуры  $\Delta T$ :

$$\Delta V = \beta V \Delta T,$$

где коэффициент пропорциональности  $\beta$  — коэффициент объемного расширения.

Подставляя численные значения  $\Delta T = 20 \text{ К}$ ,  $V = 10 \text{ мл}$ ,  $\beta = 91 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ , получаем:

$$\Delta V = 91 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1} \cdot 10 \text{ мл} \cdot 20 \text{ К} = 0,182 \text{ мл}.$$

Таким образом, объем заполненных ампул при температуре 40 °С должен быть равен

$$V = V + \Delta V = 10 \text{ мл} + 0,182 \text{ мл} = 10,182 \text{ мл}.$$

**Задача 7.4.** Уксусная кислота при атмосферном давлении плавится при температуре  $t = 16,6$  °С. Разность удельных объемов жидкой и твердой фаз

уксусной кислоты  $\Delta V = 0,16 \text{ см}^3/\text{г}$ . Точка плавления уксусной кислоты смещается на  $\Delta T = 1 \text{ К}$  при изменении давления на  $\Delta p = 4,153 \text{ МПа}$ . Определите удельную теплоту плавления  $\lambda$  уксусной кислоты.

**Решение.** Согласно уравнению Клаузиуса—Клапейрона,

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = T_{\text{пл}} \frac{\Delta V}{\lambda},$$

где  $T_{\text{пл}}$  — температура плавления.

Отсюда удельная теплота плавления составит:

$$\lambda = \frac{T_{\text{пл}} \Delta V \Delta p}{\Delta T}.$$

Согласно условию,

$$\Delta p = 4,153 \cdot 10^6 \text{ Па};$$

$$T_{\text{пл}} = 16,6 \text{ }^\circ\text{C} = 16,6 + 273,15 = 289,75 \text{ К};$$

$$\Delta V = 0,16 \text{ см}^3/\text{г} = 0,16 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{кг}.$$

Подставляя эти значения, получаем:

$$\lambda = \frac{289,75 \cdot 0,16 \cdot 10^{-3} \cdot 4,153 \cdot 10^6}{1} = 192,5 \cdot 10^3 \text{ Дж/кг}.$$

**Задача 7.5.** Определите постоянную  $d$  кристаллической решетки каменной соли  $\text{NaCl}$ , зная ее молярную массу  $M$  и плотность ( $\rho = 2,165 \text{ г/см}^3$ ). Кристаллы каменной соли обладают простой кубической структурой.

**Решение.** Молярная масса каменной соли  $M \approx 58,5 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ , а молярный объем  $V_{\mu} = \frac{M}{\rho}$ . В этом объеме имеется  $2N_A$  ионов, где  $N_A$  — число Авогадро. Тогда объем, приходящийся на один ион, равен

$$V' = \frac{M}{2\rho N_A}.$$

Так как кристаллы каменной соли обладают простой кубической структурой, то расстояние  $d$  между ионами определим из условия  $V' = d^3$ , то есть

$$d = \sqrt[3]{V'} = \sqrt[3]{\frac{M}{2\rho N_A}}.$$

Подставляя численные данные в единицах СИ, получаем:

$$d = \sqrt[3]{\frac{58,5 \cdot 10^{-3}}{2 \cdot 2,165 \cdot 10^3 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}} = 0,282 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 0,282 \text{ нм}.$$

Постоянная решетки каменной соли  $d_0 = 0,564 \text{ нм}$ , так как элементарная ячейка состоит из двух атомов.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**7.1.** К поршню горизонтально расположенного шприца приложена сила  $F = 10$  Н. Определите скорость  $v$  истечения лекарства из иглы шприца, если плотность лекарства  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup>, диаметр поршня  $d = 7$  мм, причем его площадь намного больше площади поперечного сечения иглы.

**7.2.** С какой скоростью  $v$  всплывает пузырек воздуха диаметром  $d = 4$  мм в сосуде, наполненном глицерином? Кинематическая вязкость глицерина  $\nu = 1,17 \cdot 10^{-3}$  м<sup>2</sup>/с, его плотность намного больше плотности воздуха.

**7.3.** По трубе течет вода с объемной скоростью  $Q = 2,5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>/с. Вычислите наименьший диаметр трубы  $d_{\min}$ , при котором течение воды еще остается ламинарным. Плотность воды  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>; динамическая вязкость  $\eta = 1$  мПа·с. Критическое значение числа Рейнольдса равно  $Re_{\text{кр}} = 2300$  (для случая, когда в качестве характерного размера взят диаметр трубы).

**7.4.** Чтобы выдуть мыльный пузырек, была затрачена энергия  $E = 0,5$  мДж. Вычислите диаметр  $d$  пузыря, если коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора  $\sigma = 43$  мН/м.

**7.5.** Глицерин дозируют каплями с помощью пипетки внутренним диаметром  $d = 1$  мм. Вычислите массу одной капли, если коэффициент поверхностного натяжения глицерина  $\sigma = 62$  мН/м. Диаметр шейки в момент отрыва считать равным внутреннему диаметру пипетки.

**7.6.** Вычислите разность  $\Delta p$  между давлением внутри пузырька воздуха диаметром  $d = 0,5$  мм, попавшего в кровеносный сосуд, и атмосферным давлением, не учитывая гидростатическое давление крови. Поверхностное натяжение крови  $\sigma = 58$  мН/м.

**7.7.** Определите коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  крови, если в капилляре диаметром  $d = 1$  мм она поднимается на высоту  $h = 2,25$  см. Плотность крови  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup>. Смачивание считать полным.

**7.8.** К кости приложена нагрузка, соответствующая массе  $m = 5$  кг. Рассчитайте удлинение  $\Delta l$  кости, если ее начальная длина  $l_0 = 20$  см, диаметр поперечного сечения  $d = 8$  мм, модуль упругости  $E = 1$  ГПа.

**7.9.** Имеется железный стержень диаметром поперечного сечения  $d = 5$  мм. Какую силу  $F$  нужно к нему приложить, чтобы вызвать такое же удлинение, как и при нагревании на  $\Delta t = 50$  °С? Температурный коэффициент линейного расширения железа  $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5}$  К<sup>-1</sup>, модуль Юнга  $E = 196$  ГПа.

**7.10.** Один конец медного стержня длиной  $l = 25$  см находится при температуре  $t_1 = 0$  °С, а другой — при температуре  $t_2 = 50$  °С. Вычислите плотность теплового потока  $I_Q$ , проходящего через стержень, не учитывая потери тепла через стенки стержня. Коэффициент теплопроводности меди  $\kappa = 390$  Вт/(м·К).

**7.11.** Вычислите удельную теплоемкость  $c$  платины.

## ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**7.1.** Идеальной жидкостью называется:

- а) жидкость, состоящая из однородных недеформирующихся частиц;
- б) жидкость, молекулы которой не взаимодействуют между собой;
- в) жидкость, течение которой подчиняется уравнению Ньютона;
- г) несжимаемая и не имеющая вязкость жидкость;
- д) жидкость, коэффициент вязкости которой не зависит от температуры и давления.

**7.2.** Вязкость жидкостей:

- а) уменьшается с повышением температуры и не зависит от давления;
- б) уменьшается с повышением температуры и увеличивается с повышением давления;
- в) увеличивается с повышением давления и не зависит от температуры;
- г) увеличивается с повышением температуры и уменьшается с повышением давления;
- д) увеличивается с повышением температуры и давления.

**7.3.** Сила Стокса равна:

- а)  $F_C = \rho g V$ ;
- б)  $F_C = \nu S$ ;
- в)  $F_C = 6\pi\eta Rv$ ;
- г)  $F_C = \frac{4}{3}\rho v\eta$ ;
- д)  $F_C = \rho gh$ .

**7.4.** Турбулентным называется такое течение жидкости, при котором:

- а) по всему объему потока остается постоянным гидродинамическое давление;
- б) слои жидкости скользят относительно друг друга, не смешиваясь;
- в) все частицы жидкости имеют постоянную скорость;
- г) происходит интенсивное перемешивание между слоями жидкости;
- д) профиль средних по времени скоростей имеет параболическую форму.

**7.5.** Работа, которую необходимо совершить для увеличения площади поверхности жидкости на величину  $\Delta S$ , равна:

- а)  $A = \rho\eta\Delta S$ ;
- б)  $A = \frac{\sigma}{\Delta S}$ ;
- в)  $A = \sigma\Delta S$ ;
- г)  $A = \frac{\rho g}{\Delta S}$ ;
- д)  $A = \frac{\rho\Delta S}{\eta}$ .

**7.6.** Высота поднятия (опускания) жидкости в капилляре равна:

- а)  $h = \frac{2\sigma \cos \theta}{\rho g r}$ ;
- б)  $h = \frac{\rho V l}{\eta}$ ;
- в)  $h = 2\pi\sigma\rho R$ ;
- г)  $h = \frac{6\sigma\rho^2}{g r \cos \theta}$ ;
- д)  $h = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p$ .





# БИОФИЗИКА СИСТЕМЫ КРОВООБРАЩЕНИЯ

Кровь играет первостепенную роль в распределении лекарственных веществ в организме. Действие многих лекарственных препаратов в свою очередь направлено на изменение реологических (например вязкости) и гемодинамических (например кровяного давления) параметров крови.

В данной главе рассматриваются вопросы *гемореологии* (учении о деформации и текучести крови), *гемодинамики* (учении о течении крови по кровеносным сосудам), некоторые математические модели кровообращения. Особое внимание уделено фильтрации и реабсорбции веществ в капиллярной сети, так как эти процессы являются основным способом поступления лекарственных веществ в организм и выведения их из него. Основой для изложения этих сведений служат обсуждавшиеся в главе 7 элементы гидродинамики и реологии.

### § 8.1. РЕОЛОГИЧЕСКИЕ И ГЕМОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КРОВИ

Кровь представляет собой суспензию форменных элементов (эритроцитов, лейкоцитов и тромбоцитов) в плазме. Концентрация эритроцитов в крови составляет  $(4...6) \cdot 10^6 \text{ мм}^{-3}$ , концентрация лейкоцитов —  $(4...10) \cdot 10^3 \text{ мм}^{-3}$ , а тромбоцитов —  $(1,5...3,0) \cdot 10^5 \text{ мм}^{-3}$ . Часть объема крови, приходящаяся на долю эритроцитов, — *гематокрит* — составляет в норме 0,44...0,46 у взрослых мужчин и 0,41...0,43 у женщин. Ввиду малой концентрации лейкоцитов и тромбоцитов (их суммарная объемная концентрация составляет 1 %) они не оказывают такого существенного влияния на механические свойства крови, как эритроциты. В дальнейшем в качестве упрощенной модели мы будем рассматривать кровь как суспензию эрит-

роцитов в плазме. В плазме крови человека содержится 900...910 г/л воды, 65...80 г/л белка (альбумин, глобулины, фибриноген) и 20 г/л низкомолекулярных соединений. В целом плазму крови считают ньютоновской жидкостью, хотя некоторые отклонения от этого свойства наблюдаются за счет большого содержания крупных белковых молекул. Вязкость плазмы составляет 1,9...2,3 мПа·с.

Кровь по составу гетерогенна и поэтому является неньютоновской жидкостью, вязкость которой зависит от градиента скорости (скорости сдвига) (рис. 8.1.1). Кроме того, вязкость крови зависит от концентрации форменных элементов (рис. 8.1.2, кривая 1) и в меньшей степени — от концентрации белков плазмы, а также от размеров (радиуса и длины) сосудов, по которым она течет.

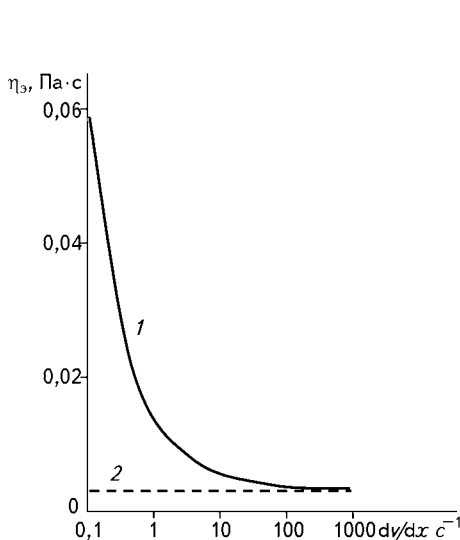


Рис. 8.1.1. Зависимость эффективной вязкости крови  $\eta_e$  от градиента скорости в логарифмическом масштабе (1). Для сравнения приведена аналогичная зависимость вязкости некоторой ньютоновской жидкости (2): вязкость ньютоновской жидкости взята равной предельной вязкости крови

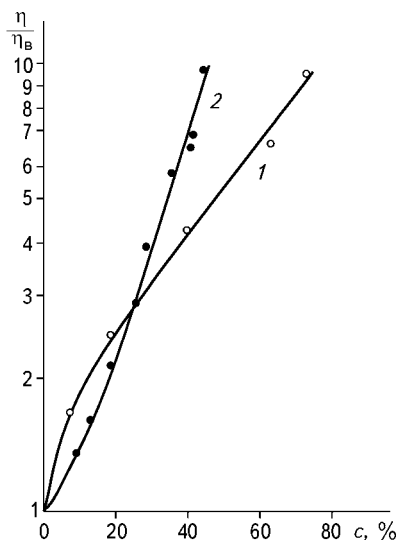


Рис. 8.1.2. Зависимость вязкости от концентрации суспензии эритроцитов собаки в норме (1) и жестких эритроцитов (2):

$\eta/\eta_b$  — относительная вязкость крови в логарифмическом масштабе;  $\eta_b$  — вязкость воды;  $c$  — гематокрит. Градиент скорости составляет  $230 \text{ с}^{-1}$

Течение крови по крупным и мелким сосудам и по капиллярам отличается по некоторым характеристикам. В крупных сосудах эритроциты образуют агрегаты в виде монетных столбиков. Диаметр отдельных эритроцитов составляет  $d_{\text{эр}} \approx 8 \text{ мкм}$ , а размер агрегата — приблизительно в 10 раз больше. Градиент скорости течения крови здесь относительно небольшой, и вязкость крови составляет  $\eta = 5 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ . При некоторых патологиях (см. ниже)

тенденция эритроцитов к агрегации может настолько возрасть, что требуются дополнительные затраты энергии для продвижения крови.

По мере увеличения градиента скорости и уменьшении диаметра кровеносных сосудов агрегаты эритроцитов распадаются на отдельные клетки, что вызывает уменьшение вязкости крови. Эффект снижения вязкости крови в мелких сосудах называется *феноменом сигма*, или *эффектом Фареуса—Линдквиста*. Он наблюдается в сосудах диаметром менее 500 мкм и особенно сильно в капиллярах, где вязкость крови снижается почти вдвое по сравнению с крупными сосудами, приближаясь, таким образом, к значению вязкости плазмы. Одним из объяснений этого эффекта является *теория режущего цилиндра*.

Согласно этой теории, если мысленно погрузить полый цилиндр в суспензию эритроцитов, то его стенка «разрежет» некоторые частицы (рис. 8.1.3, *а*), в то время как протекание той же суспензии по этому цилиндру не будет сопровождаться разрезанием

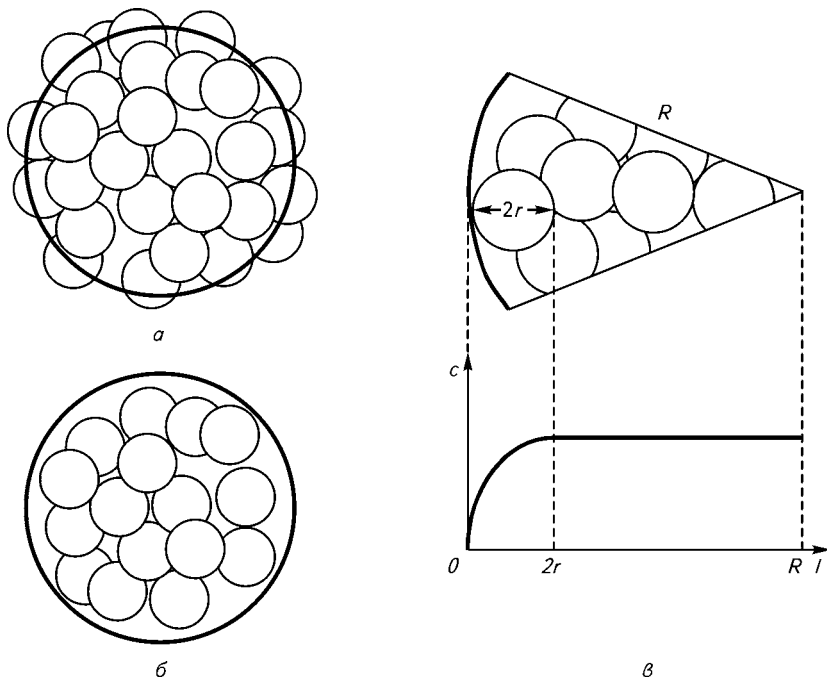


Рис. 8.1.3. Распределение сферических частиц в сосуде по теории режущего цилиндра:

*а* — погружение полого цилиндра в суспензию (цилиндр «разрезает» частицы); *б* — реальное расположение частиц в цилиндре (кровеносном сосуде); *в* — зависимость объемной концентрации  $c$  частиц от расстояния  $l$  вдоль радиуса цилиндра

частиц (рис. 8.1.3, б). Таким образом, концентрация эритроцитов непосредственно возле стенки цилиндра равна нулю и возрастает по мере продвижения к центру цилиндра до тех пор, пока расстояние от стенки не станет равным диаметру частиц (рис. 8.1.3, в). По мере увеличения концентрации частиц возрастает и вязкость крови. Если упростить модель и представить, что рассматриваемая жидкость состоит из двух частей — плазмы возле стенок цилиндра и однородной суспензии эритроцитов в центре, то, согласно расчетам, радиус сердцевины составит  $R = 0,76r$ , где  $R$  — радиус цилиндра,  $r$  — радиус сферической частицы.

С уменьшением радиуса цилиндра возрастает отношение толщины пристеночного слоя, занимаемого плазмой, к радиусу цилиндра, а поскольку вязкость плазмы приблизительно в два раза ниже вязкости цельной крови, то вязкость жидкости в целом снижается. При уменьшении радиуса просвета сосуда до величины, равной  $1,76r$ , радиус сердцевины становится равным радиусу отдельных эритроцитов, которые в этом случае выстраиваются в цепочку и передвигаются по капилляру подобно «змее» в оболочке из плазмы (рис. 8.1.4, а). С увеличением скорости кровотока эритро-

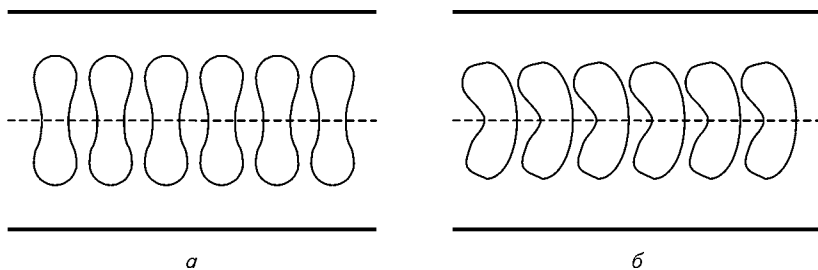


Рис. 8.1.4. Приосевая цепочка эритроцитов в капилляре при низкой (а) и высокой (б) скорости кровотока

роциты деформируются (рис. 8.1.4, б), что вызывает увеличение толщины пристеночного слоя и еще большее уменьшение вязкости крови. Такие способы передвижения эритроцитов в капиллярах наблюдаются под микроскопом.

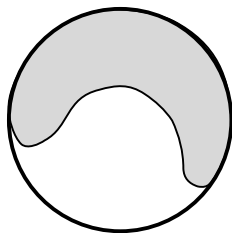


Рис. 8.1.5. Деформация эритроцита в капилляре

Эритроциты обладают высокой эластичностью. Благодаря своей форме двояковогнутого диска, они способны сильно деформироваться и проникать в капилляры диаметром около 3 мкм (рис. 8.1.5), что улучшает обменные процессы, так как при этом увеличивается площадь соприкосновения мембраны эритроцитов со стенками капилляров, и снижает

вязкость крови по сравнению с тем, если бы эритроциты были жесткими структурами (рис. 8.1.2, кривая 2). Благодаря относительно невысокой вязкости крови, в системе микроциркуляции снижаются нагрузки на сердце. При некоторых патологических состояниях эластичность стенок эритроцитов уменьшается и как следствие — ухудшается кровообращение.

Вязкость крови возрастает с увеличением концентрации эритроцитов. Так, вязкость крови в крупных сосудах в норме составляет  $4...6 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ ; при анемии (уменьшении содержания эритроцитов) —  $2...3 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ ; при полицитемии (увеличении содержания эритроцитов) —  $15...20 \text{ мПа} \cdot \text{с}$ .

Зависимость вязкости крови от гематокрита можно приблизительно описать экспоненциальной функцией

$$\eta = \eta_0 e^{2c}, \quad (8.1.1)$$

где  $\eta_0$  — вязкость плазмы;  $c$  — гематокрит (в относительных единицах).

Течение крови по сосудам, как правило, является ламинарным и переходит в турбулентное лишь в некоторых случаях: в проксимальных отделах аорты и легочного ствола при выталкивании крови из желудочков; в крупных артериях при возрастании скорости кровотока (например при интенсивной мышечной работе) или снижении вязкости крови (например при резко выраженной анемии). В вышеперечисленных случаях число Рейнольдса превышает критическое значение ( $2000...2400$ ). Шумы, сопровождающие турбулентное течение, иногда бывают настолько сильны, что их можно выслушать даже без стетоскопа. Тоны Короткова, возникающие при непрямом методе измерения артериального давления, также вызваны турбулентным течением крови. В местах разветвлений и локальных сужений сосудов (например при образовании тромбов), а также в области крутых изгибов образуются локальные завихрения. Число Рейнольдса при этом превышает 400. Турбулентное течение требует больших затрат энергии по сравнению с ламинарным и усиливает нагрузку на сердце.

Рассмотрим гемодинамические характеристики крови — давление и скорость кровотока. Согласно теореме о неразрывности струи, линейная скорость течения жидкости  $v$  обратно пропорциональна площади поперечного сечения сосуда  $S$ . Аорта разветвляется на артерии, артерии — на артериолы и затем на капилляры. Каждое разветвление сопровождается уменьшением диаметра отдельных сосудов и увеличением суммарной площади поперечного сечения всех сосудов данного класса. Самым узким отделом сосудистого русла является аорта, поэтому скорость кровотока в ней макси-

мальна и снижается в направлении от аорты к капиллярам. Суммарная площадь просвета капилляров в 500...600 раз превышает площадь поперечного сечения аорты, соответственно скорость кровотока в них в 500...600 раз меньше скорости в аорте. Значительное снижение скорости кровотока в капиллярах способствует улучшению обмена веществ между кровью и тканями, что является

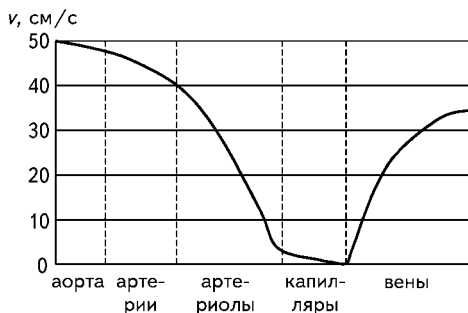


Рис. 8.1.6. Распределение линейной скорости кровотока в разных отделах сосудистого русла

еще одной причиной того, что обменные процессы в основном протекают в капиллярной сети. Капилляры объединяются в вены, суммарный просвет данного отдела кровеносного русла суживается по сравнению с капиллярной сетью, а линейная скорость кровотока возрастает. Распределение линейной скорости кровотока в разных частях сосудистой системы графически представлено на рис. 8.1.6.

Прежде чем перейти к рассмотрению кровяного давления, введем следующие понятия. Разность давлений на внутреннюю ( $p_v$ ) и наружную ( $p_n$ ) стенки сосуда называют *трансмуральным давлением*:

$$p_T = p_v - p_n. \quad (8.1.2)$$

Трансмуральное давление увеличивает или уменьшает диаметр кровеносных сосудов.

Под действием силы тяжести создается гидростатическое давление крови:

$$p_T = \rho gh, \quad (8.1.3)$$

где  $\rho$  — плотность крови;  $g$  — ускорение свободного падения;  $h$  — высота столба жидкости. Гидростатическое давление влияет на распределение крови в сосудистой системе человека, способствуя оттоку крови из верхней части и притоку в нижнюю часть тела вертикально стоящего человека. Таким образом, это давление оказывает влияние, хотя и незначительное на течение крови. На уровне сердца гидростатическая составляющая кровяного давления равна нулю. Поэтому измерение кровяного давления обычно производят в области плеча.

Основной движущей силой кровотока является кровяное давление, обусловленное превышением давления, вызванного рабо-

той сердца, над атмосферным давлением. Для отдельно взятого сосуда можно считать, что ток жидкости обеспечивается разностью давлений на входе и на выходе сосуда.

Распределение давления крови в сосудистой системе с некоторым приближением можно описать, воспользовавшись формулой Пуазейля:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta l} \Delta p = \frac{\Delta p}{X}, \quad (8.1.4)$$

откуда

$$X = \frac{8\eta l}{\pi R^4} \quad (8.1.5)$$

$X$  — гидравлическое сопротивление;  $R$  — радиус просвета сосуда;  $\eta$  — динамическая вязкость крови;  $l$  — длина участка сосуда;  $\Delta p$  — перепад давлений на этом участке.

Учитывая, что радиусы просветов аорты  $R_{\text{аор}}$ , артерий  $R_{\text{арт}}$ , артериол  $R_{\text{арл}}$  и капилляров  $R_{\text{кап}}$  относятся друг к другу как

$$R_{\text{аор}} : R_{\text{арт}} : R_{\text{арл}} : R_{\text{кап}} = 3000 : 500 : 7 : 1,$$

то, согласно формуле (8.1.5), минимальным гидравлическим сопротивлением обладает аорта, а максимальным — капилляры. Однако это утверждение справедливо только для отдельно взятых сосудов. Все сосуды данной части системы кровообращения включены в ток крови параллельно. Это позволяет вычислить их суммарное сопротивление по формуле:

$$X = \frac{1}{1/X_1 + 1/X_2 + 1/X_3 \dots}, \quad (8.1.6)$$

где  $X_1, X_2, X_3$  — гидравлические сопротивления каждого сосуда данного отдела системы кровообращения.

Чем больше сосудов данного типа встречается в организме, тем в большей степени суммарное сопротивление данного участка сосудистой системы уменьшается по сравнению с сопротивлением отдельно взятого сосуда. Благодаря огромному количеству капилляров, суммарное сопротивление капиллярной сети меньше суммарного сопротивления артериол и тем более аорты. Таким образом, наибольшим гидравлическим сопротивлением среди всех участков сосудистой системы обладает совокупность артериол (рис. 8.1.7). Изменение их просвета играет главную роль в регуляции давления крови.

Как следует из формулы Пуазейля (8.1.4), гидравлическое сопротивление участка сосудистого русла прямо пропорционально

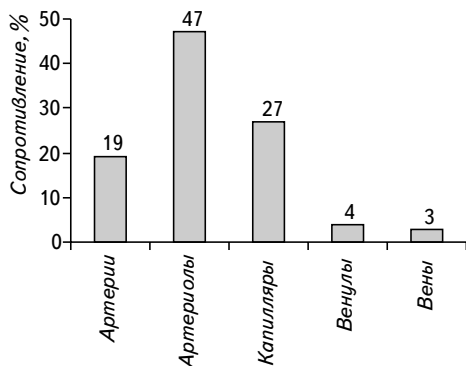


Рис. 8.1.7. Процентное соотношение гидравлического сопротивления в различных отделах сосудистого русла

падению давления на этом участке, то есть чем больше сопротивление, тем большую силу необходимо приложить для проталкивания крови по сосуду. Согласно экспериментальным данным, падение давления в крупных и средних артериях составляет 10 %, а в артериолах и капиллярах — 85 %. То есть 85 % энергии, сообщаемой крови при сокращении желудочка, расходуется на продвижение

крови по артериолам и капиллярам. На рис. 8.1.8 приведено распределение давления в разных частях сосудистой системы.

Согласно формуле Пуазейля (8.1.4), падение давления обратно пропорционально четвертой степени радиуса сосуда, то есть даже

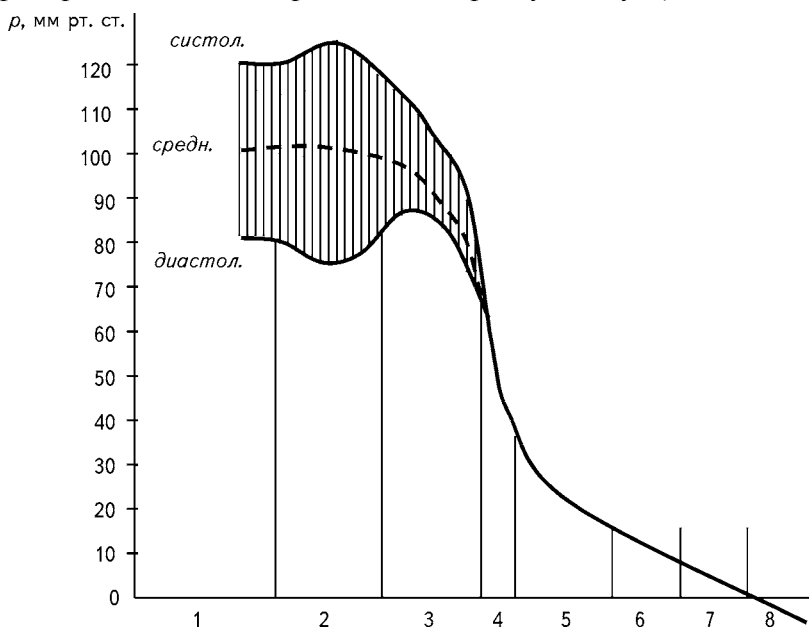


Рис. 8.1.8. Распределение давления (превышение над атмосферным) в разных частях сосудистой системы:

штриховкой обозначено колебание давления в систолу и диастолу, пунктиром — среднее давление; давление: 1 — в аорте; 2 — в крупных артериях; 3 — в мелких артериях; 4 — в артериолах; 5 — в капиллярах; 6 — в венулах; 7 — в венах; 8 — в полой вене (отрицательное значение давления объясняется тем, что давление здесь меньше атмосферного)



небольшое изменение радиуса сосуда может значительно отразиться на величине кровяного давления. Именно поэтому природные механизмы нервной и гуморальной регуляции кровяного давления, а также действие лекарственных препаратов, нормализующих давление, связаны с изменением просвета сосудов.

Следует отметить, что уравнение Пуазейля (8.1.4) справедливо 1) для жестких неветвящихся трубок с круглым поперечным сечением; 2) ламинарного течения; 3) гомогенных жидкостей; 4) однонаправленного потока. В кровеносной системе не одно из этих требований строго не выполняется. Во-первых, сосуды эластичны и ветвятся; во-вторых, в некоторых участках сосудистой системы наблюдается турбулентное течение крови; в-третьих, кровь не является гомогенной жидкостью; в-четвертых, иногда происходит кратковременный обратный (антероградный) кровоток, например, в аорте и периферических артериях во время диастолы. Каждый из этих факторов увеличивает гидравлическое сопротивление по сравнению с теоретическим, вычисленным из уравнения Пуазейля. Таким образом, описание кровотока требует учета всех вышеперечисленных факторов, что, однако, не всегда возможно.

## § 8.2. СКОРОСТЬ ОСЕДАНИЯ ЭРИТРОЦИТОВ

Плотность эритроцитов ( $1096 \text{ кг/м}^3$ ) больше плотности плазмы ( $1027 \text{ кг/м}^3$ ), что вызывает их оседание. Это явление может отражаться на механике течения крови и затруднять измерение вязкости крови.

Рассмотрим следующую модель. На твердую сферическую частицу, движущуюся в жидкости в поле силы тяжести, действуют следующие силы: сила тяжести  $\rho_{\text{ч}} Vg$ , выталкивающая сила (сила Архимеда)  $\rho_{\text{ж}} Vg$  и сила сопротивления (сила Стокса)  $6\pi\eta rv$ , где  $\rho_{\text{ч}}$  — плотность частицы;  $V$  — объем частицы;  $\rho_{\text{ж}}$  — плотность жидкости;  $\eta$  — вязкость жидкости;  $r$  — радиус частицы;  $v$  — скорость оседания частицы. При равномерном оседании частицы ( $v = v_0 = \text{const}$ ) равнодействующая этих сил равна нулю:

$$\rho_{\text{ч}} Vg - \rho_{\text{ж}} Vg - 6\pi\eta rv_0 = 0. \quad (8.2.1)$$

Подставив в выражение (8.2.1) формулу для объема сферы радиусом  $r$  ( $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ ), получаем скорость оседания сферической частицы:

$$v_0 = \frac{2}{9} \frac{r^2 g (\rho_{\text{ч}} - \rho_{\text{ж}})}{\eta}, \quad (8.2.2)$$

где  $\rho_{\text{ч}} > \rho_{\text{ж}}$ .

Частица, движущаяся в жидкости из состояния покоя, будет постепенно увеличивать скорость оседания (при этом сила Стокса возрастает) до тех пор, пока действие силы тяжести не будет скомпенсировано противоположно направленными силами Архимеда и Стокса. Начиная с этого момента, частица будет оседать с постоянной скоростью  $v_0$ . Приближенная зависимость скорости  $v$  частицы от времени имеет вид:

$$v = v_0 (1 - e^{-t/\tau}), \quad (8.2.3)$$

где  $\tau$  — постоянная времени процесса, которая прямо пропорциональна плотности частицы и квадрату ее радиуса и обратно пропорциональна вязкости жидкости:

$$\tau \sim \frac{\rho_{\text{ч}} r^2}{\eta}. \quad (8.2.4)$$

Если время наблюдения за процессом оседания частиц значительно превышает постоянную времени ( $t \gg \tau$ ), то  $v \rightarrow v_0$ . При  $t = 3\tau$  скорость оседания составляет 95 % от  $v_0$ . Для твердой сферической частицы, диаметр которой равен диаметру эритроцита (8 мкм),  $\tau \approx 5 \cdot 10^{-5}$  с, то есть частица достигнет скорости  $0,95v_0$  через  $1,5 \cdot 10^{-4}$  с.

Данная модель не совсем адекватно описывает процесс оседания эритроцитов, так как они, во-первых, не являются твердыми сферами, а во-вторых, имеют тенденцию к агрегации в виде монетных столбиков. Тем не менее полученные уравнения с некоторым приближением пригодны для описания оседания одиночных эритроцитов.

Скорость оседания эритроцитов (СОЭ) широко используется в медицинской практике в качестве диагностического теста. Для определения СОЭ по методу Вестергрена кровь с добавленным антикоагулянтом помещают в отградуированную колбу. СОЭ численно равна расстоянию, на которое смещается верхняя граница эритроцитов за первый час<sup>1</sup>. В норме эта величина составляет 3—6 мм у мужчин и 8—10 мм у женщин.

Некоторые патологии, такие, как воспалительные процессы, опухоли, сопровождающиеся разрушением тканей, повышают тенденцию эритроцитов к агрегации. Сила сопротивления, действующая

---

<sup>1</sup> СОЭ не является постоянной величиной, так как агрегация эритроцитов приводит к тому, что со временем скорость их оседания в верхней части трубки уменьшается, а в нижней — увеличивается.

ющей на составляющие его эритроциты, что вызывает увеличение СОЭ.

СОЭ зависит от белкового состава крови. Так, СОЭ снижается при увеличении содержания в плазме альбумина и повышается при увеличении концентрации глобулинов и особенно фибриногена. Например, при беременности перед родами содержание фибриногена возрастает в два раза, что вызывает увеличение СОЭ до значений 40—50 мм/час. О самом механизме повышения агрегации эритроцитов глобулинами нет единого мнения. Возможно, что глобулины снижают электрический заряд эритроцитов и тем самым уменьшают эффект электростатического отталкивания.

СОЭ также зависит от концентрации эритроцитов. Так, при значительном уменьшении гематокрита уменьшается вязкость крови, и, как следствие, возрастает СОЭ; при увеличении гематокрита наблюдается обратная картина. При некоторых заболеваниях (например серповидноклеточной анемии) изменяется форма эритроцитов, что снижает тенденцию эритроцитов к агрегации и уменьшает СОЭ. Многие стероидные гормоны (например, эстрогены, глюкокортикоиды) и лекарственные вещества (например салицилаты) повышают СОЭ.

### § 8.3. МОДЕЛЬ ФРАНКА. ПУЛЬСОВАЯ ВОЛНА

Во время систолы (сокращения сердца) кровь выбрасывается из левого желудочка в аорту и отходящие от нее крупные артерии. При этом часть кинетической энергии крови расходуется на растяжение эластичных стенок сосудов и запасание ее в виде потенциальной энергии упругой деформации. Во время диастолы (расслабления) желудочков аортальный клапан закрывается и приток крови от сердца в крупные сосуды прекращается. Растянутые стенки артерии при этом сокращаются, обеспечивая приток крови в капилляры во время диастолы.

Впервые идея о таком способе продвижения крови была выдвинута сельским священником Хейлсом<sup>1</sup> в 1733 году, а в 1899 — Франк создал свою гидродинамическую модель, описывающую временные изменения давления и объемной скорости кровотока в артериях.

В модели Франка предполагается, что все крупные сосуды артериальной части большого круга кровообращения объединены в одну камеру с эластичными стенками и пренебрежимо малым гид-

---

<sup>1</sup> Хейлс к тому же первым измерил кровяное давление.

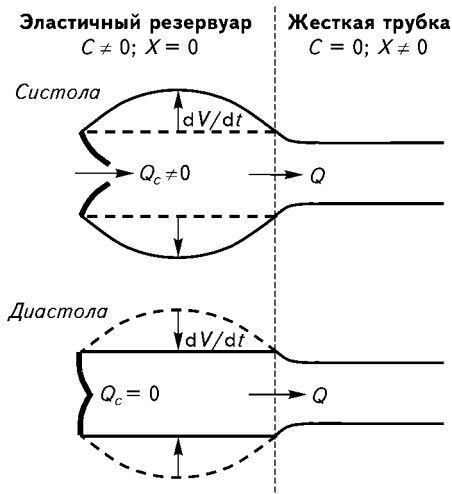


Рис. 8.3.1. Модель Франка

гидравлическим сопротивлением, а все мелкие сосуды — в жесткую трубку с постоянным гидравлическим сопротивлением.

Часть крови, притекающая из сердца в упругую камеру, остается в ней и растягивает ее, а другая часть вытекает в жесткую трубку (рис. 8.3.1). Тогда можно записать, что

$$Q_c = \frac{dV}{dt} + Q, \quad (8.3.1)$$

где  $Q_c$  — объемная скорость притока крови из сердца;  $Q$  — объемная скорость оттока крови в жесткую трубку;  $dV/dt$  — скорость изменения объема упругой камеры.

Изменение объема камеры пропорционально изменению давления в ней:

$$dV = C dp, \quad (8.3.2)$$

где  $C$  — эластичность камеры.

Объемная скорость кровотока через периферические сосуды, моделируемые жесткой трубкой, согласно уравнению Пуазейля (8.1.4), равна

$$Q = \frac{p - p_v}{X}, \quad (8.3.3)$$

где  $X$  — гидравлическое сопротивление жесткой трубки (общее сопротивление периферической части системы кровообращения);  $p$  — давление в упругой камере;  $p_v$  — венозное давление, которое может быть принято равным нулю (см. рис. 8.1.8).

Тогда

$$Q = \frac{p}{X}. \quad (8.3.4)$$

Подставим выражения (8.3.2) и (8.3.4) в уравнение (8.3.1):

$$Q_c = C \frac{dp}{dt} + \frac{p}{X} \quad (8.3.5)$$

и умножим его на  $dt$ :

$$Q_c dt = C dp + \frac{p}{X} dt. \quad (8.3.6)$$

Проинтегрируем данное уравнение в пределах времени, равному одному периоду пульса (от  $t_1 = 0$  до  $t_2 = T_n$ ), чему соответствуют одинаковые величины давления, равные минимальному диастолическому давлению (рис. 8.3.2):

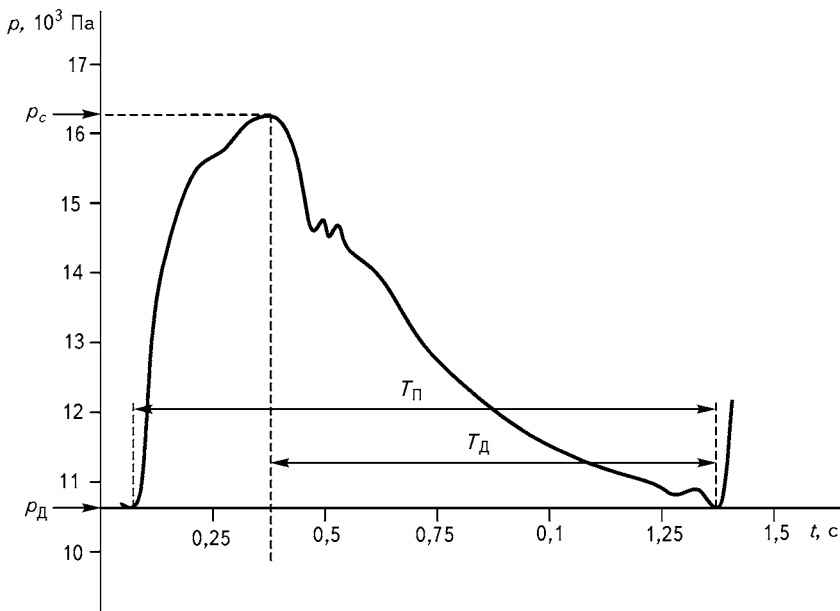


Рис. 8.3.2. Пульс сонной артерии

$$\int_0^{T_n} Q_c dt = C \int_{p_D}^{p_c} dp + \frac{1}{X} \int_0^{T_n} p dt. \quad (8.3.7)$$

Интеграл с равными пределами равен нулю:

$$C \int_{p_D}^{p_D} dp = 0,$$

тогда

$$\int_0^{T_n} Q_c dt = \frac{1}{X} \int_0^{T_n} p dt. \quad (8.3.8)$$

Интеграл  $\int_0^{T_n} p \, dt$  в правой части уравнения равен площади фигу-

ры, ограниченной кривой  $p(t)$  и осью  $t$  (рис. 8.3.2). Интеграл в левой части уравнения представляет собой *ударный объем крови* в большом круге кровообращения, то есть объем крови, выталкиваемый левым желудочком в аорту за одно сокращение. Этот объем может быть определен экспериментально. Зная значение интегралов, по формуле (8.3.8) можно найти величину общего гидравлического сопротивления периферической части системы кровообращения.

Во время диастолы в период  $T_d$  приток крови от сердца прекращается ( $Q_c = 0$ ), стенки артерий сжимаются (рис. 8.3.1) и выталкивают кровь в периферические сосуды (жесткую трубку). Для этой фазы уравнение (8.3.6) имеет простое аналитическое решение:

$$0 = C \, dp + \frac{p}{X} \, dt. \quad (8.3.9)$$

Разделим переменные

$$\frac{dp}{p} = -\frac{1}{CX} \, dt \quad (8.3.10)$$

и проинтегрируем в пределах от максимального систолического давления, чему соответствует момент времени  $t = 0$ , до некоторого произвольного значения давления  $p$ , чему соответствует момент времени  $t$ :

$$\begin{aligned} \int_{p_c}^p \frac{dp}{p} &= -\frac{1}{CX} \int_0^t dt; \\ \ln p|_{p_c}^p &= -\frac{t}{CX} \Big|_0^t; \\ \ln \frac{p}{p_c} &= -\frac{t}{CX}; \\ p &= p_c \exp \left( -\frac{t}{CX} \right). \end{aligned} \quad (8.3.11)$$

Таким образом, мы получили зависимость давления в упругой камере от времени в период диастолы. Используя формулу (8.3.4), можно получить временную зависимость объемной скорости тока крови в периферических сосудах для этой фазы сердечного цикла:

$$Q = Q_{\text{сист}} \exp\left(-\frac{t}{CX}\right), \quad (8.3.12)$$

где  $Q_{\text{сист}} = p_c/X$  — объемная скорость кровотока в конце систолы (в начале диастолы).

Для моделирования процессов кровообращения очень часто используются аналоговые электрические схемы. Дело в том, что каждой гидродинамической величине соответствует своя электрическая величина. В главе 5 уже упоминалась аналогия между формулой Пуазейля и законом Ома, из которых видно, что, подобно тому как перепад давлений на участке сосудистого русла вызывает ток крови, разность потенциалов вызывает электрический ток, а коэффициентами пропорциональности между этими величинами служат гидравлическое и электрическое сопротивления соответственно. Способность эластичных кровеносных сосудов к накоплению порций крови и дальнейшему ее выталкиванию аналогично зарядке и разрядке конденсатора, а инерция крови и вызываемая ею гидродинамическая индуктивность — инерции электронов и электрической индуктивности.

Таким образом процессы, описываемые моделью Франка, могут быть также смоделированы с помощью электрической схемы (рис. 8.3.3). Схема состоит из источника переменного напряжения  $U$  (аналога сердца), выпрямителя  $B$  (аналога сердечного клапана), конденсатора  $C$  (аналога эластичного резервуара), заряжающегося от источника напряжения и разряжающегося на резистор  $R$  (аналога жесткой трубки). Источник переменного напряжения создает колебания тока в цепи, а выпрямитель пропускает ток, текущий только в одном направлении.

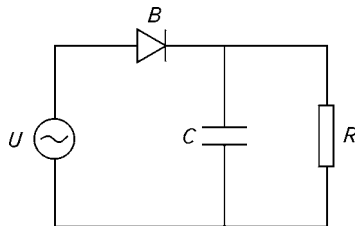


Рис. 8.3.3. Электрическая схема для модели Франка

Подобно ему, сердечный клапан пропускает кровь, вытекающую из желудочка в аорту, и не допускает обратного тока крови. Конденсатор сглаживает колебания электрического тока, протекающего через резистор, подобно тому как эластичные артерии сглаживают колебания давления в мелких сосудах.

В модели Франка предполагается, что в момент выталкивания крови из левого желудочка все крупные сосуды артериального русла большого круга кровообращения растягиваются одновременно, а затем во время диастолы так же одновременно сжимаются и выталкивают кровь в жесткие сосуды. На самом деле выталкивание крови из желудочка в первый момент сопровождается растяжением

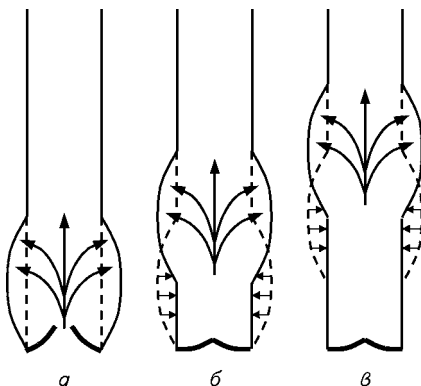


Рис. 8.3.4. Схема распространения пульсовой волны:

а — аортальный клапан открыт; б и в — аортальный клапан закрыт

только ближайшего к нему отдела аорты и возрастанием напряжения в ее стенках (рис. 8.3.4, а). По мере снижения скорости изгнания крови из сердца давление в растянутом участке начинает снижаться, а растянутые стенки стягиваются и возвращаются в положение равновесия, проталкивая при этом кровь дальше по руслу и вызывая растяжение следующего участка аорты (рис. 8.3.4, б). Этот процесс продолжается (рис. 8.3.4, в), постепенно затухая, до области концевых разветвлений артерий и артериол,

где пульсирующий поток постепенно сменяется непрерывным. Таким образом, по сосудам распространяются колебания давления, которые называются *пульсовой волной*. Чем в большей степени эластична стенка и чем больше вязкость крови, тем быстрее ослабевает пульсовая волна. Также ее ослаблению способствует сужение артерий и ветвление артериального дерева.

Пульсовая волна не является гармонической. Однако любое сложное колебание может быть разложено на некоторое количество составляющих (гармоник) и восстановлено затем путем их суммирования (рис. 8.3.5). Этот метод называется *анализом Фурье*.

Скорость распространения пульсовой волны определяется по следующей формуле:

$$v = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}, \quad (8.3.13)$$

где  $E$  — модуль упругости (модуль Юнга) стенки сосуда;  $h$  — толщина стенки сосуда;  $d$  — его внутренний диаметр;  $\rho$  — плотность крови.

Таким образом, чем больше модуль упругости сосуда, тем выше скорость распространения пульсовой волны в нем. Так, скорость пульсовой волны в аорте составляет 4...6 м/с, а в менее эластичных артериях мышечного типа (например в лучевой) — 8...12 м/с. В венах, которые обладают большой эластичностью, скорость пульсовой волны меньше: например, в полой вене — около 1 м/с. С возрастом эластичность сосудов уменьшается (коэффициент упругости возрастает в 2—3 раза) и, как следствие, увеличивается скорость распространения пульсовой волны. К такому же эффекту приво-



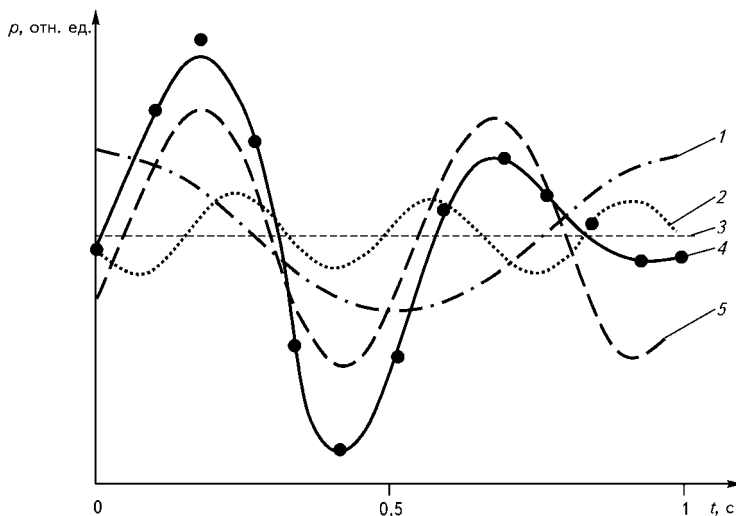


Рис. 8.3.5. Разложение импульса давления в бедренной артерии собаки на гармонические составляющие:

1, 3 и 5 — гармонические колебания с частотой 1, 2 и 3 Гц; 2 — постоянная составляющая; 4 — сумма гармоник (сплошная кривая) и экспериментальные значения давления (кружочки);  $p$  — давление в относительных единицах;  $t$  — время

дит повышение кровяного давления, так как при этом стенки сосудов находятся в растянутом состоянии, что уменьшает их способность к дальнейшему расширению. Упругие свойства сосудов могут также кратковременно изменяться под влиянием активности сосудодвигательных нервов или действия лекарственных препаратов. Формула (8.3.13) позволяет судить об упругих свойствах артерий с помощью относительно простого способа — измерения скорости распространения пульсовой волны.

Скорость распространения пульсовой волны (6...12 м/с) в 20—40 раз больше скорости кровотока (0,3...0,5 м/с). Так, пульсовая волна достигает артериол стопы за 0,2 с, в то время как частицы выброшенной желудочком крови за это же время достигают только нисходящей аорты. Помимо пульсовых волн (колебаний давления), по кровеносным сосудам распространяются звуковые волны со скоростью 1500 м/с.

## § 8.4. ПЕРЕНОС ВЕЩЕСТВ В КАПИЛЛЯРНОЙ СЕТИ

Основной функцией сердечно-сосудистой системы является доставка кислорода и питательных веществ в ткани организма и выведение продуктов обмена из него. Процессы обмена между

кровью и тканями в основном протекают в капиллярной сети. Транспорт веществ через капилляры, как правило, является пассивным. Обмен веществ через капиллярную стенку осуществляется двумя способами: диффузионным и конвективным.

**Диффузионный способ** обусловлен разностью концентраций веществ в плазме и межклеточной жидкости и определяется законом Фика. Скорость диффузии очень высока: за время прохождения крови через капилляры жидкость плазмы успевает 40 раз полностью обменяться с межклеточной жидкостью. При этом число молекул, вышедших из плазмы, приблизительно равно числу молекул, проникших в нее, то есть объем плазмы не изменяется. Через стенку капилляров легко проходят молекулы кислорода и углекислого газа, а также жирорастворимые молекулы, например этиловый спирт. Водорастворимые вещества (например, ионы  $\text{Na}^+$  и  $\text{Cl}^-$ , глюкоза) диффундируют только через заполненные водой поры, причем чем больше размер молекулы, тем ниже ее коэффициент проницаемости. Например, коэффициент проницаемости для глюкозы в 1,7, а коэффициент проницаемости для альбумина в 10 000 раз ниже, чем для воды. Последнее обстоятельство приводит к тому, что концентрация альбумина в плазме значительно выше его концентрации в межклеточной жидкости, что, как мы увидим в дальнейшем, играет важную роль в фильтрационно-реабсорбционных процессах. Помимо транспорта через поры, крупные молекулы проникают через стенку капилляра также путем пиноцитоза.

**Конвективным способом** называется перенос вещества вместе с жидкостью через капиллярные поры под действием градиента гидростатического давления. Различают *фильтрацию* (выход вещества из плазмы в межклеточное пространство) и *реабсорбцию* (поступление вещества в кровь). Согласно теории Старлинга, между этими двумя процессами существует динамическое равновесие. Выделяют четыре фактора, влияющих на фильтрационно-реабсорбционный процесс. Под действием гидростатического давления в капиллярах ( $p_{\text{ГК}}$ ) и онкотического давления<sup>1</sup> тканевой жидкости ( $p_{\text{от}}$ ) жидкость выходит из капилляров в ткани, а под действием гидростатического давления в тканевой жидкости ( $p_{\text{ГТ}}$ ) и онкотического давления плазмы ( $p_{\text{ок}}$ ) жидкость движется в обратном направлении. Тогда объемная скорость движения жидкости через стенки капилляров составит:

$$q = K(p_{\text{ГК}} + p_{\text{от}} - p_{\text{ГТ}} - p_{\text{ок}}), \quad (8.4.1)$$

или

$$q = K[(p_{\text{ГК}} - p_{\text{ГТ}}) - (p_{\text{ок}} - p_{\text{от}})], \quad (8.4.2)$$

<sup>1</sup> Онкотическим давлением называется коллоидно-осмотическое давление белков.

где  $K$  — коэффициент фильтрации (коэффициент проницаемости), определяемый вязкостью фильтрующейся жидкости, размерами пор и их количеством. При  $q > 0$  (разность гидростатических давлений крови и тканей превышает разность осмотических) происходит фильтрация; при  $q < 0$  — реабсорбция.

Стенки капилляров относительно свободно пропускают небольшие молекулы, что приводит к выравниванию их концентраций по обе стороны стенки капилляра, а следовательно, и осмотических давлений, созданных этими молекулами. С другой стороны, как уже указывалось выше, крупные белковые молекулы почти не проникают через стенку капилляра<sup>1</sup> и выравнивание их концентраций никогда не происходит. Транскапиллярный перенос жидкости вызывает появление осмотического давления белков (онкотического давления).

Считается, что онкотические давления плазмы и тканевой жидкости, а также гидростатическое давление тканевой жидкости не изменяются вдоль капилляра от артериального конца к венозному и равны соответственно (для скелетной мышцы):  $p_{ок} = 25$  мм рт. ст.;  $p_{от} = 5$  мм рт. ст.;  $p_{гт} = 3$  мм рт. ст., а гидростатическое давление крови ( $p_{гк}$ ) равномерно снижается от величины 32,5 мм рт. ст. (артериальный конец) до 15 мм рт. ст. (венозный конец). Из рис. 8.4.1. видно, что по мере продвижения крови по капилляру скорость фильтрации постепенно снижается до тех пор, пока разность осмотических давлений не превысит разность гидростатических. С этого момента начинается процесс реабсорбции. Точка, в которой фильтрация и реабсорбция уравниваются друг друга, называется точкой *фильтрационно-реабсорбционного равновесия*.

На артериальном конце капилляра эффективное фильтрационное давление составляет:

$$p_{эф. а} = (p_{гк} - p_{гт}) - (p_{ок} - p_{от}) = (32,5 - 3) - (25 - 5) = 9,5 \text{ мм рт. ст.},$$

а на венозном конце эффективное реабсорбционное давление

$$p_{эф. в} = (p_{ок} - p_{от}) - (p_{гк} - p_{гт}) = (25 - 5) - (15 - 3) = 8 \text{ мм рт. ст.}$$

Таким образом, фильтрация немного превышает реабсорбцию. Под действием эффективного фильтрационного давления 0,5 %

---

<sup>1</sup> Проницаемость капиллярных стенок для белков неодинакова и зависит от ультраструктуры капилляра, различной в разных органах организма. Например, проницаемость капилляров печени в 6 раз выше проницаемости капилляров кожи, а капилляры костного мозга, синусов печени и селезенки имеют отверстия, через которые могут проходить не только крупные белковые молекулы, но и клетки крови. Белки, проникшие из плазмы в межклеточное пространство, удаляются системой лимфатических сосудов.

объема плазмы переходит в межклеточную жидкость, а под действием более низкого эффективного реабсорбционного давления лишь 90 % этого объема реабсорбируется в венозном конце капилляра. Оставшиеся 10 % жидкости удаляется системой лимфатических сосудов (рис. 8.4.1). Средняя скорость фильтрации во всех

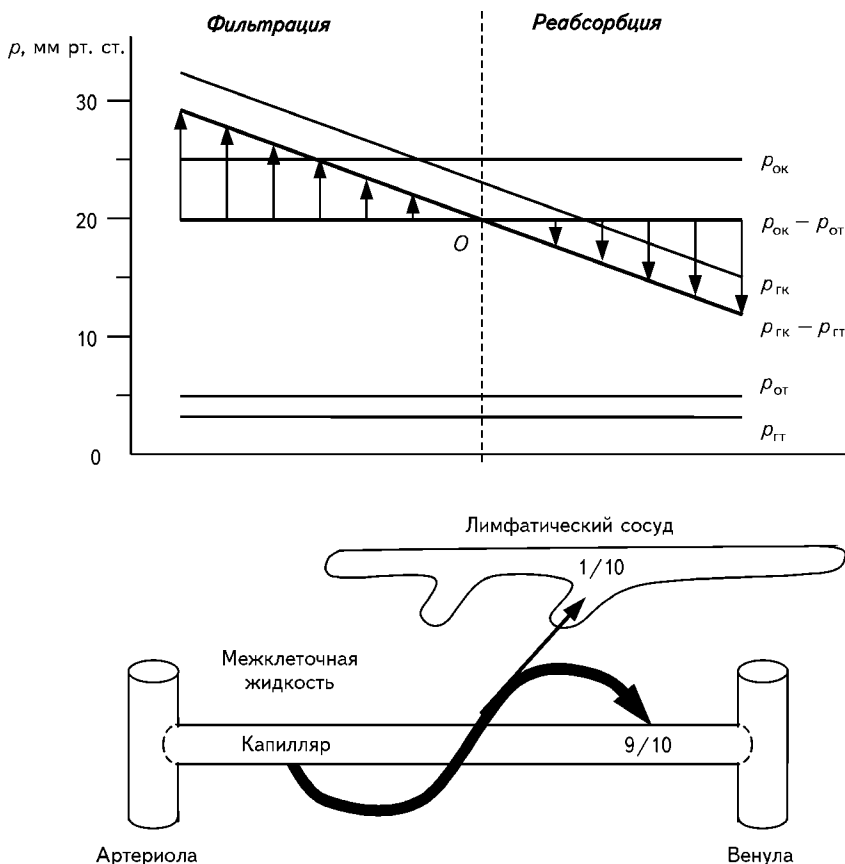


Рис. 8.4.1. Схема обмена жидкостью между кровеносным капилляром и межклеточным пространством в скелетной мышце:

при  $(\rho_{гк} - \rho_{гт}) > (\rho_{ок} - \rho_{от})$  происходит фильтрация; при  $(\rho_{гк} - \rho_{гт}) < (\rho_{ок} - \rho_{от})$  — реабсорбция; точка  $O$  соответствует фильтрационно-реабсорбционному равновесию. Дроби означают относительное количество жидкости, реабсорбируемой капилляром и удаляемой лимфатическим сосудом

капиллярах организма составляет около 14 мл/мин, или 20 л жидкости в сутки; скорость реабсорбции — 12,5 мл/мин, или 18 л в сутки; по лимфатическим сосудам оттекает 2 л в сутки.

Фильтрационно-реабсорбционное равновесие зависит от четырех параметров:  $\rho_{гк}$ ,  $\rho_{гт}$ ,  $\rho_{ок}$  и  $\rho_{от}$  (см. рис. 8.4.2). Изменение любого

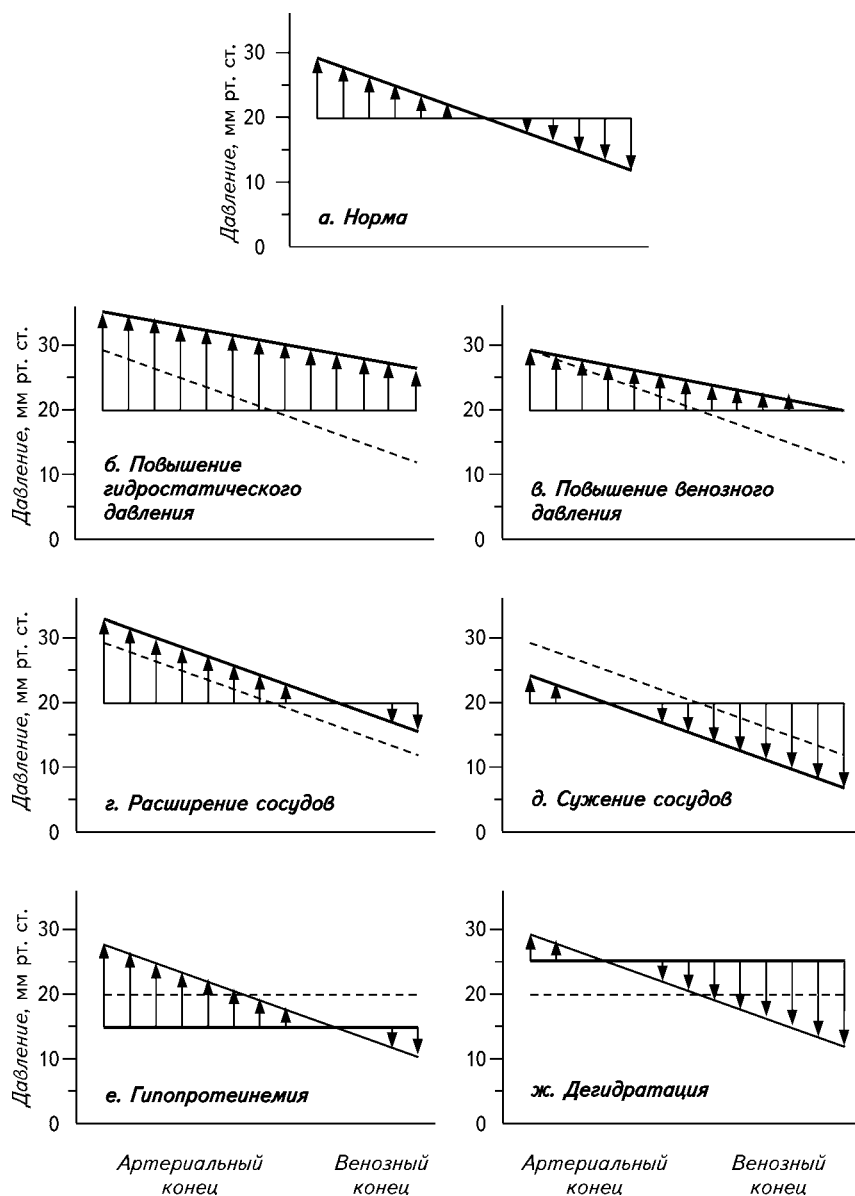


Рис. 8.4.2. Схема фильтрации и реабсорбции в капиллярах в норме и различных патологических условиях.

В зависимости от соотношения величин ( $p_{\text{гк}} - p_{\text{гт}}$ ) и ( $p_{\text{ок}} - p_{\text{от}}$ ) фильтрационно-реабсорбционное равновесие в капиллярах смещается в сторону повышения либо фильтрации (б, в, г, е), либо реабсорбции (д, ж)

из них сдвигает положение равновесия. Так, сдвиг фильтрационно-реабсорбционного равновесия в сторону увеличения фильтрации и уменьшения реабсорбции происходит при возрастании гидростатического давления в капилляре (например при общем увеличении кровяного давления) (рис. 8.4.2, б); повышении венозного давления (например при сердечной недостаточности), (рис. 8.4.2, в); расширении сосудов (например при интенсивной мышечной работе, перегреве тела, приеме сосудорасширяющих препаратов, общем увеличении объема крови вследствие вливаний различных растворов) (рис. 8.4.2, г); снижении онкотического давления плазмы (например при неполноценном питании, недостаточном производстве белков при заболеваниях печени, при нефрозе, характеризующемся поражением почечных канальцев, в результате чего происходит выделение белков с мочой) (рис. 8.4.2, е); повышении онкотического давления межклеточной жидкости (например при накоплении в ней осмотически активных веществ).

Все эти факторы могут быть причиной избыточного накопления жидкости в межклеточном веществе и приводить к образованию интерстициального отека. Этому препятствует, во-первых, малая растяжимость интерстициального пространства, а во-вторых, способность лимфатических сосудов быстрее удалять межклеточную жидкость при ее излишнем накоплении (при этом выводятся белки, что снижает онкотическое давление плазмы и усиливает процессы реабсорбции).

Наоборот, сдвиг равновесия в сторону увеличения реабсорбции и уменьшения фильтрации происходит при сужении прекапиллярных сосудов (вазоконстрикция), в результате чего давление в капилляре снижается (рис. 8.4.2, д); дегидратации, приводящей к увеличению онкотического давления в плазме (рис. 8.4.2, ж); уменьшении онкотического давления межклеточной жидкости.

Помимо давления, на фильтрационно-реабсорбционное равновесие влияет проницаемость капиллярной стенки для белков. Например, значительное увеличение проницаемости вызывает действие кининов, гистамина и других веществ, выделяющихся при воспалении, аллергии, ожогах, ранениях. Все эти вещества вызывают увеличение радиуса транскапиллярных пор. В результате происходит уменьшение концентрации белковых молекул в плазме и повышение ее в межклеточной жидкости. Оба эти фактора сдвигают равновесие в сторону фильтрации и вызывают отеки тканей.

При нормальных физиологических значениях радиусов транскапиллярных пор объемная скорость течения крови по капилляру значительно превышает объемную скорость кровотока через капиллярную стенку. В этих условиях обосновано предположение о линейном характере изменения гидростатического давления в ка-

пилляре (рис. 8.4.1). На самом деле при строгом рассмотрении фильтрационно-реабсорбционных процессов видно, что градиент гидростатического давления непостоянен. Так, фильтрация жидкости с объемной скоростью  $q$  сопровождается уменьшением объемной скорости  $Q$  кровотока по капилляру, а реабсорбция, наоборот, — увеличением. Изменение  $Q$  вызывает нелинейное пространственное изменение гидростатического давления, которое, в свою очередь, определяет величину  $q$ .

Для вычисления зависимости  $p(x)$  введем следующие предположения: капилляр представляет собой жесткую трубку с порами одинакового радиуса и постоянной плотностью распределения; пульсация кровотока отсутствует.

Уменьшение объемной скорости кровотока по капилляру на длине  $dx$  равна объемной скорости течения крови через поры:

$$-\frac{dQ}{dx} = q, \quad (8.4.3)$$

где  $Q$  — объемная скорость кровотока вдоль капилляра,  $[Q] = \text{м}^3/\text{с}$ ;  $q$  — объемная скорость кровотока через все поры капилляра, рас-

положенные на единице его длины,  $[q] = \frac{\text{м}^3}{\text{с} \cdot \text{м}} = \frac{\text{м}^2}{\text{с}}$ .

Сделанные выше допущения позволяют воспользоваться уравнением Пуазейля для описания скоростей кровотока.

Скорость кровотока в капилляре:

$$Q = -\frac{1}{X_{\text{с}}} \cdot \frac{dp}{dx}, \quad (8.4.4)$$

где  $p = (p_{\text{гк}} - p_{\text{гт}})$  — результирующее гидростатическое давление;

$X_{\text{с}} = \frac{8\eta}{\pi R^4}$  — удельное гидравлическое сопротивление единицы длины капилляра;  $\eta$  — коэффициент вязкости крови (предполагается постоянным в данных условиях);  $R$  — радиус капилляра.

Для определения величины  $q$  требуется знать гидравлическое сопротивление транскапиллярных пор. Гидравлическое сопротивление одной поры составляет:

$$X'_{\text{п}} = \frac{8\eta l}{\pi r^4}, \quad (8.4.5)$$

где  $l$  — толщина стенки капилляра;  $r$  — радиус поры (рис. 8.4.3).

Так как поры «подсоединены» друг к другу параллельно, то, согласно формуле (8.1.6), можно записать:

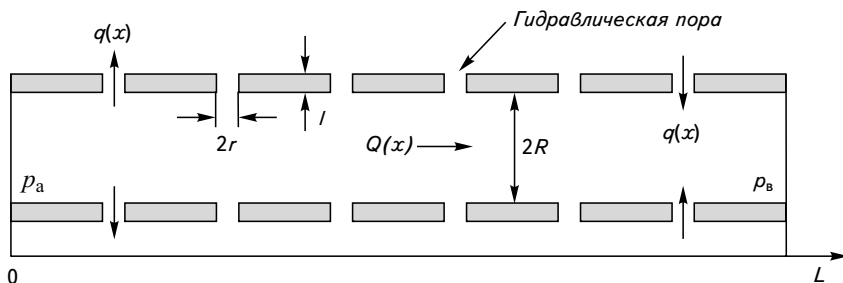


Рис. 8.4.3. Модель капилляра

$$\frac{1}{X_{\text{п. общ}}} = nS \frac{1}{X'_{\text{п}}},$$

где  $S$  — площадь поверхности стенки капилляра длиной  $L$ ;  $n$  — плотность расположения пор (количество пор на единице площади поверхности капилляра). Тогда

$$X_{\text{п. общ}} = \frac{X'_{\text{п}}}{nS}, \quad (8.4.6)$$

где

$$S = 2\pi RL, \quad (8.4.7)$$

Подставив выражения (8.4.5) и (8.4.7) в формулу (8.4.6), получаем:

$$X_{\text{п. общ}} = \frac{4\eta l}{\pi^2 n r^4 RL}. \quad (8.4.8)$$

Тогда гидравлическое сопротивление всех пор на поверхности капилляра единичной длины составит:

$$X_{\text{п}} = \frac{4\eta l}{\pi^2 n r^4 R}. \quad (8.4.9)$$

Скорость транкапиллярного кровотока равна

$$q = \frac{p - p_o}{X_{\text{п}}}, \quad (8.4.10)$$

где  $p_o = (p_{\text{ок}} - p_{\text{от}})$  — результирующее онкотическое давление.

Продифференцировав уравнение (8.4.4) по  $x$ , приравняв полученное формулам (8.4.3) и (8.4.10) и введя обозначение



$$\lambda = \sqrt{\frac{X_{\Pi}}{X_{\kappa}}} = \frac{R^2}{r^2} \sqrt{\frac{l}{2\pi NR}}, \quad (8.4.11)$$

получаем линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью:

$$\frac{d^2 p}{dx^2} - \frac{p}{\lambda^2} = -\frac{p_0}{\lambda^2}. \quad (8.4.12)$$

Общее решение данного уравнения имеет вид:

$$p = C_1 e^{x/\lambda} + C_2 e^{-x/\lambda} + p_0. \quad (8.4.13)$$

Константы  $C_1$  и  $C_2$  можно определить из граничных условий: в начале капилляра ( $x = 0$ ) гидростатическое давление равно артериальному ( $p = p_a$ ), а в конце ( $x = L$ ) — венозному ( $p = p_b$ ).

Распределение гидростатического давления и связанной с ним скорости кровотока в капилляре для пор различного радиуса приведено на рис. 8.4.4. Как видно из рисунка, при малых величинах радиусов пор зависимость  $p(x)$  близка к линейной (сравните с рис. 8.4.1), а объемная скорость кровотока постоянна. Наоборот, при больших радиусах пор зависимости  $p(x)$  и  $Q(x)$  сильно нелинейны, увеличивается также область фильтрационно-реабсорбционного равновесия.

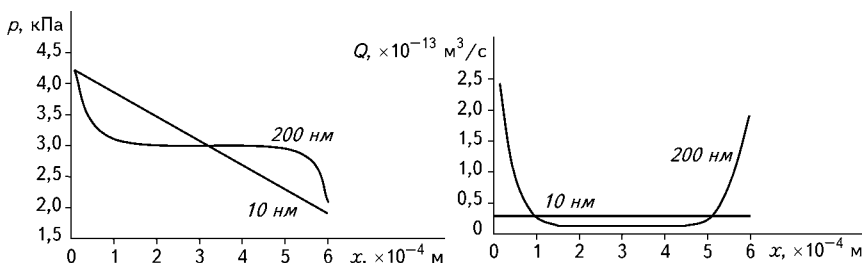


Рис. 8.4.4. Распределение гидростатического давления и скорости кровотока в капилляре для пор радиусом 10 и 200 нм (расчетные данные):

$p_a = 32,5$  мм рт. ст.;  $p_b = 14$  мм рт. ст.;  $p_0 = 23$  мм рт. ст.;  $r = 3$  мкм;  $\eta = 1$  мПа·с;  $l = 0,6$  мкм;  $n = 1,5 \cdot 10^{12}$  м<sup>-2</sup>.

Данная модель позволяет рассчитать функции  $p(x)$ ,  $Q(x)$  и  $q(x)$  при различных значениях гидростатических, онкотических давлений и радиусов пор, указать направление фильтрационно-реабсорбционных процессов, количественно изучить механизмы формирования ряда патологических состояний, в частности отеков тканей.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 8.1.** Минутный объем крови в покое составляет  $Q_1 = 5$  л/мин, а при интенсивной физической работе может возрасти до  $Q_2 = 25$  л/мин. Определите тип течения крови в аорте для этих двух случаев. Диаметр аорты  $D = 2$  см, вязкость крови  $\eta = 5$  мПа·с, плотность  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup>, критическое значение числа Рейнольдса  $Re_{кр} = 2000$ .

**Решение.** Для определения типа течения крови вычислим значение числа Рейнольдса для каждого случая

$$Re = \frac{Dv\rho}{\eta}. \quad (8.1)$$

Линейная скорость  $v$  связана с объемной  $Q$  следующим образом:

$$Q = vS = v \frac{\pi D^2}{4}, \quad (8.2)$$

где  $S = \frac{\pi D^2}{4}$  — площадь сечения аорты диаметром  $D$ .

Выразим линейную скорость  $v$  из уравнения (8.2) и подставим в формулу (8.1):

$$Re = \frac{4\rho Q}{\pi\eta D}.$$

Для вычислений переведем минутный объем крови (объемную скорость кровотока) в единицы СИ:

$$Q_1 = 5 \text{ л/мин} = 8,3 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}; \quad Q_2 = 25 \text{ л/мин} = 41,7 \cdot 10^{-5} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Подставив численные данные, получаем значение числа Рейнольдса в покое:

$$Re_{\text{покой}} = \frac{4 \cdot 1050 \cdot 8,3 \cdot 10^{-5}}{\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,02} = 1110$$

и при физической нагрузке

$$Re_{\text{нагр}} = \frac{4 \cdot 1050 \cdot 41,7 \cdot 10^{-5}}{\pi \cdot 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0,02} = 5578.$$

Таким образом, в покое течение крови по аорте ламинарное ( $Re < Re_{кр}$ ), а при интенсивной физической нагрузке может перейти в турбулентное ( $Re > Re_{кр}$ ).

**Задача 8.2.** Вычислите отношение  $X_a/X_k$  суммарного гидравлического сопротивления артериол и капилляров, если средняя длина артериолы составляет  $l_a = 1$  см, радиус  $R_a = 15$  мкм, общее количество этих сосудов

в организме  $N_a = 10^8$ , для капилляров указанные величины равны соответственно  $l_k = 1$  мм,  $R_k = 3$  мкм и  $N_k = 10^{10}$ . Сравните полученный ответ с отношением сопротивлений  $X_{0a}/X_{0k}$  единичной артериолы и единичного капилляра.

**Решение.** Гидравлическое сопротивление одного сосуда равно

$$X_0 = \frac{8\eta l}{\pi R^4}.$$

При параллельном соединении  $N$  одинаковых сосудов их общее сопротивление составляет:

$$\frac{1}{X} = n \frac{1}{X_0};$$

или

$$X = \frac{X_0}{N} = \frac{8\eta l}{\pi N R^4}.$$

Тогда отношение суммарных гидравлических сопротивлений артериол и капилляров равно

$$\frac{X_a}{X_k} = \frac{N_k l_a}{N_a l_k} \left( \frac{R_k}{R_a} \right)^4.$$

Подставим численные данные:

$$\frac{X_a}{X_k} = \frac{10^{10} \cdot 10^{-2}}{10^8 \cdot 10^{-3}} \left( \frac{3 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-6}} \right)^4 = 1,6.$$

Отношение гидравлических сопротивлений единичных сосудов равно

$$\frac{X_{0a}}{X_{0k}} = \frac{l_a}{l_k} \left( \frac{R_k}{R_a} \right)^4 = \frac{10^{-2}}{10^{-3}} \left( \frac{3 \cdot 10^{-6}}{15 \cdot 10^{-6}} \right)^4 = 0,016 = \frac{1}{62,5}.$$

Таким образом, суммарное гидравлическое сопротивление артериол в 1,6 раза превышает суммарное сопротивление капиллярной сети, в то время как сопротивление одной артериолы почти в 63 раза меньше сопротивления одного капилляра.

**Задача 8.3.** Исследования показали, что в результате отложений холестерина в аорте пациента толщина ее стенки увеличилась в 1,5 раза, внутренний диаметр уменьшился на 25 %, а скорость распространения пульсовой волны возросла в 1,9 раза. Как изменился при этом модуль упругости стенки по отношению к норме?

**Решение.** Скорость распространения пульсовой волны определяется по формуле:

$$v = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}},$$

откуда можно выразить модуль упругости

$$E = \frac{v^2 \rho d}{h}.$$

У данного пациента толщина  $h$  аорты, ее внутренний диаметр  $d$  и скорость  $v$  распространения пульсовой волны в норме и при патологии соотносятся следующим образом:

$$h_n = 1,5h_n; \quad d_n = 0,75d_n; \quad v_n = 1,9v_n.$$

Тогда отношение коэффициентов упругости в норме и при патологии составит:

$$\frac{E_n}{E_n} = \frac{v_n d_n h_n}{v_n d_n h_n} = \frac{(1,9v_n)^2 \cdot 0,75d_n h_n}{v_n d_n \cdot 1,5h_n} = 1,8.$$

Таким образом, в результате развития атеросклероза, коэффициент упругости аорты увеличился в 1,8 раза.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**8.1.** Вычислите вязкость крови  $\eta$  при нормальном гематокрите ( $c = 45\%$ ), если вязкость плазмы составляет  $\eta_0 = 2,0$  мПа·с.

**8.2.** Вычислите максимальный минутный объем  $Q_{\max}$  крови, при котором течение крови в аорте остается ламинарным. Диаметр аорты  $d = 2$  см, вязкость крови  $\eta = 5$  мПа·с, плотность  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup>, критическое значение числа Рейнольдса  $Re_{\text{кр}} = 2000$ .

**8.3.** Средняя скорость кровотока в аорте составляет  $v_{\text{аор}} = 0,45$  м/с, а в капиллярах —  $v_{\text{кап}} = 0,5$  мм/с. Во сколько раз площадь поперечного сечения аорты меньше суммы поперечных сечений капилляров?

**8.4.** Вычислите гидравлическое сопротивление  $X$  аорты, если ее диаметр составляет  $D = 2,4$  см, длина  $l = 40$  см, вязкость крови  $\eta = 5$  мПа·с.

**8.5.** Вычислите скорость  $v$  оседания единичных эритроцитов, считая их сферическими частицами диаметром  $d = 7$  мкм. Вязкость плазмы составляет  $\eta = 2,2$  мПа·с, плотность эритроцитов  $\rho_{\text{эп}} = 1080$  кг/м<sup>3</sup>, плотность плазмы  $\rho_{\text{пл}} = 1027$  кг/м<sup>3</sup>.

**8.6.** В результате лабораторного измерения СОЭ оказалось равным  $v = 10$  мм/час. Используя исходные данные задачи 8.5, вычислите среднее число  $N$  эритроцитов в агрегате, если средний объем единичного эритроцита равен  $V_0 = 100$  мкм<sup>3</sup>.

**8.7.** Скорость распространения пульсовой волны по артерии составляет  $v = 10$  м/с. Определите модуль упругости  $E$  артерии, если толщина ее стенки  $h = 0,7$  мм, внутренний диаметр  $d = 8$  мм, плотность крови  $\rho = 1050$  кг/м<sup>3</sup>.

## ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**8.1.** Вязкость крови:

- а) в мелких сосудах больше, чем в крупных;
- б) в мелких сосудах меньше, чем в крупных;
- в) постоянна во всех отделах сосудистого русла.

**8.2.** С увеличением гематокрита вязкость крови:

- а) возрастает;
- б) убывает;
- в) не изменяется.

**8.3.** В каких сосудах больше вероятность возникновения турбулентного течения?

- а) в крупных;
- б) мелких;
- в) возникновение турбулентности не зависит от диаметра сосуда.

**8.4.** Течение крови по сосудам является:

- а) всегда ламинарным;
- б) всегда турбулентным;
- в) преимущественно ламинарным и лишь в некоторых случаях турбулентным;
- г) преимущественно турбулентным и лишь в некоторых случаях ламинарным.

**8.5.** В каком отделе сосудистого русла линейная скорость кровотока минимальна?

- а) в аорте;
- б) артериях;
- в) артериолах;
- г) капиллярах;
- д) венах.

**8.6.** Основной движущей силой кровотока является:

- а) статическое давление;
- б) трансмуральное;
- в) гидростатическое;
- г) кровяное, обусловленное превышением давления, вызванного работой сердца, над атмосферным давлением;
- д) сила тяжести.

**8.7.** Какой отдел сосудистого русла обладает наибольшим гидравлическим сопротивлением?

- а) аорта;
- б) артерии;
- в) артериолы;
- г) капилляры;
- д) вены.

**8.8.** Увеличение тенденции эритроцитов к агрегации вызывает:

- а) возрастание  $COЭ$ ;
- б) снижение  $COЭ$ ;
- в) не отражается на  $COЭ$ .

**8.9.** Временная зависимость диастолического давления, вычисленная в модели Франка, имеет вид:

- а)  $p = p_c (t + XC)$ ;
- б)  $p = p_c + CXt$ ;
- в)  $p = p_c \exp\left(-\frac{t}{CX}\right)$ ;
- г)  $p = p_c + \frac{t}{XC}$ ;
- д)  $p = p_c \ln \frac{t}{XC}$ .

**8.10.** Эластичность кровеносных сосудов имеет следующий электрический эквивалент:

- а) электрический потенциал;      г) электрическая емкость;
- б) электрическое сопротивление;    д) электрический ток.
- в) индуктивность;

**8.11.** Скорость распространения пульсовой волны определяется по следующей формуле:

$$\text{а) } v = \sqrt{\frac{Eh}{\rho d}}; \quad \text{г) } v = \sqrt{\frac{1}{Ed}};$$

$$\text{б) } v = \frac{\rho gh}{\eta}; \quad \text{д) } v = \frac{\rho h}{E\eta}.$$

$$\text{в) } v = \left( \frac{E}{\rho d} \right)^2;$$

**8.12.** Пульсовой волной называются периодические колебания:

- а) скорости распространения частиц;
- б) линейной скорости кровотока;
- в) объемной скорости кровотока;
- г) статического давления;
- д) кровяного давления, то есть распространяющиеся вдоль кровеносных сосудов.

**8.13.** Скорости распространения частиц крови ( $v_k$ ), пульсовой волны ( $v_n$ ) и звуковой волны ( $v_3$ ) в крови соотносятся следующим образом:

- а)  $v_n < v_k < v_3$ ;      г)  $v_n < v_3 < v_k$ ;
- б)  $v_k < v_n < v_3$ ;      д)  $v_3 < v_k < v_n$ .
- в)  $v_3 < v_n < v_k$ ;

**8.14.** Фильтрации крови способствуют:

- а) гидростатическое давление в капиллярах и онкотическое давление плазмы;
- б) гидростатическое давление в капиллярах и онкотическое давление тканевой жидкости;
- в) гидростатическое давление в тканевой жидкости и онкотическое давление плазмы;
- г) гидростатическое давление в тканевой жидкости и онкотическое давление тканевой жидкости.

**8.15.** В нормальных физиологических условиях в капиллярной сети:

- а) фильтрация немного превосходит реабсорбцию;
- б) реабсорбция немного превосходит фильтрацию;
- в) реабсорбция полностью компенсирует фильтрацию.

# ЭЛЕКТРОМАГНЕТИЗМ

Наиболее распространенные явления, с которыми приходится сталкиваться человеку, связаны с электромагнитным взаимодействием. Такое взаимодействие рассматривается в разделе физики, называемом *электродинамикой*.

Целый ряд явлений, на первый взгляд не имеющих отношения к электромагнетизму, например: упругость, силы трения, работа различных органов чувств животных и человека, объясняется электромагнитным взаимодействием. Особую роль это взаимодействие играет в различных биофизических и биохимических процессах, которые невозможно изучить, не имея фундаментальных представлений о законах электродинамики. Получить основательные знания в области взаимодействия химических веществ с живыми организмами можно только при глубоком изучении электромагнетизма.

## § 9.1. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

*Электростатикой* называется раздел электродинамики, в котором рассматриваются свойства и взаимодействие неподвижных в инерциальной системе отсчета электрически заряженных тел или частиц.

*Электрический заряд* равен целому числу элементарных зарядов, носителями которых являются отрицательно заряженные частицы — электроны и положительно заряженные — протоны. Элементарные заряды протонов и электронов равны по модулю, то есть  $|q_p| = |q_e| = e = 1,602 \cdot 10^{-19}$  Кл. Заряд в СИ измеряется в кулонах (Кл). 1 кулон = 1 ампер-секунда [А · с].

В целом физические объекты (тела) электрически нейтральны, что является следствием закона сохранения заряда, который можно сформулировать следующим образом: *в изолированной системе суммарный электрический заряд равен нулю*, то есть

$$\sum q_i = 0. \quad (9.1.1)$$

Если электрическая нейтральность тела нарушена, то оно является наэлектризованным. Такое тело само по себе уже не может быть изолированным ни при каких условиях. Для электризации тела необходимо, чтобы на нем был создан избыток (недостаток) электрических зарядов того или другого знака. Электрические заряды различного знака притягиваются, а одноименные — отталкиваются.

Сила взаимодействия между двумя *точечными зарядами*, то есть зарядами, линейные размеры которых намного меньше расстояния между ними, определяется *законом Кулона*:

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2 \vec{r}_{12}}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r_{12}^3}; \quad (9.1.2)$$

или в скалярной форме

$$|\vec{F}_{12}| = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon r_{12}^2}, \quad (9.1.3)$$

где  $q_1$  и  $q_2$  — взаимодействующие заряды;  $\vec{r}_{12}$  — радиус-вектор, проведенный от заряда 1 к заряду 2;  $\vec{F}_{12}$  — сила, действующая со стороны заряда  $q_1$  на заряд  $q_2$ ;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$  Ф/м;  $\epsilon$  — *относительная диэлектрическая проницаемость* среды, показывающая, во сколько раз в данной среде сила взаимодействия между зарядами уменьшается по сравнению с силой взаимодействия в вакууме. Произведение

$$\epsilon_0 \epsilon = \epsilon_a, \quad (9.1.4)$$

называется *абсолютной диэлектрической проницаемостью среды*.

**Силовые характеристики электрического поля.** В пространстве, окружающем электрические заряды, существует материальная среда, называемая *электрическим полем*, посредством которого осуществляется взаимодействие зарядов. Количественной силовой характеристикой электрического поля является его *напряженность*, которая определяется в каждой точке пространства как сила, действующая на единичный положительный точечный заряд:

$$\vec{E}_{(x,y,z)} = \frac{\vec{F}_{(x,y,z)}}{q}. \quad (9.1.5)$$

Любой заряд создает вокруг себя электрическое поле, а любой заряд, помещенный в электрическое поле, испытывает действие



электрического поля, и сам изменяет его. Предполагается, что точечный заряд  $q$  достаточно мал, не участвует в создании электрического поля и не искажает его. Такой заряд называют *пробным*.

Из формул (9.1.5) и (9.1.2) следует, что напряженность поля, создаваемого точечным зарядом  $q$ , равна

$$\vec{E} = \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}, \quad (9.1.6)$$

или в скалярной форме

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}. \quad (9.1.7)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, приведенный из заряда  $q$  в исследуемую точку поля

Напряженность поля в СИ измеряется в вольтах на метр (В/м). Для графического изображения электростатических полей используется понятие силовых линий поля. *Силовыми линиями* электрического поля называются кривые, касательные к которым в любой точке совпадают с направлением вектора напряженности  $\vec{E}$  в этой точке. Густота линий выбирается так, чтобы количество линий, пронизывающих единичную, перпендикулярную им площадку, было численно равно вектору  $\vec{E}$ . За положительное направление силовой линии принято считать направление вектора  $\vec{E}$ . Таким образом, силовые линии выходят из положительных зарядов и входят в отрицательные (рис. 9.1.1). Линии электрического поля нигде, кроме зарядов, не начинаются и не заканчиваются.

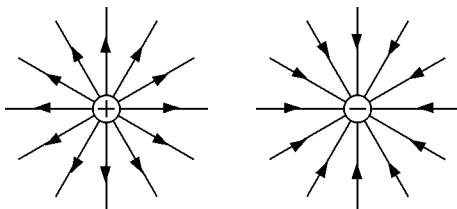


Рис. 9.1.1. Линии электрического поля положительного и отрицательного зарядов

Согласно принципу суперпозиции электрических полей, *напряженность электрического поля системы неподвижных точечных зарядов  $q_1, q_2, \dots, q_n$  равна векторной сумме напряженностей, создаваемых в данной точке каждым из этих зарядов в отдельности*, то есть

$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n \vec{E}_i. \quad (9.1.8)$$

*Поток вектора напряженности электрического поля через малую поверхность площадью  $\Delta S$  равен*

$$\Phi_E = (\vec{E} \cdot \Delta\vec{S}), \quad (9.1.9)$$

где  $\Delta\vec{S}$  — псевдовектор, модуль которого равен площади  $\Delta S$ , а направление совпадает с направлением внешней нормали  $\vec{n}$ . Размер элемента поверхности  $\Delta S$  выбирается таким образом, чтобы напряженность поля была примерно одинакова в каждой точке  $\Delta S$ .

Поток вектора  $\vec{E}$  через поверхность  $S$  равен сумме потоков через каждый ее элемент  $\Delta S_i$ , то есть

$$\Phi_E = \lim_{\substack{\Delta S_i \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^{i=n} (\vec{E}_i \cdot \Delta\vec{S}_i) = \int_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}). \quad (9.1.10)$$

**Теорема Гаусса для электростатических полей:** *произведение абсолютной диэлектрической проницаемости среды и потока вектора  $\vec{E}$  через замкнутую поверхность  $S$  равно алгебраической сумме зарядов, находящихся внутри этой поверхности:*

$$\varepsilon_0 \varepsilon \oint_S (\vec{E} \cdot d\vec{S}) = \sum q_i, \quad (9.1.11)$$

где  $q_i$  — свободные заряды, находящиеся внутри замкнутой поверхности.

Если ввести вектор *электрической индукции*<sup>1</sup>  $\vec{D}$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}, \quad (9.1.12)$$

то теорема Гаусса (9.1.11) примет вид:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_i. \quad (9.1.13)$$

Теорема Гаусса позволяет вычислить напряженность электрического поля заряженных тел различной конфигурации.

В случае *бесконечной однородно заряженной плоскости* линии напряженности электрического поля направлены перпендикулярно плоскости (если плоскость заряжена положительно, то линии на ней начинаются; если отрицательно, то — заканчиваются) и распределены в пространстве равномерно (рис. 9.1.2). Поэтому поле, создаваемое бесконечной плоскостью, однородно и равно

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0 \varepsilon}, \quad (9.1.14)$$

где  $\sigma$  — поверхностная плотность заряда, то есть заряд единицы площади поверхности,  $\sigma = \frac{q}{S}$ ,  $[\sigma] = \text{Кл/м}^2$ .

---

<sup>1</sup> Электрическую индукцию часто называют *электрическим смещением*.

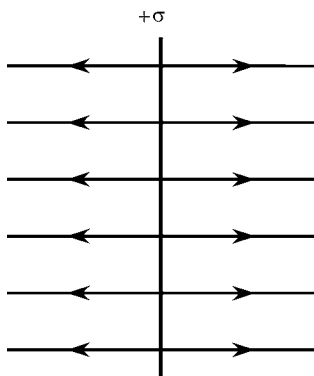


Рис. 9.1.2. Поле бесконечной однородно заряженной (положительно) плоскости:

$\sigma$  — поверхностная плотность заряда

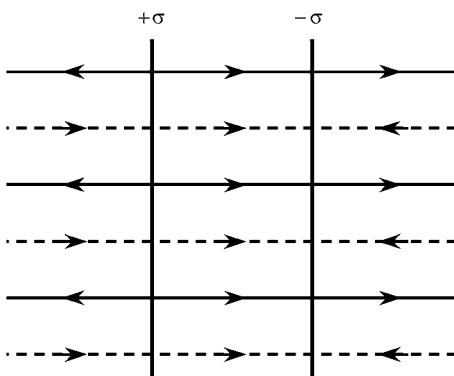


Рис. 9.1.3. Поле двух бесконечных разноименно заряженных плоскостей:

сплошными линиями показано поле положительно заряженной плоскости; пунктирными — отрицательно заряженной

В случае *двух бесконечных разноименно заряженных параллельных плоскостей (плоского конденсатора)* все поле сосредоточено в промежутке между ними. Это поле однородно и равно

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0}, \quad (9.1.15)$$

в то время как результирующая напряженность поля вне плоскостей равна нулю (рис. 9.1.3).

Напряженность поля, созданного *бесконечной прямолинейной равномерно заряженной нитью*, составляет на расстоянии  $a$  от нее:

$$E = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon d}, \quad (9.1.16)$$

где  $\tau$  — линейная плотность заряда на нити — заряд единицы длины,  $\tau = \frac{q}{l}$ ,  $[\tau] = \text{Кл/м}$ .

Напряженность поля, созданного *заряженным шаром* радиуса  $R$ :

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}, \quad (9.1.17)$$

где  $q$  — заряд шара;  $r$  — расстояние от центра шара до точки, в которой требуется найти напряженность, причем  $r > R$ .

**Энергетические характеристики электрического поля.** Если на заряд  $q$  в электрическом поле действует сила  $\vec{F} = q\vec{E}$ , то, перемещая заряд из точки 1 в точку 2 на расстояние  $\vec{l}$ , электрическое поле совершает работу, равную

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l}, \quad (9.1.18)$$

где  $d\vec{l}$  — направление элементарного перемещения.

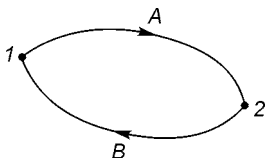


Рис. 9.1.4. К пояснению работы электрического поля

Пусть заряд совершает перемещение по замкнутой траектории 1-A-2-B-1 (рис. 9.1.4). При этом потенциальная энергия, зависящая только от взаимного расположения зарядов и от их положения во внешнем силовом поле, не изменяется, а следовательно, система не совершает работу, то есть *работа сил электростатического поля по перемещению заряда на замкнутой траектории равна нулю*:

$$A = q \oint \vec{E} d\vec{l} = q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} + q \int_2^1 \vec{E} d\vec{l} = 0, \quad (9.1.19)$$

откуда

$$q \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = -q \int_2^1 \vec{E} d\vec{l}. \quad (9.1.20)$$

Из формулы (9.1.20) следует, что работа по перемещению заряда из положения 1 в положение 2 равна взятой с обратным знаком работе по перемещению этого заряда в противоположном направлении.

Таким образом, *работа перемещения заряда не зависит от траектории движения заряда, а определяется только положением начальной и конечной точек*. Следовательно, электростатическое поле является полем консервативных сил (см. § 2.2) и может быть охарактеризовано потенциалом.

**Потенциал** поля в данной точке можно определить работой перемещения положительного заряда из этой точки на бесконечность<sup>1</sup>, деленной на значение этого заряда, то есть

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q}. \quad (9.1.21)$$

Исходя из формулы (9.1.21), работа по перемещению заряда из точки 1 в точку 2 равна

<sup>1</sup> Потенциал поля может быть определен только с точностью до произвольной постоянной величины. Неопределенность потенциала устраняют, задав положение, в котором потенциал условно равен нулю. Так, в теоретических задачах нулю равен потенциал бесконечно удаленных точек, а на практике — потенциал проводников, соединенных с Землей (заземление).

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU, \quad (9.1.22)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы поля в точках 1 и 2;  $U = \varphi_1 - \varphi_2$  — разность потенциалов или напряжение на участке 1—2.

Вычислим потенциал поля точечного заряда. Используя формулы (9.1.21), (9.1.18) и (9.1.7), запишем:

$$\varphi = \frac{A_\infty}{q} = \int_1^\infty \vec{E} \, d\vec{l} = \int_1^\infty \frac{q\vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3} \, d\vec{l}.$$

Направления радиус-вектора  $\vec{r}$  и элементарного перемещения  $d\vec{l}$  совпадают, следовательно,  $\vec{r} \, d\vec{l} = r \, dl$  и  $dl = dr$ . Тогда

$$\varphi = \int_1^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2} \, dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}.$$

Таким образом, *потенциал поля точечного заряда* в однородном диэлектрике с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  на расстоянии  $r$  от заряда равен:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}. \quad (9.1.23)$$

Связь между потенциалом и напряженностью поля определяется соотношением [см. (2.2.17)]:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi, \quad (9.1.24)$$

то есть

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}; \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}; \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Единицей измерения потенциала в СИ является вольт (В),  $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл}$ .

Потенциал является скалярной аддитивной величиной. *Потенциал поля, создаваемого системой зарядов, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.*

Потенциалы в различных точках электростатического поля наглядно представляют в виде *эквипотенциальных поверхностей* — геометрического места точек, имеющих одинаковый потенциал (рис. 9.1.6).

**Электрический диполь** — система, состоящая из двух жестко связанных одинаковых по значению, но противоположных по знаку точечных электрических зарядов  $+q$  и  $-q$ , смещенных относи-

тельно друг друга на вектор  $\vec{l}$  (плечо диполя), направленный от отрицательного заряда к положительному, причем расстояние  $l$  значительно меньше расстояния до тех точек, в которых определяется поле диполя.

Вектор

$$\vec{p} = q\vec{l} \quad (9.1.25)$$

называется *электрическим моментом диполя*,  $[P] = \text{Кл} \cdot \text{м}$ .

Потенциал электрического поля, создаваемого электрическим диполем, равен

$$\varphi = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}, \quad (9.1.26)$$

или в скалярной форме

$$\varphi = \frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}, \quad (9.1.27)$$

где  $\vec{r}$  — радиус-вектор, проведенный из точки, где находится диполь, в точку, в которой определяется потенциал поля.

Напряженность поля, создаваемого электрическим диполем в точке, находящейся на расстоянии  $r \gg l$ , равна

$$\vec{E} = \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^5}. \quad (9.1.28)$$

Из формулы (9.1.28) следует, что напряженность поля, создаваемого диполем в точках, расположенных вдоль прямой, проходящей через заряды (угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  в этом случае равен 0 или  $\pi$ ), равна

$$E_{||} = \frac{p}{2\pi\epsilon_0\epsilon r^3}. \quad (9.1.29)$$

Напряженность поля вдоль прямой, перпендикулярной направлению  $\vec{p}$  и проходящей через центр системы зарядов диполя (угол между  $\vec{r}$  и  $\vec{p}$  в этом случае равен  $\pi/2$ ), составляет:

$$E_{\perp} = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^3}. \quad (9.1.30)$$

Знак «—» означает, что вектору  $\vec{E}$  и  $\vec{p}$  антипараллельны.

На диполь, помещенный в однородное электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ , действует пара сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  (рис. 9.1.5), равных по величине  $F = |\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |q|E$  и противоположных по на-

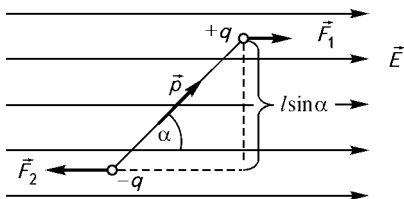


Рис. 9.1.5. Диполь в однородном электрическом поле

правлению. Умножив модуль силы на плечо пары сил  $l \sin \alpha$ , определим момент пары сил, действующих на диполь:

$$M = qEl \sin \alpha = pE \sin \alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{p}$  и  $\vec{E}$ . В векторной форме

$$\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}]. \quad (9.1.31)$$

Таким образом, на электрический диполь, помещенный в однородное электрическое поле, действует момент сил (вращающий момент), стремящийся развернуть дипольный момент вдоль направления электрического поля.

Распределение поля диполя показано на рис. 9.1.6.

Потенциальная энергия диполя во внешнем электрическом поле напряженностью  $\vec{E}$  равна

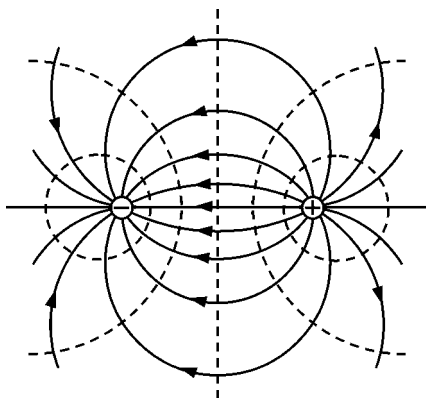


Рис. 9.1.6. Линии напряженности электрического поля (сплошные линии) и эквипотенциальные поверхности (пунктирные линии) поля диполя

$$W = -\vec{p} \vec{E}. \quad (9.1.32)$$

Формула (9.1.32) справедлива как для однородного, так и неоднородного электрического поля.

## § 9.2. ПРОВОДНИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ. ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Если проводник расположить в электрическом поле напряженностью  $\vec{E}$ , то под его действием положительные носители зарядов смещаются по направлению вектора  $\vec{E}$ , а отрицательные — против. Смещенные, так называемые *индуцированные заряды* сами являются источниками электрического поля, вектор напряженности которого направлен противоположно внешнему полю. Перерасп-

ределение зарядов будет происходить до тех пор, пока внутреннее поле не уравнивает внешнее<sup>1</sup>. Таким образом, в равновесии поле внутри проводника равно нулю, а следовательно, потенциал внутри проводника постоянен [см. формулу (9.1.24)], линии напряженности поля вне проводника перпендикулярны его поверхности, то есть поверхность проводника эквипотенциальна; индуцированные заряды располагаются на поверхности. При этом не имеет значения, является ли проводник сплошным или полым.

На этом принципе основана электростатическая защита объектов от электрических полей. Объект, нуждающийся в защите, окружают металлическим экраном (сплошным или в виде сетки). Тогда индуцированные внешним полем заряды на поверхности экрана компенсируют (экранируют) внешнее поле.

Если проводнику, находящемуся в электрическом поле, сообщить заряд  $q$ , то этот дополнительный заряд распределяется по поверхности таким образом, чтобы поле внутри проводника по-прежнему было равно нулю. Увеличение заряда вызывает соответствующее увеличение напряженности электрического поля. Тогда, согласно формуле (9.1.18), возрастает работа, необходимая для переноса заряда на бесконечность, то есть повышается потенциал проводника [см. формулу (9.1.21)]. Таким образом, заряд проводника  $q$  пропорционален потенциалу

$$q = C\varphi, \quad (9.2.1)$$

где коэффициент пропорциональности  $C$  называется **электроемкостью**, которая зависит только от геометрии проводника и диэлектрической проницаемости среды, в которой находится. Единицей измерения электроемкости является фарада ( $\Phi$ );  $1 \Phi = 1 \text{ Кл/В}$ .

Система, состоящая из двух электрически изолированных друг от друга проводников (обкладок), называется **электрическим конденсатором**. Конденсаторы конструируются таким образом, чтобы поле, создаваемое ими, было сосредоточено внутри конденсатора. Существуют плоские (две близкорасположенные пластины), цилиндрические (два коаксиальных цилиндра) и сферические (две концентрические сферы) конденсаторы. Заряд электрического конденсатора равен

$$q = C(\varphi_1 - \varphi_2) = CU, \quad (9.2.2)$$

где разность потенциалов  $\varphi_1 - \varphi_2$  называется **напряжением**  $U$  на конденсаторе.

---

<sup>1</sup> Носители зарядов в проводнике способны перемещаться под действием сколь угодно малой силы.



Электрическая емкость плоского конденсатора равна

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d}, \quad (9.2.3)$$

где  $d$  — расстояние между пластинами;  $S$  — площадь пластины;  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость вещества, заполняющего зазор между обкладками.

При параллельном соединении конденсаторов их полная емкость равна сумме емкостей отдельных конденсаторов:

$$C_{\text{пар}} = \sum_{i=1}^{i=n} C_i, \quad (9.2.4)$$

а при последовательном соединении складываются величины, обратные емкости

$$\frac{1}{C_{\text{посл}}} = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{C_i}. \quad (9.2.5)$$

Электрический конденсатор емкостью  $C$ , заряженный до разности потенциалов  $U$ , приобретает энергию электрического поля

$$W = \frac{CU^2}{2}. \quad (9.2.6)$$

Поле внутри плоского конденсатора однородно и равно:

$$E = \frac{U}{d}. \quad (9.2.7)$$

Из формул (9.2.3), (9.2.6) и (9.2.7) вытекает, что *энергия электрического поля* плоского конденсатора равна:

$$W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2} V, \quad (9.2.8)$$

или

$$W = \frac{ED}{2} V, \quad (9.2.9)$$

где  $V$  — объем, занимаемый однородным полем напряженностью  $E$ .

Тогда *объемная плотность энергии* — энергии единицы объема, которая в случае электрического поля плоского конденсатора равна:

$$w = \frac{ED}{2}. \quad (9.2.10)$$

Единица измерения объемной плотности энергии:  $[w] = \text{Дж/м}^3$ .

*Потенциальная энергия системы неподвижных точечных зарядов*  $q_1, q_2, \dots, q_n$  может быть представлена в виде суммы

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} q_i \varphi_j. \quad (9.2.11)$$

### § 9.3. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

Диэлектрики (изоляторы) отличаются от проводников тем, что не имеют свободных зарядов и поэтому не способны проводить электрический ток. В электрическом поле происходит поляризация диэлектрика — он становится *полярным*. Существует три вида поляризации.

1. **Электронная (деформационная) поляризация** характерна для веществ, молекулы которых не имеют дипольный момент в отсутствие электрического поля (водород, кислород, азот). Такие вещества называются *неполярными*. Вследствие симметрии «центры тяжести» положительного (ядра) и отрицательных (электронов) зарядов совпадают<sup>1</sup>. В электрическом поле положительно заряженные ядра атомов сдвигаются по направлению силовых линий поля, а электроны — против.

2. **Ориентационная поляризация.** Некоторые вещества, так называемые *полярные* (например,  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{HCl}$ ), состоят из молекул, имеющих дипольные моменты<sup>2</sup> даже в отсутствие внешнего электрического поля. Такие вещества, помещенные в электрическое поле, поляризуются в результате разворота дипольных моментов молекул вдоль силовых линий поля (рис. 9.3.1). Этот тип поляризации называется ориентационной поляризацией.

3. **Ионная поляризация** характерна для кристаллических диэлектриков (например,  $\text{NaCl}$ ,  $\text{CsCl}$  и другие), имеющих ионные кристаллические решетки. В электрическом поле положительные ионы решетки смещаются вдоль направления поля, а отрицательные — против. Иными словами, положительно заряженная «подрешетка» смещается относительно отрицательно заряженной «подрешетки». Вследствие нарушения симметрии электрических зарядов кристалл поляризуется.

<sup>1</sup> Мгновенное значение дипольного момента молекулы может быть отличным от нуля, однако вследствие быстрого вращения электронов по орбите средний дипольный момент за рассматриваемые нами промежутки времени равен нулю.

<sup>2</sup> Подробнее о формировании дипольного момента молекул воды см. в § 6.2.

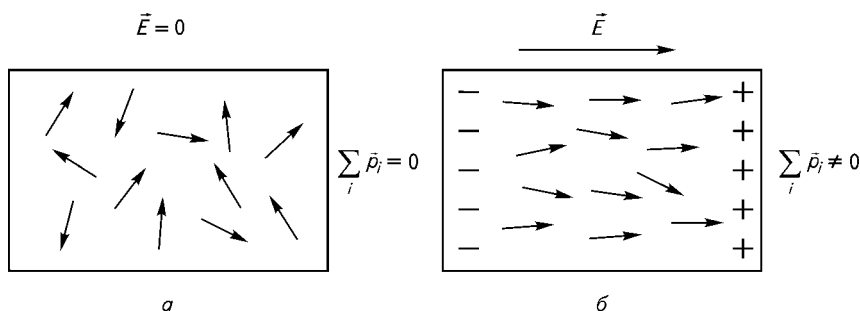


Рис. 9.3.1. Ориентационная поляризация:

*a* — расположение молекул полярного диэлектрика в отсутствие электрического поля; *б* — в присутствии электрического поля;  $\vec{E}$  — напряженность электрического поля;  $\vec{p}_i$  — дипольный момент *i*-й молекулы

В результате поляризации диэлектрик приобретает дипольный момент  $\vec{P}$ . Дипольный момент единицы объема диэлектрика называется **поляризованностью**. Для изотропной среды

$$\vec{P} = \frac{\vec{P}}{V}; \quad (9.3.1)$$

в случае неоднородной поляризации

$$\vec{P} = \frac{1}{V} \sum_i \vec{p}_i, \quad (9.3.2)$$

где  $\sum_i \vec{p}_i$  — суммарный электрический момент объема  $V$  диэлектрика.

Единицей поляризованности является кулон на квадратный метр (Кл/м<sup>2</sup>).

Для большинства изотропных диэлектриков (кроме сегнетоэлектриков<sup>1</sup>) поляризованность прямо пропорциональна напряженности электрического поля в этой точке:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}, \quad (9.3.3)$$

где коэффициент пропорциональности  $\chi$  называется **диэлектрической восприимчивостью**.

<sup>1</sup> *Сегнетоэлектрики* — кристаллические диэлектрики, обладающие в определенном интервале температур спонтанной (самопроизвольной) поляризацией. Сегнетоэлектрики сохраняют остаточную поляризацию даже после прекращения действия электрического поля.

Отношение диэлектрической восприимчивости к концентрации молекул диэлектрика называется *поляризуемостью*:

$$\alpha = \frac{\chi}{n}. \quad (9.3.4)$$

Эта величина является коэффициентом пропорциональности между дипольным моментом одной молекулы и величиной напряженности электрического поля:

$$\vec{p} = \varepsilon_0 \alpha \vec{E}. \quad (9.3.5)$$

Поляризуемость имеет размерность объема:  $[\alpha] = \text{м}^3$ .

Диэлектрическая восприимчивость и относительная диэлектрическая проницаемость диэлектрика связаны между собой простым соотношением

$$\varepsilon = 1 + \chi. \quad (9.3.6)$$

Обе эти величины являются безразмерными. Диэлектрическая восприимчивость, диэлектрическая проницаемость и поляризуемость характеризуют способность диэлектрика к поляризации и определяются молекулярным строением вещества. Они не зависят от напряженности электрического поля, но в переменных электрических полях зависят от частоты поля. В случае ориентационной поляризации установлению дипольных моментов вдоль силовых линий поля препятствует тепловое движение молекул, поэтому диэлектрическая восприимчивость вещества, состоящего из полярных молекул, в значительной степени зависит от температуры.

Выведем выражение для индукции электрического поля в диэлектрике. Согласно формулам (9.1.12) и (9.3.6),

$$\vec{D} = \varepsilon_0 (1 + \chi) \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{E} + \varepsilon_0 \chi \vec{E}. \quad (9.3.7)$$

Используя выражение (9.3.3), получаем, что индукция электрического поля связана с напряженностью и поляризованностью соотношением

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}. \quad (9.3.8)$$

При поляризации диэлектрика на одной его стороне появляются положительные заряды, а на другой — отрицательные, как показано на рис. 9.3.1 на примере ориентационной поляризации. Эти заряды входят в состав молекул (или кристаллической решетки — в случае ионной поляризации) и прочно связаны друг с другом. Под действием внешнего электрического поля разноименные заря-

ды лишь немного смещаются в противоположные стороны, но покинуть пределы молекулы (или узла кристаллической решетки) не могут. Поэтому такие заряды называются *связанными*.

В случае изотропного диэлектрика поверхностная плотность связанных зарядов  $\sigma_{\text{св}}$  равна проекции поляризованности на внешнюю нормаль к поверхности раздела (рис. 9.3.2):

$$\sigma_{\text{св}} = P_n = P \cos \alpha. \quad (9.3.9)$$

Поверхностная плотность связанных зарядов, так же как и поляризованность, характеризует степень поляризации диэлектрика.

Для биологических тканей характерны все виды поляризации. Роль поляризации при воздействии внешних электрических полей на живые организмы подробнее описана в § 16.2.

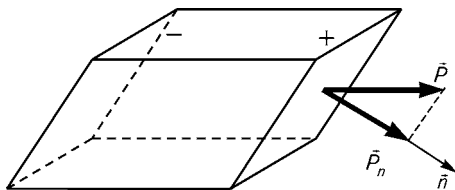


Рис. 9.3.2. Направление вектора поляризованности и его проекции на внешнюю нормаль

## § 9.4. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

**Электрическим током** называется любое упорядоченное (направленное) движение электрически заряженных частиц или заряженных макроскопических тел в пространстве под действием силовых полей. Направленное движение электрических зарядов в проводящих средах (металлы, полупроводники, электролиты, ионизированные газы) под действием электрического поля называется **током проводимости**. Упорядоченное движение макроскопических заряженных тел (например движение заряженных капель дождя в поле силы тяжести) вызывает так называемый **конвекционный ток**. Если заряженные частицы — электроны или ионы — движутся независимо от макроскопических тел в вакууме, то говорят о токе в вакууме.

За направление электрического тока принимают направление движения положительных зарядов, то есть направление вектора напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . В металлах перенос заряда осуществляется свободными электронами, поэтому ток в них направлен противоположно движению электронов.

Количественно электрический ток характеризуется скалярной величиной — **силой тока**  $I$ , в общем случае равной элементарному заряду  $dq$ , проходящему через поперечное сечение проводника за элементарное время  $dt$ :

$$I = \frac{dq}{dt}. \quad (9.4.1)$$

При постоянной скорости прохождения заряда  $q$  через поперечное сечение проводника величина тока со временем не изменяется. Такой ток называется *постоянным*:

$$I = \frac{q}{t}. \quad (9.4.2)$$

За единицу электрического тока принимают такой ток, при котором через любое поперечное сечение проводника за одну секунду протекает заряд в один кулон. Эта единица называется ампером (А).

Отношение силы тока сквозь малый элемент поверхности, нормальный к направлению тока, к площади этого элемента называется *плотностью тока*:

$$j = \frac{dI}{dS}. \quad (9.4.3)$$

В однородном проводнике плотность постоянного тока одинакова по всему поперечному сечению проводника, поэтому

$$j = \frac{I}{S}. \quad (9.4.4)$$

Плотность тока связана с концентрацией  $n$  свободных носителей зарядов и скоростью  $v$  их направленного движения следующим образом:

$$j = qnv, \quad (9.4.5)$$

или в векторной форме

$$\vec{j} = qn\vec{v}. \quad (9.4.6)$$

Вектор  $\vec{j}$  направлен по касательной к линиям тока. Эти линии стремятся по таким же правилам, как и линии любого векторного поля, например электрического. Линии постоянного электрического тока замкнуты.

Таким образом, плотность тока является векторной величиной и характеризует распределение электрического тока по сечению проводника, а также определяет направление тока в пространстве.

Плотность тока измеряется в амперах на квадратный метр (А/м<sup>2</sup>).

Для возникновения и существования электрического тока необходимо, кроме наличия свободных заряженных частиц, иметь

кими силами являются силы со стороны электрического поля  $\vec{E}$ , которое может создаваться не только неподвижными зарядами как кулоновское (электростатическое) поле  $\vec{E}_{\text{кул}}$  (см. § 9.1), но и иметь неэлектростатическое происхождение, так называемое поле с т о р о н н и х с и л  $\vec{E}_{\text{ст}}$ . Таким образом, для любой точки внутри проводника

$$\vec{E} = \vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{ст}}. \quad (9.4.7)$$

Поле  $\vec{E}_{\text{кул}}$  совершает работу на некотором участке электрической цепи 1—2 по перемещению единичного положительного заряда и связано с разностью потенциалов  $\Delta\varphi$ , или падением напряжения  $U$ , на этом участке (см. § 9.1) следующим образом:

$$\int_1^2 \vec{E}_{\text{кул}} d\vec{l} = \Delta\varphi = U, \quad (9.4.8)$$

где  $d\vec{l}$  — длина элементарного участка проводника.

Под действием этого поля электрические заряды перемещаются до тех пор, пока разность потенциалов  $\Delta\varphi$  на концах участка 1—2 не станет равной нулю. Такое перераспределение зарядов приводит к исчезновению и самого поля  $\vec{E}_{\text{кул}}$ .

Для поддержания постоянной разности потенциалов, а следовательно, и постоянного тока в цепи, необходимо наличие сил неэлектростатической природы, способных осуществлять разделение разноименных электрических зарядов. Поле сторонних сил в цепи  $\vec{E}_{\text{ст}}$  создается *источниками тока* (гальваническими элементами, аккумуляторами, электрическими генераторами). Перемещающая электрические заряды, сторонние силы совершают работу за счет энергии источника тока. Работа сторонних сил при перемещении единичного положительного заряда на участке 1—2, содержащем источник тока, называется *электродвижущей силой* источника тока (ЭДС):

$$\mathcal{E} = \int_1^2 \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}. \quad (9.4.9)$$

Физическая величина, численно равная суммарной работе кулоновских и сторонних сил по переносу единичного положительного заряда на участке 1—2, содержащем ЭДС, называется *падением напряжения* или просто *напряжением* на этом участке:

$$U_{12} = \int_1^2 (\vec{E}_{\text{кул}} + \vec{E}_{\text{ст}}) d\vec{l} = U + \mathcal{E}. \quad (9.4.10)$$

Важнейшей характеристикой проводящей системы является зависимость тока от напряжения — *вольт-амперная характеристика*  $I(U)$ . Для металлов и электролитов для любого произвольного участка электрической цепи имеет место линейная зависимость  $I(U)$ , которая называется *законом Ома*:

$$I = \frac{1}{R_0}(U + \mathcal{E}). \quad (9.4.11)$$

Коэффициент пропорциональности  $\gamma = 1/R_0$  называется *проводимостью*, а величина  $R_0$ , обратная проводимости, — *сопротивлением* электрическому току этого участка цепи:

$$R_0 = R + r, \quad (9.4.12)$$

где  $R$  — сопротивление внешнего по отношению к источнику тока участка цепи, на котором действуют кулоновские силы;  $r$  — внутреннее сопротивление источника тока, на котором действуют сторонние силы.

Тогда закон Ома в общем случае для участка цепи принимает вид:

$$I = \frac{U + \mathcal{E}}{R + r}. \quad (9.4.13)$$

Из соотношения (9.4.13) следуют частные случаи:

1) если на рассматриваемом участке нет источников тока, то есть  $\mathcal{E} = 0$  и  $r = 0$ , то говорят о *законе Ома для участка цепи, не содержащем ЭДС*:

$$I = \frac{U}{R}; \quad (9.4.14)$$

2) если цепь замкнута, точки 1 и 2 совпадают и  $\Delta\varphi = U = 0$ , то говорят о *законе Ома для полной цепи*:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (9.4.15).$$

Константа  $R$  — сопротивление проводника — определяется рассеянием электронных волн на различных дефектах кристаллической решетки металла (границы зерен, дислокации, тепловые колебания решетки — фононы, вакансии, примеси и т. п.). Для однородного проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$  сопротивление равно



$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (9.4.16)$$

где  $\rho$  — *удельное сопротивление* проводника.

Величина, обратная удельному сопротивлению, называется *удельной проводимостью*:

$$\sigma = \frac{1}{\rho}. \quad (9.4.17)$$

В СИ сопротивление измеряется в омах (Ом); проводимость — в сименсах (См); удельное сопротивление — в ом-метрах (Ом · м); удельная проводимость — в сименсах на метр (См/м).

При последовательном соединении проводников общее сопротивление равно сумме сопротивлений отдельных проводников:

$$R = \sum_{i=1}^n R_i, \quad (9.4.18)$$

где  $R_i$  — сопротивление отдельного проводника;  $n$  — число проводников на данном участке цепи.

При параллельном соединении проводников обратное значение полного сопротивления равно сумме обратных сопротивлений отдельных проводников:

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}. \quad (9.4.19)$$

В определенном интервале температур имеет место линейная зависимость удельного сопротивления металлов от температуры:

$$\rho = \rho_0 (1 + \alpha t), \quad (9.4.20)$$

где  $t$  — температура в градусах Цельсия;  $\rho_0$  — удельное сопротивление при  $t = 0$  °С;  $\alpha$  — температурный коэффициент сопротивления металлов,  $[\alpha] = \text{K}^{-1}$ .

Из уравнений (9.4.3), (9.4.8), (9.4.16) и (9.4.17) можно получить линейную зависимость между плотностью тока  $\vec{j}$  и напряженностью электрического поля  $\vec{E}$  — *закон Ома в дифференциальной форме*, описывающую плотность тока в элементарно малой области проводника (в «точке»):

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (9.4.21)$$

Задача определения токов на всех участках сложной (разветвленной) цепи по заданным сопротивлениям этих участков и приложенным к ним ЭДС решается с помощью правил Кирхгофа.

*Первое правило Кирхгофа* формулируется следующим образом: алгебраическая сумма токов  $I_k$ , сходящихся в узле, равна нулю:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (9.4.22)$$

где  $n$  — число токов, сходящихся в узле.

*Второе правило Кирхгофа* является обобщением закона Ома на разветвленные электрические цепи: в любом замкнутом контуре алгебраическая сумма падений напряжения  $I_k R_k$  на отдельных участках цепи равна алгебраической сумме ЭДС  $E_k$ , действующих в этом контуре:

$$\sum_{k=1}^n I_k R_k = \sum_{k=1}^m \mathcal{E}_k, \quad (9.4.23)$$

где  $n$  — число отдельных участков, на которые разбивается контур;  $m$  — число действующих в контуре ЭДС.

*Мощностью электрического тока  $P$*  называется его работа за единицу времени:

$$P = \frac{A}{t}. \quad (9.4.24)$$

Из формулы (9.4.2) выразим  $q = It$  и подставим в уравнение (9.1.22):

$$A = IUt. \quad (9.4.25)$$

Тогда мощность электрического тока составит:

$$P = IU. \quad (9.4.26)$$

Ток в цепи поддерживается в результате работы сторонних сил, которая из-за взаимодействия электронов с различными дефектами кристаллической решетки расходуется на нагревание проводника. Количество теплоты  $Q$ , выделяемое в проводнике, по которому течет постоянный ток, за время  $t$  определяется *законом Джоуля—Ленца*:

$$Q = IUt. \quad (9.4.27)$$

Вещества, в которых в заметной концентрации присутствуют ионы, называют **э л е к т р о л и т а м и**. Проведение электрического тока этими веществами обусловлено наличием ионов (так называемая **ионная проводимость**). Все биологические жидкости являются электролитами. Электрическое поле напряженностью  $E$  вызывает движение ионов со скоростью  $v$ :

$$v = uE, \quad (9.4.28)$$

где коэффициент пропорциональности  $u$  называется **подвижностью** иона,  $[u] = \text{м}^2/(\text{В} \cdot \text{с})$ .

Удельная проводимость электролитов определяется формулой

$$\sigma = \alpha c z F (u_+ + u_-), \quad (9.4.29)$$

где  $\alpha$  — степень диссоциации, равная отношению числа диссоциированных молекул в единице объема к числу всех молекул растворенного в этом объеме вещества;  $c$  — молярная концентрация;  $z$  — заряд иона в единицах элементарного заряда (валентность);  $F$  — число Фарадея,  $F = 9,65 \cdot 10^4$  Кл/моль;  $u_+$  и  $u_-$  — соответственно подвижности положительного и отрицательного ионов.

При повышении температуры подвижность ионов возрастает, и, как следствие, возрастает электропроводность электролита.

Прохождение электрического тока через электролиты сопровождается явлением **электролиза** — выделением на электродах составных частей растворенных веществ (на аноде — отрицательно заряженных ионов; на катоде — положительно). Электролиз описывается двумя **з а к о н а м и Ф а р а д е я**.

Согласно **первому закону Фарадея**, масса  $m$  вещества, выделившегося на электроде, пропорциональна силе тока  $I$  и времени  $t$  его прохождения через электролит:

$$m = kIt, \quad (9.4.30)$$

где коэффициент пропорциональности  $k$  называется **электрохимическим эквивалентом**,  $[k] = \text{Кл/кг}$ .

**Второй закон Фарадея** устанавливает пропорциональную зависимость между электрохимическим и химическим<sup>1</sup>  $A = M/z$  эквивалентами:

$$k = \frac{A}{F}, \quad (9.4.31)$$

где  $M$  — молярная (или атомная) масса;  $F$  — число Фарадея.

<sup>1</sup> Химический эквивалент численно равен массе химического элемента или соединения, которое замещает или присоединяет массу водорода, равную его атомной массе (1,0079).

Электролиз широко используют для получения чистых веществ; создания тонких покрытий (гальваностегия), металлических копий каких-либо предметов (гальванопластика), а также в химическом анализе (электроанализ, полярография).

## § 9.5. МАГНИТОСТАТИКА

**Магнитным полем** называется одна из составляющих электромагнитного поля, оказывающая силовое действие на движущиеся электрические заряды и на тела, обладающие магнитным моментом. Магнитное поле, в отличие от электрического, не оказывает воздействия на покоящиеся заряды, которые, в свою очередь, не порождают магнитное поле. Стационарное магнитное поле, которое рассматривается в данном параграфе, может быть получено с помощью постоянных электрических токов либо с помощью природных или искусственных магнитных материалов.

В 1820 году датский физик Х. Эрстед<sup>1</sup> (1777—1851) обнаружил, что магнитная стрелка, помещенная возле прямолинейного проводника, по которому шел ток, поворачивалась перпендикулярно проводнику. При изменении направления тока стрелка поворачивалась в противоположную сторону. Позднее было показано, что такое же действие на магнитную стрелку оказывает всякое движущееся заряженное тело.

Таким образом, в пространстве, окружающем магнит либо проводник с током, возникает магнитное поле, силовое действие которого можно обнаружить опять-таки либо с помощью магнита, либо проводника с током.

Для характеристики магнитного поля вводится понятие *пробного тела*. Это может быть либо магнитная стрелка, либо проводник с током, настолько малых размеров, чтобы не вносить изменений в исследуемое магнитное поле. В дальнейшем в качестве пробного тела будем использовать проводник с током в виде контура.

Ориентация контура в пространстве характеризуется направлением нормали к его плоскости. Направление положительной нормали связано с направлением тока правилом правого винта (рис. 9.5.1).

---

<sup>1</sup> В честь Х. Эрстеда названа единица напряженности магнитного поля в СГС

системе единиц:  $1 \text{ Э} = \frac{1}{4\pi} \cdot 10^3 \text{ А/м} = 79,5775 \text{ А/м}$ .

На пробный контур с током, помещенный в магнитное поле, действует вращающий момент, величина и направление которого определяется, с одной стороны, характеристиками внешнего магнитного поля, с другой — свойствами контура.

Силовой характеристикой магнитного поля в каждой точке пространства является *вектор магнитной индукции*  $\vec{B}$ . За направление вектора  $\vec{B}$  принимают направление положительной нормали установившегося в магнитном поле пробного контура с током.

Экспериментально установлено, что вращающий момент, действующий на контур, пропорционален силе тока  $I$  в нем и площади  $S$  контура и не зависит от его формы. Произведение

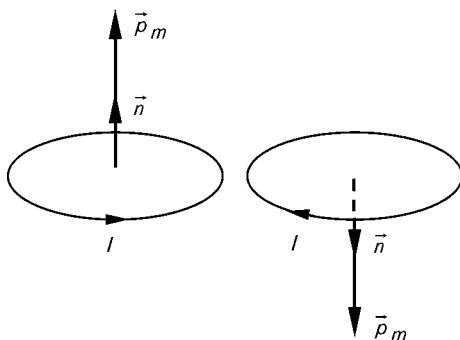


Рис. 9.5.1. Направление положительной нормали  $\vec{n}$  и магнитного момента  $\vec{p}_m$  к плоскости пробного контура с током  $I$  в зависимости от направления тока  $I$

$$p_m = IS \quad (9.5.1)$$

называется *магнитным моментом* контура с током. Это векторная величина, направление которой совпадает с направлением положительной нормали к данному контуру (рис. 9.5.1):

$$\vec{p}_m = I\vec{S}, \quad (9.5.2)$$

где  $\vec{S}$  — псевдовектор, равный по модулю площади контура, а по направлению совпадающий с направлением положительной нормали  $\vec{n}$ .

Магнитный момент — физическая величина, эквивалентная электрическому моменту в электростатике<sup>1</sup>,  $[\vec{p}_m] = \text{А} \cdot \text{м}^2$ .

Если в магнитное поле внести рамку с магнитным моментом  $\vec{p}_m$ , то на нее будет действовать вращающий момент:

$$\vec{M} = [\vec{p}_m \times \vec{B}], \quad (9.5.3)$$

<sup>1</sup> Магнитный момент является характеристикой не только контура с током, но и элементарных частиц (протонов, нейтронов, электронов), и определяет их поведение в магнитном поле. Магнитный момент элементарных частиц выражается в особых единицах, называемых атомным ( $\mu_B$ ) или ядерным ( $\mu_N$ ) магнетонами Бора: [см. § 9.6, формулы (9.6.12) и (9.6.13)].

или в скалярной форме

$$M = p_m B \sin \alpha, \quad (9.5.4)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$ .

Из соотношения (9.5.3) следует, что единицей измерения магнитной индукции является:

$$[B] = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А} \cdot \text{м}^2} = \frac{\text{Н}}{\text{А} \cdot \text{м}} = \text{Тл} \quad (\text{тесла}).$$

При вращении рамки с током силами магнитного поля совершается элементарная работа:

$$dA = -M d\alpha = -p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (9.5.5)$$

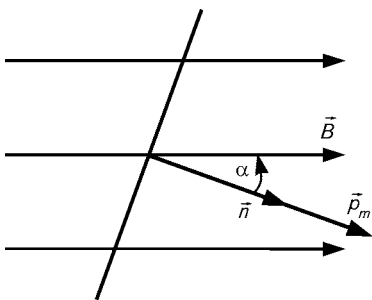


Рис. 9.5.2. Вращение контура с током в магнитном поле:

плоскость контура расположена перпендикулярно плоскости рисунка; направление вращения указано стрелкой при угле  $\alpha$

Знак «—» возникает оттого, что при совершении полем положительной работы угол  $\alpha$  уменьшается (рис. 9.5.2), то есть  $d\alpha < 0$ .

Вращение (в данном направлении) сопровождается уменьшением потенциальной энергии рамки. Работа равна изменению потенциальной энергии  $W$  рамки, взятой с обратным знаком:

$$dA = -dW. \quad (9.5.6)$$

Тогда

$$dW = p_m B \sin \alpha d\alpha. \quad (9.5.7)$$

После интегрирования получаем

$$W = -p_m B \cos \alpha + \text{const}. \quad (9.5.8.)$$

Если принять, что  $\text{const} = 0$ , то

$$W = -p_m B \cos \alpha = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B}). \quad (9.5.9)$$

Таким образом, потенциальная энергия рамки максимальна при антипараллельной ориентации векторов  $\vec{p}_m$  и  $\vec{B}$  и минимальна при параллельной, что соответствует положению устойчивого равновесия рамки.

Из сравнения формул (9.5.3) и (9.1.31), (9.5.9) и (9.1.32) видно, что индукция магнитного поля  $\vec{B}$  является аналогом напряженности электрического поля  $\vec{E}$ . Эти величины — основные силовые

характеристики полей. Напряженность магнитного поля  $\vec{H}$  [см. соотношение (9.5.15)] является вспомогательной характеристикой и соответствует вспомогательной характеристике электрического поля — индукции электрического поля  $\vec{D}$ .

Для магнитного поля, так же как и для электрического, справедлив принцип суперпозиции: *индукция результирующего магнитного поля, порождаемого системой из нескольких контуров с током (или движущихся зарядов), равна векторной сумме индукций магнитного поля, порождаемых каждым контуром с током (или движущимся зарядом) в отдельности*:

$$\vec{B} = \sum_{i=1}^n \vec{B}_i \quad (9.5.10)$$

[сравните с (9.1.8)].

Графически магнитное поле изображается с помощью *линий магнитной индукции* — кривых, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением магнитной индукции, причем густота линий (то есть число линий пронизывающих единичную перпендикулярную им площадку) численно равна модулю вектора  $\vec{B}$ . Так как в природе нет магнитных зарядов, то линии магнитной индукции замкнуты (то есть магнитное поле не является потенциальным). Они нигде не начинаются и не заканчиваются (сравните с линиями напряженности электрического поля). Для определения направления линий магнитной индукции применяется правило правого винта (буравчика) или правило обхвата правой руки.

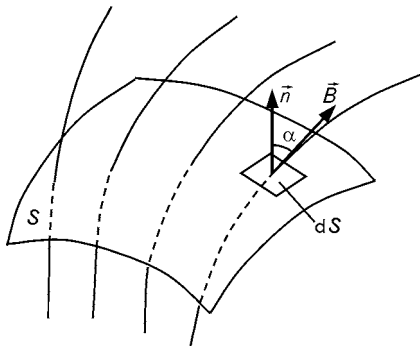


Рис. 9.5.3. К определению магнитного потока

Пусть линии магнитной индукции пронизывают малую площадку  $dS$ , в пределах которой магнитное поле однородно (рис. 9.5.3). Скалярное произведение

$$d\Phi = (\vec{B} \cdot d\vec{S}) \quad (9.5.11)$$

называется *поток вектора магнитной индукции* или *магнитным потоком*. Модуль псевдовектора  $d\vec{S}$  равен площади рассматриваемой поверхности, а направление совпадает с направлением внешней нормали  $\vec{n}$  к ней. Для нахождения полного потока через поверхность  $S$  просуммируем элементарные потоки

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}. \quad (9.5.12)$$

Для плоской поверхности в однородном магнитном поле справедливо

$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad (9.5.13)$$

где  $\alpha$  — угол между направлением вектора  $\vec{B}$  и внешней нормали к  $S$ . Единицей измерения магнитного потока является вебер (Вб),  $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot \text{м}^2$ . Так как модуль вектора  $\vec{B}$  численно равен густоте линий магнитной индукции, то магнитный поток численно равен числу линий, пронизывающих данную поверхность. Линии магнитной индукции замкнуты, поэтому для любого магнитного поля *магнитный поток, пронизывающий замкнутую поверхность, равен нулю (теорема Гаусса):*

$$\Phi = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (9.5.14)$$

Введем понятие *напряженности магнитного поля*  $\vec{H}$ , которая связана с магнитной индукцией соотношением

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (9.5.15)$$

где  $\mu_0$  — магнитная постоянная,  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$ ;  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость (см. § 9.6). Единицей напряженности магнитного поля в СИ является ампер на метр (А/м).

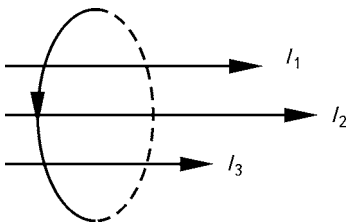


Рис. 9.5.4. Циркуляция вектора напряженности магнитного поля

Циркуляция (интеграл по замкнутому контуру) вектора напряженности магнитного поля равна сумме токов, протекающих сквозь контур, вдоль которого производится интегрирование (рис. 9.5.4):

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum_{i=1}^n I_i. \quad (9.5.16)$$

Направление обхода контура при интегрировании (указано стрелкой) соответствует правилу правого винта. Соотношение (9.5.16) носит название *закона полного тока*.

Согласно экспериментально установленному Ампером закону, на элемент длины  $d\vec{l}$  проводника с током  $I$  со стороны магнитного поля индукцией  $\vec{B}$  действует сила — *сила Ампера*:



$$d\vec{F} = I [d\vec{l} \times \vec{B}], \quad (9.5.17)$$

где вектор  $d\vec{l}$  направлен в сторону тока;  
в скалярной форме:

$$dF = IB \sin \alpha \, dl, \quad (9.5.18)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{B}$ .

Для прямолинейного проводника длины  $l$ , расположенного в однородном магнитном поле, выражение (9.5.17) приобретает вид:

$$F = IBl \sin \alpha. \quad (9.5.19)$$

Направление силы Ампера определяется согласно правилам векторного произведения (см. приложения) или по правилу левой руки. Сила Ампера вызывает перемещение проводника, а следовательно, совершает работу.

Пусть прямолинейный проводник находится в однородном магнитном поле индукцией  $\vec{B}$ . Если проводник  $MN$  (рис. 9.5.5) не закреплен (например, способен перемещаться вдоль замкнутой цепи  $ABCD$  с помо-

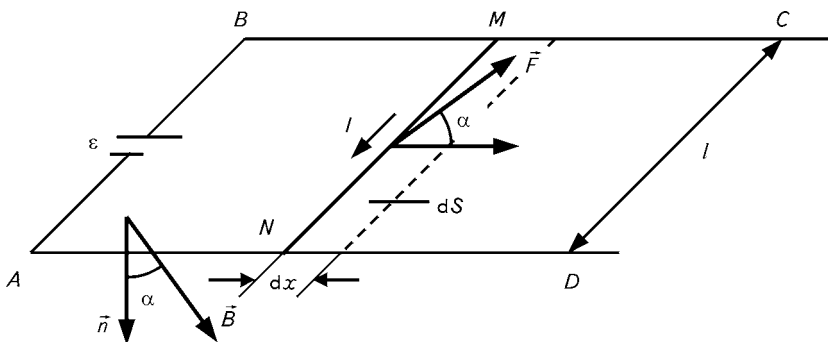


Рис. 9.5.5. Контур с перемещающейся перемычкой в магнитном поле

щью скользящих контактов), то действующая на него сила Ампера будет вызывать его перемещение в указанном на рисунке направлении. При малом перемещении проводника на величину  $dx$  совершается элементарная положительная работа:

$$dA = F_A \cos \alpha \, dx = IBl \cos \alpha \, dx = IB \cos \alpha \, dS = I \, d\Phi, \quad (9.5.20)$$

где  $\alpha$  — угол между положительной нормалью  $\vec{n}$  к контуру и вектором магнитной индукции  $\vec{B}$ . Такой же угол образует сила  $\vec{F}$  с направлением перемещения; угол между вектором  $\vec{B}$  и проводником  $MN$  равен  $90^\circ$ , поэтому  $F_A = IBl$ ;  $dS = l \, dx$  — приращение площади контура;  $d\Phi = B \cos \alpha \, dS$  — элементарный магнитный поток через площадку  $dS$ .

Таким образом, работа, совершаемая силами магнитного поля при перемещении проводника с постоянным током, равна произведению величины тока на магнитный поток через поверхность, «пересеченную» проводником при его движении:

$$dA = I d\Phi. \quad (9.5.21)$$

Формула (9.5.21) справедлива для проводника произвольной формы, совершающего поступательное или вращательное движение в однородном либо неоднородном магнитном поле.

Работа, совершаемая полем при конечном перемещении проводника (при  $I = \text{const}$ ),

$$A = I \Phi, \quad (9.5.22)$$

где  $\Phi$  — поток, пересеченный проводником при его движении.

Из соотношения (9.5.17) получаем, что на заряд  $q$ , движущийся в магнитном поле индукцией  $\vec{B}$  со скоростью  $\vec{v}$ , действует *сила Лоренца*:

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}], \quad (9.5.23)$$

или в скалярной форме

$$F = qvB \sin \alpha, \quad (9.5.24)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ .

Как и направление силы Ампера, направление силы Лоренца, действующей на положительный заряд, определяется по правилу векторного произведения или по правилу левой руки. Для отрицательного заряда направление силы Лоренца противоположно. Сила Лоренца перпендикулярна скорости, поэтому она изменяет только направление движения, но не значение скорости. Если модуль скорости остается постоянным, то отсутствует изменение кинетической энергии заряженной частицы. Таким образом, *сила Лоренца не совершает работу*. В зависимости от угла  $\alpha$  между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ , заряженная частица движется в магнитном поле либо по окружности ( $\alpha = \pi/2$ ), либо по спирали ( $0 < \alpha < \pi$ ,  $\alpha \neq \pi/2$ ). При этом частица, вращаясь вокруг силовых линий магнитной индукции, дрейфует вдоль ( $\alpha < \pi/2$ ) или против ( $\alpha > \pi/2$ ) силовых линий.

Определим частоту вращения заряженной частицы в магнитном поле, так называемую *циклотронную частоту*. Сила, вызывающая движение по окружности, является центростремительной, поэтому

$$qvB = m \frac{v^2}{R}, \quad (9.5.25)$$

где  $R$  — радиус окружности, по которой происходит вращение; линейная  $v$  и угловая  $\omega$  скорости связаны соотношением  $v = \omega R$ . Тогда циклотронная частота равна

$$\omega = \frac{q}{m} B. \quad (9.5.26)$$

Отношение  $\frac{q}{m}$  называется *удельным зарядом частицы*. Как видно из формулы (9.5.26), циклотронная частота не зависит от скорости и радиуса траектории. Эта особенность используется в одном из типов ускорителей заряженных частиц — циклотронах.

**Магнитное поле электрического тока.** Согласно *закону Био—Савара—Лапласа*<sup>1</sup>, индукция магнитного поля, создаваемого элементом проводника длиной  $dl$ , по которому течет ток  $I$ , равна

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi} \cdot \frac{I [d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}, \quad (9.5.27)$$

где  $d\vec{l}$  — вектор, модуль которого равен элементу длины проводника, а направление совпадает с направлением тока;  $\vec{r}$  — вектор, проведенный от элемента тока в ту точку, в которой определяется индукция  $d\vec{B}$  (рис. 9.5.6);  $r$  — модуль этого вектора.

Тогда магнитное поле, создаваемое проводником произвольной формы длины  $l$ , может быть вычислено по принципу суперпозиции как векторная сумма всех полей, создаваемых каждым элементом данного проводника:

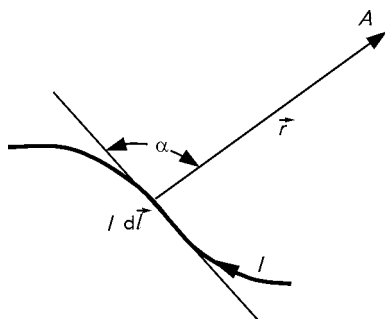


Рис. 9.5.6. Определение индукции магнитного поля в точке  $A$  с помощью закона Био—Савара—Лапласа

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int_L \frac{[d\vec{l} \times \vec{r}]}{r^3}. \quad (9.5.28)$$

В некоторых достаточно простых случаях для расчета магнитного поля можно пользоваться законом Био—Савара—Лапласа в скалярной форме:

<sup>1</sup> Экспериментальные данные для установления этого закона были собраны французскими физиками Жаном Батистом Био (1774—1862) и Феликсом Саваром (1791—1841) в 1820 году и обобщены Пьером Лапласом (1749—1827).

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int_L \frac{\sin \alpha}{r^2} dl, \quad (9.5.29)$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $d\vec{l}$  и  $\vec{r}$  (рис. 9.5.6). Используя формулу (9.5.29), можно определить индукцию магнитного поля проводников с током различной формы в соответствующих точках пространства.

В качестве примера вычислим индукцию магнитного поля в центре кругового тока. Все элементы окружности  $d\vec{l}$  перпендикулярны радиус-вектору  $\vec{r}$ , поэтому  $\sin \alpha = 1$ ; расстояние от всех элементов проводника до точки, в которой вычисляется поле одинаково и равно радиусу окружности контура,  $r = R$ ; длина контура  $L = 2\pi R$ . Тогда

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi} \int_0^{2\pi R} \frac{dl}{R^2} = \frac{\mu_0 \mu I}{4\pi R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}.$$

Таким образом, индукция магнитного поля в центре кругового тока равна

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2R}, \quad (9.5.30)$$

где  $R$  — радиус окружности контура.

Индукция магнитного поля на оси кругового тока на расстоянии  $a$  от плоскости контура радиусом  $R$ :

$$B = \frac{\mu_0 \mu I R^2}{2(R^2 + a^2)^{3/2}}. \quad (9.5.31)$$

Индукция прямолинейного бесконечно длинного проводника с током на расстоянии  $d$  от него:

$$B = \frac{\mu_0 \mu I}{2\pi d}. \quad (9.5.32)$$

Из соотношений (9.5.32) и (9.5.19) следует, что сила взаимодействия между двумя параллельными проводниками длиной  $l$  равна

$$F_{12} = \frac{\mu_0 \mu I_1 I_2 l}{2\pi d}, \quad (9.5.33)$$

где  $I_1$  и  $I_2$  — токи, протекающие по первому и второму проводникам соответственно;  $l$  — расстояние между ними.

Из соотношения (9.5.16) получаем, что индукция магнитного поля на оси длинного *соленоида*<sup>1</sup>, то есть соленоида, длина которого намного больше диаметра ( $l \gg d$ ), составляет:

$$B = \mu\mu_0 I \frac{N}{l} = \mu\mu_0 In, \quad (9.5.34)$$

где  $N$  — число витков провода соленоида;  $l$  — длина соленоида;  $n$  — число витков, приходящихся на единицу длины соленоида.

Поле, создаваемое однородным бесконечно длинным соленоидом, однородно и сосредоточено внутри него, снаружи напряженность равна нулю (сравните с электрическим полем плоского конденсатора).

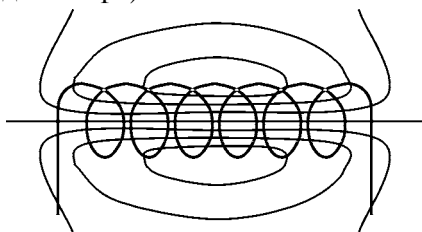


Рис. 9.5.7. Магнитное поле соленоида

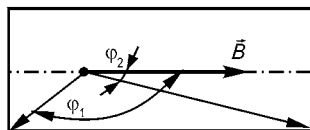


Рис. 9.5.8. К формуле индукции магнитного поля соленоида конечной длины

В случае соленоида конечной длины поле снаружи отлично от нуля, но ничтожно мало (рис. 9.5.7). Индукция магнитного поля на оси соленоида конечной длины равна

$$B = \frac{\mu_0 \mu In}{2} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1), \quad (9.5.35)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — углы между осью соленоида и радиус-вектором, проведенным из рассматриваемой точки к концам соленоида (рис. 9.5.8).

## § 9.6. МАГНИТНЫЕ СВОЙСТВА ТЕЛ

Любые вещества, помещенные в магнитное поле, изменяют свое состояние и сами являются источниками магнитного поля. При рассмотрении магнитных свойств все вещества принято называть

<sup>1</sup> *Соленоидом* называется свернутый в спираль изолированный проводник, по которому течет электрический ток.

магнетиками. Магнитные свойства веществ обусловлены их строением. Рассмотрим магнитные характеристики электронов, ядер, атомов и молекул на основе классических понятий и представлений<sup>1</sup>.

При движении электрона со скоростью  $v$  по круговой орбите (рис. 9.6.1) через любое сечение, расположенное перпендикулярно движению электрона, за единицу времени переносится электрический заряд  $ev$ , где  $e$  — заряд электрона;  $v$  — частота орбитального вращения электрона. Таким образом, орбитальное вращение электрона создает электрический ток силой:

$$I = ev. \quad (9.6.1)$$

Поскольку за направление тока принято движение положительных зарядов, то направления скорости движения электрона и электрического тока, создаваемого им, противоположны (рис. 9.6.1). Магнитный момент электрона в этом случае равен:

$$p_{m \text{ орб}} = IS = ev\pi r^2, \quad (9.6.2)$$

где  $S = \pi r^2$  — площадь круговой орбиты электрона.

Частота  $v$  вращения электрона может быть выражена через его линейную скорость  $v$  следующим образом:

$$v = \frac{v}{2\pi r}. \quad (9.6.3)$$

Тогда магнитный момент электрона составит:

$$p_{m \text{ орб}} = \frac{evr}{2}, \quad (9.6.4)$$

или в векторной форме:

$$\vec{p}_{m \text{ орб}} = \frac{e}{2} [\vec{v} \times \vec{r}], \quad (9.6.5)$$

Момент  $\vec{p}_{m \text{ орб}}$  называется *орбитальным магнитным моментом*, так как вызван движением электрона по орбите. Направление вектора  $\vec{p}_{m \text{ орб}}$  образует с направлением тока правовинтовую систему.

Помимо орбитального магнитного момента вращающийся электрон обладает *орбитальным механическим моментом импульса*:

$$L_{\text{орб}} = m_e v r, \quad (9.6.6)$$

---

<sup>1</sup> На самом деле исчерпывающее объяснение магнетизма может быть получено лишь с помощью квантовой механики. Например, к электрону неприменимо понятие орбиты. Однако классическая физика позволяет получить более наглядное и вполне удовлетворительное представление о магнетизме.

или в векторной форме:

$$\vec{L}_{\text{орб}} = m_e [\vec{r} \times \vec{v}], \quad (9.6.7)$$

где  $m_e$  — масса электрона.

Механический момент образует правовинтовую систему с направлением скорости вращения, поэтому направление  $\vec{L}_{\text{орб}}$  противоположно направлению  $\vec{p}_{m \text{ орб}}$  (рис. 9.6.1).

Отношение магнитного момента элементарной частицы к ее механическому моменту называется *гиромагнитным* или *магнито-механическим отношением*. Для электрона эта величина равна:

$$G_{\text{орб}} = \frac{p_{m \text{ орб}}}{L_{\text{орб}}} = -\frac{e}{2m_e}. \quad (9.6.8)$$

Знак «-» указывает на то, что векторы  $\vec{p}_{m \text{ орб}}$  и  $\vec{L}_{\text{орб}}$  имеют противоположное направление.

Электрон обладает собственными магнитным и механическим моментами. Собственный механический момент электрона называется *спином*  $\vec{L}_s$ ; собственный магнитный момент — *спиновым магнитным моментом*  $\vec{p}_{ms}$ . *Спиновое гиромагнитное отношение* в два раза больше орбитального:

$$G_s = \frac{p_{ms}}{L_s} = -\frac{e}{m}. \quad (9.6.9)$$

Первоначально спин<sup>1</sup> связывали с вращением электрона вокруг своей оси. Однако Бор показал, что в этом случае скорость вращения электронного облака на его периферии должна превышать скорость света. Согласно современным представлениям, спин и спиновый магнитный момент являются такими же неотъемлемыми характеристиками электрона, как его заряд и масса. Спин обладают не только электроны, но и другие элементарные частицы — протоны, нейтроны, нейтрино и др.

Спин элементарных частиц измеряется в единицах  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , где  $h$  — постоянная Планка ( $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж · с):

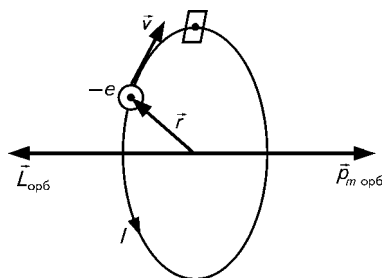


Рис. 9.6.1. Движение электрона по орбите:

$r$  — радиус орбиты;  $v$  — скорость электрона;  $I$  — электрический ток, создаваемый движением электрона;  $\vec{p}_{m \text{ орб}}$  — магнитный момент электрона;  $\vec{L}_{\text{орб}}$  — механический момент

<sup>1</sup> От англ. *spin* — вертеться, вращаться.

$$L_s = J\hbar, \quad (9.6.10)$$

где  $J$  — характерное для каждого сорта частиц целое (в том числе нулевое) или полуцелое положительное число, называемое *спиновым квантовым числом*.

В частности, для электронов  $J = 1/2$ . Тогда собственный магнитный момент электрона, в соответствии с формулой (9.6.9), равен:

$$P_{ms} = -\frac{e}{m} L_s = -\frac{e\hbar}{2m_e}. \quad (9.6.11)$$

Величина

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2 \quad (9.6.12)$$

называется *магнетоном Бора* и является естественной единицей измерения магнитного момента элементарных частиц.

Ядро атома также имеет магнитный момент, который является векторной суммой магнитных моментов входящих в его состав элементарных частиц — протонов и нейтронов. Магнитный момент ядер измеряется в *ядерных магнетонах*:

$$\mu_{\text{я}} = \frac{\hbar e}{2m_p}, \quad (9.6.13)$$

где  $m_p$  — масса протона.

Магнитный момент атома равен векторной сумме магнитных моментов ядра и электронной оболочки, но так как  $\frac{m_p}{m_e} = 1840$ , то ядерный магнитный момент всегда во много раз меньше электронного, в связи с чем магнитный момент атома приблизительно равен векторной сумме магнитных моментов входящих в его состав электронов:

$$\vec{P}_{\text{м ат}} \approx \sum_{i=1}^Z \vec{P}_{\text{м эл } i}, \quad (9.6.14)$$

где  $Z$  — количество электронов в атоме;  $\vec{P}_{\text{м эл}} = \vec{P}_{\text{м орб}} + \vec{P}_{\text{м } s}$  — *полный магнитный момент электрона*.

Согласно принципу Паули, спины спаренных электронов всегда ориентированы противоположно, поэтому сумма магнитных моментов спаренных электронов равна нулю. Заполненные электронные оболочки также не имеют магнитного момента.

Любое вещество в магнитном поле приобретает магнитный момент (намагничивается). Количественной характеристикой это-



го процесса является **намагниченность** — векторная величина, численно равная суммарному магнитному моменту единицы объема вещества:

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \vec{P}_{mi}, \quad (9.6.15)$$

где  $\vec{P}_{mi}$  — магнитный момент частиц (атомов или молекул), из которых состоит вещество;  $n$  — количество этих частиц в объеме  $V$ . Единицей намагниченности является ампер на метр,  $[J] = \text{А/м}$ .

Для большинства веществ (неферромагнитных) намагниченность пропорциональна напряженности магнитного поля:

$$\vec{J} = \chi \vec{H}, \quad (9.6.16)$$

где  $\chi$  — безразмерный коэффициент пропорциональности, называемый *магнитной восприимчивостью*. В отличие от диэлектрической восприимчивости (см. § 9.3), магнитная восприимчивость может быть как положительной (вектор  $\vec{J}$  направлен вдоль вектора  $\vec{H}$ ), так и отрицательной ( $\vec{J}$  направлен против  $\vec{H}$ ).

Намагниченное вещество создает свое собственное магнитное поле. Поэтому магнитное поле в среде определяется внешним магнитным полем и собственным магнитным полем среды:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}' = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 \mu \vec{H}, \quad (9.6.17)$$

где  $\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}$  — индукция магнитного поля в вакууме;  $\vec{B}' = \mu_0 \chi \vec{H}$  — магнитное поле, создаваемое средой;  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$  — результирующее магнитное поле в среде.

Из соотношения (9.6.17) следует равенство:

$$\mu = 1 + \chi. \quad (9.6.18)$$

Таким образом, относительная магнитная проницаемость среды  $\mu$  показывает, во сколько раз магнитное поле в веществе больше (если  $\mu > 1$ ,  $\chi > 0$ ) или меньше (если  $\mu < 1$ ,  $\chi < 0$ ) магнитного поля в вакууме.

Величины  $\mu$  и  $\chi$  зависят от природы вещества и характеризуют его способность к намагничиванию. В зависимости от того, какие значения принимают  $\mu$  и  $\chi$ , все вещества делятся на диамагнетики, парамагнетики и ферромагнетики.

**К диамагнетикам** относятся вещества, молекулы или атомы которых не имеют собственного магнитного момента. Если такое вещество ввести в магнитное поле, то в электронной оболочке атомов в силу законов электромагнитной индукции возникнут индуцированные круговые токи, добавочные к уже существующим. Эти

создают индуцированный магнитный момент, направление которого, согласно правилу Ленца, противоположно внешнему магнитному полю. Следовательно, внутри диамагнитного материала внешнее магнитное поле будет уменьшаться.

Магнитная восприимчивость диамагнетиков отрицательна, мала по модулю ( $\chi < 0$ ,  $|\chi| \ll 1$ ) и практически не зависит от температуры, а относительная магнитная проницаемость меньше единицы ( $\mu < 1$ ). Диамагнетизм присущ всем без исключения веществам, но в пара- и ферромагнетиках (см. ниже) он перекрывается более сильными эффектами пара- и ферромагнетизма. К чистым диамагнетикам относятся инертные газы, Ag, Au, Cu, Zn, Se, P, C, вода, белки, углеводы.

**Парамагнетиками** являются вещества, молекулы (или атомы) которых в отсутствие внешнего магнитного поля имеют отличный от нуля магнитный момент. Это возможно, если атомы вещества имеют неспаренные электроны. К парамагнетикам относятся Cr, Mn, Sn, Al, Pt, Na, K, O, N, NO, воздух.

В отсутствие внешнего магнитного поля магнитные моменты парамагнетиков ориентированы хаотично (рис. 9.6.2, а) и суммарный магнитный момент вещества равен нулю. Во внешнем поле магнитные моменты устанавливаются по направлению поля (рис. 9.6.2, б) и тем самым усиливают его.

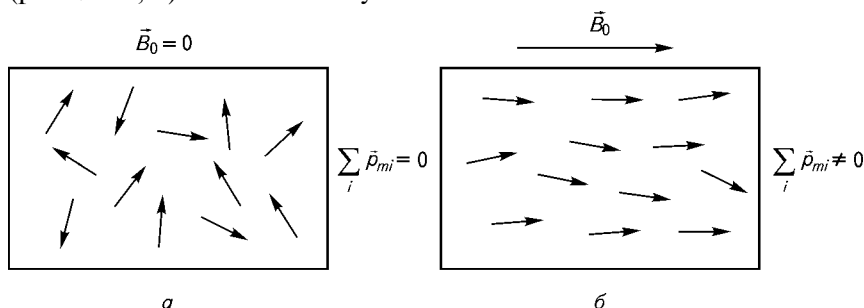


Рис. 9.6.2. Парамагнетики в отсутствие (а) и в присутствии (б) внешнего магнитного поля:

$\vec{B}_0$  — магнитная индукция внешнего поля;  $\sum_i \vec{p}_{mi}$  — суммарный магнитный момент вещества

Магнитная восприимчивость парамагнетиков положительна, но очень мала ( $0 < \chi \ll 1$ ), магнитная проницаемость больше единицы ( $\mu > 1$ ). Ориентирующему действию магнитного поля препятствует тепловое движение молекул парамагнетика. Поэтому с повышением температуры магнитная восприимчивость парамагнетиков уменьшается.

**К ферромагнетикам** относятся вещества, разделенные на малые области (домены), внутри которых магнитные моменты атомов или молекул этого вещества самопроизвольно выстроены параллельно

друг другу. Ферромагнетизм имеет квантовомеханическую природу. В отсутствии внешнего магнитного поля домены ориентированы по отношению друг к другу беспорядочным образом, так что суммарный магнитный момент вещества равен нулю. При наложении даже относительно малого магнитного поля границы между доменами смещаются так, что за счет остальных доменов увеличиваются размеры тех из них, магнитные моменты которых направлены вдоль поля. При этом суммарный магнитный момент вещества увеличивается до тех пор, пока все магнитные моменты, его составляющие, не выстроятся вдоль поля (явление *магнитного насыщения*). Ферромагнетики способны сохранять намагниченность даже после снятия магнитного поля. Она снижается с ростом температуры и при некотором ее значении — *температуре Кюри* — становится равной нулю.

Магнитная восприимчивость и магнитная проницаемость ферромагнетиков очень велики ( $\chi \gg 0$ ,  $\mu \gg 1$ ) и, в отличие от диа- и парамагнетиков, для которых  $\mu$  и  $\chi$  постоянны, сильно зависят от величины напряженности магнитного поля.

К ферромагнетикам относятся Fe, Co, Ni и многие их соединения. Ферромагнетики широко применяют в медицине, например, для удаления магнитных пылинок и опилок из глаз и ран; в хирургии для соединения концов прооперированной кишки (для этого используют кольца из силиконовой резины с вложенными стерильными ферромагнетиками; когда через несколько дней шов срастается, кольца выводятся естественным путем).

## § 9.7. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ

Электрический ток является источником магнитного поля. В связи с этим возникает вопрос, может ли магнитное поле породить электрический ток? В 1831 году М. Фарадеем было показано, что если проводящий контур поместить в переменное магнитное поле (например перемещать постоянный магнит относительно контура), то в проводнике возникает индуцированное электрическое поле, которое вызывает появление *электродвижущей силы* и *индукции*  $E_i$ . В проводящем замкнутом контуре при этом возникает электрический ток, называемый *индукционным током*<sup>1</sup>. Это явление называется *электромагнитной индукцией*.

<sup>1</sup> Переменное магнитное поле порождает индукционный ток не только в проводящих контурах, но и в любых массивных токопроводящих телах. Возникающие при этом вихревые индукционные токи называются *токами Фуко*. Их протекание сопровождается выделением значительного количества тепла. С одной стороны, это может быть использовано для плавления или нагревания тел, с другой — приводить к нежелательному перегреву металлических частей трансформаторов.

ток его собственного магнитного поля противодействовал изменению первичного магнитного потока, который вызвал этот индукционный ток. Так, если постоянный магнит приближать к замкнутой катушке, то он будет отталкиваться, а если отодвигать, то — притягиваться.

Рассмотрим проводник, скользящий по замкнутой цепи (рис. 9.5.5). При его перемещении на расстояние  $dx$  за время  $dt$  в контуре возникает электродвижущая сила индукции  $\mathcal{E}_i$ . Работа, совершаемая током, равна

$$dA = I \mathcal{E}_i dt. \quad (9.7.1)$$

С другой стороны, при перемещении проводника с постоянным током над силами магнитного поля совершается работа, равная произведению величины тока на магнитный поток через поверхность, «пересеченную» проводником при его движении:

$$dA = -I d\Phi. \quad (9.7.2)$$

Знак «—» математически отображает закон Ленца.

Приравняв формулы (9.7.1) и (9.5.21), получаем закон Фарадея:

$$\mathcal{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt}, \quad (9.7.3)$$

который можно сформулировать следующим образом: *при любом изменении магнитного потока, пронизывающего поверхность, охватываемую проводящим контуром, в нем возникает ЭДС индукции  $\mathcal{E}_i$ , пропорциональная скорости изменения этого потока.*

По определению,  $\oint_i \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l}$  — это работа «сторонних» сил по переносу единицы заряда по замкнутому контуру. Тогда, учитывая, что  $\Phi = BS$ , закон Фарадея приобретает вид:

$$\oint_l \vec{E}_{\text{ст}} d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S (\vec{B} \cdot d\vec{S}), \quad (9.7.4)$$

где  $S$  — поверхность, охватываемая контуром  $l$ . Равенство (9.7.4) является *интегральной формой записи закона электромагнитной индукции.*

Если контур, в котором индуцируется ЭДС, состоит не из одного витка, а из  $N$  последовательно соединенных витков, то есть представляет собой соленоид,  $\mathcal{E}_i$  будет равна сумме ЭДС, индуцируемых в каждом из витков:

$$\mathcal{E}_i = -\sum_{i=1}^N \frac{d\Phi_i}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \sum_{i=1}^N \Phi_i \right). \quad (9.7.5)$$

Величина

$$\Phi_c = \sum_{i=1}^N \Phi_i \quad (9.7.6)$$

называется *полным магнитным потоком*. Если поток, пронизывающий каждый из витков, одинаков, то

$$\Phi_c = N\Phi. \quad (9.7.7)$$

Электрический ток  $I$ , текущий в любом контуре, создает пронизывающий этот контур магнитный поток  $\Phi$ ; при изменениях  $I$  изменяется также и  $\Phi$ , следовательно, в контуре будет индуцироваться ЭДС. Это явление называется *самоиндукцией*.

В соответствии с законом Био—Савара—Лапласа, магнитная индукция  $B$  пропорциональна току, вызвавшему поле. Отсюда следует, что ток в контуре  $I$  и создаваемый им полный магнитный поток  $\Phi$  через контур прямо пропорциональны:

$$\Phi = LI. \quad (9.7.8)$$

Коэффициент пропорциональности  $L$  между током и полным магнитным потоком называется *индуктивностью* проводника. В СИ индуктивность измеряют в генри (Гн),  $[L] = 1 \text{ Гн} = 1 \text{ Вб/с}$ . Индуктивность зависит только от геометрии проводника и магнитных свойств среды и не зависит от химического состава проводника.

При изменении тока в контуре возникает ЭДС самоиндукции  $E_\gamma$ , равная

$$\mathcal{E}_c = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d(LI)}{dt} = -\left(L \frac{dI}{dt} + I \frac{dL}{dt}\right). \quad (9.7.9)$$

Если  $L$  при изменении тока остается постоянной (в отсутствие ферромагнетиков), выражение для  $E_\gamma$  принимает вид:

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt}. \quad (9.7.10)$$

Вычислим индуктивность длинного соленоида. В соответствии с формулами (9.7.7), (9.5.13) и (9.5.34) магнитный поток, пронизывающий соленоид, равен

$$\Phi = NBS = N\mu_0\mu I \frac{N}{l} S = \mu_0\mu n^2 IV,$$

где  $N$  — число витков соленоида;  $S$  — площадь поперечного сечения каждого витка;  $n$  — число витков на единицу длины;  $l$  — длина

ноида;  $V = lS$  — объем соленоида. Из выражения (9.7.8) получаем индуктивность длинного соленоида:

$$L = \mu_0 \mu n^2 V. \quad (9.7.11)$$

В соответствии с формулой (9.7.11) единицей измерения магнитной постоянной является генри на метр  $[\mu_0] = \text{Гн/м}$ .

По правилу Ленца, дополнительные токи, возникающие в проводниках вследствие самоиндукции, всегда направлены так, чтобы воспрепятствовать изменению тока, текущего в цепи. Это приводит к тому, что установление тока при замыкании цепи и убывание тока при размыкании цепи происходит не мгновенно.

При замыкании цепи, состоящей из включенных последовательно активного сопротивления  $R$ , включая внешнее сопротивление цепи и внутреннее сопротивление источника тока, индуктивности  $L$  и источника ЭДС  $\mathcal{E}_0$ , будет действовать ЭДС самоиндукции  $\mathcal{E}_c$ . Запишем закон Ома для этой цепи:

$$IR = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}_c,$$

или

$$IR = I_0 R - L \frac{dI}{dt}, \quad (9.7.12)$$

где  $\mathcal{E}_0 = I_0 R$ ;  $I_0$  — постоянный ток, который будет течь в цепи под действием ЭДС  $\mathcal{E}_0$ .

Разделим переменные в уравнении (9.7.12):

$$\frac{dI}{I - I_0} = -\frac{R}{L} dt.$$

После интегрирования в пределах времени от  $t = 0$  до произвольного момента  $t$  и силы тока от  $I = 0$  до  $I$ , соответствующего моменту времени  $t$ , получаем:

$$\int_0^I \frac{dI}{I - I_0} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt;$$

$$\ln(I - I_0) \Big|_0^I = -\frac{R}{L} t \Big|_0^t;$$

подставим пределы интегрирования

$$\ln \frac{I - I_0}{-I_0} = -\frac{R}{L} t$$

и выразим  $I$ :

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right),$$

При размыкании цепи ЭДС источника тока равна нулю, но возникает ЭДС самоиндукции, то есть

$$IR = \mathcal{E}_c,$$

или

$$IR = -L \frac{dI}{dt}. \quad (9.7.13)$$

Разделим переменные и проинтегрируем в пределах  $t = 0$  до произвольного момента  $t$  и силы тока от  $I = I_0$  до  $I$ , соответствующего моменту времени  $t$ :

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} \int_0^t dt;$$

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\frac{R}{L} t;$$

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}.$$

Таким образом, при замыкании цепи, состоящей из включенных последовательно активного сопротивления  $R$  и индуктивности  $L$ , сила тока возрастает по закону

$$I = I_0 \left( 1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right), \quad (9.7.14)$$

а при размыкании цепи — убывает по закону

$$I = I_0 e^{-\frac{R}{L} t}. \quad (9.7.15)$$

Если, отключив соленоид от батареи, замкнуть его на сопротивление  $R'$ , то в образовавшейся цепи будет некоторое время течь постоянно уменьшающийся ток. Убыль энергии магнитного поля за время  $dt$  будет равна работе, совершаемой током размыкания и равной джоулевой теплоте, выделяющейся на сопротивлении:

$$dA = I \mathcal{E}_c dt = dQ. \quad (9.7.16)$$

С учетом выражения (9.7.10) запишем:

$$dA = -LI dI. \quad (9.7.17)$$

Если индуктивность не зависит от тока  $I$ , то полная работа за все время, в течение которого происходит исчезновение магнитного поля, равна

$$A = -L \int_I^0 I \, dI = \frac{LI^2}{2}. \quad (9.7.18)$$

Таким образом, *энергия магнитного поля* тока (то есть проводника с индуктивностью  $L$ , по которому течет ток  $I$ ):

$$W_H = \frac{LI^2}{2}. \quad (9.7.19)$$

Сопоставляя выражение (9.7.19) с формулой для кинетической энергии, можно заключить, что индуктивность является мерой инертности электрического контура, так же как масса является мерой инертности механического тела при поступательном движении.

Выразим энергию магнитного поля (9.7.19) через величины, характеризующие само поле. В случае очень длинного соленоида

$$L = \mu_0 \mu n^2 V; \quad H = nI, \text{ или } I = \frac{H}{n}. \quad (9.7.20)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (9.7.19), получаем:

$$W_H = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} V. \quad (9.7.21)$$

Магнитное поле бесконечно длинного соленоида однородно и отлично от нуля только внутри соленоида [см. формулу (9.5.34) и рис. 9.5.7]. Тогда *объемная плотность энергии магнитного поля* равна

$$\omega_H = \frac{W_H}{V} = \frac{\mu_0 \mu H^2}{2} = \frac{BH}{2}. \quad (9.7.22)$$

Рассмотрим два контура, расположенных на некотором расстоянии друг от друга. Если в первом контуре течет ток  $I_1$ , то он создает в другом контуре пропорциональный  $I_1$  поток:

$$\Phi_2 = L_{21} I_1. \quad (9.7.23)$$

При изменении тока  $I_1$  во втором контуре индуцируется ЭДС:

$$\mathcal{E}_{i2} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt}. \quad (9.7.24)$$

Аналогично при протекании во втором контуре с током  $I_2$  возникает связанный с первым контуром поток:



$$\Phi_1 = L_{12} I_2. \quad (9.7.25)$$

При изменении тока  $I_2$  в первом контуре индуцируется ЭДС:

$$\mathcal{E}_{i1} = -L_{12} \frac{dI_2}{dt}. \quad (9.7.26)$$

Такие контуры называются *связанными*, а явление возникновения ЭДС в одном контуре при изменении тока в другом называется *взаимной индукцией*.

Коэффициенты  $L_{12}$  и  $L_{21}$  называются *взаимной индуктивностью* контуров. Можно показать, что

$$L_{12} = L_{21}. \quad (9.7.27)$$

Энергия двух связанных контуров в отсутствие ферромагнетиков, равна

$$W = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + L_{12} I_1 I_2. \quad (9.7.28)$$

## § 9.8. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

**Переменным током** называется ток, сила которого изменяется во времени. Законы Ома и вытекающие из него правила Кирхгофа были установлены для постоянного тока, однако они остаются справедливыми и для мгновенного значения изменяющегося тока, если изменение его не происходит слишком быстро<sup>1</sup>. Такой ток называется *к в а з и с т а ц и о н а р н ы м*. Условием квазистационарности является

$$\tau = \frac{l}{c} \ll T, \quad (9.8.1)$$

где  $\tau$  — время, необходимое для установления одинакового значения силы тока в цепи длиной  $l$  (возмущение передается со скоростью света  $c$ );  $T$  — период изменения тока. При размерах цепи порядка 3 м  $\tau$  составляет  $10^{-8}$  с. Таким образом, вплоть до  $T = 10^{-6}$  с ток в цепи можно считать квазистационарным. Ток промышленной частоты ( $\nu = 50$  Гц,  $T = 0,02$  с) квазистационарен для цепей длиной порядка 100 км.

Рассмотрим применение закона Ома для каждого из элементов цепи: сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$ . Пусть к за-

<sup>1</sup> В случае переменного тока сопротивление цепи зависит от частоты изменения тока.

жимам проводника с активным сопротивлением  $R$  (рис. 9.8.1, а) приложено напряжение, изменяющееся по гармоническому закону:

$$U = U_0 \cos \omega t, \quad (9.8.2)$$

где  $U_0$  — амплитудное значение напряжения.

При выполнении условия квазистационарности ток через сопротивление  $R$  определяется законом Ома:

$$I = \frac{U}{R} = \frac{U_0}{R} \cos \omega t = I_0 \cos \omega t, \quad (9.8.3)$$

где  $I_0$  — амплитудное значение силы тока. Амплитудные значения силы тока и напряжения связаны соотношением

$$I_0 = \frac{U_0}{R}. \quad (9.8.4)$$

На рис. 9.8.1, б представлена векторная диаграмма цепи с активным сопротивлением. Выбрав произвольное направление, назовем его *осью токов*. Отложим на нем вектор тока длиной  $I_0$ . Поскольку напряжение и ток изменяются синфазно (рис. 9.8.1, в), вектор  $U_0$  также направлен вдоль оси токов и его длина равна  $I_0 R$ .

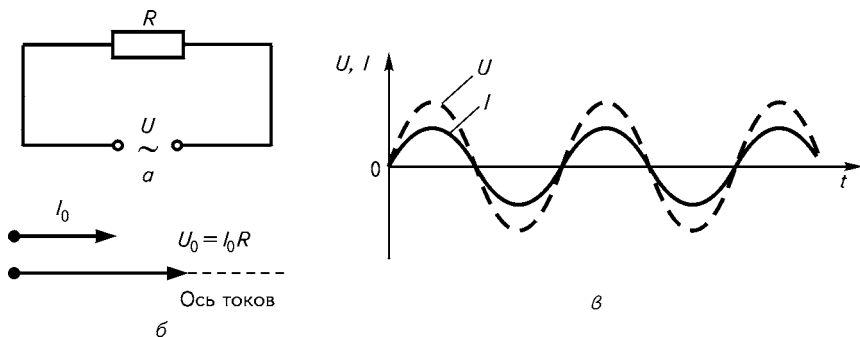


Рис. 9.8.1. Цепь с активным сопротивлением  $R$  (а), ее векторная диаграмма (б), колебания напряжения и силы тока (в)

Рассмотрим катушку индуктивностью  $L$  с ничтожно малыми активным сопротивлением ( $R = 0$ ) и емкостью ( $C = 0$ ), с поданным переменным напряжением, изменяющимся по закону (9.8.2) (рис. 9.8.2, а). В катушке индуктивности начинает течь переменный ток, вследствие чего возникает ЭДС самоиндукции:

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} \quad (9.8.5)$$

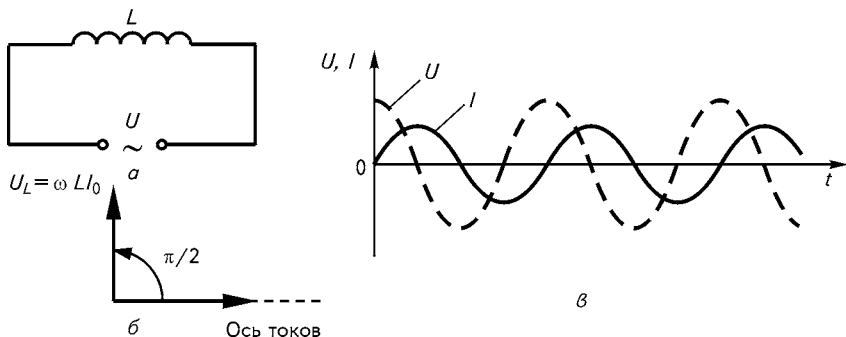


Рис. 9.8.2. Цепь с индуктивностью  $L$  (а), ее векторная диаграмма (б), колебания напряжения и силы тока (в)

(полагаем, что  $L = \text{const}$ ). Запишем закон Ома для данной цепи:

$$IR = U + \mathcal{E}_c. \quad (9.8.6)$$

В нашем случае  $R = 0$ . Подставив выражения (9.8.2) и (9.8.5) в формулу (9.8.6), получаем:

$$U_0 \cos \omega t - L \frac{dI}{dt} = 0, \quad (9.8.7)$$

откуда

$$dI = \frac{U_0}{L} \cos \omega t \, dt. \quad (9.8.8)$$

Интегрирование дает

$$I = \frac{U_0}{\omega L} \sin \omega t = I_0 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right), \quad (9.8.9)$$

где

$$I_0 = \frac{U_0}{\omega L}. \quad (9.8.10)$$

Величина

$$X_L = \omega L \quad (9.8.11)$$

называется **индуктивным сопротивлением**,  $[X_L] = \text{Гн/с} = \text{Ом}$ .

Падение напряжения на индуктивности равно:

$$U_L = IX_L = \omega LI_0 \cos \omega t. \quad (9.8.12)$$

Из сопоставления выражений (9.8.9) и (9.8.12) следует, что колебания тока на индуктивности отстают от колебаний напряжения по фазе на  $\pi/2$  (рис. 9.8.2, б, в), так как возникающая ЭДС самоиндукции препятствует изменению силы тока в цепи.

Подадим напряжение, изменяющееся по закону (9.8.2), на конденсатор емкостью  $C$  (рис. 9.8.3, *а*). Если сопротивлением подводящих проводов и индуктивностью цепи пренебречь ( $R = 0$ ,  $L = 0$ ), то в этом случае напряжение на конденсаторе  $U_C = q/C$  можно считать равным внешнему напряжению  $U$ :

$$U_C = \frac{q}{C} = U_0 \cos \omega t, \quad (9.8.13)$$

откуда

$$q = CU_0 \cos \omega t. \quad (9.8.14)$$

Производная от заряда по времени дает ток в цепи  $I$ :

$$I = \frac{dq}{dt} = -\omega CU_0 \sin \omega t = I_0 \cos \left( \omega t + \frac{\pi}{2} \right), \quad (9.8.15)$$

где

$$I_0 = \omega CU_0 = \frac{U_0}{\left( \frac{1}{\omega C} \right)}. \quad (9.8.16)$$

Величина

$$X_c = \frac{1}{\omega C}, \quad (9.8.17)$$

называется **емкостным сопротивлением**  $[X_c] = \Phi^{-1} \cdot \text{с}^{-1} = \text{Ом}$ . Заменяв в выражении (9.8.13)  $U_0$  на  $\frac{1}{\omega C} I_0$  [что следует из формулы (9.8.16)], получаем:

$$U_C = \frac{1}{\omega C} I_0 \cos \omega t. \quad (9.8.18)$$

Сопоставляя выражения (9.8.15) и (9.8.18), видим, что ток опережает по фазе падение напряжения на емкости от тока на  $\pi/2$  (рис. 9.8.3, *б*). Это объясняется тем, что заряд, а следовательно, и напряжение на конденсаторе возрастают, пока ток имеет одно направление ( $I > 0$ ). В некоторый момент времени сила тока достигает максимума и начинает уменьшаться ( $I < 0$ ), в то время как напряжение еще возрастает. В момент, когда ток меняет направление ( $I = 0$ ), напряжение максимально (рис. 9.8.3, *в*).

Рассмотрим цепь, составленную из активного сопротивления  $R$ , индуктивности  $L$  и емкости  $C$  (рис. 9.8.4, *а*). Подключим к этой цепи напряжение, изменяющееся по закону (9.8.2). В цепи возникает ток той же частоты и амплитуды  $I_0$ , фаза которого определяет-

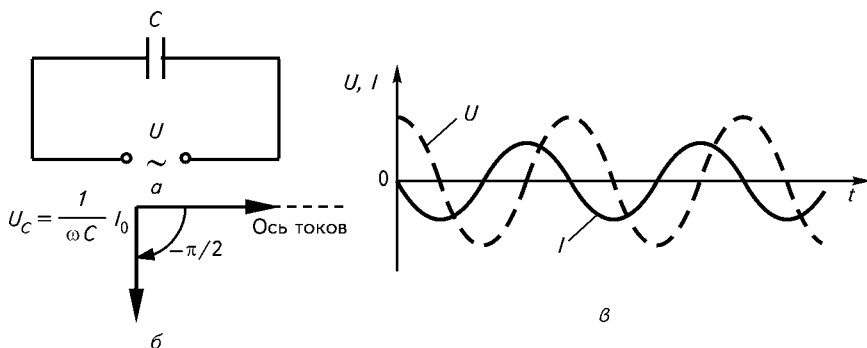


Рис. 9.8.3. Цепь с емкостью  $C$  (а), ее векторная диаграмма (б), колебания напряжения и силы тока (в)

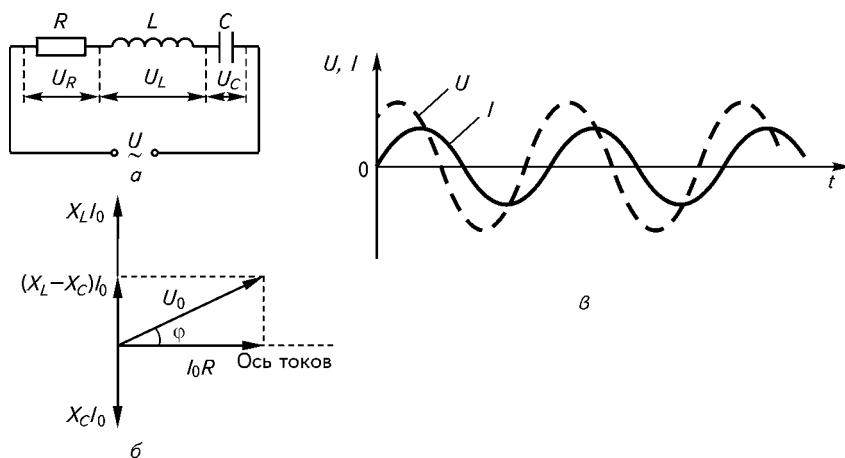


Рис. 9.8.4. Цепь с активным сопротивлением  $R$ , индуктивностью  $L$ , емкостью  $C$  (а), ее векторная диаграмма (б), колебания напряжения и силы тока (в)

ся параметрами цепи  $R$ ,  $L$  и  $C$ . Этот ток вызывает падение напряжения на активном сопротивлении  $U_R$  амплитудой  $RI_0$ , фаза которого совпадает с фазой тока. Падение напряжения на индуктивности  $U_L$  (с амплитудой  $\omega LI_0$ ) опережает ток по фазе на  $\pi/2$ , а падение напряжения на емкости  $U_C$  (с амплитудой  $\frac{1}{\omega C} I_0$ ) отстает по фазе от тока на  $\pi/2$  (рис. 9.8.4, б).

Сумма падений напряжений  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$  должна быть равна приложенному напряжению  $U$ . Сложив векторы  $U_R$ ,  $U_L$  и  $U_C$ , получаем вектор  $U$ , имеющий амплитуду  $U_0$ . Этот вектор образует с осью токов угол  $\phi$ , тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X_L - X_C}{R}. \quad (9.8.19)$$

Угол  $\varphi$  определяет разность фаз между напряжением и током (рис. 9.8.4, *в*). Из векторной диаграммы (рис. 9.8.4, *б*) следует, что

$$U_0^2 = (RI_0)^2 + [(X_L - X_C)I_0]^2, \quad (9.8.20)$$

откуда

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}. \quad (9.8.21)$$

Итак, если напряжение на зажимах цепи изменяется по закону

$$U = U_0 \cos \omega t, \quad (9.8.22)$$

то в цепи течет ток

$$I = I_0 \cos (\omega t - \varphi), \quad (9.8.23)$$

а величина

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (9.8.24)$$

называется **полным сопротивлением цепи** переменному току, или **импедансом**. Величина

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (9.8.25)$$

называется **реактивным сопротивлением**, или **реактансом**. На реактивном сопротивлении в отличие от активного не происходит потерь энергии в виде выделения тепла.

При  $X_L > X_C$  ток отстает по фазе от напряжения, а при  $X_L < X_C$  ток опережает напряжение. Если  $X_L = X_C$ , то есть реактивное сопротивление отсутствует, изменения тока и напряжения происходят синфазно. При удовлетворяющей этому условию частоте

$$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (9.8.26)$$

полное сопротивление  $Z$  минимально и равно  $R$ . Соответственно сила тока достигает наибольшего значения при данном  $U$ . Падения напряжения на емкости  $U_C$  и индуктивности  $U_L$  одинаковы по амплитуде и противоположны по фазе. Это явление называется **резонансом напряжений**, а частота (9.8.26) — **резонансной частотой**.

Мгновенное значение мощности, выделяемой в цепи, равно произведению мгновенных значений напряжения и силы тока:

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = U_0 \cos \omega t \cdot I_0 \cos (\omega t - \varphi). \quad (9.8.27)$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta),$$

выражению для мощности можно придать вид

$$P(t) = \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos (2\omega t - \varphi). \quad (9.8.28)$$

Практический интерес представляет среднее по времени значение  $P(t)$ . Среднее по времени значение функции, изменяющейся по гармоническому закону, равно интегралу от этой функции в пределах одного периода  $T$ , деленному на величину периода

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos \varphi + \frac{1}{2} U_0 I_0 \cos (2\omega t - \varphi) \right] dt = \\ &= \frac{1}{2T} U_0 I_0 \cos \varphi \int_0^T dt + \frac{1}{2T} U_0 I_0 \int_0^T \cos (2\omega t - \varphi) dt, \end{aligned}$$

где  $\int_0^T dt = T$ ;  $\int_0^T \cos (2\omega t - \varphi) dt = 0$ , так как  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ .

Тогда среднее значение *мощности переменного тока* составляет:

$$P = \frac{U_0 I_0}{2} \cos \varphi. \quad (9.8.29)$$

Если ток в цепи не совершает механической работы, средняя мощность (9.8.29) выделяется на активном сопротивлении в виде теплоты. Как видно из рис. 9.8.4, б

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} = \frac{R}{Z}. \quad (9.8.30)$$

Подставляя это значение в формулу (9.8.29) и учитывая, что  $\frac{U_0}{Z} = I_0$ , получаем:

$$P = \frac{I_0^2 R}{2}. \quad (9.8.31)$$

Такую же мощность развивает постоянный ток, равный

$$I_{\text{эф}} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}. \quad (9.8.32)$$

Величина (9.8.32) называется *действующим* (или *эффективным*) *значением тока*. Аналогично величина

$$U_{\text{эф}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \quad (9.8.33)$$

называется *действующим значением напряжения*.

С учетом действующих значений формуле (9.8.29) можно придать вид:

$$P = I_{\text{эф}} U_{\text{эф}} \cos \varphi. \quad (9.8.34)$$

Множитель  $\cos \varphi$  называется *коэффициентом мощности*. Если реактивное сопротивление равно нулю ( $X_L = X_C$ ), то  $\cos \varphi = 1$  и  $P = UI$ . При чисто реактивном сопротивлении ( $R = 0$ )  $\cos \varphi = 0$ , поэтому и средняя мощность, выделяемая в цепи, равна нулю. Таким образом, если  $\cos \varphi = 0$ , то никакой ток не даст в цепи среднюю мощность, отличную от нуля. В технике стремятся сделать  $\cos \varphi$  как можно больше<sup>1</sup>. При малом  $\cos \varphi$  для выделения в цепи необходимой мощности нужно пропускать больший ток, при этом потери в подводящих проводах возрастают, и приходится увеличивать их сечение.

## § 9.9. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

*Электромагнитными колебаниями* называются периодические изменения заряда, тока, напряженностей электрического и магнитного полей. Они возникают в цепи, содержащей индуктивность, емкость и активное сопротивление. Такая электрическая цепь называется ***колебательным контуром***.

Рассмотрим *идеальный колебательный контур*, то есть контур, в котором активное сопротивление равно нулю (рис. 9.9.1). Вызывать электромагнитные колебания в контуре можно, если заря-

<sup>1</sup> Наименьшее значение  $\cos \varphi$  на производстве составляет 0,85.



женный конденсатор подключить к катушке индуктивности, вследствие чего конденсатор начнет разряжаться и в контуре потечет ток. Энергия электрического поля конденсатора начнет уменьшаться, а энергия магнитного поля, обусловленная током, текущим через индуктивность, — возрастать. Когда конденсатор полностью разрядится, ток в контуре достигнет максимального значения, после чего конденсатор начнет перезаряжаться до тех пор, пока модуль напряженности электрического поля в конденсаторе не достигнет максимального значения. Затем снова начнется процесс разряда конденсатора, при этом ток в контуре потечет в обратном направлении. Полная энергия идеального колебательного контура, состоящая из энергии электрического и магнитного полей, не расходуется на выделение джоулева тепла (так как  $R = 0$ ) и останется постоянной.

Из сопоставления электрических и механических колебаний следует, что энергия электрического поля

$$W_E = \frac{1}{2C} q^2 \quad (9.9.1)$$

аналогична потенциальной упругой деформации, а энергия магнитного поля

$$W_H = \frac{1}{2} LI^2 \quad (9.9.2)$$

аналогична кинетической энергии. Величина, обратная емкости  $\left(\frac{1}{C}\right)$ , играет роль коэффициента жесткости  $k$ , заряд  $q$  соответствует смещению от положения равновесия  $x$ , индуктивность  $L$  — мас-

се  $m$ , ток  $I = \frac{dq}{dt}$  — скорости  $v = \frac{dx}{dt}$ . Сила тока, как и скорость является алгебраической величиной, то есть может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При составлении дальнейших дифференциальных уравнений условимся считать положительным такое направление тока, при котором конденсатор заряжается, и наоборот.

Во время колебаний внешнее напряжение к контуру (рис. 9.9.1) не приложено (напряжение прикладывается только для того, что-

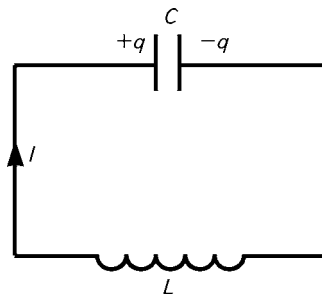


Рис. 9.9.1. Идеальный колебательный контур

бы зарядить конденсатор, и затем отключается, то есть  $IR = 0$ ), тогда, согласно закону Ома,

$$IR = U + \mathcal{E}_c = 0, \quad (9.9.3)$$

где

$$U = -\frac{q}{C} \quad (9.9.4)$$

выражает падение напряжений на емкости при разрядке конденсатора,

$$\mathcal{E}_c = -L \frac{dI}{dt} \quad (9.9.5)$$

определяет ЭДС самоиндукции, возникающую при прохождении тока через катушку.

Тогда уравнение (9.9.3) принимает вид:

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \quad (9.9.6)$$

Разделив выражение (9.9.6) на  $L$  и заменив  $\frac{dI}{dt}$  на  $\frac{d^2q}{dt^2}$ , получаем уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (9.9.7)$$

Если ввести обозначение

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (9.9.8)$$

то дифференциальное уравнение свободных незатухающих электромагнитных колебаний (9.9.7) примет вид:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega_0^2 q = 0, \quad (9.9.9)$$

что математически тождественно дифференциальному уравнению незатухающих механических колебаний [см. уравнение (2.3.7)].

Решением уравнения (9.9.9) является функция

$$q = q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0). \quad (9.9.10)$$

Таким образом, заряд на обкладках конденсатора изменяется по гармоническому закону с частотой, определяемой выражением (9.9.8),

и начальной фазой  $\alpha_0$ . Частота  $\omega_0$  называется *собственной частотой контура*. Период колебаний определяется *формулой Томсона*:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}. \quad (9.9.11)$$

Соответственно изменению заряда изменяется и напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q}{C} = \frac{q_0}{C} \cos(\omega_0 t + \alpha_0) = U_0 \cos(\omega_0 t + \alpha_0), \quad (9.9.12)$$

где

$$U_0 = \frac{q_0}{C} \quad (9.9.13)$$

равно амплитудному значению напряжения.

Продифференцировав функцию (9.9.10) по времени, получаем выражение для периодических колебаний тока:

$$I(t) = -\omega_0 q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha_0) = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha_0 + \frac{\pi}{2}\right), \quad (9.9.14)$$

где

$$I_0 = \omega_0 q_0 \quad (9.9.15)$$

определяет амплитудное значение силы тока.

Сопоставляя формулы (9.9.10), (9.9.12) и (9.9.14), заключаем, что в момент, когда ток достигает максимального значения, заряд конденсатора и напряжение обращаются в нуль и наоборот.

Из формул (9.9.13), (9.9.15) и (9.9.8) получаем соотношение между амплитудными значениями силы тока и напряжения:

$$U_0 = \sqrt{\frac{L}{C}} I_0. \quad (9.9.16)$$

Любой реальный контур обладает активным сопротивлением (рис. 9.9.2). Энергия, запасенная в контуре, постепенно расходуется на нагревание проводников, из которых состоит контур, вследствие чего свободные колебания затухают. Запишем закон Ома для этого случая:

$$IR = U + \mathcal{E}_c. \quad (9.9.17)$$

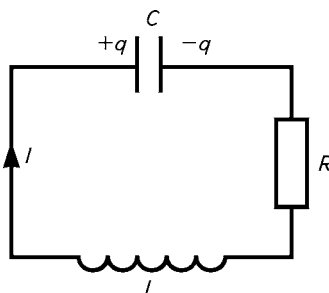


Рис. 9.9.2. Колебательный контур с активным сопротивлением

С учетом формул (9.9.4) и (9.9.5) уравнение (9.9.17) принимает вид:

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}q = 0. \quad (9.9.18)$$

Разделив выражение (9.9.18) на  $L$  и произведя замены  $I = \frac{dq}{dt}$ ,  $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$ , получим

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC}q = 0. \quad (9.9.19)$$

Введя обозначение

$$\beta = \frac{R}{2L} \quad (9.9.20)$$

и произведя замену  $\frac{1}{LC} = \omega_0^2$ , дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний (9.9.19) можно записать в виде:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad (9.9.21)$$

что математически тождественно дифференциальному уравнению затухающих механических колебаний [см. уравнение (2.3.19)].

При условии, что  $\beta^2 < \omega_0^2$ , решение уравнения (9.9.21) будет иметь вид:

$$q = q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0), \quad (9.9.22)$$

где

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (9.9.23)$$

Подставляя выражения (9.9.8) и (9.9.20) в уравнение (9.9.23), имеем:

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}. \quad (9.9.24)$$

При  $R = 0$  выражение (9.9.24) переходит в выражение (9.9.8.). Разделив уравнение (9.9.22) на емкость  $C$ , получаем напряжение на конденсаторе:

$$U = \frac{q_0}{C} e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0) = U_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0). \quad (9.9.25)$$

Чтобы найти ток, продифференцируем уравнение (9.9.22) по времени:

$$I = \frac{dq}{dt} = q_0 e^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha_0) - \omega \sin(\omega t + \alpha_0)]. \quad (9.9.26)$$

Умножив и разделив полученное выражение (9.9.26) на  $\sqrt{\omega^2 + \beta^2} = \omega_0$  [см. уравнение (9.9.23)] и введя угол  $\varphi$ , определяемый условиями

$$\cos \varphi = -\frac{\beta}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = -\frac{\beta}{\omega_0}; \quad \sin \varphi = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + \beta^2}} = \frac{\omega}{\omega_0},$$

получаем:

$$I = \omega_0 q_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha_0 + \varphi). \quad (9.9.27)$$

Поскольку  $\cos \varphi < 0$ , а  $\sin \varphi > 0$ , то  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ .

Таким образом, при наличии в контуре активного сопротивления ток опережает по фазе напряжение на конденсаторе более чем на  $\frac{\pi}{2}$  (при  $R = 0$  опережение составляет  $\frac{\pi}{2}$ ).

Затухание колебаний принято характеризовать *логарифмическим декрементом затухания* [см. формулу (2.3.24)]:

$$\lambda = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T, \quad (9.9.28)$$

где  $A(t)$  — амплитуда соответствующей величины ( $q$ ,  $U$  или  $I$ ).  $A(t+T)$  — амплитуда той же величины через время, равное периоду  $T$ .

Колебательный контур часто характеризуют его *добротностью*  $Q$ , которая определяется как величина, обратно пропорциональная логарифмическому декременту затухания:

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{\beta T} = \frac{1}{2\beta} \left( \frac{2\pi}{T} \right) = \frac{\omega}{2\beta}, \quad (9.9.29)$$

или с учетом формул (9.9.8) и (9.9.20)

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (9.9.30)$$

При  $\beta^2 > \omega_0^2$ , то есть  $\frac{R^2}{4L^2} \geq \frac{1}{LC}$ , вместо колебаний происходит апериодический разряд конденсатора, и вся выделившаяся при этом энергия расходуется на нагрев проводников. Сопротивление контура, при котором колебательный процесс переходит в апериодический, называется *критическим*. Из условия  $\frac{R^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}$ , находим

$$R_k = 2\sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (9.9.31)$$

Чтобы поддерживать незатухающие колебания, на контур подают переменное напряжение (рис. 9.8.4, а). Запишем закон Ома для этого случая:

$$IR = -\frac{q}{C} - L\frac{dI}{dt} + U_0 \cos \omega t. \quad (9.9.32)$$

После преобразований получим *дифференциальное уравнение вынужденных электромагнитных колебаний*:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 2\beta \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{U_0}{L} \cos \omega t, \quad (9.9.33)$$

математически тождественное дифференциальному уравнению вынужденных механических колебаний [см. уравнение (2.3.28)]. Решение для установившихся (см. рис. 2.3.5) вынужденных колебаний имеет вид<sup>1</sup>:

$$q = q_0 \cos \left( \omega t - \varphi - \frac{\pi}{2} \right), \quad (9.9.34)$$

где

$$q_0 = \frac{U_0 / L}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}; \quad (9.9.35)$$

$$\operatorname{tg} \left( \varphi + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{2\beta \omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (9.9.36)$$

---

<sup>1</sup> Уравнение (9.9.34) является частным решением неоднородного линейного дифференциального уравнения (9.9.33). Для нахождения общего решения необходимо к (9.9.34) прибавить общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения (9.9.21), то есть выражение (9.9.22).

После подстановки (9.9.8) и (9.9.20) получаем:

$$q_0 = \frac{U_0}{\omega \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}; \quad (9.9.37)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} = \frac{\frac{L}{\omega} (\omega^2 - \omega_0^2)}{R}. \quad (9.9.38)$$

Вычислим силу тока в цепи при установившихся колебаниях:

$$I = \frac{dq}{dt} = -q_0 \omega \sin \left( \omega t - \varphi - \frac{\pi}{2} \right) = I_0 \cos (\omega t - \varphi). \quad (9.9.39)$$

Согласно формуле (9.9.37),

$$I_0 = q_0 \omega = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2}}. \quad (9.9.40)$$

Ток отстает от напряжения на угол  $\varphi$ , при  $\omega > \omega_0$ , опережает при  $\omega < \omega_0$  и совпадает по фазе с напряжением при  $\omega = \omega_0$ .

## § 9.10. УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Появление магнитного поля вызывают не только токи проводимости, но и так называемые токи смещения, которые могут течь даже в вакууме. Рассмотрим это на следующем примере. Известно, что конденсатор, подключенный в цепь постоянного тока, замыкает ее, а подключенный в цепь переменного тока — нет. Согласно классическим представлениям, линии тока, так же как и линии потоков жидкости, должны быть замкнуты, то есть через конденсатор в цепи переменного тока тоже должен протекать ток. По проводникам цепи течет *ток проводимости*  $I_{\text{пр}}$ , ток, протекающий через конденсатор в цепи переменного тока и замыкающий ток проводимости, был назван Максвеллом *током смещения*  $I_{\text{см}}$ . При последовательном соединении эти токи равны:

$$I_{\text{см}} = I_{\text{пр}} = \frac{dq}{dt}. \quad (9.10.1)$$

Заряд на обкладках плоского конденсатора равен:

$$q = CU = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} Ed = \varepsilon_0 \varepsilon SE, \quad (9.10.2)$$

[см. формулы (9.2.3) и (9.2.7)].

Отсюда сила тока смещения

$$I_{\text{см}} = \varepsilon_0 \varepsilon S \frac{dE}{dt}. \quad (9.10.3)$$

Таким образом ток смещения — это изменяющееся во времени электрическое поле.

Поле конденсатора однородно, поэтому плотность тока в нем составляет:

$$j_{\text{см}} = \frac{I_{\text{см}}}{S} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{dE}{dt}, \quad (9.10.4)$$

или в векторной форме:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \varepsilon \frac{d\vec{E}}{dt}. \quad (9.10.5)$$

Учитывая соотношение между напряженностью и индукцией электрического поля [см. формулу (9.1.12)], можно записать:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \frac{d\vec{D}}{dt}. \quad (9.10.6)$$

Из уравнения (9.10.5) следует, что при зарядке конденсатора  $\left(\frac{dE}{dt} > 0\right)$  вектор плотности тока смещения  $\vec{j}_{\text{см}}$  направлен вдоль вектора  $\vec{E}$ ; при разрядке  $\left(\frac{dE}{dt} < 0\right)$  — против.

Максвелл ввел понятие **полного тока**, определяемое как сумма токов проводимости и смещения:

$$\begin{aligned} I_{\text{полн}} = I_{\text{пр}} + I_{\text{см}} &= \int_S (\vec{j}_{\text{пр}} + \vec{j}_{\text{см}}) d\vec{S} = \int_S \left( \vec{j}_{\text{пр}} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) d\vec{S} = \\ &= \int_S \vec{j}_{\text{пр}} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{D} d\vec{S}) \end{aligned} \quad (9.10.7)$$

(знак частной производной  $\frac{\partial}{\partial t}$  указывает на зависимость  $D$ , как от времени, так и от пространственной координаты).



В проводниках токи смещения по сравнению с токами проводимости очень малы и ими можно пренебречь, и, наоборот, в диэлектриках почти отсутствуют токи проводимости.

Из формулы (9.3.8) получаем, что плотность тока смещения в диэлектрике составляет:

$$\vec{j}_{\text{см}} = \varepsilon_0 \frac{d\vec{E}}{dt} + \frac{d\vec{P}}{dt}. \quad (9.10.8)$$

Здесь первое слагаемое определяет токи смещения в вакууме, а второе — смещение (но не перенос!) электрических зарядов в диэлектрике и его нагревание (так называемый ток поляризации).

Токи смещения, возникающие в биологических объектах при воздействии на них переменными электромагнитными полями, приводят к нагреванию тканей. Этот факт используется в терапевтических целях (например УВЧ-терапия), а с другой стороны, является одной из причин вредного воздействия электромагнитных полей высокой интенсивности (см. главу 16).

В основе теории электромагнетизма лежат *уравнения Максвелла*. *Первую пару уравнений Максвелла* образуют уравнения:

$$\oint_L (\vec{E} d\vec{l}) = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S (\vec{B} d\vec{S}); \quad (9.10.9)$$

$$\oint_S (\vec{B} d\vec{S}) = 0. \quad (9.10.10)$$

Первое уравнение (9.10.9) связывает значение  $\vec{E}$  с временным изменением вектора  $\vec{B}$  и является выражением закона электромагнитной индукции Фарадея [см. (9.7.4)]. Переменное магнитное поле в любой точке пространства создает вихревое электрическое поле, линии напряженности которого охватывают линии индукции магнитного поля в виде замкнутых кривых (рис. 9.10.1). Постоянное магнитное поле не создает электрическое (при  $\vec{B} = \text{const}$   $\frac{d\vec{B}}{dt} = 0$ ).

Согласно второму уравнению (9.10.10), полный поток вектора маг-

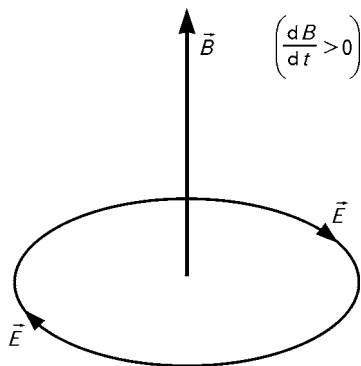


Рис. 9.10.1. Формирование вихревого электрического поля напряженностью  $\vec{E}$  переменным магнитным полем индукцией  $\vec{B}$

нитной индукции  $\vec{B}$  через замкнутую поверхность  $S$  равен нулю. Это уравнение отражает свойство вектора  $\vec{B}$ , проявляющееся в том, что его силовые линии замкнуты. Это, в свою очередь, вытекает из того факта, что в природе нет магнитных зарядов.

Вторую пару уравнений Максвелла образуют уравнения:

$$\oint_L (\vec{H} d\vec{l}) = \int_S \vec{j}_{\text{уп}} d\vec{S} + \frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{D} d\vec{S}; \quad (9.10.11)$$

$$\oint_S (\vec{D} d\vec{S}) = \int_V \rho dV = q. \quad (9.10.12)$$

Первое уравнение (9.10.11), являясь обобщенным законом полного тока (9.5.16), указывает на то, что магнитное поле порождается двумя факторами: токами проводимости и токами смещения [см. формулу (9.10.7)]; последние, в свою очередь, возникают только

при наличии переменного электри-

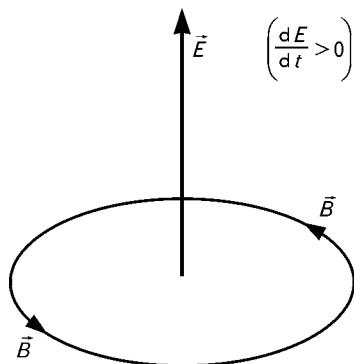


Рис. 9.10.2. Формирование вихревого магнитного поля индукцией  $\vec{B}$  переменным электрическим полем напряженностью  $\vec{E}$

ческого поля ( $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \neq 0$ ,  $\vec{D} \neq \text{const}$ ).

Согласно этому уравнению, вокруг всякого тока проводимости и переменного электрического поля всегда существует вихревое магнитное поле, причем  $\vec{E} \perp \vec{H}$  (рис. 9.10.2).

Согласно второму уравнению (9.10.12), поток вектора индукции электрического поля через замкнутую поверхность  $S$  равен заряду, заключенному внутри нее. Из уравнения следует, что линии вектора  $\vec{D}$  могут начинаться и оканчиваться на зарядах.

Уравнения (9.10.9), (9.10.10), (9.10.11) и (9.10.12) представляют собой *уравнения Максвелла в интегральной форме*. От уравнений в интегральной форме можно с помощью теорем векторного анализа перейти к уравнениям в дифференциальной форме, которые связывают значения  $\vec{E}$  или  $\vec{H}$

в некоторой точке с  $\frac{d\vec{B}}{dt}$  или  $\frac{d\vec{D}}{dt}$  в той же самой точке пространства. Однако это выходит за рамки программы по высшей математике для фармацевтических и медицинских специальностей.

Уравнения (9.10.9), (9.10.10), (9.10.11) и (9.10.12), так называемые *уравнения поля*, не учитывают свойства среды, в которой существует электромагнитное поле, и взаимодействие поля с веще-

ством. Влияние среды на электромагнитное поле описывается относительными электрической  $\varepsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями и удельной электропроводностью  $\sigma$ . Поэтому к системе [(9.10.9) — (9.10.12)] из четырех уравнений добавляются еще три уравнения состояния среды, так называемые *материальные уравнения*:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon \vec{E}; \quad (9.10.13)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}; \quad (9.10.14)$$

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}. \quad (9.10.15)$$

Совокупность уравнений поля [(9.10.9) — (9.10.12)] и материальных уравнений [(9.10.13) — (9.10.15)] образует полную систему уравнений Максвелла, являющихся основой электродинамики покоящихся сред.

Уравнения Максвелла сыграли и продолжают играть огромную роль в развитии физики. Они позволили объяснить уже известные на тот момент времени факты, а также предсказать ряд новых, например, существование электромагнитных волн, электромагнитную природу света. Уравнения Максвелла лежат в основе электротехники и радиотехники.

Переменное магнитное поле вызывает появление электрического поля и наоборот — токи смещения, связанные с переменным электрическим полем, вызывают появление магнитного поля. Таким образом, электрические и магнитные поля неразрывно взаимосвязаны и образуют единое электромагнитное поле. Распространение электромагнитного поля в пространстве, сопровождающееся взаимным превращением электрического и магнитного полей, называется *электромагнитной волной*.

Уравнения (9.10.9) и (9.10.11) могут быть преобразованы к виду:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}; \quad (9.10.16)$$

и

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \varepsilon_0 \varepsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (9.10.17)$$

Отметим, что уравнения (9.10.16) и (9.10.17) неразрывно взаимосвязаны, так как они выведены из уравнений (9.10.9) и (9.10.11), каждое из которых содержит и  $\vec{E}$ , и  $\vec{H}$ .

Уравнения такого вида представляют собой *волновые уравнения* [сравните с волновым уравнением механических волн (2.4.7)] и ука-

зывают на то, что электромагнитные поля могут существовать в виде электромагнитных волн, фазовая скорость которых равна:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}. \quad (9.10.18)$$

Для вакуума из формулы (9.10.18) получается:

$$v = c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}. \quad (9.10.19)$$

Таким образом, в вакууме скорость электромагнитных волн совпадает со скоростью света (свет, собственно говоря, и есть электромагнитные волны в определенном диапазоне частот или длин волн).

Скорость распространения света в среде равна

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{c}{n}. \quad (9.10.20)$$

Величина

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \quad (9.10.21)$$

называется *абсолютным показателем преломления среды*. Она показывает, во сколько раз скорость распространения света в данной среде меньше скорости распространения света в вакууме.

Запишем частный случай уравнений (9.10.16) и (9.10.17) для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в однородной непроводящей среде ( $\rho = 0$ ;  $\vec{j} = 0$ ;  $\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}$ ;  $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$ ;  $\epsilon$  и  $\mu$  — постоянные) вдоль оси  $x$ , перпендикулярной волновым поверхностям:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} \quad (9.10.22)$$

и

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} = \epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu \frac{\partial^2 H_z}{\partial t^2}. \quad (9.10.23)$$

Отметим, что остальные составляющие  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  равны нулю, то есть  $E_x = E_z = 0$ ;  $H_x = H_y = 0$ , тогда  $E_y = E$ ;  $H_z = H$ . Индексы  $y$  и  $z$  при  $E$  и  $H$  подчеркивают то обстоятельство, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  направлены по взаимно перпендикулярным осям  $y$  и  $z$ .

Простейшим решением уравнений (9.10.22) и (9.10.23) будет следующее:

$$E_y = E_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_0); \quad (9.10.24)$$

$$H_z = H_0 \cos(\omega t - kx + \alpha_0), \quad (9.10.25)$$

где  $\omega$  — циклическая частота волны;  $k$  — волновое число,  $k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$ ;  $\lambda$  — длина волны;  $\alpha_0$  — начальная фаза колебаний.

Из формул (9.10.24) и (9.10.25) видно, что векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются в одинаковой фазе. Можно показать, что их амплитуды связаны соотношением

$$E_0 \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} = H_0 \sqrt{\mu_0 \mu}. \quad (9.10.26)$$

Отношение  $\frac{E_0}{H_0}$  называется *волновым сопротивлением среды*:

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu}{\epsilon_0 \epsilon}}. \quad (9.10.27)$$

Для волн, распространяющихся в вакууме ( $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ ):

$$\frac{E_0}{H_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7}}{8,85 \cdot 10^{-12}}} = 120\pi \approx 377 \text{ Ом}.$$

Уравнения (9.10.24) и (9.10.25) плоской электромагнитной волны могут быть записаны в векторном виде:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - kx); \quad (9.10.28)$$

$$\vec{H} = \vec{H}_0 \cos(\omega t - kx) \quad (9.10.29)$$

при  $\alpha_0 = 0$ .

На рис. 9.10.3 показана «моментальная фотография» плоской электромагнитной волны. Как видно из рисунка, векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$

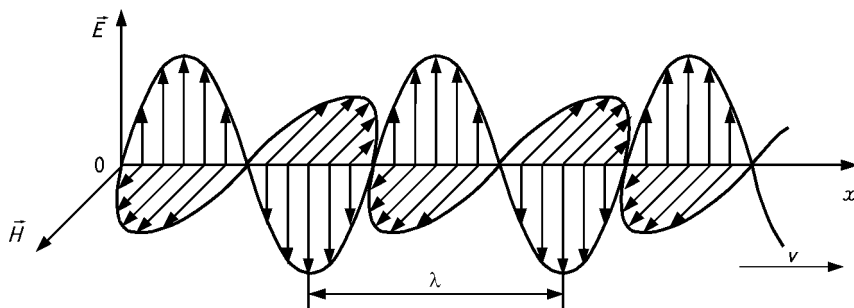


Рис. 9.10.3. Электромагнитная волна:

( $\lambda$  — длина волны;  $v$  — ее скорость (стрелкой указано направление распространения волны))

взаимно перпендикулярны и, изменяясь по гармоническому закону, образуют с направлением распространения волны правовинтовую систему. Электромагнитные волны являются поперечными, то есть векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  колеблются в плоскостях, перпендикулярных вектору скорости распространения волны.

Электромагнитные волны, как и любые другие волны, переносят энергию. Плотность энергии электромагнитного поля  $\omega_{EH}$  складывается из плотности энергии электрического поля и плотности энергии магнитного поля:

$$\omega_{EH} = \omega_E + \omega_H = \frac{\epsilon_0 \epsilon E^2}{2} + \frac{\mu_0 \mu H^2}{2}. \quad (9.10.30)$$

В случае вакуума и непроводящей среды ( $\vec{j} = 0$ ) векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  изменяются в одинаковой фазе. Поэтому соотношение (9.10.26) между  $E_0$  и  $H_0$  справедливо и для их мгновенных значений.

Отсюда

$$\omega_{EH} = \epsilon_0 \epsilon E^2 = \mu_0 \mu H^2 = \sqrt{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu} EH. \quad (9.10.31)$$

Умножив плотность энергии  $\omega_{EH}$  на скорость  $v$  (9.10.18), получаем модуль плотности потока энергии:

$$I = \omega_{EH} v = EH, \quad (9.10.32)$$

или в векторной форме:

$$\vec{I} = [\vec{E} \times \vec{H}]. \quad (9.10.33)$$

Вектор  $\vec{I}$  называется *вектором Пойнтинга*. Его направление совпадает с направлением переноса энергии в изотропных средах (а также со скоростью распространения волны), а модуль этого вектора равен  $EH$ .

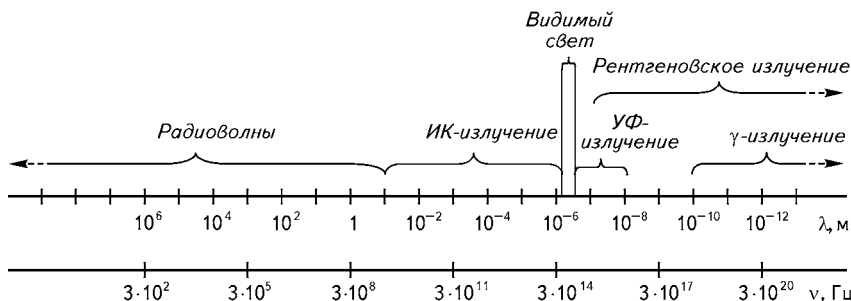


Рис. 9.10.4. Шкала электромагнитных волн

Средняя по времени плотность потока энергии называется *интенсивностью электромагнитной волны*:

$$\langle |\vec{I}| \rangle_t = I = \frac{1}{T} \int_0^T |\vec{I}| dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon}{\mu_0 \mu}} E_0^2 = \frac{E_0 H_0}{2}, \quad (9.10.34)$$

где  $T$  — период колебаний электромагнитной волны.

Все электромагнитные волны имеют единую природу. В зависимости от частоты  $\nu$  (или длины волны  $\lambda$ ) их подразделяют на диапазоны: радиоволны, инфракрасное (ИК) излучение, видимый свет, ультрафиолетовое (УФ) излучение, рентгеновское излучение,  $\gamma$ -лучи (рис. 9.10.4).

О воздействии электромагнитных волн различных диапазонов на живые организмы см. в главе 16.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 9.1.** На рис. 9.1. изображены структурные формулы ортодихлорбензола  $o$ - $C_6H_4Cl_2$ , метадихлорбензола  $m$ - $C_6H_4Cl_2$ , парадихлорбензола  $p$ - $C_6H_4Cl_2$  и моноклорбензола  $C_6H_5Cl$ . Определите дипольные моменты первых трех молекул, учитывая, что дипольный момент моноклорбензола  $C_6H_5Cl$  равен  $5 \cdot 10^{-30}$  Кл  $\cdot$  м.

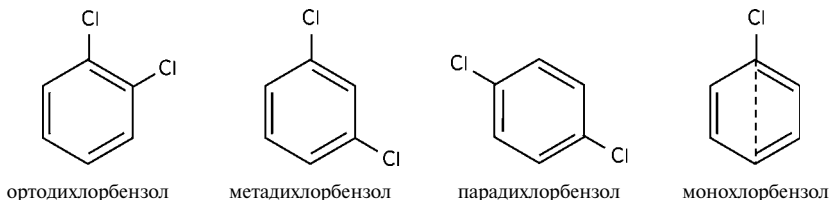


Рис. 9.1. Химические формулы к задаче 9.1

**Решение.** Молекула бензола в силу своей симметрии не может иметь дипольный момент в отсутствие внешнего поля.

Для молекулы моноклорбензола эта симметрия нарушена, в силу чего в направлении, указанном на рисунке пунктиром, появляется дипольный момент  $p_0 = 5 \cdot 10^{-30}$  Кл  $\cdot$  м. Тогда полный дипольный момент ортодихлорбензола равен векторной сумме двух таких моментов, расположенных под углом  $60^\circ$  (бензольное кольцо — правильный шестиугольник). Он легко вычисляется, поскольку  $|\vec{p}_1| = |\vec{p}_2| = p_0$  и угол  $\alpha$  между ними равен  $60^\circ$ , то есть, расположив  $|\vec{p}_1|$  вдоль оси  $x$ , получаем:

$$\begin{aligned} p_{1x} &= p_0; & p_{1y} &= 0; \\ p_{2x} &= p_0 \cos \alpha; & p_{2y} &= p_0 \sin \alpha, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$p_x = p_0 (1 + \cos \alpha); \quad p_y = p_0 \sin \alpha,$$

и, следовательно, дипольный момент ортодихлорбензола

$$p_{\text{орт}} = |\vec{p}_1 + \vec{p}_2| = p_0 \sqrt{(1 + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha} = p_0 \sqrt{2(1 + \cos \alpha)}.$$

С учетом угла  $\alpha = 60^\circ$  получаем:

$$p_{\text{орт}} = 5 \cdot 10^{-30} \sqrt{2(1 + 1/2)} = 5\sqrt{3} \cdot 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}.$$

У метадиолорбензола угол между составляющими дипольного момента равен  $120^\circ$ , и поэтому

$$p_{\text{мета}} = p_0 \sqrt{2(1 + \cos 120^\circ)} = p_0 \sqrt{2(1 - 1/2)} = p_0 = 5 \cdot 10^{-30} \text{ Кл} \cdot \text{м}.$$

Дипольный момент парадихлорбензола, поскольку угол между его составляющими момента составляет  $180^\circ$ , равен

$$p_{\text{пара}} = p_0 \sqrt{2(1 + \cos 180^\circ)} = p_0 \sqrt{2(1 - 1)} = 0.$$

**Задача 9.2.** Ионофорез применяется для введения лекарственных веществ в тело человека. Определите количество однократно ионизированных ионов лекарственного вещества, введенное больному за время  $t = 10$  мин при плотности тока  $j = 0,05$  мА/см<sup>2</sup> с электрода площадью  $S = 5$  см<sup>2</sup>.

**Решение.** Плотность тока равна

$$j = \frac{I}{S} = \frac{Ne}{St},$$

где  $I$  — сила тока;  $e$  — заряд электрона;  $N$  — число ионов.

Откуда число ионов

$$N = \frac{jSt}{e}.$$

Подставив численные данные в единицах СИ, получаем:

$$N = \frac{5 \cdot 10^{-1} \text{ А} \cdot \text{м}^2 \cdot 5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 \cdot 600 \text{ с}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}} = 9,4 \cdot 10^{17}.$$

**Задача 9.3.** Электронагреватель в установке для термической обработки лекарственного сырья за 10 мин испаряет 1 л воды, взятой при температуре  $20^\circ\text{C}$ . Определите длину нихромовой проволоки сечением  $0,5$  мм<sup>2</sup>, учитывая, что установка питается напряжением  $120$  В и ее КПД равен  $80\%$ ?

**Решение.** Из формулы для сопротивления  $R$  однородного проводника длиной  $l$  и площадью поперечного сечения  $S$



$$R = \rho \frac{l}{S}$$

получаем искомую длину проволоки:

$$l = \frac{RS}{\rho}, \quad (9.1)$$

где  $\rho$  — удельное сопротивление материала проволоки (для нихрома  $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$  Ом · м).

Неизвестное  $R$  определяем следующим образом. По закону Джоуля—Ленца электрическая энергия, необходимая для испарения воды на установке, равна

$$Q_1 = \eta \frac{U^2}{R} t, \quad (9.2)$$

где  $\eta$  — КПД установки.

С другой стороны, чтобы нагреть массу воды  $m$  от температуры  $t_1 = 20$  до  $t_2 = 100$  °С, а затем обратить ее в пар, необходимо затратить количество теплоты, равное

$$Q_2 = Cm(t_2 - t_1) + rm, \quad (9.3)$$

где  $c$  — удельная теплоемкость воды [ $C = 4,19 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К)];  $r$  — ее удельная теплота парообразования.

Приравняв правые части уравнений (9.2) и (9.3), получаем

$$\eta \frac{U^2}{R} t = Cm(t_2 - t_1) + rm,$$

откуда

$$R = \frac{\eta U^2 t}{m[C(t_2 - t_1) + r]}.$$

Подставляя  $R$  в формулу (9.1), вычисляем длину проволоки

$$l = \frac{\eta U^2 t S}{\rho m[C(t_2 - t_1) + r]}.$$

После подстановки численных данных в единицах СИ имеем:

$$l = \frac{0,8 \cdot 120^2 \cdot 600 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{1,1 \cdot 10^{-6} \cdot 1 \cdot [4,19 \cdot 10^3 (100 - 20) + 2,26 \cdot 10^6]} = 1,2 \text{ м.}$$

**Задача 9.4.** Фрагменты молекул  $\text{CH}_3^+$  и  $\text{CH}_3^{3+}$ , ускоренные одинаковой разностью потенциалов, влетают в однородное магнитное поле под углом  $\pi/2$  к его направлению. Определите отношение радиусов траекторий этих частиц.

**Решение.** Движение по окружности заряженной частицы в магнитном поле совершается под действием силы Лоренца

$$\vec{F}_L = q[\vec{v} \times \vec{B}],$$

которая является в данном случае центростремительной силой:

$$\frac{mv^2}{R} = qvB,$$

где  $m$  и  $v$  — масса и скорость частицы соответственно.

Отсюда вычисляем радиус траектории:

$$R = \frac{mv}{qB}.$$

Скорость частицы определяем из выражения для кинетической энергии, которую она приобретает в результате работы сил электрического поля:

$$\frac{mv^2}{2} = qU,$$

откуда

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

Подставляя это выражение для радиуса траектории частиц, получаем:

$$R = \frac{m}{qB} \sqrt{\frac{2qU}{m}} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Отношение радиусов тогда равно

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{m_1 \cdot q_2}{m_2 \cdot q_1}},$$

то есть не зависит от внешних полей и определяется только массой и зарядом рассматриваемых частиц.

Масса  $\text{CH}_3$   $m_1 = 15$  а. е. м.; масса  $\text{CH}$   $m_2 = 13$  а. е. м., тогда

$$\frac{R_1}{R_2} = \sqrt{\frac{15 \cdot 3}{13 \cdot 1}} \approx 1,86.$$

**Задача 9.5.** Для прогрева мышечной ткани на плоские электроды подается напряжение  $U = U_0 \sin \omega t$  с амплитудой  $U_0 = 250$  В и частотой  $\nu = 10^6$  Гц. Активное сопротивление этого участка цепи  $R = 10^3$  Ом; емкость  $C = 5 \cdot 10^{-8}$  Ф. Определите количество тепла, выделившееся в объеме ткани между электродами за период колебаний  $T$  и за время процедуры  $t = 10$  мин.

**Решение.** Определим действующее значение тока в цепи:

$$I_{\text{эф}} = \frac{U_{\text{эф}}}{Z} = \frac{U_{\text{эф}}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{U_0 / \sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{2\pi\nu C}\right)^2}}.$$

Подставив численные данные, вычислим:

$$I_{\text{эф}} = \frac{250 / \sqrt{2}}{\sqrt{(10^3)^2 + \left(\frac{1}{2\pi \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-8}}\right)^2}} = 0,18 \text{ А.}$$

Период колебаний равен

$$T = \frac{1}{\nu} = 10^{-6} \text{ с.}$$

Тогда количество теплоты, выделившееся за период колебаний, составит:

$$Q_T = I^2 R T = (0,18)^2 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 3,24 \cdot 10^{-5} \text{ Дж.}$$

Количество теплоты, выделившееся за время  $t$ :

$$Q_t = I^2 R t = (0,18)^2 \cdot 10^3 \cdot 600 = 1,94 \cdot 10^4 \text{ Дж.}$$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**9.1.** Два точечных заряда  $q_1 = +5$  и  $q_2 = -8$  нКл находятся на расстоянии  $r = 20$  см друг от друга. Вычислите напряженность  $E$  электрического поля, созданного этими зарядами, в точке, лежащей посередине между ними. Диэлектрическая проницаемость среды  $\varepsilon = 5$ .

**9.2.** Два точечных заряда  $q_1 = 3$  и  $q_2 = -5$  Кл, находятся на расстоянии  $r_1 = 10$  м друг от друга. Какую работу  $A$  необходимо совершить против сил электрического поля, чтобы удалить заряды на расстояние  $r_2 = 40$  см? Вычислите начальную  $W_1$  и конечную  $W_2$  потенциальную энергию этой системы зарядов.

**9.3.** Вычислите скорость  $v$  электрона, прошедшего ускоряющую разность потенциалов  $U = 100$  В. Начальная скорость электрона равна нулю.

**9.4.** Диполь, образованный зарядами  $q = 40$  нКл, плечом  $l = 2$  мм, свободно установился в электрическом поле напряженностью  $E = 5$  кВ/м. Какую работу  $A$  необходимо совершить, чтобы развернуть диполь на угол  $30^\circ$ ?

**9.5.** Плоский воздушный конденсатор емкостью  $C = 6$  нФ и площадью пластин  $S = 1 \text{ м}^2$  заряжен до разности потенциалов  $U = 150$  В. Определите силу  $F$  притяжения между пластинами конденсатора и его потенциальную энергию  $W$ .

**9.6.** Сила тока  $I$  в проводнике изменяется со временем  $t$  по закону  $I = 3 + 2t$ , где  $[I] = \text{А}$ ;  $[t] = \text{с}$ . Вычислите заряд  $q$ , который пройдет по проводнику за первые 5 с после подключения к источнику тока.

**9.7.** Медный проводник длиной  $l = 1,5$  м находится под напряжением  $U = 5,1$  В. Определите плотность тока  $j$  в проводнике. Удельное сопротивление меди  $\rho = 17 \text{ нОм} \cdot \text{м}$ .

**9.8.** Батарея с ЭДС  $\mathcal{E} = 9$  В имеет внутреннее сопротивление  $r = 3,5$  Ом, сила тока в цепи  $I = 1,8$  А. Определите падение напряжения  $U_r$  внутри батареи и на внешнем сопротивлении  $U_R$ , а также КПД  $\eta$  батареи.

**9.9.** Падение напряжения на спирали электрического чайника  $U = 100$  В, ее сопротивление  $R = 20$  Ом. Определите время, за которое в чайнике закипает  $V = 1$  л воды, если ее начальная температура  $t_1 = 20^\circ \text{С}$ . Удельная теплоемкость воды  $C = 1,2 \text{ кДж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ .

**9.10.** Какая масса  $m$  меди выделится при электролизе на катоде за время  $t = 1$  ч при силе тока  $I = 5$  А?

**9.11.** Прямой проводник длиной  $l = 30$  см, по которому течет ток силой  $I = 12$  А, находится в однородном магнитном поле под углом  $\alpha = 30^\circ$  к направлению поля. Вычислите напряженность  $H$  магнитного поля, учитывая, что на проводник действует сила  $F = 2,7$  мН.

**9.12.** Квадратная рамка со стороной  $a = 5$  см помещена в однородное магнитное поле напряженностью  $H = 15$  кА/м. Плоскость рамки составляет с направлением магнитного поля угол  $\alpha = 30^\circ$ . Определите магнитный поток, пронизывающий рамку.

**9.13.** Два круговых контура радиусом  $R = 3$  см, по которым в противоположных направлениях текут токи  $I_1 = I_2 = 10$  А, расположены в параллельных плоскостях на расстоянии  $d = 4$  см друг от друга. Вычислите напряженность  $H$  магнитного поля в центре одного из витков.

**9.14.** Индукция магнитного поля в центре кругового контура  $B = 20$  мкТл. Вычислите магнитный момент  $p_m$  контура, если сила тока в нем  $I = 1$  А.

**9.15.** Вычислите период  $T$  вращения электрона по круговой траектории в однородном магнитном поле напряженностью  $H = 8$  кА/м.

**9.16.** Квадратная рамка со стороной  $a = 5$  см и с током  $I = 10$  А свободно установилась в однородном магнитном поле напряженностью  $H = 18$  кА/м. Какую работу  $A$  необходимо совершить, чтобы повернуть рамку на угол  $\alpha = 90^\circ$ ?

**9.17.** Определите время  $t$ , за которое магнитный поток, пронизывающий замкнутый контур, изменился от  $\Phi_1 = 20$  мВб до  $\Phi_2 = 60$  мВб, если средняя ЭДС индукции, возникшая в контуре, составила 0,2 В.

**9.18.** Соленоид длиной  $l = 15$  см имеет 300 витков. Определите индукцию  $B$  магнитного поля внутри соленоиды, если по нему течет ток силой  $I = 5$  А.

**9.19.** Имеется цепь сопротивлением  $R = 15$  Ом и индуктивностью  $L = 0,05$  Гн. Определите время  $t$ , за которое после отключения источника напряжения сила тока в цепи снизится в 2 раза. (В данном случае при отключении источника цепь не размыкается.)

**9.20.** Плотность витков соленоида  $n = 20 \text{ мм}^{-1}$ . По нему течет ток силой  $I = 10 \text{ А}$ . Вычислите объемную плотность энергии  $w$  магнитного поля внутри соленоида.

**9.21.** В цепь переменного тока напряжением  $U = 220 \text{ В}$  и частотой  $\nu = 50 \text{ Гц}$  включены последовательно сопротивление  $R = 100 \text{ Ом}$  и индуктивность  $L = 0,55 \text{ Гн}$ . Определите ток  $I$  в цепи и падение напряжения  $U_R$  и  $U_L$  на сопротивлении и индуктивности.

**9.22.** В цепь переменного тока частотой  $\nu = 50 \text{ Гц}$  включены последовательно сопротивление  $R = 20 \text{ Ом}$  и емкость  $C$ . Сдвиг фаз между током и напряжением  $\varphi = 60^\circ$ . Вычислите емкость  $C$ .

**9.23.** Используя условие задачи 9.21, определите сдвиг фаз  $\varphi$  между током и напряжением в цепи, а также мощность  $P$ , поглощаемую ею.

**9.24.** Идеальный колебательный контур резонирует на длине волны  $\lambda = 1000 \text{ м}$ . Вычислите его емкость  $C$ , если его индуктивность  $L = 1 \text{ мГн}$ .

**9.25.** Ток в идеальном колебательном контуре изменяется со временем по закону  $I = +50 \cos 600\pi t \text{ мА}$ . Емкость контура  $C = 1,4 \text{ мкФ}$ . Вычислите период  $T$  колебаний контура, индуктивность  $L$ ; составьте уравнения изменения во времени заряда  $q = q(t)$  и напряжение  $U = U(t)$ .

**9.26.** В идеальном колебательном контуре заряд на обкладках конденсатора изменяется со временем по закону  $q = 5 \sin 10^3 \pi t \text{ мкКл}$ . Индуктивность контура  $L = 0,16 \text{ Гн}$ . Составьте уравнения изменения во времени энергии  $w_{\text{эл}}$  электрического поля и энергии  $w_{\text{м}}$  магнитного поля, а также максимальные значения  $w_{\text{эл0}}$  и  $w_{\text{м0}}$ .

**9.27.** Дифференциальное уравнение затухающих электромагнитных колебаний имеет вид:

$$8 \frac{d^2 q}{dt^2} + 32 \frac{dq}{dt} + 12,6 \cdot 10^6 q = 0.$$

Индуктивность контура  $L = 0,5 \text{ Гн}$ . Вычислите сопротивление  $R$ , емкость  $C$  контура и собственную частоту  $\omega_0$  колебаний.

**9.28.** Определите диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  глицерина, если его абсолютный показатель преломления  $n = 5,1$ . Магнитную проницаемость  $\mu$  принять равной единице.

## ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**9.1.** Напряженность поля точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от него равна:

а)  $E = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ ;

г)  $E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ ;

б)  $E = \varepsilon_0\varepsilon r q^2$ ;

д)  $E = q r$ .

в)  $E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon r}$ ;

**9.2.** Принцип суперпозиции электрических полей заключается в следующем:

- а) напряженность электрического поля системы неподвижных точечных зарядов равна векторной сумме напряженностей, создаваемых в данной точке каждым из этих зарядов в отдельности;
- б) электрическое поле внутри проводника равно нулю;
- в) поток вектора напряженности электрического поля через замкнутую поверхность равен сумме зарядов, находящихся внутри нее;
- г) в изолированной системе суммарный электрический заряд равен нулю;
- д) электрическое поле стремится развернуть электрический диполь так, чтобы его дипольный момент был ориентирован по направлению поля.

**9.3.** Работа, совершаемая над электрическим зарядом силами электрического поля, равна:

- а) произведению заряда на напряженность электрического поля;
- б) произведению заряда на убыль потенциала;
- в) отношению напряженности электрического поля к величине заряда;
- г) отношению дипольного момента к напряженности электрического поля;
- д) произведению заряда на потенциал электрического поля.

**9.4.** Потенциал поля точечного заряда  $q$  на расстоянии  $r$  от заряда:

- а)  $\varphi = qr^2$ ; б)  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r^2}$ ; в)  $\varphi = \frac{4\pi q^2}{\epsilon_0 r^2}$ ; г)  $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$ ; д)  $\varphi = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon r}$ .

**9.5.** На электрический диполь, момент которого равен  $\vec{p}$ , помещенный в электрическое поле напряженностью  $\vec{E}$ , действует момент сил:

- а)  $M = (\vec{p} \cdot \vec{E})$ ; г)  $\vec{M} = \frac{\vec{E}}{\vec{p}}$ ;
- б)  $\vec{M} = [\vec{E} \times \vec{p}]$ ; д)  $\vec{M} = [\vec{p} \times \vec{E}]$ .
- в)  $|\vec{M}| = \vec{p}\vec{E} \cos \alpha$ ;

**9.6.** Заряд электрического конденсатора равен:

- а)  $q = CU$ ; г)  $q = \frac{UC^2}{2}$ ;
- б)  $q = \frac{CU^2}{2}$ ; д)  $q = \frac{2U}{C}$ .
- в)  $q = \frac{C}{U}$ ;

**9.7.** При последовательном соединении конденсаторов их полная емкость равна:

- а)  $C = \sum_{i=1}^n C_i$ ; б)  $C = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ ; в)  $C = \sqrt{\sum_{i=1}^n C_i^2}$ ; г)  $C = \left( \sum_{i=1}^n \sqrt{C_i} \right)^2$ ; д)  $\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$ .

**9.8.** Внутри плоского конденсатора поле:

- а) равно нулю;
- б) однородно;
- в) изменяется по экспоненциальному закону от положительной пластины к отрицательной;
- г) изменяется по линейному закону от положительной пластины к отрицательной;
- д) изменяется по гиперболическому закону от положительной пластины к отрицательной.

**9.9.** Энергия единичного заряженного проводника:

- а)  $W = CU$ ;
- б)  $W = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ ;
- в)  $W = \frac{CU^2}{2}$ ;
- г)  $W = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2}$ ;
- д)  $W = \frac{q}{U}$ .

**9.10.** Объемная плотность энергии электрического поля равна:

- а)  $w = \frac{CU^2}{2}$ ;
- б)  $w = \frac{E^2}{2}$ ;
- в)  $w = CU$ ;
- г)  $w = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon E^2}{2}$ ;
- д)  $w = \frac{CU}{E}$ .

**9.11.** Поляризованностью называется:

- а) произведение заряда на напряженность электрического поля;
- б) дипольный момент единицы объема диэлектрика;
- в) произведение заряда на потенциал электрического поля;
- г) заряд единицы объема проводника;
- д) заряд единицы площади поверхности.

**9.12.** Для воды характерна:

- а) электронная поляризация;
- б) деформационная поляризация;
- в) ионная поляризация;
- г) ориентационная поляризация;
- д) отсутствие поляризации.

**9.13.** Плотностью электрического тока называется:

- а) векторная величина, равная по модулю электрическому заряду, проходящему за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению упорядоченного движения заряженных частиц;
- б) скалярная величина, численно равная заряду, проходящему через поперечное сечение проводника за единицу времени;
- в) сила, действующая на единичный положительный заряд;
- г) энергия, переносимая заряженными частицами за единицу времени через единицу площади поверхности;
- д) энергия единицы объема проводника.

**9.14.** Закон Ома в дифференциальной форме имеет вид:

а)  $I = \frac{U}{R}$ ; б)  $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ ; в)  $I = \frac{E}{R+r}$ ; г)  $j = \frac{I}{S}$ ; д)  $I = \frac{dq}{dt}$ .

**9.15.** Масса вещества, выделившегося на электроде при электролизе, равна:

а)  $m = CU$ ; б)  $m = \frac{U^2}{R}$ ; в)  $m = qUt$ ; г)  $m = kIt$ ; д)  $m = \frac{U^2}{t}$ .

**9.16.** Магнитный момент  $p_m$  контура площадью  $S$  с током  $I$  равен:

а)  $\vec{p}_m = IS\vec{n}$ ; б)  $\vec{p}_m = \frac{I\vec{n}}{S}$ ; в)  $p_m = \frac{I}{S}$ ; г)  $\vec{p}_m = [\vec{I} \times \vec{S}]$ ; д)  $p_m = (\vec{I} \cdot \vec{S})$ .

**9.17.** Магнитный момент  $\vec{p}_m$ , помещенный в магнитное поле индукцией  $\vec{B}$ , обладает энергией:

а)  $W = p_m B^2$ ; г)  $W = (\vec{p}_m \cdot \vec{B})$ ;

б)  $W = -(\vec{p}_m \cdot \vec{B})$ ; д)  $W = p_m^2 B$ .

в)  $W = \frac{p_m}{B}$ ;

**9.18.** Заряженная частица влетает в однородное магнитное поле под углом  $\alpha$  к направлению поля, причем  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Она будет двигаться:

а) по прямой;

б) по окружности;

в) по параболе;

г) по винтовой линии вдоль силовых линий магнитного поля;

д) по винтовой линии против силовых линий магнитного поля.

**9.19.** На проводник с током в магнитном поле действует:

а) сила Кулона;

б) сила Ампера;

в) сила Лоренца;

г) центростремительная сила;

д) центробежная сила.

**9.20.** Закон Био—Савара—Лапласа в скалярной форме имеет вид:

а)  $H = \mu_0 B$ ; г)  $H = \frac{I}{4\pi} \int \frac{\sin \alpha dl}{r^2}$ ;

б)  $B = qvH$ ; д)  $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$ .

в)  $B = p_m H$ ;

**9.21.** Напряженность магнитного поля, созданного прямым бесконечно длинным проводником с током  $I$ , на расстоянии  $d$  от него:

а)  $H = \frac{I}{4\pi d}$ ; б)  $H = Id$ ; в)  $H = \frac{I}{2d}$ ; г)  $H = \frac{I}{2\pi d}$ ; д)  $H = \frac{Id}{2}$ .





- в) напряжение отстает от тока по фазе на  $\pi/2$ ;  
 г) напряжение и ток изменяются в противофазе;  
 д) напряжение и ток сдвинуты по фазе на угол  $\varphi$ ,  $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ .

**9.29.** Полное сопротивление цепи переменному току равно:

а)  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ ;      г)  $Z = \frac{X_L - X_C}{R}$ ;

б)  $Z = \frac{1}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{X_L}{X_C}\right)^2}}$ ;      д)  $Z = \frac{R}{\sqrt{X_L^2 - X_C^2}}$ .

в)  $Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{X_C}{X_L}\right)^2}$ ;

**9.30.** Среднее значение мощности в цепи переменного тока равно:

а)  $P = I_0 U_0$ ;      г)  $P = \frac{I_0^2 U_0}{2}$ ;

б)  $P = \frac{I_0 U_0}{2} \cos \varphi$ ;      д)  $P = \frac{I_0}{U_0} \cos \varphi$ .

в)  $P = \frac{I_0 U_0^2}{2}$ ;

## Глава 10

---

# СТРОЕНИЕ И СВОЙСТВА БИОЛОГИЧЕСКИХ МЕМБРАН

Биофизика мембран изучает структуру биологических мембран, транспорт веществ через них, генерацию и распространение нервного импульса, процессы рецепции и преобразования энергии, большинство которых осуществляются на биомембранах.

Биологические мембраны выполняют в организме множество функций: они ограничивают клетку (так называемые цитоплазматические мембраны или плазмалемма) и клеточные органеллы, разделяя клетку на отдельные области (компартаменты), что позволяет поддерживать неравновесное состояние организма; формируют межклеточные контакты, обеспечивая механическую защиту клеток, избирательный и регулируемый транспорт веществ, проведение нервного импульса, участвуют в синтезе АТФ, обеспечивают оптимальное расположение в пространстве мембранных белков, которые осуществляют ферментативные реакции, обеспечивают работу рецепторов, иммунной системы.

Данный раздел биофизики особенно важен для фармации. Это связано с тем, что эффективность лекарств зависит от скорости их проникновения в ту или иную ткань, что определяется проницаемостью биологических мембран. Кроме того, действие многих лекарств направлено на изменение проницаемости мембран для некоторых веществ или на изменение других свойств мембран. Так как многие патологические процессы, действие физических и химических факторов в первую очередь отражаются на мембранах, то изучение их свойств нашло широкое применение в медицине.

### § 10.1. СТРУКТУРА МЕМБРАН

В настоящее время является общепризнанной предложенная в 1971 году Николсоном и Сингером жидкостно-мозаичная модель биологической мембраны (рис. 10.1.1), согласно которой основу ее



вали друг с другом, а полярные «головки» — с водой. Поэтому липиды в гидрофильной среде самопроизвольно формируют двойной слой (бислоем): внутри оказываются гидрофобные участки, а снаружи — гидрофильные. Такая организация липидных молекул отвечает состоянию с наименьшим значением потенциала Гиббса. Образовавшийся билипидный слой не образует краев, а стремится замкнуться на себя. Так, например, образуются липосомы (см. ниже).

Подобное строгое пространственное расположение молекул в мембране во многом определяет ее физические свойства. Мембраны имеют высокое удельное электрическое сопротивление (порядка  $10^7 \text{ Ом} \cdot \text{м}^2$ ) и высокую удельную емкость (приблизительно  $0,5 \cdot 10^{-2} \text{ Ф/м}^2$ ). Диэлектрическая проницаемость мембранных липидов равна 2.

Большинство фосфолипидов имеют два жирнокислотных остатка. Такие липиды имеют форму, близкую к цилиндру. Если же в липиде одна из двух жирных кислот отсутствует, например в результате перекисного окисления липидов или действия некоторых фосфолипаз, то молекула напоминает конус. В водном растворе такие липиды образуют мицеллы (рис. 10.1.3), а в мембране — гидрофильные поры (рис. 10.1.1), через которые способны проходить молекулы воды и ионы, для которых в норме проницаемость мембраны крайне мала. Изменение проницаемости мембраны для веществ может привести к нарушению функционирования и гибели клетки. Ионизирующее излучение усиливает процессы перекисного окисления липидов, а следовательно, способствует образованию пор, что является одним из механизмов поражения клетки при воздействии излучения.

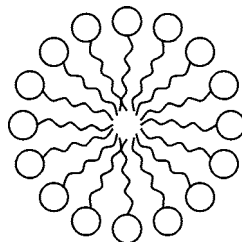


Рис. 10.1.3. Мицелла

Мембраны содержат большое число различных белков. Их количество так велико, что поверхностное натяжение мембраны ближе к величине поверхностного натяжения на границе раздела «белок—вода» ( $\sigma \sim 10^{-4} \text{ Н/м}$ ), чем «липид—вода» ( $\sigma \sim 10^{-2} \text{ Н/м}$ ). Концентрация мембранных белков зависит от вида клетки. Например, в миелиновой оболочке аксона белков в 2,5 раза меньше, чем липидов, а в эритроцитарной мембране, наоборот, — белков в 2,5 раза больше. Одни белки находятся на поверхности мембраны (периферические белки), другие частично погружены в липидный слой или пронизывают мембрану насквозь (интегральные белки).

*Интегральные белки*, так же как и липиды, обладают свойством амфифильности: та часть белка, которая находится в мембране, состоит из гидрофобных аминокислот, обычно скрученных в  $\alpha$ -спираль; другая часть, выступающая из мембраны, — из гидрофиль-

ных аминокислот. Интегральные белки удерживаются в мембране благодаря гидрофобным взаимодействиям, а кроме них иногда и молекулами цитоскелета — микротрубочками или микрофиламентами (рис. 10.1.1). К концу интегрального белка, выступающего во внеклеточную среду, могут быть присоединены углеводы. Эти комплексы, называемые гликопротеинами, часто являются рецепторами и играют важную роль в иммунных реакциях организма. Примерами интегральных белков являются белок фоторецепторных мембран — бактериородопсин, пронизывающий мембрану семь раз, белок эритроцитов — гликофорин, к полипептидной цепи которого могут быть присоединены различные олигосахариды; эти гликопротеины определяют группу крови системы АВ0. Многие интегральные белки образуют каналы, через которые могут проходить водорастворимые молекулы и ионы. В этом случае внутренняя часть канала содержит гидрофильные радикалы аминокислот.

*Периферические белки* могут находиться как с внутренней, так и с внешней стороны мембраны. Обычно они связаны с мембраной электростатическими взаимодействиями, то есть значительно слабее, чем интегральные белки. Поэтому многие периферические белки легко удаляются с мембраны.

Углеводы (как правило, в виде гликолипидов и гликопротеинов) в основном содержатся в гликокаликсе<sup>1</sup> животных клеток и клеточной стенке растительных клеток и бактерий. Эти структуры примыкают к липидному бислою. Удельная доля углеводов в биомембранах, как правило, составляет не более 10—15 %.

Толщина биологических мембран составляет 5—10 нм, однако, несмотря на это, их доля в сухой массе клеток превышает 50 %. Это объясняется плотной упаковкой компонентов мембран, а также большой суммарной площадью цитоплазматических и внутриклеточных мембран.

Все природные мембраны асимметричны, то есть одинаковые молекулы липидов находятся на наружной и внутренней поверхностях мембраны в различных концентрациях. Липиды этих двух поверхностей отличаются, как правило, своими гидрофильными головками. Свойство асимметрии присуще и расположению мембранных белков. Например, углеводные компоненты мембранных гликолипидов находятся только снаружи клетки. Асимметрия мембран часто способствует тому, что транспорт веществ осуществляется только в каком-либо одном направлении.

Мембранные липиды и белки обладают большой подвижностью, то есть способны диффундировать вследствие теплового движения. Если перемещение их молекул происходит в пределах од-

---

<sup>1</sup> Гликокаликс — мукополисахаридная поверхностная оболочка клетки.

ного мембранного слоя, то такой процесс называется *латеральной диффузией*; если же их молекулы перемещаются из одного слоя в другой, то процесс называется «*флип-флоп*»-переход.

Частота перескоков молекул вследствие латеральной диффузии равна

$$\nu = 2\sqrt{3} \frac{D}{A}, \quad (10.1.1)$$

где  $D$  — коэффициент латеральной диффузии;  $A$  — площадь, занимаемая одной молекулой на поверхности мембраны.

Время оседлой жизни молекулы в одном положении обратно пропорционально частоте перескоков:

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{A}{2\sqrt{3}D}. \quad (10.1.2)$$

При этом среднее квадратичное перемещение молекул за время  $t$  составляет:

$$S_{\text{ср. кв}} = 2\sqrt{Dt}. \quad (10.1.3)$$

Коэффициент диффузии липидов очень велик. Например, липиды мембран саркоплазматического ретикулума при температуре 40 °С имеют коэффициент диффузии, равный  $1,2 \cdot 10^{-11} \text{ м}^2/\text{с}$ . Если  $A = 7 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$ , то эти липиды за одну секунду совершают  $5,9 \cdot 10^7$  перескоков, то есть время оседлой жизни липида составляет  $1,7 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ . Для молекул яичного лецитина  $S_{\text{ср. кв}} = 5 \text{ мкм}$ , то есть за одну секунду каждая молекула липида способна оббежать вокруг такой клетки, как *E. coli*<sup>1</sup>. Липиды, находящиеся вблизи молекул белков в пределах двух-трех диаметров липидной молекулы, диффундируют с несколько меньшей скоростью, чем свободные липиды.

Молекулы белков также довольно быстро перемещаются, хотя и медленнее, чем липиды. Так, белковые молекулы антигенов лимфоцитарной мембраны имеют  $D = 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $S_{\text{ср. кв}} = 0,2 \text{ мкм}$ . Подвижность многих мембранных белков бывает резко ограничена микротрубочками или микрофиламентами, удерживающими белки в определенном месте на мембране.

Кроме поступательного движения, мембранные молекулы совершают еще и вращательное. Молекулы фосфолипидов поворачиваются на 1 радиан за  $10^{-9} \text{ с}$ , родопсин — за  $10^{-6} \text{ с}$ , цитохром-оксидаза — за  $10^{-4} \text{ с}$ .

По сравнению с латеральной диффузией «флип-флоп»-переходы происходят гораздо реже. Среднее время между переходами

<sup>1</sup> *Escherichia coli* — кишечная палочка (лат.).

молекулы фосфолипида с одной поверхности мембраны на другую не превышает одного часа. Молекулы белков почти не испытывают таких переходов, за редким исключением.

Большие различия между скоростями латеральной диффузии и «флип-флоп»-переходов очень важны. Столь большая скорость латеральной диффузии обеспечивает высокую скорость химических реакций, происходящих на мембранах, а малая скорость «флип-флоп»-переходов способствует сохранению ассиметрии мембран.

В организме позвоночных, а также многих беспозвоночных животных существуют так называемые *базальные мембраны*. Эти мембраны представляют собой стенки, окружающие группы клеток или реже отдельные клетки, часто они расположены между эпителиальной и соединительной тканью, в стенках кровеносных сосудов. Строение базальных мембран принципиально отличается от строения билипидных мембран клеток. Базальные мембраны в основном состоят из гликолипидов и белков (коллагена, ламинина, фибронектина и др.). Они обеспечивают механические связи между клетками, играют роль фильтра, особенно в стенках кровеносных сосудов, где они регулируют проникновение веществ из крови в ткани. Система базальных мембран капилляров мозга называется гематоэнцефалическим барьером. Благодаря ему в мозг не проникают многие вещества, в том числе целый ряд лекарственных веществ.

## § 10.2. ИСКУССТВЕННЫЕ МЕМБРАННЫЕ СТРУКТУРЫ

Для изучения многих свойств мембран, таких, как проницаемость для различных веществ (в том числе и лекарств), электропроводность, механизм формирования трансмембранных потенциалов и других, удобно использовать не природные, а искусственные мембраны. Последних существует несколько видов.

Известно, что липиды, нанесенные на поверхность воды, не смешиваются с ней, а образуют пленку. При нанесении некоторого количества липидов на поверхность воды можно получить мономолекулярный слой. Благодаря свойству амфифильности, на границе раздела вода — воздух гидрофильные «головки» липидов обращены к воде, а гидрофобные «хвосты» — в воздух.

Такие мономолекулярные слои удобно использовать для изучения механических свойств мембран, подвижности и упаковки мембранных молекул, всевозможных процессов, протекающих на границе раздела фаз, а также действия лекарств. Монослои готовят не только из искусственных липидов, но и из липидов природных мембран как здоровых, так и патологических клеток, что позволяет про-



водить ряд биологических и медицинских исследований. Известно, что некоторые физические (например изменение температуры) и химические (например действие некоторых анестетиков) воздействия способны изменить величину площади, занимаемой одной молекулой фосфолипида. Монослои позволяют относительно несложными методами измерить величину этого изменения.

На способности липидов образовывать мономолекулярные слои на границе раздела гидрофобной и гидрофильной фаз основано действие моющих средств. Мыло состоит из липидных молекул, которые в воде окружают засаленные участки отмываемой поверхности. Гидрофобные фрагменты загрязнений оказываются внутри капсулы, окруженной монослоем из молекул мыла. Снаружи такая капсула имеет гидрофильные группы и поэтому легко смывается водой.

Монослои имеют существенный недостаток: они состоят из одного слоя липидов, в то время как природные мембраны образованы двумя слоями. Этого недостатка лишены такие искусственные мембранные структуры, как липосомы и плоские бислойные липидные мембраны.

**Липосомы** (рис. 10.2.1) образуются при добавлении фосфолипидов в полярный растворитель. При этом происходит самопроизвольное формирование бислойных замкнутых структур, так как именно такая структура отвечает состоянию с минимальной энергией. Как правило, спонтанно образуются многослойные (мультиламеллярные) липосомы, в которых каждый липидный бислой отделен от другого слоем воды. Толщина билипидных слоев составляет 6,5—7,5 нм, в зависимости от природы липидов. Монослойные (моноламеллярные) липосомы можно получить при воздействии ультразвуком на эмульсию с многослойными липосомами. Липосомы, полученные этим методом, не очень удобны для исследований, так как слишком малы (диаметр 20—40 нм). В настоящее время существуют методы для получения липосом большего размера (диаметром до 400 нм и более). Липосомы могут образовывать и природные мембраны при действии на них разрушающих факторов (ультразвук, механические воздействия).

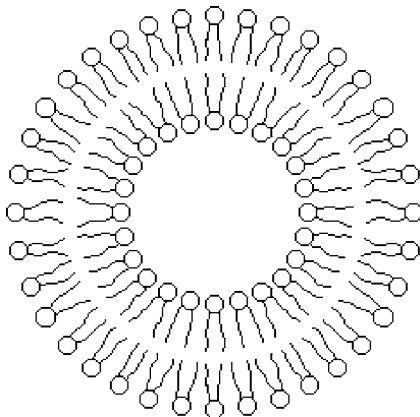


Рис. 10.2.1. Липосома

В состав мембраны липосом, кроме липидов, могут быть включены белки, а также небольшие фрагменты природных мембран. Липосомы, содержащие белки, называются *протеолипосомами*. Они широко применяются для исследования мембран. Липосомы позволяют, изменяя липидный и белковый состав, смоделировать цитоплазматические мембраны митохондрий, мембраны эндоплазматического ретикулума и других органелл клетки. С помощью липосом можно определить проницаемость мембраны для того или иного лекарственного препарата. Для этого липосомы получают в растворе, содержащем изучаемый препарат. Часть препарата оказывается внутри липосом, после этого оставшуюся часть выводят из окружающего раствора и по количеству препарата, просачиваемого из липосом в раствор за определенное время, определяют скорость его выхода.

Липосомы можно использовать не только в научных исследованиях, но и на практике. При введении внутрь липосомы лекарственного препарата облегчается его доставка и проникновение в ткани или органы. Состав липосомальных липидов можно подобрать таким образом, что такая оболочка будет совершенно не токсична. В косметологии, например, в состав кремов включают липосомы, содержащие биологически активные вещества. Рассматривается возможность введения инсулина с помощью липосом. Билипидная оболочка защитит белковую молекулу инсулина от действия ферментов пищеварительного тракта. Это позволит вводить инсулин перорально, а не с помощью инъекций.

Иногда требуется доставить препарат именно в данный орган или определенный участок органа. Известно, что каждый класс клеток организма имеет на своей мембране среди множества белков отличительные белки (антигены), свойственные только этим клеткам. К каждому антигену существует комплементарная молекула (антитело), способная взаимодействовать только со «своим» антигеном. Если такое антитело включить в билипидную оболочку липосомы, то, случайно оказавшись (с током крови) возле нужного антигена, к клетке прикрепится антитело, а с ним — и липосома с лекарством. Однако подобные методы терапии еще только разрабатываются.

Плоские бислойные липидные мембраны (БЛМ) можно получить, если на небольшое отверстие диаметром около 1 мм в тонкой фторопластовой пластине, помещенной в воду, нанести каплю углеводородного (например гептанового) раствора липида. Растворитель диффундирует в раствор, образуется толстая липидная пленка, которая самопроизвольно утончается в течение 5—20 мин до тех пор, пока не получится билипидная мембрана толщиной 5—7 нм (рис. 10.2.2). Утончению пленки способствуют силы поверхностного натяжения и силы Ван-дер-Ваальса, притягиваю-

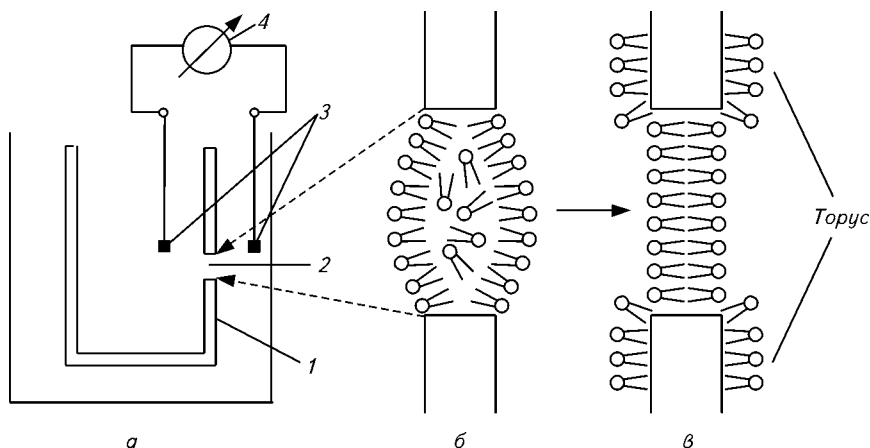


Рис. 10.2.2. Образование бислойной липидной мембраны:

*а* — ячейка для получения БЛМ и изучения ее свойств; *б* и *в* — последовательные этапы формирования БЛМ; 1 — фторопластовый стаканчик; 2 — отверстие в стенке стаканчика; 3 — электроды; 4 — вольтметр

щие слои воды по обе стороны пленки. Лишние липидные молекулы скапливаются на ободке отверстия в пластиковом стаканчике, образуя торус.

В БЛМ, так же как и в липосомы, можно включить белки, например, формирующие белковый канал для какого-либо иона, и другие мембранные компоненты, что делает БЛМ хорошим объектом для изучения электрических, транспортных и других свойств мембран. Например, БЛМ помогли изучить действие антибиотиков валиномицина и грамицидина, а также ряда других лекарственных препаратов, изменяющих проницаемость мембраны.

Важную информацию можно получить, измеряя разность потенциалов в растворах по обе стороны БЛМ.

## § 10.3. ФАЗОВЫЕ ПЕРЕХОДЫ В МЕМБРАНАХ

При нормальных физиологических условиях мембраны находятся в жидком состоянии, однако, в отличие от жидкостей, они имеют строгую упорядоченную пространственную структуру. Благодаря таким свойствам состояние мембран называется жидкокристаллическим.

По данным физических методов анализа, таких как рентгеноструктурный анализ, микрокалориметрия (измерение теплоемкости) и других, биологические мембраны способны испытывать фазовый переход первого рода. С понижением температуры мембраны

переходят из жидкокристаллического состояния в твердокристаллическое (гель-состояние).

При таком переходе сохраняется общая структура мембраны: липиды по-прежнему образуют двойной слой с обращенными внутрь гидрофобными «хвостами», но порядок в системе еще более возрастает: «хвосты» липидов вытянуты строго параллельно друг другу (рис. 10.3.1), их колебания ограничены. Если в жидком состоянии площадь мембраны, приходящаяся на одну молекулу липида, составляет  $0,58 \text{ нм}^2$ , то в гель-состоянии эта величина уменьшается

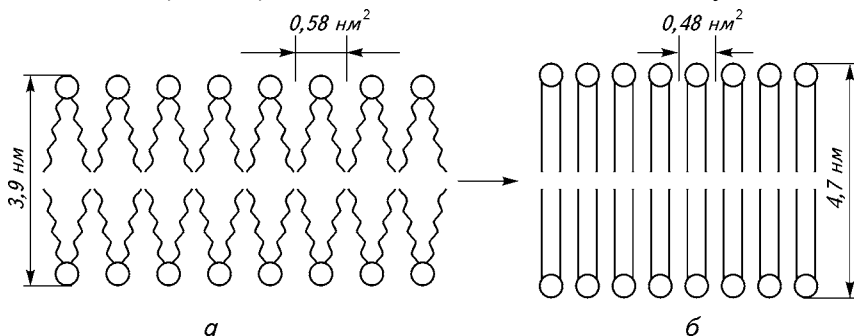


Рис. 10.3.1. Фазовый переход мембранных липидов из жидкокристаллического состояния (а) в гель-состояние (б) при понижении температуры

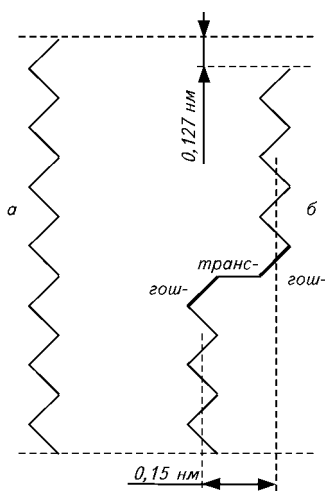


Рис. 10.3.2. Углеводородные цепи в полностью *транс*-конформации (а) и в *гош*-конформации (б)

с до  $0,48 \text{ нм}^2$ . Толщина мембраны при переходе в твердокристаллическое состояние увеличивается, но за счет уменьшения площади объем мембраны в целом уменьшается.

Подвижность липидных молекул в обоих фазовых состояниях существенно отличается. В гель-состоянии липиды способны совершать только совместные колебания или вращательные движения. В жидком состоянии липидные «хвосты» имеют гораздо большую свободу, особенно велика их подвижность в середине мембраны. Молекулы липидов жидкой мембраны могут находиться в двух конформациях: в полностью *транс*- и в двойной *гош*-конформации<sup>1</sup> (*гош-транс-гош*-конформации), в гель-состоянии реализуется только *транс*-конформация (рис. 10.3.2). Дли-

<sup>1</sup> *Гош*-конформация — поворот на  $\pm 120^\circ$  относительно *транс*-конформации.

на молекулы в *гош*-конформации меньше, чем в *транс*-, а ширина, наоборот, — больше; этим объясняется уменьшение толщины и увеличение площади мембраны, приходящейся на один липид, при переходе из геле- в жидкокристаллическое состояние.

Способность липидов жидкокристаллической мембраны переходить в *гош*-конформации способствует повышению ее проницаемости для некоторых гидрофильных низкомолекулярных соединений, например воды. Если два соседних участка рядом расположенных молекул находятся в *гош*-конформации (рис. 10.3.3), то образуется так называемый кинк (от англ. *kink* — изгиб). Кинки способны перемещаться вдоль липидных «хвостов», и случайно оказавшаяся между ними небольшая молекула может таким образом пересечь гидрофобный слой.

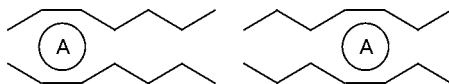


Рис. 10.3.3. Перенос молекулы А в результате диффузии кинка

В последнее время доказано, что при фазовых переходах из жидкокристаллического состояния в геле-состояние и обратно в мембранах образуются поры диаметром 2—6 нм. То есть при фазовом переходе увеличивается проницаемость мембраны для ионов и низкомолекулярных соединений, способных проходить через такие поры. Ниже будет показано, что проведение нервного импульса определяется изменением проницаемости мембраны для некоторых ионов. Было высказано предположение, что механизмы терморепции (чувствительность нервных клеток-рецепторов к изменению температуры), возможно, определяются фазовым переходом в мембранах рецепторов, который способствует возникновению нервного импульса. Так как фазовый переход может иметь и химическую природу (например, липиды мембраны могут перейти в геле-состояние вследствие увеличения концентрации  $\text{Ca}^{2+}$  от 1 до 10 ммоль/л в межклеточной жидкости), то, возможно, эти процессы определяют и хеморецепцию (чувствительность к химическим веществам).

Фазовый переход в мембранах происходит не мгновенно, а на протяжении некоторого температурного интервала. Температурой фазового перехода называется температура, при которой одна половина мембранных липидов находится в жидкокристаллическом состоянии, а другая половина — в твердокристаллическом.

Температура фазового перехода зависит от липидного состава мембран: чем больше в «хвостах» липидов двойных связей (а их число в одном «хвосте» молекулы может колебаться от нуля до четырех), то есть чем больше степень ненасыщенности жирнокислотных остатков, тем ниже температура фазового перехода. Для мембран, состоящих из насыщенных липидов, эта величина со-

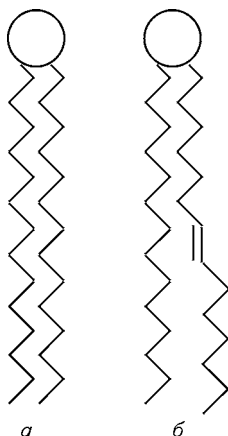


Рис. 10.3.4. Полностью насыщенный липид (а) и липид, у которого один из жирнокислотных остатков является ненасыщенным (б)

ставляет  $+60\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а для мембран, состоящих из ненасыщенных липидов, — снижается до  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Такая разница в температурах плавления объясняется тем, что ненасыщенные жирные кислоты, находящиеся в *цис*-конформации, способствуют удалению друг от друга молекул липидов, и, следовательно, уменьшают силы сцепления между ними (рис. 10.3.4). Чем слабее взаимосвязь между молекулами, тем ниже температура перехода мембран в жидкую фазу.

Живые организмы, обитающие в разных климатических условиях, имеют различное соотношение насыщенных и ненасыщенных связей в молекулах липидов, что обеспечивает им приспособление к холоду или жаре в зависимости от среды их обитания. Более того, это соотношение меняется для разных участков тела одного и того же организма. Например, температура ноги возле копыта полярного оленя может составлять  $-20\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а температура ноги возле туловища достигает  $+30\text{ }^{\circ}\text{C}$ . Однако кле-

точные мембраны не претерпевают фазовый переход за счет того, что мембраны клеток возле копыта содержат больше ненасыщенных липидов, а возле туловища — больше насыщенных. Известно, что животные жиры при комнатной температуре обычно находятся в твердом состоянии, а растительные, наоборот, — в жидком. Это объясняется тем, что в животных клетках меньше ненасыщенных липидов, чем в растительных.

Фазовые переходы мембранных липидов носят кооперативный характер, то есть чем большее количество липидов совершило фазовый переход, тем легче это будет сделать остальным. В идеале, если на каком-либо участке одна молекула липида перешла из твердой в жидкокристаллическую фазу, то за этим сразу же последует фазовый переход всех липидов этого участка (закон «все или ничего»). Такой участок называется кооперативной единицей, а число молекул, входящих в него, — размером кооперативной единицы  $n$ . Для липидных мембран  $n$  может достигать нескольких десятков. Величина  $n$  тем больше, чем более однороден химический состав мембран. Для уменьшения однообразия липидного состава мембраны животных клеток содержат большое количество холестерина, например, в эритроцитах млекопитающих его удельная доля от всех липидов составляет от 40 до 60 %. Это значительно уменьшает размер кооперативной единицы и снижает различия между твердой и жидкой фазами.

Одним из наиболее распространенных методов изучения фазовых переходов в мембранах является метод микрокалориметрии, который позволяет определить количество теплоты  $Q$ , поглощенное при плавлении вещества, содержащего  $\nu$  молей молекул. Зная  $Q$ , можно рассчитать удельную энтальпию плавления:

$$\Delta H = \frac{Q}{\nu}. \quad (10.3.1)$$

Плавление вещества совершается при такой температуре ( $T_{\text{пл}}$ ), для которой энергия Гиббса в твердом состоянии ( $G_{\text{ТВ}} = H_{\text{ТВ}} - T_{\text{пл}} S_{\text{ТВ}}$ ) равна энергии Гиббса в жидком состоянии ( $G_{\text{ж}} = H_{\text{ж}} - T_{\text{пл}} S_{\text{ж}}$ ). Так как  $G_{\text{ТВ}} = G_{\text{ж}}$ , то

$$\Delta G = G_{\text{ТВ}} - G_{\text{ж}} = \Delta H - T \Delta S = 0, \quad (10.3.2)$$

откуда изменение энтропии при фазовом переходе:

$$\Delta S = \Delta H / T_{\text{пл}}. \quad (10.3.3)$$

Эта величина примерно одинакова для каждой группы  $\text{CH}_2$  и составляет  $4,8 \cdot 10^{-24}$  Дж/К, тогда для моля  $\text{CH}_2$ -групп она равна 2,9 Дж/К. Таким образом, чем длиннее углеводородные цепи жирнокислотных остатков, тем больше изменение энтропии, приходящееся на один моль молекул.

Известно, что

$$S = k \ln W, \quad (10.3.4)$$

где  $k$  — постоянная Больцмана;  $W$  — статистический вес, или число возможных микросостояний системы.

Уравнение (10.3.4) позволяет определить изменение числа микросостояний одной  $\text{CH}_2$ -группы при фазовом переходе. Если в жидкокристаллическом состоянии число микросостояний равнялось  $W_{\text{ж}}$ , а в геле-состоянии —  $W_{\text{ТВ}}$ , то изменение энтропии при фазовом переходе составит:

$$\Delta S = k \ln W_{\text{ТВ}} - k \ln W_{\text{ж}} = k \ln (W_{\text{ТВ}} / W_{\text{ж}}), \quad (10.3.5)$$

откуда

$$\frac{W_{\text{ТВ}}}{W_{\text{ж}}} = e^{\Delta S/k} = e^{-4,8 \cdot 10^{-24} / (1,38 \cdot 10^{-23})} = \frac{1}{1,4}. \quad (10.3.6)$$

Здесь  $\Delta S < 0$ , так как при переходе в более упорядоченное твердокристаллическое состояние энтропия уменьшается. Таким образом, во время кристаллизации число возможных микросостояний  $\text{CH}_2$ -группы уменьшается почти в полтора раза.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

## ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 10.1.** Рассчитайте толщину  $d$  мембраны, если ее участок площадью  $S = 1 \text{ мкм}^2$  имеет электрическую емкость, равную  $C = 0,3 \cdot 10^{-14} \text{ Ф}$ . Диэлектрическая проницаемость липидов равна  $\varepsilon = 2$ .

**Решение.** Из формулы для емкости электрического конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{d}$$

выразим толщину мембраны  $d$ :

$$d = \frac{\varepsilon \varepsilon_0 S}{C}$$

и подставим численные данные:

$$d = \frac{2 \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \cdot 10^{-12}}{0,7 \cdot 10^{-14}} = 5,9 \cdot 10^{-9} \text{ м} = 5,9 \text{ нм}.$$

**Задача 10.2.** Рассчитайте коэффициент  $D$  латеральной диффузии фосфолипидов, если среднее время их оседлой жизни составляет  $\tau = 5 \cdot 10^{-8} \text{ с}$ . Площадь, занимаемая одной молекулой на мембране, составляет  $A = 5,5 \cdot 10^{-19} \text{ м}^2$ .

**Решение.** Время оседлой жизни молекулы обратно пропорционально частоте перескоков молекул на мембране вследствие латеральной диффузии

$$\tau = \frac{1}{\nu} = \frac{A}{2\sqrt{3}D},$$

откуда получаем  $D$ :

$$D = \frac{A}{2\sqrt{3}\tau} = \frac{5,5 \cdot 10^{-19}}{2\sqrt{3} \cdot 5 \cdot 10^{-8}} = 3,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{с}.$$

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**10.1.** Рассчитайте диэлектрическую проницаемость  $\varepsilon$  мембранных липидов, если толщина мембраны  $d = 10 \text{ нм}$ , удельная электрическая емкость  $C = 1,7 \cdot 10^{-3} \text{ Ф/м}^2$ .

**10.2.** Рассчитайте время  $\tau$  оседлой жизни и частоту перескоков  $\nu$  из одного мембранного слоя в другой липидов мембран саркоплазматического ретикулума, если коэффициент латеральной диффузии  $D = 12 \text{ мкм}^2/\text{с}$ , площадь, занимаемая одной молекулой фосфолипида, —  $A = 0,7 \text{ нм}^2$ .

**10.3.** Рассчитайте среднее квадратичное перемещение  $S_{\text{ср.кв}}$  молекул белков за  $1 \text{ с}$ , если коэффициент латеральной диффузии для них составляет приблизительно  $D = 10^{-14} \text{ м}^2/\text{с}$ .



**10.4.** Олеиновая кислота  $\text{CH}_3(\text{CH}_2)_7\text{CH}=\text{CH}(\text{CH}_2)_7\text{COOH}$  массой  $m = 7,3$  мкг образует на поверхности воды монослойную пленку круглой формы диаметром  $d = 7,3$  см. Вычислите площадь  $A$ , которую занимает одна молекула олеиновой кислоты.

**10.5.** Сколько молекул фосфолипида находится в липосоме диаметром  $D = 40$  нм, если площадь, занимаемая одной молекулой,  $A = 0,6$  нм<sup>2</sup>. Площади внутреннего и внешнего слоев приблизительно равны, плотность упаковки фосфолипидов постоянна.

**10.6.** Рассчитайте температуру  $t_{\text{пл}}$  фазового перехода жирной кислоты, если во время плавления энтальпия изменяется на  $\Delta H = 15 \text{ кДж/моль}$ , а энтропия — на  $\Delta S = 52 \text{ Дж/(К} \cdot \text{моль)}$ .

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**10.1.** Толщина биологических мембран составляет порядка:

- а) 0,01 нм; б) 0,1 нм; в) 10 нм; г) 100 нм; д) 1 мкм.

**10.2.** Согласно жидкостно-мозаичной модели, биологическая мембрана состоит:

- а) из билипидного слоя;  
б) двух слоев липидов с белковым слоем между ними;  
в) двух слоев липидов, окруженных сверху и снизу двумя сплошными белковыми слоями;  
г) билипидного слоя, белков и микрофиламентов;  
д) слоя липидов с вкраплениями белков и углеводов.

**10.3.** Латеральной диффузией называется диффузия:

- а) молекул из одного липидного слоя в другой;  
б) молекул через биологическую мембрану;  
в) молекул в мембране в пределах одного слоя;  
г) белковых молекул из одного липидного слоя в другой;  
д) ионов через бислойную мембрану.

**10.4.** Переход молекул из одного липидного слоя в другой называется:

- а) «флип-флоп»-переходом;  
б) облегченной диффузией;  
в) активным транспортом;  
г) латеральной диффузией;  
д) пассивным транспортом.

**10.5.** Время оседлой жизни молекулы в одном положении составляет:

- а)  $\tau = \frac{A}{\sqrt{6}D}$ ; б)  $\tau = \frac{A}{2\sqrt{3}D}$ ; в)  $\tau = \frac{D}{2\sqrt{3}A}$ ; г)  $\tau = \frac{D}{\sqrt{6}A}$ ; д)  $\tau = \frac{\sqrt{A}}{2D}$ .

**10.6.** Среднее квадратичное перемещение молекул за время  $t$  составляет:

- а)  $S_{\text{ср. кв}} = 2t\sqrt{Dt}$ ; г)  $S_{\text{ср. кв}} = 2\sqrt{Dt}$ ;  
б)  $S_{\text{ср. кв}} = 3D\sqrt{t}$ ; д)  $S_{\text{ср. кв}} = 2t\sqrt{t}$ .  
в)  $S_{\text{ср. кв}} = 3\sqrt{Dt}$ ;

**10.7.** Липосомами называются:

- а) мономолекулярные слои на границе раздела гидрофобной и гидрофильной фаз;
- б) плоские бислойные липидные мембраны;
- в) билипидные замкнутые структуры;
- г) слои липидов и белков, нанесенные на поверхность воды;
- д) то же самое, что и мицеллы.

**10.8.** Липиды в составе биологических мембран находятся:

- а) в твердом аморфном состоянии;
- б) твердокристаллическом состоянии;
- в) жидком аморфном состоянии;
- г) жидкокристаллическом состоянии;
- д) правильный ответ не приведен.

**10.9.** При фазовом переходе мембран из жидкокристаллического в гель-состояние площадь мембраны, приходящаяся на одну молекулу липида:

- а) уменьшается;
- б) увеличивается;
- в) не изменяется.

**10.10.** При фазовом переходе мембран из жидкокристаллического в гель-состояние толщина мембраны:

- а) уменьшается;
- б) увеличивается;
- в) не изменяется.

**10.11.** Чем больше в «хвостах» липидов двойных связей, тем температура фазового перехода:

- а) выше;
- б) ниже;
- в) не зависит от этого.

**10.12.** Температура плавления мембраны связана с изменением энтальпии и энтропии в этом процессе следующим образом:

- а)  $T_{пл} = \frac{\Delta H}{\Delta S}$ ;
- б)  $T_{пл} = \sqrt{\frac{\Delta H}{\Delta S}}$ ;
- в)  $T_{пл} = \frac{\Delta S}{\Delta H}$ ;
- г)  $T_{пл} = \sqrt{\frac{\Delta S}{\Delta H}}$ ;
- д)  $T_{пл} = \left( \frac{\Delta S}{\Delta H} \right)^2$ .

# ТРАНСПОРТ ВЕЩЕСТВ ЧЕРЕЗ БИОЛОГИЧЕСКИЕ МЕМБРАНЫ

Большинство процессов жизнедеятельности, таких, как всасывание, выделение, проведение нервного импульса, мышечное сокращение, синтез АТФ, связано с переносом веществ через мембраны. Этот процесс в биологических системах получил название *транспорта*.

Если перенос вещества происходит с уменьшением электрохимического потенциала, то есть не требует затрат энергии, то такой транспорт называется *пассивным*. Его разновидностями являются *диффузия* (перемещение веществ в сторону меньшей концентрации) и *фильтрация* (просачивание веществ через поры в сторону меньших значений давления). С помощью диффузии в клетку проникают растворенные молекулы кислорода и углекислого газа, а также не свойственные организму соединения, например яды и лекарственные препараты. Примером фильтрации в организме является перенос воды через стенки кровеносных сосудов, выдавливание плазмы крови в почечные канальцы.

Транспорт веществ через липидный бислой с помощью простой диффузии совершается с малой скоростью, особенно в случае заряженных частиц, и почти не контролируется. Поэтому в процессе эволюции для некоторых веществ появились специфические мембранные каналы и мембранные переносчики, которые способствуют повышению скорости переноса и, кроме того, осуществляют *селективный* (избирательный) транспорт. Пассивный транспорт веществ с помощью переносчиков называется *облегченной диффузией*.

Иногда требуется перенести вещество из области с меньшим значением электрохимического потенциала в область с большим его значением. Этот процесс не может протекать самопроизвольно и требует затрат энергии. Такой вид транспорта называется *активным*. Например, в сторону увеличения электрохимического потенциала осуществляется трансмембранный перенос ионов натрия. Если энергия, необходимая для осуществления ак-

тивного транспорта, берется за счет гидролиза АТФ или окислительно-восстановительных реакций, то такой транспорт называется *первично-активным*; если — за счет градиента концентраций других ионов, то — *вторично-активным* или *сопряженным*.

Через мембрану могут переноситься не только отдельные молекулы, но и твердые тела (*фагоцитоз*), растворы (*пиноцитоз*). Если вещество транспортируется внутрь клетки, то такой вид транспорта называется *эндоцитозом*, если наружу, то — *экзоцитозом*. В первом случае на наружной стороне мембраны образуется впячивание, постепенно превращающееся в пузырек, который отрывается от мембраны внутри клетки. Такой пузырек (фаго- или пиносома) содержит внутри транспортируемое вещество, окруженное билипидной оболочкой (везикулой). В дальнейшем везикула сливается с какой-нибудь клеточной органеллой (например лизосомой) и выпускает в нее свое содержимое. В случае экзоцитоза процесс происходит в обратной последовательности: везикула подходит к мембране с внутренней стороны клетки, сливается с ней и выбрасывает свое содержимое в межклеточное пространство.

Эффективность большинства лекарств зависит от их способности преодолеть мембранный барьер. Этот фактор необходимо учитывать при синтезе новых лекарственных соединений, а также при назначении готовых препаратов, так как всасывание многих из них зависит от физиологического состояния пациента.

## § 11.1. ПАССИВНЫЙ ТРАНСПОРТ НЕЙТРАЛЬНЫХ ЧАСТИЦ

При наличии градиента концентраций вещества совершается *диффузия* или *пассивный транспорт* указанного вещества из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией. Это явление происходит самопроизвольно (без затрат энергии) до тех пор, пока концентрации не выровняются, и суммарный поток вещества не обратится в ноль (в случае живых клеток такое выравнивание может и не наступить, если вещества непрерывно синтезируются или, наоборот, затрачиваются в ходе химических реакций в какой-либо области пространства).

Диффузия возможна по всем направлениям в пространстве, и в каждом направлении скорость ее может быть различной. Чтобы упростить вычисления, выберем только одно направление. Пассивный перенос вещества вдоль оси  $x$  описывается *уравнением Фика*:

$$J = -D \frac{dc}{dx}, \quad (11.1.1)$$

где  $J$  — поток вещества;  $D$  — коэффициент диффузии;  $dc/dx$  — градиент концентрации  $c$  в направлении  $x$ . Знак « $-$ » означает, что поток направлен в сторону меньших значений концентрации, то есть приводит к уменьшению величины концентрационного градиента.

**Поток** численно равен количеству перенесенного вещества за единицу времени через единицу площади поверхности, перпендикулярной направлению переноса<sup>1</sup>:

$$J = \frac{1}{S} \cdot \frac{dM}{dt}, \quad (11.1.2)$$

где  $dM$  — количество перенесенного вещества за время  $dt$  через поверхность площадью  $S$ . Так как  $dM/dt$  — это скорость переноса вещества, то поток прямо пропорционален данной величине.

Рассмотрим пассивный транспорт незаряженных частиц через мембрану. Если концентрация  $c_{M1}$  частиц на одной стороне мембраны у внутренней ее границы отлична от концентрации  $c_{M2}$  на другой стороне у внутренней границы (рис. 11.1.1), то на мембране создается градиент концентраций. В некотором приближении указанный градиент можно считать постоянной величиной. При условии, что  $c_{M1} > c_{M2}$ , запишем:

$$\frac{dc}{dx} = \frac{c_{M2} - c_{M1}}{l}, \quad (11.1.3)$$

где  $l$  — толщина мембраны. Подставив выражение (11.1.3) в уравнение Фика (11.1.1), получаем:

$$J = -D \frac{c_{M2} - c_{M1}}{l}. \quad (11.1.4).$$

Введем понятие **коэффициента распределения** вещества между мембраной и окружающей средой:

$$K = \frac{c_{M1}}{c_1} = \frac{c_{M2}}{c_2}, \quad (11.1.5)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  — концентрация вещества в среде 1 и среде 2 соответственно (рис. 11.1.1). Различия в значениях  $c_{M1}$  и  $c_1$ ,  $c_{M2}$  и  $c_2$  объяс-

<sup>1</sup> Строго говоря, *потоком* называется скорость переноса, то есть количество перенесенного вещества (или другой величины) за единицу времени. Поток, отнесенный к единице площади поверхности, через которую осуществляется перенос, называется *плотностью потока*. Иногда, особенно при описании процессов транспорта веществ, слово «плотность» опускают.

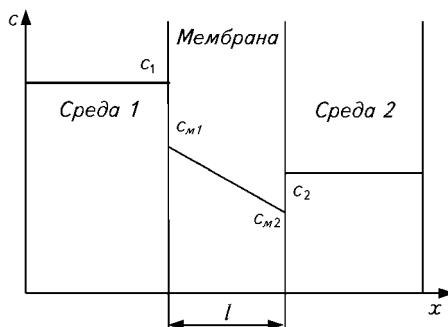


Рис. 11.1.1. Перенос вещества через мембрану

няется различной растворимостью вещества в полярных и неполярных растворителях. Значение  $K$  может быть как больше, так и меньше единицы. Выразим  $c_{м1}$  и  $c_{м2}$  из формулы (11.1.5):

$$c_{м1} = Kc_1; \quad c_{м2} = Kc_2 \quad (11.1.6)$$

и подставим их в выражение (11.1.4):

$$J = -DK \frac{c_2 - c_1}{l}. \quad (11.1.7)$$

Введем обозначение

$$P = \frac{DK}{l} \quad (11.1.8)$$

как *коэффициент проницаемости*.

Тогда получаем:

$$J = -P(c_2 - c_1). \quad (11.1.9)$$

Выражение (11.1.9) является законом Фика для пассивного транспорта веществ через мембрану. Из формул (11.1.8) и (11.1.9) видно, что величина потока, а следовательно, и скорость транспорта вещества через мембрану прямо пропорциональны коэффициенту распределения, который количественно отражает степень липофильности вещества. В эксперименте  $K$  определяют по формуле:

$$K = \frac{c_{л}}{c_{г}}, \quad (11.1.10)$$

где  $c_{л}$  — концентрация вещества в липофильной среде;  $c_{г}$  — концентрация этого же вещества в гидрофильной среде.

Чем больше значение  $K$ , тем лучше вещество растворяется в мембране и с тем большей скоростью переносится через нее. Для нейтральных веществ с приблизительно одинаковыми молекулярными массами и диаметром молекулы, но с разным значением коэффициента распределения это доказано экспериментально. Например, коэффициент проницаемости мембраны бычьих эритроцитов для 1,2-дигидроксипропана, имеющего  $K = 570$ , в 235 раз выше, чем для глицерина, коэффициент распределения которого равен 7. Напомним, что глицерин отличается от 1,2-дигидрокси-

пропана наличием третьей гидроксильной группы, способной образовывать водородные связи с молекулами воды, что значительно повышает гидрофильность глицерина. Скорость проникновения в клетку лекарств также напрямую зависит от их коэффициента распределения в неполярном и полярном растворителях.

При переносе одного моля вещества из области, где концентрация этого вещества равна  $c_1$ , в область, где его концентрация равна  $c_2$ , происходит изменение свободной осмотической энергии:

$$\Delta G = RT(\ln c_2 - \ln c_1). \quad (11.1.11)$$

Для бесконечно малых изменений концентраций можно записать:

$$dG = RT d(\ln c) = RT \frac{dc}{c}. \quad (11.1.12)$$

Разделим выражение (11.1.12) на  $dx$ :

$$\frac{dG}{dx} = RT \frac{1}{c} \cdot \frac{dc}{dx}. \quad (11.1.13)$$

Выразим

$$\frac{dc}{dx} = \frac{c}{RT} \cdot \frac{dG}{dx} \quad (11.1.14)$$

и подставим в уравнение Фика (11.1.1):

$$J = -\frac{Dc}{RT} \cdot \frac{dG}{dx} = -uc \frac{dG}{dx}, \quad (11.1.15)$$

где коэффициент

$$u = \frac{D}{RT} \quad (11.1.16)$$

называется *подвижностью частицы*. Таким образом, поток, прямо пропорционален концентрации и градиенту свободной энергии, а подвижность частиц играет роль коэффициента пропорциональности.

## § 11.2. ПАССИВНЫЙ ТРАНСПОРТ ИОНОВ

Все вышеизложенное относилось к незаряженным частицам. Поток частиц, обладающих зарядом  $q$ , при наличии градиента электрического потенциала  $d\varphi/dx$  равен

$$J = -qnu \frac{d\phi}{dx}, \quad (11.2.1)$$

где  $n$  — число частиц в единице объема;  $u$  — подвижность частицы.

Изменение свободной электрической энергии одного моля заряженных частиц составляет:

$$\Delta G = zF(\phi_2 - \phi_1) = zeN_A(\phi_2 - \phi_1) = qN_A(\phi_2 - \phi_1), \quad (11.2.2)$$

где  $z$  — заряд иона в единицах элементарного заряда;  $F = N_A e$  — число Фарадея;  $e$  — элементарный электрический заряд;  $N_A$  — число Авогадро;  $\phi_1$  — электрический потенциал в той области пространства, откуда переносятся ионы;  $\phi_2$  — электрический потенциал в той области пространства, куда переносятся ионы. Перейдя от разностей к дифференциалам и разделив это выражение на  $dx$ , получаем:

$$\frac{dG}{dx} = qN_A \frac{d\phi}{dx}. \quad (11.2.3)$$

Выразим:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{1}{qN_A} \cdot \frac{dG}{dx} \quad (11.2.4)$$

и подставим в уравнение (11.2.1):

$$J = -uc \frac{dG}{dx}, \quad (11.2.5)$$

где  $c = n/N_A$  — молярная концентрация.

Таким образом, уравнения для потоков как незаряженных, так и заряженных частиц сходны. В том случае, когда изменяется не только концентрация вещества и электрический потенциал, но и стандартный химический потенциал ( $\mu_0$ ), уравнение для потока вещества записывается в следующем виде (уравнение Теорелла):

$$J = -cu \frac{d\tilde{\mu}}{dx}. \quad (11.2.6)$$

Подставив в уравнение (11.2.6) выражение для электрохимического потенциала (5.4.6), получаем следующее:

$$J = -cu \frac{d\mu_0}{dx} - uRT \frac{dc}{dx} - cuzF \frac{d\phi}{dx}. \quad (11.2.7)$$

Стандартный химический потенциал  $\mu_0$  зависит только от природы вещества и природы растворителя. Если во всей рассматрива-



емой области диффузии отсутствуют химические превращения вещества и растворитель одинаков, то  $d\mu_0/dx = 0$ . В этом случае уравнение Теорелла сводится к электродиффузионному уравнению Нернста—Планка:

$$J = -uRT \frac{dc}{dx} - cuzF \frac{d\phi}{dx}. \quad (11.2.8)$$

Это уравнение описывает пассивный перенос частиц в условиях существования градиентов концентрации вещества и электрического потенциала в растворе или в однородной незаряженной мембране.

Один из способов решения уравнения Нернста—Планка предполагает линейную зависимость электрического потенциала  $\phi$  от координаты  $x$  (так называемое приближение постоянного поля), то есть

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\Delta\phi}{l} = \text{const}, \quad (11.2.9)$$

где  $\Delta\phi$  — разность потенциалов по обе стороны мембраны;  $l$  — толщина мембраны.

Запишем:

$$J = -uRT \frac{dc}{dx} - cuzF \frac{\Delta\phi}{l}, \quad (11.2.10)$$

а после деления переменных получаем:

$$dx = -\frac{uRT}{J + cuzF \Delta\phi/l} dc. \quad (11.2.11)$$

Проинтегрируем уравнение (11.2.11), используя граничные условия: при  $x = 0$   $c = c_{m1}$ , при  $x = l$ ,  $c = c_{m2}$ :

$$\int_0^l dx = -uRT \int_{c_{m1}}^{c_{m2}} \frac{dc}{J + cuzF \Delta\phi/l}; \quad (11.2.12)$$

получаем:

$$x|_0^l = -\frac{RTl}{zF \Delta\phi} \ln \left( J + \frac{cuzF \Delta\phi}{l} \right) \Big|_{c_{m1}}^{c_{m2}}. \quad (11.2.13)$$

Подставим пределы интегрирования:

$$l = -\frac{RTl}{zF \Delta\phi} \ln \frac{J + zFuc_{m2} \Delta\phi/l}{J + zFuc_{m1} \Delta\phi/l}, \quad (11.2.14)$$

или

$$\exp \left( \frac{zF \Delta\phi}{RT} \right) = \frac{J + zFuc_{m1} \Delta\phi/l}{J + zFuc_{m2} \Delta\phi/l}, \quad (11.2.15)$$

откуда получаем выражение для потока:

$$J = \frac{zFu \Delta\varphi}{l} \cdot \frac{c_{m2} \exp(zF \Delta\varphi/RT) - c_{m1}}{1 - \exp(zF \Delta\varphi/RT)}. \quad (11.2.16)$$

Для записи окончательного решения необходимо учесть выражения для подвижности  $u$  (11.1.16) и коэффициента проницаемости  $P$  (11.1.8), а также тот факт, что концентрации ионов внутри мембраны пропорциональны соответствующим концентрациям в водных растворах [см. формулу (11.1.5)].

Таким образом, решение электродиффузионного уравнения Нернста—Планка можно записать в виде:

$$J = \frac{zF \Delta\varphi P}{RT} \cdot \frac{c_2 \exp(zF \Delta\varphi/RT) - c_1}{1 - \exp(zF \Delta\varphi/RT)}. \quad (11.2.17)$$

Выражение (11.2.17) называется уравнением Гольдмана. Оно позволяет вычислить величину пассивного потока ионов, если известны их концентрации по обе стороны мембраны, трансмембранная разность потенциалов и коэффициент проницаемости (обычно в эксперименте его определяют методом меченых атомов).

Поток  $J$  в уравнении Гольдмана (11.2.17) является суммой двух потоков, один из которых  $J_1$  направлен из области с концентрацией  $c_1$  в область с концентрацией  $c_2$ , а другой,  $J_2$ , — наоборот. Если  $c_1 > c_2$ , то  $J_1 > J_2$ . Так как эти потоки имеют противоположное направление, то один из них берется со знаком «минус»:

$$J = J_1 - J_2. \quad (11.2.18)$$

Перепишем уравнение (11.2.17) в виде:

$$J = \frac{zF \Delta\varphi P}{RT} \cdot \frac{c_2 \exp(zF \Delta\varphi/RT)}{1 - \exp(zF \Delta\varphi/RT)} - \frac{zF \Delta\varphi P}{RT} \cdot \frac{c_1}{1 - \exp(zF \Delta\varphi/RT)}.$$

Разделив суммарный поток в уравнении (11.2.17) на односторонние составляющие, получаем выражения для  $J_1$  и  $J_2$ :

$$J_1 = \frac{zF \Delta\varphi P}{RT} \cdot \frac{c_2 \exp(zF \Delta\varphi/RT)}{1 - \exp(zF \Delta\varphi/RT)}, \quad (11.2.19)$$

$$J_2 = \frac{zF \Delta\varphi P}{RT} \cdot \frac{c_1}{1 - \exp(zF \Delta\varphi/RT)}. \quad (11.2.20)$$

Так как поток, направленный из области с концентрацией  $c_1$  в область с концентрацией  $c_2$ , зависит только от концентрации  $c_1$  ионов, а поток, направленный из области с концентрацией  $c_2$  в область с концентрацией  $c_1$ , — только от концентрации  $c_2$ , то эти уравнения доказывают независимость входящего и выходящего

потоков в случае пассивного транспорта при условии линейного изменения электрического потенциала вдоль толщины мембраны.

Отношение противоположно направленных потоков описывается уравнением Уссинга—Теорелла:

$$\frac{J_2}{J_1} = \frac{c_1}{c_2} \exp \left( -\frac{zF \Delta\varphi}{RT} \right). \quad (11.2.21)$$

Пассивный транспорт может происходить только в случае наличия на мембране градиентов концентрации или электрического потенциала<sup>1</sup> и описывается в общем случае уравнениями Нернста—Планка (11.2.8), Гольдмана (11.2.17) или Уссинга—Теорелла (11.2.21), невыполнение этих уравнений свидетельствует о том, что перенос ионов осуществляется активно или через узкие мембранные каналы, где невозможно существование независимых ионных потоков.

### § 11.3. УРАВНЕНИЕ НЕРНСТА

В живом организме по обе стороны любой биологической мембраны находятся ионные растворы, причем концентрации одного и того же иона по обе стороны часто отличаются. Одной из причин установления и поддержания этих градиентов концентраций является различная проницаемость мембраны для тех или иных ионов. В этом случае градиент концентрации одного вещества может поддерживаться за счет наличия градиента концентрации другого вещества и/или разности потенциалов по обе стороны мембраны (так называемой *трансмембранной разности потенциалов*).

Условием установления равновесия между двумя растворами, разделенными полупроницаемой<sup>2</sup> мембраной, с различными концентрациями одинаковых ионов является равенство электрохимических потенциалов по одну и другую сторону мембраны:

$$RT \ln c_i + zF\varphi_i = RT \ln c_o + zF\varphi_o, \quad (11.3.1)$$

где  $c_i$  ( $c_o$ ) и  $\varphi_i$  ( $\varphi_o$ ) — соответственно концентрации иона и электрические потенциалы внутри (снаружи)<sup>3</sup> клетки или клеточные органеллы. Здесь  $\mu_{oi} = \mu_{oo}$ , так как предполагается, что с ионом по

<sup>1</sup> Имеется в виду, что перенос вещества не происходит, когда суммарный поток равен нулю:  $J = J_1 - J_2 = 0$ , хотя отдельные его компоненты ( $J_1$  и  $J_2$ ) могут быть отличны от нуля.

<sup>2</sup> *Полупроницаемая мембрана* — мембрана, проницаемая для одних веществ и непроницаемая для других.

<sup>3</sup> Индексы «i» и «o» происходят от англ. *inside* — внутри и *outside* — снаружи.

стороны мембраны не происходит никаких химических превращений и он находится в одном и том же растворителе.

Из условия уравнивания (11.3.1) можно получить значение разности электрических потенциалов, которая устанавливается на мембране при наличии градиента концентраций (у р а в н е н и е Н е р н с т а):

$$\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_o = \frac{RT}{zF} \ln \frac{c_o}{c_i}. \quad (11.3.2)$$

Как видим, причиной существования разности электрических потенциалов на мембране является градиент концентраций. Если  $c_i = c_o$ , то  $\Delta\varphi = 0$ .

Рассмотрим случай, когда по обе стороны мембраны находятся ионы калия и хлора различных концентраций. Равновесный мембранный потенциал для ионов калия имеет вид:

$$\Delta\varphi = \frac{RT}{F} \ln \frac{[K^+]_o}{[K^+]_i}, \quad (11.3.3)$$

а для хлора —

$$\Delta\varphi = -\frac{RT}{F} \ln \frac{[Cl^-]_o}{[Cl^-]_i} = \frac{RT}{F} \ln \frac{[Cl^-]_i}{[Cl^-]_o}, \quad (11.3.4)$$

где  $[K^+]_i$  и  $[Cl^-]_i$  ( $[K^+]_o$  и  $[Cl^-]_o$ ) — концентрации соответствующих ионов внутри (снаружи) клетки. Приравняем уравнения (11.3.3) и (11.3.4):

$$\frac{[K^+]_o}{[K^+]_i} = \frac{[Cl^-]_i}{[Cl^-]_o}, \quad (11.3.5)$$

или, как следует из формул (11.3.3) или (11.3.4),

$$\frac{[K^+]_o}{[K^+]_i} = \frac{[Cl^-]_i}{[Cl^-]_o} = \exp \left( \frac{zF \Delta\varphi}{RT} \right) = r, \quad (11.3.6)$$

где  $r$  — *отношение Доннана*.

Из выражений (11.3.2) и (11.3.6) видно, что градиент концентраций по обе стороны мембраны может поддерживаться наличием трансмембранной разности потенциалов, или, наоборот, разность потенциалов определяется наличием градиента концентраций; кроме того, трансмембранная разность концентраций одного вещества может поддерживать разность концентраций другого вещества. Например, в эритроцитах наличие градиентов концентраций ионов

создает трансмембранный потенциал; в мышечных клетках  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ -насосы за счет энергии АТФ создают градиент концентраций ионов, что вызывает, соответственно, появление трансмембранного потенциала, а это, в свою очередь, поддерживает градиент концентрации ионов хлора.

## § 11.4. РАВНОВЕСИЕ ДОННАНА

В клетке кроме малых ионов находятся еще и заряженные макромолекулы (белки, нуклеиновые кислоты). Рассмотрим случай, когда в системе находятся ионы калия и хлора и отрицательно заряженные макромолекулы, причем мембрана проницаема для малых ионов и непроницаема для крупных молекул. Для каждого из растворов, находящихся по обе стороны мембраны, необходимо выполнение условия электронейтральности, то есть сумма положительных и отрицательных зарядов всех ионов должна равняться нулю.

Следовательно,

$$[\text{K}^+]_i = [\text{Cl}^-]_i + [\text{R}^-]_i; \quad (11.4.1)$$

$$[\text{K}^+]_o = [\text{Cl}^-]_o + [\text{R}^-]_o, \quad (11.4.2)$$

где  $[\text{R}^-]_i$  и  $[\text{R}^-]_o$  — концентрации макромолекул во внутри- и внеклеточной среде соответственно. Межклеточная жидкость почти не содержит крупных заряженных частиц ( $[\text{R}^-]_o \approx 0$ ), поэтому

$$[\text{K}^+]_o = [\text{Cl}^-]_o = c. \quad (11.4.3)$$

Объединив равенство (11.4.3) и пропорцию (11.3.5), получаем:

$$[\text{K}^+]_i [\text{Cl}^-]_i = [\text{K}^+]_o [\text{Cl}^-]_o = c^2. \quad (11.4.4)$$

Подставим в (11.4.4) условие электронейтральности для внутриклеточной среды (11.4.1):

$$\{[\text{Cl}^-]_i + [\text{R}^-]_i\} [\text{Cl}^-]_i = c^2, \quad (11.4.5)$$

или

$$[\text{Cl}^-]_i^2 + [\text{R}^-]_i [\text{Cl}^-]_i - c^2 = 0. \quad (11.4.6)$$

Решив это квадратное уравнение относительно  $[\text{Cl}^-]_i$ , получаем, что концентрация малых анионов во внутриклеточной среде составляет:

$$[\text{Cl}^-]_i = -\frac{[\text{R}^-]_i}{2} + \sqrt{\frac{[\text{R}^-]_i^2}{4} + c^2}. \quad (11.4.7)$$

Если концентрация макромолекул значительно ниже концентрации малых ионов ( $[\text{R}^-]_i \ll c$ ), то  $\sqrt{\frac{[\text{R}^-]_i^2}{4} + c^2} \approx c$ . В этом случае получаем, что

$$[\text{Cl}^-]_i = -\frac{[\text{R}^-]_i}{2} + c. \quad (11.4.8)$$

Тогда из выражений (11.4.1) и (11.4.8) следует, что внутриклеточная концентрация ионов калия составляет:

$$[\text{K}^+]_i = \frac{[\text{R}^-]_i}{2} + c. \quad (11.4.9)$$

То есть для компенсации отрицательных зарядов макромолекул часть малых отрицательных ионов выходит из клетки (в данном случае уменьшается концентрация ионов хлора), а часть положительных зарядов проходит в клетку из межклеточной среды (увеличивается концентрация ионов калия).

Возникающая на мембране *доннановская разность потенциалов* составляет:

$$\begin{aligned} \varphi_i - \varphi_o &= -\frac{RT}{F} \ln \frac{[\text{Cl}^-]_o}{[\text{Cl}^-]_i} = -\frac{RT}{F} \ln \frac{c}{c - [\text{R}^-]_i/2} = \\ &= \frac{RT}{F} \ln \left( 1 - \frac{[\text{R}^-]_i}{2c} \right). \end{aligned} \quad (11.4.10)$$

Так как  $\ln(1 - x) \approx -x$  (при малых  $x$ ), то

$$\varphi_i - \varphi_o = -\frac{RT}{F} \cdot \frac{[\text{R}^-]_i}{2c}. \quad (11.4.11)$$

Как правило, заряд макромолекулы равен не единице, как было указано выше, а 10—20. Обозначив эту величину  $n$ , можно показать, что трансмембранная разность потенциалов будет равна

$$\varphi_i - \varphi_o = -\frac{RT}{F} \cdot \frac{n[\text{R}^-]_i}{2c}. \quad (11.4.12)$$

Например, если концентрация макромолекул составляет 0,01с,  $n = 10$ , то доннановская разность потенциалов при температуре 37 °С составит — 1,3 мВ.

## § 11.5. ИОННЫЙ ТРАНСПОРТ ЧЕРЕЗ КАНАЛЫ

Транспорт ионов через липидный бислой с помощью простой диффузии совершается крайне медленно. Согласно формуле Борна, для проникновения одного моля ионов из раствора с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_b \approx 80$  в мембрану с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_m \approx 2$  необходимо преодолеть потенциальный барьер, равный:

$$\Delta W = \frac{(ze)^2 N_A}{8\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\epsilon_m} - \frac{1}{\epsilon_b} \right), \quad (11.5.1)$$

где  $z$  — заряд иона в единицах элементарного заряда;  $N_A$  — число Авогадро;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная;  $r$  — радиус иона. Для одновалентных ионов  $K^+$  и  $Na^+$   $\Delta W$  составляет от 250 до 350 кДж/моль. Коэффициент распределения, то есть отношение числа ионов  $n_m$ , находящихся в мембране, к числу ионов  $n_b$ , находящихся в жидкой фазе, рассчитывается по формуле Больцмана:

$$K = \frac{n_m}{n_b} = \exp \left( -\frac{\Delta W}{RT} \right), \quad (11.5.2)$$

где  $RT$  — энергия тепловых колебаний ( $R$  — универсальная газовая постоянная,  $T$  — температура). При температуре 300 К коэффициент распределения составит:

$$K = \exp \left( -\frac{350000}{8,31 \cdot 300} \right) = \exp (-140) \approx 10^{-60}. \quad (11.5.3)$$

То есть из каждых  $10^{61}$  ионов, находящихся в водном растворе, только один находится в липидной фазе мембраны. Поэтому вероятность прохождения ионов и других гидрофильных веществ через мембрану вследствие простой диффузии ничтожно мала.

Скорость переноса ионов значительно возрастает, если в мембране существуют ионные каналы. Наиболее распространены каналы для ионов калия, натрия, кальция.

Ионные мембранные каналы образованы интегральными белками. Такой канал может быть либо открыт, либо закрыт для транс-

порта иона. Эти два состояния реализуются изменением конформации каналаобразующих белков, что, в свою очередь, может быть вызвано изменением условий в клетке и во внеклеточной среде, например изменением мембранного потенциала (так называемые потенциалзависимые ионные каналы), как в случае натриевых и калиевых каналов нервных волокон. Эти каналы играют важную роль при проведении нервного импульса и являются наиболее изученными. Так как обычно с помощью каналов транспортируются гидрофильные вещества, то во внутренней полости их имеется большое число гидрофильных химических групп.

Если предположить, что электрический потенциал изменяется по всей длине канала линейно ( $\frac{d\varphi}{dx} \cong \frac{\Delta\varphi}{l} = \text{const}$ ), отношение концентраций ионов внутри мембраны у ее границ и в окружающей среде равно коэффициенту распределения  $K$ , канал однороден и ионы движутся независимо друг от друга, — то транспорт веществ через каналы будет описываться электродиффузионным уравнением Нернста—Планка (11.2.8).

Однако чаще всего в случае переноса веществ через каналы большинство этих условий не выполняется, и транспорт описывается более сложными уравнениями. Канал, прежде всего, неоднороден по строению: вдоль его внутренней полости располагаются различные химические группы, сродство ионов к которым неодинаково. Канал может иметь один или несколько ионных центров связывания, обычно представляющих собой заряженные группы, связавшись с которыми, ион попадает в потенциальную яму. Для того чтобы попасть в другую потенциальную яму, иону требуется преодолеть некоторый потенциальный барьер. Таких барьеров вдоль длины канала может быть несколько, причем высота их обычно неодинакова и может изменяться в зависимости от наличия или отсутствия ионов в канале, изменения трансмембранной разности потенциалов.

Так как в канале находятся заряженные группы, то предположение о линейном изменении мембранного потенциала не выполняется. Наличие заряженных групп также может привести к непостоянству значений коэффициента распределения по длине канала.

Многие мембранные каналы настолько узки, что ионы не могут в них двигаться в различных направлениях независимо друг от друга: если в какой-либо потенциальной яме уже находится ион, то другой не может в нее попасть. Это относится, например, к калиевым каналам. Встречные потоки ионов натрия через натриевые каналы можно считать независимыми, но если через эти каналы движутся ионы калия, то принцип независимости уже не выполняется.



Для многих каналов, в зависимости от их строения, при высоких концентрациях ионов в окружающей среде наблюдается *эффект насыщения* (при увеличении концентрации ионов скорость их переноса повышается, но только до определенного уровня, выше которого скорость не изменяется) или *блокировки* (при концентрациях ионов выше некоторого значения скорость переноса начинает снижаться).

При переходе одновалентного иона из окружающей среды в канал изменение свободной энергии составляет:

$$\Delta W = \frac{e^2 \cdot N_A}{8\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\epsilon_k} - \frac{1}{\epsilon_v} \right) - \frac{e^2 \cdot N_A}{4\pi\epsilon_0 (r + a)\epsilon_k}, \quad (11.5.4)$$

где  $\epsilon_v$  — диэлектрическая проницаемость воды;  $\epsilon_k$  — диэлектрическая проницаемость среды канала;  $r$  — радиус иона;  $a$  — радиус канала. В данном уравнении первое слагаемое обусловлено переходом иона из одной среды в другую с различными диэлектрическими проницаемостями [см. формулу (11.5.1)], а второе — связыванием заряженного иона с противоположно заряженной группой канала. В случае транспорта иона через канал величина потенциального барьера снижается по сравнению с потенциальным барьером переноса непосредственно через бислой благодаря наличию второго отрицательного слагаемого, а также благодаря уменьшению первого слагаемого вследствие того, что ион попадает в среду с большим значением диэлектрической проницаемости, по сравнению с диэлектрической проницаемостью мембраны. В результате действия этих факторов  $\Delta W$  при переходе иона через канал составляет около 30 кДж/моль.

Ионные каналы обладают свойством **селективности**, то есть имеют различные величины проводимости для различных ионов. Каждый канал транспортирует преимущественно ионы одного вида, например, натриевый канал — ионы натрия, калиевый — ионы калия. Через катионные каналы не способны проходить анионы и наоборот. Но для ионов того же знака, что и основной ион, канал уже не обладает такой абсолютной селективностью. Проводимость канала для других ионов своего знака ниже, чем для собственного, но отлична от нуля. Например, через специфические натриевые каналы способны транспортироваться также и ионы калия, но в 20 раз медленнее, чем ионы натрия.

Согласно современным представлениям, селективность канала прежде всего определяется радиусом транспортируемого иона. Ионы, радиус которых превышает радиус канала, не способны проходить через канал вследствие такого стерического несоответствия. Ионы, обладающие меньшим радиусом, по сравнению с радиусом канала, казалось бы, должны легко пересекать его. Одна-

ко проницаемость для них уменьшается с уменьшением радиуса иона. Этот эффект объясняется тем, что ионы в водном растворе всегда находятся в гидратированном состоянии. Перенос же через канал требует сброса, если не всех, то, по крайней мере, нескольких гидратных оболочек, что сопровождается значительными затратами энергии. Например, энергия полной дегидратации ионов  $K^+$  и  $Na^+$  составляет от 280 до 400 кДж/моль, в то время как энергия тепловых колебаний при физиологических температурах приблизительно равна 2,5 кДж/моль. Для транспорта иона через канал требуются меньшие затраты энергии по сравнению с энергией полной дегидратации, так как сброшенная гидратная оболочка иона заменяется другими полярными соединениями, в роли которых выступают фиксированные дипольные группы канала. Размер иона должен быть таковым, чтобы ион мог взаимодействовать с оптимальным числом этих полярных групп. Например, ион калия, попав в *селективный фильтр* (самое узкое место в канале, определяющее его селективные свойства) калиевого канала, способен взаимодействовать со всеми пятью атомами кислорода, окружающими просвет поры, в то время как меньший по размеру ион натрия, оказавшись в калиевом канале, может связаться только с двумя атомами кислорода. Потенциальная энергия иона калия, находящегося в «своем» канале, не намного превышает его потенциальную энергию в воде, а вот увеличение потенциальной энергии иона натрия, попавшего в калиевый канал, уже значительно. Итак, наилучшим образом через канал проникают те ионы, эффективный радиус которых приблизительно равен радиусу канала.

Селективность каналов определяется не только зависимостью проводимости канала от радиуса транспортируемого иона, но и химическим строением иона, как в случае органических катионов. Например, через натриевые каналы переносятся ионы гидроксил-аммония ( $H_3N^+—OH$ ) и не переносятся ионы метиламмония ( $H_3N^+—CH_3$ ), хотя их радиусы почти одинаковы и приблизительно равны радиусу канала. Это объясняется тем, что гидроксильная группа гидроксил-аммония способна образовывать водородные связи с атомами кислорода, выстилающими внутренний диаметр канала, а метильная группа метиламмония с ними не взаимодействует.

Каналы могут блокироваться некоторыми соединениями, которые связываются с селективным фильтром или с входом в канал, закупоривая его. Так как молекула-блокатор должна стерически соответствовать участку блокируемого канала, то для каналов определенного вида существуют специфические блокаторы. Например, молекулы тетродотоксина блокируют натриевые каналы, а молекулы тетраэтиламмония — калиевые.

## § 11.6. ПАССИВНЫЙ ТРАНСПОРТ ВЕЩЕСТВ С ПОМОЩЬЮ ПЕРЕНОСЧИКОВ

Для некоторых веществ существуют специфические *переносчики* белковой природы, которые понижают энергию активации, необходимую для переноса вещества через липидный бислой. Переносчики осуществляют так называемую *облегченную диффузию*. Общий поток веществ через мембрану при участии переносчиков состоит из двух компонент: потока, вызванного простой диффузией (рис. 11.6.1, кривая 1), и потока, вызванного облегченной диффузией (рис. 11.6.1, кривая 2). Поэтому в данном случае вещества транспортируются с большей скоростью, чем в случае простой диффузии.

Переносчики, осуществляющие пассивный транспорт, переносят вещества из области с большей концентрацией в область с меньшей концентрацией и не требуют затрат энергии.

Переносчики обеспечивают транспорт веществ, которые сами по себе проникают через мембрану крайне медленно из-за высокой гидрофильности. Существуют переносчики для некоторых аминокислот, углеводов, пуриновых и пиримидиновых оснований, нуклеозидов. Таким образом, например, происходит всасывание многих пищевых продуктов в кишечнике, процессы реабсорбции в почках.

Отличительные признаки транспорта веществ с помощью переносчиков:

1. Переносчики обладают высокой химической специфичностью, то есть способны переносить только определенные субстраты (некоторые переносчики даже способны различать *L*- и *D*-изомеры одного и того же вещества).

2. Скорость переноса возрастает пропорционально концентрации переносимого вещества, но лишь до некоторой определенной величины, то есть наблюдается эффект насыщения переносчика (рис. 11.6.1, кривая 2). Следует иметь в виду, что в реальной клетке даже при полном насыщении переносчика при увеличении раз-

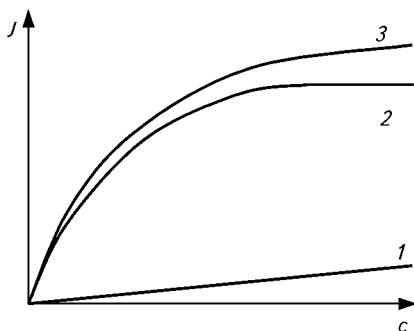


Рис. 11.6.1. Зависимость потока  $J$  вещества, переносимого из области, где его концентрация равна  $c$ , в область, где его концентрация равна нулю, от концентрации  $c$ :

1 — простая диффузия; 2 — транспорт с участием переносчика; 3 — суммарный поток

ности концентраций скорость переноса все равно будет возрастать за счет простой диффузии (рис. 11.6.1, кривая 3).

3. Переносчики способны конкурентно ингибироваться веществами, структура которых сходна со структурой субстрата.

Поток вещества, транспортируемого переносчиками из области, где его концентрация равна  $c$ , в область, где концентрация этого же вещества равна нулю, описывается формулой:

$$J = J_{\max} \frac{c}{K_{\text{тр}} + c}, \quad (11.6.1)$$

где  $J_{\max}$  — максимальный поток (поток в случае насыщения переносчиков);  $K_{\text{тр}}$  — константа, аналогичная константе Михаэлиса—Ментен и численно равная концентрации вещества, при которой  $J = J_{\max}/2$ .

Тогда односторонние потоки вещества из межклеточной среды в клетку ( $J_i$ ) и из клетки наружу ( $J_o$ ) записываются в виде:

$$J_i = J_{\max} \frac{c_i}{K_{\text{тр}} + c_i}; \quad (11.6.2)$$

$$J_o = J_{\max} \frac{c_o}{K_{\text{тр}} + c_o}, \quad (11.6.3)$$

где  $c_i$  и  $c_o$  — концентрации вещества внутри и снаружи клетки соответственно.

Если концентрации вещества по обе стороны мембраны отличны от нуля, то суммарный поток будет представлять собой алгебраическую сумму двух разнонаправленных потоков  $J_i$  и  $J_o$ :

$$J = J_i - J_o = J_{\max} \left( \frac{c_i}{K_{\text{тр}} + c_i} - \frac{c_o}{K_{\text{тр}} + c_o} \right). \quad (11.6.4)$$

Из формулы (11.6.4) видно, что поток со временем будет уменьшаться, пока концентрации не выровняются и поток не станет равным нулю.

Выше уже указывалось, что такое выравнивание в организме обычно не наступает ввиду того, что вещества все время образуются или расходуются в биохимических реакциях. Поэтому обычно величину потока с некоторым приближением можно определять по уравнению (11.6.1).

График уравнения (11.6.1), представленный на рис. 11.6.1, удобен для определения констант  $J_{\max}$  и  $K_{\text{тр}}$ . С помощью неслож-

ных преобразований уравнение (11.6.1) можно свести к виду (уравнение Лайнуивера — Бэрка):

$$\frac{1}{J} = \frac{K_{\text{тр}}}{J_{\text{max}} c} + \frac{1}{J_{\text{max}}}. \quad (11.6.5)$$

Тогда график зависимости  $1/J = f(1/c)$  будет представлять собой прямую (рис. 11.6.2). Получив экспериментальные значения  $1/J$  и  $1/c$  на некотором ее промежутке, можно путем экстраполяции прямой определить значения  $J_{\text{max}}$  и  $K_{\text{тр}}$  на пересечении прямой с осями координат. Этот метод позволяет также определить присутствие конкурентного ингибитора переноса данного вещества в системе (рис. 11.6.2, прямая 2).

Одним из наиболее изученных случаев пассивного транспорта веществ с помощью переносчиков является перенос глюкозы в эритроциты. Переносчик *D*-глюкозы способен транспортировать также вещества, структурно напоминающие субстрат, например, *D*-маннозу, *D*-ксилозу, *D*-арабинозу и *D*-галактозу, но не соответствующие *L*-сахара. Перечисленные *D*-изомеры углеводов вызывают конкурентное ингибирование переносчика *D*-глюкозы, который вынужден переносить эти вещества вместо своего собственного субстрата. Другой конкурентный ингибитор транспорта глюкозы в некоторые клетки — флоридзин<sup>1</sup> — также конкурентно связывается с переносчиком, но в клетку не проникает.

Для того чтобы специфический переносчик сахара перенес другое вещество, последнее должно, по крайней мере, иметь в своей структуре шестиуглеродный пиранозный скелет. Многие природные переносчики способны переносить некоторые не свойственные организму соединения, например лекарства, если эти вещества обладают структурным сходством с природным субстратом. Так, противоопухолевый препарат из класса азотистых ипритов — сарколизин — содержит фенилаланиновый остаток и поэтому способен транспортироваться в клетку переносчиком для фенилаланина.

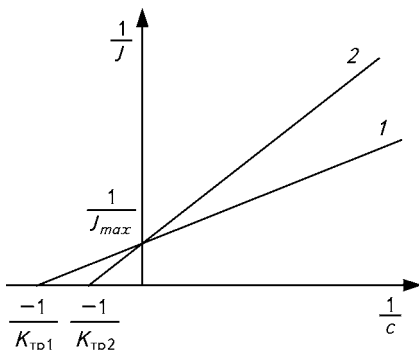


Рис. 11.6.2. Определение констант  $J_{\text{max}}$  и  $K_{\text{тр}}$  по методу Лайнуивера—Бэрка и влияние конкурентного ингибитора на величину потока:

1 — поток вещества в отсутствие ингибитора;  
2 — поток вещества в присутствии ингибитора

<sup>1</sup> Флоридзин — глюкозид, получаемый из коры грушевого дерева.

Явление насыщения переносчика при высоких концентрациях транспортируемого вещества можно продемонстрировать на примере реабсорбции глюкозы в почечных канальцах. Из курса физиологии известно, что плазма крови выдавливается под действием гидростатического давления (явление фильтрации) в почечный клубочек, а затем реабсорбируется обратно за исключением продуктов обмена и избыточных количеств воды и электролитов. Если концентрация глюкозы в плазме крови не превышает так называемый почечный порог, величина которого составляет 11 ммоль/л (2 г/л), то глюкоза реабсорбируется полностью. В противном случае наблюдается явление насыщения системы переноса глюкозы и ее остаток выделяется с мочой, где в норме концентрация глюкозы должна быть практически равна нулю. Если анализы при этом показывают повышенную концентрацию сахара в крови, то данный факт может свидетельствовать о наличии сахарного диабета у пациента. С другой стороны, наблюдаются случаи, когда в моче глюкоза присутствует, в то время как ее концентрация в крови не повышена. В этом случае, возможно, нарушены процессы транспорта глюкозы в почках.

Почечный порог реабсорбции существует и для некоторых других веществ, например, фосфата, сульфата, аминокислот. Явление насыщения переносчиков иногда может способствовать поддержанию постоянной концентрации данного вещества в организме. В случае глюкозы почечный порог вдвое выше ее нормальной концентрации в плазме крови, поэтому почки не могут принимать заметного участия в регуляции содержания глюкозы в крови. Для фосфата же нормальная концентрация в крови почти совпадает с величиной почечного порога, что приводит к выведению излишнего его количества с мочой и поддержанию его концентрации на постоянном уровне.

## § 11.7. ИНДУЦИРОВАННЫЙ ИОННЫЙ ТРАНСПОРТ

Транспорт ионов с помощью переносчиков называется *индуцированным ионным транспортом*, а сам переносчик — *ионофором*. Структура ионофора такова, что снаружи он покрыт неполярными группами, благодаря чему ему выгодно находиться в гидрофобной части мембраны; внутри же ионофор имеет полость, покрытую полярными группами, к которым и присоединяются ионы. Многие ионофоры выделены из микроорганизмов; другие имеют синтетическое происхождение.

Согласно формуле Борна (11.5.1), энергия, необходимая для перехода иона через мембрану, обратно пропорциональна радиусу

иона. При связывании иона с переносчиком происходит увеличение радиуса переносимой частицы, что способствует снижению энергии перехода.

Пассивный транспорт ионов с помощью подвижных переносчиков описывается уравнением, выведенным на основе формулы Борна:

$$\Delta W = \frac{e^2 N_A}{8\pi\epsilon_0\epsilon_m b} + \frac{e^2 N_A}{8\pi\epsilon_0\epsilon_{\pi}} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{b} \right), \quad (11.7.1)$$

где  $\Delta W$  — энергия комплекса ион-переносчик;  $r$  — радиус иона;  $b$  — радиус переносчика;  $\epsilon_m$  — диэлектрическая проницаемость мембраны;  $\epsilon_{\pi}$  — диэлектрическая проницаемость внутренней сферы переносчика. Рассчитанная по данной формуле энергия комплекса переносчика с ионами натрия или калия составляет около 15 кДж/моль, в то время как энергия, необходимая для их переноса через мембрану без участия переносчика, — 250...350 кДж/моль.

Многие переносчики являются сами по себе нейтральными и, присоединив к себе ион, пересекают мембрану в виде заряженного комплекса, другие, как, например, нигерицин, ионизированы, а в комплексе с ионом представляют собой нейтральные частицы.

Известны две разновидности ионных переносчиков. Так называемые подвижные переносчики (рис. 11.7.1) связываются с ионом, диффундируют с ним через мембрану, высвобождают его по другую сторону и возвращаются обратно. При этом, если переносчик не покидает мембрану, то говорят, что перенос происходит по механизму «малой карусели», как, например, в случае переноса ионов валиномицином; если же переносчик выходит из мембраны во вне- или внутриклеточную жидкость, где и происходит связывание и высвобождение иона, то — по механизму «большой карусели».

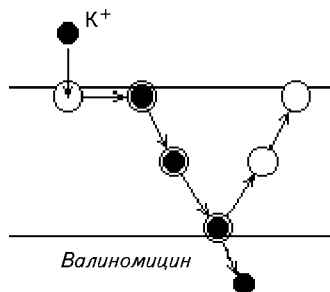


Рис. 11.7.1. Подвижный переносчик

Другие переносчики остаются неподвижными относительно мембраны, они формируют мембранные каналы, которые обычно не пронизывают мембрану насквозь. Ионы, пересекая мембрану, вынуждены переходить по цепочке из одной молекулы-переносчика в другую, поэтому такой перенос называется э с т а ф е т н ы м (рис. 11.7.2).

Примером подвижных переносчиков являются антибиотики валиномицин и нигерицин. Молекула валиномицина (рис. 11.7.3)

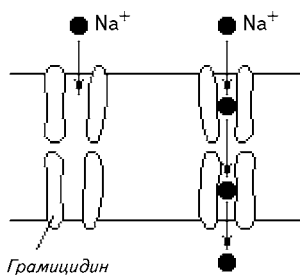


Рис. 11.7.2. Эстафетный перенос

имеет циклическое строение. Ее внутренняя полость содержит гидрофильные группы, с которыми способны связываться ионы. Так как переносчик имеет жесткое строение и размер его полости фиксирован, то с валиномицином способны связываться только те ионы, которые стерически соответствуют полости переносчика. Поэтому валиномицин обладает высокой селективностью. Основным ионом, который он переносит, является  $K^+$ . Меньший по размеру ион натрия хуже взаимодействует с группами, выстилающими полость переносчика, и поэтому переносится в  $10^4$  раз медленнее, чем  $K^+$ .

Молекула другого подвижного переносчика — нигерицина — представляет собой цепь из 15 гидрофобных аминокислот, среди которых встречаются не только *L*-, но и *D*-изомеры. Напомним, что *D*-аминокислоты никогда не встречаются в природных белках. Молекула нигерицина не замкнута в цикл, а при связывании с ионом обвивает его вокруг. Нигерицин представляет собой слабую кислоту (при нейтральных значениях pH его молекула ионизирована) и поэтому способен связываться с протонами и ионами металлов. Если валиномицин, оттранспортировав  $K^+$  на другую сторону мембраны, возвращается обратно пустым, то нигерицин способен переносить ионы в оба конца при наличии соответствующих трансмембранных разностей концентраций. Например, связавшись с  $H^+$  по одну сторону мембраны и оттранспортировав его на другую, нигерицин способен там связаться с  $K^+$  и вернуться вместе с ним обратно. Этот вид транспорта называется *обменным*.

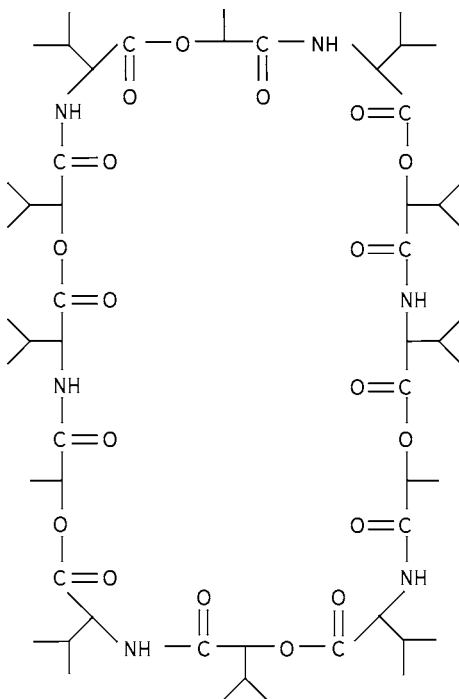


Рис. 11.7.3. Валиномицин



Нигерицин и его аналоги не настолько специфичны, как нейтральные ионофоры.

Одним из наиболее изученных каналообразующих переносчиков является антибиотик грамицидин. Молекула грамицидина представляет собой цепь, которая свернута в спираль таким образом, что образует канал длиной 3 нм и внутренним диаметром 0,5—0,8 нм. Поскольку такой длины недостаточно, чтобы пронизать мембрану насквозь, то транспорт может осуществляться только в том случае, если две молекулы грамицидина образуют последовательную цепочку. Грамицидин также не обладает высокой специфичностью ввиду того, что диаметр канала может изменяться в зависимости от размера иона.

Многие каналообразующие переносчики, например аламекитин, способны чередовать открытое и закрытое состояния. Причиной этих переходов может быть, например, изменение трансмембранного потенциала.

## § 11.8. АКТИВНЫЙ ТРАНСПОРТ

Рассматриваемый ранее транспорт частиц через мембрану всегда происходил с уменьшением электрохимического потенциала. Однако в организме часто наблюдается транспорт нейтральных частиц или ионов, в процессе которого электрохимический потенциал системы возрастает. Например, концентрация ионов калия в клетке намного выше, чем в межклеточной среде, а натрия, наоборот,— ниже<sup>1</sup>. Высокий градиент концентрации калия поддерживается градиентом электрического потенциала, направленным в противоположную сторону, и подчиняется условию равновесия, определяемому уравнением Нернста (11.3.2). Направление градиента электрического потенциала таково, что ионам натрия также гораздо выгоднее находиться в клетке, чем во внеклеточной среде. Самопроизвольный вынос из клетки ионов натрия невозможен и осуществляется только за счет притока энергии. Известны системы активного транспорта для ионов натрия, калия, кальция и водорода.

Поддержание градиента концентраций ионов натрия и калия обеспечивается работой натрий-калиевого насоса<sup>2</sup> ( $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ -насо-

---

<sup>1</sup> Это соотношение выполняется для всех клеток, кроме возбужденных нервных и мышечных клеток, а также наружных сегментов палочек (зрительных клеток).

<sup>2</sup>  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ -насос не следует путать с натриевыми и калиевыми каналами. Через последние осуществляется пассивный транспорт. Для ионов калия и натрия существуют отдельные каналы, а  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ -насос транспортирует оба этих иона, но в разные стороны.

са). Он представляет собой мембранные белки, которые работают как ферменты аденозинтрифосфатазы (АТФазы). Задачей этих ферментов является расщепление АТФ на АДФ и неорганический фосфат. Процесс распада сопровождается выделением энергии, которая расходуется на транспорт ионов в сторону увеличения электрохимического потенциала. Расщепление АТФ стимулируется ионами  $\text{Na}^+$  и  $\text{K}^+$  и зависит от наличия  $\text{Mg}^{2+}$ . Активный транспорт возможен только за счет сопряжения транспорта какого-либо вещества с реакцией гидролиза АТФ.

Механизм сопряжения окончательно не выяснен. Вероятнее всего, энергия АТФ расходуется на изменение конформации транспортного белка, что изменяет его сродство (константу связывания) к тем или иным ионам. Транспорт всегда осуществляется в ту

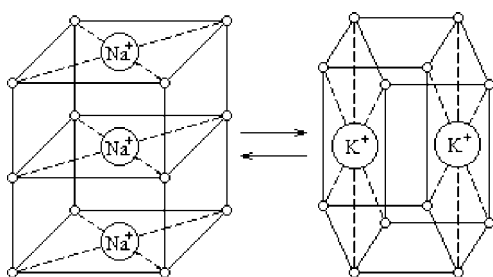


Рис. 11.8.1. Две конформации ионсвязывающей полости в Na,K-насосе:

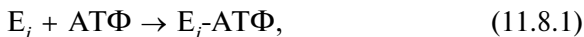
*a* — внутри клетки; *б* — снаружи.

сторону, где сродство ниже. В клетке константа связывания переносчика с  $\text{Na}^+$  значительно выше, чем с  $\text{K}^+$ . Поэтому ионы натрия в клетке связываются с белком и транспортируются во внеклеточную среду. По другую сторону мембраны конформация белка меняется таким образом, что константа связывания с  $\text{Na}^+$  уменьшается, а с  $\text{K}^+$  —

увеличивается. Структура ионсвязывающего участка белка (рис. 11.8.1) в этом случае такова, что к нему могут присоединиться уже не три, а два иона калия, которые и переносятся в клетку.

Согласно современным представлениям, процесс активного транспорта  $\text{Na}^+$  и  $\text{K}^+$  происходит в следующие семь этапов.

1. В присутствии  $\text{Mg}^{2+}$  на внутренней стороне мембраны образуется комплекс фермента АТФазы с АТФ:

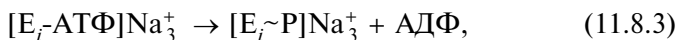


где  $E_i$  —  $\text{Na}^+, \text{K}^+$ -АТФаза, ионсвязывающий центр которой находится на внутренней стороне мембраны;  $E$ -АТФ — комплекс фермента с АТФ.

2. Присоединение АТФ изменяет конформацию фермента таким образом, что к образовавшемуся комплексу присоединяются три иона натрия:

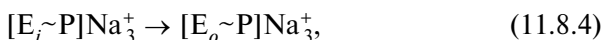


3. Происходит фосфорилирование  $\text{Na}^+, \text{K}^+$ -АТФазы и отщепление АДФ:



где Р — остаток фосфорной кислоты; знак « $\sim$ » обозначает макроэргическую связь, при разрыве которой высвобождается большое количество энергии.

4. Ионсвязывающий центр фермента перемещается относительно толщины мембраны (возможно, вследствие «флип-флоп»-перехода белка), в результате чего ион натрия оказывается на внешней стороне клетки:

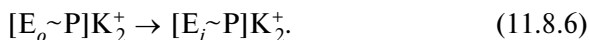


где  $\text{E}_o$  —  $\text{Na}^+, \text{K}^+$ -АТФаза, ионсвязывающий центр которой находится на внешней стороне мембраны.

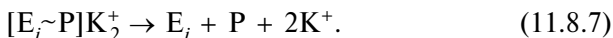
5. Снаружи клетки вследствие уменьшения сродства фермента к ионам натрия и повышения сродства к калию происходит обмен этими ионами:



6. После отщепления фосфата фермент с присоединенными ионами калия снова изменяет положение относительно мембраны:



7. Ионы калия и неорганический фосфат высвобождаются в цитоплазму, и фермент возвращается в исходное состояние:



Таким образом, энергии, выделяющейся при гидролизе одной молекулы АТФ, достаточно, чтобы вынести из клетки три иона натрия и внести два иона калия.  $\text{Na}^+, \text{K}^+$ -насос способствует не только повышению градиентов концентраций ионов, но и возрастанию градиента электрического потенциала, то есть является *электрогенным*, так как сумма вносимых зарядов не равна сумме выносимых. Межклеточная среда приобретает «более положительный» заряд по сравнению с клеткой за счет выноса одного «лишнего» положительного иона.

В мембранах саркоплазматического ретикулума мышечных клеток и цитоплазматических мембранах кардиомиоцитов существует  $\text{Ca}^{2+}$ -насос, работа которого во многом сходна с механизмом пере-

носа ионов  $\text{Na}^+$ ,  $\text{K}^+$ -насосом. За один цикл, в процессе которого расходуется одна молекула АТФ, переносится два иона кальция.

Активный транспорт протонов может осуществляться как с помощью подвижных переносчиков, например пластохинона в мембранах хлоропластов, так и через мембранные каналы, например через каналы, образованные молекулами бактериородопсина в пурпурных мембранах галофильных бактерий.

Протонные каналы представляют собой интегральные белки, образующие внутреннюю пору, где содержатся участки (полярные группы), к которым могут присоединяться протоны. Энергия АТФ расходуется на изменение конформации белковых молекул, вследствие чего сродство одних участков связывания к протонам понижается, а других — увеличивается, что заставляет протон перескочить на тот участок канала, сродство которого к протону на данный момент выше. Путем таких перескоков с одного участка связывания на другой ион водорода пересекает мембрану.

Перенос  $\text{H}^+$  против градиентов их концентраций осуществляется не только за счет энергии, выделяющейся при гидролизе АТФ, но и за счет энергии фотонов. Последний способ используют вышеупомянутые галофильные бактерии, которые на свету выкачивают протоны из клетки, а энергию создавшегося градиента концентраций используют для синтеза АТФ.

Если электрические потенциалы по обе стороны мембраны одинаковы, то поток ионов, образованный системами активного транспорта, описывается уравнением:

$$J = \frac{c_0 P}{2} \left( \frac{c_1}{K_1 + c_1} - \frac{c_2}{K_2 + c_2} \right), \quad (11.8.8)$$

где  $c_0$  — внутримембранная концентрация АТФазы, за счет энергии которой осуществляется перенос иона;  $P$  — коэффициент проницаемости для комплекса иона с белковой молекулой;  $c_1$  и  $c_2$  — концентрации ионов по обеим сторонам мембраны;  $K_1$  и  $K_2$  — константа диссоциации комплекса иона с белком по разные стороны мембраны.

Уравнение (11.8.8) позволяет вычислить максимальную разность концентраций, которую может создать данный ионный насос. При достижении состояния, когда разность концентраций по обе стороны мембраны максимальна, поток станет равным нулю. Тогда из уравнения (11.8.8) получаем:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{K_1}{K_2}. \quad (11.8.9)$$

Таким образом, чем выше отношение констант диссоциации иона и белка по обе стороны мембраны, тем больше разность концентраций, которую может создать данный насос. Чем выше  $K$ , тем легче белок отсоединяет ионы, поэтому концентрация иона будет выше в той области, где выше константа диссоциации.

Состояние равновесия, при котором  $J = 0$ , в клетке практически недостижимо, в связи с тем, что ионы, несмотря на крайне низкую проницаемость для них липидного бислоя, все-таки проникают через него пассивно, то есть в ту область, где их концентрация ниже. Функционирование нервных и мышечных клеток требует временного открывания каналов, через которые осуществляется пассивный перенос ионов. Так как концентрация ионов по обе стороны мембраны все время стремится к выравниванию, то системы активного ионного транспорта никогда полностью не прекращают свою работу, а могут лишь уменьшить или увеличить скорость переноса.

Уравнение (11.8.8) не учитывает существование разности электрического трансмембранного потенциала, который уменьшает или увеличивает скорость переноса иона в зависимости от знака самого иона и знака потенциала области, в которую этот ион переносится.

## § 11.9. ВТОРИЧНО-АКТИВНЫЙ ТРАНСПОРТ

В § 11.8 рассматривался транспорт веществ, идущий с увеличением градиента концентраций (активный транспорт), источником энергии которого служила АТФ. Созданные с помощью систем активного транспорта градиенты концентраций веществ образуют на мембране разность химического или электрохимического потенциала, за счет чего может осуществляться перенос других веществ против градиентов их концентраций. Такой транспорт, источником энергии которого служит не непосредственно АТФ или энергия окислительно-восстановительных реакций, а градиент концентраций других веществ, называется *вторично-активным*, или *сопряженным*.

Существует три вида вторично-активного транспорта ионов: унипорт, симпорт и антипорт.

В случае *унипорта* за счет существования на мембране градиента электрического потенциала осуществляется односторонний транспорт заряженных частиц в сторону меньшего значения потенциала. Например, митохондрии в процессе своего функционирования активно выкачивают протоны из матрикса в цитоплазму.

му, в результате чего их внутренняя область оказывается заряженной более отрицательно, чем внешняя. В нормальных условиях созданный градиент электрохимического потенциала используется для синтеза АТФ. Если же в клетку добавить антибиотик валиномицин, который является специфическим переносчиком ионов калия, то начинается транспорт этих ионов из цитоплазмы во внутреннюю среду митохондрий, то есть в область, где электрический потенциал отрицательный. В данном случае транспорт  $K^+$  хотя и идет против градиента концентраций (в митохондриях концентрация ионов калия выше, чем в цитоплазме), но не требует энергии АТФ, так как осуществляется в сторону уменьшения градиента электрического потенциала, созданного разницей концентраций протонов.

В процессе *антипорта* (обменного транспорта или противотransпорта) осуществляется транспорт одинаково заряженных ионов двух типов в разные стороны. Например, антибиотик нигерицин транспортирует протоны по градиенту концентраций, что приводит к увеличению градиента электрического потенциала, а это, в свою очередь, влечет за собой перенос ионов калия в противоположную сторону (градиента электрического потенциала), в результате чего возрастает градиент концентраций  $K^+$ .

По механизму *симпорта* (котранспорта) осуществляется транспорт противоположно заряженных ионов в одну сторону. При этом транспорт одного из ионов осуществляется по градиенту концентраций, а транспорт второго — по градиенту электрического потенциала, создаваемого транспортом первого иона.

Одним из наиболее изученных случаев вторично-активного транспорта незаряженных молекул является всасывание глюкозы в стенках кишечника. Концентрация глюкозы в энтероцитах (клетках эпителия кишечника) выше, чем в просвете кишечника, поэтому пассивное ее всасывание невозможно. Клетки кишечника активно (за счет энергии АТФ) выкачивают натрий из энтероцитов в серозную область кишечника (то есть туда, где находятся кровеносные сосуды), в результате чего концентрация  $Na^+$  в клетке снижается по сравнению с его концентрацией снаружи. Благодаря этому становится возможным пассивный транспорт  $Na^+$  из просвета кишечника в энтероцит. Однако простая диффузия ионов через бислой крайне маловероятна и  $Na^+$  может пересечь мембрану только с помощью переносчика. При этом переносчик связывается не только с  $Na^+$ , но и с молекулой глюкозы. Образовавшийся комплекс пассивно по градиенту концентраций ионов  $Na^+$  и электрического потенциала переносится внутрь клетки. Таким образом, транспорт глюкозы осуществляется против градиента концентрации, но не за счет энергии АТФ, а за счет существова-

ния градиента концентрации другого вещества, в данном случае — ионов натрия. Подобные системы транспорта существуют и для многих других веществ, например углеводов и аминокислот, что очень важно, так как для них отсутствуют специфические насосы.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 11.1.** Разность концентраций молекул вещества на мембране некоторой клетки равна  $\Delta c = 45$  ммоль/л, коэффициент распределения между мембраной и окружающей средой  $K = 30$ , коэффициент диффузии —  $D = 1,5 \cdot 10^{-10}$  м<sup>2</sup>/с, плотность потока  $J = 25$  моль/(м<sup>2</sup> · с). Рассчитайте толщину  $l$  этой мембраны.

**Решение.** Из уравнения Фика

$$J = \frac{DK \Delta c}{l}$$

получаем:

$$l = \frac{DK \Delta c}{J} = \frac{1,5 \cdot 10^{-10} \cdot 30 \cdot 45}{25} = 8,1 \cdot 10^{-9} \text{ м.}$$

**Задача 11.2.** Рассчитайте энергию, необходимую для совершения одного цикла  $\text{Na}^+, \text{K}^+$ -АТФазой в гигантском аксоне кальмара, если трансмембранный потенциал этой клетки составляет  $\Delta \phi = -60$  мВ, концентрация ионов калия и натрия внутри и снаружи соответственно равны  $[\text{K}^+]_i = 360$  ммоль/л и  $[\text{K}^+]_o = 10$  ммоль/л,  $[\text{Na}^+]_i = 69$  ммоль/л и  $[\text{Na}^+]_o = 425$  ммоль/л. Температура клетки  $t = 37$  °С.

**Решение.**  $\text{Na}^+, \text{K}^+$ -насос выкачивает из клетки три иона натрия и закачивает внутрь два иона калия, при этом из клетки выносятся один положительный заряд. Таким образом, насос совершает осмотическую и электрическую работу.

Осмотическая работа в общем виде записывается как

$$A_{\text{осм}} = RT \ln \frac{c_2}{c_1},$$

где  $c_1$  — концентрация вещества в первой среде (откуда совершается перенос);  $c_2$  — во второй (куда совершается перенос).

Осмотическая работа, необходимая для переноса внутрь клетки двух ионов калия, составляет:

$$A_{\text{осм. К}} = 2RT \ln \frac{[\text{K}^+]_i}{[\text{K}^+]_o},$$

где  $[\text{K}^+]_o$  — концентрация ионов калия снаружи клетки (в начальном состоянии);  $[\text{K}^+]_i$  — концентрация ионов калия внутри клетки (в конечном

состоянии). Аналогичным образом записывается осмотическая работа, необходимая для выноса из клетки трех ионов натрия:

$$A_{\text{осм. Na}} = 3RT \ln \frac{[\text{Na}^+]_o}{[\text{Na}^+]_i},$$

где  $[\text{Na}^+]_i$  — концентрация ионов натрия внутри клетки (в начальном состоянии);  $[\text{Na}^+]_o$  — концентрация ионов натрия снаружи клетки (в конечном состоянии).

Электрическая работа равна

$$A_{\text{эл}} = zF(\varphi_2 - \varphi_1) = zF(\varphi_o - \varphi_i),$$

где  $z = +1$ , так как из клетки, имеющей потенциал  $\varphi_1 = -60$  мВ, выкачивается один положительный заряд в среду с потенциалом  $\varphi_2 = 0$  мВ.

Энергия, которую необходимо затратить для совершения одного цикла  $\text{Na}^+, \text{K}^+$ -АТФазой, равна сумме этих работ:

$$\Delta\tilde{\mu} = 2RT \ln \frac{[\text{K}^+]_i}{[\text{K}^+]_o} + 3RT \ln \frac{[\text{Na}^+]_o}{[\text{Na}^+]_i} + zF(\varphi_o - \varphi_i).$$

Подставив числовые значения, получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= 2 \cdot 8,31 \cdot 310 \cdot \ln \frac{360}{10} + 3 \cdot 8,31 \cdot 310 \cdot \ln \frac{425}{69} + 1 \cdot 9,65 \cdot 10^4 [0 - (-60 \cdot 10^{-3})] = \\ &= 18463 + 14050 + 5790 = 38303 \text{ Дж/моль} \approx 38 \text{ кДж/моль}. \end{aligned}$$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**11.1.** Рассчитайте коэффициент распределения  $K$  для вещества, если при толщине мембраны  $l = 8$  нм коэффициент диффузии  $D = 7,2 \cdot 10^{-8}$  см<sup>2</sup>/с, а коэффициент проницаемости  $P = 14$  см/с.

**11.2.** Плоская билипидная мембрана толщиной  $l = 10$  нм разделяет камеру на две части, в которых находится вещество в концентрациях соответственно  $c_1 = 2$  и  $c_2 = 30$  моль/л. Поток вещества через мембрану  $J = 0,8$  моль/(м<sup>2</sup> · с). Рассчитайте коэффициент диффузии  $D$  этого вещества, если коэффициент распределения  $K = 0,05$ .

**11.3.** Рассчитайте коэффициент проницаемости  $P$  для вещества, поток которого через мембрану  $J = 5 \cdot 10^{-5}$  моль/(м<sup>2</sup> · с). Концентрация вещества внутри клетки  $c_i = 1,8 \cdot 10^{-4}$ , а снаружи —  $c_o = 3 \cdot 10^{-5}$  моль/л.

**11.4.** Рассчитайте величину свободной энергии  $\Delta G$ , необходимую для переноса 2 молей электронейтральных молекул из межклеточной среды в клетку, где их концентрация в 10 раз больше, чем снаружи. Температура пленки  $t = 25$  °С.

**11.5.** Полупроницаемая мембрана разделяет два раствора одновалентных ионов концентрацией 50 и 500 ммоль/л. Определите устанавливающуюся на мембране разность потенциалов при температуре  $t = 37$  °С.



**11.6.** Два раствора ионов лития разделены плоской билипидной мембраной. При каком соотношении концентраций ионов на мембране установится равновесная разность потенциалов  $\Delta\varphi = 116$  мВ? Температура среды  $t = 20$  °C.

**11.7.** Во сколько раз наружная концентрация  $c_o$  ионов натрия должна превышать внутреннюю  $c_i$ , чтобы равновесный потенциал Нернста  $\Delta\varphi$  составлял +50 мВ при температуре  $t = 27$  °C?

**11.8.** Концентрация малых ионов в клетке равна  $c = 300$  ммоль/л, концентрация макромолекул  $[R^-] = 2$  ммоль/л. Каждая макромолекула в среднем содержит  $n = 20$  отрицательно заряженных групп. Вычислите потенциал Доннана  $\Delta\varphi$  на мембране клетки при температуре  $t = 27$  °C.

**11.9.** Во сколько раз концентрация малых катионов должна превышать концентрацию макромолекул, чтобы доннановская разность потенциалов составляла  $\Delta\varphi = -2$  мВ при температуре  $t = 20$  °C? Средний заряд макромолекул  $z = -15$ .

**11.10.** В формировании потенциала действия кардиомиоцита существенную роль играют ионы кальция, концентрация которых составляет снаружи  $c_o = 2$ , а внутри  $c_i = 10^{-4}$  моль/л. В фазе деполяризации ионы  $\text{Ca}^{2+}$  проникают в цитоплазму, а в фазе реполяризации удаляются из нее  $\text{Ca}^{2+}$ -АТФазами, расположенными на цитоплазматической мембране и мембранах саркоплазматического ретикулума. Вычислите энергию  $\Delta G$ , необходимую для переноса 1 моль ионов кальция из цитоплазмы во внеклеточную среду, если потенциал покоя кардиомиоцита  $\Delta\varphi = -90$  мВ, температура клетки  $t = 37$  °C. *Примечание:*  $\text{Ca}^{2+}$ -насос за один цикл выкачивает два иона кальция.

**11.11.** Постоянная связывания ионов кальция  $\text{Mg}^{2+}$ -зависимой  $\text{Ca}^{2+}$ -АТФазой на наружной поверхности пузырька плазматического ретикулума составляет  $K_{c1} = 10^7$  л/моль, а внутри везикулы —  $K_{c2} = 10^3$  л/моль. Вычислите энергию  $\Delta G$  переноса двух ионов  $\text{Ca}^{2+}$  из цитоплазмы в пузырьки саркоплазматического ретикулума при температуре  $t = 37$  °C.

## ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**11.1.** Коэффициент проницаемости мембраны описывается следующим выражением:

$$\text{а) } P = \frac{D^2 K}{l}; \quad \text{б) } P = \frac{lK}{D^2}; \quad \text{в) } P = \frac{l}{DK}; \quad \text{г) } P = \frac{\sqrt{DK}}{l}; \quad \text{д) } P = \frac{DK}{l}.$$

**11.2.** Закон Фика для пассивного транспорта веществ через мембрану имеет вид:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } J = -P(c_2 - c_1); & \text{г) } J = D(c_2 + c_1); \\ \text{б) } J = P(c_2 + c_1); & \text{д) } J = -P(c_2 + c_1). \\ \text{в) } J = -D(c_2 - c_1); & \end{array}$$

**11.3.** Уравнение Теорелла имеет следующий вид:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } J = -u \frac{dc}{dx}; & \text{г) } J = -cu \frac{d\tilde{\mu}}{dx}; \\ \text{б) } J = -cu \frac{d\varphi}{dx}; & \text{д) } J = -c \frac{d\tilde{\mu}}{dx}. \\ \text{в) } J = cu^2 \frac{dc}{dx}; \end{array}$$

**11.4.** Электродиффузионное уравнение Нернста—Планка имеет вид:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } J = -uRT \frac{dc}{dx} - cuZF \frac{d\varphi}{dx}; & \text{г) } J = uZF \frac{\partial \varphi}{\partial x} - cuRT \frac{\partial c}{\partial t}; \\ \text{б) } J = u^2 RF \frac{dc}{dt} - cZT \frac{d\varphi}{dt}; & \text{д) } J = -cu \frac{\partial c}{\partial x}. \\ \text{в) } J = -D \frac{dc}{dx}; \end{array}$$

**11.5.** Уравнение Гольдмана имеет вид:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } J = \frac{zF \Delta \varphi P}{RT} \cdot \frac{c_2 \exp(zF \Delta \varphi / RT) + c_1}{1 + \exp(zF \Delta \varphi / RT)}; \\ \text{б) } J = -D \cdot \frac{dc}{dx}; \\ \text{в) } J = -cu \cdot \frac{d\tilde{\mu}}{dx}; \\ \text{г) } J = \frac{zF \Delta \varphi P}{RT} \cdot \frac{c_2 \exp(zF \Delta \varphi / RT) - c_1}{1 - \exp(zF \Delta \varphi / RT)}; \\ \text{д) } J = \frac{z \Delta \varphi P}{RT} \cdot \frac{c_1}{1 - \exp(zF \Delta \varphi / RT)}. \end{array}$$

**11.6.** Уравнение Нернста имеет вид:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \varphi_i - \varphi_o = \frac{zF}{RT} \ln \frac{c_o}{c_i}; & \text{г) } \varphi_i - \varphi_o = \frac{zR}{TF} \ln \frac{c_o}{c_i}; \\ \text{б) } \varphi_i - \varphi_o = \frac{RT}{zF} \ln \frac{c_o}{c_i}; & \text{д) } \varphi_i - \varphi_o = \frac{zR}{TF} \ln \frac{c_i}{c_o}. \\ \text{в) } \varphi_i - \varphi_o = \frac{RT}{zF} \ln \frac{c_i}{c_o}; \end{array}$$

**11.7.** Потенциал Доннана равен:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \varphi_i - \varphi_o = -\frac{RT}{F} \ln c; & \text{г) } \varphi_i - \varphi_o = -\frac{RT}{F} \Delta c; \\ \text{б) } \varphi_i - \varphi_o = -RT \ln \frac{c_i}{c_o}; & \text{д) } \varphi_i - \varphi_o = -\frac{F}{RT} cn. \\ \text{в) } \varphi_i - \varphi_o = -\frac{RT}{F} \cdot \frac{\eta[R^-]_i}{2c}; \end{array}$$

**11.8.** Поток вещества, транспортируемого переносчиками из области, где его концентрация равна  $c$ , в область, где концентрация этого же вещества равна нулю, описывается формулой:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } J = -D \frac{c}{l}; & \text{г) } J = J_{\max} \frac{c}{K_{\text{тр}} + c}; \\ \text{б) } J = RT \ln c; & \text{д) } J = \frac{RT}{zF} c. \\ \text{в) } J = -\frac{DK}{l} c; & \end{array}$$

**11.9.** Изменение свободной энергии при проникновении одного моля ионов из раствора с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_B$  в мембрану с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_M$  составляет:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } \Delta W = \frac{zeN_A}{8\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\epsilon_M} + \frac{1}{\epsilon_B} \right); & \text{г) } \Delta W = \frac{(ze)^2 N_A}{8\pi\epsilon_0 \epsilon_B \epsilon_M}; \\ \text{б) } \Delta W = \frac{\sqrt{ze}}{2\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\epsilon_M} - \frac{1}{\epsilon_B} \right); & \text{д) } \Delta W = \frac{(ze)^2 N_A}{8\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\epsilon_M} - \frac{1}{\epsilon_B} \right). \\ \text{в) } \Delta W = \frac{(ze)^2}{2\pi\epsilon_0 r} \left( \frac{1}{\epsilon_M} + \frac{1}{\epsilon_B} \right); & \end{array}$$

**11.10.** По сравнению с простой диффузией облегченная диффузия:

- а) происходит с меньшей скоростью;
- б) происходит с большей скоростью;
- в) сопровождается изменением скорости транспорта, но не по модулю, а по направлению;
- г) не сопровождается изменением скорости транспорта.

**11.11.**  $\text{Na}^+, \text{K}^+$ -насос транспортирует в клетку:

- а)  $2\text{Na}^+$ , а из клетки  $3\text{K}^+$ ;      г)  $3\text{Na}^+$ , а из клетки  $2\text{K}^+$ ;
- б)  $2\text{K}^+$ , а из клетки  $3\text{Na}^+$ ;      д)  $3\text{Na}^+$ , а из клетки  $3\text{K}^+$ .
- в)  $3\text{K}^+$ , а из клетки  $2\text{Na}^+$ ;

**11.12.** Молекула валиномицина транспортирует через мембрану:

- а)  $\text{K}^+$  и  $\text{Na}^+$ ;      г)  $\text{K}^+$  и  $\text{Ca}^{2+}$ ;
- б) преимущественно  $\text{Na}^+$ ;      д)  $\text{H}^+$  и  $\text{Cl}^-$ .
- в) преимущественно  $\text{K}^+$ ;

# БИОФИЗИКА НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА

Нормальное функционирование организма невозможно без обмена информацией между клетками, одним из способов которого является возможность генерации и восприятия клетками нервного импульса. В организме существуют так называемые *возбудимые клетки*, к которым относятся мышечные, нервные и секреторные. Эти клетки способны откликаться каким-либо образом на их возбуждение. Так, мышечные клетки сокращаются, секреторные выделяют биологически активные вещества, а нервные генерируют электрические колебания — *нервный импульс*.

### § 12.1. ПОТЕНЦИАЛ ПОКОЯ

На мембране клетки всегда существует разность потенциалов, то есть электрический потенциал внутри клетки отличается от наружного. Эта разность потенциалов называется *потенциалом покоя*. Если наружный потенциал принять равным нулю, то внутренний составит от  $-50$  до  $-90$  мВ, в зависимости от вида клеток.

Причиной возникновения потенциала покоя является наличие градиента концентраций ионов  $K^+$ ,  $Na^+$  и  $Cl^-$  на клеточной мембране (табл. 12.1.1). Допустим, что мембрана проницаема только для ионов калия и непроницаема для остальных, тогда потенциал покоя будет определяться равновесным калиевым потенциалом и описываться уравнением Нернста:

$$\Delta\varphi = \frac{RT}{F} \ln \frac{[K^+]_o}{[K^+]_i}, \quad (12.1.1)$$

где  $R$  — универсальная газовая постоянная;  $T$  — абсолютная температура;  $F$  — число Фарадея;  $[K^+]_o$  и  $[K^+]_i$  — наружная и внутренняя

Таблица 12.1.1

**Концентрация ионов  $K^+$ ,  $Na^+$  и  $Cl^-$  внутри и снаружи клетки, значения  
равновесных потенциалов, потенциалов покоя  
и потенциалов действия некоторых клеток**

Клетки	Значения концент- раций ионов внутри ( <i>i</i> ) и снаружи ( <i>o</i> ) клетки, мМ			Равновесный потенциал для разных ионов, мВ			Измеренные потенциалы, мВ	
	$\frac{K_i^+}{K_o^+}$	$\frac{Na_i^+}{Na_o^+}$	$\frac{Cl_i^-}{Cl_o^-}$	$K^+$	$Na^+$	$Cl^-$	по- коя	на мак- симуме потенциала действия
Гигантский аксон каракатицы	$\frac{340}{10,4}$	$\frac{49}{463}$	$\frac{114}{592}$	-88	+57	-42	-60	+50
Гигантский аксон кальмара	$\frac{360}{10,0}$	$\frac{69}{425}$	$\frac{157}{496}$	-90	+46	-29	-60	+35
Мышечное волокно лягушки	(48:1)	(1:7)	(1:64)	-98	+49	-105	-88	+34
Моторный нейрон кошки	$\frac{150}{5,5}$	$\frac{15}{150}$	$\frac{9}{125}$	-90	+60	-70	-90	+30

концентрации ионов калия соответственно. Если внутриклеточная концентрация  $K^+$  в 50 раз превышает внеклеточную, то потенциал покоя при температуре 27 °С составляет -100,7 мВ.

Величина потенциала покоя всегда несколько ниже равновесного калиевого потенциала, что объясняется просачиванием внутрь клетки ионов натрия, которые приносят туда свой положительный заряд. Диффузия отрицательно заряженных ионов хлора, наоборот, способствует увеличению  $\Delta\phi$ . Таким образом, вклад в формирование потенциала покоя вносят потоки всех ионов, коэффициенты проницаемости которых отличны от нуля.

Вычислим зависимость потенциала покоя от концентрации и коэффициентов проницаемости ионов. В дальнейших расчетах будем учитывать только ионы  $K^+$ ,  $Na^+$ ,  $Cl^-$ .

В стационарном состоянии сумма потоков ионов через мембрану равна нулю:

$$J_{Na} + J_K - J_{Cl} = 0, \quad (12.1.2)$$

хотя потоки отдельных ионов могут быть и отличны от нуля. Так как ионы хлора заряжены отрицательно, то перед потоком ионов хлора  $J_{Cl}$  ставится знак «-».

Выразим из уравнения Гольдмана [см. формулу (11.2.17)] потоки для ионов  $K^+$ ,  $Na^+$ ,  $Cl^-$  с учетом их заряда  $z$ :

$$(12.1.3)$$

$$J_{Na} = \frac{F \Delta\phi P_{Na}}{RT} \cdot \frac{[Na^+]_i e^{F \Delta\phi/RT} - [Na^+]_o}{1 - e^{F \Delta\phi/RT}}; \quad (12.1.4)$$

$$J_{Cl} = -\frac{F \Delta\phi P_{Cl}}{RT} \cdot \frac{[Cl^-]_i e^{-F \Delta\phi/RT} - [Cl^-]_o}{1 - e^{-F \Delta\phi/RT}} \quad (12.1.5)$$

и подставим их в уравнение (12.1.2). Сократив на общий множитель

$\frac{F \Delta\phi}{RT}$ , запишем:

$$\begin{aligned} & \frac{P_K [K^+]_i e^{F \Delta\phi/RT} - P_K [K^+]_o}{1 - e^{F \Delta\phi/RT}} + \frac{P_{Na} [Na^+]_i e^{F \Delta\phi/RT} - P_{Na} [Na^+]_o}{1 - e^{F \Delta\phi/RT}} + \\ & + \frac{P_{Cl} [Cl^-]_i e^{-F \Delta\phi/RT} - P_{Cl} [Cl^-]_o}{1 - e^{-F \Delta\phi/RT}} = 0. \end{aligned}$$

Разделив числитель и знаменатель последнего слагаемого на множитель  $e^{-F \Delta\phi/RT}$ :

$$\begin{aligned} & \frac{P_K [K^+]_i e^{F \Delta\phi/RT} - P_K [K^+]_o}{1 - e^{F \Delta\phi/RT}} + \frac{P_{Na} [Na^+]_i e^{F \Delta\phi/RT} - P_{Na} [Na^+]_o}{1 - e^{F \Delta\phi/RT}} + \\ & + \frac{P_{Cl} [Cl^-]_i - P_{Cl} [Cl^-]_o e^{F \Delta\phi/RT}}{e^{F \Delta\phi/RT} - 1} = 0; \end{aligned}$$

получаем:

$$\begin{aligned} & P_K [K^+]_i e^{F \Delta\phi/RT} - P_K [K^+]_o + P_{Na} [Na^+]_i e^{F \Delta\phi/RT} - P_{Na} [Na^+]_o - \\ & - P_{Cl} [Cl^-]_i + P_{Cl} [Cl^-]_o e^{F \Delta\phi/RT} = 0; \end{aligned}$$

$$e^{F \Delta\phi/RT} (P_K [K^+]_i + P_{Na} [Na^+]_i + P_{Cl} [Cl^-]_o) = P_K [K^+]_o + P_{Na} [Na^+]_o + P_{Cl} [Cl^-]_i$$

или

$$\frac{F \Delta\phi}{RT} = \ln \frac{P_K [K^+]_o + P_{Na} [Na^+]_o + P_{Cl} [Cl^-]_i}{P_K [K^+]_i + P_{Na} [Na^+]_i + P_{Cl} [Cl^-]_o}.$$

В результате получаем:

$$\Delta\phi = \frac{RT}{F} \ln \frac{P_K [K^+]_o + P_{Na} [Na^+]_o + P_{Cl} [Cl^-]_i}{P_K [K^+]_i + P_{Na} [Na^+]_i + P_{Cl} [Cl^-]_o}. \quad (12.1.6)$$

Данное выражение называется *уравнением Гольдмана—Ходжкина—Катца*.

В состоянии покоя мембранные проницаемости для ионов  $K^+$ ,  $Na^+$  и  $Cl^-$  относятся друг к другу как

$$P_K : P_{Na} : P_{Cl} = 1 : 0,04 : 0,45. \quad (12.1.7)$$

Так как в покое проницаемость клетки для ионов калия намного больше ее проницаемости для других ионов, то потенциал покоя определяется преимущественно разностью концентраций ионов калия.

Поддержание разности концентраций ионов осуществляется при помощи работы ионных насосов, использующих энергию АТФ.  $Na^+, K^+$ -насос, кроме того, способствует увеличению трансмембранного потенциала, так как выводит три иона натрия и закачивает в клетку только два иона калия, что увеличивает положительный заряд межклеточной среды, а следовательно, увеличивает потенциал покоя.

Увеличение трансмембранной разности потенциалов называется *гиперполяризацией*, уменьшение — *деполяризацией*. В последнем случае может даже измениться знак внутриклеточного потенциала.

Нарушение работы АТФ-азы, которое можно вызвать, например, действием сердечного гликозида убаина, уменьшает потенциал покоя. К такому же эффекту приводит действие различных ядов (например батрахотоксина), увеличивающих проницаемость клеточной мембраны для ионов натрия. Деполяризацию вызывает также торможение процессов, обеспечивающих в клетке синтез АТФ.

## § 12.2. ПОТЕНЦИАЛ ДЕЙСТВИЯ

При воздействии на клетку какого-либо раздражителя ее трансмембранный потенциал изменяется, возникает так называемый *потенциал действия*, или *спайк*. Причиной такого колебания потенциала покоя является изменение проницаемости мембраны для натрия, что, в свою очередь, вызвано открытием натриевых ионных каналов. При возбуждении проницаемости мембраны для ионов калия и натрия относятся друг к другу как

$$P_K : P_{Na} = 1 : 20. \quad (12.2.1)$$

В результате поток ионов натрия в клетку начинает превышать поток ионов калия из клетки (рис. 12.2.1). Если раньше потенциал на мембране был близок к равновесному калиевому потенциалу, то теперь он стремится к равновесному натриевому, но не дости-

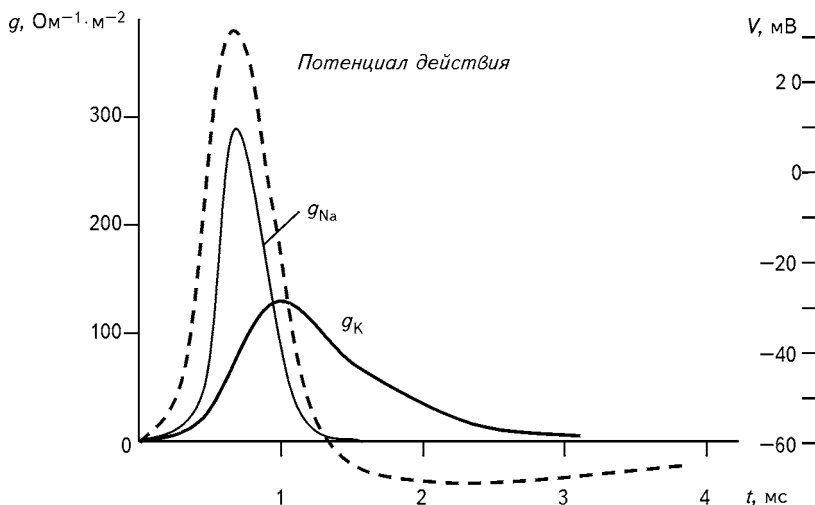


Рис. 12.2.1. Зависимость проводимости мембраны для ионов натрия и калия ( $g_{\text{Na}}$  и  $g_{\text{K}}$ ) от времени  $t$  для гигантского аксона кальмара во время генерации потенциала действия  $V$

гает его только вследствие того, что проводимости для ионов калия и хлора отличны от нуля.

В клетке происходит деполяризация мембраны: отрицательный потенциал клетки приближается к нулю, а потом и вовсе меняет знак на противоположный (рис. 12.2.2). Последний процесс называется *реверсией* мембранного потенциала. Максимальное значение потенциала действия составляет обычно 30...40 мВ<sup>1</sup>. Увеличе-

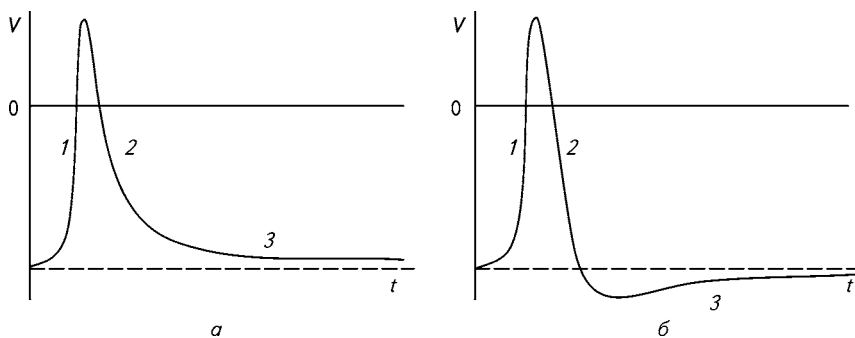


Рис. 12.2.2. Фазы потенциала действия:

1 — фаза деполяризации; 2 — фаза реполяризации; 3 — следовой потенциал: а — отрицательный; б — положительный

<sup>1</sup> Для сравнения: равновесный натриевый потенциал гигантского аксона кальмара составляет +46 мВ.



ние натриевой проводимости длится доли миллисекунд. Далее она начинает снижаться, а калиевая — возрастать, в результате чего в клетке восстанавливается потенциал покоя. Этот процесс называется *реполяризацией* клеточной мембраны.

Для восстановления потенциала покоя клетке требуется некоторое время. В процессе реполяризации сначала происходит быстрое приближение к нормальному значению потенциала покоя, затем скорость изменения потенциала уменьшается, и клетка некоторое время пребывает в деполяризованном состоянии. Это называется *следовой деполяризацией*. В некоторых клетках, наоборот, возникает *следовая гиперполяризация*, то есть в процессе реполяризации разность потенциалов начинает превышать обычную. Оба эти отклонения от нормального значения потенциала покоя называются *следовыми потенциалами* (рис. 12.2.2).

Длительность потенциала действия отличается для различных клеток (колеблется в пределах от 0,5 до 3 мс) и существенно зависит от температуры. При ее уменьшении на 10 °С время существования потенциала действия увеличивается в три раза. Длительность реполяризации обычно превышает длительность деполяризации.

Вычислим электрический ток  $I_m$  через мембрану. Он состоит из емкостного тока  $I_C$  и тока ионов  $\sum I_{и}$  (см. эквивалентную схему на рис.12.2.3):

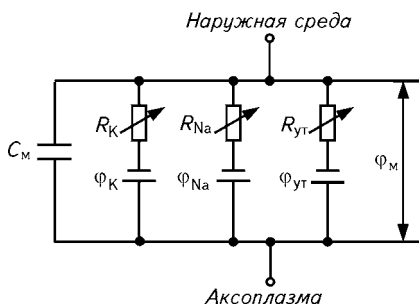


Рис. 12.2.3. Эквивалентная электрическая схема возбудимой мембраны:

$R_K, R_{Na}, R_{UT}$  — сопротивление участка мембраны для ионов  $K^+, Na^+$  и остальных ионов соответственно;  $\Phi_K, \Phi_{Na}, \Phi_{UT}$  — равновесный потенциал Нернста для них;  $\Phi_m$  — трансмембранный потенциал

$$I_m = I_C + \sum I_{и}. \quad (12.2.2)$$

Емкостной ток обусловлен перезарядкой конденсатора (мембраны) (см. § 10.1) и равен отношению количества заряда  $dq$ , прошедшего через мембрану за время  $dt$ . Так как  $dq = C_m d\Phi_m$  (см. § 9.2), где  $C_m$  — емкость мембраны,  $\Phi_m$  — трансмембранный потенциал, то

$$I_C = C_m \frac{d\Phi_m}{dt}. \quad (12.2.3)$$

Ионный ток  $\sum I_{и}$  обусловлен протеканием через трансмембранные каналы ионов  $K^+, Na^+$ , а также других ионов (например  $Cl^-$ ), ток которых называется током утечки  $I_{UT}$ :

$$\sum I_{\text{и}} = I_{\text{K}^+} + I_{\text{Na}^+} + I_{\text{ут}}. \quad (12.2.4)$$

Тогда суммарный мембранный ток равен:

$$I_{\text{м}} = C_{\text{м}} \frac{d\varphi_{\text{м}}}{dt} + I_{\text{K}^+} + I_{\text{Na}^+} + I_{\text{ут}}. \quad (12.2.5)$$

Для непосредственного изучения ионных токов необходимо исключить емкостной ток. Это достигается с помощью **метода фиксации потенциала**, который заключается в том, что на некотором участке мембраны потенциал смещается до некоторой заданной величины и удерживается на данном уровне с помощью схемы с обратной связью.

На основании закона Ома запишем ток ионов данного типа:

$$I_{\text{и}} = g_{\text{и}} (\varphi_{\text{м}} - \varphi_{\text{и. р}}), \quad (12.2.6)$$

где  $g_{\text{и}} = \frac{1}{R_{\text{и}}}$  — проводимость (величина, обратная сопротивлению) для данного типа ионов;  $\varphi_{\text{м}}$  — трансмембранный потенциал;  $\varphi_{\text{и. р}}$  — равновесный потенциал Нернста данного типа ионов.

Метод фиксации потенциала позволил изучить механизм генерации потенциала действия. Изменяя ионный состав среды, Ходжкин и Хаксли показали, что фаза деполяризации мембраны обусловлена увеличением ее проводимости для ионов  $\text{Na}^+$ , а фаза деполяризации — снижением натриевого и увеличением калиевого токов.

В ходе проведенных экспериментов была выдвинута гипотеза о существовании потенциалзависимых специфических калиевых и натриевых каналов, которые могут чередовать во времени открытое и закрытое состояние, регулируя тем самым проницаемость мембраны для ионов данного типа в зависимости от величины мембранного потенциала.

В последнее время появился метод, позволяющий определять ионный ток через отдельно взятый ионный канал, так называемый **метод «пэтч-клемп»**<sup>1</sup>. Этот метод также используется для изучения белков, формирующих ионные каналы.

Действие раздражителя обычно приводит к локальной деполяризации мембраны. Это вызывает открытие натриевых каналов, чувствительных к изменению потенциала, а следовательно, — увеличивает натриевую проводимость, что приводит к еще большей деполяризации. Указанный процесс способствует открытию новых натриевых каналов. Существование такой обратной связи обеспечивает регенеративную или самообновляющуюся деполяризацию клеточной мембраны.

<sup>1</sup> Patch — заплатка, clamp — зажим (англ.).

После возникновения потенциала действия данный участок мембраны нервной клетки некоторое время находится в невозбудимом — **рефрактоном** — состоянии, то есть действие раздражителя не вызывает генерацию потенциала действия, так как натриевые каналы некоторое время после активации находятся в закрытом состоянии и не способны открыться в ответ на изменение трансмембранного потенциала.

При возникновении потенциалов действия в клетке уменьшается концентрация ионов калия и увеличивается концентрация ионов натрия. Поэтому в этих условиях необходима активация мембранных насосов, осуществляющих активный транспорт ионов. Так как для этого требуются молекулы АТФ, то в клетке активируются процессы дыхания, увеличивается потребление кислорода и теплообмен.

### **§ 12.3. РАЗДРАЖЕНИЕ МЕМБРАНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ ТОКОМ**

В эксперименте возбуждение мембран чаще всего производят электрическим током, что позволило получить многие количественные характеристики этого процесса. В одном из наиболее распространенных методов в исследуемую клетку помещают анод, а катод оставляют во внеклеточной среде. Пропускание электрического тока вызывает деполяризацию мембраны, а следовательно,— возникновение потенциала действия. При противоположной полярности электродов, когда анод оставляют у поверхности клетки, а катод помещают внутрь, возникновение потенциала действия невозможно, так как происходит гиперполяризация мембраны.

Было замечено, что амплитуда потенциала действия не зависит от силы раздражителя, а сам он возникает только в том случае, если деполяризация превысила некоторый пороговый уровень, определяемый свойствами данной клетки. Это явление получило название закона «все или ничего». Однако если деполяризация составляет 50—75 % от уровня пороговой, то в клетке может возникнуть так называемый **локальный ответ**, амплитуда которого значительно ниже амплитуды потенциала действия (рис. 12.3.1). Чем выше уровень подпороговой деполяризации, то есть чем ближе он к пороговой, тем выше амплитуда локального ответа. Отсутствие потенциала действия при подпороговом уровне деполяризации объясняется тем, что при этом недостаточно увеличивается натриевая проницаемость, чтобы вызвать регенеративную деполяризацию. Возникающий уровень деполяризации не

вызывает открытия новых натриевых каналов, поэтому натриевая проводимость быстро уменьшается, и в клетке восстанавливается потенциал покоя.

Следует отметить, что амплитуда потенциала действия и пороговый уровень деполяризации не являются строго постоянными величинами для данной клетки. Длительная деполяризация приводит к увеличению инактивации натриевых каналов и активации калиевых, следствием чего является уменьшение амплитуды потенциала действия и увеличение порогового уровня деполяризации. Длительная гиперполяризация вызывает обратные эффекты: увеличение амплитуды потенциала действия и уменьшение порогового уровня деполяризации.

Возникновение потенциала действия зависит не только от силы тока, но и от времени его действия. Чем больше сила тока, тем меньше времени требуется подавать его на клетку, чтобы возник потенциал действия. Действие больших токов в течение короткого промежутка времени не вызывает нужного уровня деполяризации, так же как и действие в течение длительного времени токов малой силы. Наименьший ток, который способен вызвать потенциал действия, называется *реобазой* (отрезок  $OA$  на рис. 12.3.2); соответствующее ему время возбуждения — *полезным временем* (отрезок

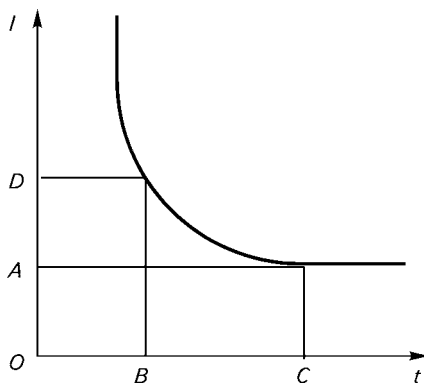


Рис. 12.3.2. Зависимость минимального уровня силы тока, вызывающего потенциал действия, от времени его воздействия на клетку

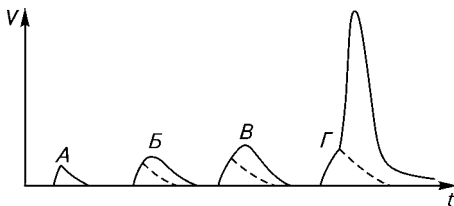


Рис. 12.3.1. Локальный ответ:

$A, B, B'$  — изменение трансмембранного потенциала при действии подпорогового возбуждения;  $A$  — локальный ответ отсутствует;  $B, B'$  — подпороговая деполяризация стимулировала развитие локального ответа (*пассивные изменения потенциала обозначены пунктирной линией*);  $\Gamma$  — критический уровень деполяризации перерастает в потенциал действия

$OC$  на рис. 12.3.2). В биологии и медицине часто используется термин *хронаксия* (отрезок  $OB$  на рис. 12.3.2), означающий время, в течение которого должен действовать ток в две реобазы (отрезок  $OD$  на рис. 12.3.2), вызывающий возбуждение. Для каждой клетки существует свое значение реобазы и хронаксии, поэтому измерение этих характеристик имеет диагностическое значение.

## § 12.4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЗБУЖДЕНИЯ ПО НЕРВНОМУ ВОЛОКНУ

Нервные волокна делятся на миелинизированные (мякотные) и немиелинизированные (безмякотные). Миелинизированное нервное волокно состоит из осевого цилиндра, покрытого цитоплазматической мембраной и содержащего аксоплазму (рис. 12.4.1). Вокруг него многократно обертываются шванновские клетки (в периферической нервной системе) или олигодендроциты (в центральной нервной системе), слои которых сливаются и образуют миелиновую оболочку нервного волокна. Через равные промежутки (от 0,2 до 2 мм), харак-

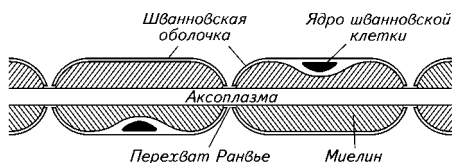


Рис. 12.4.1. Миелинизированное нервное волокно

терные для данной клетки, эта оболочка прерывается, и мембрана осевого цилиндра остается открытой. Такие участки волокна называются перехватами Ранвье. Их длина составляет примерно 1 мкм. Миелиновая оболочка, состоящая из мембранных липидов и белков, является надеж-

ным изолятором нервной клетки, благодаря ей возбуждение может возникнуть только на оголенном участке мембраны аксона. Немиелинизированные нервные волокна не имеют такой плотной жировой оболочки. Шванновская клетка окружает их только один раз.

Возбуждение какого-либо участка немиелинизированного нервного волокна приводит к локальной деполяризации мембраны. В то же время остальная (невозбужденная) часть мембраны сохраняет свою обычную разность потенциалов: наружная среда заряжена положительно, а внутренняя —

отрицательно. Между возбужденной и невозбужденной областями возникают местные токи (рис. 12.4.2). Это приводит к деполяризации соседнего участка, который, в свою очередь, деполяризует следующий. Подсоединив электроды осциллографа к двум участкам клеточной мембраны,

можно пронаблюдать распространение потенциала действия. Такой способ проведения возбуждения называется непрерывным.

В миелинизированных нервных волокнах непрерывное проведение нервного импульса невозможно. Возбуждение (деполяризация) может возникать не по всей длине мембраны, а только в перехватах Ранвье. Деполяризация одного такого участка *A* вызывает

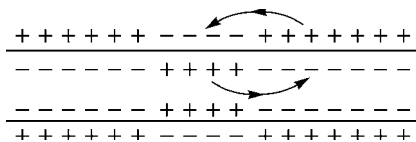


Рис. 12.4.2. Непрерывное проведение возбуждения по нервному волокну

деполяризацию соседнего участка *Б* (рис. 12.4.3). Далее возбуждение способно перейти только к участку *В*, так как *А* в течение некоторого времени остается нечувствительным к возбуждению (рефракторным). По этой причине импульс распространяется по нервному волокну только в одном направлении. Возникающий потенциал действия в несколько раз превышает порог, необходимый для возникновения возбуждения в следующем перехвате Ранвье, который, таким образом, каждый раз усиливает сигнал, ослабевающий в результате сопротивления межтканевой жидкости и аксоплазмы, и действует подобно ретранслирующему генератору. Механизм распространения возбуждения по миелинизированным волокнам называется скачкообразным или салътаторным.

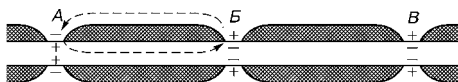


Рис. 12.4.3. Распространение возбуждения в миелинизированном нервном волокне

Салътаторный механизм выгоднее непрерывного, так как позволяет увеличить скорость проведения нервного импульса и более экономичен с энергетической точки зрения: деполяризуются только небольшие участки мембраны, возникают меньшие потери ионов, следовательно, клетке приходится расходовать меньше энергии для обеспечения работы,  $\text{Na}^+, \text{K}^+$ -насосов.

При одном из аутоиммунных заболеваний — рассеянном склерозе — иммунная система организма разрушает миелиновую оболочку, происходит оголение (демиелинизация) нервных волокон. При этом проведение нервных импульсов через пораженный участок нарушается, что приводит к различным проявлениям: нарушению зрения и координации, мышечной слабости, повышению мышечного тонуса и др. Демиелинизация может происходить и при некоторых других заболеваниях: невралгиях, радикулитах, различных полиневропатиях.

## § 12.5. СКОРОСТЬ ПРОВЕДЕНИЯ НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА

Распределение потенциала действия  $\varphi$  в зависимости от расстояния  $x$  и времени  $t$  по немиелинизированному нервному волокну определяется так называемым *телеграфным уравнением*:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{4\rho_a}{D} \left( C_m \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\varphi}{\rho_m l} \right), \quad (12.5.1)$$

где  $D$  — диаметр волокна;  $l$  — толщина мембраны;  $C_m$  — емкость;  $\rho_a$  — удельное сопротивление аксоплазмы;  $\rho_m$  — удельное

сопротивление мембраны, которое резко снижается при возбуждении.

Решение этого уравнения в стационарном режиме (при  $t \rightarrow \infty$ ) имеет следующий вид:

$$\varphi = \varphi_0 \exp(-x/\lambda), \quad (12.5.2)$$

где  $\varphi_0$  — потенциал в точке  $x = 0$ ;  $\lambda$  — постоянная длины волокна, равная

$$\lambda = \sqrt{\frac{Dl\rho_m}{4\rho_a}}. \quad (12.5.3)$$

При удалении от точки приложения возбуждения на величину  $\lambda$  потенциал уменьшается в  $e$  раз. Клетке выгоднее иметь большие значения  $\lambda$ , так как при этом затухание импульса происходит медленнее. Отсутствие полного затухания импульса объясняется тем, что каждый новый потенциал действия усиливает сигнал.

Скорость проведения нервного импульса по немиелинизированным нервным волокнам, так же как и постоянная длины, пропорциональна квадратному корню из диаметра волокна. Увеличение диаметра способствует увеличению  $\lambda$  и скорости распространения возбуждения. Этим объясняется существование гигантских аксонов головоногих моллюсков. Скорость проведения возбуждения по немиелинизированному волокну диаметром 1 мкм составляет только 2 м/с, тогда как для волокон диаметром 0,5—1 мм эта величина уже достигает 20 м/с.

Для миелинизированных нервных волокон скорость проведения возбуждения зависит от длины межперехватных участков (участков между двумя перехватами Ранвье). Замечено, что время, необходимое для передачи сигнала от одного перехвата к другому, примерно одинаково и составляет около 0,07 мс. В то же время длина межперехватных участков пропорциональна диаметру волокна. Таким образом, скорость проведения нервного импульса по мякотным волокнам пропорциональна их диаметру. Поэтому у организмов, имеющих миелинизированные волокна, отпала необходимость значительно увеличивать их диаметр. Такое волокно диаметром 20 мкм проводит возбуждение со скоростью 120 м/с.

Измерение скорости проведения нервного импульса часто проводят в медицинской практике: при нарушении миелиновой оболочки скорость распространения возбуждения снижается.

Для нервных волокон приблизительно одинакового диаметра скорость распространения возбуждения зависит от величины так называемого *фактора надежности*  $\eta$ , который выражается следующим образом:

$$\eta = \frac{V_0}{V_{\text{кр}}}, \quad (12.5.4)$$

где  $V_0$  — амплитуда потенциала действия;  $V_{\text{кр}}$  — критический уровень деполяризации, вызывающий генерацию потенциала действия. Обычно фактор надежности составляет 5—6, то есть потенциал действия способен возбудить следующий участок мембраны, так как его величина значительно превышает пороговый уровень деполяризации. Действие местных анестетиков (например новокаина) сводится к снижению величины  $V_0$  и увеличению  $V_{\text{кр}}$  за счет инактивации натриевых каналов, что приводит к снижению фактора надежности.

### ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

#### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 12.1.** Сколько ионов калия должно выйти из цитоплазмы во внеклеточную среду, чтобы создать разность потенциалов  $\Delta\phi = -100$  мВ? Радиус клетки  $r = 10$  мкм, удельная электроемкость мембраны  $C_{\text{уд}} = 10^{-2}$  Ф/м<sup>2</sup>.

**Решение.** Рассчитаем площадь мембраны ( $r = 10$  мкм =  $10^{-5}$  м):

$$4\pi r^2 = 4\pi \cdot (10^{-5})^2 \text{ м}^2 = 1,26 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2,$$

тогда электроемкость мембраны составит:

$$C = C_{\text{уд}} S = 10^{-2} \text{ Ф/м}^2 \cdot 1,26 \cdot 10^{-9} \text{ м}^2 = 1,26 \cdot 10^{-11} \text{ Ф}.$$

Абсолютная величина заряда каждого знака на поверхности мембраны (конденсатора)

$$q = C \Delta\phi = 1,26 \cdot 10^{-11} \text{ Ф} \cdot 10^{-1} \text{ В} = 1,26 \cdot 10^{-12} \text{ Кл},$$

что соответствует

$$v = \frac{q}{F} = \frac{1,26 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}}{9,65 \cdot 10^4 \text{ Кл/моль}} = 1,3 \cdot 10^{-17} \text{ моль ионов}.$$

Объем клетки

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3 = \frac{4}{3} \pi (10^{-5} \text{ м})^3 = 4,2 \cdot 10^{-15} \text{ м}^3.$$

Тогда изменение концентрации ионов в клетке вследствие выхода из клетки  $1,3 \cdot 10^{-17}$  моль ионов равно:

$$\Delta c = \frac{v}{V} = \frac{1,3 \cdot 10^{-17} \text{ моль}}{4,2 \cdot 10^{-15} \text{ м}^3} = 3,1 \cdot 10^{-3} \text{ моль/м}^3 = 3,1 \cdot 10^{-3} \text{ ммоль/л},$$

что составляет всего  $10^{-3} \%$  от концентрации калия внутри клетки ( $\approx 360$  ммоль/л). Таким образом, чтобы создать равновесный нернстовский мембранный потенциал, через мембрану должно пройти пренебрежимо малое количество ионов по сравнению с общим их количеством в клетке.



**Задача 12.2.** Постоянная длины немиелинизированного нервного волокна  $\lambda = 55$  мкм. На каком расстоянии от места возбуждения потенциал уменьшается в три раза?

**Решение.** Используя выражение  $\varphi = \varphi_0 \exp(-x/\lambda)$ , получаем:

$$\varphi_0/\varphi = \exp(x/\lambda) = 3,$$

откуда

$$x = \lambda \ln 3,$$

$$x = 55 \cdot \ln 3 = 60,4 \text{ мкм.}$$

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**12.1.** Рассчитайте равновесный мембранный потенциал  $\Delta\varphi$ , создаваемый ионами калия, если их внутриклеточная концентрация  $c_i = 500$  ммоль/л, внеклеточная —  $c_o = 10$  ммоль/л. Температура  $t = 27^\circ\text{C}$ .

**12.2.** Внутри- и внеклеточная концентрации ионов хлора равны соответственно  $c_i = 150$  ммоль/л,  $c_o = 500$  ммоль/л. Потенциал покоя при этом  $\Delta\varphi = -32$  мВ. Вычислите температуру  $t$  клетки.

**12.3.** Во сколько раз внутриклеточная концентрация ионов калия должна превышать наружную, чтобы потенциал покоя составлял  $\Delta\varphi = 91$  мВ. Температура  $t = 37^\circ\text{C}$ .

**12.4.** Вычислите теоретическое значение максимума потенциала действия  $\Delta\varphi$  при температуре  $t = 37^\circ\text{C}$ , считая, что цитоплазматическая мембрана нервного волокна в этих условиях проницаема только для ионов натрия. Внутри- и внеклеточная концентрации натрия равны соответственно  $c_i = 23$  ммоль/л,  $c_o = 150$  ммоль/л.

**12.5.** В покое проницаемости мембраны для ионов калия и натрия относятся как  $P_K : P_{Na} = 1 : 0,04$ , а при возбуждении —  $P_K : P_{Na} = 1 : 20$ . Внутриклеточная концентрация ионов калия составляет  $[K^+]_i = 350$  ммоль/л, внеклеточная — в 50 раз меньше; внутриклеточная концентрация ионов натрия  $[Na^+]_i = 50$  ммоль/л, внеклеточная — в 10 раз выше. Определите равновесный потенциал  $\Delta\varphi_K$  и  $\Delta\varphi_{Na}$  для каждого из этих ионов, величину потенциала покоя  $\Delta\varphi_{\text{п}}$  и потенциала действия  $\Delta\varphi_{\text{пд}}$ . Температура клетки  $t = 27^\circ\text{C}$ .

**12.6.** С помощью метода «пэтч-клэмп» было зафиксировано, что токи одиночных калиевых каналов имеют амплитуду  $I_K = 2$  пА, а среднее время открытого состояния канала составляет  $t = 5$  мс. Сколько ионов калия проникает через один канал за один импульс?

**12.7.** При фиксированном трансмембранном потенциале  $\varphi_m = -40$  мВ был зарегистрирован трансмембранный ток через одиночный натриевый канал  $I_{Na} = 1,6$  пА. Вычислите проводимость канала  $g_{Na}$ , если внутриклеточная концентрация ионов натрия  $c_i = 70$  ммоль/л, внеклеточная —  $c_o = 425$  ммоль/л, температура клетки  $t = 27^\circ\text{C}$ . При решении необходимо учесть, что в методе фиксации потенциала ток, направленный из клетки наружу, считается положительным, а из окружающей среды внутрь — отрицательным.

**12.8.** В месте возбуждения немиелинизированного нервного волокна трансмембранная разность потенциалов составляет  $\Delta\varphi_0 = 35$  мВ. Опреде-

лите разность потенциалов  $\Delta\varphi$  на расстоянии  $x = 40$  мкм, если постоянная длины этого волокна равна  $\lambda = 70$  мкм.

**12.9.** На каком расстоянии  $x$  в немиелинизированном нервном волокне трансмембранная разность потенциалов  $\Delta\varphi_0$  уменьшается вчетверо, если постоянная длины волокна  $\lambda = 70$  мкм.

**12.10.** Трансмембранная разность потенциалов в немиелинизированном нервном волокне уменьшается вдвое на расстоянии  $x = 30$  мкм. Вычислите постоянную длины  $\lambda$  волокна.

**12.11.** Вычислите диаметр  $D$  аксона, если удельное сопротивление единицы толщины мембраны  $\rho_m = 80$  мОм  $\cdot$  м<sup>2</sup>, удельное сопротивление аксоплазмы  $\rho_a = 0,4$  Ом  $\cdot$  м, постоянная длины  $\lambda = 4,5$  мм.

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**12.1.** Равновесный мембранный потенциал для ионов натрия:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta\varphi &= \frac{RT}{F} \ln \frac{[\text{Na}]_i}{[\text{Na}]_o}; & \text{г) } \Delta\varphi &= \frac{F}{RT} \ln \frac{[\text{Na}]_o}{[\text{Na}]_i}; \\ \text{б) } \Delta\varphi &= \frac{F}{RT} \ln \frac{[\text{Na}]_i}{[\text{Na}]_o}; & \text{д) } \Delta\varphi &= \frac{FT}{R} \ln \frac{[\text{Na}]_o}{[\text{Na}]_i}. \\ \text{в) } \Delta\varphi &= \frac{RT}{F} \ln \frac{[\text{Na}]_o}{[\text{Na}]_i}; \end{aligned}$$

**12.2.** Уравнение Гольдмана—Ходжкина—Катца имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \text{а) } \Delta\varphi &= \frac{RT}{F} \ln \frac{P_K[\text{K}^+]_i}{P_K[\text{K}^+]_o}; \\ \text{б) } \Delta\varphi &= \frac{RT}{F} \exp \frac{P_K[\text{K}^+]_o + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_o + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}^-]_o}{P_K[\text{K}^+]_i + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_i + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}^-]_i}; \\ \text{в) } \Delta\varphi &= \frac{RT}{F} \ln \frac{[\text{Na}^+]_i}{[\text{Na}^+]_o}; \\ \text{г) } \Delta\varphi &= \frac{RT}{F} \ln \frac{P_K[\text{K}^+]_o + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_o + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}^-]_i}{P_K[\text{K}^+]_i + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_i + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}^-]_o}; \\ \text{д) } \Delta\varphi &= \frac{P_K[\text{K}^+]_o + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_i + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}^-]_i}{P_K[\text{K}^+]_i + P_{\text{Na}}[\text{Na}^+]_o + P_{\text{Cl}}[\text{Cl}^-]_o}. \end{aligned}$$

**12.3.** В покое потенциал нервной клетки приближается к равновесному:

- а) кальциевому потенциалу;      г) калиевому потенциалу;
- б) натриевому потенциалу;      д) потенциалу протонов.
- в) хлорному потенциалу;

**12.4.** Во время генерации потенциала действия потенциал нервной клетки приближается к равновесному:

- а) кальциевому потенциалу;      г) калиевому потенциалу;
- б) натриевому потенциалу;      д) потенциалу протонов.

в) хлорному потенциалу;

**12.5.** Внутриклеточная среда заряжена по сравнению с внеклеточной:

- а) в покое — отрицательно, на максимуме потенциала действия — положительно;
- б) в покое — положительно, на максимуме потенциала действия — отрицательно;
- в) всегда положительно;
- г) всегда отрицательно.

**12.6.** Проницаемость мембраны для ионов калия в покое:

- а) значительно больше проницаемости для ионов натрия;
- б) значительно меньше проницаемости для ионов натрия;
- в) приблизительно равна проницаемости для ионов натрия.

**12.7.** Во время генерации потенциала действия проницаемость мембраны для ионов калия:

- а) больше проницаемости для ионов натрия;
- б) меньше проницаемости для ионов натрия;
- в) приблизительно равна проницаемости для ионов натрия.

**12.8.** Постоянной длины нервного волокна называется расстояние, на котором:

- а) скорость распространения нервного импульса уменьшается в  $e$  раз;
- б) скорость распространения нервного импульса увеличивается в  $e$  раз;
- в) скорость распространения нервного импульса уменьшается в 10 раз;
- г) скорость распространения нервного импульса увеличивается в 10 раз;
- д) потенциал уменьшается в  $e$  раз.

**12.9.** Если в некоторой точке немиелинизированного волокна потенциал был равен  $\varphi_0$ , то на расстоянии  $x$  от этой точки он уже будет составлять:

- а)  $\varphi = \varphi_0 \exp\left(-\frac{\lambda}{x}\right)$ ;
- б)  $\varphi = \varphi_0 \exp\left(\frac{\lambda}{x^2}\right)$ ;
- в)  $\varphi = \varphi_0 \exp\left(-2\frac{x}{\lambda}\right)$ ;
- г)  $\varphi = \varphi_0 \exp\left(2\frac{x}{\lambda^3}\right)$ ;
- д)  $\varphi = \varphi_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right)$ .

**12.10.** Скорость распространения нервного импульса пропорциональна ( $D$  — диаметр волокна):

- а)  $\sqrt{D}$  для немиелинизированных и миелинизированных нервных волокон;
- б)  $D$  для немиелинизированных и миелинизированных нервных волокон;
- в)  $\sqrt{D}$  для немиелинизированных и  $D$  для миелинизированных нервных волокон;
- г)  $D$  для немиелинизированных и  $\sqrt{D}$  для миелинизированных нервных волокон;
- д)  $D^2$  для немиелинизированных и миелинизированных нервных волокон.

## Глава 13

# ОПТИКА

**Оптика** — раздел физики, изучающий оптическое излучение, процессы его распространения и явления, наблюдаемые при взаимодействии света с веществом. Оптическое излучение — это электромагнитные волны в интервале длин волн от миллиардных до десятитысячных долей метра (диапазоны частот  $3 \cdot 10^{11} \dots 3 \cdot 10^{17}$  Гц). Оптическое излучение включает ультрафиолетовое излучение (интервал длин волн от 10 до 400 нм), видимое излучение, воспринимаемое человеческим глазом (от 0,4 до 0,76 мкм), и инфракрасное излучение (от 0,76 мкм до 1 мм).

Свет ведет себя двойственным образом: в одних случаях как электромагнитная волна, в других — как поток особых частиц (фотонов), то есть к нему применим принцип корпускулярно-волновым дуализмом<sup>1</sup>. В данной главе будут рассмотрены только волновые свойства света<sup>2</sup>. Традиционно оптику принято подразделять на геометрическую и физическую.

*Геометрическая оптика* изучает распространение света, исходя из представлений о прямолинейном распространении света с позиции классической геометрии.

*Физическая оптика* рассматривает проблемы, связанные с природой света и световых явлений.

Законы оптики лежат в основе таких широко используемых в медицине и фармации методов анализа, как микроскопия, спектроскопия, рефрактометрия, поляриметрия, колориметрия, многих диагностических (термография) и терапевтических (светолечение) методов.

---

<sup>1</sup> От лат. *corpusculum* — частица, *dualis* — двойственный.

<sup>2</sup> Корпускулярные свойства света являются предметом рассмотрения квантовой механики.

## § 13.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

**Геометрическая оптика** — раздел оптики, в котором изучаются законы оптического излучения на основе представлений о световых лучах, не учитывая при этом их волновой природы. Под световым лучом понимается линия, вдоль которой распространяется поток световой энергии. В оптически однородной среде лучи являются внешними нормальными к фронту волны (см. § 2.4) в каждой его точке и описывают движение фронта световой волны в пространстве.

Законами геометрической оптики можно пользоваться в том случае, когда длина световой волны  $\lambda$  намного меньше размеров препятствий  $d$  на пути луча ( $\lambda \ll d$ ), то есть когда можно пренебречь дифракцией света на оптических неоднородностях.

Законы геометрической оптики позволяют объяснить образование оптических изображений, отражение и преломление света на границе раздела двух сред, играют важную роль в теории изучения различных оптических устройств. Эти законы выводятся на основании **принципа Ферма** (*принципа наименьшего действия*), основного принципа геометрической оптики, суть которого заключается в следующем: луч света всегда распространяется в пространстве между двумя точками  $A$  и  $B$  по такому пути, для прохождения которого ему необходимо минимальное время, по сравнению с любым другим путем между теми же точками. Время  $t_0$  прохождения светом пути  $l$  в среде с **абсолютным показателем преломления**

$$n = \frac{c}{v} \quad (13.1.1)$$

( $c$  — скорость света в вакууме;  $v$  — скорость света в данной среде,  $v < c$ ) пропорционально *оптической длине пути*

$$r = nl. \quad (13.1.2)$$

В оптически неоднородной среде с показателем преломления  $n(x, y, z)$

$$s = \int_A^B n \, dl, \quad t_0 = \min \int_A^B dt = \min \int_A^B \frac{dl}{v}. \quad (13.1.3)$$

В оптически однородной среде с показателем преломления  $n$

$$r = nl, \quad t_0 = \min \frac{1}{c} \int_A^B dr = \min \frac{n}{c} \int_A^B dl = \frac{nl}{c}. \quad (13.1.4)$$

Таким образом, в терминах оптической длины пути, принцип Ферма можно сформулировать следующим образом: *свет распространяется по такому пути, оптическая длина которого минимальна.*

Принцип Ферма имеет смысл наиболее общего закона распространения света, из которого следуют **основные законы геометрической оптики.**

1. В однородной среде свет распространяется прямолинейно.

2. При падении светового луча на плоскую, оптически гладкую поверхность (размер неоднородностей  $d \ll \lambda$  происходит отражение света под углом  $i'$ , равным углу падения  $i$  относительно нормали к поверхности, восстановленной из отражающей точки (рис. 13.1.1).

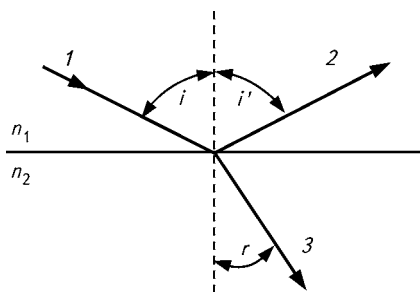


Рис. 13.1.1. Ход падающего (1), отраженного (2) и преломленного (3) лучей на границе раздела двух сред с показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$ :

$i$  — угол падения;  $i'$  — угол отражения;  $r$  — угол преломления

Нормаль, падающий и отраженный лучи всегда лежат в одной плоскости (**закон отражения**).

3. При падении света на плоскую границу раздела двух прозрачных сред, кроме явления отражения, наблюдается изменение направления луча во второй среде по отношению к первой, называемое **преломлением**. Преломленный луч всегда лежит в одной плоскости с падающим и отраженным лучами (рис. 13.1.1).

**Закон преломления Снеллиуса** гласит: отношение синуса

угла падения  $i$  к синусу угла преломления  $r$  есть величина постоянная, зависящая только от соотношения абсолютных показателей преломления обеих сред  $n_1$  и  $n_2$ :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}, \quad (13.1.5)$$

где  $n_{21}$  — *относительный показатель преломления* второй среды по отношению к первой.

Угол преломления может быть как меньше, так и больше угла падения, в зависимости от абсолютных показателей преломления обеих сред. Если  $n_1 < n_2$ , то первую среду называют оптически менее плотной (при этом  $r < i$ ); если  $n_1 > n_2$  — оптически более плотной (при этом  $r > i$ ).

Согласно закону Снеллиуса, при  $n_1 < n_2$  и  $i = \pi/2$  луч будет преломляться под углом  $r_{\text{пр}} < \pi/2$ , который называется **предельным углом преломления**:

$$\sin r_{\text{пр}} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (13.1.6)$$

Если  $n_1 > n_2$ , то при некотором угле падения  $i = i_{\text{пр}}$  угол преломления  $r = \pi/2$  и свет не переходит во вторую среду, а «скользит» вдоль границы раздела сред (рис. 13.1.2). При  $i \geq i_{\text{пр}}$  преломление во вторую среду отсутствует. Это явление называется *полным*

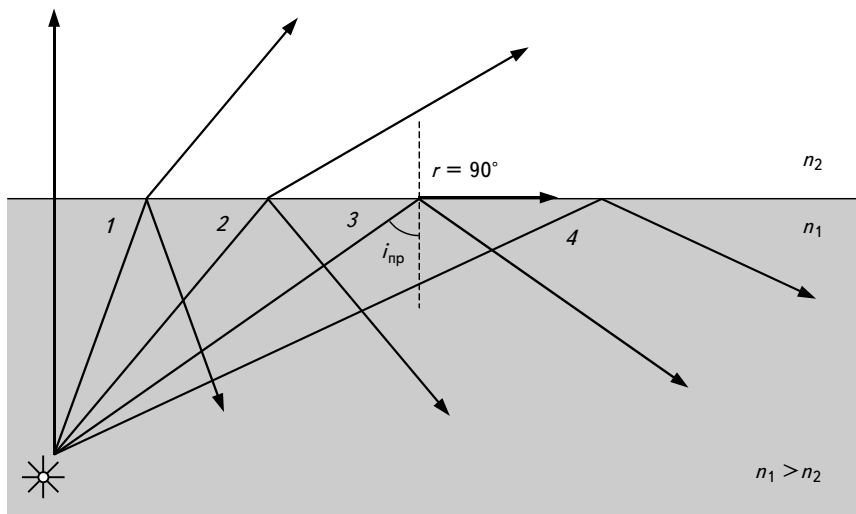


Рис. 13.1.2. Явление полного внутреннего отражения:

$i_{\text{пр}}$  — предельный угол падения;  $r$  — угол преломления;  $n_1$  и  $n_2$  — показатели преломления первой и второй сред. Лучи 1 и 2 преломляются ( $i < i_{\text{пр}}$ ); луч 3, преломляясь, скользит по поверхности границы раздела ( $i = i_{\text{пр}}$ ); луч 4 полностью отражается ( $i > i_{\text{пр}}$ )

*внутренним отражением света*, а угол  $i_{\text{пр}}$  называется *предельным углом падения* или *предельным углом полного отражения*:

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (13.1.7)$$

Явление полного внутреннего отражения света лежит в основе **волоконной оптики** — раздела оптики, в котором рассматривается передача света и изображения по световодам. *Волоконный световод* представляет собой тонкую нить из оптически прозрачного материала, оболочка которой имеет больший показатель преломления, чем сердцевина. Лучи, попавшие в световод под достаточно малыми углами к его оси, испытывают полное внутреннее отражение на поверхности раздела сердцевины и оболочки и почти без по-

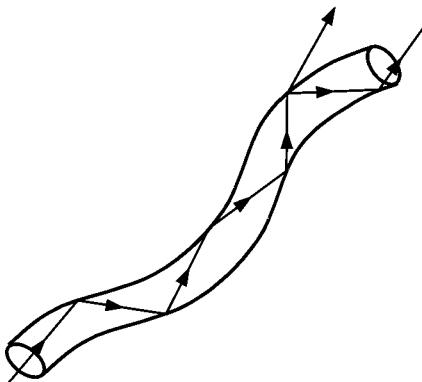


Рис. 13.1.3. Распространение света в световоде

теперь распространяются по сердцевине (рис. 13.1.3). Однако при сильном изгибе волокна закон полного внутреннего отражения нарушается, и свет частично выходит из волокна через боковую поверхность. Потери энергии при полном внутреннем отражении света относительно невелики: в видимой области спектра в волокне длиной 1 м теряется от 30 до 70 % энергии. Световоды позволяют проводить свет на большие расстояния по криволинейным

трассам. Как правило, отдельные волокна объединяют в пучки с регулярной укладкой. В медицине световоды используют для освещения светом внутренних полостей и для передачи изображения (например, в таком широко известном методе обследования, как гастрозентероскопия).

4. Из принципа Ферма следует также *закон обратимости световых лучей*: если луч падает из первой среды на границу со второй под углом  $i$  и преломляется во второй среде под углом  $r$ , то луч, падающий из второй среды на границу с первой под углом  $r$ , после преломления будет распространяться в первой среде под углом  $i$ , то есть падающий и преломленный луч поменяются местами. Из этого закона следует соотношение для относительных показателей преломления обеих сред:

$$n_{12} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{1}{n_{21}}. \quad (13.1.8)$$

То же имеет место и при отражении световых лучей.

Законы и методы геометрической оптики широко используются при расчете и конструировании оптических приборов, содержащих в качестве основных элементов различные виды линз.

**Линзой** называется прозрачное тело, ограниченное двумя криволинейными поверхностями. Если толщина линзы намного меньше радиусов кривизны ее поверхностей, то такая линза называется *тонкой*. Прямая, проходящая через центры кривизны поверхностей линзы, называется *главной оптической осью линзы* (рис. 13.1.4). Если одна из поверхностей линзы плоская, то главная оптическая ось перпендикулярна этой поверхности. В любой плоской линзе существует точка, при прохождении через которую



лучи не изменяют своего первоначального направления. Эта точка называется *оптическим центром линзы*, через него проходит главная оптическая ось. Любая другая прямая, проходящая через оптический центр, называется *побочной осью линзы*.

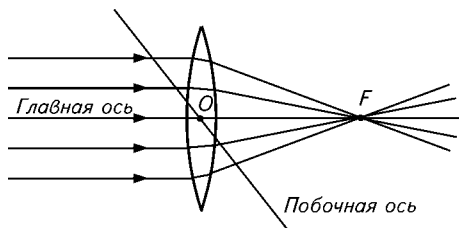


Рис. 13.1.4. Линза:

$O$  — оптический центра линзы;  $F$  — фокус;  
 $OF$  — фокусное расстояние

Линзы изменяют направление падающих на них лучей. Если падающий на линзу параллельный пучок света преобразуется в сходящийся, то линзу называют *собирающей*; если параллельный пучок света расходится, то линзу называют *рассеивающей*. Точка, в которой собираются лучи, идущие до преломления параллельно главной оптической оси, называется *главным фокусом* собирающей линзы. Для рассеивающей линзы главным фокусом является точка пересечения не самих лучей, а их воображаемых продолжений в сторону, противоположную направлению распространения света. Расстояние от главного фокуса до оптического центра тонкой линзы называется *фокусным расстоянием*. Преломляющую способность линз и систем линз характеризуют *оптической силой* — величиной, обратной фокусному расстоянию. Особенно широко понятие «оптическая сила» используется в медицинской оптике. Оптическая сила измеряется в диоптриях (дптр),  $1 \text{ дптр} = 1 \text{ м}^{-1}$ .

Для тонких линз справедливо

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = (n - 1) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f} = D, \quad (13.1.9)$$

где  $a_1$  — расстояние от предмета до линзы;  $a_2$  — расстояние от изображения до линзы;  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы кривизны поверхностей линзы;  $n$  — показатель преломления материала линзы;  $f$  — фокусное расстояние линзы;  $D$  — оптическая сила линзы ( $D = 1/f$ ).

Уравнение

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f} \quad (13.1.10)$$

называется *формулой тонкой линзы*.

Величины  $a_2$ ,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $f$ ,  $D$  могут принимать как положительные, так и отрицательные значения. Для действительных изображений расстояние от изображения до линзы положительно ( $a_2 > 0$ ), для

мнимых — отрицательно ( $a_2 < 0$ ); радиусы кривизны выпуклых поверхностей берутся со знаком плюс ( $R > 0$ ), вогнутых — со знаком минус ( $R < 0$ ); для собирающих линз фокусное расстояние и оптическая сила положительны ( $f > 0$ ,  $D > 0$ ), для рассеивающих — отрицательны ( $f < 0$ ,  $D < 0$ ).

Оптические изображения предметов, полученные с помощью линз, разделяются на действительные и мнимые. *Действительные изображения* создаются сходящимися пучками лучей в точках их пересечения. Действительные изображения можно наблюдать на экране или фотопленке, помещенных в точках пересечения лучей. В других случаях лучи, выходящие из оптической системы, расходятся, но, если их мысленно продолжить в противоположную сторону, они пересекутся в одной точке. Эта точка называется *мнимым изображением* точки объекта. Мнимое изображение невозможно получить на экране или зафиксировать на фотопленке, однако другая оптическая система (например, собирающая линза или оптическая система глаза) способна преобразовать мнимое изображение в действительное.

*Линейным увеличением* называется отношение поперечных (перпендикулярных к оптической оси) линейных размеров  $l'$  изображения к соответствующим размерам  $l$  предмета:

$$\Gamma = \frac{l'}{l}. \quad (13.1.11)$$

Если предмет и его изображение, полученное с помощью линзы, находятся в среде с одинаковым показателем преломления, то *линейное увеличение линзы* равно отношению расстояния от изображения до линзы к расстоянию от предмета до линзы:

$$\Gamma = \frac{|a_2|}{|a_1|}. \quad (13.1.12)$$

**Лупой** называется собирающая линза с малым фокусным расстоянием. *Линейное увеличение лупы*

$$\Gamma_{\text{л}} = \frac{d_0}{f}, \quad (13.1.13)$$

где  $d_0 = 25$  см — *расстояние наилучшего зрения*.

Так как увеличение лупы ограничено, то большее увеличение можно осуществить системой линз. Одним из таких оптических приборов является **микроскоп**. В этом случае дополнительная система линз, обращенная к предмету, называется *объективом*, а лупа, обращенная к глазу, — *окуляр*.

*Увеличение микроскопа*

$$\Gamma_{\text{м}} = \frac{\Delta d_0}{f_1 f_2}, \quad (13.1.4)$$

где  $\Delta d_0$  — *оптическая длина тубуса микроскопа* (расстояние между задним фокусом объектива и передним фокусом окуляра);  $f_1$  — фокусное расстояние объектива;  $f_2$  — фокусное расстояние окуляра. Подробнее об устройстве микроскопа см. в § 18.7.

**§ 13.2. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ СВЕТА**

**Волновая оптика** — раздел физической оптики, который изучает волновую природу света. Волновые свойства света, определяющие такие явления, как интерференция и дифракция волн, проявляются только при выполнении определенных условий.

Математической основой волновой оптики служат уравнения Максвелла (см. § 9.10). Свойства среды при этом характеризуются диэлектрической  $\epsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями, входящими в уравнения Максвелла в виде коэффициентов. Эти величины однозначно определяют показатель преломления среды [см. формулу (9.10.21)].

**Интерференция** света называется явление сложения в пространстве когерентных световых волн, при котором в разных его точках возникает усиление или ослабление амплитуды результирующей волны. При этом происходит пространственное перераспределение энергии светового излучения. К о г е р е н т н ы м и называются волны, имеющие одинаковые частоты и постоянную во времени разность фаз (см. § 2.4).

Рассмотрим интерференцию света при сложении двух плоских когерентных волн, в которых колебания происходят в одинаковых плоскостях:

$$E_1 = E_{01} \cos (\omega t - k_1 x_1); \quad (13.2.1)$$

$$E_2 = E_{02} \cos (\omega t - k_2 x_2), \quad (13.2.2)$$

где  $k = 2\pi/\lambda = \omega/v$  — *волновое число*;  $x_1, x_2$  — геометрические пути волн.

Результирующая амплитуда волны в этом случае

$$E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos (\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad (13.2.3)$$

где  $\varphi_2 - \varphi_1 = \Delta\varphi$  — разность фаз интерферирующих волн.

Фаза результирующей волны равна

$$\varphi = \arctg \frac{E_{01} \sin \varphi_1 + E_{02} \sin \varphi_2}{E_{01} \cos \varphi_1 + E_{02} \cos \varphi_2}. \quad (13.2.4)$$

При рассмотрении волн в средах с различными абсолютными показателями преломления  $n_1$  и  $n_2$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 &= \left( \omega t - \frac{\omega x_2}{v_2} \right) - \left( \omega t - \frac{\omega x_1}{v_1} \right) = \omega \left( \frac{x_1}{v_1} - \frac{x_2}{v_2} \right) = \\ &= \frac{2\pi}{Tc} (x_1 n_1 - x_2 n_2) = \frac{2\pi}{\lambda} (x_1 n_1 - x_2 n_2), \end{aligned} \quad (13.2.5)$$

где  $v_1 = \frac{c}{n_1}$ ,  $v_2 = \frac{c}{n_2}$  — скорости распространения волн в соответствующих средах;  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ ,  $\lambda = cT$  — длина волны света в вакууме.

Произведение  $xn$  является оптической длиной пути. Разность этих величин называется *оптической разностью хода волн*

$$\Delta r = x_1 n_1 - x_2 n_2. \quad (13.2.6)$$

Подставив уравнение (13.2.6) в формулу (13.2.5), получаем соотношение между разностью фаз и оптической разностью хода волн:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta r. \quad (13.2.7)$$

Если оптическая разность хода волн равна четному числу половин

$$\Delta r = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (13.2.8)$$

то  $\Delta\varphi = 2k\pi$  и наблюдается *максимум интенсивности света при интерференции*.

Если оптическая разность хода волн равна нечетному числу половин

$$\Delta r = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (13.2.9)$$

имеем  $\Delta\varphi = 2(k + 1)\pi$  — *минимум интенсивности света при интерференции*.

Такое пространственное распределение амплитуды результирующей волны с чередующимися максимумами и минимумами называется **интерференционной картиной**. При наблюдении на экране видно чередование светлых и темных полос, так как интенсивность света прямо пропорциональна квадрату амплитуды результирующей волны.

Излучение от обычных источников света, состоящих из огромного числа излучающих атомов, некогерентно. Излучение отдельного атома носит случайный характер, поэтому среднее значение  $\cos \Delta\phi$  равно нулю. Тогда, складывая амплитуды излучения от двух различных источников, имеем:

$$\langle E_0^2 \rangle = \langle E_{01}^2 \rangle + \langle E_{02}^2 \rangle. \quad (13.2.10)$$

Учитывая, что интенсивность волны пропорциональна квадрату амплитуды, получаем, что интенсивность суммарного излучения от двух источников равна сумме интенсивностей от каждого источника в отдельности:

$$I = I_1 + I_2. \quad (13.2.11)$$

Для наблюдения явления интерференции необходимо получить когерентные волны. Источником когерентного излучения являются лазеры, а до их появления когерентные световые пучки получали путем деления и последовательного сведения лучей, исходящих от одного и того же источника.

Впервые интерференцию наблюдал английский врач Томас Юнг в 1802 году. В своем опыте он пропускал свет через небольшое отверстие в непрозрачном экране  $\Theta_1$ , освещая этим светом щели в другом непрозрачном экране  $\Theta_2$  (рис. 13.2.1).

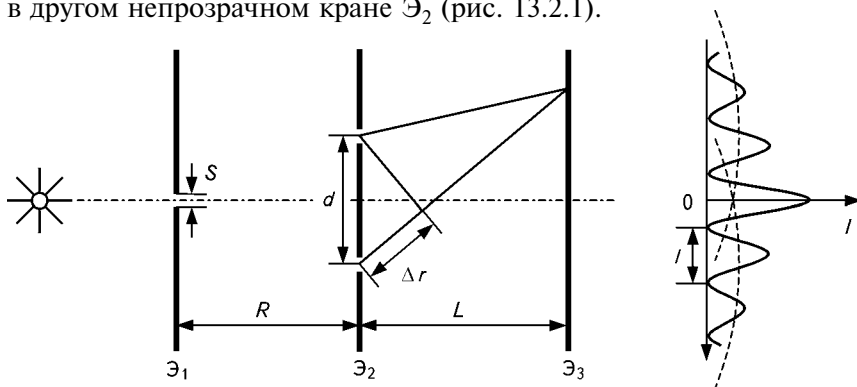


Рис. 13.2.1. Схема опыта Юнга:

справа *сплошной линией* представлена зависимость интенсивности на экране  $\Theta_3$  от координаты, нормальной щелям; *пунктиром* показана освещенность экрана при поочередном закрывании щелей

Полученные два пучка света являются когерентными (при условии, что  $S \leq \frac{\lambda R}{d}$ , где  $S$  — площадь отверстия в экране  $\mathcal{E}_1$ ;  $\lambda$  — средняя длина волны света;  $R$  — расстояние от экрана  $\mathcal{E}_1$  до экрана  $\mathcal{E}_2$  со щелями;  $d$  — расстояние между щелями). В результате на экране  $\mathcal{E}_3$  наблюдается интерференционная картина. При параллельном расположении экранов  $\mathcal{E}_2$  и  $\mathcal{E}_3$  расстояние между интерференционными полосами составит:

$$l = \frac{L}{d} \lambda, \quad (13.2.12)$$

где  $L$  — расстояние от источников когерентных волн (экрана  $\mathcal{E}_2$ ) до экрана  $\mathcal{E}_3$  ( $L \gg d$ ).

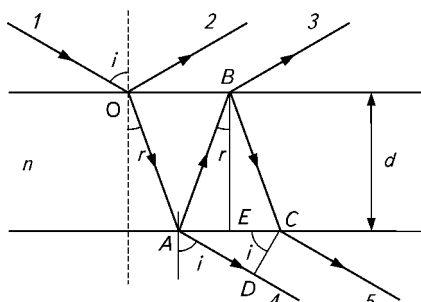


Рис. 13.2.2. Интерференция в тонкой пленке:

$I$  — падающий луч; 2 и 3 — когерентные отраженные лучи; 4 и 5 — когерентные прошедшие лучи;  $i$  — угол падения света;  $r$  — угол преломления;  $n$  — показатель преломления пленки;  $d$  — ее толщина

Рассмотрим явление **интерференции в тонких пленках**. Пусть на тонкую прозрачную плоскопараллельную пленку с относительным показателем преломления  $n$  падает пучок света под углом  $i$  (рис. 13.2.2). Луч  $I$  частично отражается в точке  $O$ , а частично преломляется по углом  $r$  и переходит в пленку. В точке  $A$  опять происходит частичное отражение и преломление луча. В результате из верхней поверхности пленки выходят два параллельных луча<sup>1</sup> 2 и 3, а из нижней — лучи 4 и 5. Так как все они образовались из одного луча (луча  $I$ ), то обе пары являются когерентными и будут интерферировать. Различают интерференцию в проходящем свете (здесь — лучей 4 и 5) и в отраженном свете (лучей 2 и 3).

Вычислим оптическую разность лучей 4 и 5:

$$\Delta r = n(AB + BC) - AD = 2n AB - AD, \quad (13.2.13)$$

где  $n(AB + BC)$  — оптическая длина пути луча 5 в веществе пленки,  $AB = BC$ ;  $AD$  — расстояние, которое прошел луч 4 в среде<sup>2</sup>, окружающей пленку. Из треугольника  $ABE$  находим

<sup>1</sup> На самом деле образуются не два, а бесконечное множество параллельных лучей, но уже после второго отражения их интенсивность будет бесконечно мала по сравнению с интенсивностью падающего луча  $I$ .

<sup>2</sup> Показатель преломления окружающей среды полагаем равным единице.

$$AB = \frac{BE}{\cos r} = \frac{d}{\cos r}, \quad (13.2.14)$$

где  $d$  — толщина пленки.

Из треугольника  $ACD$  следует

$$AD = AC \sin i = 2AE \sin i, \quad (13.2.15)$$

а из треугольника  $ABE$ :

$$AE = BE \operatorname{tg} r = d \operatorname{tg} r. \quad (13.2.16)$$

Тогда

$$AD = 2d \operatorname{tg} r \sin i. \quad (13.2.17)$$

Из закона Снеллиуса выразим

$$\sin i = n \sin r. \quad (13.2.18)$$

Получаем:

$$AD = 2dn \operatorname{tg} r \sin r = 2dn \frac{\sin^2 r}{\cos r} = 2dn \frac{1 - \cos^2 r}{\cos r} = \frac{2dn}{\cos r} - 2dn \cos r. \quad (13.2.19)$$

Подставив выражения (13.2.14) и (13.2.19) в (13.2.13), получаем:

$$\Delta r = \frac{2dn}{\cos r} - \left( \frac{2dn}{\cos r} - 2dn \cos r \right) = 2dn \cos r. \quad (13.2.20)$$

Используя формулу  $\cos r = \sqrt{1 - \sin^2 r}$  и выразив  $\sin r$  из закона преломления Снеллиуса, получаем:

$$\Delta r = 2dn \sqrt{1 - \sin^2 r} = 2dn \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}} = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}. \quad (13.2.21)$$

Таким образом, оптическая разность хода лучей в случае *интерференции в проходящем свете* равна

$$\Delta r = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i}. \quad (13.2.22)$$

Условие максимума интенсивности (13.2.8) в данном случае имеет вид:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (13.2.23)$$

а условие минимума (13.2.9):

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (13.2.24)$$

При рассмотрении *интерференции в отраженном свете* необходимо учитывать тот факт, что отражение света от оптически более плотной среды (в точке  $O$ , рис. 13.2.2) сопровождается изменением фазы волны на  $\pi$  (в точке  $A$  изменение фазы отсутствует, так как отражение происходило от оптически менее плотной среды)<sup>1</sup>. Чтобы учесть изменение фазы на  $\pi$ , необходимо от оптической разности хода волн отнять (или добавить) половину длины волны света в вакууме:

$$\Delta r = 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \frac{\lambda}{2}. \quad (13.2.25)$$

Приравняв формулы (13.2.25) и (13.2.8), получаем условие максимума интенсивности света при интерференции в отраженном свете:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (13.2.26)$$

Из уравнений (13.2.25) и (13.2.9) получаем условие минимума:

$$2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = 2k \frac{\lambda}{2}. \quad (13.2.27)$$

Таким образом, условие максимума интерференции в отраженном свете соответствует условию минимума в проходящем свете, и наоборот. Этот факт можно было бы предсказать на основании закона сохранения энергии. В отсутствие поглощения света пленкой падающий пучок света разделяется на отраженный и проходящий. Если интенсивность отраженного света максимальна, то интенсивность проходящего света должна быть минимальна и наоборот.

Падающий на пленку пучок света никогда не состоит из строго параллельных лучей и поэтому не имеет определенного угла падения. Чем толще пленка, тем более расходящимися получаются пучки отраженного и прошедшего света, вследствие чего условия максимума или минимума выполняются лишь для отдельных лучей пучка. Поэтому интерференцию света можно наблюдать только в очень тонких пленках. Так, для наблюдения интерференции в случае освещения пленки солнечным светом необходимо, чтобы ее толщина не превышала нескольких сотых миллиметра.

---

<sup>1</sup> Если имеется «сэндвич» сред с показателями преломления  $n_1 < n_2 < n_3$ , то отражение света от обеих поверхностей пленки будет сопровождаться каждый раз изменением фазы на  $\pi$ . Поэтому в сумме изменения фазы не произойдет.



Законы интерференции света в тонких пленках лежат в основе так называемого просветления оптики. В оптических приборах на поверхность линз наносят пленки (чаще всего из кремнезема или фтористых солей) с показателем преломления иным, чем у линзы. Толщина пленок подбирается таким образом, чтобы выполнялся минимум интерференции в отраженном свете для средней в заданном диапазоне длины волны. Это приводит к значительному уменьшению потерь света на отражение, улучшению качества изображения и устраняет блики на поверхности линз. Оптические изделия с таким покрытием называются просветленной оптикой.

При освещении пленки монохроматическим светом она будет яркой или темной, а при освещении белым светом — окрашенной в какой-либо цвет, так как в последнем случае условия максимума и минимума выполняются лишь для определенной длины волны. Цвет отраженного света всегда дополняет цвет прошедшего света до белого. Тонкие пленки могут исполнять роль светофильтров, так как при данной толщине отражают или пропускают свет в узком интервале длин волн. Если пленка имеет неодинаковую толщину, то на различных ее участках будут наблюдаться максимумы интенсивности волн разной длины, и пленка окрасится в разные цвета.

В случае интерференции света в оптическом клине интерференционная картина будет представлять собой чередующиеся темные и светлые полосы (при освещении монохроматическим светом) или радужные полосы (при освещении белым светом). Интерференционная картина наиболее отчетлива при вершине клина. По мере удаления от нее условия когерентности становятся менее благоприятными, отчетливость полос снижается, пока, наконец, не устанавливается равномерная освещенность.

Роль клина может выполнять зазор между соприкасающимися плоскопараллельной пластинкой и плосковыпуклой линзой с большим радиусом кривизны (выпуклая сторона линзы обращена к пластинке) (рис. 13.2.3, а). Линза и пластинка делаются достаточно толстыми, чтобы устранить возможность интерференции в них самих. Интерференционная картина, наблюдаемая в этом случае, называется *кольцами Ньютона* и представляет собой чередующиеся темные и светлые кольца (при освещении монохроматическим светом) или радужные кольца (при освещении белым светом), центры которых лежат на оси симметрии линзы (рис. 13.2.3, б). При нормальном падении света наблюдаются окружности, при наклонном — эллипсы.

Радиусы светлых колец Ньютона в отраженном свете (или темных колец в проходящем) вычисляются по формуле:

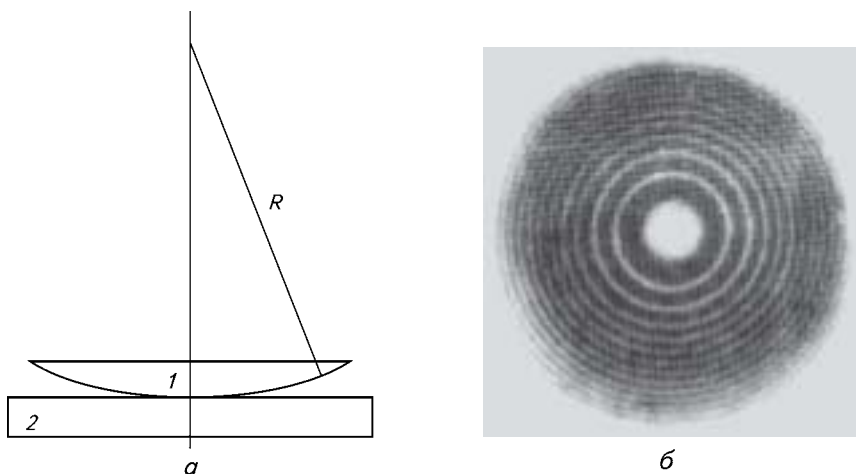


Рис. 13.2.3. Кольца Ньютона:

$a$  — установка для наблюдения колец Ньютона: плосковыпуклая линза  $1$  с большим радиусом кривизны  $R$  лежит на плоскопараллельной стеклянной пластине  $2$ ;  $б$  — интерференционная картина в проходящем свете

$$r_k = \sqrt{(2k+1)R\frac{\lambda}{2}}; \quad (13.2.28)$$

радиусы темных колец Ньютона в отраженном свете (или светлых колец в проходящем):

$$r_k = \sqrt{2kR\frac{\lambda}{2}}, \quad (13.2.29)$$

где  $k = 1, 2, 3, \dots$ .

Центр колец в отраженном свете темный, в проходящем — светлый.

Соотношения (13.2.28) и (13.2.29) позволяют с хорошей точностью определять длину волны монохроматического света по измерениям радиусов колец. При известных значениях  $\lambda$  эти соотношения могут быть использованы для определения радиуса кривизны линз и контроля правильности формы сферических и плоских поверхностей.

Явление интерференции света используют в специальных устройствах — интерферометрах — для измерения с высокой степенью точности длин волн, малых расстояний, показателей преломления вещества и определения качества оптических поверхностей.

### § 13.3. ДИФРАКЦИЯ СВЕТА

Явление огибания светом малых препятствий (неоднородностей среды), сопровождающееся проникновением волн в область геометрической тени, называется **дифракцией**. В общем смысле дифракцией называется любое отклонение распространения света от законов геометрической оптики. Дифракция приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью, как того требуют законы геометрической оптики, получается сложная картина распределения интенсивности света — **дифракционная картина**.

В основе теории дифракции лежит принцип Гюйгенса—Френеля. Согласно гипотезе Гюйгенса, выдвинутой в 1678 году, каждая точка волновой поверхности  $S_1$ , которой достигла в данный момент волна, является источником вторичных волн; их внешняя огибающая дает положение волнового фронта  $S_2$  в следующий момент времени (рис. 13.3.1). Принцип Гюйгенса по своей сути является законом геометрической оптики, так как позволяет определить направление распространения волны, но не объясняет явление дифракции. В 1815 году этот принцип был дополнен французским физиком О. Ж. Френелем, который предположил, что элементарные вторичные волны являются когерентными и могут интерферировать между собой. Таким образом, **согласно принципу Гюйгенса—Френеля, результирующее колебание в некоторой точке пространства является суперпозицией элементарных вторичных волн, излучаемых каждым элементом некоторой волновой поверхности**. Возникающая при этом дифракционная картина представляет собой чередующиеся максимумы и минимумы интенсивности света.

Из вышесказанного следует, что между дифракцией и интерференцией нет принципиальных различий. Оба эти явления заключаются в пространственном перераспределении интенсивности светового излучения вследствие сложения волн. Только интерференцией принято называть перераспределение интенсивности, вызванное сложением волн, испускаемых конечным числом отдельно расположенных когерентных источников, а дифракцией — перераспределение интенсивности, вызванное сложением волн, испускаемых непрерывно расположенными когерентными источни-

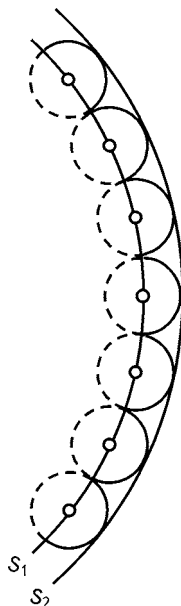


Рис. 13.3.1. Принцип Гюйгенса—Френеля

ками. Например, рассмотренное в § 13.2 явление сложения когерентных пучков от двух отверстий (опыт Юнга, рис. 13.2.1) называется интерференцией, а явление сложения когерентных волн,

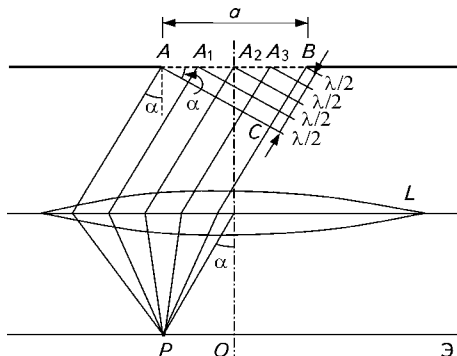


Рис. 13.3.2. Схема наблюдения дифракции Фраунгофера на щели:

$L$  — собирающая линза;  $\mathcal{E}$  — экран

прошедших через одно отверстие (рис. 13.3.2), — дифракцией (см. ниже дифракцию света на щели).

Различают дифракцию плоских световых волн — *дифракцию Фраунгофера*, и сферических световых волн — *дифракцию Френеля*.

Рассмотрим один из простейших случаев — дифракцию Фраунгофера на щели. Пусть на узкую длинную щель шириной  $a$  нормально падает плоская монохроматическая волна длиной  $\lambda$

( $a \gtrsim \lambda$ ). Плоскую световую волну можно получить, если взять настолько узкую щель, чтобы можно было пренебречь кривизной фронта волны, или, если расположить точечный источник света на большом расстоянии от щели, так чтобы лучи, идущие от него и попадающие в щель, могли считаться параллельными. Последний способ может быть реализован, если поместить точечный источник света в фокус линзы, расположенной перед щелью.

Для наблюдения дифракции Фраунгофера на щели между щелью и экраном помещают собирающую линзу, а экран располагают в фокальной плоскости линзы (рис. 13.3.2). В отсутствии дифракции все лучи сфокусировались бы в точке  $O$ , но, согласно принципу Гюйгенса, лучи, прошедшие через отверстие, являются вторичными источниками света и будут распространяться по всем направлениям.

В результате в каждой точке экрана линза будет фокусировать лучи, идущие под одним углом  $\alpha$  к направлению падающего пучка. Все лучи, распространяющиеся по нормали к экрану, соберутся в точке  $O$ . Линза не создает дополнительной оптической разности хода волн, поэтому в точке  $O$  амплитуды всех волн сложатся и освещенность экрана будет максимальной.

Результат дифракции на экране в произвольной точке  $P$  будет зависеть от оптической разности  $\Delta r$  (отрезок  $BC$  на рис. 13.3.2) хода лучей, идущих в эту точку от краев щели. Из рисунка находим:

$$\Delta r = a \sin \alpha, \quad (13.3.1)$$

где  $\alpha$  — угол дифракции.

Разобьем отрезок  $BC$  на участки длиной  $\lambda/2$ . При этом фронт первичной волны также разбивается на участки, или зоны, (отрезки  $AA_1$ ,  $A_1A_2$ ,  $A_2A_3$ ,  $A_3B$ ) так, что расстояния от границ соседних зон до точки наблюдения  $P$  отличаются на полдлины волны. Эти зоны называются *зонами Френеля*. Подобное разбиение фронта первичной волны, впервые введенное Френелем, значительно облегчает расчеты интерференции вторичных волн.

Для любой волны, исходящей из одной зоны Френеля, всегда найдется соответствующая волна, исходящая из соседней зоны, такая, что оптическая разность хода волн между ними будет равна  $\lambda/2$ . Две такие волны взаимно погашают друг друга. Соответственно все волны двух соседних зон Френеля взаимно уничтожаются. В результате, если оптическая разность хода волн (отрезок  $BC$ ) равна

$$\Delta r = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad (13.3.2)$$

где порядок дифракции  $k = 1, 2, 3, \dots$  (то есть на щели укладывается четное число зон Френеля, как на рис. 13.3.2), то в точке  $P$  будет наблюдаться минимум освещенности. Из соотношений (13.3.1) и (13.3.2) получаем *условие минимума дифракции*:

$$a \sin \alpha = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k \neq 0. \quad (13.3.3)$$

Соответственно если на щели укладывается нечетное число зон Френеля, то наблюдается *максимум дифракции*:

$$a \sin \alpha = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}. \quad (13.3.4)$$

Строгие расчеты показывают, что амплитуда результирующего колебания в направлении, составляющем угол  $\alpha$  с нормалью к плоскости щели, имеет вид:

$$A(\alpha) = A_0 \frac{\sin \left[ \frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha \right]}{\frac{\pi a}{\lambda} \sin \alpha}, \quad (13.3.5)$$

где  $A_0$  — амплитуда падающей на щель плоской волны (амплитуда в центре дифракционной картины). Интенсивность света пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2 \left[ \left( \frac{\pi a}{\lambda} \right) \sin \alpha \right]}{\left[ \left( \frac{\pi a}{\lambda} \right) \sin \alpha \right]^2}, \quad (13.3.6)$$

где  $I_0$  — интенсивность в середине дифракционной картины;  $I(\alpha)$  — интенсивность в точке, соответствующей углу  $\alpha$ .

Из формулы (13.3.6) видно, что при выполнении условия (13.3.3) наблюдается минимум интенсивности, а при выполнении условия (13.3.4) — максимум.

В направлении, соответствующем углу дифракции  $\alpha = 0$ , также будет наблюдаться максимум интенсивности, потому что вторичные волны придут в точку  $O$  в одинаковой фазе. Таким образом, на экране получится серия темных и светлых полос, симметричных относительно центрального максимума. Его интенсивность

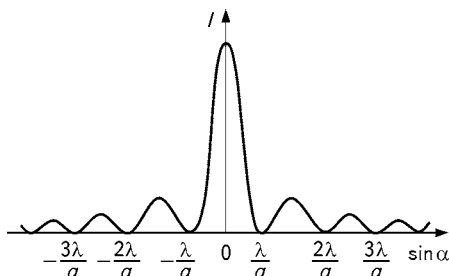


Рис. 13.3.3. Зависимость интенсивности  $I$  от  $\sin \alpha$  при дифракции от одной щели

с максимальным значением функции (13.3.6) при  $\alpha = 0$  значительно превосходит интенсивности остальных максимумов, которые убывают в направлении от центра картины как  $1 : 0,045 : 0,016 : \dots$ . График функции (13.3.6) приведен на рис. 13.3.3. Если щель освещать белым светом, то получится серия цветных полос, и только центральный максимум будет белым.

Для наблюдения дифракции щель должна быть достаточно малых размеров. Так, при  $a \gg \lambda$  из формулы (13.3.4) получаем:

$$\lim_{\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty} \sin \alpha = \lim_{\frac{a}{\lambda} \rightarrow \infty} \left[ \pm (2k + 1) \frac{\lambda}{2a} \right] = 0,$$

то есть дифракционные максимумы не наблюдаются.

Наоборот, при малых размерах щели ( $a \leq \lambda$ ) из формулы (13.3.3) получаем:

$$\sin \alpha = \pm \frac{k\lambda}{2} \geq 1,$$

однако  $|\sin \alpha| \leq 1$ . Поэтому вместо системы максимумов и минимумов интенсивность света монотонно убывает от середины дифракционной картины к краям.

Рассмотрим теперь дифракцию на большом числе одинаковых и отстоящих друг от друга на равных расстояниях щелей. Такое устройство называется дифракционной решеткой, которую можно получить нанесением непрозрачных штрихов на прозрачную пластинку.

Ширина щелей  $a$  и расстояние между ними  $b$  в сумме определяют *период* или *постоянную* дифракционной решетки  $c$  (рис. 13.3.4):

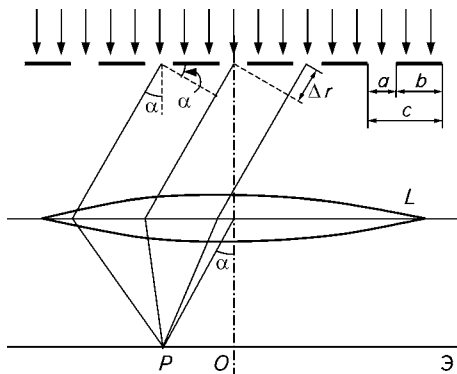


Рис. 13.3.4. Дифракция света на дифракционной решетке

$$c = a + b. \quad (13.3.7)$$

При нормальном падении на решетку плоской монохроматической волны происходит интерференция вторичных волн, идущих по всевозможным направлениям из разных щелей, формируя после фокусировки дифракционную картину на экране.

В произвольной точке  $P$  экрана, расположенного в фокальной плоскости линзы, сфокусируются все лучи, которые до линзы распространялись под определенным углом  $\alpha$  к нормали (рис. 13.3.4). Результирующее колебание в точке  $P$  определяется интерференцией вторичных волн от всех щелей и зависит от разности хода волн:

$$\Delta r = c \sin \alpha. \quad (13.3.8)$$

При равенстве оптической разности хода волн четному числу полуволн наблюдается максимум интенсивности:

$$c \sin \alpha = \left| \pm 2k \frac{\lambda}{2} \right| \pm 2k\lambda. \quad (13.3.9)$$

При этом на экране возникают *главные максимумы дифракционной картины*, здесь  $k = 1, 2, 3, \dots$  — порядок главных максимумов интенсивности (*порядок спектра*). Они расположены симметрично относительно центрального максимума,  $k = 0$  и  $\alpha = 0$ . Формула (13.3.9) позволяет с высокой точностью измерять длину волны монохроматического излучения при известном периоде решетки.

В тех точках, где интенсивность, созданная каждой из щелей в отдельности, равна нулю, наблюдается минимум интенсивности:

$$a \sin \alpha = \pm 2k \frac{\lambda}{2}, \quad k \neq 0 \quad (13.3.10)$$

[см. условие (13.3.3)].

Каждая щель дифракционной решетки создает свою собственную дифракционную картину со своими максимумами и минимумами. Поэтому между каждыми двумя главными максимумами располагаются добавочные максимумы и минимумы, число которых определяется количеством  $N$  щелей в решетке. Образуется  $(N - 1)$  добавочных дифракционных минимумов и  $(N - 2)$  добавочных максимумов, интенсивность которых составляет не более 5 % от интенсивности главного максимума (рис. 13.3.5).

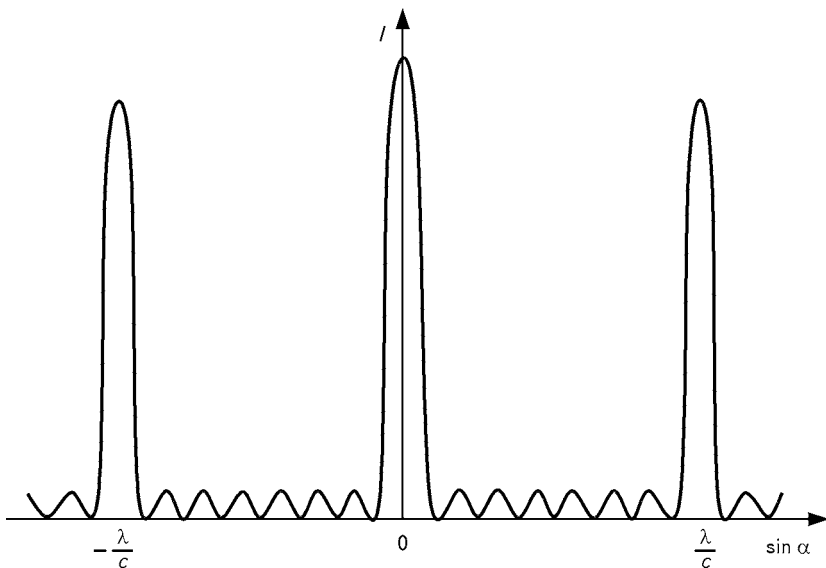


Рис. 13.3.5. Зависимость интенсивности  $I$  от  $\sin \alpha$  при дифракции на дифракционной решетке (для  $N = 8$ )

При падении на дифракционную решетку излучения сложного спектрального состава для каждой длины волны получается свой набор спектральных полос. Следовательно, падающее немонохроматическое излучение будет разложено в спектры по числу возможных значений  $k$ . Таким образом, дифракционная решетка, так же как призма и щель, является спектральным прибором, основное свойство которого — способность разлагать падающий на него свет



по длинам волн. Поэтому дифракционная решетка используется в качестве диспергирующего элемента в спектральных приборах.

Основными характеристиками дифракционной решетки являются те, которые позволяют оценить ее способность разрешать (различать) спектральные линии — угловая дисперсия и разрешающая способность.

**Угловая дисперсия  $D$**  характеризует угловую ширину спектра, то есть определяет угловое расстояние между двумя спектральными линиями, отличающимися по длине волны на  $d\lambda$ :

$$D = \frac{d\alpha}{d\lambda}. \quad (13.3.11)$$

Продифференцировав уравнение (13.3.9), получаем:

$$c \cos \alpha \, d\alpha = k \, d\lambda, \quad (13.3.12)$$

откуда

$$D = \frac{d\alpha}{d\lambda} = \frac{k}{c \cos \alpha}. \quad (13.3.13)$$

Для небольших углов дифракции  $\alpha$  таких, что  $\cos \alpha \approx 1$ ,

$$D \approx \frac{k}{c}. \quad (13.3.14)$$

Таким образом, угловая дисперсия обратно пропорциональна периоду решетки  $c$  и возрастает с увеличением порядка спектра  $k$ .

**Разрешающая способность** дифракционной решетки, то есть способность давать раздельное изображение двух близких спектральных линий, определяется как

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}, \quad (13.3.15)$$

где  $\Delta\lambda$  — минимальная разность длины волн двух спектральных линий, при которой они еще видны раздельно.

Разрешающая способность зависит как от расстояния между линиями, так и от ширины линий. Глаз воспринимает две линии раздельно, если интенсивность минимума между ними составляет не более 80 % от интенсивности максимума.

Можно показать, что для дифракционной решетки

$$R = kN. \quad (13.3.16)$$

Это условие реализуется при выполнении *критерия Релея*: две близкие спектральные линии полностью разрешены, если макси-

мум интенсивности одной линии с длиной волны  $\lambda$  совпадает с минимумом интенсивности для другой линии с длиной волны  $\lambda + \Delta\lambda$  (рис. 13.3.6).

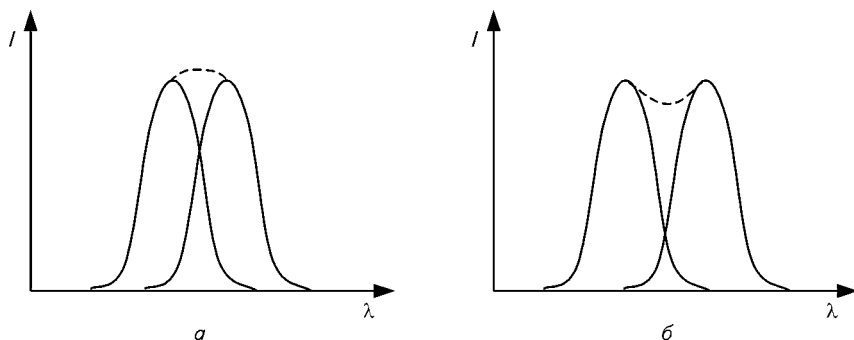


Рис. 13.3.6. Зависимость интенсивности  $I$  от длины волны  $\lambda$  для отдельных линий (сплошные линии) и их суммарная интенсивность (пунктирная линия):

$a$  — две близкие спектральные линии сливаются в одну, и два максимума воспринимаются как один;  $b$  — максимум одной спектральной линии совпадает с ближайшим минимумом другой, и две линии воспринимаются отдельно

Дифракционные решетки, применяемые для работы в различных областях спектра, отличаются размерами, формой, материалом поверхности, профилем штрихов и их частотой (от 0,25 штрих/мм в ИК-области до 6000 штрих/мм в рентгеновской области спектра). Большинство современных дифракционных решеток имеют штрихи ступенчатого профиля (эшелетт), позволяющие сконцентрировать основную часть падающего излучения в направлении какого-либо одного ненулевого порядка спектра, ослабляя остальные. Использование таких решеток позволяет создавать спектральные приборы с большой светосилой и очень высокой разрешающей способностью.

Разрешающая способность оптических приборов характеризует способность этих систем давать раздельное изображение двух расположенных близко друг к другу точек объекта. Минимальное линейное (или угловое) расстояние между двумя точками, начиная с которого их изображения сливаются и перестают быть различимыми, называется *линейным* (или *угловым*) *пределом разрешения*. Обратная величина является количественной мерой разрешающей способности оптических приборов, которая обусловлена волновыми свойствами света. Вследствие дифракции лучей от предмета в оптической системе любая точка объекта изображается в виде светлого пятна, окруженного попеременно темными и светлыми кольцами. Поэтому выражение для предела разрешения можно получить, только учитывая дифракционные явления.

Так, для микроскопа предел разрешения (в отраженном свете) при наклонном падении света на объект определяется следующим образом:

$$z = 0,5 \frac{\lambda}{n \sin u/2}, \quad (13.3.17)$$

где  $n$  — показатель преломления среды между предметом и линзой объектива;  $u$  — *апертурный угол* (угол между крайними лучами конического светового пучка, входящего в объектив).

Глаз также имеет предел разрешения  $z_0 = 70$  мкм на расстоянии  $d_0$ , поэтому вводится понятие полезного увеличения микроскопа:

$$\Gamma_{\pi} = \frac{z_0}{z}. \quad (13.3.18)$$

## § 13.4. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА

Распространение электромагнитных волн в материальных средах сопровождается целым рядом явлений, обусловленных их взаимодействием с атомами вещества. Свет, проходящий даже через прозрачные среды, поглощается, рассеивается, меняет фазовые и групповые скорости распространения, а также положение плоскости поляризации (в случае оптически активных сред). Объяснение этих явлений с позиции классической физики возможно при использовании модели резонансного поглощения света атомами вещества.

Явление зависимости абсолютного показателя преломления вещества  $n$  от частоты света  $\omega$ , проходящего через вещество света, называется **дисперсией света**. Явление дисперсии используют при разложении белого света в спектр с помощью призмы. Поскольку показатель преломления и скорость света связаны соотношением (9.10.20), то последняя также зависит от частоты распространяющегося света.

Строгое объяснение механизма дисперсии дает аппарат квантовой механики. Однако часто для упрощения рассуждений пользуются классическими представлениями об электроны<sup>1</sup> как колебательной системе, возбуждаемой электрическим полем световой волны. Несмотря на целый ряд допущений, полученные таким образом результаты совпадают с данными квантовой механики.

---

<sup>1</sup> Рассматриваются электроны внешних оболочек, называемые *валентными* или *оптическими электронами*, так как электроны внутренних оболочек практически не возбуждаются в оптическом диапазоне.

Запишем уравнение вынужденных колебаний:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E_0 \sin \omega t, \quad (13.4.1)$$

где  $m$  — масса электрона;  $e$  — заряд электрона;  $\beta$  — коэффициент затухания, который в данном случае определяет потери энергии электрона на излучение;  $eE_0$  — амплитуда вынуждающей силы световой волны;  $\omega_0$  — собственная частота колебаний электрона;  $\omega$  — частота световой волны.

Решение данного уравнения, определяющее мгновенное смещение электрона в атоме, имеет вид:

$$x(t) = \frac{\frac{e}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} E(t), \quad (13.4.2)$$

где  $E(t)$  — напряженность электрического поля световой волны в момент времени  $t$  ( $E$  изменяется по гармоническому закону).

Смещение электрона от положения равновесия вызовет появление дипольного момента  $P(t) = ex(t)$  (смещением ядер под действием поля волны можно пренебречь). Произведение дипольного момента на число молекул  $N$  в единице объема дает поляризованность:

$$P(t) = \frac{\frac{e^2}{m} N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}} E(t). \quad (13.4.3)$$

Согласно формуле (9.3.3),

$$P(t) = \varepsilon_0 \chi E(t). \quad (13.4.4)$$

Из уравнений (13.4.3) и (13.4.4) выразим диэлектрическую восприимчивость  $\chi$  и подставим в соотношение (9.3.6). Получаем выражение для диэлектрической проницаемости среды:

$$\varepsilon = 1 + \chi = 1 + \frac{\frac{e^2}{m\varepsilon_0} N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (13.4.5)$$

Диэлектрическая проницаемость связана с коэффициентом преломления  $n$  соотношением (9.10.21). Для большинства прозрачных веществ  $\mu \approx 1$ , поэтому

$$n \approx \sqrt{\varepsilon}. \quad (13.4.6)$$

Из формул (13.4.5) и (13.4.6) получаем зависимость коэффициента преломления от частоты излучения:

$$n = \sqrt{1 + \frac{\frac{e^2}{m\varepsilon_0} N}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}}. \quad (13.4.7)$$

График функции (13.4.7) представлен на рис. 13.4.1. На участках  $AB$  и  $CD$   $\frac{dn}{d\omega} > 0$ , то есть с увеличением частоты коэффициент преломления возрастает. Эти участки соответствуют так называемой нормальной дисперсии. На участке  $BC$  дисперсия аномальная  $\left(\frac{dn}{d\omega} < 0\right)$ .

Если пренебречь потерями энергии на излучение, то формула (13.4.7) переписывается в виде:

$$n^2 = 1 + \frac{\frac{e^2}{m\varepsilon_0} N}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (13.4.8)$$

В этом случае в точке  $\omega_0$  функция будет терпеть разрыв: при стремлении  $\omega$  к  $\omega_0$  слева  $n^2 \rightarrow +\infty$ ; при  $\omega \rightarrow \omega_0$  справа  $n^2 \rightarrow -\infty$  (пунктирные линии на рис. 13.4.2). Аналогичная ситуация возникает

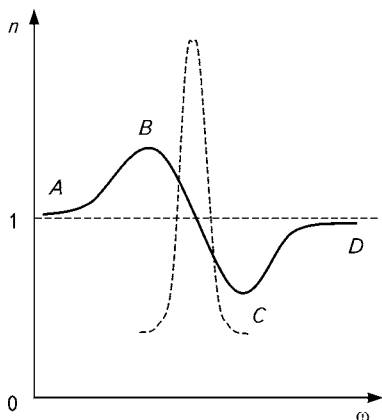


Рис. 13.4.1. Зависимость коэффициента преломления  $n$  от частоты:

участки  $AB$  и  $CD$  соответствуют нормальной дисперсии;  $BC$  — аномальной. Штриховой линией показана зависимость коэффициента поглощения от частоты (полоса поглощения)

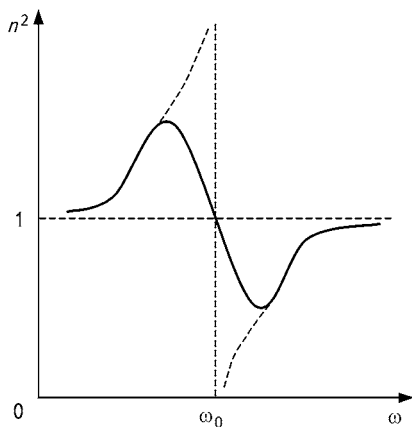


Рис. 13.4.2. Зависимость квадрата коэффициента преломления от частоты колебаний:

пунктиром показан разрыв функции в случае пренебрежения потерями на излучение (трением)

в случае вынужденных механических колебаний: если пренебречь трением, то на резонансной частоте амплитуда стремится к бесконечности (рис. 2.3.6). На резонансной частоте происходит интенсивная передача энергии световой волны атомам и молекулам вещества, то есть возникает поглощение (см. пунктирную кривую на рис. 13.4.1).

Зависимость  $n(\omega)$  для всех прозрачных веществ в видимой области спектра имеет вид, изображенный на рис. 13.4.1, участок  $AB$ , то есть дисперсия является нормальной,  $n > 1$ . На участке  $CD$   $n < 1$ , то есть фазовая скорость распространения света в среде становится больше скорости распространения света в вакууме<sup>1</sup>.

## § 13.5. ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА

Прохождение света через материальные среды сопровождается уменьшением его интенсивности — *поглощением*. При этом энергия световой волны затрачивается на возбуждение электронов. Часть этой энергии возвращается волне в виде вторичного излучения, а часть переходит в энергию теплового движения атомов. Эффективность передачи энергии зависит от частоты падающего излучения: чем она ближе к собственной частоте колебаний электронов, тем выше поглощение (см. пунктирную кривую на рис. 13.4.1).

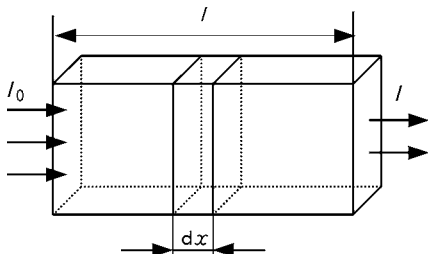


Рис. 13.5.1. К выводу закона поглощения света в веществе

Чтобы вывести закон поглощения света, выделим в веществе тонкий слой толщиной  $dx$  (рис. 13.5.1). Ослабление интенсивности  $dI$  света в этом

слое будет прямо пропорционально толщине слоя и интенсивности  $I$  падающего на него излучения

$$dI = -\alpha I dx, \quad (13.5.1)$$

<sup>1</sup> Это не противоречит теории относительности, так как речь идет не о единственной монохроматической волне, а о группе волн. Скорость переноса энергии группой волн равна не фазовой, а групповой скорости:  $u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$ . В области нормальной дисперсии  $dv/d\lambda > 0$ , так что, хотя  $v > c$ , групповая скорость  $u$  меньше скорости света в вакууме. В области аномальной дисперсии поглощение велико, волна затухает, и понятие групповой скорости волны утрачивает смысл.

где коэффициент пропорциональности  $\alpha$  называется **натуральным показателем поглощения**. Знак «-» указывает на то, что интенсивность света на пути  $dx$  уменьшается ( $dI < 0$ ).

Разделим переменные в уравнении (13.5.1), подставляя соответствующие пределы (см. рис. 13.5.1):

$$\int_{I_0}^I \frac{dI}{I} = -\alpha \int_0^l dx, \quad (13.5.2)$$

и проинтегрируем:

$$\ln \frac{I}{I_0} = -\alpha l. \quad (13.5.3)$$

Выразив  $I$ , получаем *закон поглощения света Бугера—Ламберта*:

$$I = I_0 \exp(-\alpha l). \quad (13.5.4)$$

Из формулы (13.5.4) следует физический смысл  $\alpha$ : натуральный показатель поглощения есть величина, обратная толщине слоя, при прохождении которого интенсивность света уменьшается в  $e$  раз.

Часто закон Бугера—Ламберта (особенно в лабораторной практике) записывают в следующем виде:

$$I = I_0 10^{-\alpha' l}, \quad (13.5.5)$$

где  $\alpha' = 0,43\alpha$  — показатель поглощения.

Натуральный показатель поглощения зависит от длины волны  $\lambda$ , поэтому, как правило, закон Бугера—Ламберта записывают для монохроматического света:

$$I = I_0 e^{-\alpha_\lambda l}, \quad (13.5.6)$$

или

$$I = I_0 10^{-\alpha'_\lambda l}, \quad (13.5.7)$$

где  $\alpha_\lambda$  — монохроматический натуральный показатель поглощения,  $\alpha'_1 = 0,43\alpha_\lambda$  — монохроматический показатель поглощения.

*Бером* был установлен закон, согласно которому натуральный показатель поглощения раствора поглощающего вещества в не поглощающем растворителе, при условии, что молекулы растворенного вещества не взаимодействуют с молекулами растворителя и отсутствуют фотохимические реакции, линейно зависит от концентрации поглощающего вещества

$$\alpha_\lambda = \varepsilon c, \quad (13.5.8)$$

где  $\varepsilon$  — **молярный показатель поглощения**, не зависящий от концентрации,  $[\varepsilon] = \text{м}^2/\text{моль}$ ;  $c = n/N_A$  — молярная концентрация вещества;  $n$  — концентрация растворенного вещества;  $N_A$  — число Авогадро.

Молярный показатель поглощения определяется *эффективным сечением поглощения* молекул  $\sigma$  — некоторой площадью, при попадании фотона в которую происходит его захват молекулой:

$$\varepsilon = N_A \sigma. \quad (13.5.9)$$

Выражение (13.5.9) определяет физический смысл  $\varepsilon$ : натуральный молярный показатель поглощения есть суммарное эффективное сечение поглощения одного моля растворенного вещества.

Законы Бугера—Ламберта и Бера объединяются в один закон *Бугера—Ламберта—Бера*<sup>1</sup>

$$I = I_0 e^{-\varepsilon c l}, \quad (13.5.10)$$

или

$$I = I_0 e^{-\sigma n l}. \quad (13.5.11)$$

Отношение интенсивности прошедшего через раствор света к интенсивности падающего называется *коэффициентом пропускания*:

$$T = \frac{I}{I_0}.$$

В оптике широко используется величина, называемая **оптической плотностью** вещества (раствора), которая определяется как десятичный логарифм величины, обратной коэффициенту пропускания:

$$D = \lg \frac{1}{T} = \lg \left( \frac{I_0}{I} \right) = \varepsilon' c l, \quad (13.5.12)$$

где  $\varepsilon' = 0,43\varepsilon$ .

Закон Бугера—Ламберта—Бера лежит в основе метода концентрационной колориметрии — фотометрического метода определения концентрации вещества в окрашенном растворе. Подробнее об этом см. в § 18.1.

---

<sup>1</sup> Этот закон был экспериментально открыт французским ученым П. Бугером (1729), выведен теоретически немецким ученым И. Г. Ламбертом (1760) и сформулирован для растворов немецким ученым А. Бером (1852).



## § 13.6. РАССЕЯНИЕ СВЕТА

Электрическое поле падающего света «раскачивает» электроны, и они, двигаясь с ускорением, излучают вторичные электромагнитные волны, движущиеся в том же направлении, что и падающий свет, благодаря чему и возникает явление преломления света.

Однако, если атомы и молекулы хаотически движутся, то возникают оптические неоднородности, размеры которых могут изменяться от долей длин волн  $\lambda$  до нескольких  $\lambda$ . В результате этого происходит **рассеяние света** — отклонение световых лучей во все стороны от первоначального направления и, как следствие, дополнительное их ослабление. Если молекулы или атомы вещества объединяются в соответствующие скопления, то рассеяние увеличивается. Таким образом, существует два вида неоднородностей:

1) оптические неоднородности, возникающие в чистом веществе из-за статистического отклонения молекул от равномерного распределения (флуктуации плотности); этот механизм рассеяния называется молекулярным;

2) малые частицы в однородном прозрачном веществе: твердые или жидкие частицы в газе (дым и туман) или в жидкости (взвеси и эмульсии).

Интенсивность света, прошедшего через слой вещества толщиной  $l$ , при рассеянии равна

$$I = I_0 \exp(-\kappa l), \quad (13.6.1)$$

или

$$I = I_0 10^{-\kappa' l}, \quad (13.6.2)$$

где  $\kappa$  — натуральный показатель рассеяния;  $\kappa' = 0,43\kappa$  — показатель рассеяния.

Если свет, проходя через вещество, одновременно поглощается и рассеивается, то интенсивность прошедшего света равна

$$I = I_0 \exp(-\mu l) \quad (13.6.3)$$

или

$$I = I_0 10^{-\mu' l}, \quad (13.6.4)$$

где  $\mu$  — натуральный показатель ослабления;  $\mu' = 0,43\mu$  — показатель ослабления.

Из соотношений (13.5.4), (13.5.5), (13.6.1), (13.6.2), (13.6.3) и (13.6.4) следует связь между показателем ослабления и показателями рассеяния и поглощения:

$$\mu = \alpha + k; \quad (13.6.5)$$

$$\mu' = \alpha' + k'. \quad (13.6.6)$$

Показатель рассеяния зависит от размеров рассеивающих частиц и соотношения между частотой падающего света и резонансными частотами вещества.

Согласно *закону Рэлея*, при рассеянии света на неоднородностях, малых по сравнению с длиной световой волны (приблизительно меньших  $0,2\lambda$ ), интенсивность рассеяния обратно пропорциональна четвертой степени длины волны:

$$I \sim \frac{1}{\lambda^4}. \quad (13.6.7)$$

Из видимого спектра наиболее значительно рассеиваются голубые и фиолетовые лучи, и наименее — красные, вследствие чего сигнальные, предупреждающие об опасности огни делаются, как правило, красными или оранжевыми.

Закон Рэлея объясняет голубой цвет неба: голубые лучи рассеиваются в атмосфере сильнее остальных. На закате солнечным лучам приходится проходить большую толщу атмосферы, чем днем, поэтому видимый спектр ввиду преимущественного рассеяния голубых и фиолетовых лучей оказывается обеднен ими, вследствие чего на закате Солнце и небо окрашиваются в красные тона.

В случае наличия неоднородностей, размеры которых сравнимы с длиной волны, интенсивность рассеяния обратно пропорциональна квадрату длины волны:

$$I \sim \frac{1}{\lambda^2}. \quad (13.6.8)$$

Поэтому в крупных промышленных городах голубой цвет неба менее насыщен, чем в сельской местности.

## § 13.7. ПОЛЯРИЗАЦИЯ СВЕТА

Свет, у которого пространственное расположение векторов напряженности электрического и магнитного полей упорядочено каким-либо образом, называется *поляризованным*. Так как векторы  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  взаимоперпендикулярны и лежат в плоскостях, перпендикулярных направлению распространения волны, то для полного описания поляризации света требуется знать поведение лишь одного из них. Для этих целей выбирается вектор  $\vec{E}$ , так как именно

он играет главную роль во всех процессах взаимодействия света с веществом<sup>1</sup>.

Поляризованный свет излучается отдельными атомами, однако при излучении света большим количеством атомов (излучение от Солнца, лампы накаливания, пламени) суммарное излучение оказывается неполяризованным ввиду несогласованности отдельных актов излучения, как по времени, так и по направлениям. Свет, в котором электрические векторы ориентированы произвольно по всем направлениям, перпендикулярным к направлению распространения света, называется *естественным* (рис. 13.7.1, а).

Различают несколько видов поляризации — линейная, круговая (или циркулярная) и эллиптическая поляризация. Плоская световая волна называется *плоскополяризованной* (*линейно поляризованной*), если ее электрический вектор  $\vec{E}$  лежит в одной плоскости, в которой расположена нормаль к волновой поверхности (рис. 13.7.1, б). Плоскость, проходящая через вектор  $\vec{E}$  и нормаль к волновой поверхности, называется *плоскостью поляризации*.

Линейно поляризованную волну можно представить в виде суммы двух линейно поляризованных волн с одинаковыми фазами распространяющихся вдоль оси  $z$  [см. формулу (9.10.24)]:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos(\omega t - kz); \\ E_y &= E_{0y} \cos(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (13.7.1)$$

При циркулярной поляризации конец вектора  $\vec{E}$  описывает в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волны, окружность с правым или левым вращением:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos(\omega t - kz); \\ E_y &= E_0 \cos\left(\omega t - kz \mp \frac{\pi}{2}\right), \end{aligned} \quad (13.7.2)$$

знак « $-$ » соответствует правой круговой поляризации, а « $+$ » — левой. Линейно поляризованный свет, как это следует из уравнений (13.7.1) и (13.7.2), можно получить, сложив две циркулярно поляризованные волны с противоположными направлениями вращения.

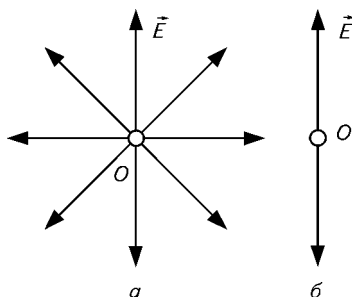


Рис. 13.7.1. Сечение луча  $O$  и проекции электрического вектора  $\vec{E}$  на плоскость, перпендикулярную лучу для естественного (а) и поляризованного света (б)

<sup>1</sup> Вектор  $\vec{E}$  часто называют *световым вектором*.

Эллиптическую поляризацию можно получить, складывая две монохроматические волны с разными амплитудами и с произвольной разностью фаз:

$$\begin{aligned} E_x &= E_{0x} \cos(\omega t - kz); \\ E_y &= E_{0y} \cos(\omega t - kz + \varphi). \end{aligned} \quad (13.7.3)$$

Поляризация является одним из проявлений поперечности электромагнитных волн. Продольная волна имеет одинаковые свойства

во всех плоскостях, перпендикулярных ее распространению, а поперечная — разные.

Рассмотрим наиболее простой случай — плоскополяризованный (линейно поляризованный) свет.

В естественном свете проекции вектора  $\vec{E}$  на любые две взаимно перпендикулярные плоскости одинаковы, поэтому естественный свет схематически удобно изображать в виде равномерно чередующихся колебаний вектора  $\vec{E}$  в плоскости рисунка (черточками) и в плоскости, перпендикулярной рисунку (точками) (рис. 13.7.2, а). Плоскополяризованный свет изображают

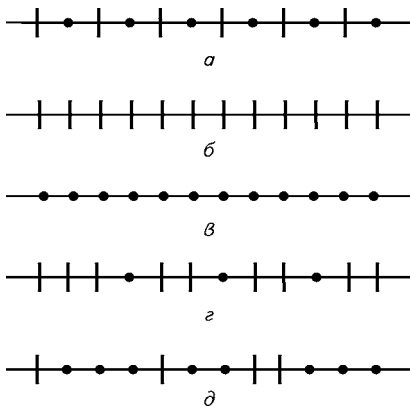


Рис. 13.7.2. Схематическое изображение света:

а — естественного; б и в — плоскополяризованного; г и д — частично поляризованного

в виде прямой с точками или черточками (рис. 13.7.2, б, в). Если в луче преобладают колебания в какой-либо из плоскостей, то свет называют *частично поляризованным* (рис. 13.7.2, г, д). Такой свет можно рассматривать как сумму естественного или плоскополяризованного.

Для получения плоскополяризованного света применяются **поляризаторы**, которые полностью пропускают колебания, параллельные некоторой плоскости — *плоскости поляризатора*, и полностью задерживают колебания, перпендикулярные этой плоскости. Для начала рассмотрим прохождение через поляризатор плоскополяризованного света. Если плоскость поляризации света составляет с плоскостью поляризатора угол  $\alpha$ , то поляризатор пропустит составляющую (рис. 13.7.3)

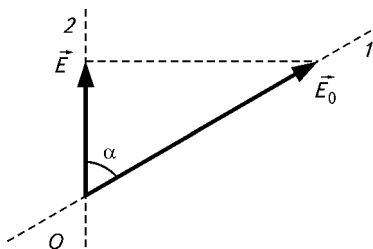


Рис. 13.7.3. Падение плоскополяризованного света на поляризатор:  $\vec{E}$  и  $\vec{E}_1$  — амплитуды электрического вектора падающего и прошедшего плоскополяризованного света соответственно; 1 — плоскость поляризации света; 2 — плоскость поляризатора

$$E = E_0 \cos \alpha, \quad (13.7.4)$$

где  $E_0$  — амплитуда вектора  $\vec{E}$  падающей волны (здесь и далее потерями на отражение и поглощение пренебрегаем).

Так как интенсивность света пропорциональна амплитуде колебаний, то интенсивность прошедшего плоскополяризованного света равна

$$I = I_0 \cos^2 \alpha, \quad (13.7.5)$$

где  $I_0$  — интенсивность линейно поляризованного падающего света.

Выражение (13.7.5) носит название *закона Малюса*.

Вычислим интенсивность естественного света, прошедшего через поляризатор. Из всего потока света с хаотически ориентированными световыми векторами выделим волны, векторы  $\vec{E}$  которых расположены к оси поляризатора под углами от  $\alpha$  до  $\alpha + d\alpha$  (рис. 13.7.4). Учитывая равновероятное распределение интенсивности по всем углам ориентации  $\vec{E}$  (от 0 до  $\pi$ ), интенсивность данного пучка составит:

$$dI_0 = \frac{I_0}{\pi} d\alpha. \quad (13.7.6)$$

Тогда интенсивность света, прошедшего через поляризатор:

$$dI = dI_0 \cos^2 \alpha = \frac{I_0}{\pi} \cos^2 \alpha d\alpha \quad (13.7.7)$$

( $d\alpha$  настолько мал, что волны всего пучка можно считать ориентированными под одним и тем же углом  $\alpha$ , то есть считать падающий свет плоскополяризованным).

Проинтегрируем по всем возможным значениям угла  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} I &= \frac{I_0}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \alpha d\alpha; \\ I &= \frac{I_0}{2\pi} \int_0^\pi (\cos 2\alpha + 1) d\alpha; \\ I &= \frac{I_0}{2\pi} \left( \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \alpha \right) \Big|_0^\pi; \\ I &= \frac{1}{2} I_0. \end{aligned} \quad (13.7.8)$$

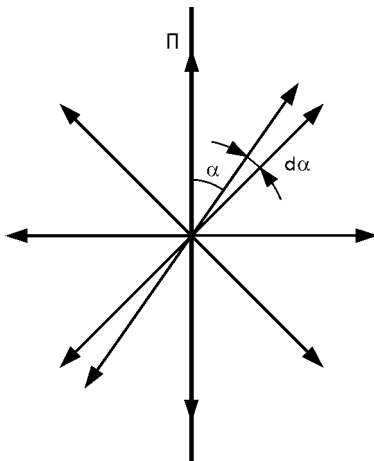


Рис. 13.7.4. К вычислению интенсивности естественного света, прошедшего через поляризатор:

П — плоскость поляризатора

Таким образом, при прохождении через поляризатор интенсивность естественного света уменьшается вдвое.

Человеческий глаз не способен отличать плоскополяризованный свет от естественного. Для обнаружения поляризации служат **анализаторы**, которые по своему принципу действия аналогичны поляризаторам.

Если на анализатор падает естественный свет, то интенсивность прошедшего света уменьшается вдвое [см. формулу (13.7.8)] и остается неизменной при повороте оси анализатора. Если на анализатор падает поляризованный свет, то, согласно закону Малюса (13.7.5), интенсивность прошедшего света не изменяется при  $\alpha = 0$ , когда плоскость поляризации света параллельна оси анали-

затора, и интенсивность равна 0 при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ , когда плоскость поляризации света перпендикулярна плоскости поляризатора. Если же свет частично поляризован, то при  $\alpha = 0$  интенсивность прошедшего света максимальна, но меньше интенсивности падающего

света, а при  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  — минимальна, но отлична от нуля.

Если естественный свет пропускать через два поляризатора, оптические оси которых образуют между собой угол  $\alpha$  (рис. 13.7.5), то после прохождения через первый поляризатор естественный свет поляризуется, при этом его интенсивность уменьшается вдвое; на выходе из второго поляризатора (анализатора) интенсивность зависит от угла  $\alpha$  между плоскостями  $yy'$  поляризаторов и определяется законом Малюса. Интенсивность прошедшего света будет равна:

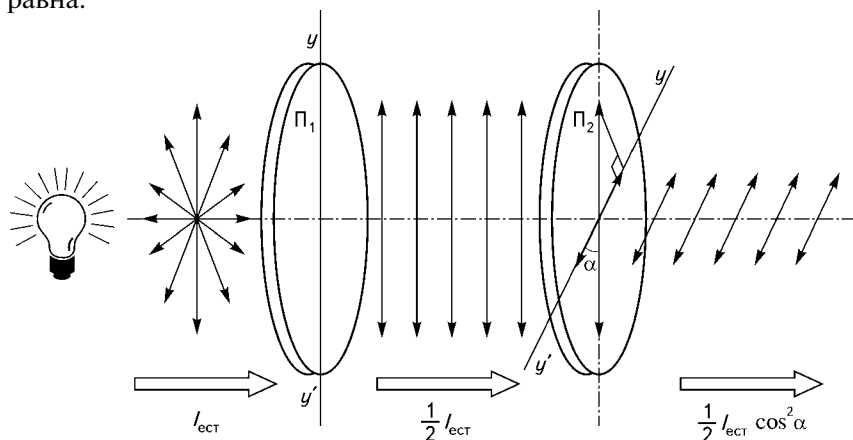


Рис. 13.7.5. Прохождение естественного света через два последовательно расположенных поляризатора

$$I = \frac{1}{2} I_{\text{ест}} \cos^2 \alpha, \quad (13.7.9)$$

где  $I_{\text{ест}}$  — интенсивность естественного света, падающего на первый поляризатор.

**Поляризация при отражении, преломлении и рассеянии. Закон Брюстера.** Световые лучи, проходя через границу раздела двух диэлектриков с разными показателями преломления, испытывают отражение и преломление. Отраженный и преломленный лучи оказываются частично линейно поляризованными. Объяснение этому явлению дает электромагнитная теория Максвелла. В отраженном луче преобладают колебания вектора  $\vec{E}$ , перпендикулярные плоскости падения, а в преломленном — параллельные ей (рис. 13.7.6). Степень поляризации зависит от угла падения. Отраженный луч полностью плоскополяризован, если выполняется *закон Брюстера*:

$$\operatorname{tg} i_{\text{Б}} = n_{21}, \quad (13.7.10)$$

где угол падения  $i_{\text{Б}}$  (угол полной поляризации отраженного луча) называется *углом Брюстера*;  $n_{21} = n_2/n_1$  — относительный показатель преломления среды, в которой распространяется преломленный свет, относительно среды, в которой распространяется падающий свет.

При выполнении закона Брюстера преломленный луч частично поляризован, но при этом степень его поляризации максимальна. Нетрудно показать, что при выполнении условия (13.7.10) отраженный и преломленный лучи взаимно перпендикулярны (рис. 13.7.7). Таким образом, граница раздела двух диэлектриков является поля-

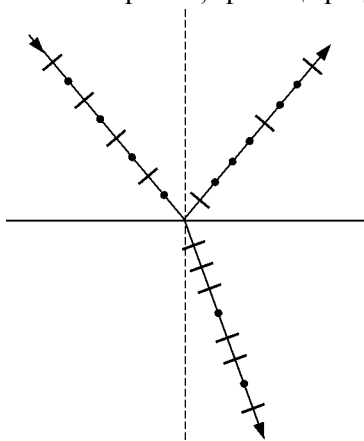


Рис. 13.7.6. Частичная поляризация естественного света на границе раздела двух диэлектриков

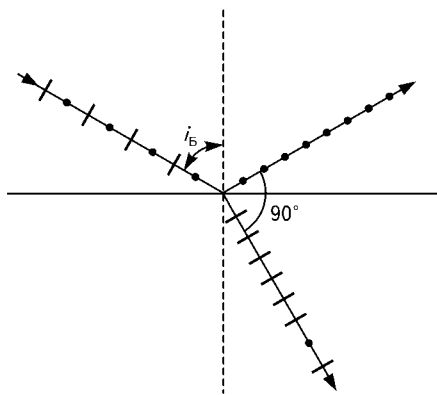


Рис. 13.7.7. Полная поляризация отраженного света при выполнении закона Брюстера

ризатором. Поляризатором может также служить стопа из нескольких прозрачных пластин. При прохождении через каждую пластину степень поляризации преломленного луча возрастает.

При рассеянии света происходит его частичная поляризация. В случае неполярных молекул при угле рассеяния  $\theta = 90^\circ$  рассеянный свет полностью поляризован в плоскости, проходящей через падающий и рассеянный лучи.

**Оптическая активность вещества.** Во многих случаях при прохождении плоскополяризованного света через вещество происходит поворот плоскости поляризации относительно своего исходного положения. Это явление называется *оптической активностью вещества* или *вращением плоскости поляризации*.

Различают право- и левовращающиеся вещества. Вращение вправо (по часовой стрелке для наблюдателя, смотрящего навстречу лучу) принято называть положительным, а влево (против часовой стрелки) — отрицательным. К оптически активным веществам относятся некоторые кристаллические вещества (например кварц, причем существуют две его модификации — право- и левовращающая), жидкости (скипидар), растворы оптически активных веществ в оптически неактивных растворителях (растворы глюкозы, сахарозы в воде), газы и пары (пары камфоры).

Угол  $\alpha$  поворота плоскости поляризации пропорционален длине  $l$  пути света в твердом веществе:

$$\alpha = \alpha_0 l, \quad (13.7.11)$$

где  $\alpha_0$  — постоянная вращения.

При использовании растворов оптически активного вещества угол поворота плоскости поляризации пропорционален толщине  $l$  слоя раствора и его концентрации  $c$ :

$$\alpha = \alpha_0 c l, \quad (13.7.12)$$

где коэффициент пропорциональности  $\alpha_0$  называется удельным вращением плоскости поляризации.

Выражение (13.7.12) лежит в основе весьма чувствительного метода определения концентрации сахара в растворе с помощью поляриметра (подробнее о методе поляризации см. в § 18.8).

## § 13.8. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Любое тело с температурой, отличной от нулевой по шкале Кельвина, излучает. Такое излучение называется *тепловым излучением*. Его источником является внутренняя энергия атомов и мо-



лекул (в отличие, например, от люминесценции, которая возбуждается внешними источниками энергии).

При тепловом излучении энергия от одного тела к другому передается посредством испускания и поглощения электромагнитных волн. Падающее на тело излучение частично поглощается им, часть излучения отражается или проходит сквозь тело.

*Коэффициент отражения* тела:

$$\rho = \frac{\Phi_{\text{отр}}}{\Phi_0}. \quad (13.8.1)$$

*Коэффициент поглощения*:

$$\alpha = \frac{\Phi_{\text{погл}}}{\Phi_0}. \quad (13.8.2)$$

*Коэффициент пропускания*:

$$\tau = \frac{\Phi_{\text{пр}}}{\Phi_0}, \quad (13.8.3)$$

где  $\Phi_0$  — поток падающего излучения;  $\Phi_{\text{отр}}$ ,  $\Phi_{\text{погл}}$  и  $\Phi_{\text{пр}}$  — потоки отраженного, поглощенного и прошедшего излучения соответственно.

Согласно закону сохранения энергии,

$$\Phi_{\text{отр}} + \Phi_{\text{погл}} + \Phi_{\text{пр}} = \Phi_0, \quad (13.8.4)$$

или

$$\rho + \alpha + \tau = 1. \quad (13.8.5)$$

Поток излучения (среднюю мощность излучения за время значительно большее периода колебаний), испускаемый единицей площади поверхности, называется **энергетической светимостью**  $R$ . Единицей измерения энергетической светимости в СИ является ватт на квадратный метр,  $[R] = \text{Вт/м}^2$ .

Нагретое тело излучает по всем длинам волн (спектр теплового излучения сплошной), но с разной интенсивностью. Распределение энергии теплового излучения по длинам волн при заданной температуре  $T$  характеризуется **спектральной плотностью энергетической светимости** — величиной, равной отношению энергетической светимости в бесконечно малом интервале длин волн, к ширине этого интервала:

$$r_\lambda = \frac{dR}{d\lambda}. \quad (13.8.6)$$

Единицей измерения спектральной плотности энергетической светимости в СИ является ватт на кубический метр  $[r_\lambda] = \text{Вт/м}^3$ . Зависимость спектральной плотности энергетической светимости от длины волны называется *спектром излучения*.

Интегрирование формулы (13.8.6) по всем длинам волн дает *полную (интегральную) энергетическую светимость*:

$$R = \int_0^{\infty} r_\lambda d\lambda. \quad (13.8.7)$$

Тело, коэффициент поглощения которого равен единице для всех частот или длин волн, называется **а б с о л ю т н о ч е р н ы м т е л о м**. Абсолютно черное тело поглощает все падающие на него лучи независимо от длины волны излучения и температуры. Тело, коэффициент поглощения которого меньше единицы и не зависит от длины волны света падающего излучения, называется **с е р ы м**.

И черные, и серые тела являются физической абстракцией. Хорошей моделью черного тела может служить небольшое отверстие в замкнутой непрозрачной полости. Луч света, попавший внутрь полости, после многочисленных отражений будет практически полностью поглощен стенками, и отверстие останется черным (рис. 13.8.1).

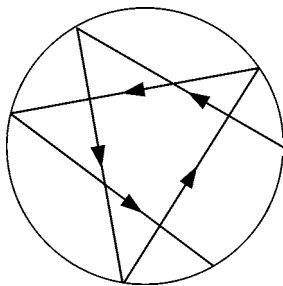


Рис. 13.8.1. Модель абсолютно черного тела

Коэффициент поглощения тела зависит от длины волны излучения, поэтому тела могут считаться серыми лишь в определенном интервале длин волн и температур, например, тело человека является серым с коэффициентом поглощения 0,9 в инфракрасной области спектра. В небольшом интервале длин волн коэффициент поглощения сажи близок к единице,

то есть она может считаться черным телом.

На основании второго закона термодинамики в 1859 году немецкий физик Г. Р. Кирхгоф установил связь между излучением и поглощением тел. Согласно *закону Кирхгофа*, отношение спектральной плотности энергетической светимости  $r(\lambda, T)$  любого тела к монохроматическому коэффициенту поглощения зависит от длины волны излучения  $\lambda$  и абсолютной температуры  $T$ , не зависит от природы излучающего тела и равно спектральной плотности энергетической светимости черного тела  $\varepsilon(\lambda, T)$  при той же температуре:

$$\frac{r(\lambda, T)}{\alpha(\lambda, T)} = \varepsilon(\lambda, T). \quad (13.8.8)$$

Закон Кирхгофа позволяет получить ряд важных заключений. Перепишем его в виде:

$$r(\lambda, T) = \alpha(\lambda, T) \cdot \varepsilon(\lambda, T). \quad (13.8.9)$$

Из уравнения (13.8.9) следует, что спектральная плотность энергетической светимости любого тела всегда меньше спектральной плотности энергетической светимости черного тела при той же температуре [ $\alpha(\lambda, T) < 1$ ]. При прочих равных условиях излучение черного тела является наиболее интенсивным. Чем сильнее поглощает тело при данной температуре, тем сильнее оно и излучает. Если тело полностью отражает излучение, то оно и не излучает.

Основной задачей теории о тепловом излучении является определение вида функции  $r(\lambda, T)$ . Эта задача была успешно решена немецким физиком Максом Планком в 1900 году, а заодно было положено начало принципиально новой теории — квантовой механике (см. главу 15).

Согласно *закону Стефана—Больцмана*, энергетическая светимость абсолютно черного тела пропорциональна четвертой степени его термодинамической температуры:

$$R = \sigma T^4, \quad (13.8.10)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана,  $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$  Вт/(м<sup>2</sup> · К<sup>4</sup>).

Этот закон был сформулирован в 1879 году австрийским физиком Й. Стефаном на основе анализа экспериментальных данных и теоретически получен в 1884 году другим австрийским физиком Людвигом Больцманом из термодинамических соображений.

Если излучающее тело не является черным, то

$$R = k\sigma T^4, \quad (13.8.11)$$

где  $k$  — коэффициент, определяющий излучательную способность тела (коэффициент «серости»).

Излучающее тело одновременно поглощает излучение, испускаемое средой. Если излучающая и поглощающая поверхности имеют одинаковую площадь, закон Стефана—Больцмана запишется в виде:

$$R = k\sigma(T_1^4 - T_2^4), \quad (13.8.12)$$

где  $T_1$  — температура излучающего тела;  $T_2$  — температура окружающей среды.

Спектр теплового излучения имеет максимум, который с увеличением температуры смещается в область коротких длин волн (рис. 13.8.2).

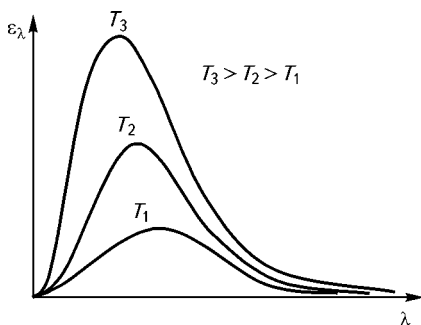


Рис. 13.8.2. Спектры теплового излучения для различных температур

По закону смещения Вина произведение абсолютной температуры абсолютно черного тела на длину волны, при которой спектральная плотность энергетической светимости данного тела максимальна, равна постоянной величине, то есть

$$\lambda_{\max} T = c_1, \quad (13.8.13)$$

где  $c_1$  — постоянная Вина,  $c_1 = 2,9 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$ . Закон (13.8.13) справедлив и для серых тел.

Тела, находящиеся при комнатной температуре, имеют максимум спектральной плотности энергетической светимости в инфракрасном диапазоне, поэтому их излучение не воспринимается человеческим глазом (некоторые животные, например змеи, «видят» в инфракрасном диапазоне). Преобразование инфракрасного излучения в видимое лежит в основе действия приборов ночного видения. С повышением температуры  $\lambda_{\max}$  может достигнуть видимого диапазона (так, раскаленные тела светятся красным светом).

Регистрация теплового излучения тела человека лежит в основе диагностического метода — теплогграфии (подробнее см. § 17.2).

Максимум спектральной плотности энергетической светимости абсолютно черного тела возрастает пропорционально пятой степени абсолютной температуры (*второй закон Вина*):

$$\varepsilon_{\max}(T) = c_2 T^5, \quad (13.8.14)$$

где  $c_2$  — вторая постоянная Вина,  $c_2 = 1,29 \cdot 10^{-5} \text{ Вт}/(\text{м}^3 \cdot \text{К}^5)$ .

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 13.1.** Луч света выходит из этилового спирта в воздух. Предельный угол падения луча  $i_{\text{пр}} = 47,24^\circ$ . Определите скорость  $v$  света в спирте.

**Решение.** Скорость света в спирте определяется выражением

$$v = \frac{c}{n_1},$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $n_1$  — показатель преломления спирта. Из условия полного отражения следует

$$\sin i_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1},$$

где  $n_2 = 1$  — показатель преломления воздуха.

Отсюда

$$v = c \sin i_{\text{пр}} = 3 \cdot 10^8 \cdot \sin 47,24^\circ = 2,2 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

**Задача 13.2.** Интенсивность света, прошедшего через раствор аспирина в непоглощающем растворителе, уменьшается за счет поглощения в три раза. Концентрация молекул аспирина  $n_0 = 10^{20} \text{ м}^{-3}$ . Путь света в растворе  $l = 150 \text{ мм}$ . Определите эффективное сечение  $\sigma_{\text{п}}$  поглощения аспирина.

**Решение.** Для решения задачи воспользуемся законом Бугера—Ламберта—Бера в форме

$$I = I_0 \exp(-n_0 \sigma_{\text{п}} l),$$

где  $I$  — интенсивность света, прошедшего в веществе расстояние  $l$ ;  $I_0$  — начальная интенсивность света;  $n_0$  — концентрация молекул;  $\sigma_{\text{п}}$  — эффективное сечение поглощения.

Отсюда для  $\sigma_{\text{п}}$  получаем следующее соотношение:

$$\sigma_{\text{п}} = \frac{\ln(I_0/I)}{n_0 l}.$$

После подстановки численных значений имеем:

$$\sigma_{\text{п}} = \frac{\ln 3}{10^{20} \cdot 0,15} = 7,3 \cdot 10^{-20} \text{ м}^2.$$

**Задача 13.3.** Вычислите энергию, теряемую человеком каждую секунду при теплообмене с окружающей средой. Рассмотрите два случая: 1) раздетый человек; 2) человек, одетый в костюм из шерстяной ткани. Коэффициенты поглощения: кожи человека  $k_1 = 0,9$ ; шерстяной ткани  $k_2 = 0,76$ ; температура поверхности кожи  $t_1 = 30^\circ \text{C}$ ; поверхности ткани  $t_2 = 20^\circ \text{C}$  и окружающего воздуха  $t_3 = 18^\circ \text{C}$ . Площадь поверхности, через которую осуществляется теплообмен лучистой энергией с окружающей средой, равна  $1,2 \text{ м}^2$ .

**Решение.** Тело человека одновременно излучает и поглощает излучение, испускаемое окружающей средой. Энергия, теряемая человеком при теплообмене с окружающей средой, равна энергетической светимости  $R$ , умноженной на площадь поверхности, через которую осуществляется теплообмен:

$$P = RS = \sigma k (T_1^4 - T_2^4) S.$$

Тогда в первом случае

$$\begin{aligned} P_1 &= \sigma k_1 (T_1^4 - T_3^4) S = \\ &= 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4) \cdot 0,9 \cdot (303^4 - 291^4) \text{ К}^4 \cdot 1,2 \text{ м}^2 \approx 77 \text{ Дж}\cdot\text{с.} \end{aligned}$$

где  $T_1$ ,  $T_2$  — температура человека и окружающей среды по шкале Кельвина.

Во втором случае

$$P_2 = \sigma k_2 (T_2^4 - T_3^4) S =$$

$$= 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4) \cdot 0,76 \cdot (293^4 - 291^4) \text{ К}^4 \cdot 1,2 \text{ м}^2 \approx 10,3 \text{ Дж/с}$$

Таким образом, раздетый человек теряет энергии приблизительно в 7,5 раза больше одетого.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**13.1.** Луч света пересекает границу раздела двух сред. Определите соотношение между углом падения  $i$  света и относительным показателем преломления  $n$  второй среды относительно первой, в случае, когда отраженный и преломленный лучи перпендикулярны.

**13.2.** Определите скорость  $v$  распространения света в воде, если предельный угол полного внутреннего отражения при переходе света из воды в воздух  $i_{\text{пр}} = 48^\circ 45'$ .

**13.3.** Оптическая сила плосковогнутой линзы  $D = -8$  дптр. Определите радиус  $R$  кривизны вогнутой поверхности. Показатель преломления стекла, из которого сделана линза,  $n = 1,5$ .

**13.4.** Лупа, представляющая собой двояковыпуклую линзу с одинаковыми радиусами кривизны поверхностей  $R = 25$  мм, изготовлена из стекла с показателем преломления  $n = 1,5$ . Вычислите линейное увеличение  $\Gamma$  лупы для а) нормального глаза с расстоянием наилучшего зрения  $d_0 = 25$  см; б) близорукого глаза с  $d_0 = 10$  см; в) дальнозоркого глаза с  $d_0 = 40$  см.

**13.5.** Оптическая разность хода  $r$  двух интерферирующих волн равна: а) 0; б)  $0,25\lambda$ ; в)  $0,5\lambda$ ; г)  $0,75\lambda$ ; д)  $\lambda$ . Определите соответствующую разность фаз.

**13.6.** Оптическая разность хода двух интерферирующих волн  $r = 2$  мкм. Определите все длины волн видимого диапазона (от 760 нм до 380 нм), для которых будет наблюдаться: а) максимум; б) минимум интерференции.

**13.7.** В опыте Юнга два отверстия, расстояние между которыми  $d = 0,8$  мм, освещаются монохроматическим светом. Расстояние от отверстий до экрана  $L = 2$  м, ширина интерференционных полос  $l = 1,6$  мм. Определите длину волны  $\lambda$  падающего света.

**13.8.** На мыльную пленку ( $n = 1,33$ ) толщиной  $d = 0,1$  мкм падает белый свет под углом  $i = 30^\circ$ . В какой цвет кажется окрашенной пленка при наблюдении в отраженном свете?

**13.9.** С помощью установки для получения колец Ньютона определяют длину волны монохроматического света. Измерениями установлено, что при нормальном падении света на установку радиус третьего светлого кольца  $r_3 = 3,5$  мм. Наблюдение ведется в отраженном свете. Радиус кривизны линзы  $R = 10$  м. Определите длину волны  $\lambda$  монохроматического света.

**13.10.** На узкую щель нормально падает монохроматический свет. На возникшей дифракционной картине третьей светлой полосе соответству-

ет угол отклонения лучей  $\alpha = 1^\circ 43'$ . Сколько длин волн монохроматического света укладывается по ширине щели?

**13.11.** С помощью дифракционной решетки измеряют длину волны монохроматического излучения. Измерениями установлено, что максимуму второго порядка соответствует угол отклонения лучей  $\alpha = 19^\circ$ . Дифракционная решетка содержит  $n = 250$  штрихов на 1 мм. Определите длину волны  $\lambda$  монохроматического света.

**13.12.** Период дифракционной решетки  $c = 10$  мкм. При какой наименьшей ширине  $l$  решетки можно увидеть раздельно в спектре первого порядка дуплет желтой линии ртути с  $\lambda_1 = 576,96$  и  $\lambda_2 = 579,06$  нм?

**13.13.** При прохождении монохроматического света через раствор толщиной  $l = 1$  см интенсивность уменьшается в 10 раз. Определите натуральный показатель поглощения  $\alpha$  раствора.

**13.14.** Раствор поглощает 25 % падающего излучения. Определите коэффициент пропускания  $T$  и оптическую плотность  $D$  раствора.

**13.15.** Во сколько раз отличается интенсивность рассеяния двух крайних значений длин волн видимого диапазона (красная граница  $\lambda_1 = 760$  и фиолетовая —  $\lambda_2 = 380$  нм)?

**13.16.** Во сколько раз уменьшится интенсивность естественного света при прохождении через два поляризатора, главные плоскости которых находятся под углом  $\alpha = 60^\circ$  относительно друг друга? Потерями на отражение и поглощение в поляризаторах можно пренебречь.

**13.17.** Определите показатель преломления  $n$  алмаза, если при отражении от него отраженный луч будет максимально поляризован при угле преломления  $r = 22^\circ 30'$ .

**13.18.** Пластика кварца толщиной  $l_1 = 0,3$  мм, вырезанная перпендикулярно оптической оси, поворачивает плоскость поляризации света на угол  $\alpha_1 = 7^\circ 57'$ . Определите угол  $\alpha_2$  поворота плоскости поляризации пластинки толщиной  $l_2 = 2,5$  мм.

**13.19.** Вычислите поток  $\Phi$  энергии Солнца, считая его абсолютно черным телом. Радиус Солнца  $R = 6,96 \cdot 10^8$  м, температура поверхности  $T = 5800$  К.

**13.20.** Раскаленный металлический шарик радиусом  $R = 5$  мм за время  $t = 1$  с излучает энергию  $E = 1,4$  Дж. Вычислите температуру шарика, считая его серым телом с коэффициентом черноты  $k = 0,6$ .

**13.21.** На какую длину волны  $\lambda_{\max}$  приходится максимум спектральной плотности энергетической светимости: а) тела, находящегося при комнатной температуре  $t_1 = 20^\circ\text{C}$ ; б) спирали электрической лампочки ( $T_2 = 2500$  К); в) поверхности Солнца ( $T_3 = 5800$  К); г) ядерного взрыва, в эпицентре которого температура  $T_4 = 10^7$  К? В каких диапазонах электромагнитных волн лежат эти длины волн?

## ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**13.1.** Абсолютный показатель преломления  $n$  среды равен:

- а)  $\frac{v}{c}$ ; б)  $\frac{\sin i}{\sin r}$ ; в)  $\frac{n_1}{n_2}$ ; г)  $\frac{c}{v}$ ; д)  $\frac{\sin r}{\sin i}$ .

**13.2.** Закон преломления Снеллиуса имеет вид ( $i$  — угол падения;  $r$  — угол преломления):

$$\text{а) } n = \frac{v}{c}; \quad \text{б) } \frac{n_2}{n_1} = \frac{\cos i}{\cos r}; \quad \text{в) } \frac{v}{c} = \frac{\cos i}{\cos r}; \quad \text{г) } \frac{v}{c} = \frac{\sin i}{\sin r}; \quad \text{д) } \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin i}{\sin r}.$$

**13.3.** Формула тонкой линзы имеет вид:

$$\text{а) } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f}; \quad \text{г) } (1-n) \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{D};$$

$$\text{б) } \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} = \frac{1}{f}; \quad \text{д) } \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} = f.$$

$$\text{в) } \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = (n+1) \frac{1}{f};$$

**13.4.** Результирующая амплитуда интерферирующих волн:

$$\text{а) } E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 - 2E_{01}E_{02} \sin(\varphi_2 + \varphi_1)};$$

$$\text{б) } E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 - 2E_{01}E_{02} \sin(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\text{в) } E_0 = \sqrt{(E_{01} + E_{02})^2 + E_{01}E_{02} \cos^2(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\text{г) } E_0 = \sqrt{E_{01}^2 + E_{02}^2 + 2E_{01}E_{02} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)};$$

$$\text{д) } E_0 = \sqrt{(E_{01} - E_{02})^2 + 2E_{01}E_{02} \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)}.$$

**13.5.** Наибольшее ослабление световых волн в результате интерференции наблюдается, если они приходят в определенную точку пространства с разностью фаз  $\Delta\varphi$ , равной:

$$\text{а) } \Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{6}(2k+1); \quad \text{в) } \Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{4}(2k+1); \quad \text{д) } \Delta\varphi = \pm k\pi.$$

$$\text{б) } \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}(2k+1); \quad \text{г) } \Delta\varphi = \pm\pi(2k+1);$$

**13.6.** Условие максимума интенсивности света при интерференции:

$$\text{а) } \Delta r = 2k \frac{\lambda}{2} - \frac{\lambda}{2}; \quad \text{в) } \Delta r = 2k \frac{\lambda}{2}; \quad \text{д) } \Delta r = (2k-1) \frac{\lambda}{2}.$$

$$\text{б) } \Delta r = (2k+1) \frac{\lambda}{2}; \quad \text{г) } \Delta r = k \frac{\lambda}{2};$$

**13.7.** Условие минимума интенсивности света при интерференции в тонкой пленке для отраженного света:

$$\text{а) } 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = 2k \frac{\lambda}{2}; \quad \text{г) } 2d \sqrt{n^2 - \sin^2 i} = (2k+1) \frac{\lambda}{2};$$

$$\text{б) } 2n \sqrt{d^2 - \cos^2 i} = 2k \frac{\lambda}{2}; \quad \text{д) } 2n \sqrt{d^2 + \cos^2 i} = 2k \frac{\lambda}{2}.$$

$$\text{в) } 2d \sqrt{n^2 + \sin^2 i} = (2k+1) \frac{\lambda}{2};$$



**13.8.** Радиусы светлых колец Ньютона в проходящем свете определяются формулой:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } r_k = \sqrt{kR \frac{\lambda}{2}}; & \text{в) } r_k = \sqrt{2kR \frac{\lambda}{2}}; & \text{д) } r_k = \sqrt{(k+1)R\lambda}. \\ \text{б) } r_k = \sqrt{(k+1)R \frac{\lambda}{2}}; & \text{г) } r_k = \sqrt{(2k+1)R \frac{\lambda}{2}}; & \end{array}$$

**13.9.** Условие минимума в случае дифракции от одной щели при нормальном падении на нее параллельного пучка монохроматического света:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } a \sin \alpha = \pm(k+1) \frac{\lambda}{2}; & \text{г) } a \sin \alpha = \pm k \frac{\lambda}{2}; \\ \text{б) } a \sin \alpha = \pm(2k+1)\lambda; & \text{д) } a \sin \alpha = \pm 2k \frac{\lambda}{2}. \\ \text{в) } a \sin \alpha = \pm(2k+1) \frac{\lambda}{2}; & \end{array}$$

**13.10.** Условие главных максимумов дифракционной решетки:

$$\begin{array}{ll} \text{а) } c \sin \alpha = \pm k\lambda; & \text{г) } c \sin \alpha = \pm(2k+1) \frac{\lambda}{2}; \\ \text{б) } c \operatorname{tg} \alpha = \pm(2k+1)\lambda; & \text{д) } c \cos \alpha = \pm(2k+1)\lambda. \\ \text{в) } c \operatorname{tg} \alpha = \pm 2k\lambda; & \end{array}$$

**13.11.** Предел разрешения микроскопа (при отражении света от объекта) при наклонном падении света на объект:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } z = \frac{2\lambda}{n \sin \frac{u}{2}}; & \text{в) } z = 0,5 \frac{\lambda}{n \cos \frac{u}{2}}; & \text{д) } z = \frac{2\lambda}{n \cos \frac{u}{2}}. \\ \text{б) } z = 0,5 \frac{n}{\lambda \sin \frac{u}{2}}; & \text{г) } z = 0,5 \frac{\lambda}{n \sin \frac{u}{2}}; & \end{array}$$

**13.12.** Закон поглощения света Бугера—Ламберта имеет вид ( $I$  — интенсивность прошедшего света;  $I_0$  — интенсивность падающего света):

$$\begin{array}{lll} \text{а) } I = I_0 \exp(\chi l); & \text{в) } I = \frac{1}{2} I_1; & \text{д) } I = I_0 \cos^2 \alpha. \\ \text{б) } I = I_0^2 \exp(-\chi l); & \text{г) } I = I_0 \exp(-\chi l); & \end{array}$$

**13.13.** Закон поглощения света в растворах (закон Бугера—Ламберта—Бера) имеет вид:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } I = I_0 \exp(\chi l); & \text{в) } I = I_0 \exp(-\varepsilon c l); & \text{д) } I = I_0 \exp(\varepsilon c l). \\ \text{б) } I = \frac{1}{2} I_1; & \text{г) } I = I_0 \cos^2 \alpha; & \end{array}$$

**13.14.** Согласно закону Малюса, интенсивность плоскополяризованного света  $I_0$ , прошедшего через поляризатор, составляет:

$$\begin{array}{lll} \text{а) } I = I_1 \exp(-\varepsilon c l); & \text{в) } I = I_1 \cos^2 \alpha; & \text{д) } I = \frac{1}{2} I_1. \\ \text{б) } I = I_1 \exp(-\chi l); & \text{г) } I = \frac{1}{2} I_1 \cos^2 \alpha; & \end{array}$$



# БИОФИЗИКА ЗРЕНИЯ

Глаз человека является оптическим прибором. Несмотря на всю сложность, основные принципы функционирования его светопроводящей системы могут быть описаны законами геометрической оптики. С другой стороны, механизм генерации зрительного ощущения является фотобиологическим процессом. Поэтому изучение светопреобразующей системы глаза требует привлечения законов взаимодействия света с веществом, а также аппаратов квантовой механики и квантовой биофизики.

Фармацевтам и медикам необходимо понимание этих вопросов, так как при лечении целого ряда глазных болезней используются не только хирургические, но и медикаментозные методы, применение которых, особенно на ранних стадиях заболеваний, позволяет исключить необходимость хирургического вмешательства.

### § 14.1. ОПТИЧЕСКАЯ СИСТЕМА ГЛАЗА ЧЕЛОВЕКА

Глаз имеет не совсем правильную сферическую форму. Его вертикальный, горизонтальный и осевой (переднезадний) размеры равны соответственно 23,4; 23,6 и 24,3 мм. Свет попадает в глаз через *роговицу*. Показатель преломления ее вещества 1,376, радиус кривизны передней поверхности 7,7, задней — 6,8 мм. Эта часть глаза обладает наибольшими преломляющими свойствами: оптическая сила ее передней поверхности — 50 дптр. За роговицей находится *хрусталик*, представляющий собой двояковыпуклую линзу с радиусом кривизны передней поверхности 10, задней — 6 мм. Хрусталик состоит из пластинчатых слоев, неодинаковых как по радиусу кривизны, так и по показателю преломления. Общий показатель преломления вещества хрусталика 1,414—1,424, оптическая сила в наиболее уплощенном состоянии 19,1 дптр. Пространство между роговицей и хрусталиком заполнено *водянистой влагой*,

а внутренняя часть глаза — *стекловидным телом* — прозрачной гелеобразной массой, состоящей из внеклеточной жидкости с коллагеном и гиалуроновой кислотой в коллоидном растворе. Водянистая влага и стекловидное тело имеют показатель преломления 1,336.

Внутренний слой глаза, содержащий зрительные элементы (см. ниже), называется *сетчаткой*. К сетчатке подходит зрительный нерв, отводящий нервные импульсы в зрительный центр головного мозга.

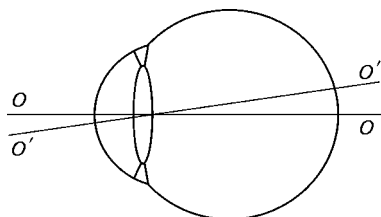


Рис. 14.1.1. Положение главной оптической  $OO$  и зрительной  $O'O'$  осей

В области примыкания зрительного нерва к сетчатке находится *слепое пятно*, нечувствительное к свету, а в середине сетчатки — область, где острота зрения при дневном освещении максимальна — *желтое пятно*.

Через геометрический центр роговицы и хрусталика проходит главная оптическая ось  $OO$ , а через центр хрусталика и желтое пятно — зрительная ось  $O'O'$  (рис. 14.1.1). Зрительная ось совпадает с направлением наилучшей светочувствительности. Угол между главной оптической и зрительной осями составляет примерно  $5^\circ$ .

Показатели преломления воздуха и внутренней среды глаза не равны. Из этого вытекает следующее:

1. *Фокусные расстояния*  $f_1$  и  $f_2$  не равны (рис. 14.1.2). Для сферической поверхности фокусные расстояния как со стороны предметов, так и со стороны изображения могут быть вычислены по формуле:

$$f = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}, \quad (14.1.1)$$

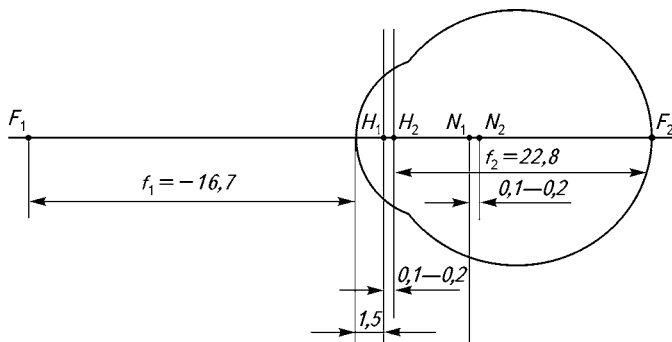


Рис. 14.1.2. Оптическая система глаза:

$F_1$  и  $F_2$  — фокусы;  $f_1$  и  $f_2$  — фокусные расстояния;  $H_1$  и  $H_2$  — главные точки;  $N_1$  и  $N_2$  — узловые точки. Расстояния даны в мм

где  $n_1$  — показатель преломления первой среды (из которой исходят параллельные лучи);  $n_2$  — показатель преломления второй среды;  $R$  — радиус кривизны поверхности раздела двух сред. Соответственно оптическая сила сферической поверхности равна

$$D = \frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 R}. \quad (14.1.2)$$

Оптическая сила линзы с двумя преломляющими поверхностями:

$$D = D_1 + D_2 - \frac{d}{n} D_1 D_2, \quad (14.1.3)$$

где  $D_1$  и  $D_2$  — оптическая сила передней и задней поверхностей линзы соответственно;  $d$  — расстояние между ними<sup>1</sup>;  $n$  — показатель преломления заключенной между ними среды.

2. *Главные плоскости* оптической системы глаза, перпендикулярные главной оптической оси и проходящие через *главные точки*  $H_1$  и  $H_2$  (рис. 14.1.2), не совпадают.  $H_1$  и  $H_2$  — это точки, для которых линейное увеличение

$$\Gamma = \frac{a_2}{a_1} = +1, \quad (14.1.4)$$

где  $a_1$  — расстояние от предмета до линзы;  $a_2$  — расстояние от линзы до изображения (рис. 14.1.3).

3. С главными плоскостями не совпадают плоскости, перпендикулярные главной оптической оси и проходящие через *узловые точки*  $N_1$  и  $N_2$  (рис. 14.1.2). Для этих точек угловое увеличение

$$Z = \frac{\operatorname{tg} \varphi_2}{\operatorname{tg} \varphi_1} = 1, \quad (14.1.5)$$

где  $\varphi_1$  — угол раскрытия пучка лучей точки предмета;  $\varphi_2$  — угол раскрытия пучка лучей для сопряженной точки изображения (рис. 14.1.3).

Глаз имеет четыре преломляющие поверхности, образованные роговицей, водянистой влагой и хрусталиком. Снаружи эта опти-

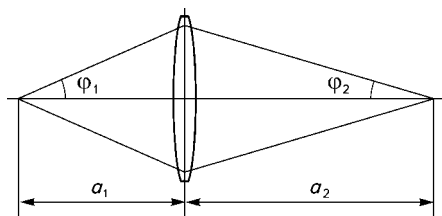


Рис. 14.1.3. К определению линейного и углового увеличений

<sup>1</sup> Наличием расстояния  $d$  в уравнении для суммарной оптической силы двух преломляющих поверхностей объясняется тот факт, что одному и тому же близорукому человеку, как правило, выписывают роговичные контактные линзы с меньшей оптической силой, чем очки, так как линзы располагаются ближе к глазу, и коэффициент  $d$  уменьшается.

ческая система ограничена воздухом, изнутри — стекловидным телом. Часто для упрощения вычислений всю оптическую систему глаза представляют линзой, которая со стороны пространства предметов окружена воздухом, а со стороны пространства изображений — жидкостью с показателем преломления 1,336, главные  $H_1$ ,  $H_2$  и узловые  $N_1$ ,  $N_2$  точки совмещают. Оптическая сила такой системы составляет 58,6 дптр, а сама система называется *приведенным редуцированным глазом*.

Чем дальше предмет удален от глаза, тем меньше его изображение на сетчатке. Проведем через крайние точки предмета  $AB$ , имеющего размер  $H$ , и совмещенную узловую точку  $N$  лучи (рис. 14.1.4). Пересечение их с сетчаткой даст действительное, обратное, уменьшенное изображение предмета размером  $h$ , величина которого

Рис. 14.1.4. Построение изображения  $h$  предмета  $H$  на сетчатке глаза

$$h = l \operatorname{tg} \beta, \quad (14.1.6)$$

где  $l$  — расстояние между совпадающей узловой точкой  $N$  и сетчаткой. Если угол зрения  $\beta$  между лучами мал, то  $\operatorname{tg} \beta \approx \beta$ . Получаем

$$h = l\beta. \quad (14.1.7)$$

Размер предмета  $H$

$$H = L\beta, \quad (14.1.8)$$

где  $L$  — расстояние от предмета до глаза.

Тогда из формул (14.1.7) и (14.1.8) получаем:

$$h = \frac{lH}{L}. \quad (14.1.9)$$

Из выражения (14.1.9) видно, что из известного расстояния до предмета можно определить размер последнего, и, наоборот, из известного размера предмета можно определить расстояние до него.

Наименьший угол зрения  $\beta$ , при котором человек еще способен видеть отдельно две различные точки предмета (*угловая разрешающая способность*), составляет примерно одну минуту. При расположении предмета на расстоянии 25 см *линейная разрешающая способность* человеческого глаза составляет 70 мкм, а размер изображения этих точек на сетчатке — 5 мкм, что, в свою очередь, равно среднему расстоянию между колбочками (см. ниже).

Из геометрической оптики (см. § 13.1) известно, что при равных показателях преломления среды с обеих сторон линзы справедливо соотношение

$$\frac{f_1}{a_1} + \frac{f_2}{a_2} = 1. \quad (14.1.10)$$

Поэтому для получения четкого изображения различно удаленных предметов должно изменяться либо расстояние  $a_2$  (рис. 14.1.3), либо фокусное расстояние  $f_2$  (рис. 14.1.2). В глазе человека реализуется последний способ. Возможность фокусирования на сетчатке изображений различно удаленных предметов за счет изменения кривизны хрусталика, особенно его передней поверхности, называется *а к к о м о д а ц и е й*. Чем ближе расположен предмет, тем больше должна быть кривизна хрусталика и его оптическая сила.

Хрусталик заключен в капсулу, которая по краям переходит в волокна *цилиарной связки*. Эти волокна всегда натянуты. Поэтому в расслабленном состоянии хрусталик максимально растянут, и его оптическая сила минимальна. В этом состоянии глаз способен различать предметы, находящиеся только на очень далеком расстоянии — «на бесконечности». Механическое напряжение волокон цилиарной связки регулируется *цилиарной (глазной) мышцей*. При сокращении мышцы, иннервируемой парасимпатическими волокнами глазодвигательного нерва, натяжение цилиарной связки уменьшается, и хрусталик за счет своей эластичности принимает более выпуклую форму.

С возрастом в результате обезвоживания эластичность хрусталика уменьшается, в результате чего ограничивается возможность регуляции его радиуса кривизны, развивается так называемая *старческая дальнозоркость*. При этом рассматривание близких предметов, требующее для аккомодации малых радиусов кривизны хрусталика, затруднено, хотя далеко расположенные предметы видны по-прежнему хорошо.

У здорового молодого человека аккомодация не вызывает напряжения при рассматривании предметов, находящихся на расстоянии более чем 25 см. Это наименьшее расстояние называется *расстоянием наилучшего видения*.

Оптическая система глаза имеет ряд недостатков<sup>1</sup>. Роговица и хрусталик чаще всего имеют неправильную сферическую форму и напоминают собой сегмент эллипсоида вращения. Это приводит к явлению *а с т и г м а т и з м а*. При этом оптическая сила в вертикальной плоскости не равна оптической силе в горизонтальной плоскости (обычно первая несколько больше второй), то есть глаз по вертикали может быть близоруким, а по горизонтали — дальнозорким. Астигматизм присущ в небольшой степени почти всем

<sup>1</sup> Немецкий физик, математик и биолог Герман фон Гельмгольц (1821—1894) однажды пошутил, что, если бы ему прислали оптический инструмент, сконструированный так небрежно, как глаз, он отослал бы его назад изготовителю.

людям. Если разница в оптических силах не превышает 0,5 дптр, то астигматизм называют «физиологическим» и не корректируют очками. При большой степени дефекта зрение корректируется цилиндрическими линзами, а при «нерегулярном» астигматизме (радиус кривизны роговицы варьируется неопределенным образом) — только контактными линзами (иногда коррекция невозможна).

Другим недостатком оптической системы глаза являются сферическая и хроматическая aberrация.

**Сферическая aberrация** возникает из-за того, что фокусное расстояние центральной части и роговицы, и хрусталика больше фокусного расстояния периферической части. Этот недостаток почти не проявляется при малых значениях диаметра зрачка, когда вклад периферических отделов оптической системы в построение изображения невелик. С увеличением диаметра зрачка изображение становится все более нерезким.

**Хроматическая aberrация** возникает вследствие явления дисперсии белого света: показатель преломления света зависит от его длины волны, чем она короче, тем больше показатель преломления. Поэтому синие предметы, требующие меньшей аккомодации, кажутся более удаленными, чем расположенные на том же расстоянии красные предметы. Этот эффект широко использо-

вался при создании витражей готических храмов: фон делался синим, а все остальные предметы и фигуры окрашивались в другие цвета. В результате плоское изображение приобретало объем.

Помимо естественных, характерных для всех людей недостатков зрения, существуют патологии. В норме задний фокус оптической системы глаза должен совпадать с сетчаткой (рис. 14.1.5, а).

При **близорукости (миопии)** вследствие увеличения переднезаднего размера глазного яблока фокус расположен перед сетчаткой, что вызывает размытое изображение далеко расположенных предметов (рис. 14.1.5, б). Для близорукого глаза расстояние наилучшего видения меньше 25 см. Этот недостаток зрения корректируется рассеивающими (вогнутыми) линзами.

При **дальнозоркости (гиперметропии)**, наоборот, осевая длина глазного

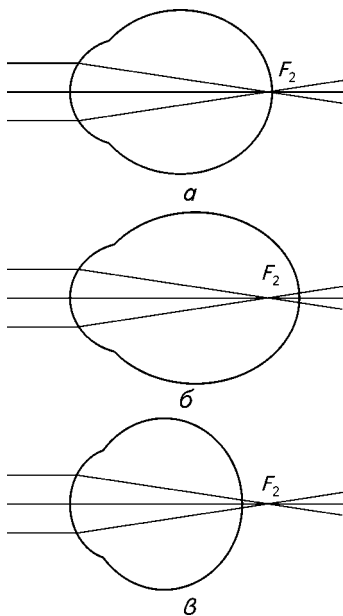


Рис. 14.1.5. Ход лучей в нормальном (а), близоруким (б) и дальнозорким (в) глазах



яблока уменьшена, и лучи фокусируются за сетчаткой (рис. 14.1.5, в). Далеко расположенные предметы при этом видны отчетливо (за счет механизмов аккомодации на передний план), а для рассматривания близко расположенных предметов необходима коррекция собирающими (выпуклыми) линзами. Расстояние наилучшего видения для дальновзорких людей — больше 25 см.

## § 14.2. МОЛЕКУЛЯРНЫЙ МЕХАНИЗМ ЗРЕНИЯ

В основе зрения лежит способность глаза, точнее светочувствительных клеток сетчатки, реагировать на изменение светового потока. Глаз позвоночных содержит два вида рецепторных клеток: палочки, являющиеся более чувствительными к свету и обеспечивающие зрение в сумерках и ночью (*скотопическое зрение*), и колбочки, обеспечивающие восприятие зрительных образов при ярком освещении и цветное зрение (*фотопическое зрение*). Колбочки, кроме того, обладают лучшей способностью к восприятию деталей изображения и поэтому значительно улучшают разрешающую способность глаза. Кривая спектральной чувствительности глаза имеет максимум около 500 нм при скотопическом зрении и около 555 нм при фотопическом.

Палочки имеют длину 63—81 мкм, диаметр — 1,8 мкм; для колбочек эти параметры равны соответственно 35 и 5—6 мкм. На сетчатке глаза человека находится приблизительно 110—125 млн палочек и 6—7 млн колбочек. Палочки и колбочки расположены на сетчатке неравномерно: в центре ее напротив зрачка в области желтого пятна находятся в основном колбочки, на периферии — только палочки. В связи с этим для получения наилучшего качества изображения световой поток должен попадать в центр сетчатки.

Сетчатка состоит из нескольких слоев клеток. Ближе всего к свету расположены слои нервных клеток, отводящие электрические сигналы от палочек и колбочек в мозг. Далее располагаются, собственно, фоторецепторные клетки. Каждая из них имеет два сегмента: наружный и внутренний, соединенные между собой тонкой ножкой. Своим наружным сегментом, содержащим зрительные пигменты (молекулы, в состав которых входит хромофор, поглощающий свет), эти клетки ориентированы в сторону, противоположную свету. Таким образом, свет, прежде чем попасть на зрительные пигменты, должен пройти через роговицу, хрусталик, стекловидное тело и несколько слоев клеток. При этом, однако, поглощается не более 50 % света. Дополнительные потери возникают в связи с тем, что одна часть света отражается от роговицы,

а другая, прошедшая мимо светочувствительных элементов, поглощается клетками эпителия глаза<sup>1</sup>. Только 10 % квантов света, попавших на глаз, поглощаются зрительными пигментами в палочках.

Минимальная яркость светового пятна, которую способен воспринять глаз на абсолютно черном фоне при полной световой адаптации, называется *абсолютным порогом чувствительности*. Для человека эта величина составляет  $(2,1...5,7) \cdot 10^{-17}$  Дж на поверхности роговицы глаза. Это соответствует 58—148 квантам сине-зеленого цвета.

Если яркость освещенного фона равна  $I$ , а яркость светового пятна  $I + dI$ , то минимальная обнаруживаемая разность  $dI$  между этими величинами называется *разностным порогом чувствительности*, а отношение  $dI/I$  — *дифференциальным порогом*. Согласно *закону Вебера*, дифференциальный порог остается постоянным при изменении яркости фона:

$$\frac{dI}{I} = \text{const.} \quad (14.2.1)$$

Таким образом, величина разностного порога  $dI$  увеличивается с увеличением яркости фона  $I$ .

Зависимость между интенсивностью ощущения  $\psi$  и интенсивностью света описывается *законом Вебера—Фехнера*:

$$d\psi = k \frac{dI}{I}, \quad (14.2.2)$$

или

$$\psi = k \ln \frac{I}{I_0}, \quad (14.2.3)$$

где  $I$  — интенсивность света;  $I_0$  — абсолютный порог чувствительности;  $k$  — константа. Из формулы (14.2.3) следует, что *если интенсивность света возрастает по логарифмическому закону, то интенсивность ощущения света растет линейно*.

Выражение (14.2.3) также носит название *психофизического закона Вебера—Фехнера* и пригодно для описания любых сенсорных

---

<sup>1</sup> У человека наружный слой сетчатки покрыт слоем, в состав которого входит пигмент фусцин, обладающий большим коэффициентом поглощения. В отсутствие отражения и рассеяния света четкость изображения повышается. У некоторых ночных животных между зрительными элементами и пигментным слоем имеется отражающий слой, благодаря которому на зрительные пигменты попадают не только прямые, но и отраженные лучи. В результате в условиях дефицита освещенности повышается возможность восприятия света. За счет отражения падающего света у таких животных глаза в темноте светятся.

процессов<sup>1</sup>, например слуха. Оно использовалось для выведения логарифмических систем мер — шкалы децибелов и фонов.

Наилучшим образом фотопроцессы изучены в палочках. В ответ на поглощение квантов света их мембраны, содержащие зрительный пигмент *родопсин*, генерируют электрический сигнал. Родопсин является хромопротеином. Он состоит из белковой части — *опсина* и небелковой — *ретиная* (половины молекулы  $\beta$ -каротина). Последний является хромофором (см. § 18.1) родопсина. Ретиналь имеет множество изомеров, но в зрительных пигментах встречается только 11-цис-ретиналь (рис. 14.2.1) и в некото-

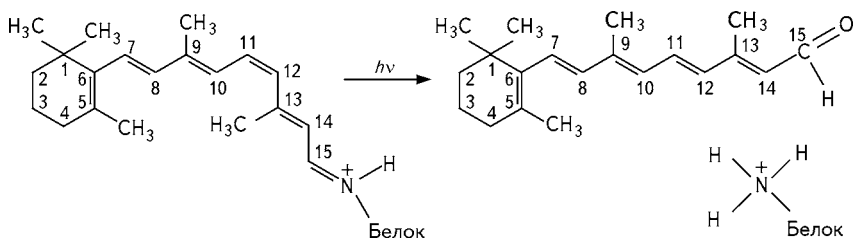


Рис. 14.2.1. Превращение 11-цис-ретиная в полностью транс-ретиналь

рых редких случаях — 9-цис-ретиналь. Ретиналь связан с опсином ковалентной протонированной альдиминной связью между альдегидной группой ретиная и  $\epsilon$ -аминогруппой лизина (рис. 14.2.2).

В молекуле опсина выделяются большой гидрофобный участок, погруженный в фосфолипидную мембрану, и меньший гидрофильный, выступающий над ее поверхностью. Фоторецепторная мембрана отличается крайне низкой вязкостью (100 мПа · с) вследствие высокого содержания полиненасыщенных жирных кислот. Это способствует быстрой вращательной и латеральной диффузии молекул родопсина и облегчает их конформационные превращения после поглощения света.

Изолированный ретиналь имеет максимум поглощения в области 370—380, а опсин — в области 278 нм. Их взаимодействие сдвигает максимум спектра поглощения родопсина в видимом диапазоне в область 500 нм. Это явление называется *б а т о х р о м н ы м* сдвигом. Родопсин также имеет еще один максимум поглощения на длине волны 350 нм (ультрафиолетовая область). Благодаря преимущественному поглощению зеленых и голубых лучей, изолированный родопсин имеет красный цвет. Спектр поглощения палочек со-

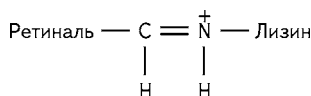


Рис. 14.2.2. Альдиминная протонированная связь

<sup>1</sup> На самом деле закон Вебера—Фехнера не всегда выполняется. Например, данный закон не справедлив при очень слабой стимуляции.

впадает со спектром поглощения родопсина и близок к кривой спектральной чувствительности скотопического зрения.

В темноте ретиналь находится в *цис*-конфигурации, что обеспечивает его полное стерическое соответствие молекуле опсина. Поглощение фотона  $\pi$ -электронами сопряженных двойных связей переводит молекулу ретиналя в возбужденное состояние и вызывает разрыв  $\pi$ -связи (подробнее см. § 16.4). Тогда одна часть молекулы поворачивается вокруг оставшейся  $\sigma$ -связи<sup>1</sup>, и ретиналь переходит в полностью *транс*-конфигурацию. Квантовая эффективность (вероятность) стереоизомеризации ретиналя после поглощения кванта составляет 0,5—0,65. После ряда превращений, в ходе которых происходит депротонирование связи между ретиналем и опсином, изменение конформации последнего, связь между ретиналем и опсином разрывается. Выделяющийся при этом ретиналь находится в *транс*-конфигурации. Вышеописанный процесс называется *фотолизом родопсина*. Обратное превращение *транс*-ретиналя в 11-*цис*-ретиналь происходит с помощью фермента ретинальизомеразы, после чего 11-*цис*-ретиналь присоединяется к опсину с образованием родопсина.

Изомеризация ретиналя является первичным фотохимическим процессом. Для возникновения сигнала, передающего информацию о зрительном ощущении в мозг, необходимо изменение транс-мембранного потенциала палочки.

В состоянии покоя цитоплазматическая мембрана наружного сегмента палочек проницаема в основном для натрия, а не для калия. Поэтому в отличие от всех других известных клеток, цитоплазма наружного сегмента палочек заряжена положительно (см. § 12.1).

Поглощение кванта света и следующие за ним фотопревращения родопсина приводят к тому, что проницаемость палочек для натрия уменьшается. Каждый поглощенный квант вызывает блокаду 100—300 натриевых каналов. Механизм передачи информации о фотолизе родопсина натриевым каналам точно неизвестен. Возможно, что блокаду вызывают внутриклеточные медиаторы, появляющиеся при воздействии на зрительные пигменты света. Роль медиаторов отводят ионам кальция и циклическому 3'-5'-гуанозинмонофосфату (цГМФ).

При возбуждении изменяется только проницаемость мембраны для натрия, для других ионов эта величина остается на прежнем уровне. Поэтому в условиях блокады натриевых каналов на первое место выступают калиевые. Диффузия  $K^+$  наружу из клет-

---

<sup>1</sup> Если в молекуле существует двойная связь, то одна из них обязательно является  $\pi$ -связью, а другая —  $\sigma$ -связью.

ки в сторону меньшей концентрации вызывает появление там положительного заряда, а в клетке, наоборот, — отрицательного.

С помощью электроретинографии (см. § 17.1) были зафиксированы электрические потенциалы сетчатки. Сразу после поглощения кванта света возникает *ранний рецепторный потенциал* (РРП) продолжительностью 1 мс. Предполагается, что РРП вызывается перемещением молекулы родопсина в мембране при конформационных превращениях в нем. Молекула родопсина содержит фиксированные заряды, и их смещение относительно липидного бислоя приводит к формированию РРП. Амплитуда РРП зависит от интенсивности вспышки, но не превышает 5 мВ. Чем меньше квантов света падает на сетчатку, тем выше вероятность их взаимодействия с молекулами невыцветшего родопсина и соответственно выше амплитуда РРП.

Через 1 мс после РРП возникает *поздний рецепторный потенциал* (ПРП), вызываемый уже не конформационными перестройками молекулы родопсина, а транспортом ионов через мембрану. Амплитуда ПРП растет с увеличением интенсивности света по закону

$$A = \frac{\alpha I_s}{1 + k I_s}, \quad (14.2.4)$$

где  $I_s$  — интенсивность светового стимула (число фотонов, падающих за единицу времени на единицу площади);  $\alpha$  и  $k$  — константы, зависящие от длины волны падающего света.

Зрительный пигмент колбочек отличается от такового для палочек. В качестве хромофора по-прежнему выступает 11-*цис*-ретиаль, а белковая часть имеет несколько иное строение. Светочувствительный элемент колбочек называется *йодопсином*.

Существует три вида йодопсинов, имеющих максимумы поглощения при 445 нм (синий цвет), 535 (зеленый) и 570 нм (оранжевый) (рис. 14.2.3). Каждая колбочка содержит только один вид этих молекул.

Известно, что любой цветовой тон  $F_4$  может быть получен в результате аддитивного смешения трех других определенным образом подобранных тонов  $F_1$ ,  $F_2$  и  $F_3$ . Это можно записать в виде уравнения необходимых и достаточных условий цветоощущения:

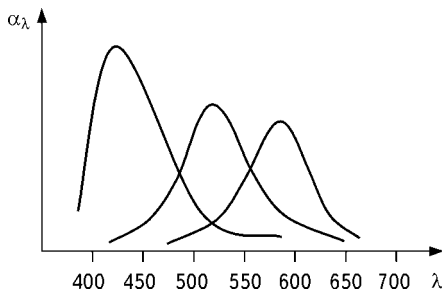


Рис. 14.2.3. Спектр поглощения трех видов йодопсинов:

$\alpha_\lambda$  — монохроматический показатель поглощения;  $\lambda$  — длина волны

$$a\{F_1\} + b\{F_2\} + c\{F_3\} \cong d\{F_4\}, \quad (14.2.5)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  — весовые константы (знак « $\cong$ » означает эквивалентность ощущения и не имеет математического смысла).

Согласно *трехкомпонентной теории зрения*<sup>1</sup>, сформулированной в 1801 году Т. Юнгом и развитой затем Г. Гельмгольцем, всякий цвет оказывает воздействие на каждый тип колбочек, но в разной степени. Комбинация полученных сигналов передается в головной мозг, где анализируется. В результате возникает ощущение того или иного цвета. На данный момент справедливость этой теории на уровне колбочек не вызывает сомнений, однако на уровне сетчатки и нейронов, возможно, действуют иные механизмы.

Иногда вследствие генетических заболеваний нарушается синтез красного или зеленого йодопсина. (Случаи дефекта синтеза синего йодопсина встречаются редко, и причиной этого чаще всего являются не генетические, а приобретенные в течение жизни заболевания.) Нарушение восприятия какого-либо цвета называется **дальтонизмом**. Так как информация о патологии цветового восприятия передается по наследству как рецессивный признак, сцепленный с X-хромосомой, то дальтонизмом чаще всего страдают мужчины (примерно 8 % мужчин — дальтоники) и гораздо реже женщины (менее 0,4 %).

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 14.1.** Глаза близорукого человека без очков аккомодируют в пределах от  $a_1 = 16$  до  $a_2 = 44$  см. На сколько изменяется оптическая сила глаза при аккомодации? На каком минимальном расстоянии  $d$  человек сможет читать в правильно подобранных очках, если считать глаз и очки близко расположенными линзами.

**Решение.** Согласно формуле плоской линзы,

$$D = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

где  $D$  — оптическая сила линзы;  $a$  — расстояние от предмета до глаза;  $b$  — расстояние от главной оптической плоскости глаза до сетчатки.

Вычисляем оптическую силу глаза для минимального и максимального пределов:

<sup>1</sup> Впервые предположение о трехкомпонентном механизме восприятия цветов высказал М. В. Ломоносов.

$$D_1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{b};$$

$$D_2 = \frac{1}{a_2} + \frac{1}{b},$$

откуда получаем:

$$\Delta D = D_1 - D_2 = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}.$$

Подставим численные данные (в единицах СИ):

$$\Delta D = \frac{1}{0,16} - \frac{1}{0,44} = 4 \text{ дптр.}$$

У людей с хорошим зрением, так же как и у людей в правильно подобранных очках, предел аккомодации лежит на бесконечности ( $a = \infty$ ). Суммарная оптическая сила двух близко расположенных тонких линз равна сумме оптических сил каждой из них. Тогда оптическая сила глаза человека в очках, рассматривающего бесконечно удаленный предмет, равна:

$$D_0 + D_2 = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{b} = \frac{1}{b}, \quad (14.1)$$

где  $D_0$  — оптическая сила линз очков. При чтении на минимальном расстоянии:

$$D_0 + D_1 = \frac{1}{d} + \frac{1}{b}. \quad (14.2)$$

Вычитая (14.2) из (14.1), получаем:

$$d = \frac{1}{\Delta D},$$

где  $\Delta D = D_1 - D_2$  — пределы аккомодации глаза в единицах оптической силы. Таким образом, минимальное расстояние (расстояние наилучшего зрения) составляет:

$$d = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ м} = 25 \text{ см.}$$

**Задача 14.2.** Рассчитайте разрешающую способность человеческого глаза на расстоянии  $L = 10$  м от рассматриваемого предмета. Среднее расстояние между колбочками составляет  $h_{\min} = 5$  мкм; расстояние между совпадающей узловой точкой и сетчаткой —  $l = 15$  мм.

**Решение.** Разрешающая способность глаза определяется расстоянием между колбочками, то есть минимальным размером изображения предмета на сетчатке. Размер изображения на сетчатке предмета размером  $H$  составляет:

$$h = \frac{l}{L} H, \quad (14.3)$$

где  $L$  — расстояние до предмета;  $l$  — расстояние между совпадающей узловой точкой и сетчаткой.

Размер изображения на сетчатке не может быть меньше среднего расстояния между колбочками. При минимальном размере предмета  $h = h_{\min}$ . Из формулы (14.3) получаем минимальный размер предмета, различимый глазом на расстоянии  $L$ , то есть разрешающую способность глаза на этом расстоянии:

$$H_{\min} = h_{\min} \frac{L}{l}.$$

Подставим численные данные:

$$H_{\min} = 5 \cdot 10^{-6} \frac{10}{15 \cdot 10^{-3}} = 3,3 \text{ мм}.$$

**Задача 14.3.** Для создания зрительного ощущения на роговицу должно попадать как минимум  $N = 80$  квантов света длиной волны  $\lambda = 510$  нм в секунду. Вычислите минимальную интенсивность  $I_{\min}$  света, воспринимаемого глазом, если диаметр зрачка: а)  $d_1 = 1$  мм; б)  $d_2 = 5$  мм.

**Решение.** Интенсивность излучения равна энергии, проникающей через единицу площади поверхности за единицу времени:

$$I = \frac{E}{S \cdot t}. \quad (14.4)$$

Энергия  $N$  квантов света равна

$$E = Nh\nu = Nh \frac{c}{\lambda}, \quad (14.5)$$

где  $h$  — постоянная Планка;  $\nu$  — частота;  $c$  — скорость света в вакууме;  $\lambda$  — длина волны.

Площадь поверхности диаметром  $d$

$$S = \frac{\pi d^2}{4}. \quad (14.6)$$

Подставим выражения (14.5) и (14.6) в уравнение (14.4):

$$I = \frac{4Nhc}{\pi d^2 \lambda t}. \quad (14.7)$$

Переведем исходные данные в единицы СИ:

$$\lambda = 510 \text{ нм} = 5,1 \cdot 10^{-7} \text{ м};$$

$$d_1 = 1 \text{ мм} = 10^{-3} \text{ м};$$

$$d_2 = 5 \text{ мм} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$$



и подставим в (14.7):

$$I_{\min 1} = \frac{4 \cdot 80 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\pi \cdot (10^{-3})^2 \cdot 5,1 \cdot 10^{-7} \cdot 1} = 4 \cdot 10^{-11} \text{ Вт/м}^2;$$

$$I_{\min 2} = \frac{4 \cdot 80 \cdot 6,63 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\pi \cdot (5 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 5,1 \cdot 10^{-7} \cdot 1} = 1,6 \cdot 10^{-12} \text{ Вт/м}^2.$$

Таким образом, при увеличении диаметра зрачка в указанных пределах минимальная интенсивность излучения, воспринимаемого глазом, уменьшается в 25 раз. Поэтому в сумерках зрачки расширяются, а при ярком освещении — сужаются (последнее способствует увеличению четкости изображения).

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**14.1.** Человек с хорошим зрением без напряжения может читать на расстоянии  $d = 20$  см. Вычислите пределы аккомодации  $\Delta D$  (в единицах оптической силы) его глаз.

**14.2.** Близорукий человек пользуется очками с оптической силой  $D_0 = -4$  дптр. Определите расстояние  $d$  наилучшего зрения для него, считая очки и глаз близко расположенными тонкими линзами.

**14.3.** Дальнозоркий человек без напряжения различает предметы на минимальном расстоянии  $a = 40$  см. Вычислите оптическую силу  $D$  очков, которые необходимо выписать, чтобы расстояние наилучшего зрения составило  $d = 25$  см.

**14.4.** Как оценит человек размер  $H$  предмета, находящегося на расстоянии  $L = 3$  м от глаза, если размер изображения этого предмета на сетчатке  $h = 400$  мкм. Расстояние между совпадающей узловой точкой и сетчаткой  $l = 17,5$  мм.

**14.5.** Абсолютный порог чувствительности глаза на длине волны  $\lambda = 500$  нм составляет приблизительно  $E = 2,5 \cdot 10^{-17}$  Дж на поверхности роговицы глаза. Скольким квантам света соответствует эта энергия?

**14.6.** Минимальная интенсивность света, воспринимаемого глазом при радиусе зрачка  $r = 1$  мм, равна  $I_{\min} = 10^{-11}$  Вт/м<sup>2</sup> на длине волны  $\lambda = 500$  нм, на сетчатку при этом попадает  $N = 40$  квантов света в секунду. Пренебрегая отражением света, вычислите суммарный коэффициент поглощения  $k$  оптических сред глаза.

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**14.1.** Коэффициент преломления редуцированного глаза составляет:  
а) 0,53; б) 1; в) 1,38; г) 4,5; д) 10.

**14.2.** Аккомодацией называется:

- а) изменение показателя преломления роговицы;
- б) нарушение цветового зрения;
- в) изменение кривизны роговицы;

- г) изменение показателя преломления стекловидного тела;
- д) изменение кривизны хрусталика, благодаря чему на сетчатке фокусируются различно удаленные предметы.

**14.3.** Расстоянием наилучшего видения называется:

- а) минимальное расстояние, на котором аккомодация не вызывает напряжения при рассматривании предметов;
- б) расстояние, на котором при рассматривании предметов радиус кривизны роговицы максимален;
- в) минимальное расстояние между колбочками сетчатки;
- г) минимальное расстояние между палочками сетчатки;
- д) расстояние, на котором коэффициент преломления увеличивается в  $e$  раз.

**14.4.** Причиной существования **1)** сферической, **2)** хроматической аберрации является:

- а) явление дисперсии;
- б) помутнение хрусталика;
- в) отслоение сетчатки;
- г) неравномерное распределение палочек и колбочек на сетчатке;
- д) различие в фокусном расстоянии центральной части роговицы и хрусталика по сравнению с фокусным расстоянием их периферической части.

**14.5.** При **1)** близорукости, **2)** дальнозоркости, **3)** астигматизме:

- а) расстояние наилучшего видения равно 25 см;
- б) расстояние наилучшего видения меньше 25 см;
- в) расстояние наилучшего видения больше 25 см;
- г) радиусы кривизны роговицы различаются в двух взаимно перпендикулярных направлениях;
- д) нарушено восприятие цветов.

**14.6.** Согласно закону Вебера:

- а) разностный порог чувствительности прямо пропорционален интенсивности света;
- б) дифференциальный порог чувствительности — величина постоянная;
- в) абсолютный порог чувствительности — величина постоянная;
- г) разностный порог чувствительности прямо пропорционален третьей степени интенсивности освещения;
- д) дифференциальный порог чувствительности обратно пропорционален квадрату интенсивности света.

**14.7.** Закон Вебера—Фехнера для зрительного ощущения формулируется следующим образом:

- а) интенсивность зрительного ощущения прямо пропорциональна интенсивности света;
- б) если интенсивность света возрастает по логарифмическому закону, то интенсивность ощущения света растет линейно;
- в) интенсивность зрительного ощущения и интенсивность света обратно пропорциональны;
- г) если интенсивность света возрастает по экспоненциальному закону, то интенсивность ощущения света снижается линейно;
- д) интенсивность зрительного ощущения обратно пропорциональна квадрату интенсивности света.

# АТОМНАЯ ФИЗИКА И КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА

*Атомная физика* — это раздел физики, изучающий строение и свойства атомов и элементарные процессы на атомном уровне. *Квантовая механика* является теоретической базой атомной физики и изучает законы движения и взаимодействия молекул, атомов, атомных ядер и элементарных частиц.

Квантовая механика лежит в основе *квантовой химии* — раздела теоретической химии, изучающего строение атомов, молекул и других химических объектов и химические процессы на основании квантово-механических представлений, а также *квантовой биофизики* — раздела биофизики, изучающего электронную структуру биологически важных молекул, энергетические превращения в этих молекулах (хемилюминесценция, фотобиологические и другие биоэнергетические процессы).

Знания всех этих разделов необходимы будущему провизору как при синтезе новых лекарственных средств, так и при изучении воздействия лекарственных препаратов на организм и взаимодействия препаратов между собой.

## § 15.1. СТРОЕНИЕ АТОМА ПО ТЕОРИИ БОРА

Первая попытка создания модели атома принадлежит Джозефу Томсону (1903). Согласно его модели, атом представляет собой в целом электронейтральную сферу, по всему объему которой равномерно распределен положительный заряд, а внутри располагаются отрицательно заряженные электроны.

В 1911 году Эрнест Резерфорд поставил опыт по рассеянию  $\alpha$ -частиц при прохождении их через металлическую фольгу. Результаты эксперимента показали, что большинство  $\alpha$ -частиц почти не испытывают отклонений от первоначального направления, однако примерно 0,0125 % частиц испытывали отклонения на зна-

чительные углы, в среднем на  $150^\circ$ . Электроны, ввиду своей малой массы по сравнению с  $\alpha$ -частицами, не могли оказывать заметного влияния на их движение. Поэтому причиной отклонения  $\alpha$ -частиц могло быть только взаимодействие с положительным зарядом атома. Однако, если бы этот положительный заряд занимал весь объем атома, то напряженность его электрического поля была бы недостаточной для таких резких отклонений частиц (напомним, что напряженность поля изолированной заряженной сферы обратно пропорциональна квадрату ее радиуса). По расчетам Резерфорда для создания необходимой силы отталкивания положительный заряд должен занимать не более  $10^{-10} \%$  от общего объема атома. То есть при размерах атома  $10^{-10}$  м размер этого заряда, названный Резерфордом атомным ядром, должен быть порядка  $10^{-15}$  м, а плотность его вещества — порядка  $10^{18}$  кг/м<sup>3</sup>. Полученные результаты были настолько неожиданны, что Резерфорд решился их опубликовать только через два года после проведения первых экспериментов.

Идея о существовании ядра была признана в 1913 году после того, как учеником Резерфорда, английским физиком Генри Мозли было доказано, что электрический заряд ядра равен (в единицах элементарного заряда электрона) порядковому номеру элемента в Периодической системе.

На основании этих экспериментов Эрнест Резерфорд предложил планетарную модель атома. Согласно этой модели, атом состоит из расположенного в центре положительно заряженного ядра с зарядом  $Ze$  (где  $Z$  — атомный номер элемента;  $e$  — элементарный заряд). В ядре заключена почти вся масса атома. Вокруг ядра по круговым орбитам движутся электроны, обладающие отрицательным зарядом  $e$ . При движении по окружности на электрон действует кулоновская сила притяжения к ядру, являющаяся в данном случае центростремительной (см. § 2.2):

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Ze \cdot e}{r^2}, \quad (15.1.1)$$

где  $m$  — масса электрона;  $v$  — его скорость;  $r$  — радиус орбиты;  $\epsilon_0$  — электрическая постоянная.

Модель Резерфорда явилась крупным шагом в теории строения атома, однако она не в состоянии была объяснить устойчивость атомов. Электрон, двигаясь по криволинейной траектории, испытывает центростремительное ускорение. Согласно классической электродинамике, ускоренное движение заряженной частицы создает в пространстве переменное электромагнитное поле, на которое должна расходоваться энергия электрона. Расчеты пока-

зывают, что за время порядка  $10^{-8}$  с все электроны атома должны были бы упасть на ядро.

Чтобы согласовать этот и другие, необъяснимые с классических представлений факты с теорией, датский физик Нильс Бор в 1913 году предложил следующие постулаты.

**Первый постулат Бора.** *Условие стационарности:* электрон в атоме может находиться только в некоторых определенных устойчивых состояниях, называемых *стационарными*, или *квантовыми*, каждому из которых соответствует определенная энергия  $E_n$ . В этих состояниях атом не излучает.

Энергия электрона зависит от радиуса орбиты, на которой он пребывает. Поэтому электроны могут двигаться только на определенных орбитах, отвечающих стационарным состояниям. Иначе говоря, радиусы орбит квантованы. Тогда первый постулат Бора может быть сформулирован иначе: из всех возможных состояний в атоме реализуются только те, для которых момент импульса электронов на орбите равен целому числу постоянных Планка  $h$  ( $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$  Дж  $\cdot$  с), деленных на  $2\pi$ :

$$L = mrv = n \frac{h}{2\pi}, \quad (15.1.2)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . Формула (15.1.2) называется *условием квантования орбит*.

При выполнении этого условия длина боровской орбиты оказывается равной

$$2\pi r = \frac{nh}{mv} = n\lambda, \quad (15.1.3)$$

где  $\lambda = h/mv$  — длина волны де Бройля [см. формулу (15.5.1)]. Это означает, что вдоль боровской орбиты укладывается целое число длин волн электронов.

**Второй постулат Бора.** При переходе из одного стационарного состояния в другое (и только при этом) атом излучает или поглощает энергию электромагнитного излучения определенными порциями — *квантами*, или *фотонами*:

$$E_{\text{кон}} - E_{\text{нач}} = h\nu, \quad (15.1.4)$$

где  $E_{\text{нач}}$  — энергия в начальном состоянии;  $E_{\text{кон}}$  — энергия в конечном состоянии;  $\nu$  — частота фотона. Выражение (15.1.4) называется *условием частот*.

Из формул (15.1.1) и (15.1.2) несложно вычислить радиусы стационарных круговых орбит электрона и скорости электронов на этих орбитах:

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2}{\pi e^2 m Z} n^2; \quad (15.1.5)$$

$$v_n = \frac{Ze^2}{2n\hbar\varepsilon_0}. \quad (15.1.6)$$

Радиус первой орбиты атома водорода называется *боровским радиусом* и равен  $a_0 = 0,529 \cdot 10^{-10}$  м. Радиусы последующих орбит возрастают пропорционально  $n^2$ .

Полная энергия электрона в атоме складывается из кинетической энергии  $E_{\text{кин}}$  движения на орбите и потенциальной энергии  $E_{\text{пот}}$  кулоновской силы притяжения к ядру.

Кинетическая энергия электрона на  $n$ -й орбите, согласно формуле (15.1.1), равна

$$E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}. \quad (15.1.7)$$

Потенциальная энергия электрона  $e$  в атоме на расстоянии  $r$  от ядра равна произведению заряда электрона на потенциал ядра  $U = \frac{Ze}{4\pi\varepsilon_0 r_n}$  в этой точке:

$$E_{\text{пот}} = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n}. \quad (15.1.8)$$

Наличие знака «минус» обусловлено тем, что потенциальная энергия электрона на бесконечности равна нулю, а при приближении к атому уменьшается.

Полная энергия электрона на  $n$ -й орбите:

$$E_{\text{полн.}, n} = E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}} = \frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}, \quad (15.1.9)$$

или с учетом формулы (15.1.5):

$$E_{\text{полн}} = -\frac{me^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 \hbar^2 n^2}. \quad (15.1.10)$$

Таким образом, полная энергия электрона принимает только некоторые разрешенные значения, зависящие от целого числа  $n$ . С ростом числа  $n$  энергия увеличивается. На большом расстоянии от ядра при  $r \rightarrow \infty$  энергия  $E_{\infty}$  становится равной 0, электрон может уйти из атома. Этот процесс называется *ионизацией* атома.

Энергия ионизации равна полной отрицательной энергии электрона в атоме:

$$E_{\text{ион}} = E_{\infty} - E_{\text{полн}} = \frac{me^4 Z}{8\varepsilon_0^2 h^2 n^2}. \quad (15.1.11)$$

В стабильных атомах электроны находятся в энергетических состояниях, соответствующих минимальной энергии. Если атому сообщить энергию, то электрон переходит на более удаленную орбиту от ядра. Такое состояние атома называется *возбужденным*.

А т о м н ы м и с п е к т р а м и называются спектры излучения или испускания электромагнитных волн одиночными атомами. Атомные спектры обусловлены электронными переходами между стационарными орбитами и являются линейчатыми.

Согласно второму постулату Бора (15.1.4), при переходе электрона с  $k$ -й орбиты на  $n$ -ю излучается или поглощается квант энергии с частотой

$$\nu = \frac{E_k - E_n}{h}. \quad (15.1.12)$$

Подставив в формулу (15.1.12) значения полной энергии (15.1.10) электрона на  $k$ -м и  $n$ -м уровнях, получаем:

$$\nu = \frac{me^4 Z^2}{8\varepsilon_0^2 h^3} \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right). \quad (15.1.13)$$

При излучении кванта  $n < k$ , где  $k = (n+1), (n+2), (n+3), \dots$ ; при поглощении  $n > k$ ,  $k = (n-1), (n-2), (n-3), \dots$ .

Формула (15.1.13) может быть сведена к виду (*формула Бальмера*):

$$\nu = R' c Z^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (15.1.14)$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $R'$  — *постоянная Ридберга*<sup>1</sup>, равная

$$R' = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1,097 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}. \quad (15.1.15)$$

---

<sup>1</sup> Формула (15.1.14) часто записывается в виде:  $\nu = RZ^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right)$ , где величина

$R = R'c$  также называется постоянной Ридберга и равна  $R = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3} = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$ .

Формула (15.1.14), позволяющая определить частоты  $\nu$ , соответствующие различным энергетическим переходам в водородоподобных атомах, была эмпирически получена Бальмером для атома водорода еще в 1885 году.

Все спектры атомов подразделяются на группы линий — с п е к т р а л ь н ы е с е р и и. В спектрах испускания каждой серии соответствуют переходы с различных начальных возбужденных уровней на один и тот же конечный. При переходах с внешних орбит на первую орбиту ( $n = 1$ ;  $k = 2, 3, 4, \dots$ ) возникает серия линий, называемых *серией Лаймана*. Частоты этих линий лежат в далекой ультрафиолетовой области. При переходах на вторую орбиту ( $n = 2$ ;  $k = 3, 4, 5, \dots$ ) возникает *серия Бальмера* (ближняя ультрафиолетовая и видимая области); при переходах на третью орбиту ( $n = 3$ ;  $k = 4, 5, 6, \dots$ ) — *серия Пашена* (инфракрасная область); при переходах на четвертую орбиту ( $n = 4$ ;  $k = 5, 6, 7, \dots$ ) — *серия Брэкета* (далекая инфракрасная область), там же лежат серии Пфунда ( $n = 5$ ) и Хамфри ( $n = 6$ ).

На рис. 15.1.1. приведены первые пять спектральных серии.

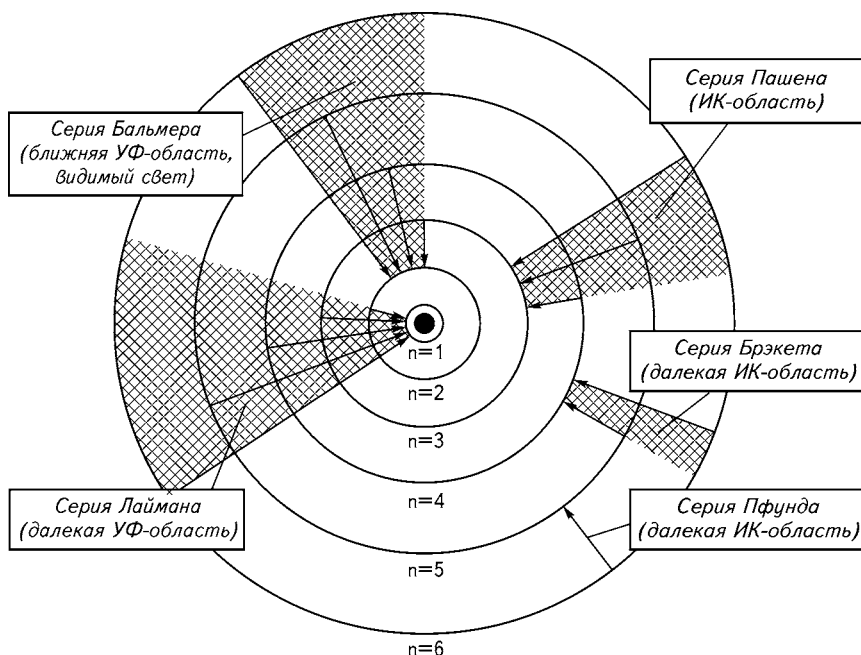


Рис. 15.1.1. Стационарные орбиты атома и образование спектральных линий



## § 15.2. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ. РАДИОАКТИВНОСТЬ

Атомные ядра химических элементов состоят из протонов, обладающих положительным зарядом, и электрически нейтральных частиц — нейтронов. Заряд протона по абсолютному значению равен заряду электрона. Протон и нейтрон являются двумя зарядовыми состояниями ядерной частицы, называемой *нуклоном*. Число протонов  $Z$  в ядре совпадает с атомным номером. Заряд ядра равен  $Ze$ . Ядра с одинаковым числом  $Z$  протонов и различными числами  $N$  нейтронов являются разновидностями одного и того же химического элемента и называются *и з о т о п а м и*. Полное число нуклонов в ядре называется *массовым числом*  $A$ .

$$A = Z + N. \quad (15.2.1)$$

Масса ядра измеряется в *атомных единицах массы* (а. е. м.); 1 а. е. м. равна  $1/12$  массы атома углерода и составляет  $1,6604 \cdot 10^{-27}$  кг или 931,4812 МэВ. В Периодической таблице приводятся массы атомов  $m_{at}$ , которые связаны с массами ядер  $m_{nuc}$  соотношением

$$m_{nuc} = m_{at} - Zm_e, \quad (15.2.2)$$

где  $m_e$  — масса электрона, равная  $9,1095 \cdot 10^{-31}$  кг =  $5,486 \cdot 10^{-4}$  а. е. м.

Энергия связи ядра любого атома определяется соотношением

$$\Delta E = \Delta m c^2, \quad (15.2.3)$$

где  $\Delta m$  — разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра, называемая *дефектом массы*;

$$\Delta m = Zm_p + (A - Z)m_n - m_{nuc}, \quad (15.2.4)$$

где  $m_p$  — масса протона, равная  $1,6726 \cdot 10^{-27}$  кг = 1,007276 а. е. м.;  $m_n$  — масса нейтрона, равная  $1,675 \cdot 10^{-27}$  кг = 1,008665 а. е. м.;  $m_{nuc}$  — масса ядра изотопа.

С учетом соотношения (15.2.2) это уравнение можно записать в виде:

$$\Delta m = Zm_{1H} + (A - Z)m_n - m_A, \quad (15.2.5)$$

где  $m_{1H}$  — масса изотопа водорода  ${}^1_1\text{H}$ , равная  $1,673 \cdot 10^{-27}$  кг = 1,007825 а. е. м.

Изменение энергии при ядерной реакции определяется соотношением

$$\Delta E = \left( \sum m_1 - \sum m_2 \right), \quad (15.2.6)$$

где  $\sum m_1$  и  $\sum m_2$  — сумма масс частиц до и после реакции, соответственно.

Протоны и нейтроны атомных ядер удерживаются внутриядерными силами притяжения, однако существуют неустойчивые изотопы химических элементов, которые называются *радиоактивными*. Известны радиоактивные изотопы всех химических элементов. Химические элементы, все изотопы которых радиоактивны, называются *радиоактивными элементами*. К ним относятся технеций (атомный номер 43), прометий (61), полоний (84) и все последующие элементы Периодической системы Менделеева. Способность некоторых атомных ядер этих элементов самопроизвольно (спонтанно) распадаться с испусканием других ядер и элементарных частиц называется *радиоактивностью*.

Различают три основных типа радиоактивности:  $\alpha$ -,  $\beta$ -распады и сопровождающее их  $\gamma$ -излучение.

$\alpha$ -Распадом называется распад атомных ядер, который сопровождается испусканием  $\alpha$ -частицы — ядра атома гелия ( ${}^4_2\text{He}$ ), содержащего два протона и два нейтрона. Общую схему  $\alpha$ -распада можно записать следующим образом:



где X и Y — исходное (материнское) и образовавшееся (дочернее) ядро соответственно.

Примером  $\alpha$ -распада является превращение радия в радон:



Все типы радиоактивного распада происходят по законам сохранения массы, энергии и электрического заряда. Суммарная масса покоя (и, соответственно, энергия) образовавшегося ядра и  $\alpha$ -частицы меньше массы покоя (энергии) исходного ядра. Разность энергий равна сумме кинетических энергий дочернего ядра и  $\alpha$ -частицы.

$\beta$ -Распадом называется самопроизвольное превращение протонов и нейтронов внутри атомного ядра. Различают три разновидности  $\beta$ -распада.

1.  $\beta^-$ -Распад заключается в превращении нейтрона в протон и сопровождается испусканием электрона ( $\beta^-$ -частицы) и элементарной электрически нейтральной частицы — антинейтрино ( $\bar{\nu}$ ):



Схема  $\beta^-$ -распада:



Примером  $\beta^-$ -распада может служить превращение радиоактивного изотопа углерода в азот:



2.  $\beta^+$ -Распад заключается в превращении протона в нейтрон и сопровождается испусканием позитрона ( $\beta^+$ -частицы) и нейтрино ( $\nu$ ):



Схема  $\beta^+$ -распада:



Примером  $\beta^+$ -распада является превращение углерода в бор:



3. Электронный захват заключается в спонтанном захвате ядром электрона с одной из внутренних оболочек атома ( $K$ -,  $L$ - и т. д., соответственно; различают  $K$ -захват,  $L$ -захват и т. д.), в результате чего протон превращается в нейтрон:



Общая схема электронного захвата:



Примером электронного захвата может служить превращение бериллия в литий:



Выражения (15.2.7), (15.2.10), (15.2.13) и (15.2.16) называются **правилами смещения** радиоактивного элемента в Периодической системе: при  $\alpha$ -распаде образовавшийся химический элемент смещается по таблице Менделеева на две клетки влево относительно исходного; при  $\beta^-$ -распаде — на одну клетку вправо; при  $\beta^+$ -распаде и электронном захвате — на одну клетку влево.

$\gamma$ -Излучением называется коротковолновое ( $\lambda \leq 10^{-10}$  м) электромагнитное излучение, возникающее в тех случаях, когда в процессе  $\alpha$ - или  $\beta$ -распада образуются ядра в возбужденном состоянии. Переход ядра с возбужденного энергетического уровня на основной сопровождается излучением  $\gamma$ -кванта с энергией, равной разности энергий между этими энергетическими уровнями.

Данный вид радиоактивности не существует самостоятельно, а сопровождает процессы  $\alpha$ - и  $\beta$ -распада.

В большинстве случаев образовавшиеся в результате  $\alpha$ - или  $\beta$ -распадов изотопы радиоактивны и способны к дальнейшему превращению. Серии радиоактивных изотопов, в которых каждый последующий изотоп образуется в результате  $\alpha$ - или  $\beta$ -распада предыдущего, называются *радиоактивными рядами* (радиоактивными семействами). Известны четыре радиоактивных ряда: урана, тория, актиния, нептуния.

Радиоактивность имеет вероятностный характер. Невозможно предсказать, когда именно то или иное ядро подвергнется  $\alpha$ - или  $\beta$ -распаду или возбужденное ядро перейдет в основное состояние. Явление радиоактивности можно описать только статистическими законами.

Число атомов  $dN$  радиоактивного вещества, распадающихся за время  $dt$ , пропорционально числу имеющихся на момент времени  $t$  атомов и определяется соотношением:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N, \quad (15.2.18)$$

где  $\lambda$  — *постоянная радиоактивного распада*. Разделим переменные в выражении (15.2.18):

$$\frac{dN}{N} = -\lambda dt. \quad (15.2.19)$$

В начальный момент времени ( $t = 0$ ) число атомов вещества равно  $N_0$ , по истечению времени  $t$  оно уменьшается и становится равным  $N$ . Интегрируя уравнение (15.2.19) в этих пределах, получаем:

$$\begin{aligned} \int_{N_0}^N \frac{dN}{N} &= -\lambda \int_0^t dt; \\ \ln \frac{N}{N_0} &= -\lambda t; \\ N &= N_0 e^{-\lambda t}. \end{aligned} \quad (15.2.20)$$

Выражение (15.2.20) называется *законом радиоактивного распада*.

Время, по истечении которого начальное число  $N_0$  атомов радиоактивного элемента уменьшается вдвое, называется *периодом полураспада*  $T_{1/2}$ .

Положим  $N = \frac{N_0}{2}$ ,  $t = T_{1/2}$  и подставим в формулу (15.2.20):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= e^{-\lambda T_{1/2}}; \\ T_{1/2} &= \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0,693}{\lambda}. \end{aligned} \quad (15.2.21)$$

Величина, обратная постоянной распада

$$\tau = \frac{1}{\lambda}, \quad (15.2.22)$$

называется *средним временем жизни радиоактивного изотопа*.

Число радиоактивных распадов в единицу времени называется *активностью изотопа*:

$$a = \frac{dN}{dt} = -\lambda N. \quad (15.2.23)$$

Единицей активности изотопа в СИ является беккерель (Бк) — один распад в секунду. На практике активность часто измеряют в кюри (Ки) — 1 Ки представляет собой активность, создаваемую 1 г радия совместно с продуктами его распада, и равен  $3,7 \cdot 10^{10}$  Бк.

## § 15.3. ФОРМУЛА ПЛАНКА

В основе квантовой или волновой механики лежат представления Макса Планка о квантах энергии, Альберта Эйнштейна о фотонах (квантах электромагнитного излучения) и гипотеза Луи-Виктора де Бройля о волновых свойствах элементарных частиц вещества.

Согласно исследованиям классической физики, энергия излучения атома изменяется непрерывно, а энергия системы с большим числом степеней свободы распределяется по ним статистически равномерно (см. § 4.1), то есть средняя энергия, приходящаяся на каждую степень свободы в состоянии теплового равновесия, одинакова. На основании этих предположений получена *формула Рэлея—Джинса*:

$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT, \quad (15.3.1)$$

где  $\varepsilon(\nu, T)$  — спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела;  $k$  — постоянная Больцмана;  $T$  — температура.

Формула (15.3.1) хорошо согласуется с экспериментальными данными на малых частотах (больших длинах волн) и резко проти-

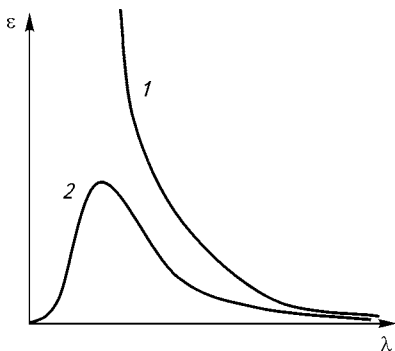


Рис. 15.3.1. Зависимость спектральной плотности энергетической светимости от длины волны, вычисленная по формуле Рэлея — Джинса (1), и экспериментальная кривая (2)

воречит им на больших частотах (малых длинах волн). Согласно этой формуле, спектральная плотность энергетической светимости абсолютно черного тела неограниченно монотонно возрастает с увеличением частоты, а интегральная энергетическая светимость обращается в бесконечность (рис. 15.3.1). Это не только противоречит эксперименту и закону сохранения энергии, но и приводит к физически бессмысленному выводу о бесконечном возрастании энергии излучения с увеличением частоты (так называемая «*ультрафиолетовая катастрофа*»).

По квантовой теории Планка энергия излучения может принимать лишь определенные значения, отличающиеся друг от друга на целое число элементарных порций или квантов энергии. В соответствии с этим излучение и поглощение энергии атомами должно происходить не непрерывно, а дискретно — отдельными квантами, энергия которых определяется формулой Планка:

$$\varepsilon = h\nu, \quad (15.3.2)$$

где  $h$  — постоянная Планка;  $\nu$  — собственная частота линейного осциллятора. Таким образом, в пространстве должен существовать набор  $n$  квантов электромагнитного излучения с частотой  $\nu$ :

$$\varepsilon_n = nh\nu.$$

Применяя квантовые законы, Планк теоретически вывел формулу для функции распределения энергии излучения абсолютно черного тела по длинам волн (или частотам), хорошо согласующуюся с экспериментом. Эта функция, называемая еще спектральной плотностью энергетической светимости абсолютно черного тела (см. § 13.8), имеет вид:

$$\varepsilon(\lambda, T) = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right) - 1}, \quad (15.3.3)$$

или

$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}. \quad (15.3.4)$$

Из формул (15.3.3) и (15.3.4) можно получить основные законы излучения абсолютно черного тела: закон Стефана—Больцмана (13.8.10), закон смещения Вина (13.8.13), второй закон Вина (13.8.14), а также классический закон Рэлея — Джинса (15.3.1) (при малых частотах  $h\nu \ll kT$ ).

Энергетическая светимость абсолютно черного тела равна

$$R = \int_{-\infty}^0 r_{\lambda} d\lambda = \int_{\infty}^0 \varepsilon_{\lambda} d\lambda. \quad (15.3.5)$$

Подставим выражение (15.3.3) в формулу (15.3.5):

$$R = 2\pi hc^2 \int_{\infty}^0 \frac{d\lambda}{\lambda^5 \left[ \exp\left(\frac{hc}{kT\lambda}\right) - 1 \right]}. \quad (15.3.6)$$

Произведя замену переменных  $\frac{hc}{kT\lambda} = x$  (соответственно  $\lambda = \frac{hc}{kTx}$ ,  $d\lambda = -\frac{hc}{kTx^2} dx$ ), получаем:

$$R = -\frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} T^4 \int_{\infty}^0 \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{2\pi k^4}{h^3 c^2} T^4 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1}. \quad (15.3.7)$$

Вычисление определенного интеграла в этом выражении дает

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}.$$

Тогда из формулы (15.3.7) получаем закон Стефана—Больцмана

$$R = \sigma T^4 \quad (15.3.8)$$

и значение постоянной Стефана—Больцмана:

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k^4}{15h^3 c^2} = 5,67032 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/(м}^2 \cdot \text{К}^4\text{)}. \quad (15.3.9)$$

Функция (15.3.3) [и соответственно (15.3.4)] имеет максимум. Продифференцируем уравнение (15.3.3) по длине волны  $\lambda$  и приравняем полученное выражение нулю:

$$\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{d\lambda} = 2\pi hc^2 \left\{ -5 \frac{1}{\lambda_{\max}^6} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda_{\max}}\right) - 1} + \right. \\ \left. + \frac{hc}{kT\lambda_{\max}^7} \cdot \frac{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda_{\max}}\right)}{\left[ \exp\left(\frac{hc}{kT\lambda_{\max}}\right) - 1 \right]^2} \right\} = 0; \end{aligned} \quad (15.3.10)$$

$$-5 + \frac{hc}{kT\lambda} \cdot \frac{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda_{\max}}\right)}{\exp\left(\frac{hc}{kT\lambda_{\max}}\right) - 1} = 0, \quad (15.3.11)$$

где  $\lambda_{\max}$  — длина волны, на которой функция (15.3.3) принимает максимальное значение. Обозначив  $\frac{hc}{kT\lambda_{\max}} = x$ , получаем трансцендентное уравнение:

$$x e^x - 5(e^x - 1) = 0, \quad (15.3.12)$$

решение которого  $x = 4,965$ . Тогда из  $\frac{hc}{kT\lambda_{\max}} = 4,965$  имеем закон смещения Вина:

$$T\lambda_{\max} = c_1, \quad (15.3.13)$$

где

$$c_1 = \frac{hc}{4,965k} = 2,897790 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К} \quad (15.3.14)$$

называется первой постоянной Вина.

Чтобы найти максимальное значение функции (15.3.3), выразим  $\lambda_{\max}$  из формулы (15.3.13) и подставим в (15.3.3). Получаем второй закон Вина:

$$\varepsilon_{\max}(T) = c_2 T^5, \quad (15.3.15)$$

где

$$c_2 = \frac{2\pi^5 k^5}{15 h^4 c^3 (e^x - 1)} = 1,28667 \cdot 10^{-5} \text{ Дж/м}^2 \cdot \text{К}^5 \quad (15.3.16)$$

называется второй постоянной Вина.

При малых частотах ( $h\nu \ll kT$  или  $h\nu/kT \ll 1$ ), согласно формулам приближенных вычислений (см. приложение),  $\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) \approx \frac{h\nu}{kT} + 1$ . Тогда формула (15.3.4) принимает вид:

$$\varepsilon(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT, \quad (15.3.17)$$

то есть сводится к классическому закону Рэлея — Джинса.

## § 15.4. ФОТОЭФФЕКТ. КОРПУСКУЛЯРНЫЕ СВОЙСТВА СВЕТА

Вторая группа явлений, которую удалось описать с помощью квантовых представлений,— это строение атома, дискретное излу-



чение и поглощение электромагнитной энергии, а также законы фотоэффекта.

**Фотоэффект** заключается в появлении свободных электронов (эмиссия или ионизация атомов) при взаимодействии электромагнитного излучения с веществом — так называемый *внешний фотоэффект*, или в переходе электронов из одной энергетической зоны в другую — *внутренний фотоэффект*.

Явление внешнего фотоэффекта было открыто Густавом Герцем и исследовано А. Г. Столетовым в 1888—1890 годах. Исследования выявили основные закономерности фотоэффекта:

1. Кинетическая энергия выбиваемых электронов (фотоэлектронов) не зависит от интенсивности освещения и линейно возрастает с увеличением частоты света.

2. Независимо от интенсивности света фотоэффект начинается только с некоторой минимальной частоты, названной «красной границей фотоэффекта», специфичной для каждого металла.

3. Число электронов, выбиваемых с поверхности вещества за единицу времени (фототок), пропорционально интенсивности освещения.

4. Явление фотоэффекта практически безынерционно, возникает почти мгновенно после начала освещения (не более чем через  $10^{-8}$  с) и прекращается сразу после отключения освещения.

Если выбивание электронов можно было объяснить действием электрического и магнитного полей света, что подтверждало его волновую природу, то закономерности фотоэффекта не подчинялись волновой теории. Так, электромагнитная волна должна возбуждать колебания электронов с амплитудой, зависящей от амплитуды падающей волны. Но так как интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды, то энергия, а следовательно, и скорость выбиваемых электронов должны были бы зависеть от интенсивности освещения. Волновая теория не могла объяснить пропорциональность скорости электронов и частоты света, существование красной границы фотоэффекта. Согласно этой теории, электрон должен постепенно накапливать энергию, необходимую для выхода. Как показывают расчеты, фотоэффект должен наступать через минуты, часы или даже дни после начала освещения.

Объяснение фотоэффекта дал в 1905 году Альберт Эйнштейн, на основании сделанного им предположения о том, что свет представляет собой поток частиц — *фотонов* с энергией  $h\nu$ . Если Макс Планк считал, что энергия только поглощается и испускается квантами, а любая система может иметь произвольную энергию, то Эйнштейн предположил, что и свет имеет дискретную структуру, а каждый фотон может взаимодействовать только с одним электроном, полностью отдавая ему свою энергию.

Из закона сохранения энергии следует *уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта*:

$$h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2}, \quad (15.4.1)$$

то есть энергия фотона  $h\nu$  расходуется на работу выхода электрона из облучаемого вещества  $A = eU_0$  ( $U_0$  — потенциал выхода) и на кинетическую энергию вылетающих электронов<sup>1</sup>. Из формулы (15.4.1) видно, что внешний фотоэффект возможен при частоте излучения  $\nu \geq A/h$ . При уменьшении частоты  $\nu$  до некоторой

$$\nu_0 = A/h, \quad (15.4.2)$$

называемой *красной границей фотоэффекта*, явление прекращается. Этому предельному случаю соответствует нулевая кинетическая энергия фотоэлектронов.

Таким образом, было показано, что электромагнитное излучение имеет двойственную корпускулярно-волновую природу. Корпускулярные свойства излучения, проявляющиеся в фотоэффекте, определяют массу и импульс кванта электромагнитного излучения — фотона. Из соотношения между массой и энергией

$$E = mc^2 \quad (15.4.3)$$

находим массу фотона

$$m_\phi = \frac{h\nu}{c^2} \quad (15.4.4)$$

и его импульс

$$P_\phi = mc = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}. \quad (15.4.5)$$

Фотоны возникают (излучаются) в процессах перехода молекул, атомов, ионов, ядер из возбужденных состояний в состояния с меньшей энергией, а также в результате ускорения заряженных частиц и их аннигиляции.

## § 15.5. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ. СООТНОШЕНИЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ

К моменту выдвижения гипотезы о двойственной природе света было накоплено достаточное количество экспериментальных данных, подтверждающих эту теорию. В 1924 году французский физик Луи-Виктор де Бройль предположил, что не только фото-

<sup>1</sup> Формула (15.4.1) соответствует нерелятивистскому случаю, то есть справедлива при скоростях электрона, намного меньших скорости света ( $v \ll c$ ).

ны, но и любые движущиеся элементарные частицы (электроны, нуклоны и тому подобное) обладают корпускулярно-волновыми свойствами (гипотеза об универсальности корпускулярно-волнового дуализма). На тот момент эта смелая гипотеза не была подтверждена никакими экспериментальными данными.

По де Бройлю движение элементарной частицы подобно волновому процессу. И, следовательно, длина волны частицы, движущейся со скоростью  $v$ , — *длины волны де Бройля*, по аналогии с формулой (15.4.5) равно

$$\lambda_{\text{Б}} = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}, \quad (15.5.1)$$

где  $m$  — масса частицы<sup>1</sup>.

Гипотеза де Бройля была экспериментально подтверждена в 1927 году в опытах американских физиков Клинтона Дэвиссона и Л. Джермера, а также независимо от них английским физиком Джорджем Томпсоном. Изучая рассеяние пучка электронов на кристалле никеля, ученые обнаружили дифракционную картину, подобную той, которая возникает при дифракции на кристалле коротковолнового рентгеновского излучения. Вычисленная из условия дифракционного максимума длина волны электронов совпала с длиной волны, вычисленной по формуле де Бройля (15.5.1).

В 1948 году советскими учеными В. Фабрикантом, Л. Биберманом и Н. Сушкиным было показано, что волновыми свойствами обладает не только пучок, но и отдельные электроны. В своих опытах они использовали настолько слабый пучок электронов, что среднее время между испусканием двух электронов в 30 000 раз превышало время прохождения через устройство одного электрона.

Дифракция электронов и возникающая при этом дифракционная картина не означают, что каждый электрон «размазывается» по всем направлениям. Он ведет себя как целая частица, но вероятность его отклонения при взаимодействии с препятствием зависит от направления. Вероятность отклонения максимальна по тем направлениям, где, согласно расчетам, должны быть максимумы дифракции, и минимальна по направлениям минимумов.

Итак, согласно квантовомеханическим представлениям, одни и те же микрообъекты в одних случаях ведут себя как частицы, в других — как волны. Некоторые свойства частиц вообще не могут быть описаны ни корпускулярной, ни волновой теориями, а требуют введения совершенно новых понятий.

Согласно законам классической физики всякое макроскопическое тело, движущееся вдоль оси  $x$ , в любой момент имеет опре-

<sup>1</sup> Формула (15.5.1) соответствует нерелятивистскому случаю, то есть справедлива при скоростях частицы, намного меньших скорости света ( $v \ll c$ ).

деленное значение координаты  $x$  центра тяжести и обладает определенным импульсом  $P_x = mv_x$ .

В квантовой механике такое описание состояния частиц, обладающих волновыми свойствами, оказывается невозможным. Импульс частицы не связан с ее координатами, так как понятие «координата волны» не имеет физического смысла. Поэтому понятие траектории частицы, для которой каждому значению координат соответствует точное значение ее импульса, также лишено физического смысла

Неточность (неопределенность)  $\Delta x$  в определении координаты частицы  $x$  связана с неточностью (неопределенностью)  $\Delta P_x$  в определении проекции  $P_x$  ее импульса соотношением неопределенностей Гейзенберга<sup>1</sup>

$$\Delta x \Delta P_x \geq \frac{h}{2\pi}, \quad (15.5.2)$$

и соответственно для движения вдоль осей  $y$  и  $z$

$$\Delta y \Delta P_y \geq \frac{h}{2\pi}; \quad \Delta z \Delta P_z \geq \frac{h}{2\pi}. \quad (15.5.3)$$

Из этих соотношений видно, что чем меньше  $\Delta x$ , то есть чем точнее определяется координата частицы, тем больше  $\Delta P_x$ , то есть более неопределенным становится импульс частицы. Справедливо и обратное утверждение. Так как в силу соотношения неопределенностей  $\Delta x$  и  $\Delta P_x$  не могут одновременно равняться нулю, то отсюда следует, что у микрочастиц принципиально невозможно одновременно определить точные значения координаты и импульса.

Наглядное представление о принципе неопределенности можно получить, если провести аналогию между ним и дифракцией света на щели. Из формулы (13.3.3) следует, что при увеличении ширины щели (в нашем случае — увеличении  $\Delta x$ ) ширина дифракционных максимумов уменьшается, то есть уменьшается неопределенность в импульсе частиц.

Подобные соотношения существуют и между другими парами физических величин, относящихся к микрочастицам. Например, если микрочастица в течение времени  $\Delta t$  находится в нестационарном состоянии, то энергия  $E$  этого состояния может быть определена лишь с точностью до  $\Delta E$ , так как

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{2\pi}. \quad (15.5.4)$$

<sup>1</sup> Принцип неопределенностей открыт в 1927 году немецким физиком Вернером Гейзенбергом.

Если частица находится в состоянии с точным значением энергии  $E$  ( $\Delta E = 0$ ), она будет находиться в этом состоянии неопределенно долгое время, поскольку в данном случае  $\Delta t \rightarrow \infty$ , что и будет стационарным состоянием.

## § 15.6. ВОЛНОВАЯ ФУНКЦИЯ. УРАВНЕНИЕ ШРЕДИНГЕРА

Поскольку движение элементарной частицы уподобляется волновому процессу, то ее состояние в квантовой механике описывается некоторой функцией координат и времени:  $\psi(x, y, z, t)$ , называемой волновой или пс-функцией. В стационарном случае, то есть если силовое поле, действующее на частицу, не зависит от времени, можно произвести разделение переменных и волновую функцию представить в виде

$$\psi(x, y, z, t) = f(t) \psi(x, y, z). \quad (15.6.1)$$

Волновая функция является вероятностной характеристикой состояния частицы. Согласно статистической интерпретации волн де Бройля, вероятность нахождения  $dW$  частицы в бесконечно малом объеме  $dV = dx dy dz$ , в пределах которого значение  $\psi$ -функции можно считать постоянным, пропорциональна объему и зависит от квадрата модуля  $\psi$ -функции:

$$dW = |\psi|^2 dV, \quad (15.6.2)$$

откуда следует *физический смысл волновой функции*:

$$|\psi|^2 = \frac{dW}{dV}, \quad (15.6.3)$$

то есть квадрат модуля волновой функции равен плотности вероятности нахождения частицы в объеме  $dV$ . Из формулы (15.6.2) находим вероятность нахождения частицы в некотором заданном объеме  $V^*$ :

$$W = \int_{V^*} |\psi|^2 dV. \quad (15.6.4)$$

Вероятность обнаружения частицы во всем объеме  $V$  равна единице (частицу всегда можно в этом объеме найти):

$$W = \int_V |\psi|^2 dV = 1. \quad (15.6.5)$$

Условие (15.6.5) называется *условием нормировки*.

Вид функции  $\psi$  для различных случаев движения и взаимодействия микрочастиц определяется с помощью основного уравнения квантовой механики — *уравнения Шредингера*. В случае стационарных состояний движения частицы уравнение Шредингера имеет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} [E - U(x, y, z)] \psi = 0, \quad (15.6.6)$$

где  $E$  — полная энергия частицы;  $U$  — ее потенциальная энергия, определяемая силовым полем, в котором находится частица.

Решения этого уравнения  $\psi(x, y, z)$ , называемые *собственными функциями*, существуют только при определенных значениях энергии  $E_n$ , которые называются *собственными значениями*. Набор собственных значений образует *энергетический спектр* частицы.

В одномерном случае (частица перемещается только вдоль оси  $Ox$ ) уравнение Шредингера принимает вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} [E - U(x)] \psi = 0. \quad (15.6.7)$$

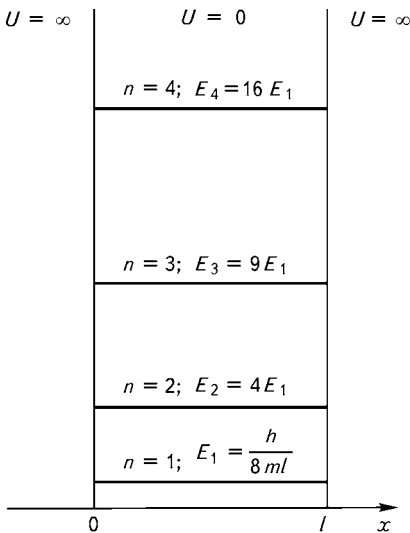


Рис. 15.6.1. Собственные значения энергии  $E_i$  частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме

Одним из самых простых примеров использования уравнения Шредингера является *задача о движении частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме*. Пусть микрочастица свободно движется в пределах потенциальной ямы шириной  $l$ , ограниченной полностью отражающими бесконечно высокими потенциальными стенками. В промежутке  $0 < x < l$  потенциал  $U = 0$  (внутри этого интервала на частицу не действуют силовые поля), а в точках  $x = 0$  и  $x = l$   $U = \infty$  (там частицы нет) (рис. 15.6.1). Тогда уравнение Шредингера (15.6.7) с учетом  $U = 0$  для интервала  $0 < x < l$  примет вид:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2} E\psi = 0. \quad (15.6.8)$$

Уравнение (15.6.8) может быть сведено к виду, аналогичному дифференциальному уравнению гармонических колебаний:

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \omega^2\psi = 0, \quad (15.6.9)$$

где

$$\omega^2 = \frac{8\pi^2m}{h^2} E. \quad (15.6.10)$$

Решение уравнения (15.6.9) имеет вид:

$$\psi = \psi_0 \sin(\omega x + \varphi_0), \quad (15.6.11)$$

где  $\psi_0$  — амплитуда волновой функции;  $\varphi_0$  — ее начальная фаза.

Чтобы найти  $\psi_0$  и  $\varphi_0$ , воспользуемся граничными условиями. При  $x = 0$   $\psi = 0$

$$\psi(0) = \psi_0 \sin \varphi_0 = 0, \quad (15.6.12)$$

откуда получаем:

$$\varphi_0 = 0 \quad (15.6.13)$$

(единственное значение, имеющее физический смысл).

Из условия  $x = l$   $\psi = 0$  с учетом, что  $\varphi_0 = 0$ , получаем:

$$\psi(l) = \psi_0 \sin \omega l = 0, \quad (15.6.14)$$

$$\omega l = \pm n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad n \neq 0 \quad (15.6.15)$$

( $n \neq 0$ , так как в этом случае при любых значениях  $x$   $\psi = 0$ , то есть частицы нигде нет).

Решая совместно уравнения (15.6.10) и (15.6.15), получаем значение энергии  $E_n$ :

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ml^2}. \quad (15.6.16)$$

С учетом формул (15.6.13) и (15.6.15) уравнение (15.6.11) сводится к виду:

$$\psi = \psi_0 \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (15.6.17)$$

Для нахождения коэффициента  $\psi_0$  воспользуемся условием нормировки (15.6.5), которое для одномерного случая переписывается в виде:

$$\psi_0^2 \int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx = 1. \quad (15.6.18)$$

На концах промежутка интегрирования подынтегральная функция обращается в ноль. В этом случае значение определенного интеграла можно вычислить, умножив среднее значение подынтегральной функции на длину промежутка интегрирования. Среднее значение квадрата синуса равно  $1/2$ , то есть  $\left\langle \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \right\rangle = \frac{1}{2}$ ;  $\int_0^l \sin^2 \frac{n\pi}{l} x \, dx = \frac{1}{2} l$ .

Получаем:

$$\psi_0^2 \left( \frac{1}{2} l \right) = 1, \quad (15.6.19)$$

откуда

$$\psi_0 = \sqrt{\frac{2}{l}}. \quad (15.6.20)$$

Таким образом, решение уравнения (15.6.8) имеет вид:

$$\psi_n = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (15.6.21)$$

а собственные значения энергии частицы равны

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ml^2}. \quad (15.6.22)$$

Из формулы (15.6.22) следует, что энергия принимает дискретные значения (то есть квантована), пропорциональные квадрату целого числа  $n$ , называемого *главным квантовым числом* (см. § 15.7). Спектр энергий частицы в прямоугольной яме показан на рис. 15.6.1.

Вычислим разность между соседними энергетическими уровнями:

$$\Delta E = E_{n+1} - E_n = \frac{(n+1)^2 h^2}{8ml^2} - \frac{n^2 h^2}{8ml^2} = \frac{(2n+1) h^2}{8ml^2}. \quad (15.6.23)$$

Рассчитаем значение  $\Delta E$  для некоторых случаев. При  $n = 1$ ,  $l = 10^{-2}$  м (такая широкая потенциальная яма соответствует случаю движения свободных электронов в металле)

$$\Delta E = 1,81 \cdot 10^{-33} \text{ Дж} \approx 10^{-14} \text{ эВ}.$$



Настолько малая разность между энергетическими уровнями обозначает, что энергетический спектр свободного электрона можно считать практически сплошным.

При  $n = 1$ ,  $l = 10^{-10}$  м, что соответствует размерам атома, получаем:

$$\Delta E = 1,81 \cdot 10^{-17} \text{ Дж} \approx 10^2 \text{ эВ},$$

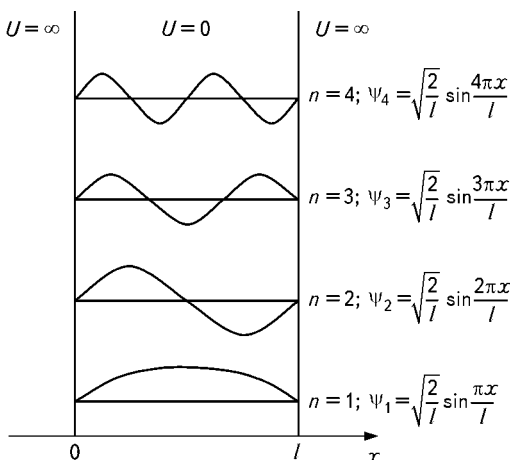


Рис. 15.6.2. Волновые функции  $\psi$ , частицы в одномерной прямоугольной потенциальной яме

то есть при движении электрона в пределах атома квантование энергии значительно.

Графики волновых функций (15.6.21) частицы в прямоугольной яме приведены на рис. 15.6.2. Вероятность обнаружения частицы в том или ином месте потенциальной ямы представлена на рис. 15.6.3. Как видно из рисунка, в наинизшем энергетическом состоянии ( $n = 1$ ) частицу можно с наибольшей ве-

роятностью обнаружить в центре потенциальной ямы; при  $n = 2$  — в середине правой или левой половины и т. д. Исходя из классических представлений, такое поведение частицы объяснить невозможно: любое ее положение в прямоугольной потенциальной яме равновероятно. При увеличении энергии частицы количество максимумов вероятности возрастает. При очень больших  $n$  максимумы практически сливаются, и частицу можно с одинаковой вероятностью обнаружить в любом месте ямы.

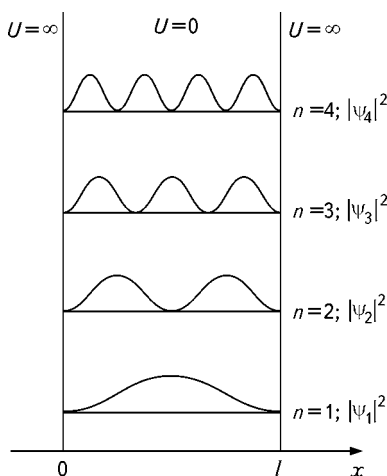


Рис. 15.6.3. Вероятность  $|\psi_n|^2$  обнаружения частицы в том или ином месте потенциальной ямы

## § 15.7. КВАНТОВЫЕ ЧИСЛА. ПРИНЦИП ПАУЛИ

Одна из особенностей квантовомеханических систем — дискретность состояний — объясняется тем, что уравнение Шредингера (15.6.6) имеет целый набор решений, каждому из которых отвечают определенные квантовые числа. В отличие от электрона в потенциальной яме, характеризуемого одним квантовым числом  $n$ , каждое энергетическое состояние электрона в атоме описывается четырьмя квантовыми числами, которые и определяют возможные дискретные значения физических величин — энергии и импульса, характеризующих квантовые системы.

Решив уравнение Шредингера для электрона в атоме водорода, можно получить уже известное нам выражение (15.1.10), описывающее энергетические состояния электрона в атоме и включающее первое квантовое число — *главное число*  $n$ .

Таким образом, *главное квантовое число*  $n$  характеризует энергетические состояния электронов и принимает целые положительные значения, то есть  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

Второе квантовое число — *орбитальное квантовое число*  $l$  — определяет орбитальный момент импульса электрона  $L_l$  относительно ядра:

$$L_l = \frac{h}{2\pi} \sqrt{l(l+1)}. \quad (15.7.1)$$

При данном  $n$  квантовое число  $l$  может принимать значения  $l = 1, 2, 3, \dots, (n-1)$ .

Третье квантовое число — *магнитное квантовое число*  $m_l$  — определяет проекции орбитального момента импульса электрона на некоторое произвольно выбранное направление  $z$ :

$$L_{lz} = \frac{h}{2\pi} m_l. \quad (15.7.2)$$

При данном  $l$  квантовое число  $m_l$  может принимать следующие значения:  $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ , то есть всего  $(2l+1)$  значений.

Четвертое квантовое число — *спиновое квантовое число*  $m_s$  — определяет возможные значения проекции собственного механического момента (*спина*) электрона на некоторое произвольное направление  $z$ :

$$L_{sz} = \frac{h}{2\pi} m_s. \quad (15.7.3)$$

Спиновое квантовое число электрона может принимать только два значения:  $m_s = \pm 1/2$ .

Для всех частиц, обладающих полужелым спином, справедлив принцип Паули: в данной квантовой системе в одном и том же квантовом состоянии не может находиться более одной частицы.

Число состояний с заданными квантовыми числами  $n$  и  $l$  будет равно

$$N_{n,l} = 2(2l + 1). \quad (15.7.4)$$

Общее число состояний на некотором энергетическом уровне с данным квантовым числом  $n$  следующее:

$$N_n = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2[1 + 3 + 5 + \dots + (n - 1)] = 2n^2. \quad (15.7.5)$$

Совокупность электронов, обладающих одним и тем же главным квантовым числом  $n$ , называется *слоем* и обозначается прописными буквами  $K, L, M, N, O$  и т. д. Например, слой с  $n = 1$  называется  $K$ -слоем, слой с  $n = 2$  —  $L$ -слоем. Согласно формуле (15.7.5), в  $K$ -слое могут находиться не более двух электронов, в  $L$ -слое — не более 8, в  $M$ -слое — не более 18 и т. д.

Совокупность электронов, имеющих одинаковые квантовые числа  $n$  и  $l$ , называется *оболочкой*. В оболочке электроны распределяются по *подоболочкам*, каждая из которых соответствует определенному значению орбитального квантового числа  $l$ :  $s$ -подоболочки,  $p$ -,  $d$ -,  $f$ -, ..., соответствующие значениям  $l = 0, 1, 2, 3, \dots$ . Из формулы (15.7.4) следует, что в слое может быть два  $s$ -электрона, шесть  $p$ -электронов, 10  $d$ -электронов, 14  $f$ -электронов и т. д.

Состояния электронов в атоме обозначают символами, включающими значение главного квантового числа  $n$  и символа подоболочки. Например,  $2s$  ( $n = 2, l = 0$ );  $1p$  ( $n = 1, l = 1$ );  $3d$  ( $n = 3, l = 2$ ).

## § 15.8. РЕНТГЕНОВСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

**Рентгеновское излучение** представляет собой электромагнитные волны, занимающие спектральную область между ультрафиолетовым и гамма-излучением в пределах длин волн от  $10^{-7}$  до  $10^{-14}$  м. В качестве источника рентгеновского излучения используется рентгеновская трубка — двухэлектродный вакуумный прибор, в котором вылетающие из накаливаемого катода и ускоренные

электрическим полем электроны попадают на металлический анод (антикатод). При торможении быстрых электронов под действием

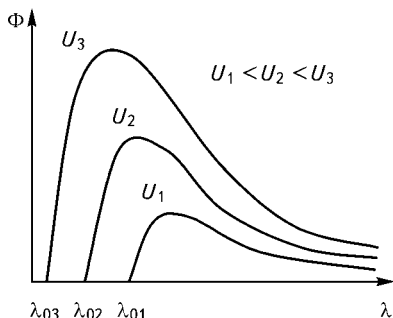


Рис. 15.8.1. Спектр тормозного рентгеновского излучения (зависимость потока излучения  $\Phi$  от длины волны  $\lambda$ ) при различных напряжениях  $U$  в рентгеновской трубке:

$\lambda_{01}$ ,  $\lambda_{02}$  и  $\lambda_{03}$  — коротковолновые границы спектров, соответствующие напряжениям  $U_1$ ,  $U_2$  и  $U_3$

новой границы  $\lambda_0$ , на которой энергия  $eU$  бомбардирующих антикатод электронов полностью передается квантам рентгеновского излучения  $h\nu_0$ , то есть

$$eU = h\nu_0 = \frac{hc}{\lambda_0}, \quad (15.8.1)$$

где  $U$  — разность потенциалов ускоряющего электрического поля, приложенная к электродам рентгеновской трубки;  $\nu_0$  — частота излучения, соответствующая коротковолновой границе.

Из формулы (15.8.1) следует, что длина волны, соответствующая коротковолновой границе спектра, равна

$$\lambda_0 = \frac{hc}{eU}. \quad (15.8.2)$$

Из формулы (15.8.2) видно, что, изменяя напряжение на трубке, можно изменять положение коротковолновой границы  $\lambda_0$  в спектре и, следовательно, спектральный состав излучения (рис. 15.8.1).

*Линейчатый рентгеновский спектр*, в котором появляются резкие максимумы, возникает при передаче энергии ускоренных электронов внутренним, близким к атомному ядру электронам вещества анода. При этом внутренние электроны выбрасываются в область свободных состояний, а на их места переходят электро-

электростатического поля вещества анода, как следует из теории Максвелла (см. § 9.10), излучаются электромагнитные волны — возникает *тормозное рентгеновское излучение*.

При торможении электронов часть их кинетической энергии расходуется на создание фотона рентгеновского излучения, а часть — на нагревание анода. Соотношение между энергией фотонов и тепловой энергией случайно. Поэтому спектр рентгеновского излучения сплошной (рис. 15.8.1).

Интенсивность тормозного рентгеновского излучения распределена по всем длинам волн, вплоть до некоторой коротковол-

ны с внешних энергетических уровней, излучая кванты электромагнитного излучения определенной частоты (*первичное рентгеновское излучение*). Частоты этого излучения характерны для атомов каждого элемента и не зависят от того, в какое химическое соединение входит данный атом, поэтому такой спектр еще называется *x p a k т е - р и с т и ч е с к и м*. В *K*-слой могут перейти электроны из *L*-, *M*-, *N*-слоев, в *L*-слой — электроны из *M*-, *N*-слоев и т. д. Соответственно характеристический рентгеновский спектр содержит *K*-серию, *L*-серию и т. д. Каждая из серий состоит из линий  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  и так далее, которые излучаются электронами при переходе с верхних уровней на один из нижних. Например, линия  $K_\alpha$  излучается при переходе электрона из *L*-слоя в *K*-слой; линия  $K_\beta$  — из *M*-слоя в *K*-слой; линия  $L_\gamma$  — из *M*-слоя в *L*-слой и т. д.

Зависимость частоты излучения  $\nu$  (или длины волны  $\lambda$  соответственно) для любой линии рентгеновского спектра от атомного номера элемента  $Z$  определяется *законом Мозли*:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = Rc(Z - b)^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right), \quad (15.8.3)$$

где  $Z$  — порядковый номер элемента, из которого сделан антикатод;  $b$  — постоянная экранирования;  $m$  и  $k$  — номера уровней, между которыми осуществляется переход.

Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной  $x$ , определяется формулой:

$$I = I_0 e^{-\mu x}, \quad (15.8.4)$$

где  $I_0$  — интенсивность пучка, падающего на пластинку;  $\mu$  — *линейный коэффициент поглощения*,  $[\mu] = \text{м}^{-1}$ .

Линейный коэффициент поглощения  $\mu$  зависит от длины волны рентгеновских лучей и от плотности вещества. Поэтому удобнее пользоваться *массовым коэффициентом поглощения*  $\mu_m$ , не зависящим от плотности и связанным с линейным коэффициентом  $\mu$  соотношением

$$\mu_m = \frac{\mu}{\rho}, \quad (15.8.5)$$

где  $\rho$  — плотность материала.

Поскольку длина волны рентгеновского излучения имеет порядок межатомных расстояний в твердом теле  $\lambda \sim 10^{-10}$  м, то кристалл является естественной дифракционной решеткой для рентгеновского излучения. Условие дифракции рентгеновских лучей на кристалле называется *условием Вульфа—Брэгга*:

$$2d \sin \theta = n\lambda, \quad (15.8.6)$$

где  $d$  — расстояние между соседними атомными плоскостями кристалла, на которых наблюдается дифракция;  $\theta$  — брэгговский угол между атомной плоскостью и падающим на нее (или отраженным) рентгеновским лучом;  $n = 1, 2, 3, \dots$  — порядок дифракции.

Условие Вульфа—Брэгга лежит в основе рентгеноструктурного анализа (подробнее см. § 18.6). Явление дифракции рентгеновских лучей позволяет с высокой точностью определять значение постоянной Планка с помощью формул (15.8.6) и (15.5.1).

Рентгеновское излучение находит широкое применение в медицине как в диагностических, так и терапевтических целях (подробнее см. § 16.12).

## § 15.9. ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ С ВЕЩЕСТВОМ

*Ионизирующее излучение* (дальняя область ультрафиолетового излучения, рентгеновское и  $\gamma$ -излучение) обладает достаточной энергией для того, чтобы вызвать ионизацию атомов и молекул, и, как следствие, способно привести к наиболее опасным для биологических структур последствиям: поражению и инактивации отдельных структур и гибели организма, а также мутациям.

Ядерные излучения ( $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -лучи, протоны, нейтроны), взаимодействуя с электронами атомов или ядрами, способны оказывать разнообразные воздействия на вещества. Заряженные частицы и гамма-кванты, взаимодействуя с электронами, могут ионизировать атомы и возбуждать их, а также разрушать молекулы. Эти явления существенно влияют на ход многих химических реакций и могут стимулировать такие реакции, которые не происходят в обычных условиях.

Естественный радиоактивный фон создается космическим излучением и излучением радиоактивных изотопов земной коры. В последнее время появились искусственные источники излучения, используемые в энергетике, военно-промышленном комплексе, а также в медицине (рентгеновские и  $\gamma$ -установки).

Рентгеновское излучение возникает при торможении ускоренных электронов в веществе,  $\gamma$ -излучение — при переходе атомных ядер из возбужденного состояния в основное или при аннигиляции электронно-позитронной пары, а также при распаде некоторых частиц. При взаимодействии этих видов излучения с веществом возможны следующие эффекты: фотоэффект, эффект Комптона и эффект образования пары электрон—позитрон.

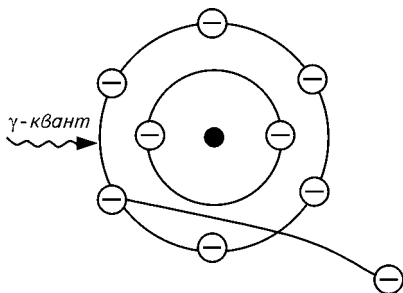


Рис. 15.9.1. Схема фотоэффекта

При **фотоэффекте** квант рентгеновского или  $\gamma$ -излучения выбивает электрон из электронной оболочки атома (рис. 15.9.1). Для того чтобы это произошло, энергия падающего фотона  $h\nu$  должна превышать энергию связи электрона в атоме  $W$ . Квант полностью передает энергию атому, расходуя ее на работу  $A$  выхода электрона и сообщая ему некоторой кинетической энергии  $E_{\text{кин}}$ :

$$E_{\text{кин}} = h\nu - A. \quad (15.9.1)$$

Вероятность фотоэффекта увеличивается с ростом заряда ядра и приближением энергии кванта света к энергии связи электрона в атоме.

В случае **эффекта Комптона** (рис. 15.9.2) квант, сталкиваясь с атомом, расходует часть своей энергии на выбивание электрона и продолжает свое движение, но уже в другом направлении и обладая меньшим количеством энергии. Такой фотон называется *рассеянным*, а выбитый электрон — *комптоновским электроном*, или *электроном отдачи*. Рассеянный фотон способен взаимодействовать с другими атомами и вызывать новые эффекты Комптона или фотоэффект.

Чем меньше длина волны падающего фотона, то есть чем больше его энергия, тем больше вероятность эффекта Комптона и меньше вероятность фотоэффекта. В результате нескольких последовательных эффектов Комптона энергия рассеянных фотонов постепенно уменьшается по сравнению с первичным фотоном и возрастает вероятность фотоэффекта.

**Эффект образования пар.** Если энергия фотона превышает 1,022 МэВ, то взаимодействие падающего кванта с полем ядра может привести к превращению кванта в две частицы: электрон и позитрон — эффект образования пар (рис. 15.9.3):

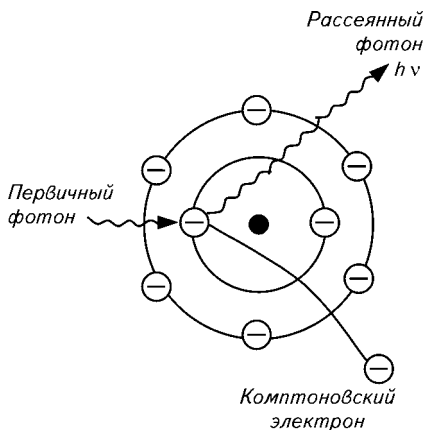


Рис. 15.9.2. Схема эффекта Комптона

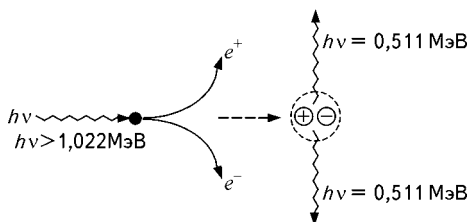


Рис. 15.9.3. Схема эффекта образования электронно-позитронных пар

$$h\nu \rightarrow e^- + e^+.$$

Энергия, равная 1,022 МэВ, расходуется на превращение в массу покоя электрона и позитрона, а оставшая часть энергии кванта — на сообщение кинетической энергии образующимся частицам.

$$h\nu = E_{\text{кин. } e^-} + E_{\text{кин. } e^+} + 1,022 \text{ МэВ}, \quad (15.9.2)$$

где  $E_{\text{кин. } e^-}$  — кинетическая энергия электрона;  $E_{\text{кин. } e^+}$  — кинетическая энергия позитрона.

Возможен и обратный эффект, когда электрон и позитрон аннигилируют, в результате чего появляются два  $\gamma$ -кванта:

$$e^- + e^+ \rightarrow 2\gamma. \quad (15.9.3)$$

Энергия каждого из образующихся квантов составляет не менее 0,511 МэВ.

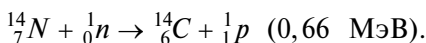
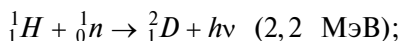
Вероятность эффекта образования пар зависит не только от энергии кванта, но и от заряда ядра  $z$ . Чем больше величина  $z$ , тем выше вероятность образования пары. В состав биологических систем в основном входят легкие ядра, поэтому эффект образования пар происходит редко по сравнению с другими эффектами (фотоэффектом и эффектом Комптона).

В процессе фото-, Комптон-эффектов и образования пары происходит первичная ионизация атомов. Выбитые электроны в процессе своего движения могут отдавать свою энергию атомам и тем самым приводить к их возбуждению и ионизации, в результате чего порождаются вторичные электроны. Многократно взаимодействуя с атомами, электрон постепенно теряет свою энергию до тех пор, пока она не снизится настолько, что электрон захватится каким-нибудь нейтральным атомом и образует с ним отрицательный ион.

Помимо рентгеновских и  $\gamma$ -лучей, к ионизирующему излучению относят также потоки  $\alpha$ -частиц (ядер атомов гелия),  $\beta$ -частиц (электронов и позитронов), протонов, нейтронов и др. Заряженные частицы, взаимодействуя с электрическими полями электронов, способны перевести атомы в возбужденное состояние либо ионизировать их. Нейтроны, так как они не обладают зарядом, могут вызывать ионизацию атомов лишь косвенным путем. Например, поглощение нейтрона ядром атома (чаще всего водорода, иногда азота, углерода, кислорода) приводит к увеличению кинетической



энергии последнего. Образующееся так называемое *ядро отдачи*, взаимодействуя с другими атомами, может вызвать их ионизацию. Иногда только часть энергии нейтрона идет на сообщение ядру кинетической энергии, а другая часть — на возбуждение ядра. Переход ядра из возбужденного состояния в основное сопровождается излучением  $\gamma$ -квантов. При низких скоростях нейтронов их взаимодействие с веществом может привести к ядерным реакциям, в результате которых образуются  $\gamma$ -кванты и заряженные частицы:



В процессе прохождения через вещество ионизирующее излучение теряет свою энергию и передает ее веществу. Средняя энергия, переданная веществу на единице длины пробега, называется *линейной передачей энергии*. Расстояние, которое излучение проходит в веществе, сохраняя способность к ионизации (средний линейный пробег), характеризует *проникающую способность излучения*. Отношение числа пар ионов  $N$ , образованных излучением на длине пробега  $l$  (*линейная плотность ионизации*  $i$ ),

$$i = \frac{dN}{dl}, \quad (15.9.4)$$

характеризует ионизирующую способность излучения. Чем больше заряд и масса частицы, тем выше ее ионизирующая и меньше проникающая способности. Эти величины также зависят от плотности облучаемого вещества и различны для  $\alpha$ -,  $\beta$ -,  $\gamma$ -излучения.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 15.1.** Определите границы серии Бальмера атома водорода ( $Z = 1$ ) в частотах  $\nu$  и длинах  $\lambda$  волн.

**Решение.** Из формулы Бальмера (15.1.14) определяем частоту  $\nu$ , учитывая, что  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ .

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = R'cZ^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right),$$

где  $c$  — скорость света в вакууме;  $R' = 1,1 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$  — постоянная Ридберга;  $k$  и  $n$  — номера начальной и конечной орбит соответственно.

Для серии Бальмера  $n = 2$ , наименьшая частота излучения (наибольшая длина волны) будет наблюдаться при  $k = 3$ :

$$\nu = 1,1 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1^2 \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = 4,58 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1},$$

что соответствует длине волны

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{4,58 \cdot 10^{14}} = 6,55 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Наибольшая частота излучения (наименьшая длина волны) будет наблюдаться при  $k = \infty$ :

$$\nu = 1,1 \cdot 10^7 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 1^2 \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{[\infty]^2} \right) = 8,25 \cdot 10^{14} \text{ с}^{-1},$$

что соответствует длине волны

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \cdot 10^8}{8,25 \cdot 10^{14}} = 3,64 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

Таким образом, серия Бальмера расположена в видимой и ближней ультрафиолетовой области спектра.

**Задача 15.2.** Определите дефект массы  $\Delta m$  и энергию связи  $\Delta E$  для ядра атома трития (изотопа водорода)  ${}^3_1\text{T}$ .

**Решение.** Согласно формуле (15.2.5), дефект массы — разность между массой частиц, составляющих ядро, и массой самого ядра равна:

$$\Delta m = Zm_{1p} + (A - Z)m_n - m_{at},$$

где  $m_{1p} = 1,007825$  а. е. м. — масса изотопа водорода  ${}^1_1\text{p}$ ;

$m_n = 1,008665$  а. е. м. — масса нейтрона;

$m_{at}$  — масса атома, которая для трития равна  $3,01605$  а. е. м;

$Z$  — заряд ядра в единицах элементарного заряда, для трития  $Z = 1$ ;

$N$  — количество нейтронов в ядре, для трития  $N = 2$ .

Для вычислений будем использовать массы атомов  $m_{at}$ , а не ядер, так как, во-первых, экспериментально можно определить только массу атома, а не ядра. Во-вторых, масса всех электронов данного атома с зарядом  $Ze$  входит в первое слагаемое со знаком (+), а в третье — со знаком (–) и поэтому сокращается.

Подставим численные данные:

$$\begin{aligned} \Delta m &= 1 \cdot 1,007825 + (3 - 1) \cdot 1,008665 - 3,01605 = 0,009105 \text{ а. е. м.} = \\ &= 1,5118 \cdot 10^{-29} \text{ кг.} \end{aligned}$$

Энергия связи ядра изотопа определяется соотношением:

$$\Delta E = \Delta mc^2,$$

где  $c = 2,997925 \cdot 10^8$  м/с — скорость света в вакууме.

$$\Delta E = 1,5118 \cdot 10^{-29} \cdot (2,997925 \cdot 10^8)^2 = 1,35874 \cdot 10^{-12} \text{ Дж.}$$

**Задача 15.3.** Вычислите постоянную распада  $\lambda$  и активность  $a$  массы  $m = 1$  г изолированного изотопа радия  $^{226}_{88}\text{Ra}$ . Определите время, через которое активность упадет на 10 %. Период полураспада  $^{226}_{88}\text{Ra}$  составляет  $T_{1/2} = 1620$  лет.

**Решение.** Из формулы (15.2.21) получаем, что постоянная распада равна

$$\lambda = \frac{\ln 2}{T_{1/2}}.$$

$$\lambda = \frac{0,693}{1620 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600} = 1,354 \cdot 10^{-11} \text{ с}^{-1}.$$

Согласно формуле (15.2.23), активность изотопа равна

$$a = \lambda N,$$

где  $N$  — число атомов изотопа, равное

$$N = \frac{mN_A}{M}.$$

Тогда

$$a = \frac{\lambda m N_A}{M},$$

$$a = \frac{1,354 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-3} \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{226 \cdot 10^{-3}} = 3,61 \cdot 10^{10} \text{ Бк} = 0,976 \text{ Ки.}$$

Определим время, за которое активность снизится на 10 %, то есть когда число атомов  $N$  станет равным  $0,9N_0$ . По закону радиоактивного распада —

$$N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

Тогда

$$0,9N_0 = N_0 e^{-\lambda t},$$

отсюда

$$t = \frac{\ln(1/0,9)}{\lambda},$$

$$t = \frac{0,105}{1,354 \cdot 10^{-11}} = 7,78 \cdot 10^9 \text{ с} \approx 247 \text{ лет.}$$

**Задача 15.4.** Заряженная частица, ускоренная разностью потенциалов  $U = 200$  В, имеет длину волны де Бройля  $\lambda_B = 2,02$  пм и заряд  $e$ , численно равный заряду электрона. Определите ее массу  $m$ .

**Решение.** Согласно формуле (15.5.1),

$$\lambda_B = \frac{h}{mv}. \quad (15.1)$$

Скорость  $v$  вычисляем из условия, что кинетическая энергия  $\frac{mv^2}{2}$  частицы с зарядом  $e$ , прошедшей разность потенциалов  $U$ , равна  $eU$ , т. е.

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}}. \quad (15.2)$$

Подставив (15.2) в (15.1), получаем

$$\lambda_B = \frac{h}{m\sqrt{\frac{2eU}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{2eUm}},$$

откуда выразим массу частицы:

$$m = \frac{h^2}{2eU\lambda_B}.$$

Подставив численные данные в единицах СИ, получаем:

$$m = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 200 \cdot (2,02 \cdot 10^{-12})^2} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}.$$

Полученное значение равно массе протона.

**Задача 15.5.** Во сколько раз уменьшится интенсивность рентгеновских лучей с длиной волны  $\lambda = 20$  пм при прохождении слоя железа толщиной  $x = 0,15$  мм? Массовый коэффициент поглощения железа для этой длины волны  $\mu_m = 1,1 \text{ м}^2/\text{кг}$ .

**Решение.** Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших через слой толщиной  $x$ , определяется формулой:

$$I = I_0 e^{-\mu x},$$

где  $\mu$  — линейный коэффициент поглощения.

$$\mu = \rho \mu_m,$$

где  $\rho$  — плотность железа.

Тогда изменение интенсивности составит:

$$\frac{I_0}{I} = e^{\rho \mu_m x} = \exp(7,9 \cdot 10^3 \cdot 1,1 \cdot 1,5 \cdot 10^{-4}) = 3,7.$$

То есть интенсивность рентгеновских лучей уменьшится в 3,7 раза.

## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

15.1. Определите радиус  $r_2$  второй боровской орбиты атома водорода.

15.2. Определите линейную  $v$  и угловую  $\omega$  скорости движения электрона на третьей боровской орбите атома водорода.

15.3. Определите частоту  $\nu$  и период  $T$  вращения электрона на первой боровской орбите атома водорода.

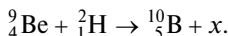
15.4. Определите кинетическую  $E_{\text{кин}}$ , потенциальную  $E_{\text{пот}}$  и полную  $E_1$  энергию электрона на первой боровской орбите атома водорода.

15.5. Вычислите потенциал  $U_{\text{и}}$  ионизации<sup>1</sup> атома водорода.

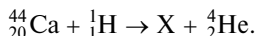
15.6. Определите дефект массы  $\Delta m$  ядра атома углерода  $^{14}_{12}\text{C}$ .

15.7. Вычислите энергию связи  $\Delta E$  ядра атома гелия  $^4_2\text{He}$ .

15.8. Определите заряд  $Z$  и массовое число  $A$  частицы, обозначенной буквой  $x$ , в ядерной реакции:



15.9. Определите порядковый номер  $Z$  и массовое число  $A$  элемента, обозначенного буквой  $X$ , в ядерной реакции:



15.10. Сколько  $\alpha$ - и  $\beta^-$ -частиц выбрасывается при превращении ядра урана  $^{238}_{92}\text{U}$  в ядро радия  $^{226}_{88}\text{Ra}$ ?

15.11. Определите постоянную распада  $\lambda$  радона  $^{222}_{86}\text{Rn}$ . Период полураспада  $T_{1/2} = 3,8$  сут.

15.12. Сколько процентов изотопов йода  $^{131}_{53}\text{I}$  распадется за 10 дней, если период полураспада этого изотопа  $T_{1/2} = 8$  сут?

15.13. Вычислите постоянную распада  $\lambda$  и период полураспада  $T_{1/2}$  изотопа актиния  $^{225}_{89}\text{Ac}$ , если известно, что за время  $t = 3,2$  сут распадается пятая часть начального количества атомов.

15.14. Вычислите активность  $a$  массы  $m = 1$  г изотопа полония  $^{210}_{84}\text{Po}$ , период полураспада которого  $T_{1/2} = 138$  сут.

15.15. Вычислите массу  $m$  радона  $^{222}_{86}\text{Rn}$  ( $T_{1/2} = 3,8$  сут), активность которого  $a = 10^{12}$  Бк.

15.16. Вычислите длину волны  $\lambda_0$ , соответствующую красной границе фотоэффекта для платины, если работа выхода электронов  $A = 6,3$  эВ.

15.17. Определите работу выхода  $A$  электронов из металла, если при облучении ультрафиолетом длиной волны  $\lambda = 166$  нм электроны полностью задерживаются разностью потенциалов  $U = 5$  В.

15.18. Определите энергию  $E$ , массу  $m$  и импульс  $p$  фотона, длина волны которого  $\lambda = 500$  нм.

<sup>1</sup> Потенциалом ионизации называется минимальная ускоряющая разность потенциалов, которую должен пройти бомбардирующий электрон, чтобы приобрести кинетическую энергию, достаточную для ионизации атома.

**15.19.** Какую ускоряющую разность потенциалов  $U$  должен пройти электрон, чтобы его импульс был равен импульсу  $\gamma$ -кванта с длиной волны  $\lambda = 1$  пм?

**15.20.** Определите длину волны де Бройля  $\lambda_B$ : а) электрона, движущегося со скоростью  $v = 100$  м/с; б) тела массой  $m = 1$  г, движущегося с той же скоростью.

**15.21.** Какую ускоряющую разность потенциалов  $U$  должен пройти электрон, чтобы длина волны де Бройля равнялась  $\lambda_B = 0,5$  нм?

**15.22.** Время пребывания электрона на возбужденном синглетном уровне (время жизни возбужденного состояния)  $\Delta t = 10^{-8}$  с. Вычислите неопределенность энергии  $\Delta E$  в этом состоянии.

**15.23.** Вычислите энергию  $E$  и орбитальный момент импульса  $L_l$   $1s$ ,  $2p$  и  $3d$  электронов в атоме водорода.

**15.24.** К рентгеновской трубке приложено напряжение  $U = 50$  кВ. Вычислите длину волны  $\lambda_0$ , соответствующую коротковолновой границе непрерывного рентгеновского спектра.

**15.25.** При прохождении рентгеновских лучей некоторой длины волны через пластинку алюминия толщиной  $x = 40$  мкм их интенсивность уменьшается вдвое. Вычислите массовый коэффициент ослабления  $\mu_m$  алюминия на этой длине волны, если его плотность  $\rho = 2600$  кг/м<sup>3</sup>.

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**15.1.** Условие квантования орбит имеет вид:

$$\text{а) } \frac{ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} = nh; \quad \text{г) } \frac{mv_n^2}{2} = nh;$$

$$\text{б) } mv_n r_n = n \frac{h}{2\pi}; \quad \text{д) } \frac{mv_n^2}{r_n} = n \frac{h}{2}.$$

$$\text{в) } mv_n r_n = (2n + 1) \frac{h}{2\pi};$$

**15.2.** Второй постулат Бора имеет вид:

$$\text{а) } E = h\nu; \quad \text{г) } h\nu = E_n + E_k;$$

$$\text{б) } h\nu = E_n - E_k; \quad \text{д) } E = mc^2.$$

$$\text{в) } \frac{mv_n^2}{r} = n \frac{h}{2\pi};$$

**15.3.** Радиус  $n$ -й орбиты электрона определяется следующей формулой:

$$\text{а) } r_n = \frac{nh^2 \epsilon_0}{\pi m^2 e^2 Z}; \quad \text{г) } r_n = \frac{h^2}{4\pi\epsilon_0 m^2};$$

$$\text{б) } r_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 m^2}; \quad \text{д) } r_n = \frac{Ze^2 m^2}{4\pi\epsilon_0}.$$

$$\text{в) } r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m Z e^2};$$

**15.4.** Формула Бальмера имеет вид:

$$\text{а) } \nu = R'cZ^2 \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{k^2} \right); \quad \text{г) } \nu = \lambda cZ^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right);$$

$$\text{б) } \nu = \lambda Z^2 \left( \frac{1}{n^2} + \frac{1}{k^2} \right); \quad \text{д) } \nu = hZ^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right).$$

$$\text{в) } \nu = R'cZ^2 \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2} \right);$$

**15.5.** В атомном ядре изотопа урана  ${}^{210}_{84}\text{Po}$  содержится количество нейтронов, равное:

а) 84; б) 126; в) 210; г) 294; д) 910.

**15.6.** Изменение энергии при ядерной реакции определяется соотношением:

$$\text{а) } \Delta E = c \left( \sum m_1 - \sum m_2 \right)^2; \quad \text{г) } \Delta E = c^2 \left( \sum m_1 - \sum m_2 \right);$$

$$\text{б) } \Delta E = c^2 / \left( \sum m_1 + \sum m_2 \right); \quad \text{д) } \Delta E = c^2 / \left( \sum m_1 - \sum m_2 \right).$$

$$\text{в) } \Delta E = c \left( \sum m_1 + \sum m_2 \right);$$

**15.7.** Закон радиоактивного распада имеет вид:

$$\text{а) } N = N_0^2 e^{\lambda t}; \quad \text{г) } N = T_{1/2} e^{-\lambda t};$$

$$\text{б) } N = N_0 \lambda t; \quad \text{д) } N = N_0 e^{-\lambda t}.$$

$$\text{в) } N = T_{1/2} e^{\lambda t};$$

**15.8.** Период полураспада  $T_{1/2}$  связан с постоянной радиоактивного распада  $\lambda$  следующим образом:

$$\text{а) } T_{1/2} = e^{\lambda}; \quad \text{г) } T_{1/2} = \frac{\lambda}{\ln 2};$$

$$\text{б) } T_{1/2} = \ln \lambda; \quad \text{д) } T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}.$$

$$\text{в) } T_{1/2} = e^{-\lambda};$$

**15.9.** Активность изотопа определяется по формуле ( $\lambda$  — постоянная радиоактивного распада;  $N$  — число нераспавшихся атомов):

$$\text{а) } a = \frac{\ln 2}{\lambda N}; \quad \text{г) } a = \lambda N^2;$$

$$\text{б) } a = \lambda N; \quad \text{д) } a = \frac{\ln N}{\lambda}.$$

$$\text{в) } a = \frac{\ln \lambda}{N};$$

**15.10.** Уравнение Эйнштейна для внешнего фотоэффекта:

$$\text{а) } E = h\nu; \quad \text{г) } h\nu = A + \frac{mv_{\max}^2}{2};$$

$$\text{б) } h\nu = \frac{c}{A} \left( \frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right); \quad \text{д) } h\nu = A + \frac{hc^2}{2}.$$

$$\text{в) } E = mc^2;$$

**15.11.** Длина волны, соответствующая красной границе фотоэффекта:

- |                                 |                                 |
|---------------------------------|---------------------------------|
| а) $\lambda_0 = h\nu$ ;         | г) $\lambda_0 = \frac{h}{A}$ ;  |
| б) $\lambda_0 = \frac{hc}{A}$ ; | д) $\lambda_0 = \frac{Ac}{h}$ . |
| в) $\lambda_0 = \frac{A}{h}$ ;  |                                 |

**15.12.** Величина, определяемая соотношением  $\frac{h\nu}{c}$  (где  $h$  — постоянная Планка;  $\nu$  — частота излучения;  $c$  — скорость света в вакууме), называется:

- а) временем жизни фотона;
- б) массой фотона;
- в) импульсом фотона;
- г) энергией фотона;
- д) моментом импульса фотона.

**15.13.** Элементарная частица обладает свойством плоской волны, распространяющейся в направлении движения этой частицы. Длина волны, соответствующая данной частице, определяется соотношением:

- |                 |               |
|-----------------|---------------|
| а) Гейзенберга; | г) де Бройля; |
| б) Шредингера;  | д) Эйнштейна. |
| в) Планка;      |               |

**15.14.** Масса фотона равна;

- |                                      |                                   |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| а) $m_\phi = \frac{h\nu}{c^2}$ ;     | г) $m_\phi = \frac{h\nu}{c}$ ;    |
| б) $m_\phi = \frac{h}{\lambda}$ ;    | д) $m_\phi = \frac{\lambda}{h}$ . |
| в) $m_\phi = \frac{h\nu}{\lambda}$ ; |                                   |

**15.15.** Импульс фотона равен:

- |                                      |                                   |
|--------------------------------------|-----------------------------------|
| а) $P_\phi = \frac{h}{\nu}$ ;        | г) $P_\phi = \frac{h\nu}{c^2}$ ;  |
| б) $P_\phi = \frac{h\nu}{c}$ ;       | д) $P_\phi = \frac{\lambda}{h}$ . |
| в) $P_\phi = \frac{h\nu}{\lambda}$ ; |                                   |

**15.16.** Если микрочастица движется вдоль оси  $x$ , то, согласно соотношениям неопределенности Гейзенберга:

- |  |  |
|--|--|
| а) $\Delta x \Delta P_x \leq \frac{2\pi}{\lambda}$ ; | г) $\Delta x \Delta P_x \geq \frac{h}{2\pi}$ ; |
| б) $\Delta x \Delta P_x \geq \frac{2\pi}{\lambda}$ ; | д) $\Delta x \Delta P_x \leq \frac{h}{2\pi}$ . |



$$\text{B) } \Delta x \Delta t \geq \frac{h}{2\pi};$$

**15.17.** Уравнение Шредингера для стационарных состояний имеет вид:

$$\text{a) } \frac{d^2\psi}{dx^2} + \omega_0^2\psi = 0;$$

$$\Gamma) \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{8\pi^2m}{h^2}(E - U)\psi = 0;$$

$$6) \quad \psi + \frac{2m}{h}(E + U)\psi = 0;$$

$$\text{д) } \frac{d\psi}{dx} + \frac{2m}{n^2}(E - U)\psi = 0.$$

$$\text{B) } \frac{d^2\psi}{dr^2} + (E + U)\psi = 0;$$

**15.18.** Принципом Паули является утверждение, что в атоме не может быть двух электронов с одинаковыми значениями:

- а) главного квантового числа;  
б) любых двух квантовых чисел;  
в) любых трех квантовых чисел;  
г) спинового квантового числа;  
д) всех четырех квантовых чисел.

**15.19.** Интенсивность пучка рентгеновских лучей, прошедших сквозь пластинку толщиной  $x$ , определяется формулой:

a)  $I = I_0 e^{-\mu x}$ ;

Г)  $I = I_0/x$ ;

6)  $I = \mu I_0 x$ ;

д)  $I = I_0 \sqrt{\mu x}$ .

B)  $I = \mu I_0 x^2$ ;

**15.20.** Проникающая способность излучения характеризует

- а) энергию, переданную веществу на единице длины пробега;
- б) энергию, переданную веществу за единицу времени;
- в) расстояние, на котором энергия излучения уменьшается в 2 раза;
- г) расстояние, на котором энергия излучения уменьшается в  $e$  раз;
- д) расстояние, которое излучение проходит в веществе, сохраняя способность к ионизации.

# ДЕЙСТВИЕ ФИЗИЧЕСКИХ ФАКТОРОВ НА БИОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

На протяжении всего развития жизни на Земле живые организмы подвергались действию электромагнитных волн и ионизирующих излучений, источниками которых были космические (Солнце, планеты, галактики) и земные (радиоактивные элементы земной коры) объекты. На современном этапе к естественному электромагнитному фону добавился искусственный — излучение радиостанций, ядерных установок и др.

Действие электрического тока и электромагнитного излучения может приводить к неблагоприятным последствиям для человека, в том числе и к летальным. Несмотря на это, ток и электромагнитное излучение обладают целым рядом свойств, благодаря которым они нашли широкое применение в медицине: как в терапии, так и в диагностике.

### § 16.1. ВОЗДЕЙСТВИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА НА ЖИВОЙ ОРГАНИЗМ

Под воздействием электрического тока в живых организмах происходит движение заряженных частиц, поляризация тканей и их нагревание (тепловой эффект).

Постоянный ток и переменный ток, частота которого ниже  $10^5$  Гц, могут представлять опасность для организма. Поражающее действие обусловлено током, а не напряжением. Безопасной считается сила тока ниже 0,01 А (хотя даже слабые токи сказываются на функционировании нервной системы); ток выше 0,1 А опасен для жизни. Степень опасности, обусловленная током, зависит от пути распространения тока по организму, например, от того, проходит ли он через сердце или нет.

Как известно, электрический ток, проходящий через мышцу, вызывает ее сокращение. При этом реакция мышцы зависит как

от силы подаваемого тока, так и от длительности его воздействия. Сила тока ниже некоторой пороговой величины не вызывает сокращения, так же, как и слишком кратковременный импульс. Если импульс был одиночным, то за сокращением последует расслабление, то есть мышца вздрогнет. Чтобы мышца после сокращения полностью расслабилась, требуется некоторое время. Поэтому, если импульсы следуют один за другим, причем интервал между ними меньше времени, необходимого для сокращения, то мышца не успевает расслабиться и ее сокращение длится столько же времени, сколько подаются возбуждающие импульсы. Такое состояние мышцы называется **тетанусом**. Импульсы постоянного тока (импульсный ток) оказывают приблизительно такое же действие на организм, как и переменный ток. Тетаническое сокращение мышцы объясняет тот факт, что человек, взявшийся за оголенный провод, не может его самостоятельно отпустить.

Электрический ток небольшой силы (0,01—0,025 А) может привести к расстройству дыхания (в случае сокращения дыхательных мышц), сердцебиению и так далее; ток более высокой силы (от 0,1 А) — к обратимой либо необратимой остановке сердца. Действие электрического тока может также вызвать денатурацию белка, ожоги, как результат теплового эффекта.

Любая биологическая система гетерогенна, ее сопротивление электрическому току определяется изменяющимися в довольно широких пределах сопротивлениями ее составных частей (табл. 16.1.1).

Сопротивление организма, прежде всего, определяется сопротивлением кожи, а эта величина, в свою очередь, зависит от ее состояния: толщины, влажности. Внутри тела ток в основном распространяется по кровеносным и лимфатическим сосудам, мышцам и оболочкам нервных волокон. Сопротивление тканей зависит от состояния организма. Например, сопротивление увеличивается при воспалительных процессах, сопровождающихся набуханием клеток, так как при этом уменьшается сечение межклеточных соединений. Уменьшение сопротивления,

Таблица 16.1.1

**Удельные сопротивления  
некоторых тканей и жидкостей  
организма**

Ткань или жидкость	Удельное сопротивление, Ом · м
Спинномозговая жидкость	0,55
Кровь	1,66
Мышцы	2
Мозговая и нервная ткани	14,3
Жировая ткань	33,3
Сухая кожа	$10^5$
Кость без надкостницы	$10^7$

в свою очередь, происходит при состояниях с повышенной потливостью.

Сопротивление какой-либо системы переменному току определяется активным и реактивным (индуктивным и емкостным) сопротивлениями. В живых системах в качестве конденсаторов выступают биологические мембраны, а системы, проявляющие индуктивные свойства отсутствуют. Поэтому полное сопротивление — импеданс — биологических систем определяется только омическим  $R$  и емкостным  $X_C$  сопротивлениями:

$$Z = \sqrt{R^2 + X_C^2}, \quad (16.1.1)$$

а приложенное напряжение отстает по фазе от силы тока на угол  $\varphi$ :

$$\varphi = \arctg \frac{X_C}{R}. \quad (16.1.2)$$

Значения углов сдвига фаз для биологических объектов приведены в табл. 16.1.2.

Зависимости импеданса от частоты переменного тока отличаются для здоровых, больных и мертвых тканей. На рис. 16.1.1 приведен качественный вид частотной зависимости импеданса здоровой (кривая 1) и мертвой (кривая 2) ткани, в которой вследствие воздействия каких-либо поражающих факторов (например термического воздействия)

Таблица 16.1.2

**Угол сдвига фаз для различных  
биологических объектов  
(при частоте 1 кГц)**

Биологический объект	Угол сдвига фаз, град
Кожа человека, лягушки	55
Нерв лягушки	64
Мышцы кролика	65

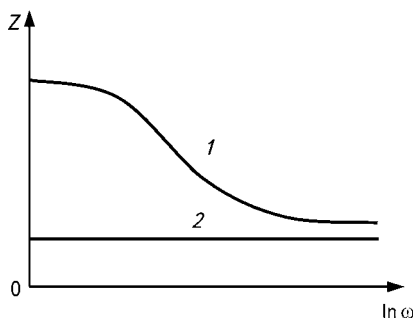


Рис. 16.1.1. Частотная зависимость импеданса живой (1) и мертвой (2) тканей

разрушены мембраны, то есть отсутствует емкостное сопротивление. Исследования частотных зависимостей импеданса нашли применение в трансплантологии, где они проводятся перед пересадкой тканей и органов.

Импеданс тканей и органов изменяется при наполнении кровеносных сосудов, то есть зависит от состояния сердеч-

но-сосудистой системы. Регистрация импеданса тканей и органов в процессе сердечной деятельности лежит в основе диагностического метода, называемого *ре о г р а ф и е й* (*импеданс-плетизмографией*). Снимают реограммы сердца (реокардиограммы), головного мозга (реоэнцефалограммы), магистральных сосудов, легких, печени и конечностей. Как правило, исследования проводят на частоте 30 кГц.

Раздражение может вызвать только такой ток, длительность которого превышает некоторое минимальное время, необходимое для возбуждения мышечного волокна (см. главу 12). Так как с возрастанием частоты тока длительность раздражения снижается, то по достижении некоторой пороговой величины частоты ( $\sim 10^5$  Гц) ток уже не вызывает сокращения мышц. В этом случае он оказывает только тепловое действие.

Прохождение электрического тока через проводник, обладающий активным сопротивлением, сопровождается нагреванием последнего, так как ускоренные электрическим полем носители заряда, сталкиваясь с другими частицами, передают им часть своей кинетической энергии, что приводит к увеличению теплового движения частиц, а следовательно, к повышению температуры проводника. Количество выделенной теплоты рассчитывается по закону Джоуля — Ленца:

$$Q = I^2 R t, \quad (16.1.3)$$

где  $I$  — сила тока;  $R$  — сопротивление;  $t$  — время воздействия тока. Разделив данное выражение на объем и время, получаем количество теплоты, выделяющееся в единице объема ткани за единицу времени:

$$q = j^2 \rho, \quad (16.1.4)$$

где  $j$  — плотность тока;  $\rho$  — удельное сопротивление.

Тепловой эффект электрического тока широко применяется в медицине для прогревания тканей, для чего используют ток силой 10—15 мА, частотой  $\nu \geq 500$  кГц (смещение ионов, вызываемое им, не опасно для организма), напряжением  $\sim 10$  кВ. Высокочастотные токи применяются в хирургии для соединения (диатермокоагуляция) и рассечения (диатермотомия) тканей.

Постоянный ток широко используется для введения лекарственных веществ — *э л е к т р о ф о р е з а*. Под действием электрического поля ионы лекарственного вещества проникают через кожу в ткани. Отрицательно заряженные частицы вещества (анионы) вводят с катода; положительные (катионы) — с анода. Электрофорез имеет ряд преимуществ по сравнению с обычными методами

введения лекарственных препаратов, так как позволяет вводить их непосредственно в ткани, минуя пищеварительный тракт и кровь.

Импульсные токи применяются для стимуляции сердца, нервных волокон, мышц с целью восстановления их сократительной или проводящей функции. Так, пропускание через сердце кратковременных импульсов тока (порядка миллисекунд) силой 10 А вызывает равномерную деполяризацию мембран и способствует возникновению синхронного сокращения мышц миокарда. При реанимации для этих целей используют специальный аппарат — дефибриллятор. В зависимости от амплитуды, длительности и формы импульсов ток может вызывать различное физиологическое действие на организм.

## § 16.2. МЕХАНИЗМ БИОЛОГИЧЕСКОГО ДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН РАДИОЧАСТОТНОГО ДИАПАЗОНА

Естественными источниками волн радиочастотного диапазона являются Солнце, планеты и другие космические объекты. Из них наибольшей интенсивностью обладает солнечное излучение, плотность потока энергии которого при входе в атмосферу Земли составляет 1360 Вт/м<sup>2</sup>. В радиосвязи, промышленности, медицине широко используются искусственные источники радиоизлучения. Влияние микроволнового излучения на биообъекты изучают, используя в качестве источников электромагнитного излучения клистроны, магнетроны и др.

Из всего радиоволнового спектра (см. табл. 16.2.1) выделяются дециметровый, или ультравысокочастотный (УВЧ) диапазон ( $\lambda = 1...0,1$  м,  $\nu = 3 \cdot 10^8...3 \cdot 10^9$  Гц), и сантиметровый, или сверхвысокочастотный (СВЧ) диапазон ( $\lambda = 10^{-1}...10^{-2}$  м,  $\nu = 3 \cdot 10^9...3 \cdot 10^{10}$  Гц), которые обладают наиболее выраженным действием на живые организмы.

Мерой интенсивности  $I$  микроволнового излучения является *модуль вектора Пойнтинга*, или *плотность потока энергии излучения*:

$$I = \left| [\vec{E} \times \vec{H}] \right|, \quad (16.2.1)$$

где  $E$  — напряженность электрического поля;  $H$  — напряженность магнитного поля. Плотность потока энергии измеряется в Вт/м<sup>2</sup>.

Иногда при исследовании влияния излучения на вещество пользуются удельными значениями поглощенной мощности еди-

### Электромагнитное излучение: действие на биологические объекты и применение в медицине

	Радиоволны длинные, средние, короткие, УВЧ, СВЧ	Инфракрасное излучение	Видимый свет	Ионизирующее излучение		
				Ультрафиолетовое	Рентгеновское	Гамма-излучение
Длина волны, м	$10^8 \dots 10^{-3}$	$10^{-3} \dots 7,6 \cdot 10^{-7}$	$7,6 \cdot 10^{-7} \dots 3,8 \cdot 10^{-7}$	$3,8 \cdot 10^{-7} \dots 10^{-8}$	$10^{-7} \dots 10^{-12}$	$10^{-10} \dots 10^{-13}$ и менее
Полоса частот, Гц	$3 \dots 3 \cdot 10^{11}$	$3 \cdot 10^{11} \dots 3,95 \cdot 10^{14}$	$3,95 \cdot 10^{14} \dots 7,9 \cdot 10^{14}$	$7,9 \cdot 10^{14} \dots 3 \cdot 10^{16}$	$3 \cdot 10^{15} \dots 3 \cdot 10^{20}$	$3 \cdot 10^{18} \dots 3 \cdot 10^{21}$ и более
Энергия кванта, эВ	$1,24 \cdot 10^{-14} \dots 1,24 \cdot 10^{-3}$	$1,24 \cdot 10^{-3} \dots 1,63$	$1,63 \dots 3,27$	$3,27 \dots 1,24 \cdot 10^2$	$12,4 \dots 1,24 \cdot 10^6$	$1,24 \cdot 10^4 \dots 1,24 \cdot 10^7$ и выше
Действие на вещество	Возникновение токов проводимости; поляризация диэлектриков. Тепловой эффект	Колебания ядер и вращение молекул	Возбуждение молекул	Возбуждение и ионизация молекул	Ионизация за счет фото- и комптон-эффектов	Ионизация за счет фото- и комптон-эффектов, образования пары
Биологический эффект	Нарушение водородных связей и гидрофобных взаимодействий; изменение гидратации и конформации макромолекул	Тепловой эффект. Активация терморецепторов у животных	Зрительные реакции у животных; фотосинтез у растений	Синтез витамина D и пигмента меланина у человека. Канцерогенез. Бактерицидный эффект	Первичные и вторичные радиобиологические эффекты, которые приводят к повреждению отдельных биологически важных молекул и организма в целом	
Применение в терапии	Лечебное прогревание УВЧ- и СВЧ-волнами (УВЧ- и СВЧ-терапия)	ИК-прогревание	Лазерная терапия	УФ-терапия кожных и онкологических заболеваний	Рентгенотерапия	$\gamma$ -Терапия
Применение в клинической диагностике	Тепловизионные методы диагностики		Методы диагностики, основанные на явлении люминесценции		Рентгенодиагностика: рентгенография и рентгеноскопия, компьютерная томография	Радионуклидные методы диагностики

ницей объема или единицей массы поглощающего вещества, которые измеряются соответственно в Вт/м<sup>3</sup> или Вт/кг. *Дозой облучения* называется количество поглощенной энергии единицей массы объекта (Дж/кг).

Дозиметрия микроволнового облучения довольно сложна, так как живая ткань негомогенна, от границ раздела (например, кожа — жировая ткань, жировая ткань — мышечная ткань) происходит отражение излучения, что может привести к возникновению стоячих волн в среде.

Электромагнитное облучение, особенно в СВЧ-диапазоне, повышает температуру ткани на некоторую величину  $\Delta T$ , причем  $\Delta T$  прямо пропорциональна удельной поглощенной мощности  $P$ . Это позволяет определить поглощенную мощность СВЧ-излучения в зависимости от нагрева ткани по следующей эмпирической формуле:

$$P = 4186 C \frac{\Delta T}{t}, \quad (16.2.2)$$

где  $C$  — удельная теплоемкость вещества;  $t$  — время облучения.

Энергия микроволнового излучения ( $1,24 \cdot 10^{-6} \dots 1,24 \cdot 10^{-4}$  эВ) недостаточна для возникновения электронно-возбужденных состояний. Поэтому воздействие микроволнового излучения на живые организмы вызывает тепловые и нетепловые эффекты.

Тепловой эффект электромагнитного поля определяется его воздействием как на ионы, так и на нейтральные частицы. В первом случае переменные поля вызывают переменные токи проводимости в тканях, что сопровождается выделением *джоулева тепла*. Во втором случае электрическое поле вызывает поляризацию нейтральных молекул и возникновение токов смещения.

Колебания частиц в переменном поле сопровождаются трением, а следовательно, выделением тепловой энергии. С уменьшением частоты внешнего поля соответственно уменьшается частота колебаний частиц и тепловые потери становятся меньше. С другой стороны, при увеличении частоты электроны (в случае деформационной поляризации) или молекулы (в случае ориентационной поляризации) могут не успевать изменять свое положение в пространстве, что также снижает тепловые потери. Из этого следует, что при каком-то значении частоты колебаний тепловой эффект будет максимальным (*резонанс поглощения*). Это наблюдается в случае совпадения частоты внешнего поля с собственной частотой колебаний частицы. Например, в случае ориентационной поляризации молекул воды максимум поглощения находится на частоте  $10^{10}$  Гц, то есть лежит в СВЧ-диапазоне. Ориентационная



поляризация молекул воды вносит основной вклад в поглощение электромагнитного излучения живыми организмами. Поэтому ткани, в которых содержание воды велико, нагреваются сильнее (например, мышцы и кровь) по сравнению с теми, где содержание воды меньше (костная и жировая ткань).

Изменение энергии электромагнитного поля в единице объема вещества за единицу времени (удельная мощность) составляет:

$$P_v = \sigma E^2 + \omega E^2 \varepsilon \varepsilon_0 \operatorname{tg} \delta, \quad (16.2.3)$$

где  $\sigma$  — проводимость;  $E$  — напряженность электрического поля;  $\omega$  — частота переменного электрического поля;  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость,  $\operatorname{tg} \delta$  — тангенс угла диэлектрических потерь. В этом уравнении первое слагаемое определяет потери энергии за счет проводимости (джоулевы потери), а второе — потери в диэлектрике в отсутствие свободных зарядов.

В однородном пространстве мощность излучения убывает с расстоянием по экспоненциальному закону. Если в некоторой точке пространства с координатой  $x = 0$  среднее значение мощности излучения составляло  $P_0$ , то в точке с координатой  $x$  оно составит:

$$P = P_0 e^{-\alpha x}, \quad (16.2.4)$$

где  $\alpha$  — коэффициент затухания.

Одной из важных характеристик электромагнитного излучения является глубина его проникновения  $d$  в ткани, то есть расстояние, на котором мощность падающей энергии уменьшается в  $e$  раз. Глубина проникновения обратно пропорциональна коэффициенту затухания:

$$d = \frac{1}{\alpha}. \quad (16.2.5)$$

С увеличением частоты излучения и диэлектрической проницаемости ткани глубина проникновения уменьшается. Чем больше содержание воды в ткани, тем меньше  $d$ . Например, глубина проникновения УВЧ-волн ( $\nu = 3 \cdot 10^8 \dots 3 \cdot 10^9$  Гц) в мышечной ткани и коже составляет около 4 см, а в жировой и костной ткани — около 20 см. Эти же показатели для СВЧ-волн ( $\nu = 3 \cdot 10^9 \dots 3 \cdot 10^{10}$  Гц) составляют уже соответственно 2 и 10 см.

Следует отметить, что диэлектрическая проницаемость и проводимость биологических тканей зависят от частоты падающего излучения и определяются содержанием в ткани воды, ионов, дипольных молекул.

Нагрев тканей традиционными способами и нагрев, вызванный воздействием СВЧ-излучения, существенно отличаются. В первом

случае происходит нагрев поверхностного слоя, и проникновение тепла в более глубокие слои зависит от теплопроводности ткани, в то время как УВЧ- и СВЧ-облучение вызывает нагрев по всему объему облучаемого объекта. С уменьшением длины волны уменьшается глубина проникновения излучения в ткань, что вызывает нагрев лишь поверхностных слоев. Объемный тепловой эффект СВЧ-, а также УВЧ-излучения широко используется в медицине.

Нагрев, вызванный УВЧ- и СВЧ-излучением, неоднороден вследствие неоднородности самого организма. В некоторых местах могут появляться локальные перегревы. Причиной этого явления может быть возникновение стоячих волн в среде. Иногда местный перегрев может компенсироваться механизмами теплоотдачи. Например, поглощение излучения мембранами происходит в 4 раза более интенсивнее, чем окружающими тканями, однако поглощенная энергия почти сразу же рассеивается в окружающую мембрану среду. Наиболее чувствительными органами являются те, которые имеют хорошую теплоизоляцию и/или недостаточное кровоснабжение, например, внутренние органы, хрусталик и стекловидное тело глаза.

Опухоли гораздо хуже снабжаются кровью, чем окружающие их ткани, что замедляет рассеивание тепла. Поэтому при СВЧ-облучении опухоль нагревается в большей степени, чем здоровые ткани. На этом основано лечение онкологических заболеваний СВЧ-нагревом. Сочетание СВЧ-облучения с химио- и радиотерапией дает хорошие результаты.

Первоначально биологическое действие микроволнового облучения сводилось к тепловому эффекту. Однако в последнее время обнаружено влияние на организм излучения малой интенсивности, которое не приводит к существенному повышению температуры ткани. Например, изменение проницаемости мембран эритроцитов наблюдалось при интенсивности облучения  $10^{-1}$  Вт/м<sup>2</sup>, то есть в условиях, исключающих значимый перегрев мембраны.

Нетепловой эффект СВЧ-облучения может быть следствием резонансного поглощения энергии определенными молекулами. Так, в СВЧ-диапазоне лежит частота вращательных колебаний полярных головок фосфолипидов ( $10^9$  Гц), характеристические частоты связанной воды ( $10^8$ – $10^9$  Гц), свободной воды ( $10^{10}$  Гц), карбоксильных  $\text{—COO}^-$  и аминогрупп  $\text{—NH}_3^+$  ( $10^{10}$ – $10^{11}$  Гц). В этом случае излучение вызывает изменения энергии отдельных молекул, при отсутствии общего повышения температуры ткани. Например, резонансное поглощение энергии излучения молекулами связанной воды может вызвать нарушения гидратной оболочки биомолекул, что в свою очередь повлечет изменение их конфор-

мации. В этом случае может проявляться эффект СВЧ-облучения, хотя нагрев ткани может быть и несущественным.

Замечено, что длительное СВЧ-облучение вызывает гипоксию (пониженное содержание кислорода в тканях), снижение работоспособности, повышение утомляемости организма, а также ряд других нарушений, особенно в нервной и сердечно-сосудистой системах. Наиболее часто от подобных симптомов страдает персонал физиотерапевтических кабинетов, теле- и радиостанций, морских и речных судов, а также военнослужащие. Нарушения состояния здоровья усугубляются с увеличением стажа работы. Для лиц, профессионально связанных с СВЧ-облучением, интенсивность непрерывного излучения в течение 8 час не должна превышать  $0,1 \text{ Вт/м}^2$ . Заболевания, вызванные облучением в радиочастотном диапазоне, выделяют в отдельную, так называемую радиочастотную или радиоволновую болезнь.

### § 16.3. ЭЛЕКТРОННЫЕ ПЕРЕХОДЫ В АТОМАХ И МОЛЕКУЛАХ

Энергия кванта электромагнитной волны определяется по формуле Планка:

$$E = h\nu = h \frac{c}{\lambda}, \quad (16.3.1)$$

где  $\nu$  — частота света;  $\lambda$  — длина волны;  $c$  — скорость света в вакууме;  $h$  — постоянная Планка.

Если энергия кванта света совпадает с энергией, необходимой для перехода электрона с одного энергетического уровня на более высокий, то происходит поглощение кванта атомом. При этом электрон переходит с *основного* (невозбужденного) энергетического уровня  $S_0$  на возбужденные (*синглетные*)  $S_1^*$ ,  $S_2^*$  и т. д. Так как состояние атома, при котором низшие энергетические уровни являются незаполненными, в то время как электроны находятся на более высоких уровнях, является неустойчивым, то электроны возвращаются на свои основные уровни. При этом возможны следующие случаи (рис. 16.3.1).

Электрон может перейти с возбужденного уровня на более низкий с испусканием кванта электромагнитного излучения. Такой переход называется *излучательным*. Если же избыточная энергия, полученная атомом при поглощении кванта, передается другому атому при взаимодействии с ним, например, при столк-

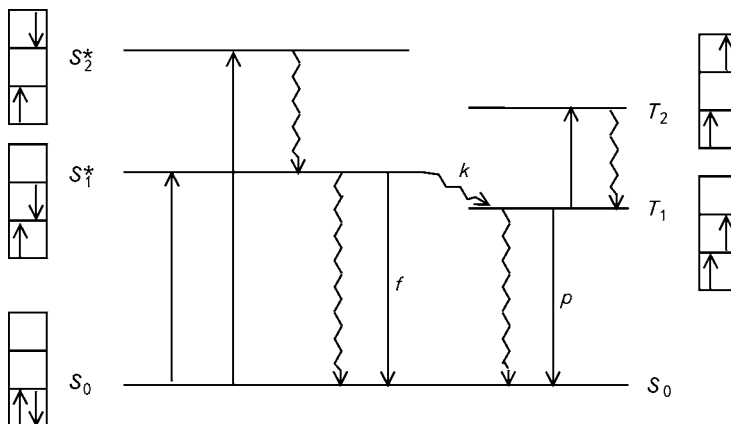


Рис. 16.3.1. Электронные уровни молекулы и переходы между ними:

$S$  — синглетный уровень;  $T$  — триплетный уровень;  $f$  — флуоресценция;  $p$  — фосфоресценция;  $k$  — интеркомбинационная конверсия (прямые линии — излучательные переходы; волнистые — безызлучательные). Возле каждого уровня показано взаимное направление спинов возбужденного и оставшегося на основном уровне электронов

новении, то такой переход называется **б е з ы з л у ч а т е л ь н ы м**. В результате безызлучательного перехода возбужденный атом может передать свою избыточную энергию другим атомам, находящимся в той же молекуле (внутримолекулярный перенос энергии) или в другой молекуле (межмолекулярный перенос энергии). Эти процессы называются *миграцией энергии возбужденного состояния*.

Время пребывания электрона на возбужденном синглетном уровне  $S^*$  (время жизни возбужденного состояния) очень мало (порядка  $10^{-8}$ — $10^{-9}$  с). Излучательный переход  $S^* \rightarrow S_0$  называется **ф л у о р е с ц е н ц и е й**.

Переход  $S \rightarrow S^*$  и обратно происходит без изменения спина электрона. В то же время электрон, пребывая на синглетном уровне  $S^*$ , может изменить свой спин и перейти на так называемый *триплетный уровень*  $T$ , энергия которого ниже уровня  $S^*$ , но выше уровня  $S$ . Переход с возбужденного уровня  $S^*$  на триплетный уровень  $T$  называется *интеркомбинационной конверсией*. Время жизни триплетного состояния намного больше синглетного и составляет от  $10^{-7}$  с до нескольких часов. Поэтому триплетное состояние называется *метастабильным*. Так как электрон находится на триплетном уровне энергии долгое время, то он может успеть поглотить еще один квант излучения и перейти с уровня  $T_1$  на уровень  $T_2$ . Излучательный переход электрона  $T_1 \rightarrow S_0$  называется **ф о с ф о р е с ц е н ц и е й** (при этом происходит изменение направления спина). Возможен также переход  $T_1 \rightarrow S_1^*$  за счет тепловой

энергии, и тогда переход  $S_1^* \rightarrow S_0$  называется *замедленной флуоресценцией*.

Для того чтобы электрон перешел с основного уровня на возбужденный, необходимо, чтобы энергия кванта света была равна энергии между этими уровнями. Если энергия кванта меньше, то электронные переходы не происходят (радиочастотный диапазон); если, наоборот, больше, то атомы ионизируются, как в случае  $\gamma$ -, рентгеновского и дальнего ультрафиолетового ( $\lambda = 10 \dots 200$  нм) диапазона. Возбуждение атомов происходит в видимом диапазоне и ближней области ( $\lambda = 200 \dots 400$  нм) ультрафиолетового диапазона.

## § 16.4. ВОЗДЕЙСТВИЕ ИЗЛУЧЕНИЯ ОПТИЧЕСКОГО ДИАПАЗОНА НА БИОЛОГИЧЕСКИЕ ОБЪЕКТЫ

Действие инфракрасного излучения на организм вызывает ощущение тепла; видимого диапазона — зрительные реакции, фотосинтез (образование органических соединений за счет энергии света), фототаксис (движение микроорганизмов к свету или от него); фототропизм (поворот листьев и стеблей растений к свету или от него); ультрафиолетового — синтез витамина D, эритему (покраснение кожи, вызванное расширением кровеносных сосудов кожи), загар (образование в коже пигмента меланина), канцерогенез (образование опухолей), оказывает бактерицидный эффект. Из всего диапазона электромагнитного излучения человек имеет рецепторы только к инфракрасному излучению (терморецепторы) и к видимому (зрительные рецепторы).

Процессы, происходящие в биологических системах при воздействии излучения оптического диапазона, называются *фото-биологическими*. Выделяют следующие их стадии: фотофизическую — поглощение кванта света и перенос энергии возбужденного состояния; фотохимическую — химические превращения молекул и физиологическую — ответ организма на излучение.

Поглощение кванта излучения оптического диапазона приводит к возбуждению молекулы, а следовательно, к повышению ее реакционной способности, в результате чего могут происходить химические реакции, которые были бы невозможны в темноте. Такие реакции называются *фотохимическими*, а образующиеся в них продукты — *фотопродуктами*. Непосредственное воздействие света на химическое вещество чаще всего приводит к образованию нестабильных продуктов, которые в цепи последующих реакций превращаются в стабильные. Эти реакции, как правило, уже не требуют действия света и поэтому называются *темновыми*.

В ультрафиолетовом и видимом диапазонах излучения происходят  $\pi-\pi^*$ - и  $n-\pi^*$ -электронные переходы. Напомним, что  $\pi$ -электрон — это электрон, участвующий в образовании  $\pi$ -связи, а  $n$ -электрон — это неспаренный  $p$ -электрон, не образующий химическую связь, но способный переходить на возбужденный уровень ( $\pi^*$ )  $\pi$ -орбитали. Поэтому в ультрафиолетовой и видимой областях спектра интенсивно поглощают химические соединения, имеющие в своем составе сопряженные двойные связи и кольцевые группы, обладающие  $\pi$ -электронной системой.

Чем больше в молекуле сопряженных двойных связей  $N$ , тем больше длина волны  $\lambda$ , на которую приходится максимум поглощения света. Приблизительно эту величину можно определить по следующей формуле:

$$\lambda \approx \frac{4mcl^2}{h} N, \quad (16.4.1)$$

где  $m$  — масса электрона;  $c$  — скорость света;  $l$  — длина одного элемента цепи сопряженных двойных связей;  $h$  — постоянная Планка. Например, максимумы поглощения ненасыщенных жирных кислот приходятся на  $\lambda < 220$  нм, а максимум поглощения ретиналя, имеющего 11 сопряженных двойных связей, сдвигается уже в видимую область.

Примером электронных переходов  $\pi-\pi^*$  является изомеризация ретиналя под действием видимого света (см. § 14.2). Для того чтобы 11-*цис*-ретиналь превратился в полностью *транс*-ретиналь, необходим поворот вокруг двойной связи между 11-м и 12-м атомами углерода (рис. 14.2.1), что без дополнительных затрат энергии невозможно. Поглощение кванта видимого света приводит к возбуждению молекулы и переходу электрона со связывающей  $\pi$ -орбитали на разрыхляющую  $\pi^*$ -орбиталь, в результате чего  $\pi$ -связь разрывается и плоскости молекулы поворачиваются вокруг  $\sigma$ -связи на  $90^\circ$  (рис. 16.4.1). Из этого возбужденного состояния молекула может перейти как обратно в *цис*-конформацию, так и в *транс*-конформацию. С другой стороны, квант света способен и полностью *транс*-ретиналь перевести в возбужденное состояние, в результате



Рис. 16.4.1. Цис-транс-изомеризация ретиналя под действием света

чего некоторая часть молекул перейдет в 11-*цис*-конформацию. Поэтому при освещении устанавливается определенное соотношение между двумя указанными изомерами, причем преобладать будет тот из них, который при облучении данной длиной волны обладает меньшим значением коэффициента поглощения.

## § 16.5. ВОЗДЕЙСТВИЕ УЛЬТРАФИОЛЕТОВОГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА БИОЛОГИЧЕСКИЕ МОЛЕКУЛЫ

В зависимости от оказываемого действия на биологические объекты, в ультрафиолетовом диапазоне выделяют три зоны: *A*-зона, или антирахитная ( $\lambda = 400...315$  нм), — вызывает синтез витамина D; *B*-зона, или эритемная ( $\lambda = 315...280$  нм), — вызывает образование эритемы и способствует синтезу пигмента меланина, который обладает защитным действием при ультрафиолетовом облучении, так как поглощает кванты света и одновременно является антиоксидантом<sup>1</sup>; *C*-зона, или бактерицидная ( $\lambda = 280...200$  нм), — вызывает мутации, канцерогенез, оказывает бактерицидный эффект; энергия излучения этого диапазона (3,1—6,8 эВ) достаточна для диссоциации и ионизации молекул. Ультрафиолетовое излучение с  $\lambda < 200$  нм очень сильно поглощается, в том числе и воздухом, поэтому его действие на биологические объекты обычно не рассматривается.

Основным естественным источником ультрафиолетового излучения является Солнце. Солнечное излучение в этом диапазоне значительно поглощается озоновым слоем, причем поглощение тем выше, чем меньше длина волны. Поэтому поверхности Земли достигают в основном лучи зоны *A* и длинноволновой области зоны *B*. Этот диапазон ультрафиолета называется экологическим. Деятельность человека за последние десятилетия привела к существенному уменьшению озонового слоя, что вызвало усиление интенсивности излучения в более коротковолновой области ультрафиолетового диапазона. Замечено, что уменьшение на 1 % поглощающих свойств озонового слоя приводит к увеличению случаев заболевания раком кожи на 2 %.

Ультрафиолетовое излучение интенсивно поглощается живыми клетками и практически не проникает на глубину более чем 1 мм. У человека ультрафиолетовые лучи поглощаются в кожных покровах. Поэтому непосредственный эффект ультрафиолетового облучения сказывается именно на клетках кожи.

---

<sup>1</sup> Антиоксиданты — соединения, связывающие свободные радикалы.

Так как коэффициенты поглощения для ультрафиолета очень велики, то поглощенная доза  $D$  приблизительно равна мощности излучения  $W$ , попавшего на единицу площади кожного покрова за время  $t$ :

$$D = Wt. \quad (16.5.1)$$

Излучение различных длин волн одинакового потока приводит к различной степени повреждений. Зависимость фотобиологического эффекта от длины волны излучения называется *спектром действия*.

Спектр действия можно построить как для отдельных молекул, так и для клеток (рис. 16.5.1).

Согласно законам фотобиологии, фотоизменения в молекуле могут произойти только при поглощении ею кванта излучения. Поэтому спектр действия по своей форме совпадает со спектром поглощения тех молекул, которые отвечают за данный химический или физиологический ответ. Например, спектр инактивации вируса табачной мозаики

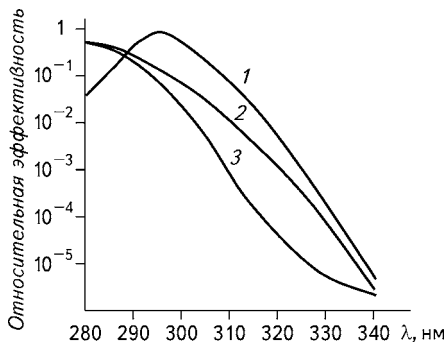


Рис. 16.5.1. Спектры действия ультрафиолетового излучения: 1 — развитие эритемы кожи у человека; 2 — повреждение растительной клетки; 3 — инактивация ДНК

полностью совпадает со спектром поглощения его информационной РНК (рис. 16.5.2). На основании изложенного можно сделать

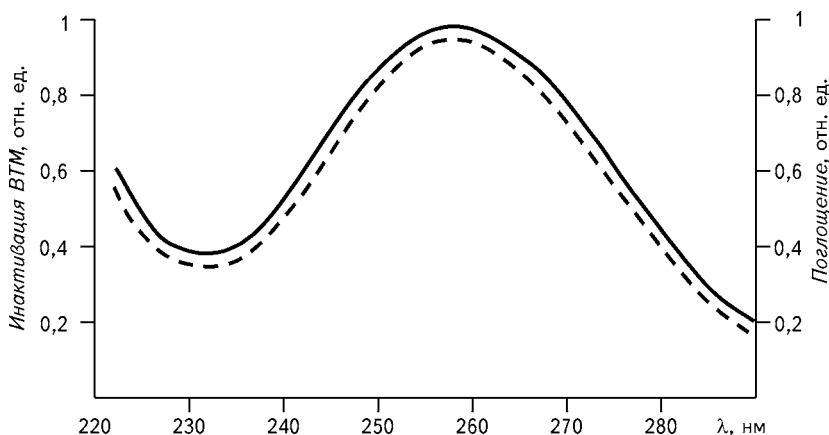


Рис. 16.5.2. Инактивация вируса табачной мозаики (ВТМ):

сплошная линия — спектр действия ультрафиолетового излучения; пунктирная линия — спектр поглощения информационной РНК этого вируса



вывод о том, что инактивирующее действие ультрафиолета на этот вирус обусловлено именно повреждением нуклеиновых кислот.

Биологический эффект ультрафиолета прежде всего определяется изменениями, которые он вызывает в структуре белков, нуклеиновых кислот, а также биологических мембран.

Аминокислоты, входящие в состав белков, имеют максимумы поглощения в диапазоне длин волн  $\lambda = 180\ldots 190$  нм за счет пептидных связей. Кроме того, ароматические аминокислоты: фенилаланин, тирозин и триптофан имеют дополнительные максимумы поглощения ( $\lambda_{\max} = 258, 280$  и  $285$  нм соответственно) за счет ароматических групп. Так как облучение ультрафиолетом (как естественное, так и искусственное) чаще всего происходит при  $\lambda > 240$  нм, то основной вклад в фотоповреждения белков вносят именно ароматические аминокислоты.

Действие ультрафиолетового излучения на белковые молекулы способно привести к разрыву дисульфидных мостиков между полипептидными цепями, образованию свободных радикалов<sup>1</sup>. Особенно эти повреждения опасны, если затрагивают активный центр фермента, что может вызвать его инактивацию.

Поглощение ультрафиолета нуклеиновыми кислотами обусловлено наличием в них пуриновых и пиримидиновых оснований ( $\lambda_{\max} = 260$  нм). Из соединений, входящих в состав нуклеиновых кислот, более чувствительны к действию облучения пиримидиновые основания (цитозин, тимин и урацил), хотя фотоповреждения могут возникать и в пуриновых основаниях (аденине, гуанине), и в углеводных компонентах.

Наиболее часто встречающимся фотоповреждением ДНК является образование димера из двух молекул тимина (рис. 16.5.3),

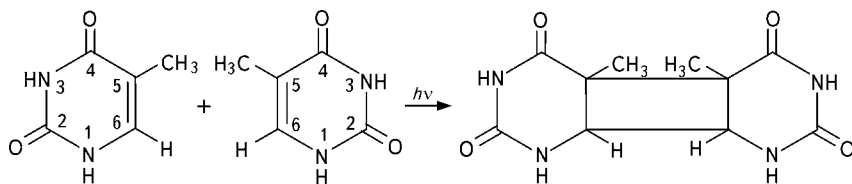


Рис. 16.5.3. Образование цикlobутанового димера тимин—тимин

расположенных рядом в одной цепи ДНК. Иногда димеры образуются между молекулами тимина из двух комплементарных цепей. Известно, что в нативной ДНК две молекулы тимина никогда не

<sup>1</sup> Свободные радикалы — атомы или молекулы, имеющие неспаренные электроны. Обладают высокой реакционной способностью, образуются в ходе биохимических реакций и действием ионизирующего излучения. Способны запускать цепные химические реакции, например реакции перекисного окисления липидов.

могут быть расположены напротив друг друга, так как они не-комплементарны. Однако под действием ультрафиолетового излучения возможно локальное расплетение двуспиральной структуры и перемещение комплементарных цепей относительно друг друга, в результате чего молекула тимина может оказаться напротив другой такой же молекулы. Тиминовый димер в этом случае стабилизирует возникшее повреждение.

Образование тиминовых димеров может произойти при поглощении кванта света не только именно молекулой тимина, но и любым другим азотистым основанием, так как возможен триплет-триплетный перенос энергии от одного основания к другому в следующей последовательности: цитозин, гуанин, аденин, тимин. Именно в этом направлении происходит уменьшение энергии триплетных уровней азотистых оснований. С меньшей вероятностью по сравнению с тиминовыми димерами, могут образовываться димеры цитозин-цитозин (Ц-Ц) и тимин-цитозин (Т-Ц).

Образовавшиеся димеры тимина химически очень устойчивы и не разрушаются при повышении температуры или при действии химических веществ. Однако процесс мономеризации можно вызвать действием ультрафиолетового излучения другого диапазона, причем максимальный выход мономеров наблюдается при облучении в более коротковолновой области по сравнению с максимальным выходом димеров.

Другими типами фотоповреждений ДНК являются: фотогидратация (образование 6-окси-5-гидроксипроизводных; рис. 16.5.4),

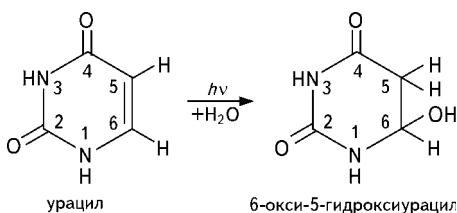


Рис. 16.5.4. Фотогидратация урацила

сшивки ДНК-белок (ковалентное присоединение к молекулам цитозина или урацила по 5-му или 6-му атомам некоторых аминокислот, например, серина, цистина и др.), сшивки ДНК-ДНК, одно- или дву-нитевые разрывы цепей

ДНК, но их квантовый выход<sup>1</sup> ниже, иногда на несколько порядков, по сравнению с выходом пиримидиновых димеров.

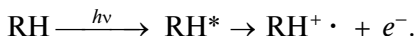
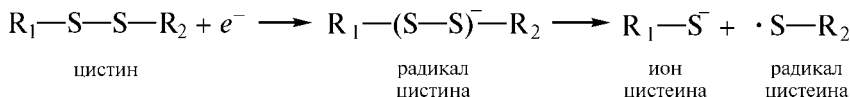
Фотоповреждения нуклеиновых кислот могут привести к появлению мутаций, канцерогенезу и даже к гибели клетки. Часто эти повреждения препятствуют нормальному прохождению процессов транскрипции и репликации нуклеиновых кислот, что исключает возможность нормального деления клетки. Так, при по-

<sup>1</sup> Квантовый выход реакции — отношения числа прореагировавших молекул к числу поглощенных квантов.

явлении в ДНК димеров азотистых оснований невозможна репликация ДНК.

Иногда фотоповреждения молекул могут быть вызваны не непосредственным поглощением излучения данной молекулой, а ее взаимодействием с другой молекулой, поглотившей квант света и перешедшей в возбужденное состояние. Соединения, повышающие чувствительность биологических объектов к свету, называются *фотосенсибилизаторами*, а вызванные ими реакции — *фотосенсибилизированными*.

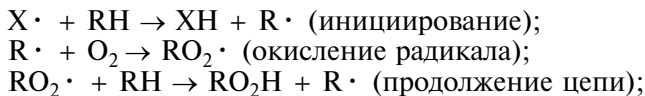
Примером фотосенсибилизированных реакций являются вызванные ультрафиолетовым облучением ( $\lambda > 280$  нм) разрывы дисульфидных мостиков в молекулах белков. В данном диапазоне ультрафиолета поглощают не молекулы цистина, а триптофан и тирозин. Поглотив квант света и перейдя в возбужденное состояние, эти аминокислоты способны диссоциироваться с образованием катион-радикала и сольватированного электрона:



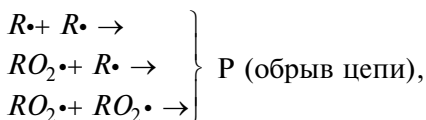
Взаимодействие сольватированного электрона с дисульфидными связями может вызвать их разрыв.

В этом примере фотосенсибилизированной реакцией является разрыв дисульфидных мостиков, а фотосенсибилизаторами — аминокислоты тирозин и триптофан.

Повреждения мембранных липидов, вызванные ультрафиолетовым облучением, также являются фотосенсибилизированными реакциями, так как максимум поглощения липидов приходится на  $\lambda < 220$  нм, а длина волны традиционного УФ-облучения превышает 240 нм. Ультрафиолетовое облучение вызывает появление в мембране свободных радикалов  $X\cdot$  (например, радикалов воды, аминокислот и др.), которые способны вызывать цепные реакции перекисного окисления липидов:

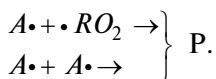
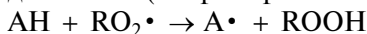


.....



где  $RH$  — липид;  $P$  — стабильный продукт.

Эти реакции требуют присутствия кислорода в ткани и тормозятся антиоксидантами А (например витамином Е — токоферолом):



Разрушение липидов повышает ионную проницаемость мембраны, нарушает ее стабильность, препятствует нормальному функционированию мембранных компонентов.

Фотосенсибилизаторы подразделяются на эндогенные, синтезируемые самим организмом, и экзогенные, попадающие в него извне. Известны четыре класса фотосенсибилизаторов: гиперичины, хлорофиллы, порфирины и псоралены (фурокумарины).

При некоторых заболеваниях в клетках увеличивается содержание эндогенных фотосенсибилизаторов. Например, при нарушении гемопоэза (процесса кроветворения) повышается содержание протопорфиринов, являющихся фотосенсибилизаторами окисления липидов и белков.

Попадание на кожу экзогенных фотосенсибилизаторов и одновременное облучение способно вызвать ожоги и фотодерматиты. Например, экстракты некоторых представителей семейств зонтичных, рутовых, бобовых содержат псоралены, которые являются фотосенсибилизаторами ДНК и способны спровоцировать фотоканцерогенез. Именно поэтому перед принятием солнечных ванн не рекомендуют пользоваться косметикой, наносить на кожу кремы, за исключением тех, которые обладают защитным противолучевым действием.

Нарушенные под действием ультрафиолета молекулярные структуры способны восстанавливаться с помощью так называемых *репарационных систем клетки*. Так, сначала из бактериальных клеток, а потом и из клеток человека был выделен фермент, обладающий фотореактивными свойствами. При его присоединении к димеру пиримидинового основания образуется хромофорная группа, поглощающая в видимом диапазоне. Попадание кванта света (максимум спектра действия приходится на 380—400 нм, в зависимости от вида организма, из которого был выделен фермент) на такой комплекс приводит к распаду димера и образованию двух молекул тимина.

## § 16.6. ТЕОРИЯ МИШЕНИ

При количественном изучении фотоповреждений молекул и целых клеток широко используется *теория мишени*. В качестве мишени может выступать, например, активный центр фермента или участок ДНК, ответственный за синтез какого-либо жизненно важ-

ного белка. В этом случае попадание всего лишь одного кванта света (одноударный механизм) в мишень вызывает с вероятностью  $\Phi$  (квантовый выход реакции) полную инактивацию данной молекулы. Попадание кванта в другие участки молекулы, хотя и способно вызвать какие-либо ее химические превращения, но на ее биологической функции не отражается.

Скорость инактивации молекул можно записать в следующем виде:

$$\frac{dn}{dt} = -\Phi(I_0 - I), \quad (16.6.1)$$

где  $n$  — число неповрежденных молекул в единице объема;  $t$  — время;  $\Phi$  — квантовый выход реакции;  $I_0$  — интенсивность падающего света;  $I$  — интенсивность прошедшего света.

Согласно закону Бугера—Ламберта—Бера,

$$I = I_0 e^{-snl}, \quad (16.6.2)$$

где  $s$  — поперечное сечение поглощения, то есть некоторая площадь, при попадании в которую происходит поглощение фотона молекулой;  $l$  — толщина раствора. Тогда формулу (16.6.1) можно переписать в виде:

$$\frac{dn}{dt} = -\Phi I_0 (1 - e^{-snl}). \quad (16.6.3)$$

Для растворов малых концентраций  $(1 - e^{-snl}) \approx snl$ , тогда

$$\frac{dn}{dt} = -\Phi I_0 snl. \quad (16.6.4)$$

Разделим переменные в формуле (16.6.4) и проинтегрируем полученное выражение:

$$\int_{n_0}^n \frac{dn}{n} = -\int_0^t \Phi I_0 sl \, dt, \quad (16.6.5)$$

где  $n_0$  — начальное число молекул;  $n$  — число молекул, оставшихся неповрежденными после облучения за время  $t$ . Получаем:

$$\ln \frac{n_0}{n} = I_0 t s \Phi. \quad (16.6.6)$$

В этом выражении  $I_0 t = D$  — доза облучения,  $s\Phi = \sigma$  — поперечное сечение инактивации молекулы<sup>1</sup>, которое определяет как

<sup>1</sup> Зависимость поперечного сечения инактивации молекулы от длины волны так же как и зависимость квантового выхода от длины волны, называется *спектром действия*.

вероятность поглощения фотона молекулой, так и вероятность ее химического превращения в результате такого взаимодействия. Тогда в расчете на единицу толщины раствора выражение (16.6.6) можно переписать в виде:

$$\ln \frac{n_0}{n} = D\sigma, \quad (16.6.7)$$

или

$$n = n_0 e^{-D\sigma}. \quad (16.6.8)$$

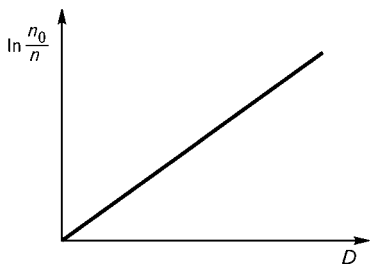


Рис. 16.6.1. Зависимость логарифма отношения исходного числа молекул к числу неповрежденных после облучения дозой  $D$  от величины этой дозы

Величину  $\sigma$  можно определить как тангенс угла наклона прямой  $\ln(n_0/n) = f(D)$  (рис. 16.6.1).

В реальных биологических системах не всегда фотоизменения молекул можно рассматривать по одноударному механизму; кроме того, многие повреждения восстанавливаются с помощью репарационных систем клетки.

## § 16.7. ОПТИЧЕСКОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В МЕДИЦИНЕ

**Оптическое излучение** широко используется при лечении и диагностике ряда заболеваний. Например, тепловой эффект инфракрасного излучения ближней области ( $\lambda = 0,76...2,5$  мкм) используют для прогревания поверхностных слоев тела (на глубине около 2 см). В качестве источника излучения используются специальные лампы. Терморегулирующая система организма для охлаждения нагретого участка усиливает кровообращение в нем, что и вызывает терапевтический эффект.

Небольшие дозы ультрафиолетового облучения оказывают благоприятное действие на сердечно-сосудистую, эндокринную, нейрогуморальную, дыхательную системы. Однако молекулярный механизм такого воздействия ультрафиолета в большинстве случаев точно неизвестен.

Комбинированное действие фотосенсибилизаторов псораленов и ультрафиолетового облучения А-зоны (так называемая ПУФА-терапия) широко используется, иногда как единственный эффективный метод, при лечении ряда кожных заболеваний, например псориаза, витилиго, некоторых форм облысения (гнездная пле-

шивость). Однако ПУФА-терапия имеет ряд побочных эффектов, например, приводит к образованию эритемы, отема.

Излучение гелий-неонового лазера ( $\lambda = 632 \text{ нм}$ ) применяется для ускорения заживления ран. В хирургии используются лазерные скальпели, способные вызвать высокотемпературное разрушение ткани с одновременной коагуляцией белка. Такие операции протекают бескровно и широко практикуются при лечении отслоения сетчатки, глаукомы (лазером прокалываются микроскопические отверстия диаметром 50—100 мкм, что вызывает отток внутриглазной жидкости и, следовательно, понижение внутриглазного давления).

Фотосенсибилизатор гематопорфирин и его производные используют при лечении злокачественных опухолей, так как обнаружено, что эти соединения накапливаются исключительно в опухолевых клетках и отсутствуют в здоровых. Сенсибилизаторы повышают чувствительность опухоли к действию видимого света, облучение которым приводит к ее гибели. Данный метод фотохимиотерапии используют при лечении опухолей как кожи, так и внутренних органов. В последнем случае облучение проводится при помощи специальных световодов. Избирательное накопление в опухолях гематопорфиринов используют и при диагностике онкологических заболеваний, так как люминесценция этих молекул позволяет определить размеры опухоли.

Ультрафиолетовое излучение большой мощности оказывает бактерицидный эффект, что используется при стерилизации медицинских инструментов и помещений. В качестве источника излучения применяются специальные бактерицидные лампы.

Некоторые вещества, например лекарственные препараты промазин, сульфаниламиды, прометазин и другие, в сочетании с ультрафиолетовым излучением вызывают фотоаллергические реакции. Поглощая ультрафиолет А-зоны, эти вещества связываются с белками, образуя антиген (рис. 16.7.1). При первом образовании та-

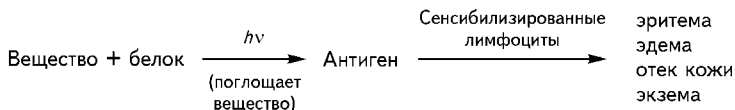


Рис. 16.7.1. Фотоаллергическая реакция организма

кого комплекса «вещество — белок» в результате иммунного ответа организма образуются сенсибилизированные лимфоциты, а при повторном — наблюдаются аллергические реакции и даже анафилактический шок.

## § 16.8. ДОЗЫ ИОНИЗИРУЮЩИХ ИЗЛУЧЕНИЙ

При изучении степени поражения тех или иных биологических объектов важно иметь количественное представление о физических характеристиках излучения, особенно его энергии.

Ионизирующее излучение, прежде всего, характеризуется своей способностью ионизировать среду. Количественно эту характеристику отражает **экспозиционная доза**  $D_{\text{экс}}$ . Экспозиционная доза излучения представляет собой энергетическую характеристику рентгеновского или гамма-излучения, оцениваемую по эффекту ионизации сухого атмосферного воздуха:

$$D_{\text{экс}} = \frac{q}{m}. \quad (16.8.1)$$

Единицей экспозиционной дозы служит кулон на килограмм (Кл/кг) — это экспозиционная доза рентгеновского или  $\gamma$ -излучения, при которой сумма электрических зарядов  $q$  одного знака, образованных в массе  $m = 1$  кг воздуха, равна 1 Кл. Чаще всего экспозиционная доза измеряется во внесистемных единицах — рентгенах ( $1 \text{ Р} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ Кл/кг}$ ).

**Мощность экспозиционной дозы** излучения равна

$$P_{\text{экс}} = \frac{d D_{\text{экс}}}{d t}. \quad (16.8.2)$$

Единицей мощности экспозиционной дозы является ампер на килограмм (А/кг). Используются также внесистемные единицы: рентген в секунду (Р/с),  $1 \text{ Р/с} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ А/кг}$ ; рентген в минуту (Р/мин),  $1 \text{ Р/мин} = 4,30 \cdot 10^{-6} \text{ А/кг}$ ; рентген в час (Р/ч),  $1 \text{ Р/ч} = 7,17 \cdot 10^{-8} \text{ А/кг}$ .

Излучение может оказать какое-либо действие на вещество только в том случае, если произойдет поглощение этого излучения веществом. Поэтому важно знать не экспозиционную, а *поглощенную дозу*, равную отношению поглощенной энергии к массе облучаемого вещества:

$$D_{\text{погл}} = \frac{E_{\text{погл}}}{m}. \quad (16.8.3)$$

Единицей измерения поглощенной дозы является грэй — доза излучения, при которой облученному веществу массой 1 кг передается энергия излучения 1 Дж ( $1 \text{ Гр} = 1 \text{ Дж/кг}$ ) или внесистемная единица рад<sup>1</sup> ( $1 \text{ рад} = 10^{-2} \text{ Дж/кг}$ ).

<sup>1</sup> Аббревиатура от англ. *Radiation Absorbed Dose*.



*Мощность поглощенной дозы* излучения равна

$$P_{\text{погл}} = \frac{d D_{\text{погл}}}{d t} \quad (16.8.4)$$

и измеряется в Гр/с или рад/с.

Экспериментальному измерению поддается экспозиционная, а не поглощенная доза, однако между ними существует зависимость:

$$D_{\text{погл}} = k D_{\text{экс}}, \quad (16.8.5)$$

где  $k$  — некоторый коэффициент, зависящий как от самого излучения, так и от облучаемого вещества.

Действие ионизирующего излучения одинаковой энергии, но разного вида (например,  $\alpha$ -,  $\beta$ - и  $\gamma$ -излучения) оказывает различный биологический эффект, так как эти излучения различаются своей ионизирующей и проникающей способностью. В радиобиологии существуют понятия эквивалентных доз. *Эквивалентная доза* оценивается по биологическому воздействию. Она равна произведению поглощенной дозы  $D_{\text{погл}}$  на *коэффициент качества излучения*  $K$ , характеризующий относительную биологическую активность рассматриваемого излучения:

$$D_{\text{эkv}} = K D_{\text{погл}}. \quad (16.8.6)$$

Коэффициент качества излучения показывает, во сколько раз эффективность биологического действия данного вида излучения больше, чем рентгеновского или  $\gamma$ -излучения, при одинаковой дозе.  $K$  — безразмерный коэффициент. Поэтому эквивалентная доза излучения имеет ту же размерность, что и поглощенная доза излучения, но называется зивертом (Зв), 1 Зв эквивалентен 1 Гр. Доза излучения, оказывающая такой же биологический эффект, как и доза в 1 Р рентгеновского или  $\gamma$ -излучения, составляет 1 бэр (биологический эквивалент рентгена). Коэффициент  $K$  экспериментально определен для каждого вида излучения (табл. 16.8.1).

Иногда облучение биологического объекта производит-

Таблица 16.8.1

**Коэффициенты качества  
различных видов излучения**

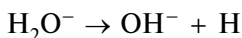
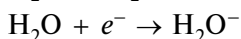
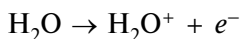
Вид излучения	Коэффициент качества излучения $K$
Рентгеновское, $\gamma$ - и $\beta$ -излучения	1
Тепловые нейтроны ( $\sim 0,01$ эВ)	3
Нейтроны (5 эВ)	7
Нейтроны (0,5 МэВ), протоны	10
$\alpha$ -излучение	20

ся источником, расположенным не снаружи, а внутри, например, при введении в опухолевую ткань радионуклидных игл (указанный метод используется в радиотерапии), радиоактивных изотопов. В этом случае дозы облучения рассчитываются по известным значениям активности изотопов и коэффициентам поглощения данной ткани.

## § 16.9. ВОЗДЕЙСТВИЕ ИОНИЗИРУЮЩЕГО ИЗЛУЧЕНИЯ НА ОРГАНИЗМ

Ионизация и возбуждение молекул, вызванные действием ионизирующей радиации, приводят к химическим изменениям в них, то есть к радиационным повреждениям. Если радиационное поражение молекулы обусловлено непосредственным попаданием в нее кванта, то говорят о прямом действии излучения; если же взаимодействием с радиационными продуктами, то — о непрямом действии излучения.

Поражения клеток вызываются в основном повреждениями молекул белков, нуклеиновых кислот, липидов, которые находятся в водной фазе. Так как количество молекул воды намного превышает количество растворенных в ней молекул, то радиационные повреждения биологических молекул чаще всего вызываются их взаимодействием с продуктами радиолиза воды, в ходе которого образуются сольватированные электроны и свободные радикалы:



В нуклеиновых кислотах под действием ионизирующего излучения происходят изменения как в отдельных нуклеотидах (например, размыкание пиримидинового или имидазольного колец, дезаминирование аденина, гуанина и цитозина, окисление спиртовых групп и разрывы углерод-углеродных связей в дезоксирибозе), так и в спиральной структуре (одно- и двунитевые разрывы цепей ДНК, сшивки между нуклеотидами одной или разных цепей, сшивки ДНК — белок). Вызванные изменения в молекулах нуклеиновых кислот приводят к возникновению генных (изменение нуклеотидного состава отдельного гена) и хромосомных (изменение структуры хромосом) мутаций.

Действие ионизирующего излучения на белки вызывает повреждение аминокислот, разрывы водородных, дисульфидных, поли-

пептидных связей и, как следствие, утрату их биологических функций. Эти нарушения могут быть вызваны как непосредственным попаданием кванта излучения, так и взаимодействием белка со свободными радикалами или другими продуктами радиолиза соседних молекул.

Повреждения липидов в основном вызваны перекисным окислением ненасыщенных жирных кислот. Инициаторами данной реакции являются свободные радикалы воды или самих липидов. Вследствие цепного характера данной реакции поражается значительное число липидных молекул в результате попадания всего лишь одного кванта. Радиационные повреждения липидных молекул приводят к образованию альдегидов, кетонов, спиртов, а также сшивок между молекулами.

В клетке существуют специальные репарационные системы, восстанавливающие поврежденные молекулы. Эти системы способны репарировать молекулы после повреждений, вызванных разными факторами как физической (ультрафиолетовое,  $\gamma$ -облучение), так и химической (химические агенты) природы, потому что в большинстве случаев инициируемые ими повреждения сходны.

В настоящее время известны репарационные системы для восстановления ДНК и мембран. Наиболее хорошо изученными являются системы, репарирующие одно- и двунитевые разрывы ДНК. Повреждения мембран устраняются путем замены поврежденных компонентов (липидов и белков). Обновление компонентов мембраны происходит и в процессе нормального функционирования клетки, но при облучении этот процесс ускоряется. Репарация других биологических соединений, в том числе и белков, не так важна, потому что такие молекулы, если они повреждены, могут вытесняться из метаболизма и заменяться другими.

Репарация повреждений объясняет так называемый *эффект фракционирования*, который заключается в следующем. Допустим, что однократное облучение клеток определенной дозой вызывает 50 %-ную их гибель (доза  $D_{50}$ ). В то же время, если облучение этой же дозой разделить на две полудозы с промежутком времени между ними  $\Delta t$ , то гибель клеток будет составлять менее 50 %, причем выживаемость будет тем выше, чем больше промежуток  $\Delta t$ . Дело в том, что при однократном облучении происходит суммирование и усиление радиоповреждений, а при фракционном облучении — после первой дозы некоторые из возникших повреждений успевают восстановиться. Поэтому суммарные повреждения при однократном облучении выше, чем при фракционном.

Репарационные системы не способны устранить все нарушения. С другой стороны, иногда происходит ошибочная репарация молекул, которая приводит к их повреждениям.

Исследование процессов поражения многоклеточного организма наиболее затруднительно, так как клетки различных тканей обладают различной радиочувствительностью. Согласно правилу *Бергонье—Трибондо*, радиочувствительность клеток в ткани тем выше, чем больше их пролиферативная<sup>1</sup> активность и меньше степень дифференциации. Поэтому в организме человека в первую очередь поражаются стволовые клетки красного костного мозга и эпителия кишечника.

Повреждения клетки неодинаковы в различные фазы ее клеточного цикла. Радиочувствительность клеток максимальна в конце  $G_1$ -фазы (пресинтетической) и в начале  $S$ -фазы (синтетической, или репликативной), так как возникшие в это время повреждения не успевают репарироваться.

Радиобиологические эффекты могут проявляться как непосредственно после облучения, так и через некоторый промежуток времени: месяцы, годы и даже поколения. Например, у человека с отдаленными последствиями облучения могут выступать процессы образования злокачественных опухолей, ослабление иммунитета, сокращение продолжительности жизни, рождение детей с патологиями.

## § 16.10. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА РАДИОПОВРЕЖДЕНИЙ

Количественно степень поражения от радиационного облучения оценивается с помощью так называемых *дозовых кривых* — зависимостей эффекта облучения от дозы излучения. Эффект облучения определяется по некоторой реакции облучаемого объекта, которая называется *тест-реакцией* (таковой может являться, например, выживаемость клеток, радиостойчивость молекул и т. д.). Кривые «доза — эффект» чаще всего имеют экспоненциальную форму, что указывает на то, что даже при очень больших дозах сохраняются выжившие клетки или неповрежденные молекулы. Кривые удобно представлять в полулогарифмической системе координат, так как в этом случае зависимость эффекта от дозы представляет собой прямую.

Допустим, что в качестве тест-реакции выступает отношение числа неповрежденных молекул (клеток)  $N$  к их общему числу  $N_0$ . Тогда уравнение зависимости «доза — эффект» имеет вид:

---

<sup>1</sup> *Пролиферация* (от лат. *proles* — отпрыск, потомство и *fero* — несу) — увеличение числа клеток (или только геномов при полиплоидии) путем митоза.

$$\frac{N}{N_0} = e^{-kD}, \quad (16.10.1)$$

где  $k$  — коэффициент радиочувствительности молекул (клеток);  $D$  — доза облучения.

Для характеристики радиочувствительности молекул или клеток вводится значение дозы, при которой количество неповрежденных объектов уменьшается в  $e$  раз по сравнению с исходным, то есть сохраняется 37 % материала ( $D_{37}$ ), или дозы, при которой сохраняется 50 % материала ( $D_{50}$  или полулетальная доза).

Попадание кванта излучения на данный объект является дискретным и статистическим процессом (принцип попадания); повреждение объекта вызывается попаданием кванта лишь в определенный его участок (принцип мишени); пораженный объект является причиной повреждения других (принцип усилителя). Объяснением последнего принципа являются, например, случаи поражения ДНК, которые приводят к синтезу других молекул ДНК, содержащих эту же ошибку, и белковых молекул, неспособных выполнять необходимую биологическую функцию.

Согласно принципу мишени, отношение числа непораженных клеток  $N$  к их общему числу  $N_0$ , если поражение происходит по одноударному механизму, определяется уравнением:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-VD}, \quad (16.10.2)$$

где  $V$  — объем мишени;  $D$  — доза облучения.

Если же для проявления радиобиологического эффекта требуется  $n$  попаданий в данную мишень (при этом  $n - 1$  попадание эффекта не вызывает), то выживаемость клеток описывается следующим выражением:

$$\frac{N}{N_0} = e^{-VD} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(VD)^k}{k!}, \quad (16.10.3)$$

где  $k$  — число попаданий в мишень ( $k < n$ ).

Чаще всего гибель клетки вызывается поражением не одной, а нескольких мишеней. Допустим,

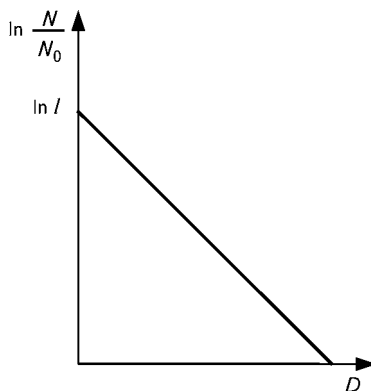


Рис. 16.10.1. Зависимость выживаемости клеток от дозы в полулогарифмической системе координат в случае, когда гибель клетки определяется числом  $l$  поражаемых мишеней

что число этих мишеней равно  $l$ , и гибель клетки произойдет, если в каждую мишень попадет по крайней мере один квант. Тогда выживаемость клеток равна

$$\frac{N}{N_0} = 1 - (1 - e^{-VD})^l. \quad (16.10.4)$$

При больших дозах облучения

$$\frac{N}{N_0} \approx l e^{-VD}, \quad (16.10.5)$$

или после логарифмирования:

$$\ln \frac{N}{N_0} = \ln l - VD. \quad (16.10.6)$$

График этой зависимости (рис. 16.10.1) позволяет определить число поражаемых мишеней  $l$ .

## § 16.11. МОДИФИКАЦИЯ РАДИОБИОЛОГИЧЕСКИХ ЭФФЕКТОВ

Существуют вещества, усиливающие (*радиосенсибилизаторы*) и ослабляющие (*радиопротекторы*) радиобиологический эффект. Действие одних модификаторов проявляется до облучения, а других — после. Первые из них называются модификаторами профилактического действия, а вторые — терапевтического.

Наиболее изученными радиопротекторами являются вещества, обладающие антиоксидантными свойствами, то есть инактивирующие свободные радикалы. На практике широко применяются в качестве радиопротекторов сульфгидрильные соединения: цистеин, цистеамин, цистамин, глутатион. 3-Аминопропиламиноэтилфосфотионовая кислота, являющаяся аналогом цистеамин, применяется в радиотерапии опухолей, так как обеспечивает защиту только здоровых клеток, но не опухолевых. Многие радиопротекторы усиливают репарационные процессы в клетке или продлевают такое состояние клетки, в котором ее репарационные системы наиболее активны и эффективны.

Действие радиосенсибилизаторов основано на их способности усиливать активность малоактивных свободных радикалов, ингибировать ферменты, в частности, обладающие репарационными

свойствами, инактивировать нативные радиопротекторы или конкурировать с теми из них, которые способны перехватить свободный радикал, а также на ряде других механизмов.

В медицинской практике широко используются сенсibilизаторы, избирательно увеличивающие чувствительность к облучению только опухолевых клеток, например, бутионинсульфоксид, диэтилмалеат (понижают содержание сульфгидрильных соединений), мизонидазол (снижает активность репарационных систем).

Эффективность модификаторов (радиопротекторов или радиосенсibilизаторов) оценивается по фактору изменения дозы  $K$ :

$$K = \frac{D}{D_m}, \quad (16.11.1)$$

где  $D$  — доза излучения, обуславливающая некоторое проявление определенного биологического эффекта;  $D_m$  — доза, вызывающая такое же проявление биоэффекта, но в присутствии модификатора. Для радиопротекторов  $K < 1$ ; для радиосенсibilизаторов  $K > 1$ .  $K$  зависит от самой дозы, состояния клетки и ряда других факторов.

## § 16.12. ИОНИЗИРУЮЩЕЕ ИЗЛУЧЕНИЕ В МЕДИЦИНЕ

Рентгеновское и  $\gamma$ -излучение широко применяются в медицинской диагностике для интероскопии<sup>1</sup> организма. Наиболее известным из энтероскопических методов является рентгенодиагностика, которая подразделяется на рентгеноскопию (изображение рассматривается на люминесцирующем экране) и рентгенографию (изображение фиксируется на фотопленке). Для получения более яркого изображения требуется усиление интенсивности рентгеновского облучения, что отрицательно сказывается на здоровье пациента. Поэтому в рентгенологии применяется целый ряд технических средств для улучшения качества изображения при малых интенсивностях облучения.

Для того чтобы исследуемый орган или группа органов была отчетливо видна на рентгенограмме, необходимо, чтобы его коэффициент поглощения рентгеновских лучей отличался от коэффициентов поглощения других тканей. Для диагностических целей

---

<sup>1</sup> *Интероскопия* (от лат. *interior* — внутри и гр. *skopeō* — смотреть) — совокупность методов, позволяющая исследовать внутреннюю структуру биологических объектов, не нарушая их целостности.

обычно применяется излучение  $\lambda = (1...2) \cdot 10^{-11}$  м, для которого массовый коэффициент ослабления определяется по формуле:

$$\mu_m = k\lambda^3 Z^3, \quad (16.12.1)$$

где  $k$  — коэффициент пропорциональности;  $Z$  — заряд ядра вещества поглотителя.

В последнее время получил широкое распространение метод компьютерной томографии, позволяющий с помощью просвечивания тонкими рентгеновскими лучами получать изображение не целого объема ткани, а только ее тонких слоев толщиной 3..5 мм. Этот метод обладает значительно более высокой чувствительностью по сравнению с традиционными рентгенодиагностическими методами, так как позволяет определить различия в поглощении излучения тканью до 0,1 %.

Изображение внутренних органов можно получать также, используя радионуклидный метод диагностики. Известно, что некоторые химические элементы и соединения обладают способностью избирательно накапливаться в каком-либо органе или ткани. Если в это соединение (радиофармпрепарат) включить радиоактивный изотоп и ввести пациенту, то, дождавшись распределения препарата в организме, можно с помощью специальных приборов (например скинтиграфов) определить излучение изотопа в различных участках тела. Естественно, что в областях, где концентрация препарата больше, излучение будет сильнее.

Для исследования, например, щитовидной железы пациенту вводят радиоактивные изотоп  $^{123}\text{I}$ ; печени — краску бенгал-розовую, помеченную  $^{131}\text{I}$ ; костной ткани — фосфатный комплекс, меченный  $^{99}\text{Tc}$ .

Данный метод позволяет определить размеры и очертания органа, а по неоднородностям распределения введенных радиофармпрепаратов судить о ряде заболеваний, например циррозе печени, гепатите, остеопорозе, онкозаболеваниях, определять наличие и расположение метастаз.

При разработке новых радиофармпрепаратов стремятся к тому, чтобы изотоп обладал как можно меньшим периодом полураспада во избежание лишнего облучения организма.

Радиоизотопы используются также для определения ничтожных концентраций в крови некоторых веществ, например гормонов, когда обычные химические методы оказываются неэффективными. Суть данного метода, который называется *радиоиммунологическим*, в следующем. С помощью специальных методов иммунологии для определяемого вещества (антигена) получают антитела, способные связываться именно с ним. Далее в пробирке смешивают антитела,



антигены, помеченные каким-либо радиоактивным изотопом, и кровь пациента, предположительно содержащую эти антигены (немеченые). Антитела и антигены, связываясь друг с другом, образуют комплексы, которые отделяют центрифугированием. Чем выше была концентрация антигена в крови, тем больше антител свяжется с антигенами пациента и меньше — с мечеными антигенами. Если же антиген в крови полностью отсутствовал, то образуются комплексы только с мечеными антигенами. По радиоактивности осадка при известном объеме крови, взятой для анализа, определяют концентрацию антигена в крови.

Радиоиммунологический метод позволяет диагностировать на ранних стадиях целый ряд заболеваний, следить за нормальным протеканием беременности и развитием плода, оказывает неоценимую помощь в научных исследованиях.

Рентгено- и  $\gamma$ -терапию широко используют для лечения онкологических заболеваний. В основе метода лежит тот факт, что наибольшей чувствительностью к облучению обладают активно делящиеся клетки. Поэтому действие ионизирующего излучения вызовет преимущественную гибель именно раковых клеток.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 16.1.** Телом массой  $m = 70$  кг в течение времени  $t = 5$  ч поглощена энергия  $E = 1$  Дж. Определите поглощенную дозу и ее мощность  $P$  в единицах СИ и во внесистемных единицах.

**Решение.** Поглощенная доза определяется как

$$D_n = \frac{E}{m} = \frac{1}{70} = 1,43 \cdot 10^{-2} \text{ Гр} = 1,43 \text{ рад}.$$

Мощность поглощенной дозы равна:

$$P_n = \frac{D_n}{t} = \frac{1,43 \cdot 10^{-2}}{5 \cdot 3600} = 7,9 \cdot 10^{-7} \text{ Гр} \cdot \text{с} = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ рад} \cdot \text{с}.$$

**Задача 16.2.** Для рентгенологического исследования желудка пациент принял раствор сульфата бария  $\text{BaSO}_4$ . Во сколько раз поглощение рентгеновского излучения желудком выше, чем окружающими мягкими тканями ( $\text{H}_2\text{O}$ ), учитывая, что мягкие ткани целиком состоят из воды  $\text{H}_2\text{O}$  и поглощение рентгеновского излучения данным атомом не зависит от того, в каком соединении этот атом находится.

**Решение.** Согласно формуле (16.12.1), отношение массовых коэффициентов поглощения сульфата бария  $\mu_{m\text{BaSO}_4}$  и воды  $\mu_{m\text{H}_2\text{O}}$  составляет

$$\frac{\mu_{m\text{BaSO}_4}}{\mu_{m\text{H}_2\text{O}}} = \frac{k\lambda^3(n_{\text{Ba}}Z_{\text{Ba}}^3 + n_{\text{S}}Z_{\text{S}}^3 + n_{\text{O}}Z_{\text{O}}^3)}{k\lambda^3(n_{\text{H}}Z_{\text{H}}^3 + n_{\text{O}}Z_{\text{O}}^3)} = \frac{1 \cdot 56^3 + 1 \cdot 16^3 + 4 \cdot 8^3}{2 \cdot 1^3 + 1 \cdot 8^3} \approx 354,$$

где  $n$  — число атомов данного элемента в соединении;  $Z$  — заряд ядра данного атома.

То есть желудок с введенным  $\text{BaSO}_4$  поглощает рентгеновское излучение в 354 раза больше, чем окружающие мягкие ткани.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**16.1.** Под действием света длиной волны  $\lambda = 500$  нм и энергией  $E = 30$  кДж образуется 5 ммоль молекул органического соединения. Вычислите квантовый выход этой фотохимической реакции.

**16.2.** Сколько молей вещества образуется в фотохимической реакции за время  $t = 30$  мин при облучении мягким ультрафиолетом ( $\lambda = 350$  нм) мощностью  $P = 15,8$  Вт, если квантовый выход реакции  $\Phi = 0,1$ .

**16.3.** Для радиоизотопного исследования щитовидной железы используется раствор изотопа йода  $^{131}_{53}\text{I}$  ( $T_{1/2} = 8$  сут) концентрацией  $c = 1,3 \cdot 10^{-11}$  мкг/мл. Сколько миллилитров раствора необходимо ввести пациенту, чтобы активность препарата составляла  $a = 0,5$  Бк?

**16.4.** В организме находится  $m = 15$  нг изотопа стронция  $^{90}_{38}\text{Sr}$  ( $T_{1/2} = 28$  лет). Сколько изотопов распадается за 1 год?

**16.5.** Поглощенная доза излучения для человека массой  $m = 70$  кг составила  $D = 0,3$  Гр. Вычислите поглощенную энергию  $E_{\text{полг}}$  ионизирующего излучения.

**16.6.** Используя условие задачи (16.5), вычислите мощность поглощенной дозы  $P_{\text{полг}}$ , если облучение происходило в течение 8 час.

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**16.1.** Энергия микроволнового излучения достаточна:

- а) для возбуждения атомов, но не их ионизации;
- б) возбуждения и ионизации атомов;
- в) преимущественно ионизации атомов;
- г) недостаточна ни для того, ни для другого;
- д) правильного ответа нет.

**16.2.** Глубиной проникновения электромагнитного излучения в биологические ткани называется расстояние, на котором:

- а) мощность падающей энергии увеличивается в  $e$  раз;
- б) длина волны излучения увеличивается в  $e$  раз;
- в) мощность падающей энергии уменьшается в  $e$  раз;
- г) длина волны излучения уменьшается в  $e$  раз;
- д) длина волны излучения уменьшается в 10 раз.

**16.3.** Для возбуждения атомов необходимо, чтобы:

- а) энергия излучения была намного меньше разности энергий между двумя электронными уровнями;
- б) энергия излучения приблизительно равнялась разности энергий между двумя электронными уровнями;
- в) энергия излучения намного превышала разность энергий между двумя электронными уровнями;
- г) мощность излучения превышала  $1 \text{ Вт/м}^2$ ;
- д) мощность излучения была меньше, чем  $1 \text{ Вт/м}^2$ .

**16.4.** Длина волны, на которую приходится максимум поглощения данного вещества, зависит от количества сопряженных двойных связей  $N$  в молекуле следующим образом:

- а)  $\lambda \approx \frac{3mhl^2}{c} N$  ;
- б)  $\lambda \approx \frac{5\sqrt{mcl}}{N}$  ;
- в)  $\lambda \approx \frac{5l^2}{mcN}$  ;
- г)  $\lambda \approx \frac{4hcl}{m} N$  ;
- д)  $\lambda \approx \frac{4mcl^2}{h} N$  .

**16.5.** Энергия излучения оптического диапазона (кроме дальнего ультрафиолета), как правило, достаточна для:

- а) возбуждения атомов, но не их ионизации;
- б) возбуждения и ионизации атомов;
- в) преимущественно ионизации атомов;
- г) недостаточна ни для того, ни для другого;
- д) правильного ответа нет.

**16.6.** Глубина проникновения ультрафиолетового излучения в вещество составляет порядка;

- а) 1 мкм;    б) 0,1 мм;    в) 1 мм;    г) 1 см;    д) 1 м.

**16.7.** Основной вклад в фотоповреждения белков вносят:

- а) заряженные аминокислоты;
- б) полярные аминокислоты;
- в) гидрофильные аминокислоты;
- г) алифатические аминокислоты;
- д) ароматические аминокислоты.

**16.8.** Максимум поглощения ДНК приходится на длину волны:

- а) 260 нм;    б) 350 нм;    в) 400 нм;    г) 1000 нм;    д) 1 см.

**16.9.** Ионизирующее излучение включает:

- а) излучение радиодиапазона и инфракрасное излучение;
- б) дальнюю область ультрафиолетового излучения, рентгеновское и  $\gamma$ -излучение;
- в) излучение радиодиапазона и ультрафиолетовое излучение;
- г) рентгеновское и  $\gamma$ -излучение;
- д) инфракрасное, видимое и ультрафиолетовое излучения.

**16.10.** Ионизирующее излучение вызывает

- а) возбуждение атомов, но не их ионизацию;
- б) возбуждение и ионизацию атомов;
- в) преимущественно ионизацию атомов;
- г) не вызывает ни того ни другого;
- д) правильного ответа нет.

**16.11.** Радиопротекторы:

- а) уменьшают нагревание ткани при облучении волнами радиочастотного диапазона;
- б) увеличивают нагревание ткани при облучении волнами радиочастотного диапазона;
- в) увеличивают радиобиологический эффект при облучении ионизирующим излучением;
- г) ослабляют радиобиологический эффект при облучении ионизирующим излучением;
- д) способствуют увеличению контрастности рентгеновских снимков.

**16.12.** Массовый коэффициент ослабления излучения волн длиной  $\lambda = (1...2) \cdot 10^{-11}$  м пропорционален:

- а)  $\lambda^2 Z^2$ ; б)  $\sqrt[3]{\lambda Z}$ ; в)  $\lambda^3 Z^3$ ; г)  $\sqrt[2]{\lambda Z}$ ; д)  $\lambda^3 \sqrt{Z}$ .

# СОБСТВЕННЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОЛЯ ЧЕЛОВЕКА

Процессы, происходящие в живом организме, создают физические поля: электромагнитные и акустические. Источниками электромагнитного излучения являются электрическая активность органов, трение одежды о тело; акустического — биение сердца, ток крови по сосудам, излучение из уха человека (так называемое кохлеарное излучение), тепловое движение атомов и молекул (мегагерцевый диапазон) и др. Диапазон длин волн электромагнитного излучения тела человека — от 60 см (радиодиапазон) до 0,5 мкм (оптический диапазон), а диапазон акустического излучения — от 0,01 Гц (инфразвук) до 10 МГц (ультразвук).

Эти поля, а также их изменение во времени позволяют получить информацию о физиологических процессах в организме. В медицинской практике широко используются с диагностической целью методы измерения электрической активности сердца, мозга и других органов, тепловидение (получение температурных карт участков тела) и многие другие методы.

## § 17.1. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ И МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ ЧЕЛОВЕКА. ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОКАРДИОГРАФИИ

Каждая клетка организма обладает электрическим потенциалом. Потенциал некоторых из них (например, нервных и мышечных) меняется во времени, в связи с чем изменяется и потенциал целых органов и тканей. Зависимость электрического потенциала какого-либо органа или ткани от времени называется *э л е к т р о г р а м м о й*, а диагностический метод исследования — *электрографией*. Электрографический метод применяется для клинической диагностики заболеваний целого ряда органов — сердца (*электрокардиография*), мышц (*электромиография*), головного мозга (*электроэнцефалография*), сетчатки глаза (*электроретинография*) и др.

Для измерения разности потенциалов между какими-либо двумя точками органа можно непосредственно приложить к нему электроды. Однако такой прямой метод электрографии на практике почти не используется. Разность потенциалов измеряется на поверхности тела, а вся совокупность клеток исследуемого органа (ввиду невозможности математического описания изменения в пространстве и времени электрического потенциала каждого отдельного волокна) представляется в виде модели *эквивалентного генератора*, который создает такой же электрический потенциал на поверхности тела, что и данный орган.

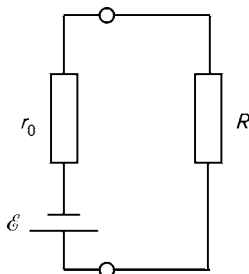


Рис. 17.1.1. Эквивалентная электрическая схема токового электрического генератора и внешней проводящей среды

В электрографии существуют две задачи: прямая — определение электрического потенциала на поверхности тела по известным характеристикам эквивалентного генератора и обратная — определение характеристик эквивалентного генератора (то есть исследуемого органа) по электрическому потенциалу, созданному им на поверхности тела. Решение последней задачи играет важнейшую роль в диагностике ряда заболеваний. Рассмотрим это на примере наиболее распространенного метода — **электрокардиографии**.

Эквивалентный генератор сердца представляют в виде токового электрического диполя (источника электродвижущей силы  $\mathcal{E}$ ) с внутренним сопротивлением  $r$ , замкнутым на внешнее сопротивление  $R$  (рис. 17.1.1), причем  $r \gg R$ . Сопротивление  $R$  является аналогом сопротивления среды, окружающей сердце. Согласно закону Ома для полной цепи,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{r_0 + R} \approx \frac{\mathcal{E}}{r_0}. \quad (17.1.1)$$

Следовательно, ток в системе не зависит от сопротивления внешней среды.

Для расчета электрического потенциала, создаваемого в произвольной точке пространства электрическим полем диполя, требуется рассчитать распределение потенциала униполя — одного из полюсов диполя. Запишем закон Ома в дифференциальной форме:

$$j = \sigma E = -\frac{1}{\rho} \frac{d\varphi}{dr}, \quad (17.1.2)$$

где  $j$  — плотность тока;  $\sigma$  — удельная электропроводность;  $\rho$  — удельное сопротивление;  $\varphi$  — потенциал;  $r$  — расстояние от униполя до некоторой точки.

По определению, плотность тока, протекающего через сферическую поверхность радиуса  $r$ , равна

$$j = \frac{I}{S} = \frac{I}{4\pi r^2}, \quad (17.1.3)$$

где  $I$  — ток в цепи.

Приравняв формулы (17.1.2) и (17.1.3), получаем:

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d\varphi}{dr} = \frac{I}{4\pi r^2}. \quad (17.1.4)$$

Разделим переменные в выражении (17.1.4) и проинтегрируем:

$$\int_{\varphi}^0 d\varphi = - \int_r^{\infty} \frac{\rho I}{4\pi r^2} dr. \quad (17.1.5)$$

Здесь мы полагаем, что при  $r \rightarrow \infty$   $\varphi \rightarrow 0$ , а также то, что диполь находится в однородной бесконечной проводящей среде с удельным электрическим сопротивлением  $\rho$ . Тогда

$$\varphi = \frac{\rho I}{4\pi r}. \quad (17.1.6)$$

Потенциал электрического поля, созданного несколькими униполями в некоторой точке пространства А, равен алгебраической сумме потенциалов электрических полей, созданных каждым из униполей (принцип суперпозиции). Для диполя, состоящего из одного положительного и одного отрицательного униполей, потенциал на расстоянии  $r_1$  от положительного полюса и  $r$  — от отрицательного равен (рис. 17.1.2)

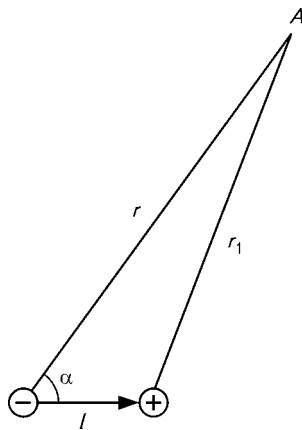


Рис. 17.1.2. Схема к выводу формулы электрического потенциала диполя

$$\varphi = \frac{\rho I}{4\pi r_1} - \frac{\rho I}{4\pi r}. \quad (17.1.7)$$

По теореме косинусов:

$$r_1 = \sqrt{l^2 + r^2 - 2rl \cos \alpha}, \quad (17.1.8)$$

где  $l$  — расстояние между полюсами диполя.

Тогда

$$\varphi = \frac{\rho I}{4\pi \sqrt{l^2 + r^2 - 2rl \cos \alpha}} - \frac{\rho I}{4\pi r} = \frac{\rho I}{4\pi r} \left( \frac{1}{\sqrt{(l^2 - 2rl \cos \alpha) / r^2 + 1}} - 1 \right) =$$

$$= \frac{\rho I}{4\pi r} \left( \frac{1}{\sqrt{x+1}} - 1 \right), \quad (17.1.9)$$

где  $x = \frac{l^2 - 2rl \cos \alpha}{r^2}$ . Если  $r > l$ , то  $-1 < x < 1$ . Тогда функцию  $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$  можно разложить в биномиальный ряд:

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}x^2 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}x^3 + \dots \quad (17.1.10)$$

Подставим это разложение в формулу (17.1.9), ограничившись первыми двумя слагаемыми:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\rho I}{4\pi r} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{l^2 - 2rl \cos \alpha}{r^2} - 1 \right) = \frac{\rho I}{4\pi r} \frac{2rl \cos \alpha - l^2}{2r^2} = \\ &= \frac{\rho I}{4\pi r} \left( \frac{l \cos \alpha}{r} - \frac{l^2}{2r^2} \right). \end{aligned} \quad (17.1.11)$$

При  $r \gg l$   $l^2/r^2 \rightarrow 0$ , тогда

$$\varphi = \frac{\rho I}{4\pi r} \frac{l \cos \alpha}{r} = \frac{\rho D \cos \alpha}{4\pi r^2}, \quad (17.1.12)$$

где  $D = Il$  – модуль дипольного момента дипольного электрического генератора<sup>1</sup>. Вектор  $\vec{D}$  направлен от отрицательного полюса к положительному. В медицинской терминологии употребляется понятие «интегральный электрический вектор сердца», являющийся векторной суммой всех дипольных моментов каждого отдельного сердечного волокна

$$\vec{D} = \sum_{j=1}^m \vec{D}_j. \quad (17.1.13)$$

Экспериментально измеряют не потенциал в некоторой точке, а разность потенциалов между двумя точками  $A$  и  $B$ , полагая, что они находятся на одинаковом расстоянии  $r$  от диполя (рис. 17.1.3):

$$\Delta\varphi = \varphi_B - \varphi_A = \frac{\rho D}{4\pi r^2} (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1), \quad (17.1.14)$$

где  $\gamma$  – угол между прямой  $AB$  и направлением дипольного момента  $\vec{D}$ ,  $\alpha_1 = \pi/2 - \beta/2 + \gamma$ ;  $\alpha_2 = \pi/2 + \beta/2 + \gamma$ . Тогда, согласно законам тригонометрии,

$$\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 = 2 \sin \frac{\pi + 2\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} = 2 \cos \gamma \sin \frac{\beta}{2}. \quad (17.1.15)$$

<sup>1</sup> Данную характеристику не следует путать с дипольным, или электрическим моментом, равным  $p = ql$ .



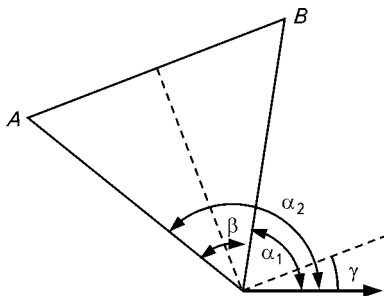


Рис. 17.1.3. Схема к выводу формулы для разности потенциалов электрического поля диполя

Из формул (17.1.14) и (17.1.15) получаем разность потенциалов:

$$\Delta\varphi = \frac{\rho D \sin(\beta/2) \cos \gamma}{2\pi r^2}. \quad (17.1.16)$$

Таким образом, разность потенциалов между некоторыми точками тем больше, чем больше удельное сопротивление среды  $\rho$ , расстояние между этими точками  $[\sim \sin(\beta/2)]$ , проекция вектора  $\vec{D}$  на прямую  $AB$  ( $D \cos \gamma$ ) и меньше расстояние  $r$ .

В основе электрокардиографии лежит **теория Эйнтховена**, согласно которой:

а) сердце представляют в виде дипольного генератора с дипольным моментом  $\vec{D}$ ;

б) направление и величина вектора  $\vec{D}$  в процессе сердечной деятельности периодически меняется во времени (соответственно с таким же периодом изменяется и разность потенциалов между некоторыми двумя точками тела, к которым приложены электроды);

в) начало вектора  $\vec{D}$  не изменяет своего положения в пространстве и находится в антриовентрикулярном узле;

г) окружающие сердце ткани представляют собой однородную изотропную среду.

В электрокардиографии обычно измеряются разности потенциалов между: правой рукой и левой рукой (I отведение); правой рукой и левой ногой (II отведение); левой рукой и левой ногой (III отведение). Фактически разность потенциалов измеряется между точками, в которых конечности соединяются с туловищем, так как конечности выступают как проводники. При этом дипольный момент  $\vec{D}$  оказывается в центре треугольника, который приблизительно считается равносторонним (рис. 17.1.4). На практике иногда используют и другие отведения, например, по Гольдбергеру или Вильсону.

Электрокардиография принимает целый ряд допущений. В самом деле: а) источник электрического поля сердца нельзя пред-

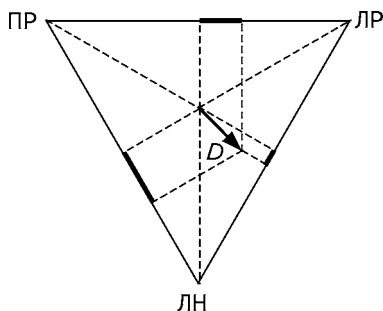


Рис. 17.1.4. Треугольник Эйнтховена:  $\vec{D}$  — дипольный момент токового генератора сердца; ПР — правая рука; ЛР — левая рука; ЛН — левая нога.

ставить в виде одного диполя; б) вращение вектора  $\vec{D}$  происходит по всему объему, и для его описания недостаточно проекции только на одну плоскость; в) начало вектора  $\vec{D}$  смещается; г) организм не является однородной средой, кроме того, его проводимость меняется не только в пространстве, но и во времени (например при вдохе и выдохе).

Но, несмотря на существующие допущения, электрокардиограмма позволяет диагностировать целый ряд заболеваний: тахи- и брадикардию, различные виды аритмий (а также выявлять их источник), нарушения проведения и их локализацию (например, вызваны они нарушением проведения внутри желудочка, в атриовентрикулярном узле или в каком-либо другом отделе), пороки сердца, инфаркт миокарда и другие, а также выявлять действие на организм факторов химической природы — ядов и лекарственных препаратов (например наперстянки).

Для получения информации о пространственной ориентации дипольного момента сердца используется метод **векторкардиографии**. С помощью расположенных соответствующим образом на теле пациента электродов на экране осциллографа получают изменяющуюся во времени на протяжении кардиомиоцикла проекцию на некоторую плоскость вектора  $\vec{D}$  — плоскую векторкардиограмму. Для этого на горизонтально отклоняющие пластины осциллографа подают напряжение от одного отведения, а на вертикально отклоняющие — от другого. Трехмерную векторную петлю (пространственную векторкардиограмму) получают по ее проекциям на три плоскости: фронтальную, горизонтальную и сагитальную.

Векторкардиография имеет ряд достоинств по сравнению с электрокардиографией, но иногда диагностировать некоторые заболевания (например аритмию) легче по электрокардиограмме.

Для анализа электрограмм мозга и других органов используют другие модели эквивалентных электрических генераторов. Например, мозг представляют в виде большого числа диполей.

В последнее время в медицине используются методы измерения магнитных полей сердца (**магнитокардиография**) и мозга (**магнитоэнцефалография**). Источником магнитного поля являются движущиеся заряды, то есть электрический ток, который, в свою очередь, пропорционален напряжению. Поэтому магнитограммы во многом схожи с электрограммами и в то же время позволяют получить некоторую дополнительную информацию.

Магнитное поле тела человека намного слабее магнитного поля Земли, магнитная индукция которого составляет  $5 \cdot 10^{-5}$  Тл (для сравнения, индукция магнитного поля сердца —  $10^{-11}$  Тл, а мозга —  $10^{-13}$  Тл), что создает при получении магнитограмм существенные трудности. Их обходят следующим образом: измеряют

индукцию поля около поверхности тела ( $B_1$ ) и на некотором расстоянии от него ( $B_2$ ). Магнитное поле Земли и другие помехи будут почти одинаковыми в этих двух точках, а магнитное поле человека значительно уменьшится. Поэтому разность ( $B_1 - B_2$ ) будет характеризовать магнитное поле тела человека.

Магнитография позволяет получать временную и пространственную картины магнитного поля какого-либо органа, для чего снимают несколько последовательных магнитограмм отдельных участков органа. Одним из преимуществ магнитографии по сравнению с электрографией является возможность локализовать источник магнитного поля (приблизительно до 1 см). Поэтому магнитографию можно использовать для исследования электрической активности сердца плода. В этом случае снятие электрокардиограммы невозможно, так как электрический сигнал сердца плода заглушается сердцем матери.

## § 17.2. ТЕПЛОВОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

Любое тело, температура которого выше 0 К, является источником теплового излучения (см. § 13.8). Согласно закону Стефана—Больцмана, энергетическая светимость любого тела прямо пропорциональна четвертой степени его абсолютной температуры. Поэтому измерение энергетической светимости тела человека позволяет определять с высокой точностью его температуру.

Спектр теплового излучения (зависимости спектральной плотности энергетической светимости от длины волны) является сплошным, положение его максимума зависит от температуры тела. При температуре тела человека максимум излучения приходится на длину волны 9,3 мкм (инфракрасный диапазон). Поэтому большинство тепловизоров — приборов, позволяющих получать тепловое изображение предметов, — измеряют излучение в диапазоне 3—10 мкм.

Устройство тепловизора во многом схоже с обычным телевизором, но телевизионное изображение передает информацию об отраженном от поверхности предметов излучении оптического диапазона, в то время как тепловизионное — о собственном тепловом излучении тел, как правило, в инфракрасном диапазоне.

Существуют черно-белые и цветные тепловизоры. Во-первых участки тела, температура которых различна, отличаются на экране яркостью; во-вторых — цветом. С помощью тепловизоров можно получить как мгновенное, так и динамическое распределение температуры различных участков тела. Например, при распростра-

нении волны возбуждения в головном мозге последовательно меняется температура его отделов. Метод получения карты распределения температуры коры головного мозга называется **термоэнцелоскопией**. К сожалению, применение этого метода ограничено в связи с сильным поглощением теплового излучения мозга черепной коробкой и волосами, поэтому метод применяется только во время нейрохирургических операций на открытом мозге. Тепловидение позволяет определить участки тела, в которых нарушено кровоснабжение, или очаги воспаления, так как в первом случае температура снижается, а во втором, наоборот, повышается.

Инфракрасное излучение сильно поглощается телом и затухает на расстоянии 100 мкм, поэтому тепловизионные методы позволяют измерять температуру только верхних слоев кожи. Для определения температуры глубинных слоев измеряется интенсивность излучения тела в СВЧ-диапазоне, для которого глубина проникновения волны значительно выше (порядка нескольких сантиметров). Измерение проводят с помощью так называемых СВЧ-радиометров. Однако здесь возникают другие трудности: во-первых, изменение интенсивности излучения с перепадом температуры на 1 К составляет всего лишь  $2 \cdot 10^{-13}$  Вт/м<sup>2</sup>; во-вторых, не всегда удастся определить источник изменения температуры, так как неизвестно, на какой глубине он находится.

Тем не менее метод СВЧ-радиометрии нашел применение в медицине, в частности в диагностике злокачественных опухолей. Известно, что опухоли для продолжения своего роста нуждаются в больших количествах энергии, в то же время эффективность превращения энергии, содержащейся в углеводах, в энергию АТФ в опухолевых клетках гораздо ниже, чем в здоровых клетках, что приводит к большему разогреву опухолей по сравнению с окружающими тканями. Перед исследованием больному дают немного раствора глюкозы. Тогда при измерении СВЧ-излучения исследуемого органа в местах локализации опухолей или метастаз фиксируется увеличение температуры.

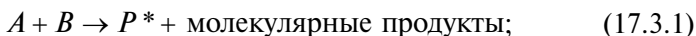
### § 17.3. БИОЛЮМИНЕСЦЕНЦИЯ

Некоторые процессы, протекающие в биологических системах, сопровождаются явлением **люминесценции**. Свечение ряда организмов (некоторых бактерий, моллюсков, глубоководных рыб, насекомых и других) происходит в видимой области спектра с участием ферментов люцифераз и часто служит информационным сигналом для других особей или является защитной реакцией.

В большинстве же случаев свечение животных и растений является сверхслабым, поэтому это явление было обнаружено лишь во второй половине XX века, когда появились чувствительные приборы, способные регистрировать единичные кванты излучения.

**Хемилюминесценция** сопровождает ряд биохимических реакций, наиболее распространенным и изученным примером которых являются реакции перекисного окисления липидов. Кроме того, хемилюминесценция может быть вызвана воздействием на биологические системы внешних физических факторов: облучением ионизирующей радиацией (радиохемилюминесценция), видимым или ультрафиолетовым излучением (фотохемилюминесценция), воздействием ультразвука (сонохемилюминесценция) и др.

Хемилюминесценция возникает в том случае, если энергии какой-либо химической реакции достаточно для образования продуктов в электронно-возбужденном состоянии ( $P^*$ ). Переход последних в основное состояние ( $P$ ) сопровождается излучением кванта света:



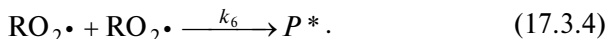
Реакции, сопровождающиеся излучением, происходят с участием реагентов, имеющих неспаренные электроны (свободные радикалы), или циклических пероксидных веществ. В процессе реакции происходит перенос электрона (между молекулами или внутри одной молекулы от одной химической группы к другой), но не на основной, а на возбужденный уровень. Такой перенос может происходить как на триплетный, так и на возбужденный синглетный уровни, но поскольку энергия триплетного уровня ниже, то в большинстве случаев перенос происходит именно на этот уровень. Соответственно биолюминесценция чаще является фосфоресценцией, чем флуоресценцией.

Наиболее распространенными биохимическими реакциями, сопровождающимися люминесценцией, являются процессы перекисного окисления липидов:



где  $\text{RO}_2\cdot$  — перекисный радикал;  $\text{RH}$  — липид;  $\text{R}\cdot$  — радикал липида;  $\text{ROOH}$  — гидроперекись;  $k_2$  — константа скорости реакции.

Реакцией, ответственной за свечение в цепи реакций перекисного окисления, является реакция диспропорционирования перекисных радикалов липидов, в ходе которой образуются продукты в возбужденном состоянии:



Их переход в основное состояние сопровождается испусканием кванта люминесценции:



Поэтому интенсивность люминесценции равна скорости убыли в системе числа возбужденных молекул и прямо пропорциональна квадрату концентрации в системе перекисных радикалов  $\text{RO}_2\cdot$ :

$$I = \Phi \left( \frac{dP^*}{dt} \right) = \Phi k_6 [\text{RO}_2\cdot]^2 , \quad (17.3.6)$$

где  $I$  — интенсивность хемилюминесценции во всех направлениях и на всех длинах волн;  $\Phi$  — *квантовый выход хемилюминесценции* (отношение числа испущенных фотонов к числу прореагировавших молекул).

Из реакций (17.3.3) и (17.3.6) следует, что скорость перекисного окисления липидов  $v$  определяется как

$$v = k_2 [\text{RH}] [\text{RO}_2\cdot] = k_2 [\text{RH}] \sqrt{\frac{I}{\Phi k_6}} . \quad (17.3.7)$$

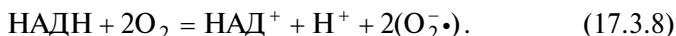
Таким образом, явление люминесценции позволяет количественно определить скорость процессов перекисного окисления липидов.

Исследование люминесценции, сопровождающей реакции перекисного окисления липидов, сыграло большую роль в установлении схемы этих реакций, механизма действия и эффективности анти- и прооксидантов (веществ соответственно замедляющих и усиливающих перекисное окисление). Определение скорости перекисного окисления позволяет судить об уровне обменных процессов в клетке при воздействии химических и физических факторов, патологических состояниях и т. п.

Измерение интенсивности люминесценции используется в медицине. Например, интенсивность спонтанной люминесценции сыворотки крови больных туберкулезом значительно выше, чем у здоровых людей, а больных раком легких — значительно ниже.

При некоторых заболеваниях (например некрозах, острых воспалительных реакциях) интенсивность хемилюминесцентного ответа резко увеличивается. Например, у пациентов, перенесших инфаркт миокарда, хемилюминесцентный ответ намного выше, чем у пациентов, страдающих ишемической болезнью сердца.

Фагоцитирующие клетки крови и тканей в ответ на действие ряда внешних факторов (например некоторых химических соединений, пылей, компонентов бактериальных стенок и др.) способны вырабатывать супероксидные радикалы  $O_2^- \cdot$  в результате реакции с никотинамидадениндинуклеотидом (НАД):



На способности фагоцитов люминесцировать в ответ на действие раздражающих факторов основан целый ряд методов медико-биологических исследований. В частности, действие некоторых факторов (например кальциевых ионофоров, импульсов электрических полей и других) вызывают увеличение проницаемости мембраны для ионов  $Ca^{2+}$ , которые запускают последовательность реакций, сопровождающихся выделением супероксидных радикалов, а следовательно, — люминесценцией. Таким образом, данный метод позволяет изучать влияние некоторых агентов на проницаемость мембран.

Чувствительность людей к действию различных веществ, в частности лекарственных препаратов, неодинакова. Взаимодействие этих веществ с фагоцитами сопровождается хемилюминесцентной реакцией различной интенсивности. Это позволяет выявлять повышенную чувствительность человека к данному аллергену.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 17.1.** При снятии электрокардиограммы в одном из отведений была получена максимальная разность потенциалов  $\Delta\varphi = 1$  мВ. Вычислите модуль электрического вектора сердца  $D$ , если удельное электрическое сопротивление среды  $\rho = 15$  Ом  $\cdot$  м, расстояние от токового генератора до вершин равностороннего треугольника Эйнтховена  $r = 0,2$  м.

**Решение.** Разность потенциалов между двумя точками, находящимися на одинаковом расстоянии  $r$  от диполя, равна:

$$\Delta\varphi = \frac{\rho D \sin(\beta/2) \cos \gamma}{2\pi r^2},$$

откуда

$$D = \frac{2\pi r^2 \Delta\varphi}{\rho \sin(\beta/2) \cos \gamma}. \quad (17.1)$$

Разность потенциалов зависит от угла  $\gamma$  между осью диполя и осью отведения и максимальна при их параллельной ориентации (см. рис. 17.1.4).

При  $\gamma = 0$   $\cos \gamma = 1$  (см. рис. 17.1.3). Так как треугольник Эйнтховена равносторонний, то  $\beta = 120^\circ$ . Подставив численные данные в формулу (17.1), получаем:

$$D = \frac{2\pi(0,2)^2 \cdot 10^{-3}}{15 \sin(120^\circ/2) \cos 0} = 1,9 \cdot 10^{-5} \text{ А} \cdot \text{м}.$$

**Задача 17.2.** На сколько процентов увеличится энергетическая светимость тела человека, если его температура ( $37^\circ\text{C}$ ) увеличится на  $1^\circ\text{C}$ . Тело человека считать серым телом.

**Решение.** Согласно закону Стефана—Больцмана, энергетическая светимость серого тела составляет:

$$R_e = \alpha \sigma T^4,$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана,  $\sigma = 5,6696 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ ,  $\alpha$  — коэффициент поглощения серого тела.

Тогда отношение энергетических светимостей для двух разных температур составит:

$$\frac{R_{e2}}{R_{e1}} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^4 = \left( \frac{310 + 1}{310} \right)^4 = 1,013.$$

То есть энергетическая светимость тела человека в этом случае увеличится на 1,3 %, в то время как температура увеличилась только на 0,3 %.

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**17.1.** Вычислите разность потенциалов  $\Delta\varphi$  между двумя вершинами равностороннего треугольника Эйнтховена, если электрический вектор сердца ориентирован под углом  $\gamma = 60^\circ$  к оси отведения и равен  $|\vec{D}| = 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ А} \cdot \text{м}$ . Расстояние от электрического вектора до вершин треугольника  $r = 25 \text{ см}$ , удельное электрическое сопротивление среды  $\rho = 15 \text{ Ом} \cdot \text{м}$ .

**17.2.** Под каким углом  $\gamma$  находится в данный момент электрический вектор сердца к оси отведения, если зафиксирована разность потенциалов  $\Delta\varphi = 0,68 \text{ мВ}$ , а максимальная разность потенциалов в этом отведении  $\Delta\varphi_{\max} = 0,80 \text{ мВ}$ .

**17.3.** Определите мощность теплового излучения раздетого человека с  $S = 1 \text{ м}^2$  поверхности тела, если температура кожи  $t_1 = 30^\circ\text{C}$ , окружающей среды —  $t_2 = 20^\circ\text{C}$ . Коэффициент поглощения кожи  $k = 0,9$ .

**17.4.** Интенсивность излучения тела человека увеличилась на 2,62 %. На сколько процентов возросла температура?

**17.5.** Определите длину волны  $\lambda_{\max}$ , соответствующую максимуму спектральной плотности энергетической светимости тела человека, считая его серым телом. Температура кожи  $t = 30^\circ\text{C}$ .



**17.6.** На сколько сместится максимум спектральной плотности энергетической светимости, если температура тела человека повысится от  $t_1 = 36$  до  $t_2 = 37$  °С.

### ВОПРОСЫ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**17.1.** Потенциал электрического поля диполя составляет:

а)  $\varphi = \frac{4\pi\rho I}{r}$ ; б)  $\varphi = \frac{4\pi r}{\rho I}$ ; в)  $\varphi = \frac{4\rho}{\pi r}$ ; г)  $\varphi = \frac{\rho I}{4\pi r}$ ; д)  $\varphi = \frac{\rho}{4\pi I r}$ .

**17.2.** Инфракрасное излучение проникает наружу из глубины тела не более, чем на:

а) 1 нм; б) 1 мкм; в) 0,1 мм г) 1 см; д) 1 м.

**17.3.** СВЧ-излучение проникает наружу из глубины тела не более, чем на:

а) 1 нм; б) 1 мкм; в) 0,1 мм г) 1 см; д) 1 м.

**17.4.** Хемилюминесценция возникает в том случае, если в ходе реакции образуются:

- а) циклические соединения;
- б) продукты в электронно-возбужденном состоянии;
- в) соединения, содержащие макроэргические связи;
- г) соединения, содержащие сопряженные двойные связи;
- д) ионы.

**17.5.** Квантовым выходом хемилюминесценции называется:

- а) отношение числа выпущенных фотонов к числу прореагировавших молекул;
- б) отношение числа поглощенных фотонов к числу прореагировавших молекул;
- в) то же самое, что и скорость реакции;
- г) величина, которая численно равна квадратному корню из интенсивности люминесценции;
- д) коэффициент пропорциональности между скоростью реакции и концентрацией реагирующего вещества.

**17.6.** Скорость перекисного окисления липидов составляет:

а)  $v = k_2[\text{RH}] \sqrt{I\Phi k_6}$ ; г)  $v = k_2[\text{RH}] I \sqrt{\Phi k_6}$ ;  
б)  $v = k_2[\text{RH}] \sqrt{\Phi / (Ik_6)}$ ; д)  $v = k_2[\text{RH}] \sqrt{I / (\Phi k_6)}$ .  
в)  $v = k_2[\text{RH}] [I / (\Phi k_6)]^2$ ;

# ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛЕКАРСТВЕННЫХ СРЕДСТВ

Создание новых лекарственных препаратов и их анализ, модификация ранее разработанных соединений, контроль качества, чистоты и другие подобные задачи требуют от химика-фармацевта обширных знаний во многих областях науки. Так, хорошо отработанные физические методы исследования веществ во всех агрегатных состояниях открывают широкие возможности для химиков-фармацевтов в их практической работе.

В данной главе дан краткий обзор физических методов, которые используются или могут быть использованы при исследованиях и производстве в фармации. Показано, какими физическими методами возможно решить некоторые из основных вопросов, с которыми могут столкнуться выпускники фармацевтических вузов в своей профессиональной деятельности. Естественно, что профессиональное овладение любым физическим методом исследования требует глубокого изучения специальной литературы и приобретения устойчивых навыков работы с оборудованием. Цель данной главы — показать возможности каждой из приведенных методик и физические принципы, лежащие в ее основе, а также способы получения необходимой информации в процессе исследований. В Приложении приведена сводная таблица, позволяющая определить методы, необходимые для решения конкретных прикладных задач.

## § 18.1. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. СПЕКТРОСКОПИЯ В ВИДИМОЙ И УЛЬТРАФИОЛЕТОВОЙ ОБЛАСТИ

*Спектроскопия (спектральный анализ)* — область физики, используемая для идентификации соединений, исследования состава, строения и количественного анализа индивидуальных веществ и многокомпонентных систем.

В органической химии или биохимии практически ни один эксперимент не обходится без применения спектроскопических методов. Они широко используются для идентификации продуктов химических и ферментативных реакций или более сложных биологических процессов обнаружения промежуточных соединений (и тем самым для получения ценной информации о механизмах превращений), исследования кинетики и стереохимии химических реакций, пространственной структуры и динамики молекул и надмолекулярных систем, выяснения строения вновь выделенных природных соединений и т. д.

Спектроскопия в оптической области спектра (ультрафиолетовая, видимая, инфракрасная) используется прежде всего в следующих случаях: 1) для определения концентрации; 2) идентификации вещества; 3) определения числа частиц в растворе (например с помощью изобестических точек).

**Физические основы метода.** Из курса общей физики известно, что любое электромагнитное излучение связано с процессами, происходящими в атомах или молекулах. Способность излучать и поглощать электромагнитное излучение является общим свойством всех атомов и молекул. Излучение (поглощение) весьма избирательно, то есть излучение только определенной длины волны данной молекулой интенсивно поглощается, тогда как излучение других длин волн поглощается слабо или совсем не поглощается. Кривая зависимости поглощения от длины излучаемой волны (или частоты излучения) называется *спектром поглощения* вещества, который является специфической характеристикой данного вещества.

В зависимости от агрегатного состояния вещества спектры разделяются на три группы: *линейчатый* (для газов при низких давлениях, состоящих из одноатомных молекул); *полосатый* (для газов, паров, жидкостей, состоящих из многоатомных молекул) и *сплошной* (для раскаленных твердых и жидких тел). Если поглотитель — твердое тело (стекло, пластмассы и другое), области поглощения широкие и граница полосы поглощения, как правило, не резкая. Для молекулярных жидкостей, растворов и паров области поглощения наблюдаются в виде полос, которые несут информацию о строении исследуемых веществ и их концентрации. Изменения спектра позволяют сделать выводы о происходящих в веществе процессах.

При исследовании лекарственных органических соединений важное место занимает *молекулярный спектральный анализ* (МСА). В его основе лежит качественное и количественное сравнение спектра исследуемого образца со спектрами других веществ.

В спектрофотометрических методах применяются *спектрофотометры* — приборы, позволяющие проводить анализ как

окрашенных, так и бесцветных соединений по избирательному поглощению монохроматического излучения в видимой, ультрафиолетовой (УФ) и инфракрасной (ИК) областях спектра.

Для возбуждения электронных переходов молекул обычно необходимо видимое или ультрафиолетовое излучение. Низкоэнергетическое инфракрасное излучение возбуждает колебательные переходы в атомной подсистеме молекул, тогда как чистые вращательные переходы при вращении молекулы как целого наблюдаются в еще менее энергетических микроволновых и радиочастотных диапазонах.

Таким образом, природа полос поглощения (молекулярных спектров) в УФ- и видимой частях спектра связана с различными электронными переходами в поглощающих молекулах и ионах (электронная спектроскопия). В ИК-области она связана с колебательными переходами в молекулах (колебательная спектроскопия). В МСА различают также спектры комбинационного рассеяния света (КРС) и спектры флуоресценции.

Используемая в настоящее время аппаратура позволяет измерять УФ-спектры в области от 190 до 380 нм, видимые — от 380 до 780 нм, ИК-спектры — от 780 нм до 1 мм.

Количественный МСА, связанный с измерением поглощения электромагнитного излучения, основан на законе Бугера—Ламберта—Бера, устанавливающем связь между интенсивностями падающего  $I_0$  и прошедшего  $I$  через вещество света в зависимости от толщины  $l$  поглощающего слоя и концентрации  $c$  вещества.

$$I = I_0 \exp(-\varepsilon cl) \quad (18.1.1)$$

или

$$I = I_0 10^{-\varepsilon' cl} \quad (18.1.2)$$

Молярный показатель поглощения  $\varepsilon$  ( $\varepsilon' = 0,43\varepsilon$ ) является специфической физической константой для каждого вещества и может быть использован в целях его идентификации. Его определение позволяет установить содержание данного вещества в растворах неизвестной концентрации на основе измерения оптической плотности.

Закон Бугера—Ламберта—Бера строго не выполняется, если падающее излучение немонохроматично (колориметрический и фотокolorиметрический анализ). В данном случае этот закон применим с большим или меньшим приближением в зависимости от степени постоянства оптической плотности в исследуемом интервале длин волн. Отклонения от закона Бугера—Ламберта—Бера наблюдаются также в следующих случаях: 1) если различные формы поглощающих частиц находятся в равновесии, как, например,

в случае таутометрии или кислотно-основного равновесия; 2) если системы имеют явно выраженную тенденцию к ассоциации молекул растворенного вещества между собой, либо между молекулами растворенного вещества и растворителя. Взаимодействие растворенного вещества с растворителем широко распространено, и его следы можно наблюдать в каждом спектре.

**Получение электронных спектров и принципы их анализа.** Основными частями обычного спектрофотометра являются: источник света, монохроматор и детектор прошедшего через вещество излучения. Рабочий диапазон большинства спектрофотометров составляет 190...750 нм. Источником излучения с  $\lambda = 190...450$  нм служит дейтериевая разрядная лампа, излучение которой непрерывно в этом диапазоне, а остальную часть диапазона обеспечивает лампа накаливания. Для разложения источника излучения в спектр используется диспергирующий элемент. Из получающегося спектра с помощью щели выбирается узкий интервал длин волн. Такое излучение можно рассматривать как монохроматическое.

Монохроматический свет расщепляют на два луча, один из которых проходит через ячейку (кювету), содержащую раствор изучаемого вещества, а другой — через такую же ячейку, имеющую только растворитель. Затем прошедшие через обе ячейки лучи автоматически сравниваются, и результаты сравнения регистрируются при непрерывном изменении длины волны. В современных приборах интенсивности излучения  $I$  и  $I_0$ , прошедшие через раствор и растворитель, измеряются фотоэлектрически. Кривая, выражающая зависимость интенсивности поглощения от длины волны или частоты, называется *спектральной кривой поглощения*, или *спектром поглощения*. Измерительная шкала спектрофотометра проградуирована в процентах пропускания  $T$ :

$$T = \frac{I}{I_0} 100 \%, \quad (18.1.3)$$

где  $I_0$  — интенсивность падающего излучения, и в величинах оптической плотности  $D$ :

$$D = \lg \frac{I_0}{I} = \varepsilon' c l, \quad (18.1.4)$$

а шкала длин волн или волновых чисел ( $k = 1/\lambda$ ) — в нанометрах или в  $\text{см}^{-1}$  соответственно.

Обычно электронный спектр изображается в виде графика зависимости  $D$  от  $\lambda$ . Если известна молярная концентрация, то по такому спектру несложно рассчитать молярный коэффициент поглощения  $\varepsilon$ . Часто после этого строят график зависимости  $\varepsilon$  или

$\lg \varepsilon$  от длины волны  $\lambda$ . График логарифмической зависимости представляет особый интерес в тех случаях, когда в одном спектре имеются полосы различной интенсивности.

Электронные спектры поглощения обычно состоят из нескольких широких полос и не имеют узких пиков, поскольку любой электронный переход сопровождается теми или иными изменениями во вращательных или колебательных состояниях молекул. Важнейшей характеристикой полос является длина волны, при которой наблюдается максимум поглощения. Иногда, если соседние полосы частично перекрываются, указывается минимум поглощения.

Рассмотрим использование электронных спектров поглощения для получения данных о структуре молекул. Характер электронных спектров молекул органических веществ обусловлен тремя основными структурными элементами: связывающими  $\sigma$ - и  $\pi$ -орбиталями, разрыхляющими  $\sigma^*$ - и  $\pi^*$ -орбиталями (возбужденное состояние) и несвязывающими орбиталями неподеленных пар электронов гетероатомов, или  $n$ -орбиталями, которые по определению не имеют соответствующего возбужденного состояния (рис. 18.1.1). На рисунке схематически представлены относительные энергии этих электронных состояний с возможными энергетическими переходами при возбуждении молекулы квантами излучения в УФ-диапазоне. Соединения, содержащие только одинарные связи, поглощают в области длин волн менее 190 нм; простые соединения с кратными связями — ниже 240 нм; простые соединения со

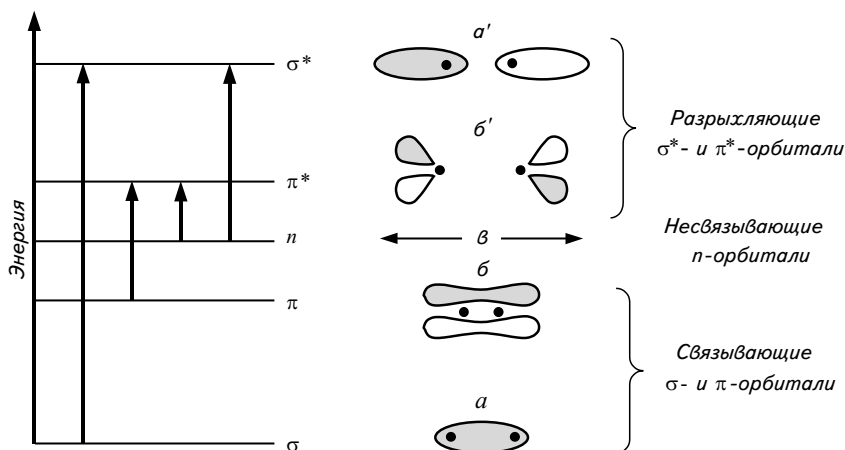


Рис. 18.1.1. Молекулярные орбитали и возможные энергетические переходы между ними:

$a$  и  $a'$  — одинарная связь электронов в молекуле;  $b$  и  $b'$  — кратная связь;  $в$  — несвязывающие  $n$ -электроны неподеленных пар гетероатомов

свободными электронными парами — ниже 260 нм. Поглощение кратных связей, неподеленных пар и различных их комбинаций определяют все электронные спектры органических соединений в ближней УФ-области.

Поглощение в УФ-области является следствием возбуждения электронов. Отдельные атомы связываются в молекулы электронами. Прочность этих связей, а следовательно, и характеристическая энергия перехода определяется природой ядер атомов, и, таким образом, длина волны, при которой происходит поглощение, определяется скорее группой атомов, чем просто электронами. Группа атомов, обуславливающая избирательное поглощение электромагнитного излучения в видимой и ультрафиолетовой областях спектра, называется *хромофором*. Структурные изменения, происходящие в хромофорах, будут сказываться и на поглощении. Для успешного решения структурных проблем с помощью электронных спектров необходимо знать спектральные характеристики различных хромофоров. Спектры наиболее важных классов соединений, встречающихся в природе, описание связей между их спектрами и наиболее важными элементами структуры изложены в специальной литературе.

## § 18.2. ИНФРАКРАСНАЯ СПЕКТРОСКОПИЯ

Большинство органических молекул поглощают «колебательную» энергию в области  $\lambda = 2,5...20$  мкм (или  $k = 10^4/\lambda = 4000...500$  см<sup>-1</sup>). Каждый ИК-спектр характеризуется серией полос поглощения, максимумы которых определяются волновым числом  $k$  или длиной волны  $\lambda$ .

ИК-спектры органических соединений весьма сложны и не всегда поддаются однозначной интерпретации, однако ввиду того, что они несут значительно больше информации, чем такие физические параметры вещества, как температура плавления, показатель преломления или плотность, роль ИК-спектроскопии в идентификации веществ и установлении их структуры трудно переоценить. Важной характеристикой спектров является, помимо частот линий поглощения, также их относительная интенсивность, что необходимо учитывать при анализе спектра. Таким образом, ИК-спектр является своего рода паспортом органического соединения. Совсем не обязательно иметь образец известного соединения для сравнения с неизвестным, как в случае определения точки плавления смешанной пробы, так как спектры исследуемых веществ легко можно сравнивать с кривыми поглощения приведенных в атласах спектров наиболее известных соединений.

В качестве инструментального метода анализа ИК-спектроскопия применяется, во-первых, для обнаружения определенных функциональных групп в молекуле изучаемого соединения ( $\text{—OH}$ ,  $\text{—NH}_2$ ,  $\text{—NO}_2$ ,  $\text{=C=O}$ ,  $\text{—C}\equiv\text{N}$  и другие) и, во-вторых, для идентификации соединений путем сравнения их спектров со спектрами аутентичных образцов.

Инфракрасные (колебательные и вращательные) спектры большинства органических соединений строго индивидуальны, особенно в области  $1350\text{—}750\text{ см}^{-1}$ , которая называется областью «отпечатка пальцев» («фингерпринта»). Идентификация обычных веществ с использованием каталога стандартных спектров не представляет особых затруднений. Наличие изолированной функциональной группы или сочетания нескольких функциональных групп в одной молекуле обуславливает появление характерных полос поглощения, благодаря чему их можно идентифицировать в спектре неизвестного соединения. Таким путем с помощью спектров модельных соединений нетрудно отличить, например, кетон от альдегида или амин от амида.

С помощью кювет, изготовленных из хлорида натрия, можно регистрировать ИК-спектры газообразных, жидких и твердых веществ. Лекарственные препараты могут изучаться в форме паст, таблеток (в смеси с бромистым калием), тонких слоев чистых жидкостей, твердых пленок (осажденных из растворов при испарении растворителя или образованных путем охлаждения из расплавов) и разбавленных растворов в подходящих растворителях. Тонкие таблетки и растворы дают наилучшие результаты; во всех других случаях получению правильных результатов препятствуют такие эффекты, как рассеяние света, межмолекулярное взаимодействие и смещение частоты, вследствие различия в диэлектрической проницаемости или поляризуемости окружающей среды.

Принцип получения спектров в ИК-области такой же, как и в видимой и УФ-областях. Для химических (органических) лабораторий наиболее подходящим прибором является двухлучевой спектрометр (спектрофотометр), в котором один из расщепленных лучей проходит через исследуемый образец, а другой используется для сравнения. Однако, если при измерении частоты требуется наивысшая точность, рекомендуется использовать однолучевой прибор, в котором фон, создаваемый поглощением атмосферных паров воды, служит внутренним стандартом в областях валентных колебаний  $\text{OH}$  и  $\text{C=O}$  и деформационных колебаний  $\text{CH}$ . В особенности это относится к поглощению гидроксильной группы. Для диспергирования света в ИК-спектрофотометрах применяются призмы из галогенидов щелочных металлов (прозрачные для ИК-излучения) или дифракционные решетки. С помощью электрон-



ного устройства сравниваются интенсивности двух лучей, и на ленте самописца регистрируется зависимость относительной интенсивности света, прошедшего через образец, от длины волны (или волнового числа). Выпускаются спектрофотометры с фурье-преобразованием, позволяющие автоматически сканировать спектр с очень высокой скоростью. Высокая стоимость указанных приборов компенсируется чрезвычайно большой скоростью регистрации спектров и резким снижением количества вещества, необходимого для анализа. В силу присущих ей характеристик ИК-спектроскопия с фурье-преобразованием особенно полезна, например, при изучении соединений, элюирующихся последовательно с хроматографической колонки.

**Поглощение ИК-излучения в лекарственных препаратах.** Поглощение в ИК-области спектра различается по типам колебаний молекул. Рассмотрим характерные типы колебаний, по которым и судят о структурных изменениях в молекулярных соединениях.

При обычной температуре атомы в любой молекуле испытывают колебания в силу ее взаимодействия с соседними молекулами. Поглощение молекулой энергии ИК-излучения увеличивает амплитуду этих колебаний, которая затем быстро уменьшается до прежнего уровня в результате столкновений с соседними, менее активными, молекулами. Последние всегда находятся в избытке, поэтому система никогда не достигает энергетического насыщения. Любое изменение колебаний квантовано, поэтому энергия поглощается не непрерывно, а дискретно, что на спектре отражается как ряд пиков (полос поглощения).

Чем больше молекул находится на пути светового пучка, тем больше вероятность того, что квант энергии будет взаимодействовать с ними, поэтому низкая концентрация изучаемого вещества приводит к спектрам с малоинтенсивными пиками.

При наличии валентной связи возможны два типа колебаний, одни из которых вызваны изменением длины связи вдоль ее оси, так называемые *валентные колебания*. Они могут быть симметричными (рис. 18.2.1, а), асимметричными (рис. 18.2.1, б). А другие колебания вызваны изгибом связи — так называемые *деформационные* (рис. 18.2.1, в). Простой моделью такого колебания могут служить две сферы, соединенные пружиной, не имеющей массы. Нетрудно понять, что изогнуть пружину намного легче, чем растянуть ее. По этой причине де-

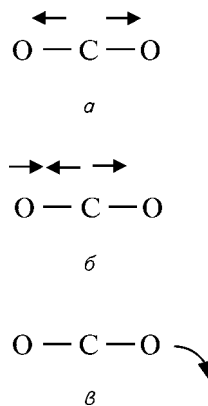


Рис. 18.2.1. Основные виды колебаний в молекуле:

а — симметричные;  
б — асимметричные;  
в — деформационные

формационные колебания химических связей требуют меньших затрат энергии и осуществляются при меньших частотах, чем валентные колебания тех же связей.

В упоминавшемся выше диапазоне «фингерпринта» расположены полосы, отвечающие различным деформационным колебаниям. В этом низкочастотном диапазоне ( $1350\ldots 400\text{ см}^{-1}$ ) наблюдается специфический набор полос, характерный для изучаемого соединения в целом, и набор полос, типичных для некоторых группировок. Так, например, картина распределения полос поглощения в диапазоне  $1000\ldots 750\text{ см}^{-1}$  помогает выяснить положение заместителей и двойной связи в ароматическом кольце.

В высокочастотной области ( $4000\ldots 2500\text{ см}^{-1}$ ) располагаются полосы поглощения, вызванные валентными колебаниями связей  $\text{X—H}$ , а в области  $2000\ldots 1500\text{ см}^{-1}$  — колебаниями кратных связей, например связи олефиновый углерод — углерод или связи  $\text{C=O}$  карбонильной группы.

В идеальном варианте валентное колебание связи описывается законом Гука, согласно которому степень растяжения связи пропорциональна растягивающей силе, действующей на эту связь. Частота колебаний определяется уравнением:

$$\nu = \frac{1}{2\pi c} \sqrt{\frac{K}{m}}, \quad (18.2.1)$$

где  $c$  — скорость света;  $K$  — постоянная, отражающая прочность связи;  $m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$  — приведенная масса связи ( $m_1$  и  $m_2$  — массы двух атомов, соединенных этой связью). Из указанного уравнения следует, что в отсутствие других факторов частота колебаний связи возрастает при повышении прочности и уменьшении приведенной массы.

Не все молекулы и не все химические связи поглощают инфракрасное излучение. При взаимодействии ИК-излучения с молекулой осциллирующая электрическая компонента поля взаимодействует с осциллирующим электрическим дипольным моментом молекулы. Таким образом, чтобы молекула поглощала энергию ИК-излучения, при колебаниях молекулы должен изменяться ее дипольный момент. Колебания простых двухатомных молекул, например молекул  $\text{H}_2$  или  $\text{N}_2$ , не нарушают их симметрию, и не приводят к появлению полос поглощения в ИК-спектрах. С другой стороны, отсутствие постоянного дипольного момента в многоатомной молекуле не исключает возможности поглощения ею ИК-излучения. Молекула диоксида углерода, например, симметрична и линейна, но вследствие колебаний одной из ее связей положительный и отрицательный ряды располагаются несиммет-

рично (рис. 18.2.1, б), в результате чего индуцируется мгновенный дипольный момент и создаются условия, необходимые для поглощения ИК-излучения. По указанным причинам из трех типов колебаний, представленных на рис. 18.2.1, только асимметричное валентное колебание *б* и деформационное колебание *в* активны в инфракрасном диапазоне и дают соответствующие пики в спектре поглощения.

Таким образом, идентификация лекарственного вещества может быть проведена путем сопоставления ИК-спектра исследуемого вещества с аналогичным спектром его стандартного образца или с его стандартным спектром. Сопоставление ИК-спектров рекомендуется начинать с анализа характеристических полос поглощения (полосы, связанные с колебаниями функциональных групп или связей в молекулах), которые обычно хорошо проявляются на спектрах, и лишь при их совпадении производится сопоставление низкочастотной области со своим специфическим набором полос. Полное совпадение полос поглощения в ИК-спектрах свидетельствует об идентичности веществ.

Наряду с положением полос поглощения, существенной характеристикой веществ является интенсивность полос поглощения, которая может быть охарактеризована в спектрах величиной показателя поглощения (*k*) или величиной интегральной интенсивности поглощения, равной площади, под кривой поглощения.

Абсолютная интенсивность полос поглощения в ИК-спектроскопии не столь важна, как в электронной спектроскопии, и обычно ее вообще не измеряют. Как правило, полосы поглощения по интенсивности подразделяют на сильные, средние и слабые. В общем случае, чем больше дипольный момент связи или группы, тем интенсивнее соответствующая полоса поглощения. Например, полярная карбонильная группа обуславливает появление доминирующей в ИК-спектре полосы поглощения карбонильного соединения (интересным исключением является группа  $\text{—C}\equiv\text{N}$ , для которой типична очень слабая полоса поглощения).

Интенсивности поглощения могут быть использованы для установления строения вещества и для количественного анализа.

Спектрофотометрический анализ может быть проведен для любых веществ как органической, так и неорганической природы. Например, анализ по непосредственному измерению оптической плотности пригоден для ароматических соединений, соединений с сопряженными кратными связями, соединений ряда металлов и др. Существуют другие, более простые, методы анализа, основанные на поглощении излучения и дополняющие методы видимой, УФ- и ИК-спектроскопии. К ним относятся:

- колориметрический метод, основанный на визуальном сравнении интенсивностей окрасок растворов разных концентраций при помощи несложных приборов;
- фотоколориметрический метод, основанный на измерении степени поглощения монохроматического света испытуемым веществом с помощью фотоэлектроколориметров;
- дифференциальный метод анализа, используемый для повышения точности спектрофотометрических и фотоколориметрических измерений при определении высоких концентраций веществ (от 10 до 100 %);
- эмиссионная и атомно-абсорбционная пламенная спектроскопия, основанная на изучении спектров испускания атомов и молекул при возбуждении их в пламени горелки.

Количественное определение химического элемента методом эмиссионной спектроскопии основано на зависимости интенсивности спектральной линии от концентрации элемента в растворе. Принцип атомно-абсорбционной спектроскопии заключается в измерении интенсивности резонансной линии определяемого элемента, которая пропорциональна числу атомов в поглощающем слое.

### § 18.3. СПЕКТРОСКОПИЯ КОМБИНАЦИОННОГО РАССЕЯНИЯ СВЕТА

*Спектроскопия комбинационного рассеяния света* (КРС) и ИК-спектроскопия являются эффективными методами исследования строения молекул. Метод КРС перспективен при выяснении строения природных соединений. Недостаточное распространение метода в фармации связано главным образом с тем, что до последнего времени практически не было доступных, надежных и простых приборов, позволяющих получать удовлетворительные спектры КРС с малыми количествами вещества.

Спектры КРС позволяют проводить качественный и количественный молекулярный анализ вещества, идентифицировать соединения и обнаруживать их в смесях, определять молекулярные и атомные характеристики веществ, их упругие, релаксационные и другие постоянные. В ряде случаев эти спектры являются единственным источником информации о запрещенных переходах в молекулах. Спектроскопия КРС позволяет различать пространственные изомеры молекул (каждый из которых имеет свой индивидуальный спектр), то есть решать тонкий вопрос структурной химии — различие *цис*- и *транс*-изомеров. Вращательные спектры

КРС позволяют определять длины связей и валентные углы в молекулах исследуемых веществ. Спектры КРС позволяют судить о симметрии нормальных колебаний и, следовательно, о симметрии молекулы в целом и ее структуре. На методе спектроскопии КРС основаны многочисленные методы определения параметров макромолекул (например, их размеров и массы), изучения размеров и форм мелких частиц в полимерных растворах и т. д.

Возможности метода спектроскопии КРС во многом повторяют возможности ИК-спектроскопии, рассмотренные ранее, так как спектры КРС родственны ИК-спектрам. Однако эти два типа спектров имеют разное происхождение и не дублируют друг друга, поскольку определяются различными правилами отбора переходов. Совместное рассмотрение спектров КРС и ИК дает намного больше структурной информации, чем изучение каждого спектра в отдельности.

**Физические основы метода.** Физика КРС связана с разделами колебаний и волн, а также с квантовой теорией света, изучаемых в курсе общей физики. Любую молекулу можно представить как сложный осциллятор, в котором отклонения атомов от положения равновесия можно считать смещениями вдоль связи и изменением валентных углов. Линейные комбинации смещений описывают колебания молекулы в целом с частотами так называемых нормальных колебаний. Пример нормальных колебаний молекулы  $\text{H}_2\text{O}$  приведен на рис. 18.3.1. Реальное колебание представляет собой одновременное выполнение всех этих движений.

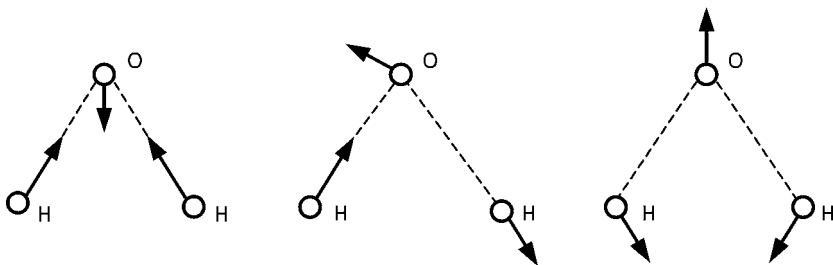


Рис. 18.3.1. Нормальные колебания молекулы воды

При помощи спектра можно определить совокупность частот нормальных колебаний молекул. Для прикладных целей большое значение имеет характеристичность многих частот колебаний. Опыт показывает, что в некоторых нормальных колебаниях изменяется в основном какое-либо одно межатомное расстояние или один валентный угол; естественно, такая частота мало изменяется в группе родственных соединений, если только молекула содержит данную связь. Это обстоятельство и используется в спектральном анализе.

В рамках квантовой теории взаимодействия излучения с веществом единичный акт рассеяния света рассматривается как поглощение частицей вещества падающего фотона (кванта света) с энергией  $h\nu$ , а затем испусканием фотона с энергией  $h\nu'$ . Если энергия испущенного фотона равна энергии поглощенного (то есть при  $\nu = \nu'$ ), рассеяние называется *упругим (рэлеевским)*. Такое рассеяние будет когерентным с интенсивностью  $I \sim 1/\lambda^4$  (закон Рэлея). При рассеянии света молекулами, наряду с рэлеевскими (несмещенными) линиями, в спектре рассеяния появляются линии *неупругого рассеяния* с частотами, отличающимися от частоты падающего излучения ( $\nu \neq \nu'$ ). Причем частоты новых линий в спектре рассеяния являются комбинациями частоты падающего света и частот колебательных и вращательных переходов рассеивающих молекул,— отсюда и происходит название «Комбинационное рассеяние света». КРС наиболее часто связано с переходами между колебательными уровнями энергии молекулы.

При попадании света на молекулы происходит взаимодействие электронов молекулы с полем падающей волны. Молекула, находящаяся в невозбужденном состоянии, под действием кванта с энергией  $h\nu$  через промежуточное электронное состояние, испуская квант  $h(\nu - \nu_i)$ , переходит в состояние с колебательной энергией  $h\nu_i$ . Этот процесс приводит к появлению в рассеянном свете так называемой стоксовой линии с частотой  $\nu - \nu_i$  (рис. 18.3.2, а). Если фотон попадает на уже возбужденную молекулу, то одновременно с рассеянием происходит переход молекулы на низший энергетический уровень. Эту «лишнюю» энергию забирает фотон, при этом энергия испускаемого (рассеянного) фотона превышает энергию

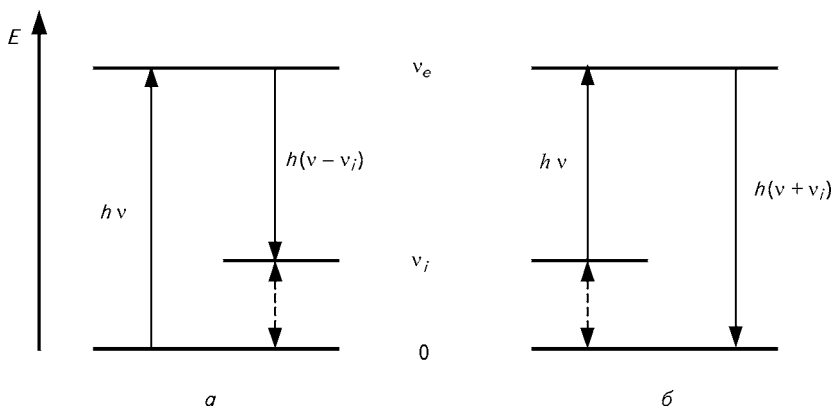


Рис. 18.3.2. Схема переходов при КРС:

а — стоксовая; б — антистоксовая линии; 0 — основной уровень;  $\nu_i$  — колебательный уровень;  $\nu_e$  — промежуточный электронный уровень молекулы;

поглощенного. Этот процесс приводит к появлению антистоксовой линии с частотой  $\nu + \nu_i$  (рис. 18.3.2, б).

Таким образом, фотон с энергией  $h\nu$  исчезает и рождается фотон с энергией  $h(\nu \pm \nu_i)$ , а в спектре рассеянного света появляются новые линии, сопровождающие линию основной частоты, — с а т е л л и т ы (рис. 18.3.3).

*Красные сателлиты* появляются со стороны меньших частот ( $\nu - \nu_i$ ), *фиолетовые* — со стороны больших ( $\nu + \nu_i$ ).

Если имеется ряд собственных частот  $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \dots$  колебаний молекулы, то в спектре рассеянного света должны появиться все комбинационные частоты:

$\nu \pm \nu_1, \nu \pm \nu_2, \nu \pm \nu_3, \dots$  Частоты рассеянного излучения зависят от частоты падающего света, но разность между этими частотами является характеристикой веществ и не зависит от частоты возбуждающего излучения.

Обычно частоты в спектре КРС соответствуют частотам колебательных и колебательно-вращательных движений в молекуле ( $100 \dots 4000 \text{ см}^{-1}$ ), то есть лежат в ИК-диапазоне. Сопоставление спектров ИК и КРС показывает, что целый ряд спектральных линий совпадает (проявляются одни и те же частоты колебаний вещества), то есть спектры ИК и КРС дополняют друг друга. Но спектроскопия КРС имеет большие преимущества по сравнению с ИК-спектроскопией. Во-первых, те же измерения как бы переносят в видимую область, что приводит к упрощению измерительной аппаратуры. Те частоты, которые непосредственно измерялись в ИК-спектре, определяются между основной и сателлитными линиями примерно с той же точностью.

Рассмотрим различие между процессами поглощения и рассеяния волн молекулами. В обоих случаях молекула испускает элементарные волны и ведет себя как диполь. Однако в первом случае молекула является диполем в отсутствие внешнего поля, во втором — молекула ведет себя как диполь под действием поля (см. § 18.2) падающей волны. Итак, излучение или поглощение имеет место тогда, когда изменение состояния молекулы сопровождается изменением собственного дипольного момента. Рассеяние возможно при условии, что изменения состояния молекулы сопровождаются изменениями индуцированного дипольного момента, то есть изменением поляризуемости. В связи с этим спектры КРС являются более стабильными, с одной стороны,

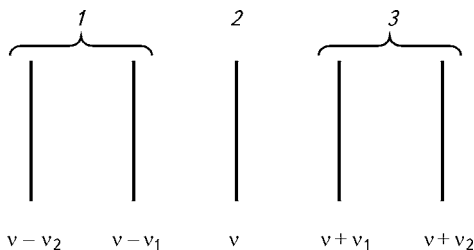


Рис. 18.3.3. Линии в спектре КРС:

1 — красные сателлиты; 2 — линия основной частоты; 3 — фиолетовые сателлиты

а с другой — активными при тех частотах, при которых ИК-спектр не проявляется, и наоборот.

Для примера рассмотрим молекулу  $\text{CO}_2$ . Из трех колебаний этой молекулы валентное симметричное колебание оставляет дипольный момент неизменно равным нулю. Это колебание неактивно в ИК-спектре. В спектре КР, напротив, активным будет только данное колебание, а два других не проявляются.

Наконец, существенным преимуществом спектроскопии КРС является то, что ее экспериментальные возможности не зависят от диапазона частот исследуемой полосы, в то время как в ИК-спектрах разрешение спектральных линий значительно уменьшается с уменьшением частоты.

Для идентификации полученного вещества его спектр сравнивают со спектром соединения, которое предполагалось синтезировать. Чем больше полос в спектре такого соединения, тем надежнее идентификация. При анализе молекулярного спектра КРС на наличие или отсутствие в исследуемой молекуле различных функциональных групп полезны следующие обобщения:

- в области частот выше  $2500\text{ см}^{-1}$  почти все основные полосы соответствуют валентным колебаниям водородных связей ( $\text{O—H}$ ,  $\text{N—H}$ ,  $\text{S—H}$  и др.);
- интервал  $2500\text{—}2000\text{ см}^{-1}$  характерен для частот валентных колебаний молекул с тройными связями (например  $\text{C}\equiv\text{N}$ );
- в области  $2000\text{—}1600\text{ см}^{-1}$  находятся частоты валентных колебаний молекул с двойными связями ( $\text{C}=\text{C}$ ,  $\text{C}=\text{N}$ ) и деформационных колебаний групп  $\text{O—H}$ ,  $\text{C—H}$ ,  $\text{N—H}$ ;
- область ниже  $1600\text{ см}^{-1}$  можно использовать для идентификации многих органических соединений, поскольку в спектрах весьма близких веществ, снятых в этой области, наблюдаются заметные различия, и полосы поглощения данной функциональной группы различных соединений характеризуются разными частотами в зависимости от скелета молекулы.

К недостаткам спектроскопии КРС следует отнести малую интенсивность линий, зависящую от частоты возбуждающегося света, а также наличие сплошного фона ввиду рассеяния на неоднородностях среды и возможности флуоресценции исследуемого вещества. Это приводит к повышению требований к возможностям регистрационной аппаратуры.

**Техника спектроскопии КРС.** С помощью анализа спектров КРС исследуют твердые (в виде спрессованных таблеток, суспензий и порошков, предпочтительнее крупнокристаллических) и газообразные вещества, жидкости и растворы.

Для наблюдения спектров КРС необходимо сконцентрировать интенсивный пучок света на изучаемом объекте. В качестве источ-



ника возбуждающего света применяется ртутная лампа, а в последнее время, чаще, — лазеры. Рассеянный свет фокусируется и регистрируется фотографическим или фотоэлектрическим методом (рис. 18.3.4).

По другой схеме образец облучают монохроматическим

пучком света и измеряют интенсивность света, рассеянного под прямым углом к направлению падающего света. В качестве ячейки для образцов может служить, например, капилляр.

Осложняющими факторами могут быть как поглощение монохроматического света, приводящее к деструкции образца, так и флуоресценция. Эти трудности сводятся до минимума путем выбора подходящей линии газового лазера. Благодаря применению лазеров в качестве источников возбуждающего света значительно расширился круг объектов, доступных для исследования методами КРС. Кроме того, применение лазеров резко сократило требования к количеству исследуемого вещества.

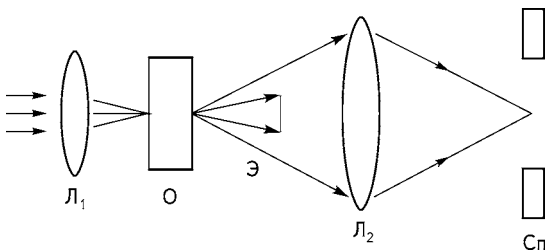


Рис. 18.3.4. Установка для наблюдения КРС на про-свет:

$L_1$  и  $L_2$  — линзы;  $O$  — объект;  $Э$  — экран для устранения возбуждающего излучения;  $Сп$  — щель спектрографа

## § 18.4. СПЕКТРОСКОПИЯ ЯДЕРНОГО МАГНИТНОГО РЕЗОНАНСА

**Ядерным магнитным резонансом (ЯМР)** называется избирательное (резонансное) поглощение электромагнитных волн радиочастотного диапазона спиновой ядерной системой вещества в сильном постоянном магнитном поле, обусловленное переориентацией магнитных моментов ядер.

В зависимости от того, в каких магнитных системах изучаются энергетические переходы, индуцируемые переменным магнитным полем, различают ядерный магнитный резонанс (ЯМР) и электронный парамагнитный резонанс (ЭПР). Оба эти метода используются для анализа веществ, однако для химика-органика наиболее информативным методом является ЯМР-спектроскопия, с помощью которой можно не только выяснять электронное окружение ядер, но и определять относительное количество ядер, принимающих участие в формировании сигнала ЯМР.

Спектроскопия ЯМР широко применяется для изучения самых разнообразных химических проблем, решение которых другими методами невозможно или очень затруднено. Среди них следует отметить: определение молекулярной структуры (стереохимия молекул); изучение диссоциации, реакций обмена, процессов образования водородной связи; исследование распределения электронов в молекулах; обнаружение свободных радикалов с небольшой продолжительностью жизни, возникающих в химических (биохимических) процессах, которые не поддаются изучению стандартными химическими методами именно из-за их быстротечности, и т. п.

Весьма эффективно применение ЯМР-спектроскопии для идентификации и анализа лекарственных средств, то есть определения относительного содержания лекарственных веществ и примесей. Следует отметить, что методы ЯМР, ИК- и УФ-спектроскопии взаимно дополняют друг друга, поскольку в каждом из этих методов регистрируются переходы между различными энергетическими уровнями в разных структурных подсистемах молекулы (от ядра до квантованого вращательного спектра молекулы как целого). Между оптической спектроскопией в ИК- или УФ-областях спектра и спектроскопией ЯМР существуют принципиальные различия, связанные с тем, что в первом случае индуцируются электродипольные переходы, а во втором — магнитодипольные, что определяет различия в строении спектров и их интерпретации.

В спектре ЯМР нередко удается идентифицировать и определить положение каждой функциональной группы, входящей в состав молекулы, что весьма редко можно осуществить с помощью ИК- или УФ-спектров.

**Физические основы метода.** Электрон, протон, нейтрон и целый ряд атомных ядер обладают собственным механическим моментом (спином)  $\vec{L}_s$ , с которым линейно связан магнитный момент

$$\vec{\mu} = \gamma \vec{L}_s, \quad (18.4.1)$$

где  $\gamma$  — гиромагнитное отношение.

Несмотря на то что ядра атомов состоят из протонов и нейтронов, обладающих спином, не все атомы имеют магнитные ядра.

Ядра с четным массовым числом и четным атомным номером, так называемые четно-четные, не имеют магнитного момента ( $\mu = 0$ ). Четно-нечетные ядра имеют целый спин, а нечетно-нечетные и нечетно-четные обладают полуцелым спином.

Наиболее важные для исследования ядра:

$^1\text{H}$  ( $J = 1/2$ ,  $\gamma = 2,675 \cdot 10^8$  Гц · рад/Тл);

$^2\text{H}$  ( $J = 1$ ,  $\gamma = 0,411 \cdot 10^8$  Гц · рад/Тл);

$^{13}\text{C}$  ( $J = 1/2$ ,  $\gamma = 0,673 \cdot 10^8$  Гц · рад/Тл);

$^{14}\text{N}$  ( $J = 1$ ,  $\gamma = 0,193 \cdot 10^8$  Гц · рад/Тл);

$^{17}\text{O}$  ( $J = 5/2$ ,  $\gamma = -0,363 \cdot 10^8$  Гц · рад/Тл);

$^{15}\text{N}$  ( $J = 1/2$ ,  $\gamma = -0,271 \cdot 10^8$  Гц · рад/Тл);

$^{19}\text{F}$  ( $J = 1/2$ ,  $\gamma = 2,517 \cdot 10^8$  Гц · рад/Тл);

$^{31}\text{P}$  ( $J = 1/2$ ,  $\gamma = 1,083 \cdot 10^8$  Гц · рад/Тл);

где  $J$  — спиновое квантовое число ядра.

Согласно положениям квантовой механики, механический момент ядра пропорционален спиновому квантовому числу  $J$ :

$$L_s = \hbar J, \quad (18.4.2)$$

где  $\hbar = h/2\pi$  — нормированная постоянная Планка.

Механический момент может располагаться только вдоль определенных пространственных направлений таким образом, что его проекции на направление внешнего магнитного поля могут принимать дискретные значения:

$$L_{sz} = \hbar m_J, \quad (18.4.3)$$

где  $m_J$  — магнитное квантовое число, которое характеризует стационарные или собственные состояния ядра. Согласно условию квантования, запишем значения  $m_J$ :

$$m_J = J; J-1; J-2; J-... \quad (18.4.4)$$

Полное число возможных значений  $m_J$ , а следовательно, и энергетических уровней ядра в магнитном поле равно  $2J+1$ . Из изложенного следует, что ядра, помещенные в магнитное поле  $B_0$ , могут иметь следующие дискретные эквидистантные уровни энергии:

$$E_m = -\gamma \hbar m_J B_0. \quad (18.4.5)$$

Вследствие теплового движения на каждом энергетическом уровне в среднем будет находиться число ядер, определяемое распределением Больцмана:

$$N_m = \frac{N}{2J+1} \exp\left(\frac{\gamma \hbar m_J B_0}{kT}\right), \quad (18.4.6)$$

где  $N_m$  — населенность уровня;  $N$  — общее количество ядер.

Более высокие энергетические уровни населены слабее низких уровней, то есть на низких энергетических уровнях создается некоторый избыток ядер, при этом разность заселенностей соседних уровней равна

$$\Delta N = N_m - N_{m-1} \approx \frac{N \gamma \hbar B_0}{(2J + 1)kT}. \quad (18.4.7)$$

Для протонов, ядер атомов водорода (двухуровневая система) при комнатной температуре и внешнем магнитном поле индукцией  $B_0 = 1,4$  Тл на каждый миллион ядер приходится около 10 протонов, находящихся на нижнем уровне. Если на эти ядра воздействовать переменным магнитным полем  $H_1 = H_0 \cdot \sin \omega t$ , перпендикулярным  $B_0$ , и частотой  $\omega$ , то только в том случае, когда энергия кванта электромагнитного поля  $\hbar\omega$  станет равной энергии перехода ядер на соседний энергетический уровень, то есть  $\hbar\omega = \gamma \hbar B_0$ , или  $\omega = \gamma B_0$ , ядра начнут переходить с нижних энергетических уровней на более высокие. На рис. 18.4.1 представлена система уровней для ядер со спином  $J = 1$ , а также возможные ориентации механиче-

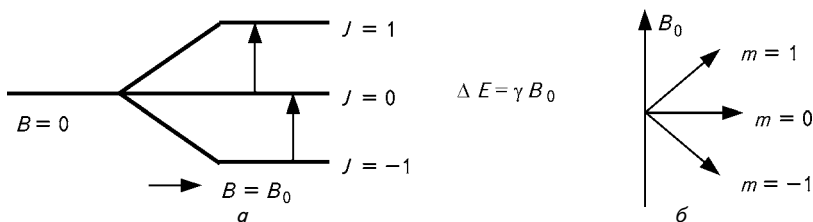


Рис. 18.4.1. Система уровней для ядер со спином  $J = 1$  (а), а также возможные ориентации механического момента ядер и их намагниченностей (б)

ского момента ядер и их намагниченностей. В каждом акте поглощения одно ядро поглощает один квант поля, при этом, согласно правилам отбора для магнитодипольных переходов,  $\Delta m = \pm 1$ . Для такого типа ядер в данном поле при отсутствии взаимодействия между ядрами существует только одна частота резонанса, которая соответствует одной линии поглощения на спектре ЯМР. Так, например, для ядра водорода (протона)  $\gamma_{\text{H}} = 2,675 \cdot 10^8$  Гц · рад/Тл, и, следовательно, резонансная частота для протонов, находящихся в магнитном поле индукцией  $B_0 = 1$  Тл, равна  $\nu = 42,58$  мГц. Поглощение будет происходить до тех пор, пока не наступит выравнивание заселенностей уровней.

В реальной физической системе различные механизмы взаимодействия ядер друг с другом и с окружающими их электронами восстанавливают избыток ядер на нижних энергетических уровнях. Электромагнитное поле стремится уравнивать заселенность уровней, тогда как взаимодействие ядер противодействует этому. Процессы, в результате которых ядра переходят на более низкие энергетические уровни, называются релаксационными.

Известно два типа релаксации: *спин-решеточная релаксация*, при которой теряемая энергия превращается в поступательную и вра-

щательную энергию молекул или решетки, и *спин-спиновая*, связанная с обменом спиновыми состояниями, посредством прямого или косвенного спин-спинового взаимодействия между соседними ядрами. Релаксация спин-решеточная, или, как ее еще называют, продольная, характеризуется временем релаксации  $T_1$ , а спин-спиновая (поперечная) — временем  $T_2$ . Ширина линий поглощения на спектрограммах обратно пропорциональна временам релаксации, поэтому поскольку в твердых телах время поперечной релаксации мало ( $T_2 < 10^{-4} \dots 10^{-5}$  с), то ширина линий поглощения в них очень большая. В жидкостях и газах ширину линий поглощения в основном определяет время продольной релаксации  $T_1$ , которое может достигать до  $10^4$  с, что приводит к очень узким линиям поглощения, ширина которых часто меньше одного герца.

Значение спектроскопии ЯМР для химии основывается на том, что с ее помощью можно отличить некоторое ядро, находящееся в определенном окружении, от других ядер того же типа, благодаря тому, что на резонансные частоты ядер влияют окружающие их электронные оболочки.

Влияние электронов заключается в экранировании ядер атомов от внешнего магнитного поля диамагнитными электронными оболочками, которые создают собственные небольшие противоположно направленные магнитные поля. Степень экранирования, а следовательно, и химический сдвиг ЯМР-сигнала на спектрограмме по сравнению с незаэкранированным ядром строго пропорциональны индукции  $B_0$  внешнего магнитного поля.

Локальное поле  $B_{\text{лок}}$  на ядре оказывается меньшим внешнего поля  $B_0$  и равно

$$B_{\text{лок}} = B_0(1 - \sigma), \quad (18.4.8)$$

где  $\sigma$  — постоянная экранирования.

В результате магнитного экранирования для получения поглощения энергии экранированными ядрами необходимо повысить внешнее поле или уменьшить частоту. Смещение частот резонанса на спектрограмме в результате экранирования ядер оценивается с помощью *химического сдвига*  $\delta$ :

$$\delta = \frac{(\nu_{\text{в-во}} - \nu_{\text{эт}}) \cdot 10^6}{\nu_0}, \quad (18.4.9)$$

где  $\nu_{\text{в-во}}$  — частота резонанса для ядер данного эквивалентного химического окружения;  $\nu_{\text{эт}}$  — частота резонанса эталона, химический

сдвиг которого считается равным нулю;  $\nu_1$  — рабочая частота спектрометра.

В качестве эталона для **протонного магнитного резонанса (ПМР)**, в котором участвуют ядра атомов водорода  $^1\text{H}$ , используется тетраметилсилан (ТМС)  $\text{Si}(\text{CH}_3)_4$ . Единица измерения химического сдвига — миллионная доля от рабочей частоты спектрометра  $\nu_0$  ( $\text{млн}^{-1}$ ). Так, например, для спектрометра с рабочей частотой 60 МГц, при работе с протонами, диапазон химических сдвигов для большинства органических соединений простирается от 0 до 16  $\text{млн}^{-1}$ , что соответствует максимальному смещению частоты резонанса, равному 960 Гц. Если в молекуле имеется несколько групп одинаковых ядер, находящихся в неэквивалентных положениях, то на спектре ЯМР будут наблюдаться линии поглощения с различными химическими сдвигами, соответствующими различному экранированию этих групп, а число линий поглощения будет равно числу таких неэквивалентных групп. Степень экранирования зависит от числа электронов, окружающих протоны, а также от конфигурации электронных оболочек и их расположения, то есть от вида химической связи. Например, для протонов алифатических связей  $\text{C}-\text{H}$  экранирование уменьшается в ряду  $\delta_{\text{CH}} > \delta_{\text{CH}_2} > \delta_{\text{CH}_3}$ . Резонансные сигналы олефиновых протонов лежат в области  $\delta = 4,0 \dots 6,5$ , а протонов ароматических групп проявляются в характеристической области между  $\delta = 7,0$  и  $9,0$ . На рис. 18.4.2 изображен спектр ПМР этилбензола. Интегральная интенсивность линий поглощения

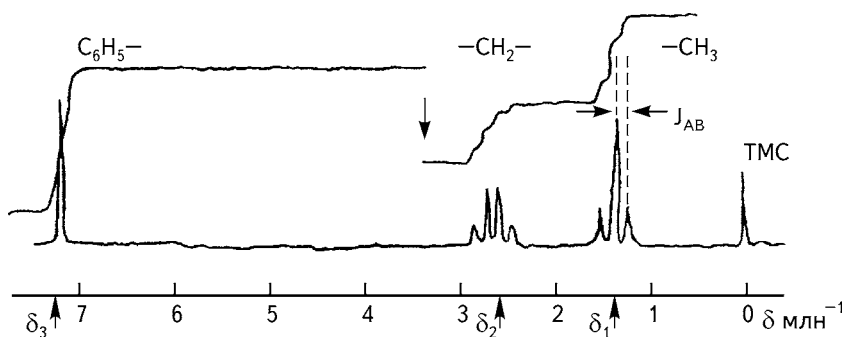


Рис. 18.4.2. Спектр ПМР этилбензола с интегральной кривой

на спектрах ПМР пропорциональна числу протонов, участвующих в резонансном поглощении.

Расщепление линий поглощения, связанных с резонансом протонов в группах  $\text{CH}_2$  и  $\text{CH}_3$ , вызвано взаимным влиянием магнитных моментов этих групп. Указанное взаимодействие передается с помощью электронов, принимающих участие в образовании хи-

мических связей, и называется косвенным спин-спиновым взаимодействием (КССВ), а группы расщепленных линий — мультиплетами. Расстояние между линиями в мультиплетах, выраженное в герцах, определяет константу взаимодействия  $J_{AB}$ , которая не зависит от рабочей частоты спектрометра. Константы спин-спинового взаимодействия зависят от взаимного пространственного расположения групп взаимодействующих ядер, а также от геометрии пути, по которому происходит взаимодействие, то есть от стереохимии молекул.

**Техника спектроскопии ЯМР.** Радиоспектрометр ЯМР — сложное устройство, в котором наиболее важным элементом является источник постоянного магнитного поля  $B_0$  (электромагнит с железным ярмом, постоянный магнит или сверхпроводящий соленоид). К конструкции магнита предъявляются очень жесткие требования, поскольку разрешающая способность спектрометра зависит от стабильности и однородности магнитного поля. Относительная разрешающая способность  $\delta\nu$  спектрометра определяется отношением наименьшей ширины наблюдаемой линии в герцах к рабочей частоте спектрометра, то есть

$$\delta\nu = \frac{\Delta\nu}{\nu_0}. \quad (18.4.10)$$

Так, например, для стационарного спектрометра с рабочей частотой 60 МГц разрешающая способность равна  $5 \cdot 10^{-9}$ , что соответствует неоднородности магнитного поля в объеме образца 100 мм<sup>3</sup>, равной  $7 \cdot 10^{-10}$  Тл.

Между полосами магнита размещается датчик ЯМР, в котором находится ряд устройств, необходимых для получения сигнала ЯМР. В датчике расположена катушка, на которую подается переменное напряжение, генерируемое стабилизированным генератором, частота которого равна рабочей частоте спектрометра. Внутри этой катушки размещается стеклянная ампула с исследуемым веществом, находящимся в жидком состоянии. С помощью этой катушки создается переменное магнитное поле  $H_1$ , перпендикулярное постоянному полю  $B_0$  (рис. 18.4.3).

Высокая степень однородности магнитного поля обеспечивается не только конструкцией магнита, но также и коррекцией однородности поля специальными катушками (шиммами), которые намотаны на корпусе датчика, изготовленного из немагнитного материала. Ток в этих катушках подбирается таким образом, чтобы наиболее узкая линия поглощения имела наименьшую ширину. Дальнейшее увеличение однородности достигается быстрым вращением ампулы  $\delta$  вокруг вертикальной оси, что приводит к усреднению магнитного поля в плоскости, перпендикулярной

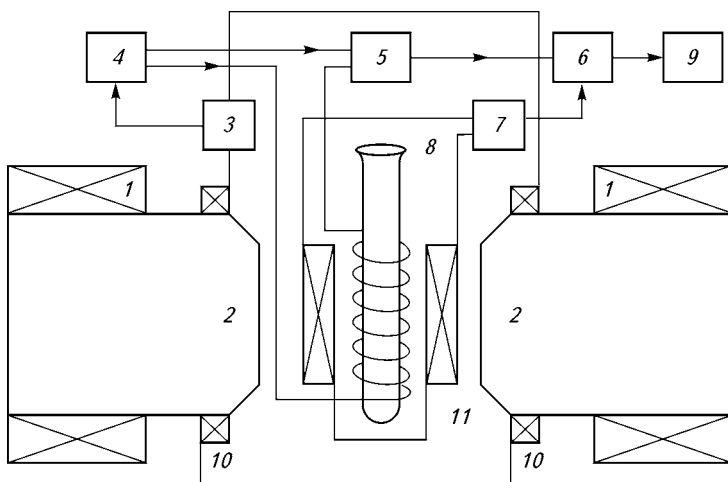


Рис. 18.4.3. Схема ЯМР-спектрометра:

1 — катушки электромагнита; 2 — полюсы электромагнита; 3 — блок стабилизации резонансных условий; 4 — ВЧ-генератор; 5 — ВЧ-приемник; 6 — детектор; 7 — модулятор; 8 — ампула с образцом; 9 — регистрирующее устройство; 10 — катушки стабилизации магнитного поля; 11 — катушки модуляции

оси вращения. В датчике также находятся катушки модуляции 11 и сдвига (на рисунке не показаны). С помощью катушек модуляции на магнитное поле  $B_0$  накладывается небольшое переменное магнитное поле частотой 1...2 кГц, в результате чего сигнал оказывается промодулированным по частоте, что дает возможность увеличить чувствительность спектрометра.

Катушки сдвига изменяют в незначительных пределах магнитное поле  $B_0$  для того, чтобы можно было записать любой участок спектра в увеличенном масштабе. Для сохранения условий резонанса служит блок стабилизации резонансных условий 3, который стабилизирует магнитный поток с помощью катушек 10, а также с помощью блока ядерной стабилизации вырабатывает сигналы, которые быстро корректируют магнитную индукцию  $B_0$  и частоту ВЧ-генератора, что позволяет компенсировать магнитные помехи промышленного и космического происхождения.

Ампула, в которой находится образец, представляет собой цилиндрический сосуд диаметром 5 мм, изготовленный с высокой точностью из однородного стекла. Для улучшения качества ампулы шлифуют, добиваясь высокой степени соосности внутренней и внешней поверхностей. Чтобы приготовить образец, 20—30 мг вещества помещают в ампулу и растворяют, добавляя около 0,5 мл растворителя и несколько капель стандарта, например ТМС.



В качестве растворителя используют вещества, не имеющие линий поглощения в исследуемом диапазоне химических сдвигов. Часто этими веществами являются известные растворители, в которых водород заменен дейтерием, частоты резонанса которого не попадают в область ПМР. Чувствительность ЯМР ниже чувствительности ИК-спектроскопии и определяется минимальным количеством эквивалентных протонов, сигнал которых можно уверенно выделить среди шумов. Стационарные спектрометры дают возможность наблюдать сигналы ПМР от  $10^{17}$  до  $10^{18}$  эквивалентных протонов.

## § 18.5. МАСС-СПЕКТРОСКОПИЯ

Метод исследования вещества путем определения масс атомов и молекул и их фрагментов, входящих в его состав, называется **масс-спектроскопией** (масс-спектральным анализом). Совокупность значений масс и их относительных содержаний называется **м а с с п е к т р о м**. В первую очередь метод используется для определения молекулярного веса органических соединений и их составляющих с очень высокой точностью проведения количественного анализа газообразных или низкокипящих углеводородов, а также при определении стабильных изотопов в газообразных продуктах деградации. Ряд качественных особенностей превращает масс-спектрометрию в очень перспективный метод определения элементов и структуры сложных органических соединений, в частности природных соединений.

Метод хорошо дополняет информацию, получаемую с помощью других физических методов. Так, например, УФ-спектр указывает на тип ароматической системы или сопряженного хромофора, ИК-спектр позволяет обнаружить наличие многих функциональных групп, спектр ЯМР дает в ряде случаев информацию об окружении этих групп. Интерпретация масс-спектра часто позволяет разместить эти функциональные группы в определенных местах молекулы и оценить, как они соединены друг с другом. Кроме того, по данным масс-спектра можно сделать вывод о размере и структуре боковых цепей, что трудно установить путем химической деградации.

Масс-спектрометры используются для быстрого анализа состава газовых смесей, непрерывного контроля и регулирования процессов в химической промышленности, для исследования кинетики химических реакций (в частности при измерении концентрации свободных радикалов). В физико-химических исследованиях масс-спектрометрия применяется при исследованиях процессов иони-

зации, возбуждения частиц и других задач физической и химической кинетики; для определения энергии ионизации, теплоты испарения, энергии связи атомов в молекулах и т. п.

Замечательной особенностью масс-спектрометрического метода является возможность ограничиться ничтожно малым количеством исследуемого вещества, не превышающим десятых долей микрограмма.

**Физические основы метода.** Чтобы реалистически оценить возможности применения масс-спектрометрии, необходимо рассмотреть физику протекающих процессов, принцип работы масс-спектрометра и способы получения масс-спектров.

**Масс-спектрометр** — это прибор для разделения ионизированных молекул и атомов по их массам, основанный на воздействии магнитных и электрических полей на пучки ионов исследуемого вещества, летящих в вакууме. В масс-спектрометрах регистрация ионов осуществляется электрическими методами; в масс-спектрографах — по потемнению фоточувствительного слоя.

Из основного уравнения движения заряженной частицы в магнитном и электрическом полях

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = q \left( \vec{E} + \left[ \vec{v} \times \vec{B} \right] \right) \quad (18.5.1)$$

следует, что ее траектория определяется отношением заряда к массе ( $q/m$ ). Так, двигаясь в электрическом поле, заряженная частица приобретает скорость

$$v = \sqrt{2 \frac{q}{m} U}, \quad (18.5.2)$$

в магнитном поле радиус траектории частицы определяется как

$$r = \frac{m}{q} \cdot \frac{v}{B}. \quad (18.5.3)$$

Поэтому исследование отклонения частицы в электрическом и магнитном полях может быть использовано для нахождения  $q/m$ . Так как начальная скорость движения частицы  $v$  неизвестна, то  $q/m$  не может быть определено измерением отклонения частицы только в электрическом или только магнитном полях. Задача решается путем использования отклонения одной и той же частицы как в электрическом, так и в магнитном полях. Для нахождения скорости частицы в простейшем случае достаточно уравновесить электрическое отклонение магнитным. Для этого надо располо-

жить поля так, как показано на рис. 18.5.1. Заряженные частицы не будут отклоняться при условии  $q\vec{E} = q[\vec{v} \times \vec{B}]$ . Определив скорость, далее можно воспользоваться либо одним электрическим, либо одним магнитным отклонением от прямолинейного пути и по его значению рассчитать  $q/m$ .

Схема работы простейшего масс-спектрографа представлена на рис. 18.5.2. Пучок исследуемых ионов последовательно проходит через электрическое и магнитное поля. В однородном электрическом поле конденсатора ионы отклоняются в направлении напряженности  $\vec{E}$  тем сильнее, чем меньше их скорость и больше удельный заряд  $q/m$ . В однородном магнитном поле (вектор  $\vec{B}$  направлен перпендикулярно плоскости чертежа) ионы движутся по дугам окружностей, радиусы которых тем больше, чем больше скорость

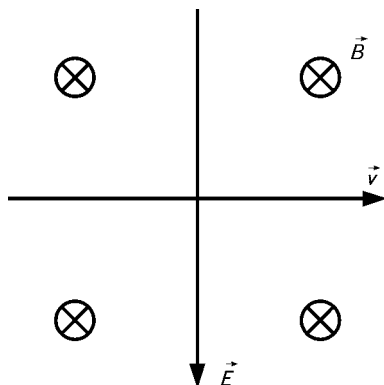


Рис. 18.5.1. Направление электрического  $\vec{E}$  и магнитного  $\vec{B}$  полей по отношению к направлению скорости  $\vec{v}$  движения заряженной частицы

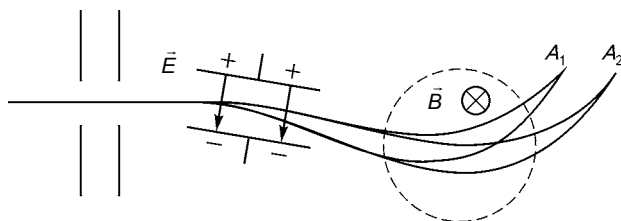


Рис. 18.5.2. Схема простейшего масс-спектрографа

и меньше их удельный заряд  $q/m$ . Поэтому в магнитном поле пучок ионов расщепляется на несколько пучков, каждый из которых соответствует своему значению  $q/m$ . Магнитную индукцию  $\vec{B}$  можно подобрать такой, чтобы ионы фокусировались на фотопластинке. В результате этого на пластинке образуется ряд узких параллельных линий, соответствующих различным значениям удельных зарядов ионов. Согласно рис. 18.5.2, линия  $A_1$  соответствует ионам с большим удельным зарядом  $q/m$ , а линия  $A_2$  — ионам с меньшим  $q/m$ .

Более чувствительными являются масс-спектрометры — приборы с электрической регистрацией ионных токов. В статических, более распространенных, масс-спектрометрах исследуемые ионы движутся в постоянных во времени магнитных полях. В динамических масс-спектрометрах удельные заряды ионов определяются различными способами: по времени их пролета от источника до коллектора, по периоду колебаний в переменных электрическом или магнитном полях, по резонансным частотам и т. д.

**Принцип работы масс-спектрометра.** Исследуемое вещество, прежде всего, подвергается ионизации. В случае жидких и твердых веществ их либо предварительно испаряют, а затем ионизируют, либо же применяют поверхностную ионизацию. Нормальный масс-спектр отражает зависимость содержания положительно заряженных частиц, образующихся при электронной бомбардировке молекул исследуемого соединения, от их массы. Само соединение должно присутствовать в парообразном состоянии при довольно низком давлении ( $10^{-2}$ — $10^{-5}$  Па) в ионном источнике. Положительные ионы (молекулы и их осколки), образующиеся в результате потери молекулой электрона при электронном ударе (ионизации), ускоряются электрическим полем и отклоняются в магнитном поле. Непрерывное изменение одного из этих полей приводит к фокусировке пучков ионов различных масс на щели коллектора, и сигнал после соответствующего усиления регистрируется. Полярность электрического поля такова, что по направлению к магнитному полю ускоряются только положительные ионы; все отрицательные частицы перемещаются в обратном направлении и теряются. Неионизированные молекулы и незаряженные осколки непрерывно откачиваются вакуумными насосами.

Блок-схема масс-спектрометра представлена на рис. 18.5.3. Масс-спектрометр обычно содержит устройство для подготовки исследуемого вещества 1; ионный источник 2, где это вещество частично ионизируется и проходит формирование ионного пучка;

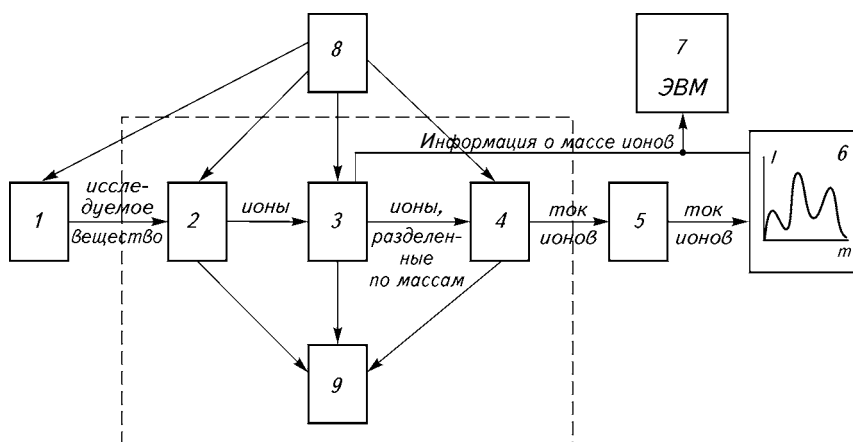


Рис. 18.5.3. Блок-схема масс-спектрометра:

1 — устройство для подготовки исследуемого вещества; 2 — ионный источник; 3 — масс-анализатор; 4 — приемник ионов; 5 — усилитель; 6 — регистрирующее устройство; 7 — ЭВМ; 8 — системы электрического питания; 9 — устройства, создающие и поддерживающие высокий вакуум в ионном источнике и анализаторе (пунктиром обведена вакуумированная часть прибора)

масс-анализатор 3, в котором происходит разделение ионов по массам, точнее, по величинам  $m/q$ ; приемник ионов 4, где ионный ток преобразуется в электрический сигнал, который усиливается усилителем 5 и регистрируется. В регистрирующее устройство 6, помимо информации о количестве ионов (ионный ток), из анализатора поступает также информация о массе ионов. Масс-спектрометр содержит системы электрического питания 8 и устройства 9, создающие и поддерживающие высокий вакуум в ионном источнике и анализаторе. Иногда масс-спектрометр соединяют с ЭВМ 7.

При любом способе регистрации ионов спектр масс, в конечном счете, представляет собой зависимость ионного тока  $I$  от массы  $m$  (рис. 18.5.4). Например, в масс-спектре свинца каждый из пиков ионного тока соответствует однозарядным ионам изотопов свинца. Высота каждого

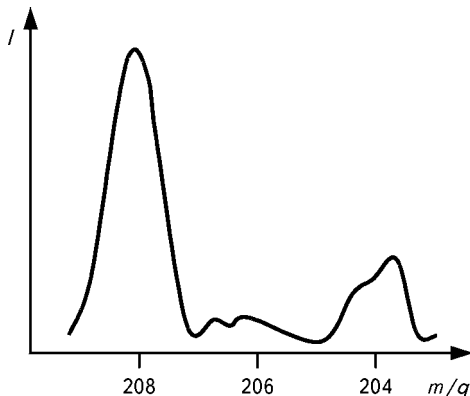


Рис. 18.5.4. Масс-спектр свинца

пика пропорциональна содержанию изотопа в свинце. Отношение массы иона к ширине пика называется *разрешающей способностью* масс-спектрометра

$$R = \frac{m}{\Delta m}. \quad (18.5.4)$$

Иногда разрешающей способностью называют значение той наибольшей массы, при котором два пика, отличающиеся по массе на единицу, разрешаются до заданного уровня. Считается, что масс-спектрометр с  $R$  до  $10^2$  имеет низкую разрешающую способность, при  $R = 10^2 \dots 10^3$  — среднюю,  $R = 10^3 \dots 10^4$  — высокую.

**Особенности применения масс-спектрометрии к анализу органических соединений (лекарственных препаратов).** Летучесть соединения является решающим фактором в масс-спектрометрии. Путем несложных химических превращений можно расширить область применения метода. Очень часто удается перевести соединение, само по себе недостаточно летучее, в такое производное, которое, сохраняя все существенные черты строения исходной молекулы, обладает вместе с тем достаточным давлением пара.

Чтобы получить воспроизводимый масс-спектр, необходимо следить за концентрацией соединения, то есть за его давлением

в ионном источнике. Если систему напуска поместить в печь, то можно добиться требуемого давления пара у многих сравнительно сложных органических соединений, если только они не содержат слишком большого числа полярных групп. Для веществ того типа, с которыми встречаются в химии природных соединений, верхним пределом является температура 200 °С, выше которой не всегда удастся избежать пиролизических реакций, усложняющих интерпретацию масс-спектра.

Вполне пригодный масс-спектр можно получить и от сравнительно нелетучих соединений, если их испарять непосредственно в ионном источнике. Как правило, любое соединение, которое легко перегоняется или сублимируется при температуре системы напуска и давлении порядка 1,3—2,6 Па, дает хороший масс-спектр.

После опыта прибор нужно длительное время откачивать перед тем, как ввести в него новый образец (для удаления следов вещества).

Количество вещества, требуемое для получения практически пригодного масс-спектра, в значительной степени зависит от приемов и способов введения этого вещества в масс-спектрометр.

Чтобы получить в баллоне объемом приблизительно 3 л (средний объем большинства выпускаемых приборов) давление порядка 1,3 Па, требуется примерно 1 мкмоль вещества. Однако в некоторых случаях при интерпретации спектра неизвестного соединения приходится принимать во внимание сравнительно малые пики, которые можно различить только в достаточно интенсивном спектре, который, в свою очередь, зависит от концентрации молекул в ионном источнике. Кроме того, процессы выделения чрезвычайно малых количеств вещества и их введение в масс-спектрометр часто приводит к неизбежному загрязнению объекта примесями, количество которых может даже превысить количество исследуемого соединения.

Тем не менее количество вещества, требуемое для получения пригодного для интерпретации масс-спектра, меньше, чем для получения других типов спектров. Практически обычно не превышает 1 мг.

Использование в масс-спектрометрии исследуемого вещества в виде разбавленных растворов проблематично. Впрыскивание большого количества пробы приведет к повышению давления в ионном источнике, который перестанет нормально работать. Другими словами, существует верхний предел общего количества вводимого в прибор вещества, и если исследуемый компонент присутствует в слишком низкой концентрации, то в наблюдаемом масс-спектре будут представлены очень сильные пики растворителя и чрезвычайно слабые пики растворенного вещества. Очевидно, что в та-

ких случаях следует или сконцентрировать раствор, или, что еще лучше, полностью удалить растворитель.

При расшифровке масс-спектров необходимо учитывать характер возможных загрязнений вещества. Особенно тщательно следует избегать загрязнения образцов смазочными маслами, вакуумной смазкой, силиконовым маслом, пластификаторами и другими обычно используемыми материалами, применение которых приводит к артефактам. Вакуумные смазки и масла дают непрерывную серию пиков, вплоть до очень больших масс, а силиконы, триалкил-фосфаты — ряд очень интенсивных пиков, усложняющих анализ. Однако высокая степень воспроизводимости масс-спектров позволяет получить спектр чистого соединения в присутствии другого вещества, если спектр последнего известен.

Спектрометр, применяемый для определения структуры природных соединений, должен быть пригоден для регистрации полного масс-спектра каждого исследуемого соединения. Выпускаемые приборы дают возможность регистрировать пики до 700 а. е. м., а при наличии дополнительных приспособлений даже более высокие массы. Практически этого диапазона вполне достаточно для исследований, поскольку очень низкая летучесть соединений с высоким молекулярным весом, как правило, препятствует определению их масс-спектров.

## § 18.6. РЕНТГЕНОСТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ

Для исследования лекарственных и биологически активных веществ все шире применяется рентгеноструктурный анализ, основанный на дифракции рентгеновских лучей. Метод рентгеноструктурного анализа является уникальным для изучения физико-химических свойств, обычно используемых при изучении органических и неорганических кристаллических веществ. Перспективы использования методов дифракции рентгеновских лучей в фармации связаны с идентификацией кристаллических лекарственных веществ, их полиморфных модификаций и пр. Этот метод — чувствительный тест при установлении идентичности двух кристаллических веществ. С помощью методов рентгенографии исследуют элементный и фазовый состав как неорганических, так и органических лекарственных веществ — алифатических и ароматических соединений, гетероциклических соединений природного и синтетического происхождения.

Перспективными можно считать рентгенодифракционную диагностику субмикронных слоев, исследование механизмов сорбции

на кристаллическую поверхность и десорбции. Взаимодействие атомов, лежащих на поверхности, связано как с чисто электронными свойствами сорбированного атома и кристалла, так и с локальной деформацией нескольких атомных слоев, лежащих вблизи поверхности. Эти деформации нередко составляют всего сотые доли межатомного расстояния, но они оказываются существенными для определения характера межатомного взаимодействия, позволяя определить состав и тип химической связи вблизи поверхности, в области одного монослоя. Соответствующие методы (рентгеноэлектронная и ОЖЭ-спектроскопия, просвечивающая электронная микроскопия, различные типы спектроскопии вторичных и рассеянных ионов и другое) позволяют проводить измерения в областях менее 0,1 мкм.

В последнее время появилась и успешно развивается новая наука — бионеорганическая химия, которая изучает поведение так называемых элементов жизни — металлов, имеющих колоссальное значение для жизнедеятельности организма. Эти микроэлементы (Na, K, Mn, Ca, Mg, Fe и др.) вводятся в организм в виде координационных соединений их с биоактивным веществом (лигандом). В таком виде они более активны, менее токсичны и обладают сильным каталитическим действием. Поиск новых комплексных координационных соединений является актуальной задачей для создания новых медицинских препаратов и биостимуляторов. Синтез новых биосоединений органически связан с методами исследования структуры, свойств, природы и совместимости металла и лиганда. Эти задачи решаются прежде всего с помощью методов рентгеновского анализа, а также ИК- и ЭПР-спектроскопии, дериватографии.

Для эффективного практического применения рентгеновского анализа необходимо иметь представление о природе и свойствах рентгеновских лучей, основных принципах их взаимодействия с веществом.

**Физические основы метода.** Рентгеновский структурный анализ представляет собой совокупность метода исследования вещества, основанный на определении интенсивностей, а также соответствующих им направлений рассеянного на атомах анализируемого объекта рентгеновского излучения. В основе этих методов лежит взаимодействие рентгеновского излучения с электронами вещества, в результате которого возникает дифракция рентгеновских лучей. Дифракционная картина зависит от длины волны рентгеновского излучения и однозначно соответствует атомному строению вещества.

На рентгеновское излучение в спектре электромагнитных волн приходится довольно широкий диапазон длин волн от  $10^{-7}$  м (мягкое рентгеновское излучение) до  $10^{-12}$  м (жесткое рентгеновское излучение), однако для исследования атомной структуры вещества при-



меняют излучение с длиной волны примерно  $10^{-10}$  м, то есть порядка размеров атомов и межатомных расстояний.

Источником рентгеновского излучения является рентгеновская трубка, в которой используется столкновение ускоренных электронов с веществом анода. Электроны, освобождающиеся в результате термоэмиссии, разгоняются между двумя электродами вакуумированной трубки, к которым приложено высокое напряжение (обычно  $10^4 \dots 10^5$  В).

Вид спектра выделяющегося из трубки рентгеновского излучения изменяется в зависимости от ускоряющего электроны напряжения. Увеличение напряжения приводит к появлению в сплошном спектре четких линейчатых максимумов интенсивности излучения. Длина волны, соответствующая этим максимумам, и разность потенциалов (порог возбуждения излучения), при которых они возникают, зависят только от вещества анода, поэтому такое излучение названо **характеристическим**.

Характеристическое излучение возникает при переходе электронов с  $L$ -оболочки на  $K$ -оболочку в атомах металлов — от Сг до Мо, причем длины волн лежат в интервале 0,23...0,07 нм.

Наиболее интенсивной является  $K_\alpha$ -линия, интенсивность  $K_\beta$ -линии в несколько раз меньше. Рентгеновские трубки с анодами Сг—Мо являются источниками практически монохроматического излучения  $K_\alpha$ .

Характерной чертой рентгеновских спектров является то, что линии образуют отделяющиеся друг от друга группы серий ( $K$ ,  $L$ ,  $M$ , ..., — в направлении от более коротких длин волн к более длинным). Структура рентгеновских спектров проще и более обозримая, чем у оптических спектров. Здесь нет существенной разницы между спектрами атомов и связанных систем; характеристический спектр связанных систем можно грубо рассматривать как сумму спектров, составляющих систему атомов.

Применение рентгеновского излучения для исследования кристаллических веществ основано на том, что каждое вещество имеет свою определенную кристаллическую решетку с определенными параметрами, а длина волны рентгеновского излучения сопоставима с расстоянием между упорядоченно расположенными атомами в кристаллической решетке, которая для него является естественной дифракционной решеткой. Следовательно, каждое кристаллическое вещество характеризуется своей собственной дифракционной картиной — **рентгенограммой**. Сущность рентгеновского анализа заключается в исследовании дифракционной картины, получаемой при отражении рентгеновских лучей от атомных плоскостей кристалла.

Все плоскости, одинаково ориентированные в пространстве, составляют семейство плоскостей, которое характеризуется кристалло-

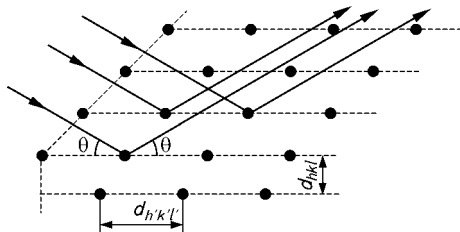


Рис. 18.6.1. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллической решетке:

$\theta$  — угол падения (отражения) монохроматического рентгеновского луча на атомную плоскость;  $d_{hkl}$  и  $d_{h'k'l'}$  — межплоскостные расстояния в кристаллической решетке

графическими индексами  $hkl$ . Совокупность индексов плоскости называется *символом плоскости* ( $hkl$ ). Каждому семейству плоскостей с индексами ( $hkl$ ) соответствуют определенные межплоскостные расстояния,  $d_{h'k'l'}$  — расстояние между двумя соседними параллельными плоскостями (рис. 18.6.1). Межплоскостные расстояния — важнейшие структурные характеристики кристаллических

веществ. В рентгеноструктурном, а также электроннографическом анализе расстояния  $d$  выражаются как функции индексов  $h, k, l$  ( $h, k, l = 0, 1, 2, 3, \dots$ ).

Параметры кристаллической решетки  $d_{hkl}$ ,  $\theta$  — угол падения (или отражения) монохроматического рентгеновского луча на атомную плоскость и длина волны  $\lambda$  связаны *условием Вульфа—Брэгга*, которое положено в основу любого дифракционного анализа:

$$2d_{hkl} \sin \theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \quad (18.6.1)$$

где  $n$  — порядок дифракционного максимума. Это уравнение является условием для возникновения дифракционного максимума интенсивности рентгеновского излучения при его взаимодействии с решеткой кристалла. Для любого направления падения рентгеновских лучей на решетку образуется целая совокупность дифрагированных волн, часть которых будет удовлетворять условию Вульфа—Брэгга и создавать дифракционный максимум на регистрирующем устройстве. Интенсивность дифракционных максимумов от любой группы плоскостей зависит от расположения атомов в элементарной ячейке. Условие дифракции  $d > \lambda$  выполняется для рентгеновских лучей ( $\lambda \sim 0,1$  нм) и для электронов в электронном микроскопе ( $\lambda \sim 0,001$  нм). Измеряя направления и интенсивности брэгговских рефлексов, можно определить расположение атомов в веществе, включая и такие сложные объекты, какими являются биологические молекулы, состоящие из нескольких десятков тысяч атомов (рис. 18.6.1).

**Аппаратура для рентгеновских дифракционных исследований.** Рентгеновские установки для структурного анализа кристаллических веществ делятся на фоторегистрирующие аппараты (типа УРС) и рентгенодифрактометры (типа ДРОН). Первые — конструктивно

несложные, просты в эксплуатации, надежны в работе, однако определение интенсивности дифракционных максимумов, необходимых при решении ряда задач, довольно трудоемко. Наиболее распространенной и удобной в работе камерой для рентгенографических исследований поликристаллов является камера РКД-57,3.

В современных лабораториях применяются рентгенодифрактометры, в которых дифракционная картина регистрируется с помощью счетчиков квантов. Измерения интенсивности дифракционных максимумов и их углового положения производятся с помощью ионизирующих или сцинтилляционных счетчиков излучения. Универсальность этих приборов дает возможность использовать различные варианты геометрии и условий съемки, менять специальные приставки к рентгеногониометру, варьировать скорости движения счетчика и вращения образца. Окончательную информацию — дифракционный спектр — можно записать на диаграммную ленту электронного потенциометра или в память компьютера. Преимущество этого способа — высокая точность, чувствительность и экспрессность. Оба метода являются неразрушающими.

Важным и непростым этапом в рентгенографическом исследовании является регистрация дифракционной картины. В основе способов регистрации рентгеновского излучения лежит его способность ионизировать газы, разлагать бромистое серебро фотоэмульсии, вызывать люминесценцию или фотопроводимость в кристаллических веществах. В соответствии с этим используются пропорциональный счетчик и счетчик Гейгера, фотографический метод, сцинтилляционные счетчики и полупроводниковые детекторы.

Методы получения рентгенограмм различаются как по способу регистрации, так и по способу реализации условий получения дифракционных спектров. Если дифракционная картина поликристалла фиксируется на рентгеновскую пленку, то метод называется фотографическим, а снимки — дебаеграммами. Дифракционная картина, зафиксированная на дифрактометрах, называется *дифрактограммой*.

Фотографический метод регистрации целесообразно применять в том случае, когда в распоряжении исследователя имеется малое количество исследуемого образца. Этот метод удобен для проведения качественного фазового анализа, так как на рентгенограммах образуется полный набор дифракционных линий соответствующей кристаллической фазы. При съемке смеси на рентгенограмме получается набор линий всех присутствующих кристаллических веществ (фаз).

Для решения задач, требующих точного знания интенсивности дифракционных максимумов, вещество лучше снимать на рентгенодифрактометре. В обоих случаях — при съемке дебаеграм и при регистрации дифрактограмм исследуемые образцы обычно готовятся в виде мелких порошков. Крупные кристаллы из порош-

кового образца дают на дебаеграмме точечные линии, а на дифрактограмме искажают истинную форму и интенсивность дифракционных максимумов, что затрудняет измерение и правильную интерпретацию дифракционной картины. В некоторых случаях следует учитывать, что сухое растирание вещества приводит к нарушению его кристаллического строения; при интенсивном растирании возможны также полиморфные превращения или изменение агрегатного состояния. Тогда необходимо выполнять пробные съемки в целях контроля и устранения этих нежелательных эффектов (артефактов). Конкретные способы приготовления объектов исследования изложены в специальной литературе.

### **Расчет дифрактограмм и идентификация кристаллических веществ.**

Первым этапом в расшифровке дифракционных картин согласно условию Вульфа—Брэгга является определение значений углов отражения, при которых наблюдаются максимумы интенсивности. Дифрактометрический способ анализа поликристаллов достаточно сложный, но в то же время — более быстрый и точный. На дифрактограмме положение дифракционного максимума соответствует углу отражения  $2\theta$ , а площадь и высота — интенсивности. На практике применяются два способа определения положения пиков — по максимуму и по центру тяжести (метод геометрических построений).

После расшифровки рентгенограммы, получения совокупности значений межплоскостных расстояний и относительных интенсивностей дифракционных линий можно приступить к идентификации исследуемого вещества. Возможность идентификации основывается на том, что измеренный набор величин является однозначной характеристикой данного вещества в данном состоянии. Важно то, что идентификацию кристаллических веществ можно провести без знания атомно-кристаллической структуры, достаточно лишь сравнить дифракционный спектр анализируемого вещества (достаточно пяти наиболее интенсивных рефлексов) со спектрами известных кристаллических веществ или с их справочными кристаллографическими данными. Если вещество не является однофазным, а содержит два и более кристаллических соединений, то с помощью предлагаемого способа можно определить фазовый состав всего вещества.

В специальной литературе описаны дифрактограммы кристаллических лекарственных веществ, широко используемых в медицине.

Излучение рентгеновского диапазона находит применение в биологии и медицине для диагностики и терапии различных заболеваний. Электромагнитные волны рентгеновского диапазона по-разному поглощаются веществом в зависимости от длины волны

излучения и от свойств самого вещества. Так, более жесткое рентгеновское излучение обладает большей проникающей способностью, поэтому мягкое излучение, поглощаемое в большей мере, может вредно воздействовать на поверхностные слои (например на кожу).

## § 18.7. МИКРОСКОПИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Учитывая, что свет представляет собой электромагнитные волны в широком диапазоне частот (длин волн), к микроскопии относятся не только обычная световая, но и ультрафиолетовая (люминесцентная), ИК-микроскопия (тепловидение), просвечивающая электронная микроскопия, растровая электронная микроскопия и другие в зависимости от вида используемого излучения.

Различные типы микроскопов используются в фармации для обнаружения и изучения бактерий, органических клеток, мелких кристаллов. Кристаллооптический и микро-кристаллоскопический анализ — надежные методы идентификации фармацевтических препаратов. Эти методы, с использованием поляризационного микроскопа, отличаются простотой, быстротой получения и наглядностью микроскопической картины, высокой чувствительностью, возможностью идентификации веществ, имеющих сходные по форме кристаллы.

Оценка дисперсного состава частиц является одной из важнейших задач исследования коллоидных систем и технологии переработки дисперсных материалов, так как размер частиц определяет их реологическое поведение, влияет на коллоидную стабильность и многие технологические свойства. Изображения, полученные с помощью просвечивающей электронной микроскопии, служат исходными данными в исследовании структуры биологических макромолекул, знание которой позволяет установить ее связь с выполняемыми функциями.

Метод люминесцентной микроскопии применяется для исследования культуры тканей, находящихся в питательной среде, для определения подлинности лекарственного растительного сырья.

**Физические основы методов микроскопии. Приготовление микропрепаратов.** Предпосылкой для всех микроскопических исследований является изготовление микропрепаратов (образцов). В Государственной фармакопее Украины изложены некоторые методики приготовления микропрепаратов из сухого лекарственного растительного сырья для исследования листьев, трав, цветов, плодов семян, корней методом люминесцентной микроскопии. Для изучения других объектов каждый исследователь использует свой личный опыт

препарирования, дающий удовлетворительные результаты. Микроскопист, изучая вместе с технологом изменения микроструктуры объекта под влиянием различных воздействий, помогает выбрать оптимальный режим получения микропрепарата с заданными свойствами.

При приготовлении биологических препаратов для электронной микроскопии используют микротомы — машины для вырезки очень тонких срезов объектов. В любом случае приготовление микропрепаратов имеет чрезвычайно важное значение, поскольку от этого зависит правильность толкования микроструктур. Если препарат приготовлен неправильно, могут возникнуть артефакты структуры, связанные с механическим или химическим воздействием на объект, и ошибочное толкование микроструктуры становится неизбежным.

**Световая микроскопия.** В химико-биологических исследованиях (микробиологии, гистологии, цитологии, ботанике, медицине и других) используются главным образом биологические, люминесцентные и инвертированные микроскопы (в последних объектив располагается под наблюдаемым объектом, а конденсор — сверху). Биологические микроскопы часто снабжаются приставками — поляризационными и измерительными устройствами, термостатирующими камерами, фоторегистрационными приспособлениями и др. Исследования проводят как в проходящем, так и в отраженном свете.

Свойство линзы или системы из двух и более линз давать увеличенное изображение предметов было известно еще в XVI веке. Разработанная в конце XIX века теория образования изображений (теория Аббе) несамосветящихся объектов способствовала развитию разнообразных методов микроскопических исследований.

Особенности формирования изображений объектов световым пучком, проходящим через линзы и отраженным от зеркал, изучаются в курсе общей физики в разделе геометрической оптики. Одна из типичных оптических схем микроскопа приведена на рис. 18.7.1. Объект 5, расположенный на предметном столике 8, освещается дневным светом (или специальным осветителем) 1 с помощью зеркала 3 и конденсора 4. Для увеличения объекта служит объектив 6 и окуляр 7. Объектив создает действительное перевернутое и увеличенное изображение 5' объекта 5. Окуляр образует вторично увеличенное мнимое изображение 5'', обычно на расстоянии наилучшего видения (250 мм). Если окуляр сдвинуть так, чтобы изображение объекта 5' оказалось перед передним фокусом окуляра, то изображение, даваемое окуляром, становится действительным и его можно получить на экране, фотопленке или сетчатке глаза.

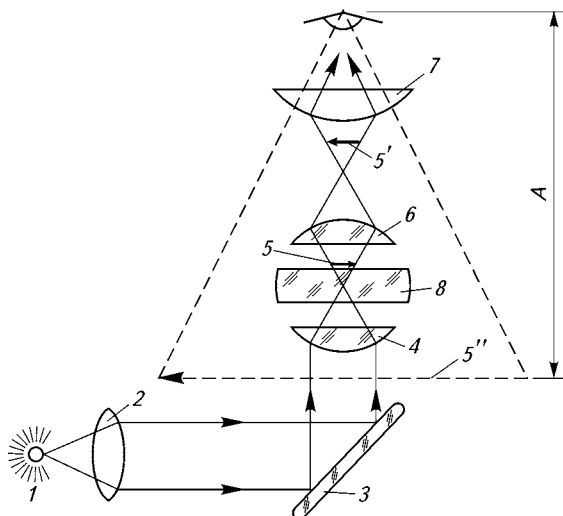


Рис. 18.7.1. Типичная оптическая схема микроскопа

1 — источник света; 2 — линза-корректор; 3 — зеркало; 4 — конденсор; 5 — объект; 6 — объектив; 7 — окуляр; 8 — предметный столик; 5' — действительное перевернутое и увеличенное изображение объекта 5, созданное объективом; 5'' — вторично увеличенное мнимое изображение объекта, созданное окуляром; A — числовая апертура объектива

Общее увеличение равно произведению увеличения объектива ( $0,25 \Delta/1 \text{ об}$ ) на увеличение окуляра ( $0,25 \Delta/f_{\text{ок}}$ ) [см. формулу (13.1.4)]. Обычно объективы микроскопов имеют увеличения от 6,3 до 100, а окуляры — от 7 до 15. Поэтому общее увеличение лежит в пределах от 44 до 1500 (теоретически).

Важной характеристикой микроскопа является его *разрешающая способность*, определяемая как величина, обратная наименьшему расстоянию, на котором два соседних элемента структуры (точки) еще могут быть видимы раздельно. Минимальное разрешение глаза составляет 0,1...0,2 мм. С помощью оптического микроскопа можно различить структуру с расстоянием между элементами до 0,20 мкм. Разрешающая способность тем больше, чем меньше длина волны используемого света и чем больше числовая апертура (A) объектива. При данном освещении разрешение микроскопа можно повысить путем использования иммерсионной жидкости с большим показателем преломления, заполняющей пространство между предметом и объективом. Разрешающая способность системы линз ограничена дифракцией света, так как длина волны видимого света лежит в пределах  $0,3 \div 0,7 \text{ мкм}$ .

Существование предела разрешающей способности влияет на выбор увеличения микроскопа. Увеличение в пределах  $\times 500 \dots 1000$

называется *полезным*, потому что при этом глаз различает все элементы структуры объекта. При увеличениях свыше 1000 никакие новые особенности структуры препарата не выявляются.

Оператор должен учитывать также глубину резкости изображения, которая характеризуется размером вертикального смещения деталей образца без потери фокусировки. Эта величина пропорциональна  $1/A^2$ , а это означает, что при грубой поверхности объекта целесообразно использовать объективы с малой числовой апертурой  $A$ .

**Методы микроскопического анализа.** Структуру препарата можно различить, если разные его частицы по-разному поглощают или отражают свет, либо отличаются одна от другой (или от среды) показателями преломления. Эти свойства обуславливают разницу амплитуд и фаз световых волн, прошедших через различные участки препарата, от чего, в свою очередь, зависит контрастность изображения. Поэтому методы наблюдения, применяемые в световой микроскопии, выбираются с учетом характера и свойств изучаемого препарата. Рассмотрим некоторые из них.

1. **Метод светлого поля в проходящем свете.** Это наиболее распространенный метод исследования прозрачных препаратов с включенными в них абсорбирующими (поглощающими) частицами и деталями. Частицы поглощают и отчасти рассеивают падающий на них свет, что и обуславливает, согласно дифракционной теории, возникновение изображения. Указанный метод может быть полезен и при неабсорбирующих объектах, если они рассеивают освещающий пучок настолько сильно, что значительная часть пучка не попадает в объектив. В этом случае свет должен падать перпендикулярно к освещаемому препарату.

2. **Косое освещение.** В некоторых случаях для усиления контрастности изучаемых деталей свет направляется на объект под некоторым углом. Эффект косого освещения достигается либо смещением линз конденсора относительно оптической оси, либо смещением источника света вне микроскопа и освещением образца снизу из-под линз объектива. Вследствие того, что большинство линз объектива имеет небольшое рабочее расстояние, этот метод применим только при работе с малыми увеличениями, когда используются объективы с большим фокусным расстоянием.

3. **Темнопольное освещение.** Данный метод применяется также для усиления контрастности структурных деталей. На пути светового пучка ставится так называемый конденсатор темного поля, в результате чего свет непосредственно в объектив не попадает, и изображение формируется только светом, рассеянным микрочастицами препарата. В поле зрения на темном фоне видны светлые изображения частиц, отличающихся от окружающей среды показате-



лями преломления. Часто детали структуры, которые в светлом поле имеют слабую контрастность, становятся резко контрастными в темном поле.

**4. Метод исследования в свете люминесценции.** Под микроскопом в этом случае изучается зелено-оранжево-желтое свечение объекта, возникающее при освещении специальными люминесцентными осветителями, дающими сине-фиолетовый свет или УФ-излучение. При этом увеличивается предельная разрешающая способность микроскопа, пропорциональная  $1/\lambda$ , и расширяются возможности микроскопических исследований. Это происходит в результате того, что элементы многих веществ, прозрачные в видимом свете, поглощают излучение, близкое к ультрафиолету, и легко различаются. Например, клетки эпидермиса семян обычно имеют сине-голубое свечение; механические элементы коры — зеленовато-голубое или же зеленое свечение; отчетливо видны пыльцевые зерна цветков, имеющих желтое или голубоватое свечение, и т. п.

Люминесцентная микроскопия применяется в фармакогнозии для определения подлинности лекарственного растительного сырья. Преимуществом метода является возможность его применения для изучения сухого растительного материала, из которого готовят толстые срезы или препараты порошка и рассматривают их в падающем свете при освещении препаратов сверху, через опак-иллюминатор или объектив.

**5. Метод исследования в поляризованном свете.** С помощью анализаторов и компенсаторов, которые включены в оптическую систему (например в приставке, называемой столиком Федорова), изучается угол поворота плоскости поляризации света, прошедшего через препарат. Метод применяется для изучения анизотропных объектов, каковыми являются некоторые животные и растительные ткани и клетки. Этот метод особенно эффективен при проведении анализа органических фармацевтических препаратов и ядов, основанного, в свою очередь, на комбинации двух методов: микрокристаллоскопического и кристаллооптического. В основу применения микрокристаллоскопического метода положена идентификация веществ по внешнему облику (форма, цвет) и кристаллооптическим константам кристаллов — продуктов реакций исследуемого вещества с тем или иным реактивом. Микроскопический метод базируется на использовании явления двойного лучепреломления оптически анизотропных кристаллов, изучаемого в курсе общей физики. Признаками идентификации являются морфологические характеристики кристалликов — продуктов реакций; форма, окраска, размер, а также кристаллооптические константы: показатели преломления, знак удлинения, угол погасания, плеохроизм (изменение окраски кристалла в зависимости от направления световых колебаний) и др.

**Просвечивающая электронная микроскопия (ПЭМ).** Работа электронного и оптического микроскопов основана на разных физических явлениях, но общность их функций делает обоснованным его рассмотрение в данном разделе.

В электронном микроскопе изображение формируется ускоренными в электрическом поле электронами, проходящими сквозь исследуемый объект. Здесь также используется система электронных линз (объектив, конденсор и другое), фокусирующих пучок электронов. Электронные линзы — это система электрических и магнитных полей, изменяющих траекторию движения электронов. Для построения изображения предмета в электронной оптике справедливы соотношения, рассмотренные в световой оптике. В отечественных микроскопах достигаются увеличения порядка 200 000, но практически рабочим увеличением является 20 000.

Особые требования в электронной микроскопии предъявляются к приготовлению препаратов. Объекты исследования должны быть очень тонкими, порядка 0,1 мкм; для их приготовления требуются специальные микротомы и особые методы фиксирования ультратонких срезов. Как современный метод исследования ПЭМ имеет два основных достоинства: высокое разрешение визуального изображения (меньше или порядка 10 нм) и возможность регистрации электронной микродифракции (ЭМД) на выбранном участке объекта. Сочетание анализа светлого и темнопольного изображений с расчетом картин ЭМД позволяет получать детальную информацию о кристаллической структуре, включая морфологию надмолекулярных образований и кристаллографические параметры. В последнее время наблюдается заметный подъем в области микродифракционных исследований органических полимеров и модельных соединений в целях проведения полного структурного анализа с определением конформации цепи и упаковки макромолекул в кристалле.

По сравнению с рентгенографическим методом ЭМД имеет ряд принципиальных преимуществ. Так, особенности взаимодействия электронов с веществом приводят к тому, что электронограммы могут содержать значительно больше рефлексов, чем рентгенограммы, а интенсивности их в  $10^6$ — $10^8$  раз выше. К препаративным преимуществам относится возможность исследования микроколичества вещества. Последнее особенно важно для тех полимеров, которые не способны к ориентационной вытяжке, в связи с чем исследования структуры рентгенографическим методом затруднены. Кроме того, электронограммы обладают более высоким разрешением рефлексов по сравнению с рентгенограммами, что позволяет точнее определять период идентичности макромолекулы и другие параметры.

В качестве примера успешного использования методов ПЭМ можно привести изучение новых кремнийорганических соединений  $(\text{Ph}_2\text{SiO})_n$ . Незамещенный полидифенилсилоксан является термостойким высококристаллическим полимером с очень низкой растворимостью в обычных органических растворителях. Он не обладает способностью к ориентации, в связи с чем его рентгеноструктурный анализ до сих пор не проведен. Структурные данные, полученные в результате всестороннего изучения представителей этого класса полимеров, были использованы не только для построения структурной модели макромолекулы, но и при создании технологии получения и переработки этого класса материалов.

При переходе в режим изображения объекта электронная микроскопия позволяет проводить визуальный структурный анализ, строить качественные модели исследуемых объектов, позволяющие дать биохимическую интерпретацию их структуры. Целью изучения биомacroмолекул с помощью ПЭМ является получение достоверного трехмерного распределения плотности объекта.

Несмотря на значительные преимущества (например возможность работать с некристаллизующими объектами), метод ПЭМ не лишен недостатков. Одна из основных проблем применения ПЭМ биомacroмолекул — значительная сложность приготовления объектов исследования и их высокая радиационная неустойчивость: объекты быстро разрушаются под электронным пучком. Другая проблема — низкая контрастность изображений, обусловленная тем, что биологические объекты состоят преимущественно из легких атомов. Преодоление этих трудностей стимулировало разработку различных методов фиксации образцов и аппаратуры для повышения радиационной стойкости объектов. Так, были разработаны методы контрастирования образцов, замещения водного окружения объекта гидрофильными нелетучими молекулами и сверхбыстрого охлаждения образцов до низких температур. Установлено, что сопротивление облучению зависит от химической структуры образцов. Так, например, накопление ароматических фрагментов в мономерном звене повышает их устойчивость и позволяет эффективно применять метод ЭМД.

К особому классу задач, решаемых методом ПЭМ, можно отнести аналитический метод контроля размеров частиц латексных систем. В дополнение к оптической микроскопии ПЭМ позволяет разрешать наименьшие частицы латексов (размером 100 нм и меньше). Преимуществом ПЭМ является также и то, что с ее помощью определяется не только размер частиц, их распределение по размерам, но и форма частиц, что невозможно при других методах исследования.

Для оценки диаметров коллоидных частиц и функции распределения размеров частиц часто используется растровая электронная микроскопия.

Точность электронной микроскопии как аналитического метода определения размеров частиц можно считать равной  $\pm 3\%$ , что соответствует ошибке в определении моодисперсионных латексов. При оценке точности измерений очень важной является техника препарирования, поскольку неправильное ее применение может давать погрешности, намного превышающие экспериментальные возможности метода. Как разновидность электронной микроскопии существует *метод растровой электронной микроскопии* (РЭМ), который позволяет по образцам небольшого размера изучать структурные характеристики в широком диапазоне увеличений (от оптических до электронно-оптических). Растровый электронный микроскоп при достаточно высоком разрешении дает возможность работать при увеличениях 20—100 и увеличивать глубину фокуса в 300 раз. В последнее время метод РЭМ успешно применяется в биологии и химии. С помощью специальных приставок (газовых микрокамер) и криометодов можно изучать жидкие и газообразные объекты, неустойчивые к воздействию высокого вакуума, в частности влажные биологические препараты.

Метод РЭМ позволяет успешно решать следующие задачи:

- проведение количественного анализа микростроения твердотельных объектов (таблеток, порошков, гранул и др.);
- исследование пористости объектов с размером от 20 нм до десятков микрометров;
- изучение морфологии поверхности, то есть исследование роста синтетических и биологических кристаллов, выращиваемых из растворов;
- выявление различных отложений (загрязнений) поверхности лекарственных препаратов и упаковок;
- оценка размеров частиц полидисперсных систем. Метод РЭМ достаточно информативен при изучении структурообразования волокнистых систем, которые используются в качестве мембран в процессах обратного осмоса и при ультрафильтрации в медицинской практике.

## § 18.8. ПОЛЯРИМЕТРИЯ

*Поляриметрия* — метод исследования, основанный на измерении угла поворота плоскости поляризации линейно-поляризованного света при его прохождении через оптически активные веще-

ства. Оптическая активность чрезвычайно чувствительна к любым изменениям строения вещества и к межмолекулярному взаимодействию, поэтому она может дать ценную информацию о природе заместителей в молекулах как органических, так и комплексных неорганических соединений. Измерение удельного вращения проводится либо для оценки чистоты оптически активного вещества, либо для определения его концентрации в растворе.

Еще более характерным свойством, дающим больше информации, чем удельное вращение при определенной длине волны, является дисперсия оптического вращения (изменение оптического вращения в зависимости от длины волны) соединения, для которого оптическое вращение может быть измерено в области не очень интенсивной полосы поглощения. Метод дисперсии оптического вращения широко используется при структурных и стереохимических исследованиях, часто в качестве «фингерпринтного» метода.

**Физические основы метода.** Электромагнитная волна (в частности свет) называется линейно- или плоскополяризованной, если колебания ее электрической компоненты — вектора напряженности поля  $\vec{E}$  лежат в одной плоскости, которая называется плоскостью поляризации. При прохождении поляризованного света через некоторые вещества, которые называют х и р а л ь н ы м и (их молекулы не имеют никаких элементов симметрии, кроме поворотной оси 1-го порядка), наблюдается вращение плоскости поляризации. Такие вещества называются *оптически активными*. Большинство органических веществ хиральны и, следовательно, оптически активны. Их оптическая активность обусловлена асимметричным строением молекул, существующих в двух формах — «правой» и «левой».

Молекулы «правого» и «левого» оптически активного вещества являются оптическими изомерами: они представляют собой зеркальные отражения друг друга. Физические и химические свойства чистых оптических изомеров совершенно одинаковы при отсутствии какого-либо асимметричного агента, реагирующего на зеркальную асимметрию молекул. Продукт химической реакции без участия такого агента — всегда смесь оптических изомеров в равных количествах — это так называемый *рацемат*. Физические свойства рацемата и чистых оптических изомеров часто различны. Правые и левые молекулы можно различать, например, в химических реакциях с участием асимметричных агентов или микробиологически.

В зависимости от природы оптически активного вещества вращение плоскости поляризации может иметь различные направление и угол (левовращающее и правовращающее вещество). Угол вращения в растворах зависит от природы растворителя и концентрации. Поэтому поляриметрия в химикофармацевтической про-

мышленности широко применяется для измерения концентрации растворов, особенно сахаров.

Чтобы понять природу поляризации света, в курсе физики изучается эффект двойного лучепреломления света, проходящего через кристаллические поляроиды. Для химиков полезно знать, что аналогичный эффект можно наблюдать и для текущих жидкостей, состоящих из текстурированных молекул (например, нитевидных, палочкообразных). Двойное лучепреломление при течении позволяет сделать выводы относительно формы, размеров молекул некоторых биологически важных соединений (например белков).

Физическая природа двойного лучепреломления обусловлена анизотропией структуры вещества относительно распространения света. При течении нитевидные частицы расположены параллельно; в результате этой упорядоченности скорость распространения света зависит от плоскости его колебаний. Скорость света имеет одно значение, когда плоскость поляризации параллельна упорядоченным молекулам, и другое, — когда она перпендикулярна к ним. Колебания электромагнитных волн (света) могут быть представлены в виде двух компонент: электрической  $\vec{E}$  и магнитной  $\vec{H}$ , расположенных во взаимно перпендикулярных плоскостях. Если эти две компоненты распространяются с различной скоростью то показатели преломления среды для них отличаются, и поэтому «составляющие» света расходятся в ней: естественный свет в среде разделяется на два перпендикулярных плоскополяризованных луча. Двойное лучепреломление можно наблюдать также в тканях, имеющих волокнистую структуру или другое упорядоченное строение. Растворы или жидкие вещества, предназначенные для измерения угла вращения, должны быть прозрачными.

Технически более сложной, но и более информативной для изучения строения веществ является **спектрополяриметрия**: измерение вращательной дисперсии, то есть изменения угла вращения при изменении длины волны света. Физика процессов взаимодействия света с веществом остается той же, что и при использовании монохроматического излучения.

Для определенных соединений (например для кетонов) получают характерную кривую (эффект Коттона) с резко выраженными максимумами и минимумами. Однако число функциональных групп оптически активных соединений с практически измеримыми кривыми эффекта Коттона ограничены по ряду причин. Во-первых, для большинства соединений эффект обнаруживается при длинах волн, меньших 250 мкм, то есть в пределах возможностей доступных в настоящее время приборов; во-вторых, эффект наблюдается в максимуме поглощения света, то есть интенсивность измеряемого света может оказаться недостаточной для измерения оптического вращения.

И все же, на основании кривых дисперсии оптического вращения получена важная информация о структурных соотношениях в кетонах и альдегидах, нитросоединениях, некоторых ароматических соединениях, эфирах и др. В ряде случаев кетонные и эфирные группы, не различаемые по спектрам поглощения, легко удастся обнаружить по кривым дисперсии оптического вращения, поскольку кетоны в области 300 мкм дают эффект Коттона, а эфиры — только плавные кривые дисперсии. Этот метод дает возможность определять относительные и абсолютные конфигурации молекул; сформулировать предположения о структурных подобиях соединений по сути химически не коррелируемых; изучать структурные особенности природных соединений, родственных стероидам.

**Определение оптического вращения.** Для измерения угла вращения плоскости поляризации монохроматического света в оптически активном веществе используется прибор, называемый поляриметром (дисперсию оптической активности измеряют спектрополяриметрами). Двумя важнейшими частями поляриметров являются поляризатор и анализатор, каждый из которых обычно представляет собой *призму Николя* (николь) — соответствующим образом граненный, разрезанный и склеенный кристалл испанского шпата. Как видно из рис. 18.8.1, необыкновенный луч, пройдя через николь как через плоскопараллельную пластинку, распространяется в первоначальном направлении и его можно использовать в качестве плоскополяризованного света. Обыкновенный луч претерпевает полное внутреннее отражение и отклоняется в сторону.

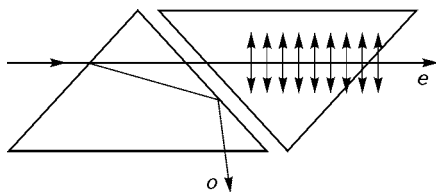


Рис. 18.8.1. Ход обыкновенного (o) и необыкновенного (e) лучей в призме Николя

Две такие призмы в приборе устанавливаются одна за другой (поляризатор и анализатор); при вращении анализатора вокруг падающего луча как вокруг оси интенсивность света, прошедшего через анализатор, периодически изменяется (закон Малюса). Если главные плоскости поляризации анализатора и поляризатора совпадают, свет проходит через эту оптическую систему, и поле зрения становится светлым. При повороте анализатора на  $90^\circ$  вокруг направления падающего света — свет практически не проходит через него, и поле зрения становится темным.

Если поместить между скрещенными николями раствор оптически активного вещества, то темное поле зрения посветлеет, а чтобы оно снова потемнело, анализатор необходимо повернуть на определенный угол. Угол поворота анализатора равен углу поворота плоскости поляризации раствором.

В обычно используемых в лабораторной практике полутеневых поляризаторах плоскости поляризации двух их половин  $P_1$  и  $P_2$  составляют между собой малый угол  $2\alpha$ . Если плоскость анализатора  $AA$  перпендикулярна биссектрисе  $2\alpha$  (рис. 18.8.2, *а*), обе половины *I* и *II* поля зрения имеют одинаковую полутеневую освещенность. При малейшем повороте анализатора относительная освещенность *I* и *II* половин поля зрения резко изменяется (рис. 18.8.2, *б*, *в*).

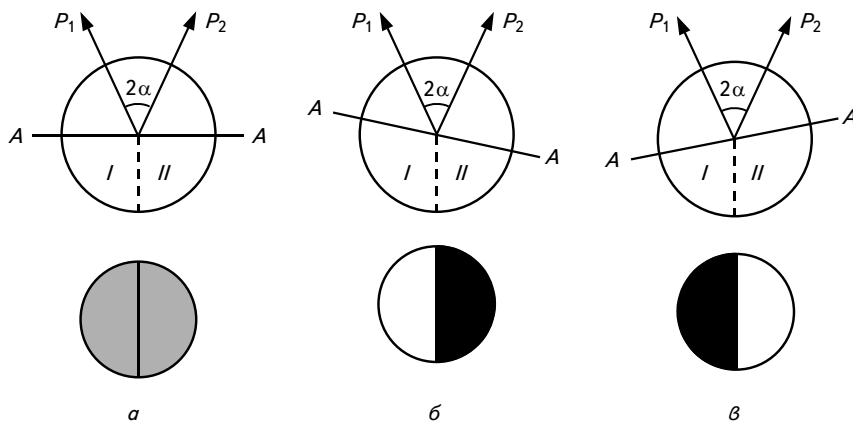


Рис. 18.8.2. Полутеневые поляризаторы:

$P_1$  и  $P_2$  — плоскости поляризации двух половин поляризаторов;  $2\alpha$  — малый угол между ними; *а* — обе половины *I* и *II* поля зрения имеют одинаковую полутеневую освещенность при перпендикулярном расположении плоскости анализатора  $AA$  и биссектрисы угла  $2\alpha$ ; *б* и *в* — изменение относительной освещенности *I* и *II* половин поля зрения, вызванное поворотом анализатора

В поляриметрах, построенных по схеме полутеневых приборов, измерение сводится к визуальному уравниванию яркостей двух половин поля зрения прибора и последующему считыванию показаний по шкале вращений, снабженной нониусом. Подобная методика визуальной регистрации обладает достаточно высокой чувствительностью, что позволяет применять полутеневые поляриметры в различных целях.

При измерении угла вращения  $\alpha$  прежде всего устанавливают нулевую точку отсчета и определяют поправку прибора с трубкой, заполненной чистым растворителем (при работе с растворами) или пустой трубкой (при работе с жидкими веществами), после чего проводят основное измерение, корректируя его с учетом поправки.

Угол вращения  $\alpha$  (или отклонения плоскости поляризации от начального положения) зависит от природы оптически активного вещества, длины пути поляризованного света в оптически активной среде и длины волны света. Для растворов угол  $\alpha$  зависит от



природы растворителя (поэтому, приводя значение удельного вращения, необходимо указывать растворитель) и концентрации оптически активного вещества.

Для сравнительной оценки способности различных веществ вращать плоскость поляризации света вычисляется удельное вращение  $[\alpha]$  — это константа оптически активного вещества. Значение  $[\alpha]$  для растворов и жидких веществ вычисляется по известным из курса физики формулам, однако следует знать, что удельное вращение определяется либо в пересчете на сухое вещество, либо из высушенной навески, о чем должно быть соответствующее указание.

Измерение угла вращения проводят либо в целях оценки чистоты вещества в растворе или жидкого вещества, находя удельное вращение, либо для определения его концентрации в растворе. Поскольку величина  $[\alpha]$  постоянна в определенном интервале концентраций  $c$ , то возможность использования формулы

$$c = \frac{\alpha \cdot 1000}{[\alpha]l}, \quad (18.8.1)$$

где  $l$  — толщина слоя, ограничивается этим интервалом.

Точность определения угла вращения на поляриметрах с визуальной регистрацией составляет  $\pm 0,02$  град. Автоматические поляриметры с фотоэлектрической регистрацией сравнения интенсивностей поляризованного света и с использованием лазеров дают точность измерения порядка  $10^{-7}$  град.

Химикам-органикам давно известно, что оптическая активность вещества в молекулярном состоянии является его характеристикой. В современной химической литературе рассматриваются результаты исследований, позволяющих установить связь между оптической активностью и молекулярным строением и применить ее при решении структурных задач.

## § 18.9. ТЕРМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Термоаналитические методы служат для исследования химических реакций и физических превращений, происходящих под влиянием температуры в химических соединениях или в случае многокомпонентных систем, между отдельными соединениями. Термические процессы, будь это химические реакции, изменение состояния или фазовые переходы, сопровождаются всегда более или менее значительным изменением внутренней теплоемкости системы. Превращение влечет за собой поглощение теплоты (эндотермическое превра-

шение) или выделение теплоты (экзотермическое превращение). Эти тепловые эффекты могут быть с большой чувствительностью обнаружены методом *дифференциально-термического анализа* (ДТА). Превращение во многих случаях связано также с изменением массы, которая, в свою очередь, может быть определена с большой точностью при помощи термогравиметрического метода. Эти два способа являются классическими и используются в химии, в частности при производстве лекарственных средств, уже более 50 лет.

Следует отметить, что практическое применение методов термического анализа почти не ограничено, и немногие методы инструментального анализа можно так многосторонне применять в научно-исследовательской работе и для промышленных анализов, как термический анализ. За некоторыми редкими исключениями каждое соединение под влиянием температуры подвергается физическим и химическим превращениям, а значит, может быть исследовано с помощью этого метода.

Термические методы позволяют ответить и на вопрос о значениях сил, связывающих ионы или молекулы в веществе, так как температура превращения какого-либо соединения является одновременно и мерой измерения сил, действующих между атомами и молекулами вещества, ведь превращение может произойти только в том случае, если данному материалу сообщить соответствующую тепловую энергию.

Современные приборы для измерения энтальпии исследуемого вещества основаны на принципе измерения температур с помощью термопар, включенных по так называемой «дифференциальной схеме» (рис. 18.9.1). Обычно в установках ДТА используются три термопары. Одной из термопар 1 измеряется температура печи, а

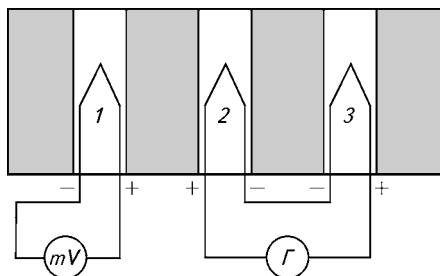


Рис. 18.9.1. Включение термопар по «дифференциальной схеме»:

1 — термопара для измерения температуры печи; 2 и 3 — термопары для измерения разности температур между печью и испытуемым веществом;  $mV$  — милливольтметр, градуированный по температуре;  $G$  — гальванометр

остальными двумя термопарами 2 и 3, включенными навстречу друг другу, измеряется разность температур между печью и испытуемым веществом при помощи градуированного по температуре милливольтметра и чувствительного гальванометра.

Рабочие точки термопар 1, 2, измеряющие температуру печи, окружают инертным веществом, тождественным с точки зрения теплопередачи испытуемому веществу. С мо-

мента начала реакции в исследуемом веществе разность потенциалов термопары 3, находящейся в нем, либо остается неизменной, либо начинает быстро расти, а так как эта разность уже не будет компенсироваться равномерно увеличивающимся напряжением термопары 2, то гальванометр даст показания, соответствующие направлению и значению разности температур.

Кривая ДТА имеет вид, изображенный на рис. 18.9.2. Горизонтальная пунктирная линия соответствует отсутствию в испытуемом веществе каких-либо термических превращений. Кривые ДТА условно строят так, что эндотермический максимум откладывается вниз, а экзотермический — вверх от основной линии.

На кривую ДТА для градуировки по температуре обычно накладывается график ( $T$ ) зависимости температуры печи (термопары I) от времени. Площади, ограниченные пиками кривой ДТА и основной линией, используются для определения количественных соотношений, однако точность таких оценок невелика, примерно 5—10 %. Значительно большую точность дает другая ветвь термоаналитических методов — термогравиметрия.

Термогравиметрия (ТГ) развивалась на основе метода периодического нагревания до все более высоких температур и взвешивания. Сведя полученные результаты в координатную систему «масса—температура», по существу получим термогравиметрическую кривую (кривая ТГ). На практике для повышения точности метода используют термовесы. Испытуемое вещество помещают в тигле, опирающемся на коромысло весов, и равномерно повышают температуру тигля с помощью электрической печи, температуру которой, в свою очередь, измеряют, используя находящиеся в ней термопары. Изменения веса регистрируются автоматически, и кривая ТГ строится в зависимости от времени или от температуры печи (так как повышение температуры печи происходит равномерно). На основании кривой ТГ можно судить о том, каким образом изменяется при нагревании вес испытуемого вещества, то есть производить точные стехиометрические или процентные расчеты (рис. 18.9.3). Следует отметить, что если две реакции следуют друг за другом или перекрываются, то метод ТГ оказывается неэффективным, поскольку

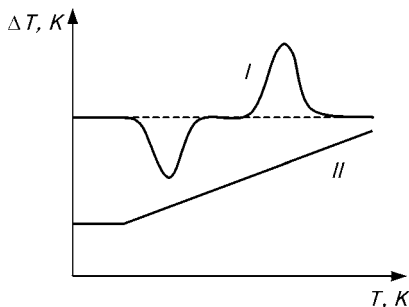


Рис. 18.9.2. Кривая ДТА (I) и наложенный график зависимости температуры печи от времени (II)

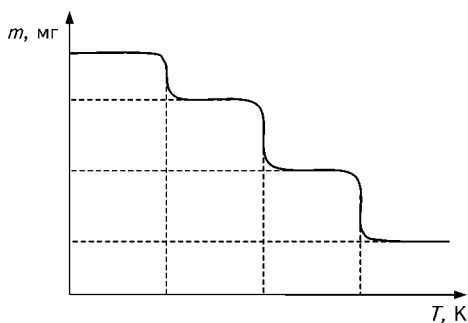


Рис. 18.9.3. Термогравиметрическая кривая

ку оценка кривой ТГ становится затруднительной и неточной (на кривой ТГ не будет ярко выраженных ступенек).

Метод **дифференциальной термогравиметрии** позволяет устранить указанные трудности оценки кривой ТГ. Для реализации его на концах коромысла весов укрепляется по одному тиглю для испытуемого вещества. В этих тиглях помеща-

ют одинаковое по весу количество вещества и нагревают их с помощью точно регулируемых печей так, чтобы температура одного тигля отставала от другой на строго фиксированный параметр (например  $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ ). В результате этого тождественные реакции в тиглях смещаются относительно друг друга во времени. Таким образом, метод дифференциальной термогравиметрии подобен методу ДТА. Точность описанного метода во многом зависит от одинаковой степени уплотнения исследуемого вещества в обоих тиглях, от строгого соблюдения постоянной разницы температур между тиглями и ряда других факторов.

Метод **деривативной термогравиметрии** (ДТГ) лишен перечисленных недостатков. **Дериватограф** — прибор для термического анализа, позволяющий при изменении температуры с заданной скоростью одновременно регистрировать температуру вещества и его массу, а также скорость изменения обеих этих величин. Графическое дифференцирование является трудоемким и неточным, поэтому в современных дериватографах в основе определения дифференциальной кривой ТГ лежит явление электромагнитной индукции, использование которого позволяет значительно увеличивать чувствительность, то есть регистрировать самые незначительные изменения массы, не фиксируемые с помощью простых термовесов (рис. 18.9.4). На одном плече коромысла термовесов 2 находится помещенный в печь тигель с исследуемым веществом 1, а на другом — подвешена катушка 4 с большим числом витков. Катушка размещена в однородном поле двух подковообразных магнитов 5 и подключена к клеммам гальванометра 3. При отклонении от положения равновесия катушка приходит в движение относительно силовых линий магнита и в ней индуцируется ток, причем ЭДС индукции пропорциональна скорости движения. Практика показывает, что анализ кривой ТГ значительно облегчается при одновременной записи кривой ДТГ и позволяет полностью оценить процессы, которые происходят в испытуемом образце при термических превращениях, так как процес-

сы, плотно идущие друг за другом и смешивающиеся на кривой ТГ, на деривативной кривой четко различимы.

При помощи дифференциального термического анализа легко установить направление и изменение энтальпии, связанной с химическими реакциями, происходящими в исследуемом материале под влиянием температуры. С другой стороны, посредством термогравиметрических изме-

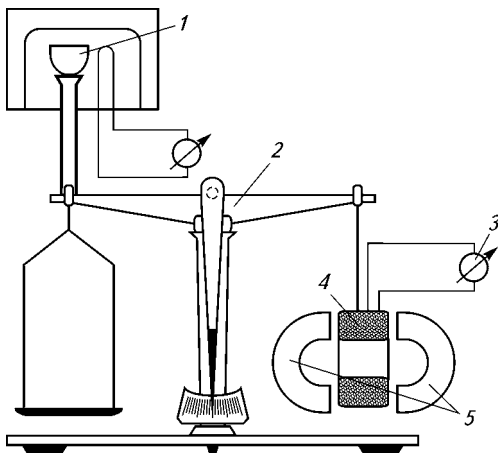


Рис. 18.9.4. Термовесы

нений можно точно определить ход изменения массы пробы при испытании. Одновременное применение обоих методов дает возможность получить дополнительную информацию о химических реакциях и полиморфных превращениях в исследуемом веществе.

Рассмотрим некоторые вопросы дериватографии, которые необходимо учитывать химику-фармацевту, использующему дериватограф при создании новых лекарственных препаратов.

Кривые, записанные в зависимости от времени, должны оцениваться с учетом изменения температуры пробы, то есть эксперимент будет проведен правильно, если наряду с кривыми ДТА, ДТГ, ТГ будет записана и кривая  $T(t)$ , а дериватограммы рассматриваются по температурной шкале, установленной на основании кривой  $T$ . Причем данное превращение характеризуется в случае эндотермической реакции температурой экстремума кривых ДТА и ДТГ, а в случае экзотермических превращений — температурой начала взаимодействия.

Протекание термических реакций в пробе в значительной мере зависит от условий эксперимента и определяется в основном тремя факторами: теплопроводностью исследуемых веществ, их теплоемкостью и равновесием химических реакций. Влияние остальных факторов либо незначительно, либо сводится к указанным трем факторам (например, влияние размеров частиц вещества, скорости нагревания и т. п.).

Если бы химические реакции (например реакция разложения) происходили бы моментально и полностью, когда проба достигает температуры разложения, на кривых ДТА и ДТГ появлялись бы изменения в виде острых игольчатых пиков. А количество поглощенной

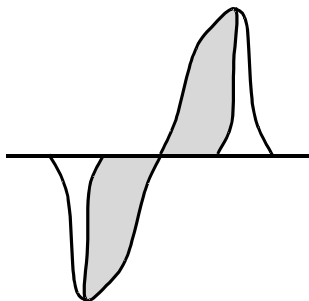


Рис. 18.9.5. Расширение эндо- и экзотермических максимумов

или выделенной теплоты характеризовалось бы высотой пика и не приводило бы к расширению пиков. Наличие определенной теплопроводности и теплоемкости исследуемого вещества приводит к расширению эндо- и экзотермических максимумов (рис. 18.9.5). При термоаналитических исследованиях часто встречаются соединения, разлагающиеся на твердые и газообразные составные части. За редким исключением, сюда относятся все неорганические соединения. Поэтому следует учитывать, в какой степени влияют условия эксперимента на характерис-

тические температуры и на весь ход реакций. Практика показывает, что существенное влияние оказывают следующие факторы: атмосфера печи, газовая атмосфера пробы, форма держателя пробы, степень уплотнения пробы, количество вещества в пробе, скорость повышения температуры печи и др.

Кривая ДТА используется в первую очередь при качественной оценке дериватограммы, и только в исключительных случаях с ее помощью вычисляют изменения энтальпии по площади, лежащей под максимумом кривой. Определение состава исследуемого материала по размерам этой площади нецелесообразно, так как по кривым ТГ и ДТГ содержание составных частей можно определить на несколько порядков точнее. Однако нужно помнить, что кривая ДТА обусловлена тепловыми эффектами не только химических взаимодействий, но и физических превращений. Таким образом, для идентификации какого-либо неизвестного соединения кривая ДТА дает значительно больше информации, чем кривые ТГ и ДТГ. Кроме того, необходимо учитывать, что характеристические температуры с большей точностью определяются по кривым ДТГ, чем по кривым ДТА, основная линия кривой ДТГ всегда хорошо определяется.

При сопоставлении кривых ДТА и ДТГ возможны три ситуации: 1) если кривая ДТГ не изменяется, а изменяется только кривая ДТА, то это значит, что в пробе произошло какое-то физическое превращение, изменение фазового состояния, перекристаллизация или химическая реакция, не сопровождающаяся изменением массы, то есть обменным разложением; 2) в пробе при данной температуре происходит химическая реакция, не сопровождающаяся физическими превращениями; 3) обе кривые показывают изменения по их форме, то есть их ход различен. Это означает, что данный участок кривой ДТА образуется в результате сложения процессов двух или

нескольких химических реакций или возможны физические превращения.

Кривая ТГ обычно применяется для количественной оценки дериватограммы, то есть по кривой ТГ можно с высокой точностью определить изменение массы пробы.

В настоящее время дериватограф с успехом используется для исследования лекарственных препаратов. Например, поставлена задача, определить содержание воды в лекарственных порошках и гранулах. Известно, что если таблетлируемый материал содержит количество воды меньше некоторого оптимального количества, то таблетки разрушаются; а если же таблетлируемый материал содержит больше оптимального количества воды, то таблетки прилипают к матрицам таблеточных машин. Простейшие методы контроля содержания воды не всегда эффективны, так как вода может быть связана в испытуемом материале различными силами связи.

Например, применяемый при таблетировании в виде наполнителя молочный сахар содержит, наряду с механически связанной водой, кристаллизационную воду. При определении этих фракций возникают трудности в установлении содержания механически и адсорбционно связанной воды. Использование сушильного шкафа не приемлемо, так как в зависимости от температуры и времени сушки из пробы не удаляется даже механически связанная вода либо проба теряет часть кристаллизационной воды вследствие распада кристаллов. Метод Карла Фишера в данном случае дает надежные и точные результаты, однако при этом регистрируется только общее содержание воды, а не содержание по фракциям. По кривой же ДТГ на дериватограмме молочного сахара быстро и точно можно установить, в каком диапазоне температур молочный сахар теряет свою механически связанную воду, а в каком диапазоне — кристаллизационную воду. Причем можно точно вычислить температуру, при которой эти процессы идут с максимальной скоростью, и, получив информацию о том, что разложение происходит ступенчато, определить температуры разложения промежуточных продуктов карамелизации, установить типы реакций (экзо- или эндотермическая) и т. п. Таким образом, приведенный пример показывает широкие возможности метода дериватографии для анализа новых химических соединений.

Один из вариантов дифференциально-термического анализа получил название метода *дифференциальной сканирующей калориметрии* (ДСК). Принципиальное отличие ДСК от ДТА заключается в том, что метод ДСК позволяет измерять непосредственно изменение энергии (энтальпию) в процессе плавления. При этом методе образец и эталон нагреваются или охлаждаются с одинаковой скоростью, их температуры одинаковы. Экспериментальные

кривые метода ДСК представляют собой зависимость изменения энергии теплового потока от температуры. В качестве эталона используются особо чистые вещества типа индия (99,9999 %), олова и свинца. Термограмма по методу ДСК дает возможность судить о разложении вещества во время плавления, и, следовательно, метод применим для изучения термостойкости и обнаружения полиморфизма лекарственных веществ, для исследования полиморфных фазовых переходов. Трудно предсказать, будет ли происходить переход полиморфных кристаллических форм во время или после приготовления лекарственной формы, поэтому температура и энергия перехода становятся очень важными параметрами в технологии и для контроля качества лекарств.

## § 18.10. РЕФРАКТОМЕТРИЯ

Рефрактометрия — совокупность методов исследования физико-химических свойств твердых, жидких и газообразных веществ на основании измерения их показателей преломления света.

Рефрактометрия широко применяется в физической химии для определения концентрации растворов, состава и структуры вещества; установления подлинности и чистоты вещества; контроля качества и состава различных продуктов в химической и фармацевтической промышленности; для проверки однородности твердых образцов и жидкостей. Приборы, применяемые для определения показателя преломления, называются рефрактометрами.

**Физические основы метода.** Для изучения основ метода рефрактометрии необходимо знание таких разделов курса общей физики, как геометрическая оптика, дисперсия и интерференция света.

На практике определяют так называемый относительный показатель преломления, то есть число, показывающее, во сколько раз скорость света в воздухе больше скорости света в испытуемом веществе. Показатель преломления зависит от длины волны (или частоты) света, при которой проводят его определение (дисперсия света), и от температуры. В растворах показатель преломления зависит также от концентрации вещества и природы растворителя. На этих свойствах и базируется метод.

Основными методами рефрактометрии являются:

- методы прямого измерения углов преломления света при прохождении им границы раздела двух сред;
- методы, основанные на явлении полного внутреннего отражения света;
- интерференционные методы.



Обычно измерения показателя преломления проводят на рефрактометрах типа Аббе, в основу которых положено явление полного внутреннего отражения при прохождении светом границы раздела двух сред с разными показателями преломления.

Для измерения показателя преломления  $n$  жидкости первым способом ее наливают в тонкостенную призматическую кювету или призматическую выемку в материале с известным показателем преломления  $n_0$  (рис. 18.10.1). При  $\alpha = 90^\circ$  и  $\gamma_1 = \gamma_2 = 45^\circ$  величина  $n$  жидкости связана с измеряемым углом выхода  $\beta$  соотношением

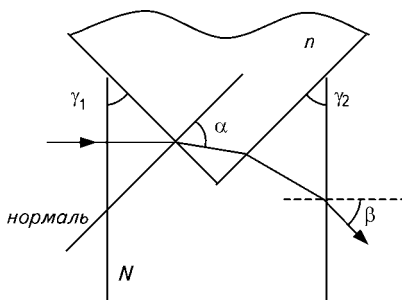


Рис. 18.10.1. Измерение показателя преломления жидкости методом прямого измерения углов преломления света при прохождении им границы раздела двух сред

$$n = \sqrt{n_0^2 + \sin^2 \beta} \sqrt{n_0^2 - \sin^2 \beta}. \quad (18.10.1)$$

Точность метода порядка  $10^{-5}$ , а минимально измеряемые разности  $n$  двух веществ — порядка  $10^{-7}$ .

При использовании для измерения  $n$  явления полного внутреннего отражения образец измеряемого материала приводится в оптический контакт с эталонной призмой из материала с высоким и заранее точно известным показателем преломления  $n_0$  (рис. 18.10.2).

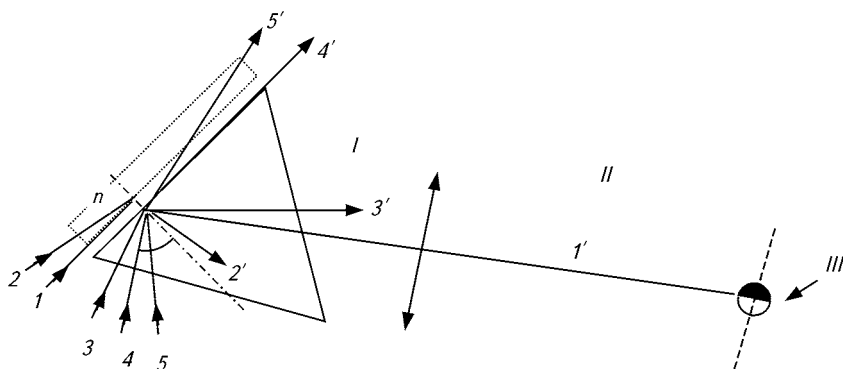


Рис. 18.10.2. Измерение показателя преломления жидкости методом, основанным на явлении полного внутреннего отражения света

Свет может направляться как со стороны образца (ход лучей  $I-I'$ ,  $2-2'$ ), так и со стороны призмы (ход лучей  $3-3'$ ,  $4-4'$ ,  $5-5'$ ). В

обоих случаях в определенном и очень узком интервале углов падения пучка лучей на границу раздела образца и призмы в поле зрения зрительной трубы (окуляра) появится граница, разделяющая темный и светлый участки поля и соответствующая предельному углу падения луча;  $I-I'$  — предельный луч, соответствующий предельным углам преломления и падения в материале призмы;  $4-4'$  — предельный луч, при падении которого под предельным углом на границу раздела призмы и образца происходит полное внутреннее отражение ( $I$  — линза;  $II$  — фокальная плоскость;  $III$  — схематическое изображение поля зрения в окуляре).

Определение показателя преломления  $n$  производится при температуре  $(20 \pm 10,3)^\circ\text{C}$  и длине волны линии  $D$  спектра натрия (589,3 нм). Современные приборы откалиброваны таким образом, что отсчеты, полученные по их шкалам, соответствуют показателям преломления  $n_D$  для линий натрия, поэтому к источнику света предъявляются особые требования. Диапазон измеряемых  $n$  в проходящем свете составляет 1,3—1,7. Точность метода порядка  $10^{-5}$ .

Метод применяется также для определения концентрации вещества в растворе ( $c$ ), которую находят по графику зависимости  $n(c)$ . На графике выбирают интервал концентраций, в котором наблюдается линейная зависимость между  $n$  и  $c$ . В этом интервале концентрацию можно вычислить по формуле

$$c_x = \frac{n - n_0}{F}, \quad (18.10.2)$$

где  $c_x$  — концентрация раствора;  $n$  — показатель преломления раствора;  $n_0$  — показатель преломления растворителя;  $F$  — фактор, равный приросту показателя преломления при увеличении концентрации на 1 % (устанавливается экспериментально).

В интерференционных методах разность  $\Delta n$  сравниваемых сред определяется по числу порядков интерференции лучей, прошедших через эти среды. На рис. 18.10.3 приведена схема, поясняющая принцип действия интерференционного рефрактометра.

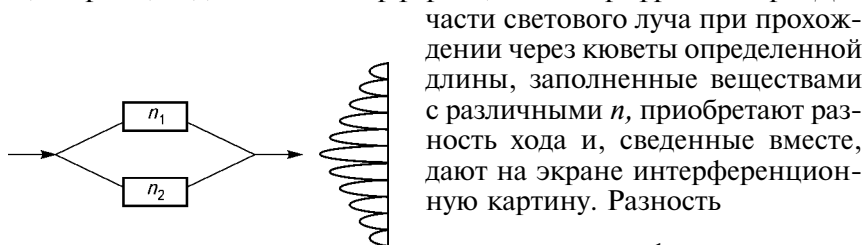


Рис. 18.10.3. Принципиальная схема действия интерференционного рефрактометра

$$\Delta n = n_1 - n_2 = \frac{1}{2} k \lambda, \quad (18.10.3)$$

где  $\lambda$  — длина волны падающего света. Точность этого метода достигает  $10^{-7} \dots 10^{-8}$ . Его применяют, например, при измерениях газов и разбавленных растворов.

Показатель преломления вещества прежде всего зависит от длины волны падающего света, поэтому при определении необходимо указывать, какой длине волны он соответствует. В физико-химическом анализе часто используется зависимость показателя преломления от содержания вещества в растворе, для определения последнего. Однако это можно делать только тогда, когда эта зависимость сильная, например, так определяют содержание сахара  $C_{12}H_{22}O_{11}$  в растворе (рис. 18.10.4). Но этим способом нельзя воспользоваться для определения метилового спирта  $CH_3OH$  в растворе, поскольку изменение показателя преломления невелико. Для тройных систем один показатель преломления не может однозначно характеризовать состав системы. В этом случае необходимо задать другие физико-химические величины: плотность, температуру кипения, поверхностное натяжение и т. п.

Показатель преломления зависит также от внешних факторов — температуры и давления. Чтобы исследовать зависимость от состава вещества, используется величина, зависящая исключительно от природы данного вещества. Такой величиной является молекулярная рефракция  $R$ ,

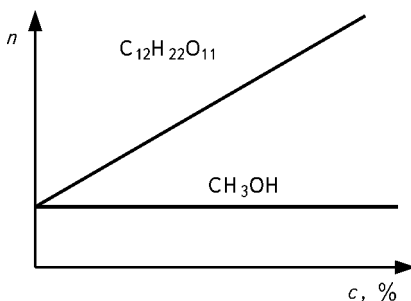


Рис. 18.10.4. Зависимость показателя преломления сахара и метилового спирта от концентрации

$$R = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \cdot \frac{M}{\rho}, \quad (18.10.4)$$

где  $M$  — молекулярный вес вещества;  $\rho$  — его плотность.

## § 18.11. ХРОМАТОГРАФИЯ

Хроматография относится к физико-химическим методам анализа и является наиболее широко используемым методом в аналитической химии. «Хроматографическое зрение» химика используется для исследования всех веществ: газообразных, жидких и твердых и отличается универсальностью, большой чувствительностью и высокой селективностью.

Хроматографический анализ основан на разделении различных растворенных веществ, присутствующих в одном растворе, путем принудительного перемещения компонентов смеси до определенных участков хроматографической системы. Подвижность органических молекул несомненно зависит от их структуры и связана с процессами сорбции и десорбции. В отдельных случаях можно устанавливать связь между структурой и подвижностью молекул, что облегчает идентификацию соединений. Однако сами по себе хроматографические данные не дают никаких оснований для надежных выводов о структуре соединений. Сделать такие выводы позволяют результаты прямого сравнения хроматограмм анализируемого вещества и соответствующего эталона.

Хроматографический анализ служит основой для качественного и количественного анализа смеси веществ, для разделения и идентификации ионов молекул. Перспективным является сочетание хроматографии с другими методами анализа (масс-спектрометрией, спектрометрией и др.).

**Хроматография** — метод разделения, анализа и исследования веществ, основанный на различии в скоростях движения отдельных компонентов смеси, распределенной в потоке подвижной фазы вдоль слоя неподвижной фазы (сорбент с развитой поверхностью).

По агрегатному состоянию подвижной среды хроматография делится на *газовую* и *жидкостную*; по геометрии неподвижной фазы — на *колоночную* (в том числе капиллярную) и *плоскостную* (в том числе хроматографию на бумаге и тонкослойную хроматографию). По механизму разделения различают: *ионообменную* хроматографию, основанную на различной способности разделяемых ионов в растворе к ионному обмену с ионитом; *эксклюзионную* хроматографию, основанную на различной способности молекул разного размера проникать в поры неонного геля; *осадочную* хроматографию, основанную на различной растворимости осадков, образуемых компонентами смеси со специальными реактивами, нанесенными на высокодисперсное вещество; *аффинную* хроматографию, основанную на специфическом взаимодействии биологически активных веществ с лигандами (ингибиторы, кофакторы, субстраты), ковалентно связанными с нерастворимыми носителями (силикаты, целлюлоза и другими); *адсорбционную* хроматографию, основанную на избирательной адсорбции отдельных компонентов смеси; *распределительную* хроматографию, основанную на различной сорбции компонентов смеси двумя несмешивающимися жидкостями, одна из которых (неподвижная) находится в порах твердого носителя.

Этих лаконичных определений известных видов хроматографии недостаточно для того, чтобы уяснить суть процессов, лежа-

ших в основе хроматографии. Рассмотрим эти вопросы подробнее. Из общеобразовательного курса химии известен способ разделения жидких веществ в ректификационной колонне. Для анализа жидких смесей может быть использован прибор, называемый *хроматографом*, построенный по аналогичной схеме: 1) устройство, дозирующее смесь и проталкивающее ее через слой насадки; 2) колонка с активной насадкой или сорбентом, адсорбирующая или поглощающая некоторые разделяемые вещества; 3) датчик, фиксирующий выход из колонки компонентов смеси и преобразующий его в электрический сигнал. Если исследуемую смесь вводят в поток газа, проходящего под давлением через насадку, то этот метод называется газовой хроматографией, а если носитель — жидкий растворитель, метод называется жидкостной хроматографией. Если при газовом носителе насадку покрывают слоем нелетучей жидкости, которая дополнительно тормозит продвижение по колонке некоторых компонентов смеси, — такой вариант называется газожидкостной хроматографией.

Любой вид хроматографии (газовая, жидкостная, газожидкостная и другие) основан на различии в скоростях продвижения компонентов смеси в условиях межфазного переноса. Взаимодействуют две фазы, подвижная и неподвижная, а молекулы постоянно перемещаются из одной в другую и при этом сортируются. Впервые указанный метод был предложен в 1903 году русским ботаником М. С. Цветом. Термин «хроматография» переводится с греческого как «цветопись», так как в опытах М. С. Цвета проводилось разделение красящих веществ растительных пигментов с помощью колонок, заполненных сорбентом, каждый из компонентов смеси проявлялся в колонке отдельной ярко окрашенной полосой.

График выхода компонентов смеси из хроматографической колонки  $m(t)$  (рис. 18.11.1) показывает, что чистые вещества выходят с большими интервалами, узкими зонами. Следует отметить, что кривая, которую изображает самописец хроматографа, выглядит иным образом, так как детектор измеряет не абсолютную массу каждого компонента, а лишь его концентрацию в потоке носителя, то есть первую

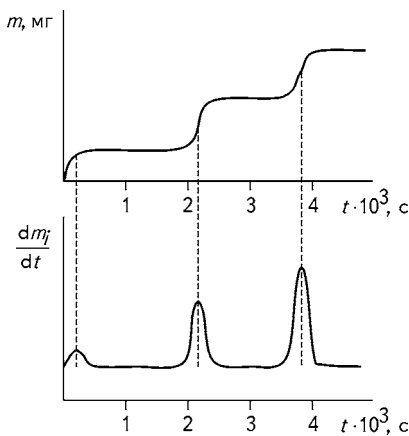


Рис. 18.11.1. График выхода компонентов смеси из хроматографической колонки  $m(t)$  и кривая, изображенная самописцем хроматографа (первая производная массы  $m$  по времени  $t$ )

производную от массы по времени  $\frac{dm_i}{dt}$ . Поэтому на хроматограмме каждому подъему интегральной кривой, показанной на рис. 18.11.1, соответствует пик, имеющий в идеальном случае колоколообразную форму гауссовой кривой, то есть форма пика описывается нормальным распределением. Причина «размывания» полос кроется в том, что все молекулы одинакового строения не выходят из колонки строго в один момент, так как в реальных условиях невозможно достичь одинаковых скоростей движения молекул (например вблизи стенок и на оси колонки). Если колонка набита неаккуратно или проходящее через нее вещество специфически взаимодействует с неподвижной фазой, или колонка полностью не очищена от предыдущей смеси, то могут наблюдаться соответственно различные искажения нормальной формы пиков (рис. 18.11.2).

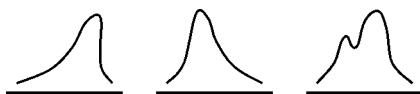


Рис. 18.11.2. Искажения нормальной формы пиков на хроматограмме

Однако даже в том случае, когда хроматограмма имеет единственный пик, выходящий в определенный момент времени, нет уверенности в том, что

через колонку хроматографа проходит лишь одно чистое вещество. Необходимо увеличить чувствительность прибора, если не имеет место неполное разделение смеси. Добиться максимума разделяющей способности можно подбором неподвижных фаз (что иногда приводит к разделению одного пика на два или три) либо удлинением колонки при одновременном уменьшении ее диаметра, что приводит к нежелательному увеличению времени анализа.

Один из самых распространенных приемов, применяемых при расшифровке хроматограмм, следующий: если имеется предположение о соответствии некоего пика определенному веществу, данное вещество вводят в прибор отдельно или добавляют к анализируемой смеси, следя за изменением пикового значения. Рост пика — аргумент в пользу данного вещества.

Необходимо иметь в виду, что при аналитической хроматографии пробу вещества необходимо брать как можно меньше, то есть следует довольствоваться долями миллиграмма. Если же требуется не анализировать, а препаративно разделять, то следует значительно увеличивать дозу вещества. Однако, как показано на рис. 18.11.3, разрешающая способность прибора сразу ухудшается по сравнению с оптимальной дозой смеси.

При записи хроматограмм сложных смесей возникает целый ряд проблем. Предположим, хроматограф работает несколько часов и на самописце получен очередной пик. Может ли эксперимен-

татор быть уверенным в том, что этот пик последний? Необходимо повысить температуру термостата, в который заключена колонка, чтобы ускорить выход оставшихся в колонке компонентов, однако при этом нарушится баланс в схеме самописца, то есть сообразится равный ход нулевой линии прибора. В этом случае следует прекратить запись хроматограммы и продуть колонку газом-носителем под нагревом. Для того чтобы в разумно короткий срок получить хроматограмму сложной смеси, которая состоит из веществ, сильно отличающихся по летучести, необходимо использовать хроматограф, позволяющий равномерно повышать температуру колонки со скоростью в несколько градусов в час.

Высота пика на хроматографе пропорциональна концентрации соответствующего компонента смеси в газе-носителе, а интеграл от гауссовой функции — суммарному количеству этого компонента. Такие интегралы легко определяются с помощью электронного устройства — интегратора или с помощью обычных весов. Так как интеграл любой математической функции — это площадь поверхности под кривой, то, следовательно, если вырезать все пики хроматограммы и взвесить полученные части, то масса каждой из них будет пропорциональна содержанию соответствующего компонента в смеси (предполагается, что плотность и толщина бумаги постоянны). Это трудоемкая работа, и в современных хроматографах как микропроцессор используют электронные интеграторы.

В настоящем параграфе изложены самые общие сведения о методе анализа сложных веществ — хроматографии. В заключение отметим основные характеристики современных хроматографов. Газовые хроматографы, предназначенные для анализа металлов и солей, работают при температурах колонок до 1350 °С. Удельная эффективность капиллярных колонок в расчете на метр длины достигает 50 000 теоретических тарелок (по аналогии с процессом ректификации). В жидкостной хроматографии установлен еще более впечатляющий рекорд — от сотен тысяч до миллионов. Это позволяет разделять смеси веществ почти неотличимых по свойствам, например соединения редкоземельных или трансурановых элементов. Чувствительность детекторов достигает  $10^{-16}$  моль, то есть детектор реагирует на появление в среде растворителя всего нескольких миллионов «инородных молекул». Скорость диализа такова, что жидкостный хроматограф позволяет разделить до 13 компонентов в минуту, а газожидкостный — до 7 с установлением структурных

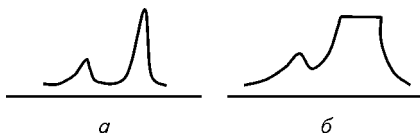


Рис. 18.11.3. Уменьшение разрешающей способности прибора, вызванное увеличением дозы вещества (б), по сравнению с оптимальной (а)

формул большинства компонентов при помощи быстродействующей спектроскопии. Количество разделяемой смеси лежит в пределах от килограммов до тонн (например, хроматографические колонки для очистки воды имеют диаметр около метра и высоту — несколько метров). Стоимость серийного прибора не слишком высока, и затраты на его приобретение окупаются достаточно быстро.

Наиболее эффективное сочетание возможностей техники разделения и идентификации веществ достигнуто в результате объединения в одну систему газового хроматографа и масс-спектрометра. Такая система называется хроматомасс-спектрометром, а соответствующий метод анализа — хроматомасс-спектрометрией. Масс-спектрометр способен работать в режиме обнаружения какого-либо одного иона или, в частности, фрагмента молекулы. Поэтому с помощью компьютера можно определить количество каждого компонента, даже если после прохождения хроматографической системы они полностью не разделились.

Наряду с хроматографией метод электрофореза относится к наиболее важным дифференциальным миграционным методам и применяется для разделения смесей путем принудительного перемещения их компонент в различные участки системы под действием внешнего электрического поля. Разделяемые вещества перемещаются в определенной среде обычно в стабилизированном растворе электролита. Метод электрофореза иногда носит такие названия, как «ионофорез», «катофорез», «электрохроматография» и др.

Таким образом, хроматографические методы, являясь наиболее универсальными при разделении веществ, применяются для разделения смесей любых растворимых или летучих соединений. Метод газовой хроматографии может использоваться и для разделения нелетучих соединений в том случае, если их можно превратить в стабильные летучие соединения. Теоретически любые растворимые вещества можно разделить с помощью соответствующего метода жидкостной хроматографии.

## **§ 18.12. ФИЗИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПРОИЗВОДСТВЕ ЛЕКАРСТВЕННЫХ СРЕДСТВ**

Для успешного развития отечественной фармацевтической промышленности необходимо разрабатывать и внедрять новые способы обработки сырья, так как многие традиционные способы и технологические процессы достигли своего естественного предела и в настоящее время тормозят дальнейшее интенсивное развитие фармацевтического производства. К перспективным методам интен-



сификации технологии производства лекарственных веществ и улучшения качества готовой продукции можно отнести некоторые физические методы. С учетом изложенного проведем анализ влияния и использования электромагнитных полей в технологии производства лекарственных средств.

**Обработка лекарственных средств в электромагнитных полях.** Известно, что материя в природе существует в виде вещества и поля, находящегося в равновесии между собой, и в определенных случаях допустимо интенсифицировать превращение веществ электромагнитными полями. Электромагнитное поле распространяется в виде электромагнитных волн с определенными частотами (длинами волн), и вещество по-разному реагирует на поле в разных диапазонах частот. Чем больше частота излучения (или меньше длина волны), тем более энергетическим, жестким оно является. Так, влияние гамма- и рентгеновских волн на органические и неорганические вещества не подлежит сомнению и является предметом интенсивного изучения. Рассмотрим лишь некоторые аспекты влияния видимого и более длинноволнового излучения на лекарственные вещества.

**Видимое излучение.** Известно, что действие света на некоторые вещества (алкалоиды, производные фенотиазина, отдельные антибиотики и другие) приводит к фотохимическим реакциям, разрушая эти светочувствительные препараты. Поэтому многие лекарственные препараты хранятся в банках оранжевого стекла, почти непроницаемого для волн длиной до 470 нм, которые обладают наибольшей способностью к разложению химических веществ.

Наименее изученной проблемой, по-видимому, является возможность использования лазеров в фармацевтическом производстве. Лазерное излучение представляет собой монохроматическое, когерентное излучение с высокой плотностью энергии в пучке. Известны исследования по использованию гелий-неонового лазера, работающего в области красного света, для стерилизации термолабильных инъекционных растворов и порошков (спазмолитина, апрофена, тифена). Излучение гелий-неонового лазера оказывает бактериостатический эффект в зависимости от мощности излучения на наиболее распространенные микроорганизмы (стафилококк патогенный, кишечную палочку и другие) и микроорганизмы, являющиеся возбудителями раневой инфекции. Поглощение жидкостью лазерного излучения приводит к светогидравлическому эффекту. При этом наблюдается не только интенсивная турбулизация жидкости, но и значительная деформация частиц сырья, находящихся в жидкости, вплоть до разрыва клеток, вызванного избыточным давлением в ударной волне (до  $10^{22}$  Па).

**Инфракрасное излучение.** ИК-излучение (или «тепловое» излучение) занимает спектральную область между красной границей видимого диапазона излучения и СВЧ-радиоизлучения ( $\lambda \sim 1...2$  мм). В фармацевтической промышленности ИК-излучение применяется для сушки и нагрева веществ. Влияние температуры сказывается на скорости многих химических реакций. Увеличение температуры на 10 К приводит к возрастанию скорости реакции в два — четыре раза, а следовательно, и к уменьшению устойчивости целого ряда лекарственных веществ (валидол, бромкамфара в таблетках).

Процесс сушки в технологии производства фармацевтических препаратов — сложный диффузный процесс, скорость которого определяется скоростью переноса теплоты и влаги из глубины высушиваемого материала в окружающую среду. То есть процесс сушки является сочетанием связанных друг с другом процессов тепло- и массообмена. По способу подвода теплоты и особенностям технологии различают следующие виды сушки: радиационная, конвективная, кондуктивная, диэлектрическая, ультразвуковая и сублимационная.

Для понимания явлений, происходящих в процессе сушки, необходимы глубокие знания целого ряда разделов физики — термодинамики, молекулярной физики и др. Изучение процесса сушки невозможно без использования таких физических понятий, как энтальпия, теплоемкость, относительная и абсолютная влажность, влагосодержание, парциальное давление и т. д.

Радиационная сушка или сушка инфракрасным излучением осуществляется в области длин волн от 0,8 мкм до 400 мкм, причем, как следует из закона Планка, с повышением температуры максимум излучения смещается в сторону более коротких волн.

Сублимационная сушка основана на свойстве влаги удаляться при давлении менее 600 Па при различных температурах. При таком вакууме влажный материал имеет температуру ниже 0 °С, свободная влага в высушиваемом образце замерзает, и ее испарение осуществляется сублимацией, то есть путем перехода из твердого тела в газообразное, минуя жидкое.

Диэлектрическая сушка основана на нагреве диэлектриков в электрическом поле высокой частоты. Отличительная особенность нагрева диэлектриков — равномерное выделение теплоты во всем объеме в результате превращения электрической энергии в тепловую, что должно представлять особый интерес для технологии производства фармацевтических препаратов. Нагревание влажных диэлектриков в переменном электрическом поле основано на явлении поляризации. В диэлектриках поворот электрических диполей и их колебания под действием внешнего электрического поля связаны с выделением теплоты, то есть энергия, затрачиваемая на

поляризацию диэлектрика, генерируется в виде теплоты. Основное преимущество диэлектрической сушки — высокое качество получаемого продукта и малая длительность процесса сушки.

Процессы сушки, ионного обмена, сорбции, экстрагирования, используемые в фармацевтическом производстве, могут быть интенсифицированы при использовании низкочастотной обработки сырья. Это обусловлено тем, что диффузные массообменные процессы ускоряются в результате образования знакопеременного давления и кавитации. Кроме того, мощные колебания звукового и ультразвукового диапазонов усиливают эффект и интенсифицируют внутридиффузные процессы.

Применение низкочастотных колебаний в системе «твердое тело—жидкость» очень эффективно при растворении лекарственных веществ, которое полностью зависит от гидродинамики среды, а следовательно, от таких физических характеристик среды и сырья, как число Рейнольдса, плотность и динамическая вязкость среды, диаметр частиц, характер движения жидкости (ламинарный или турбулентный), частота и амплитуды колебаний.

При изготовлении большинства лекарственных форм и в процессе переработки лекарственного сырья часто используются энергоемкие и малоэффективные тепло-массообменные процессы, требующие больших затрат. Традиционные методы передачи теплоты с помощью пара, горячей воды, ИК-нагрева не обеспечивают равномерного и быстрого прогрева всей массы сырья. Используя интенсивные электромагнитные поля, можно достигать быстрого безынерционного нагрева всего объема сырья и высокого КПД аппаратуры.

Применение высокочастотных (ВЧ) и сверхвысокочастотных (СВЧ) колебаний в технологических процессах производства лекарственных средств позволяет интенсифицировать эти процессы, улучшать качество готовой продукции, увеличивать ее выход.

**Высокочастотное (ВЧ) и сверхвысокочастотное (СВЧ) излучения.** Для промышленных целей ВЧ-обработка материалов используется в метровом диапазоне 20...150 МГц (длины волн от 15 м до 2 м), для СВЧ-оборудования выделены дециметровый диапазон, а также частоты 2375, 915 и 433 МГц (длины волн 12,6, 32,8 и 69,3 см). Возможно также использование электромагнитного излучения в сантиметровом ( $3 \cdot 10^9$ ... $3 \cdot 10^{10}$  Гц) и в миллиметровом ( $3 \cdot 10^{10}$ ... $3 \cdot 10^{11}$  Гц) диапазонах.

При обработке материала ВЧ- и СВЧ-излучением происходит одновременный нагрев всей массы сырья, что обусловлено способностью ВЧ- и СВЧ-полей проникать на значительную глубину. Кроме того, при таком способе обработки полностью отсутствует

тепловая инерция. Преимуществом ВЧ-обработки является также то, что в единице объема достигается высокая концентрация энергии, причем практически одинаковая как в центре, так и на поверхности обрабатываемого сырья. Следует отметить, что тепловой КПД ВЧ- и СВЧ-аппаратуры высок и достигает 70 %.

Используя понятия «электрический диполь» и «поляризация диэлектриков», воздействие ВЧ- и СВЧ-излучений на объект можно объяснить следующим образом: при помещении диэлектрика в переменное электромагнитное поле электрические моменты диполей изменяют свое направление в соответствии с изменением внешнего электрического поля. Преодоление сил трения и внутримолекулярного сцепления, препятствующих перемещению диполей, представляет собой работу, совершаемую переменным электромагнитным полем, то есть в результате прохождения через диэлектрик энергия электромагнитного поля превращается в тепловую энергию. Ясно, что с увеличением частоты колебаний возрастает интенсивность перемещения электрических диполей, что в свою очередь приводит к увеличению теплоты, выделяемой в диэлектрике.

Большинство сырья растительного происхождения, используемое в фармацевтическом производстве, можно отнести к диэлектрикам, а основными характеристиками диэлектриков являются диэлектрическая проницаемость, коэффициент поглощения и угол потерь. Эти величины колеблются в широких пределах. Так, для свежесобранных лекарственных растений диэлектрическая проницаемость находится в диапазоне 40...65, а у порошкообразных лекарственных средств, жиров и масел — в пределах  $4 \div 8$ .

В любом лекарственном сырье влажность неравномерно распределена по всему объему. Поэтому под действием электромагнитного поля мощность, выделяемая в разных элементах объема, будет различна, то есть возникает градиент температуры, который осуществляет молекулярный перенос вещества и создает избыточное внутреннее давление, разрыхляющее структуру обрабатываемого сырья.

При большом содержании в сырье механически связанной влаги (свыше 30 %) происходит быстрое вскипание во всем объеме. Выделяющийся в большом объеме пар вскрывает клетки и капилляры, что приводит к значительному измельчению обрабатываемого сырья (эффект диэлектрического разрушения). При этом мощность СВЧ-источника должна быть достаточной, чтобы обеспечить скорость нагрева сырья в диапазоне 1,3—1,6 К/с.

Используя различия в коэффициентах поглощения жидкостей, можно с помощью СВЧ-нагрева получить некоторые масла растительного происхождения (шиповник, облепиха и пр.). При быст-

ром СВЧ-нагреве водяной пар, расширяясь, выталкивает из клеток и капилляров капельки масла, которые затем собираются известными способами.

При СВЧ-нагреве отмечается значительно меньше потерь витаминов, чем при термической обработке. Так, например, при обработке СВЧ-излучением извлечений лекарственных растений с малой концентрацией спирта потери витаминов В<sub>1</sub> и В<sub>2</sub> составляют 5—10 % против 25—28 %. Это объясняется тем, что вещества в отварах, полученные СВЧ-нагревом, подвергаются деструкции в меньшей степени.

СВЧ-излучение используется не только для нагрева, но и для сушки лекарственного сырья. Преимущество этого метода, по сравнению с конвективным подводом теплоты, заключается в следующем: процесс перемещения влаги от центра объекта к поверхности не осложняется противотоком — термодиффузией от поверхности к центру. Наоборот, возникает избыточное давление пара от центра к поверхности объекта. Для термолабильного лекарственного сырья применяется ВЧ-сушка с частотой до 40 мГц с использованием вакуумной системы. Очевидно, можно предположить использование ВЧ и СВЧ для стерилизации жидких лекарственных форм и термолабильного лекарственного сырья. Основными преимуществами, по сравнению с традиционными тепловыми способами стерилизации, являются: снижение эффективной температуры обработки, то есть температуры, при которой проявляется стерилизующий эффект; сокращение времени обработки, а следовательно, сохранение физико-химических свойств сырья; отсутствие непосредственного контакта с рабочими поверхностями оборудования.

При быстром повышении температуры до 100 °С и с помощью ВЧ-излучения достигается полная стерильность при заражении растворов и сред плесеньями, дрожжевыми и спорообразующими формами микроорганизмов.

Для уничтожения спорообразующих форм необходим нагрев в ВЧ-поле стерилизуемого материала до 150—155 °С. Быстро действуют токи ВЧ на вегетативные формы микроорганизмов (угнетается их рост). Вирусы под действием токов ВЧ теряют вирулентность.

С помощью СВЧ-энергии возможна стерилизация в расфасованном виде уже готовой фармацевтической продукции: мазей, паст в тубах; лекарств в конвютах (оцелофаненных и бумажных), упакованных в коробки (сборы, присыпки, порошки); желатиновых капсул, не содержащих гидрофильной жидкости, таблеток, драже, пилюль и др. Невозможна стерилизация ампул и укупоренных под колпачок жидких лекарственных форм, так как из-за избыточного давления паров наступает разгерметизация.

СВЧ-излучение может быть использовано для активации ферментных препаратов. Так, например, при обработке СВЧ-полем (2450 МГц) 0,01 %-ного водного раствора ферментного препарата амилаسوبтилина в течение 10 с в интервале температур 20—65 °С активность препарата увеличилась на 70 % по сравнению с контрольным препаратом.

**Звуковые и ультразвуковые (УЗ) излучения.** Усовершенствование технологии производства фармацевтических препаратов и методов анализа лекарственных средств связано с использованием акустических колебаний и, в частности, ультразвуковых колебаний в диапазоне частот  $10^5 \dots 10^8$  Гц.

В звуковом и низком ультразвуковом диапазонах ( $10^0 \dots 5 \cdot 10^1$  кГц) проявляются такие физические явления, как акустическая кавитация, интенсивное перемешивание, интенсификация массообменных процессов, эффекты диспергирования в системе «твердое тело — жидкость» (получение суспензий, эмульсий), расслоение взвешенных в жидкой среде твердых частиц по массе и размерам, коагуляция.

В диапазоне частот  $5 \cdot 10^1 \dots 10^3$  кГц отмечаются такие физические явления, как разделение молекул и ионов с различной массой; появление переменного электрического поля, капиллярно-акустического и теплового эффектов; активация диффузии; увеличение проницаемости клеточных мембран.

В высоком ультразвуковом диапазоне (более  $10^3$  кГц) возникают изменения в структуре веществ, воздействия на клеточном и субклеточном уровнях, магнитно- и электроакустические эффекты. Этот диапазон частот используется в физико-акустических методах анализа для определения характера интенсивности межмолекулярных взаимодействий, конформационных превращений.

Перечисленные три поддиапазона частот, хотя и имеют плавные переходы из одного диапазона в другой, в то же время существенно отличаются по характеру воздействия на среду, что необходимо учитывать при использовании ультразвука в фармацевтическом производстве.

Ультразвуковая кавитация является основным инициатором физико-химических процессов в жидкости. Ультразвуковая волна, проходя через жидкость, создает волны сжатия и растяжения, что приводит к нарушению однородности жидкости, и в наиболее слабых местах (на границе раздела фаз) начинается выделение растворенных в жидкости газов, то есть появление долгоживущих пузырьков. Под действием ультразвуковой кавитации могут наблюдаться люминесценция, эрозия, появление активных радикалов диссоциированных молекул веществ, проникающих в кавита-

ционную полость. Возникновение кавитации может привести к началу химической реакции в воде и других полярных растворителях.

Наличие ультразвуковых колебаний на лекарственных складах может существенно сократить сроки годности лекарственных препаратов, так как это приводит к деструкции лекарственных веществ. В первую очередь будут разрушаться вещества с большой молекулярной массой. Так, например, воздействие на адреналин ультразвука частотой 800 кГц в течение двух минут приводит к существенному уменьшению сосудосуживающего действия. Большинство алкалоидов и азотистых оснований (атропин, кофеин, хинин, морфин, кодеин, эфедрин) после 20 мин озвучивания ультразвуком интенсивностью до 10 Вт/см<sup>2</sup> (частота 600 кГц) теряют частично или полностью свои свойства. Вместе с тем известно, что многие антибиотики (стрептомицин, тетрациклин) под влиянием ультразвука увеличивают свою антибактериальную активность.

При облучении ультразвуком могут быть значительно интенсифицированы процессы массообмена в системах с твердой фазой. В частности, с помощью ультразвука может быть многократно ускорен процесс растворения лекарственных веществ и экстрагирования лекарственного растительного сырья.

Фармакологическая активность лекарств в значительной мере зависит от степени дисперсности лекарственных веществ. Диспергирование является одной из основных технологических стадий в процессе изготовления эмульсий, суспензий, линиментов и т. д. В современном производстве лекарственных средств для диспергирования используются ультразвуковые волны, создающие значительные давления вследствие аннигиляции кавитирующих пузырьков. Использование ультразвука существенно упрощает такую трудоемкую операцию в фармацевтическом производстве, как изготовление эмульсий. Механизм эмульгирования в поле ультразвуковых волн очень сложен и пока не имеет теоретического обоснования. Используя ультразвук, можно получать кинетически неустойчивые грубодисперсные системы — суспензии.

В технологии изготовления лекарств для осветления и очистки жидкостей используются отстаивание и фильтрация. Этот процесс может быть ускорен при использовании ультразвука, который интенсифицирует коагуляцию частиц.

Ультразвук, в зависимости от режима ультразвуковой обработки, степени перенасыщения раствора, температурного фактора и другого, может значительно ускорять процесс кристаллизации неорганических соединений. Механизм ускорения заключается в том, что ультразвук дробит кристаллы на более мелкие, которые в свою очередь становятся новыми центрами кристаллизации, вновь дробятся и т. д.

В современной фармакотерапии все большую популярность приобретает новая лекарственная форма пролонгированного действия — липосомы, в которых лекарственные вещества находятся в инкапсулированном виде. Способы изготовления различны, однако предпочтение отдается ультразвуку, особенно при изготовлении однослойных липосом, которые представляют собой сферический замкнутый пузырек диаметром 25—30 нм со стенками из бимолекулярного фосфолипидного слоя. Для получения липосом ультразвуком непосредственно воздействуют на водную суспензию фосфолипидов.

Перспективным является использование диспергирующего действия ультразвука для увеличения сокоотдачи при обработке свежего лекарственного растительного сырья.

Ультразвук используется и для сушки лекарственного сырья. Работа ультразвуковых сушилок основана на том, что ультразвук уменьшает вязкость жидкости, то есть увеличивает текучесть; кроме того, на скорость испарения влаги оказывают влияние диспергирующее действие кавитации и турбулизация среды.

Механизм получения аэрозолей ультразвуком объясняется кавитационной и волновой теориями. Химико-фармацевтические заводы оснащены распылительными ультразвуковыми установками, в которых используются аэрогидродинамические, пьезокерамические или магнитострикционные распылители.

При производстве ампулированных лекарственных средств содержание  $\text{CO}_2$ , растворенного в жидкости, может падать ниже нормы (в процессе запайки), что способно значительно уменьшить срок хранения раствора. Это явление исключают путем аэрации жидкости, предназначенной для ампулирования, с помощью ультразвукового поля. Исследования показывают, что в зависимости от природы газа предел растворимости его в жидкости возможно увеличить в 100—1000 раз при аэрации жидкости нейтральными газами в кавитирующем режиме с помощью ультразвука.

В аптечном производстве используется также малогабаритный универсальный ультразвуковой аппарат на базе ультразвукового генератора УЗГ-3-04: рабочая частота — 39,6...45 кГц, амплитуда колебаний — 10...40 мкм, площадь излучающей поверхности — 3...10 мм<sup>2</sup>. Изменяя геометрию наконечника и площадь излучающей поверхности, можно добиться необходимого эффекта воздействия ультразвука.

Как показывает опыт, озвученные растворы, эмульсии, суспензии и т. п. в течение определенного времени остаются стерильными, то есть имеет место ультразвуковая стерилизация. Для каждого вида микроорганизмов существует определенная мощность ультразвуковой энергии, после которой начинается стерилизую-



ший эффект. Механизм стерилизующего действия ультразвука сложен и полностью еще не изучен. Ультразвуком разрушаются кишечная, брюшнотифозная и дифтерийная палочки, бациллы дизентерии, столбняка, сальмонеллы и др. Наиболее устойчивы к воздействию ультразвука туберкулезные палочки. Таким образом, действие ультразвука на микроорганизмы избирательно, что усложняет процесс стерилизации.

Ультразвуковая аппаратура применима и для анализа лекарственных веществ. Так, ультразвуковые аналитические приборы, мощность которых не превышает  $1 \text{ Вт/см}^2$ , используются для определения концентрации, плотности и вязкости растворов, газов, качественных и количественных показателей реакций, адиабатической сжимаемости проведения идентификации органических соединений и фармацевтических препаратов.

В последнее время ультразвук используется особенно широко в современной физиотерапии. Успехи ультразвуковой терапии позволяют комбинировать ультразвук с лекарственными средствами, при этом проникновение лекарственных веществ через кожу ускоряется. По эффективности фонофорез сравним с инъекциями, однако при этом кожный покров не нарушается и не инфицируется.

Таким образом, возможности применения ультразвуковых колебаний различных частот и интенсивности в фармации многогранны и весьма перспективны для некоторых операций в производстве лекарственных средств.

**Нетрадиционные методы обработки лекарственного сырья.** Рассмотрим еще некоторые нетрадиционные методы, использующие электрические, механические и термодинамические воздействия на лекарственное сырье.

**Электроплазмолиз** — метод воздействия на объекты переменным электрическим током различной частоты и электрическими импульсами определенной частоты. При воздействии электрического тока на растительное сырье увеличивается проницаемость клеточных мембран, вплоть до полного разрушения белково-липидных мембран, причем процесс разделения протоплазмы на крупные фрагменты происходит практически мгновенно. Сущность электроплазмолиза заключается в раздражающем действии тока низкой частоты на растительную ткань.

**Электродиализ** — диффузия электролитов через полупроницаемую пористую перегородку под действием электрического тока. Этот метод позволяет изменять солевой состав основных частей жидкостей, содержащих биологически активные вещества. Электродиализ отличается от диализа (перенос через полупрозрачную перегородку веществ под действием разности концентраций) тем, что из электродиализатора подвергаются выводу вещества, спо-

способные к образованию заряженных комплексов и диссоциации, то есть электронейтральные вещества в электродиализе не участвуют.

**Метод разрушения эмульсий** во внешнем электрическом поле. Механизм расслоения эмульсий в электрическом поле связан с изменением структуры двойного электрического слоя и приобретением молекулой воды строгой ориентации. В электрическом поле мицелла коллоида (эмульсии — это обратимые коллоидные системы) приобретает электрический заряд и начинает двигаться к соответствующему электроду, что и приводит к разрушению эмульсии.

Кроме механических и гидравлических устройств для интенсификации технологических процессов в фармацевтической промышленности, существуют электроимпульсные, магнитоимпульсные и оптико-импульсные устройства.

При **электроимпульсном способе** интенсификации процесса колебательное движение жидкости происходит при создании в ней высоковольтного разряда. Очень высокую мгновенную мощность, выделяющуюся в быстро расширяющемся искровом канале, создает ряд явлений, обуславливающих электрогидравлический эффект. Среди них: мощное импульсное электромагнитное излучение, высокое импульсное давление (до  $10^9$  Па), вызывающее движение жидкости со скоростью до  $10^3$  м/с; полидисперсное ультразвуковое излучение, создающее пульсации газовых включений и импульсную кавитацию; воздействие плазмы искрового канала, спектр излучения которого содержит инфракрасное, ультрафиолетовое и жесткое излучения. Электроимпульсный разряд может быть использован для диспергирования твердой фазы лекарственного сырья, ускорения процессов кристаллизации и растворения химических веществ, экстрагирования, перемешивания и гомогенизации, изменения вязкоупругих свойств системы. Кроме того, имеет место бактерицидное и химическое действие электроимпульсных разрядов.

**Магнитоимпульсные устройства** реализуют магнито-гидравлический эффект и создают давления в жидкой среде до  $10^9$  Па. Принцип работы этих устройств основан на том, что под действием переменного тока колеблется подвижная электропроводная мембрана, передающая импульсное движение среде. Колебания металлической мембраны возникают в результате действия импульсного электромагнитного поля, которое по закону электромагнитной индукции Фарадея наводит в мембране ток противоположного направления. В определенные моменты времени в среде возникает отрицательное давление, разрывающее ее в наиболее слабых местах (на границе твердой и жидкой фаз), то есть у поверхности твердых частиц, на множество каверн. В результате этого в жидкости возникает кавитация — главный технологический фактор, используемый в аппаратах такого типа. Магнитоимпульсные устрой-

ства применяются при тонком измельчении твердых веществ, интенсификации перемешивания сильновязких сред, пластификации, грануляции, прессования и т. п.

Физическое состояние лекарственного вещества (степень измельчения, аморфность или кристалличность препарата, характер кристаллов, электропроводность, температура плавления, растворимость в воде и липидах и другое) существенно влияет на фармакотерапевтическую активность препаратов, стабильность их в процессе хранения. Например, степень измельчения лекарственного вещества ощутимо сказывается на его абсорбции, которая возрастает по мере уменьшения размера частиц. Использование различных методов микронизирования порошков лекарственного вещества позволяет резко уменьшить дозу при сохранении адекватного терапевтического действия. Однако микронизация может и усилить некоторые отрицательные воздействия препаратов, поэтому необходим учет степени измельчения лекарственных веществ, влияющих на фармакокинетику препарата.

Кроме того, на фармакотерапевтическую активность препарата заметно влияет полиморфизм, то есть существование кристаллических модификаций вещества, обладающих различными физическими свойствами. Следует учитывать, что кристаллические модификации стабильны лишь при определенном комплексе внешних условий (температура, давление, растворители, вспомогательные вещества), изменение которых приводит к превращению полиморфных модификаций в необходимом исправлении. Например, в результате использования в качестве формообразующего материала метилцеллюлозы резко замедляется процесс превращения нестабильных модификаций сульфатиозола. Другой пример: из трех полиморфных форм витамина В<sub>2</sub> метастабильная модификация при 25 °С имеет в 20 раз (!) большую растворимость, чем стабильные модификации, и, следовательно, обладает большей доступностью витамина и обеспечивает его концентрацию в плазме крови.

Различия в технологическом процессе изготовления лекарственных форм существенно влияют на скорость высвобождения лекарственных веществ, а значит, и на интенсивность их всасывания, которая, в свою очередь, обусловлена скоростью и полнотой перехода в растворимое состояние препаратов, инкомпорированных в лекарственные формы. Процесс всасывания определяется физико-химическими свойствами ингредиентов и в еще большей степени — способами изготовления лекарственных форм.

Даже такой тривиальный технологический прием, как прессование, существенно может изменить кинетику высвобождения препарата из лекарственных форм. Между тем как обычно при изготовлении последних используется значительное число техно-

логических операций, которые могут сопровождаться поглощением или выделением теплоты, измерением агрегатного состояния, степени дисперсности, поверхностной активности и т. д.

Осуществление любого из технологических приемов с помощью разных методов и аппаратуры может привести к различию в свойствах лекарственных форм. Например, в зависимости от способа сушки, времени и характера контакта высушиваемого материала с сушильным агентом, температуры процесса и так далее, могут изменяться самым существенным образом поверхностные свойства высушиваемого материала, что в конечном счете скажется на растворимости препарата, его абсорбционных свойствах, стабильности и пр.

Известно, что существует разделение методов микро-капсулирования на физические, физико-химические и химические; свойства микрокапсул в значительной степени зависят от метода их получения. Наряду с известными методами псевдоожижения, дражжирования, диспергирования в системе «жидкость — жидкость», коацервации существует и менее известный — электростатический метод. Его характерной особенностью является то, что в момент образования оболочек микрокапсул, как покровный материал, так и вещество ядра находятся в состоянии аэрозоля, причем оба аэрозоля имеют противоположные по знаку заряды, что обеспечивает их эффективное притяжение.

Знание физических процессов, сопутствующих фазовым переходам, необходимо при создании аппаратов для получения дистилляционной воды для инъекций. Обеспечение апиrogenности получаемой воды требует определенных условий, препятствующих попаданию пирогенов в дистиллят. Это достигается путем создания такой конструкции дистилляционного аппарата, которая исключала бы возможность переброски капельно-жидкой фазы через конденсатор в сборник. При этом используется тот факт, что пирогенные вещества с паровой фазой не переносятся.

Существует обязательный анализ определенных физических параметров (гранулометрический состав, влажность, сыпучесть) таблеточного гранулята, независимо от способа его получения. В частности, относительная влажность гранулята определяется как отношение потери веса после сушки (при  $T = 102...105\text{ }^{\circ}\text{C}$ ) к начальному весу образца и выражается в процентах.

**Физико-химическая механика** — наука, изучающая проблемы образования, деформации и разрушения структурированных систем. Эта область механики позволяет представить технологический процесс прессования таблеток как сложный физико-химический процесс, состоящий из ряда последовательных стадий, из которых

первые две — стадия упругой деформации и стадия пластической деформации

Рассмотрение вопросов, связанных с прессованием лекарственных веществ, невозможно без учета когезии, то есть явления возникновения контакта между частицами под действием сил молекулярного притяжения, независимо от их характера и величины.

Скорость прессования оказывает влияние на прочность полученных таблеток: увеличение ее выше определенного предела приводит к разрушению таблетки после снятия давления. Из теоретической строительной механики известно, что особенностью дисперсных систем является распространение в них энергии с конечной скоростью, а деформация этих систем, в зависимости от скорости распространения в них энергии, происходит с преобладанием либо рассеивания энергии, либо накопления энергии деформации. Иными словами, если имеет место деформация с накоплением энергии, то система (таблетка) в термодинамическом смысле становится все более неустойчивой (таблетка будет очень непрочной). Следует отметить, что ряд лекарственных веществ (натрия хлорид, гексаметилтетраамин и другие) прессуется с преобладанием рассеивания энергии и легко образует прочные таблетки; а вещества, не образующие удовлетворительного качества таблеток, прессуются, вероятно, с накоплением энергии.

Основные положения механики позволяют ответить на вопросы, связанные с контролем прочности таблеток, а именно с определением механической прочности на сжатие, удар, разрыв и пр.

Известны некоторые эффективные низкотемпературные методы обработки фармацевтических препаратов. К ним относятся, например, метод криоизмельчения и экстракция веществ сжиженными газами. Обработка лекарственного и растительного сырья сжиженными газами с целью извлечения отдельных компонентов в нативном виде используется в фармации для получения высококачественных ароматизаторов, отдушек, биологически активных веществ, оригинальных лекарственных препаратов.

Сжижение газов происходит при охлаждении их ниже критической температуры и дальнейшей конденсации в результате отвода теплоты парообразования. Промышленное сжижение газов с критической температурой выше температуры окружающей среды осуществляется с помощью компрессора и охлаждаемых теплообменников. Экстракционный процесс сжижения газами проводится под большим статическим давлением, так как при снятии давления уже при нормальной температуре экстрагент быстро улетучивается из извлеченного и отработанного сырья.

Каждый из сжиженных газов обладает индивидуальными физико-термодинамическими свойствами. Известны сжиженные газы,

обладающие как гидрофильными, так и олеофильными свойствами, использование которых дает возможность вести экстракцию химических соединений, обладающих различной полярностью.

Такое свойство сжиженных газов позволяет проводить селективную экстракцию, то есть извлекать по мере необходимости индивидуальные химические вещества или целые комплексы химических соединений. Обычно используются такие сжиженные газы, как двуокись углерода, пропан, бутан, фреон, гексан, диэтиловый эфир, ацетон и др.

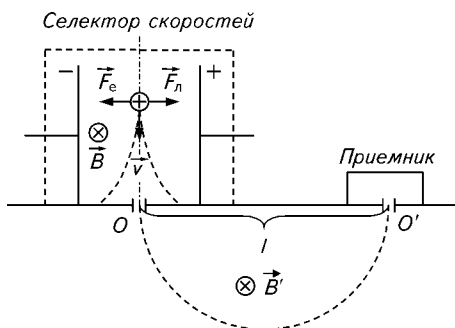
Количественный выход веществ при извлечении сжиженными газами достигает 90—98 %, что выше, чем при других известных способах экстрагирования: мацерации, перколяции, отгонки паром и др. Сжиженные газы хорошо извлекают жирные и эфирные масла, свободные органические кислоты, жирорастворимые витамины, каротиноиды, флавоноиды, фенолспирты, фитогормоны. Значительно хуже извлекаются гликозиды, растительные смолы, воски, водо-растворимые балласты и некоторые другие соединения.

Рассмотрен далеко не полный перечень физических методов, используемых в фармации. Но уже из этого ясно, что разработка и внедрение новых физических методов обработки лекарственного сырья невозможны без глубоких знаний в различных областях естествознания и особенно в области физики и биофизики. При этом следует помнить, что любое воздействие (например излучение) может привести и к побочным, нежелательным эффектам. Чтобы воздействие было адекватным и специфическим, необходимо очень тщательно изучать влияние данного вида излучения на составляющие компоненты вещества и на конечные свойства готовых лекарственных препаратов.

## ПРАКТИЧЕСКИЕ И ТЕСТОВЫЕ ЗАДАНИЯ

### ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

**Задача 18.1.** В масс-спектрометре Бейнбриджа (см. рис.) расстояние между выходной щелью селектора скоростей и входной щелью регистрирующего прибора —  $l = 400$  мм. Индукция магнитного поля  $B = B' = 50$  мТл. При плавном изменении напряженности электрического поля селектора наблюдаются пики ионного тока в приемнике при значениях



$E_1 = 120$  В/см и  $E_2 = 160$  В/см. Определите атомные массы  $A_1$  и  $A_2$  соответствующих ионов, полагая их однозарядными. Идентифицируйте эти ионы.

**Решение.** В селекторе поток положительных ионов движется в электрическом и магнитном полях, значения которых подбирают таким образом, чтобы они действовали на заряженную частицу с силами, равными по модулю и противоположными по направлению. Сила, с которой электрическое поле действует на положительный заряд, направлена от положительно к отрицательно заряженной пластине конденсатора и по модулю равна

$$F_e = qE. \quad (18.1)$$

Сила, с которой на частицу действует магнитное поле (сила Лоренца), определяется по правилу левой руки и равна

$$F_{\text{л}} = qvB \quad (18.2)$$

(при условии, что  $\vec{F}_{\text{л}} \perp \vec{v}$ ).

Приравняв формулы (18.1) и (18.2), получаем значение скорости, с которой движутся ионы:

$$v = \frac{E}{B}. \quad (18.3)$$

Ионы, скорости которых удовлетворяют условию формулы (18.3), вылетают из отверстия  $O$ , остальные отклоняются полями и задерживаются (на рис. штриховые линии). Вылетевшие из селектора скорости ионы попадают в однородное магнитное поле индукцией  $B'$  и движутся по круговой траектории. Если радиус траектории ионов удовлетворяет условию

$$R = \frac{l}{2} \quad (18.4)$$

(где  $l$  — расстояние между отверстиями селектора и приемника), то они попадают в приемник. Сила Лоренца перпендикулярна скорости и поэтому вызывает центростремительное ускорение  $\frac{v^2}{R}$ . Согласно второму закону Ньютона, можно записать:

$$qvB' = m \frac{v^2}{R}.$$

Отсюда

$$m = \frac{qB'R}{v}. \quad (18.5)$$

Подставим уравнения (18.3) и (18.4) в формулу (18.5):

$$m = \frac{qB'l}{2E}. \quad (18.6)$$

Переведем исходные данные в единицы СИ:

$$l = 400 \text{ мм} = 0,4 \text{ м};$$

$$B' = B = 50 \text{ мТл} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ Тл};$$

$$E_1 = 120 \text{ В/см} = 1,2 \cdot 10^4 \text{ В/м};$$

$$E_2 = 160 \text{ В/см} = 1,6 \cdot 10^4 \text{ В/м}.$$

Подставив численные данные в формулу (18.6), имеем:

$$m_1 = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 0,4}{2 \cdot 1,2 \cdot 10^4} = 6,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 4 \text{ а.е.м.};$$

$$m_2 = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot (5 \cdot 10^{-2})^2 \cdot 0,4}{2 \cdot 1,6 \cdot 10^4} = 5 \cdot 10^{-27} \text{ кг} = 3 \text{ а.е.м}.$$

Из полученных значений следует, что исследуемые ионы являются изотопами гелия  ${}^4\text{He}$  и  ${}^3\text{He}$ .

**Задача 18.2.** При прохождении света через слой 10 %-ного раствора сахара длиной  $l_1 = 10 \text{ см}$  плоскость поляризации света повернулась на угол  $\alpha_1 = 16^\circ 30'$ . В другом растворе сахара ( $l_2 = 25 \text{ см}$ ) плоскость поляризации повернулась на угол  $\alpha_2 = 33^\circ$ . Определите концентрацию  $c$  сахара во втором растворе.

**Решение.** Из условия пропорциональности угла поворота длине пути света в растворе и концентрации оптически активного вещества (сахара)  $\alpha = \alpha_0 c l$  можно получить выражение для концентрации сахара:

$$c = \frac{\alpha}{\alpha_1 l}.$$

Тогда

$$c_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 l_1}, \text{ а } c_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_0 l_2},$$

где  $\alpha_0$  — удельное вращение плоскости поляризации.

Разделим  $c_1$  на  $c_2$ :

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_0 l_1} \bigg/ \frac{\alpha_2}{\alpha_0 l_2} = \frac{\alpha_1 l_2}{\alpha_2 l_1},$$

откуда

$$c_2 = c_1 \frac{\alpha_2 l_1}{\alpha_1 l_2} = \frac{33^\circ \cdot 10 \text{ см}}{16,5^\circ \cdot 25 \text{ см}} c_1 = 0,8 c_1.$$

Зная концентрацию сахара в первом опыте, определяем, что во втором концентрация равна 8 %.



## ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**18.1.** Определите натуральный молярный показатель поглощения  $\varepsilon$  вещества, если при его концентрации в растворе  $c = 0,03$  моль/л оптическая плотность раствора составляет  $D = 1$ . Длина кюветы  $l = 2$  см.

**18.2.** Определите концентрацию  $c$  вещества, если при данной длине волны его слой толщиной  $l = 1$  см уменьшает интенсивность падающего света в 8 раз. Натуральный молярный показатель поглощения вещества  $\varepsilon = 25 \text{ М}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ .

**18.3.** В селекторе скоростей масс-спектрометра созданы скрещенные под прямым углом электрическое поле напряженностью  $E = 80$  кВ/м и магнитное поле индукцией  $B = 70$  мТл. Перпендикулярно им движется заряженная частица. Вычислите скорость частицы  $v$ , полагая, что она не испытывает отклонений от прямолинейной траектории.

**18.4.** Ионизированная молекула, ускоренная разностью потенциалов  $U = 100$  В, влетает в однородное магнитное поле индукцией  $B = 0,1$  Тл перпендикулярно его направлению и движется по дуге окружности радиусом  $R = 3$  см. Определите отношение  $q/m$  заряда частицы к ее массе.

**18.5.** Параллельный пучок рентгеновского излучения нормально падает на грань кристалла каменной соли. Дифракционный максимум третьего порядка наблюдается под углом  $\theta = 51^\circ 57'$  к плоскости грани. Расстояние  $d$  между атомными плоскостями кристалла — 0,28 нм. Определите длину волны  $\lambda$  рентгеновского излучения.

**18.6.** На грань кристалла нормально падает параллельный пучок рентгеновского излучения с длиной волны  $\lambda = 120$  пм. Дифракционный максимум второго порядка наблюдается под углом  $\theta = 30^\circ$  к плоскости грани. Определите расстояние  $d$  между атомными плоскостями кристалла.

**18.7.** Рассчитайте предел разрешения  $\lambda$  светового микроскопа для длины волны  $\lambda = 555$  нм, к которой человеческий глаз обладает наибольшей чувствительностью, в двух случаях: между предметом и линзой объектива находятся а) воздух (безымерсионная система); б) вазелиновое масло с показателем преломления  $n = 1,503$  (иммерсионная система). Апертурный угол микроскопа  $u = 140^\circ$ .

**18.8.** Рассчитайте предел разрешения  $\lambda$  электронного микроскопа, если ускоряющее напряжение в нем  $U = 100$  кВ, апертурный угол  $u = 10^{-2}$  рад.

**18.9.** Для определения концентрации сахара в моче больного диабетом используют сахариметр. Согласно показаниям прибора, угол поворота плоскости поляризации  $\alpha = 7^\circ$ . Определите концентрацию сахара, если известно, что длина трубки  $l = 20$  см; удельное вращение сахара при данной длине волны и температуре  $[\alpha_0] = 6,67 \text{ град} \cdot \text{см}^2/\text{г}$ .

**18.10.** 10%-ный раствор сахара  $c_1$  поворачивает плоскость поляризации на угол  $\alpha_1 = 30^\circ$ . Определите концентрацию  $c_2$  сахара в другом растворе, если при тех же условиях плоскость поляризации поворачивается на угол  $\alpha_1 = 20^\circ$ .

**18.11.** Определите молекулярную рефракцию  $R$  этилового спирта, если при температуре  $20^\circ\text{C}$  его плотность  $\rho = 789 \text{ кг/м}^3$ , коэффициент преломления  $n = 1,361$ .

### ВОПРОСЫТЕСТОВОГОКОНТРОЛЯ

**18.1.** Спектром поглощения электромагнитных волн веществом называется:

- а) зависимость интенсивности поглощения от длины волны или частоты излучения;
- б) зависимость интенсивности поглощения как функции времени;
- в) зависимость оптической плотности от концентрации исследуемого вещества в растворе;
- г) совокупность нормальных колебаний атомов в молекуле;
- д) зависимость коэффициента поглощения электромагнитных волн веществом от интенсивности падающего на него излучения.

**18.2.** Чем объясняются наличие полос поглощения электромагнитных волн молекулами в УФ- и видимой областях спектра?

- а) колебательным спектром молекул;
- б) наличием вращательных энергетических уровней молекулы и переходов между ними;
- в) колебательными энергетическими уровнями молекулы;
- г) электронными переходами между молекулярными орбиталями;
- д) спектральным составом источника излучения.

**18.3.** Хромофоры:

- а) это совокупность пиков на хроматограмме;
- б) группы атомов, содержащие в своем составе атом хрома;
- в) атомные группировки в молекулах, вызывающие избирательное поглощение электромагнитных волн в УФ- и видимой областях спектра;
- г) группы атомов, вызывающие поглощение электромагнитных волн в инфракрасной области спектра;
- д) окрашенные вещества.

**18.4.** Идентификация вещества по его спектру в ИК-диапазоне может быть проведена:

- а) путем сравнения его ИК и УФ-спектров;
- б) путем анализа зависимости коэффициента поглощения исследуемого вещества от его концентрации в растворе;
- в) с помощью закона Бугера—Ламберта—Бера;
- г) путем анализа интенсивности полос поглощения;
- д) путем сопоставления ИК-спектра данного вещества с аналогичным спектром его стандартного образца;

**18.5.** Если  $\nu$  — частота падающего на вещество излучения, а  $\nu_i$  — частота колебаний молекулы в  $i$ -ом возбужденном состоянии, то в спектре комбинационного рассеяния света (КРС) появляется стоксова линия с частотой:

- а)  $\nu + \nu_i$ ;
- б)  $\nu - \nu_i$ ;
- в)  $\nu - 2\nu_i$ ;
- г)  $i(\nu + \nu_i)$ ;
- д)  $\nu^2/\nu_i$ .

**18.6.** Физической основой спектроскопии ядерного магнитного резонанса (ЯМР) является:

- а) воздействие на вещество электромагнитных волн радиочастотного диапазона;
- б) резонансное взаимодействие магнитных моментов ядер с оптическим излучением;
- в) комбинированное воздействие на спиновую ядерную систему магнитного поля и электромагнитных волн радиочастотного диапазона;
- г) влияние переменного магнитного поля на ядерную систему;
- д) расщепление ядерных энергетических уровней на подуровни в постоянном магнитном поле.

**18.7.** Если  $\omega$  — циклическая частота внешнего электромагнитного поля,  $B_0$  — внешнее магнитное поле,  $\gamma$  — гиромагнитное отношение, то условие ядерного магнитного резонанса (ЯМР) выглядит следующим образом:

- а)  $\gamma = \omega B_0$  ;
- б)  $\omega = \gamma B_0 \sin \omega t$  ;
- в)  $B_0 = \gamma \omega$  ;
- г)  $\omega = \gamma B_0$  ;
- д)  $B_0 = \frac{2\pi\omega}{\gamma}$  .

**18.8.** В результате магнитного экранирования ядер электронами соотношение между локальным магнитным полем на ядре  $B_{\text{лок}}$ , внешним магнитным полем  $B_0$  и константой экранирования  $\sigma$  имеет следующий вид:

- а)  $B_{\text{лок}} = B_0(1 + \sigma)$  ;
- б)  $B_{\text{лок}} = B_0(1 - \sigma)$  ;
- в)  $B_{\text{лок}} = B_0^2(1 - \sigma)$  ;
- г)  $B_{\text{лок}} = \sigma B_0$  ;
- д)  $B_{\text{лок}} = \sigma(1 - B_0)$  .

**18.9.** Термин «химический сдвиг» в ЯМР-спектроскопии следует понимать как:

- а) смещение сигнала эталона (ТМС) в сторону более сильных магнитных полей при увеличении магнитного поля;
- б) зависимость интенсивности ЯМР-сигнала от вида химической связи;
- в) увеличение скорости химических реакций при увеличении магнитного поля при их исследовании методом ЯМР;
- г) смещение ЯМР-сигналов на спектрограмме в зависимости от агрегатного состояния вещества;
- д) смещение частот сигналов ЯМР в результате магнитного экранирования ядер электронными оболочками.

**18.10.** Физической основой масс-спектроскопии является:

- а) ионизация молекул;
- б) воздействие электрических и магнитных полей на пучки ионов исследуемого вещества;
- в) движение ионных пучков параллельно магнитному полю;
- г) переход исследуемого вещества в газообразное агрегатное состояние;
- д) разделение в пространстве пучков положительных и отрицательных ионов.

**18.11.** Если  $v$  — скорость частицы,  $B$  — индукция магнитного поля, то связь между радиусом траектории частицы  $r$  в магнитном поле и ее массой  $m$  определяется соотношением:

- а)  $r = \frac{qvB}{m}$  ; б)  $r = \frac{mB}{qv}$  ; в)  $r = \frac{mv}{qB}$  ; г)  $r = \frac{qB}{mv}$  ; д)  $r = \frac{qv}{mB}$  .

**18.12.** Масс-спектр представляет собой:

- а) зависимость радиуса траектории частицы от ее массы;
- б) зависимость скорости частицы от массы при ее движении в ускоряющем электрическом поле;
- в) зависимость ионного тока от массы;
- г) зависимость летучести исследуемого вещества от его массы;
- д) зависимость высоты пиков ионного тока от масс исследуемых молекул.

**18.13.** Физической основой рентгеноструктурного анализа является:

- а) дифракция рентгеновских лучей на кристаллической решетке;
- б) интерференция тормозного и характеристического рентгеновских излучений;
- в) дифракция рентгеновского излучения на щели коллиматора;
- г) поглощение рентгеновских лучей веществом;
- д) отражение рентгеновских лучей от кристалла.

**18.14.** Количественной основой рентгеноструктурного анализа является:

- а) количество пиков на дифрактограмме;
- б) закон Бугера—Ламберта для рентгеновского диапазона;
- в) совокупность индексов Миллера ( $hkl$ ) для различных плоскостей кристалла;
- г) условие Вульфа—Брэгга;
- д) зависимость коэффициента поглощения рентгеновского излучения веществом от его длины волны.

**18.15.** Условие Вульфа—Брэгга, связывающее длину волны рентгеновского излучения  $\lambda$ , брэгговский угол  $\Theta$ , межплоскостное расстояние в кристалле  $d$  и порядок дифракции  $n$ , имеет вид:

- а)  $\lambda \sin \Theta = nd$  ;
- б)  $2d \sin \Theta = n\lambda$  ;
- в)  $2d \sin \Theta = (2n + a) \frac{\lambda}{2}$  ;
- г)  $2d \cos \Theta = \pi n\lambda$  ;
- д)  $2\lambda \sin \Theta = nd$  .

**18.16.** Закон Мозли — основа рентгеноспектрального анализа — это связь между:

- а) коэффициентом поглощения рентгеновского излучения и концентрацией исследуемого вещества;
- б) частотой рентгеновского излучения, длиной волны и постоянной Ридберга;
- в) частотой излучения, молекулярной массой вещества и коэффициентом поглощения;
- г) частотой излучения для любой линии рентгеновского спектра и атомным номером элемента;
- д) длиной волны рентгеновского излучения и интенсивностью его поглощения веществом.

**18.17.** Основой поляриметрического метода исследования вещества является:

- а) измерение степени поляризации естественного света оптически активными веществами;
- б) дисперсия света, проходящего через оптически активные вещества;

- в) эффект двойного лучепреломления света, проходящего через поляроиды;
- г) вращение плоскости поляризации плоскополяризованного света в оптически активных средах;
- д) зависимость интенсивности прошедшего через оптически активную среду поляризованного света от длины волны.

**18.18.** Сущностью метода термического анализа является:

- а) исследование физико-химических и фазовых превращений в веществе под влиянием температуры по сопровождающим эти превращения тепловым эффектам;
- б) идентификация веществ по их молекулярным термам;
- в) исследование теплоемкости вещества как функции температуры;
- г) исследование теплопроводности вещества;
- д) исследование веществ при низких температурах.

**18.19.** Рефрактометрия — метод, основанный:

- а) на отражении света от границы двух сред;
- б) рассеянии света на границе раздела сред;
- в) измерении показателя преломления вещества;
- г) зависимости показателя преломления среды от угла падения света на границу раздела между воздухом и средой;
- д) зависимости предельного угла преломления от длины волны падающего на границу раздела сред света.

**18.20.** Физической основой хроматографического метода анализа вещества является:

- а) температурное разделение смеси веществ на отдельные фрагменты по их температуре плавления или кипения;
- б) разделение смеси веществ на отдельные компоненты в электрическом поле;
- в) разделение многокомпонентной смеси на различные химически чистые фрагменты, движущиеся в подвижной фазе с различными скоростями относительно неподвижной фазы-сорбента;
- г) разделение сложной смеси веществ по их молекулярным массам в магнитном поле;
- д) изменение цвета смеси веществ, вступающих в химические реакции.

# ПРИЛОЖЕНИЯ

## Приложение 1

### КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

#### 1. Комплексные числа

*Комплексное число* имеет вид:

$$z = a + bi, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  — действительные числа, названные соответственно действительной и мнимой частями комплексного числа; символ  $i$  — мнимая единица. Выражение (1) представляет собой *алгебраическую форму записи комплексного числа*.

Свойства мнимой единицы и комплексных чисел:

$$i = \sqrt{-1}; \quad (2) \quad i^2 = -1; \quad (3)$$

$$i^3 = -i; \quad (4) \quad i^4 = 1; \quad (5)$$

$$i^{4n+1} = i; \quad (6) \quad i^{4n+2} = -1; \quad (7)$$

$$i^{4n+3} = -i; \quad (8) \quad i^{4n} = 1; \quad (9)$$

$$a + 0 \cdot i = a \quad (a \in \mathbb{R}); \quad (10) \quad 0 + bi = bi \quad (b \in \mathbb{R}); \quad (11)$$

$$a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c; \quad b = d. \quad (12)$$

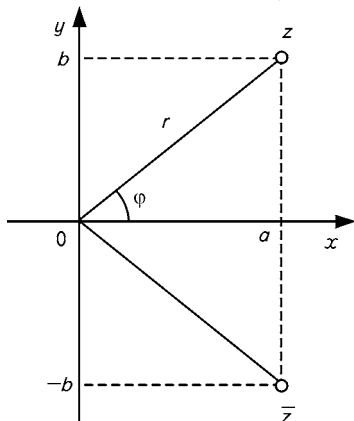


Рис. 1. Геометрическое изображение комплексного числа

Действительные числа изображаются точками на числовой прямой, комплексные — на числовой плоскости (рис. 1). Действительные числа являются частным случаем комплексных (при  $b = 0$ ).

Взаимно сопряженные комплексные числа (рис. 1):

$$z = a + bi; \quad \bar{z} = a - bi. \quad (13)$$

Модуль комплексного числа:

$$r = |z| = |a + bi| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (14)$$

*Тригонометрическая форма записи комплексного числа:*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r [\cos (\varphi + 2\pi k) + i \sin (\varphi + 2\pi k)] \quad (k \in Z); \quad (15)$$

$$z = 0 \Leftrightarrow r = 0; \quad \cos \varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{b}{r} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \quad (16)$$

*Показательная форма записи комплексного числа (формула Эйлера):*

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi} \quad (e = 2,71828). \quad (17)$$

**Основные правила действий над комплексными числами:**

$$z_1 = a_1 + b_1 i = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}; \quad (18)$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}; \quad (19)$$

$$z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i; \quad (20)$$

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a; \quad (21)$$

$$z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i; \quad (22)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)] = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}; \quad (23)$$

$$z \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2; \quad (24)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)] = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}; \quad (25)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i \quad (z_2 \neq 0). \quad (26)$$

**Возведение в степень и извлечение корня (формула Муавра):**

$$z^m = (a + bi)^m = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi) = r^m e^{im\varphi} \quad (m \in Z); \quad (27)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{a + bi} = \sqrt[n]{r} \left( \cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = r^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{1}{n}(\varphi + 2k\pi)} \quad (28)$$

( $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$ ;  $n \in N$ ). Получаем  $n$  различных значений корня при  $z \neq 0$ .

## 2. Пределы

**Пределом** функции  $y = f(x)$  при  $x$ , стремящемся к  $a$  ( $x \rightarrow a$ ) или неограниченно возрастающем ( $x \rightarrow \infty$ ), является конечное число  $A$ , если, по мере

того как  $x$  приближается к  $a$  (или к  $\infty$ ) — будь то справа или слева, — значение  $f(x)$  неограниченно приближается (стремится) к  $A$ . Предел обозначается

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \quad \text{или} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A. \quad (29)$$

Если функция  $y = f(x)$  неограниченно возрастает при  $x \rightarrow a$  (или  $x \rightarrow \infty$ ), то говорят, что функция не имеет предела или имеет бесконечный предел.

### Основные теоремы о пределах

**Теорема 1.** Пределом постоянной величины  $A$  является сама величина  $A$ :

$$\lim A = A^*. \quad (30)$$

**Теорема 2.** Предел суммы (разности) конечного числа функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim [f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_k(x)] = \lim f_1(x) + \lim f_2(x) + \dots + \lim f_k(x). \quad (31)$$

**Теорема 3.** Предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов:

$$\lim [f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \dots \cdot f_k(x)] = \lim f_1(x) \cdot \lim f_2(x) \cdot \dots \cdot \lim f_k(x). \quad (32)$$

**Теорема 4.** Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim f_1(x)}{\lim f_2(x)}, \quad \lim f_2(x) \neq 0. \quad (33)$$

*Первый замечательный предел:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \quad (34)$$

*Второй замечательный предел:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e, \quad (35)$$

где  $e$  — иррациональное число, равное с точностью до 6-й значащей цифры 2,71828.

Число  $e$  является основанием натурального логарифма:

$$\log_e a = \ln a. \quad (36)$$

*Неопределенностями* называются выражения, пределы которых нельзя вычислить непосредственным применением теорем о пределах.

---

\* При всех знаках  $\lim$  подразумевается подпись  $x \rightarrow a$  или  $x \rightarrow \infty$ .



Основные типы неопределенных выражений:

$$1) \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } \lim f(x) = \lim g(x) = 0, \text{ символически обозначается } \frac{0}{0}.$$

$$2) \frac{f(x)}{g(x)}, \text{ если } \lim f(x) = \lim g(x) = \infty, \text{ символически обозначается } \frac{\infty}{\infty}.$$

Неопределенности вида  $0^0$ ,  $0^\infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$ ,  $\infty^\infty$ ,  $0 \times \infty$  могут быть с помощью алгебраических преобразований сведены к указанным двум.

**Правило Лопиталья\***: предел отношения  $\frac{f(x)}{g(x)}$  двух функций, обе из которых бесконечно малы (неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ ) или бесконечно велики (неопределенность вида  $\frac{\infty}{\infty}$ ), равен пределу отношения производных этих функций:

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}. \quad (37)$$

Если обе функции  $f'(x)$  и  $g'(x)$  так же бесконечно малы или бесконечно велики, то возможно повторное применение правила Лопиталья.

### 3. Производные

*Производной* функции  $y = f(x)$  называется предел отношения приращения функции к соответствующему приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю:

$$y' = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (38)$$

Производные основных функций приведены в табл. 1.

#### Основные правила нахождения производных

1. Производная постоянной величины равна нулю:

$$(a)' = 0, \quad \text{где } a = \text{const}. \quad (39)$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак производной:

$$[a f(x)]' = a f'(x), \quad \text{где } a = \text{const}. \quad (40)$$

3. Производная алгебраической суммы двух или нескольких функций равна алгебраической сумме их производных:

$$[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)]' = f_1'(x) + f_2'(x) - f_3'(x). \quad (41)$$

---

\* Название «правило Лопиталья» исторически неточно, так как сформулировал правило И. Бернулли и ознакомил с ним французского математика Г. Ф. Лопиталья, автора первого печатного руководства по дифференциальному исчислению, где оно было опубликовано (1896).

Т а б л и ц а 1

## Производные основных функций

$y$	$y'$	$y$	$y'$
$c = \text{const}$	0	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$x$	1	$\sin x$	$\cos x$
$ax + b$	$a$	$\cos x$	$-\sin x$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\text{tg } x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\text{ctg } x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$a^x, (a > 0, a \neq 1)$	$a^x \ln a$	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$e^x$	$e^x$	$\text{arctg } x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\log_a x, (a > 0, a \neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\text{arcctg } x$	$-\frac{1}{1+x^2}$

4. Производная произведения:

$$[f_1(x) \cdot f_2(x)]' = f_1'(x) \cdot f_2(x) + f_1(x) \cdot f_2'(x). \quad (42)$$

5. Производная частного:

$$\left( \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right)' = \frac{f_1'(x) \cdot f_2(x) - f_1(x) \cdot f_2'(x)}{f_2^2(x)}. \quad (43)$$

6. Производная сложной функции:

$$\{f[\varphi(t)]\}' = f'[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t). \quad (44)$$

**Физический смысл производной:** производная функции  $y = f(x)$  в точке  $a$  выражает скорость изменения функции в точке  $a$ , то есть скорость протекания процесса, описываемого зависимостью  $y = f(x)$ . Так, если перемещение точки описывается уравнением  $S = f(t)$ , то  $S'(t)$  является *мгновенной скоростью* точки в момент времени  $t$ , то есть  $v = f'(t)$ . В химической кинетике скорость реакции, описываемой уравнением  $c = f(t)$ , где  $c$  — концентрация реагента, равна  $v = f'(t)$ .

Пусть функция  $y=f(x)$  имеет производную  $y=f'(x)$  на некотором промежутке. Если новая функция  $f'(x)$  имеет производную на этом же промежутке, то она обозначается  $y=f''(x)$  и называется *второй производной*.

**Физический смысл второй производной:** вторая производная функции  $y=f(x)$  в точке  $a$  выражает скорость изменения скорости функции в точке  $a$ , то есть *ускорение* процесса, описываемого зависимостью  $y=f(x)$ . Например, механическое ускорение является второй производной перемещения.

Для определения геометрического смысла производной введем следующие понятия.

**Касательной** к кривой  $L$  в точке  $M$  называется прямая  $q$ , с которой стремится совпасть секущая  $MM'$ , когда точка  $M'$ , оставаясь на кривой  $L$ , произвольно (справа или слева) стремится к  $M$  (рис. 2).

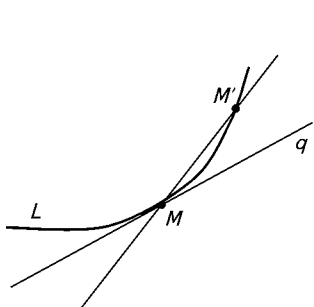


Рис. 2. К определению касательной к кривой

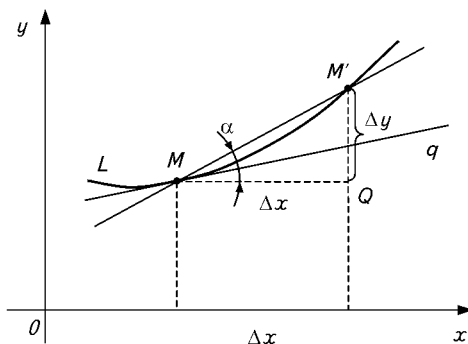


Рис. 3. К определению геометрического смысла производной

**Угловым коэффициентом  $k$**  прямой называется величина, равная тангенсу угла  $\alpha$ , образованного данной прямой и положительным направлением оси абсцисс. Из рис. 3 видно, что угловым коэффициентом к секущей  $MM'$  равен:

$$k = \operatorname{tg} \alpha = \frac{QM'}{MQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (45)$$

Однако при стремлении  $M'$  к  $M$  угловой коэффициент имеет предел:

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \quad (46)$$

Согласно формуле (38)

$$k = f'(x). \quad (47)$$

Таким образом, **геометрический смысл производной** заключается в следующем: значение производной функции  $y=f(x)$  в точке  $x=a$  равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке:

$$k = f'(a). \quad (48)$$

Если функция  $y = f(x)$  дифференцируема в точке  $x = a$ , то в этой точке к графику можно провести касательную. Верно и обратное: если в точке  $x = a$  к графику функции  $y = f(x)$  можно провести невертикальную касательную, то функция дифференцируема в точке  $x$ .

Уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $x = a$  имеет вид:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a). \quad (49)$$

#### 4. Исследование функций

Функция  $y = f(x)$  называется *возрастающей* на промежутке  $[a, b]$ , если для любых двух значений  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих этому промежутку и подчиняющихся условию  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) < f(x_2)$ .

Функция  $y = f(x)$  называется *убывающей* на промежутке  $[a, b]$ , если для любых двух значений  $x_1$  и  $x_2$ , принадлежащих этому промежутку и подчиняющихся условию  $x_1 < x_2$ , выполняется неравенство  $f(x_1) > f(x_2)$ .

*Достаточный признак возрастания (убывания) функции:* если производная функция  $f'(x)$  в промежутке  $[a, b]$  всюду положительна, то функция  $f(x)$  в этом промежутке возрастает; если  $f'(x)$  всюду отрицательна, то  $f(x)$  убывает.

**Максимумом (минимумом) функции  $y = f(x)$**  называется такое ее значение, которое меньше (больше) остальных значений функции в окрестности данной точки. Максимум и минимум функции называются *экстремумами*.

*Необходимое условие экстремума:* если функция  $y = f(x)$  имеет экстремум в точке  $x = a$ , то в этой точке производная либо равна нулю, либо бесконечна, либо не существует. Точки, в которых производная либо равна нулю, либо бесконечна, либо не существует, называются *критическими*.

*Достаточное условие экстремума:* если при переходе аргумента через точку  $x = a$  производная  $f'(x)$  меняет знак на противоположный, то точка  $x = a$  является экстремумом, причем, если знак меняется с плюса на минус, то  $a$  является максимумом; если с минуса на плюс — то минимумом.

**Для нахождения максимумов и минимумов функции  $y = f(x)$  необходимо:**

- 1) найти производную  $f'(x)$ ;
- 2) решить уравнение  $f'(x) = 0$ ;
- 3) найти точки, в которых  $f'(x)$  не существует;
- 4) для каждого критического значения  $x = a$  исследовать, меняется ли знак производной  $f'(x)$  при переходе аргумента через это значение. Если производная  $f'(x)$  переходит от положительных значений к отрицательным (от  $x < a$  к  $x > a$ ), то имеем максимум; если наоборот, то — минимум; если  $f'(x)$  не изменяет знак, то в этой точке нет ни максимума, ни минимума;

- 5) вычислить  $f(a)$ .

Чтобы определить, является ли экстремум функции максимумом или минимумом, можно также воспользоваться следующей теоремой: пусть

в точке  $x=a$  первая производная  $f'(x)$  обращается в нуль; если при этом вторая производная  $f''(a)$  отрицательна, то функция  $y=f(x)$  имеет в точке  $x=a$  максимум, если вторая производная положительна, то — минимум.

График функции  $y=f(x)$  называется *вогнутым вверх* (выпуклым вниз) на данном промежутке  $[a, b]$ ; если график целиком расположен выше касательной в его произвольной точке  $M$  (рис. 4, а).

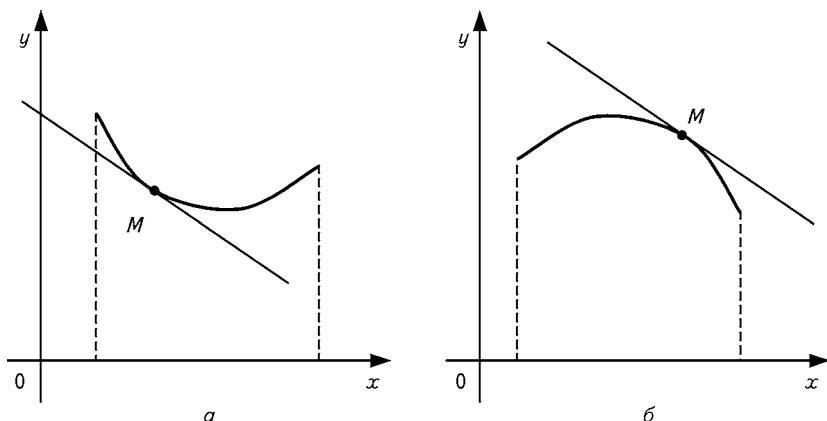


Рис. 4. К определению вогнутости (выпуклости) графиков:

а — вогнутый вверх (выпуклый вниз); б — выпуклый вверх (вогнутый вниз)

График функции  $y=f(x)$  называется *выпуклым вверх* (вогнутым вниз) на данном промежутке  $[a, b]$ ; если он целиком расположен ниже касательной в его произвольной точке  $M$  (рис. 4, б).

**Условие выпуклости (вогнутости):** если вторая производная функции  $y=f(x)$  на данном промежутке положительна [ $f''(x) > 0$ ], то график функции является выпуклым вниз на этом промежутке; если отрицательна [ $f''(x) < 0$ ], то — вогнутым.

Если график функции  $y=f(x)$  лежит по обе стороны от касательной к точке  $M$ , то эта точка называется *точкой перегиба* (рис. 5). В точке перегиба выпуклость сменяется на вогнутость и наоборот. Перегиб возможен только в тех точках, где вторая производная  $f''(x)$  либо равна нулю, либо бесконечна, либо не существует.

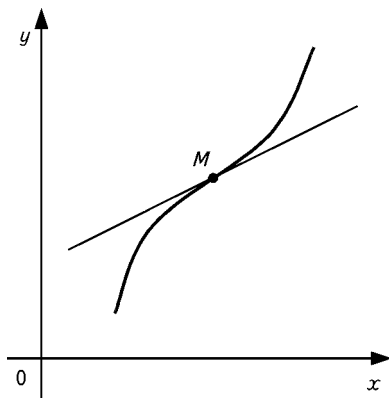


Рис. 5. Точка перегиба

**Условие точки перегиба:** если в точке  $x=a$  вторая производная функции  $y=f(x)$  обращается в нуль и меняет знак при переходе через  $x=a$ , то точка  $M(a, f(a))$  является точкой перегиба графика этой функции.

Для нахождения точек перегиба необходимо определить все значения аргумента, для которых вторая производная  $f''(x)$  равна нулю, бесконечна или не существует. Если при переходе через одно из этих значений вторая производная меняет знак, то в данной точке имеется перегиб; если не меняет, то перегиба нет.

## 5. Дифференциалы

**Дифференциал функции** равен произведению производной функции на приращение аргумента:

$$dy = y' \Delta x \quad \text{или} \quad df(x) = f'(x) \Delta x \quad (50)$$

(читается «дэ игрек» или «дэ эф от икс»).

Дифференциал аргумента равен приращению аргумента.

$$dx = \Delta x. \quad (51)$$

С учетом формул (49) и (50) можно записать:

$$dy = y' dx, \quad (52)$$

или

$$y' = \frac{dy}{dx}. \quad (53)$$

Таким образом, *производная* равна отношению дифференциала функции к дифференциалу аргумента.

Термин «дифференцирование» означает как вычисление производной, так и нахождение дифференциала.

### Правила дифференцирования

1. Постоянный множитель можно выносить за знак дифференциала:

$$d[a f(x)] = a df(x), \quad \text{где } a = \text{const}. \quad (54)$$

2. Дифференциал алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их дифференциалов:

$$d[f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] = df_1(x) + df_2(x) - df_3(x). \quad (55)$$

3. Дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента:

$$df(x) = f'(x) dx. \quad (56)$$

4. Дифференциал произведения

$$d(uv) = u dv + v du. \quad (57)$$

5. Дифференциал частного

$$d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}. \quad (58)$$

Производная второго порядка равна отношению дифференциала второго порядка к квадрату дифференциала аргумента:

$$y'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (59)$$

аналогично

$$y''' = \frac{d^3 y}{dx^3}; \quad y^{(4)} = \frac{d^4 y}{dx^4} \quad \text{и т. д.} \quad (60)$$

Для нахождения дифференциалов основных функций пользуются таблицей производных.

Если приращение аргумента мало, то дифференциал функции приближенно равен приращению функции

$$dy \approx \Delta y. \quad (61)$$

## 6. Дифференциалы в приближенных вычислениях

При изменении аргумента на небольшую величину  $dx$  можно приближенно вычислить приращение функции  $\Delta y$  по следующей формуле:

$$\Delta y \approx y' dx. \quad (62)$$

В некоторых случаях функцию  $f(x)$  и ее производную  $f'(x)$  легко вычислить при  $x = a$ , а для значений  $x$ , близких к  $a$ , непосредственное вычисление функции затруднительно. Тогда пользуются приближенной формулой

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + y' dx. \quad (63)$$

На основании вышеизложенного можно вывести следующие *приближенные формулы*, в которых  $\alpha$  — малая величина ( $\alpha \ll 1$ ):

$$(1 + \alpha)^n \approx 1 + n\alpha; \quad (64) \quad (1 - \alpha)^n \approx 1 - n\alpha; \quad (65)$$

$$\sqrt[n]{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{n}\alpha; \quad (66) \quad \sqrt[n]{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{1}{n}\alpha; \quad (67)$$

$$\frac{1}{1 + \alpha} \approx 1 - \alpha; \quad (68) \quad \frac{1}{1 - \alpha} \approx 1 + \alpha; \quad (69)$$

$$\frac{1}{(1 + \alpha)^2} \approx 1 - 2\alpha; \quad (70) \quad \frac{1}{(1 - \alpha)^2} \approx 1 + 2\alpha; \quad (71)$$

$$\sqrt{1 + \alpha} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha; \quad (72) \quad \sqrt{1 - \alpha} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha; \quad (73)$$

$$\sqrt[3]{1+\alpha} \approx 1 + \frac{1}{3}\alpha; \quad (74) \quad \sqrt[3]{1-\alpha} \approx 1 - \frac{1}{3}\alpha; \quad (75)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\alpha}} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha; \quad (76) \quad \frac{1}{\sqrt{1-\alpha}} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha; \quad (77)$$

$$\ln(1+\alpha) \approx \alpha; \quad (78) \quad \ln(1-\alpha) \approx -\alpha; \quad (79)$$

$$e^\alpha \approx 1 + \alpha; \quad (80) \quad 10^\alpha \approx 1 + \alpha \cdot \ln 10; \quad (81)$$

$$\sin \alpha \approx \alpha; \quad (82) \quad \operatorname{tg} \alpha \approx \alpha; \quad (83)$$

$$\cos \alpha \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2. \quad (84)$$

Формулы (67) — (75) являются частным случаем формулы (65).

## 7. Частные производные и дифференциалы. Полный дифференциал

Пусть  $u$  является функцией независимых переменных:  $u = f(x, y, z)$ . Если один из аргументов, например  $x$ , изменяется на малую величину  $\Delta x$ , а остальные аргументы остаются неизменными, то *частной производной*  $u$  по  $x$  (обозначается  $\frac{\partial u}{\partial x}$  или  $u'_x$ ) является следующий предел:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = u'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x}; \quad (85)$$

аналогично определяются частные производные по  $y$  и  $z$ :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = u'_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}; \quad (86)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = u'_z = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}. \quad (87)$$

Таким образом, при нахождении частной производной функция дифференцируется по одной переменной, в то время как остальные считаются постоянными.

Выражение  $\frac{\partial u}{\partial x}$  следует рассматривать как неразрывный символ частной производной, а не как отношение дифференциалов.

**Частный дифференциал** функции равен произведению соответствующей частной производной на приращение аргумента

$$d_x u = \frac{\partial u}{\partial x} dx; \quad (88)$$

аналогично

$$d_y u = \frac{\partial u}{\partial y} dy; \quad (89)$$



$$d_z u = \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (90)$$

Сумма частных дифференциалов функции называется **полным дифференциалом**:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz. \quad (91)$$

Если дифференциалы аргументов малы, то полный дифференциал функции приближенно равен приращению функции:

$$du \approx \Delta u. \quad (92)$$

Понятие полного дифференциала может быть распространено на функцию любого числа независимых переменных. Если  $u$  является функцией одного аргумента, то единственная частная производная обращается в обыкновенную, а полный дифференциал — в обыкновенный.

## 8. Градиент функции

**Градиентом** функции называется вектор, показывающий направление наибольшего возрастания скалярной функции  $\varphi$ , значение которой изменяется от одной точки пространства к другой. Обозначается символом  $\text{grad } \varphi$ . Если  $\varphi = u(x, y, z)$ , то

$$\text{grad } \varphi = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}, \quad (93)$$

где  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  — единичные векторы, направленные соответственно по осям координат  $0x$ ,  $0y$ ,  $0z$ .

Часто в целях упрощения градиентом называют производную от скалярной функции по любому направлению, например в направлении  $x$ :  $\frac{d\varphi}{dx}$ . Строго говоря, эта производная равна проекции градиента на направление  $x$ :

$$\frac{d\varphi}{dx} = (\text{grad})_x \varphi. \quad (94)$$

## 9. Неопределенный интеграл

Если функция  $f(x)$  является производной функции  $F(x)$  или  $f(x) dx$  является дифференциалом функции  $F(x)$ :

$$f(x) dx = dF(x),$$

то функция  $F(x)$  называется **первообразной** функции  $f(x)$ .

Любая непрерывная функция  $f(x)$  имеет бесчисленное множество первообразных, отличающихся друг от друга постоянным слагаемым  $C$ . Совокупность всех первообразных данной функции  $f(x)$  или данного выражения  $f(x) dx$  называется **неопределенным интегралом**:

$$\int f(x) dx = F(x) + C. \quad (95)$$

Выражение  $f(x) dx$  называется подынтегральным выражением; функция  $f(x)$  — подынтегральной функцией; переменная  $x$  — переменной интегрирования; произвольная постоянная  $C$  — константой интегрирования.

### **Свойства неопределенного интеграла**

1. Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d \int f(x) dx = f(x) dx, \quad (96)$$

или производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x). \quad (97)$$

2. Неопределенный интеграл от дифференциала функции равен сумме этой функции и константы интегрирования:

$$\int df(x) = f(x) + C. \quad (98)$$

3. Постоянный множитель  $a$  можно выносить за знак интеграла:

$$\int a f(x) dx = a \int f(x) dx. \quad (99)$$

4. Интеграл алгебраической суммы равен алгебраической сумме интегралов:

$$\int [f_1(x) + f_2(x) - f_3(x)] dx = \int f_1(x) dx + \int f_2(x) dx - \int f_3(x) dx. \quad (100)$$

### **Основные неопределенные интегралы ( $a, n, c = \text{const}$ )**

$$\int a dx = ax + C; \quad (101)$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1); \quad (102)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C; \quad (103)$$

$$\int e^x dx = e^x + C; \quad (104)$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0; a \neq 1); \quad (105)$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C; \quad (106)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C; \quad (107)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C; \quad (108)$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C; \quad (109)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C; \quad (110)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C; \quad (111)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a^2} \right| + C; \quad (112)$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C; \quad (113)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C; \quad (114)$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C; \quad (115)$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \quad (116)$$

### Основные методы интегрирования

#### 1. Метод подстановки:

$$\int f(t) dt = \int f[\varphi(x)] \varphi'(x) dx, \quad \text{где } t = \varphi(x). \quad (117)$$

#### 2. Интегрирование по частям:

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (118)$$

## 10. Определенный интеграл

Пусть дана функция  $y = f(x)$ . Выберем на оси  $x$  точки  $a$  и  $b$  и восстановим из них перпендикуляры до пересечения с функцией (рис. 6). Для вычисления площади полученной криволинейной трапеции разобьем от-

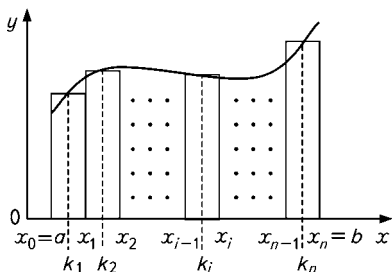


Рис. 6. К вычислению определенного интеграла

резок  $[a, b]$  на малые промежутки и выделим внутри каждого  $i$ -го отрезка промежуточную точку  $k_i$ . Тогда площадь  $i$ -го прямоугольника будет равна  $f(k_i) \Delta x_i$ , а сумма площадей — площади криволинейной трапеции. Предел, к которому стремится сумма  $\sum_{i=1}^n f(k_i) \Delta x_i$ , когда наибольшая из длин всех частичных промежутков стремится к нулю, называется **определенным интегралом** и обозначается:

$$\int_a^b f(x) dx \quad (119)$$

(читается «интеграл от а до бэ эф от икс дэ икс»). Концы  $a$  и  $b$  данного промежутка (*промежутка интегрирования*) называются *пределами интеграла* — нижним ( $a$ ) и верхним ( $b$ ).

Для нахождения определенного интеграла пользуются *формулой Ньютона—Лейбница*:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (120)$$

где  $F(x)$  — первообразная функции  $f(x)$ , то есть  $F'(x) = f(x)$ .

### Свойства определенного интеграла

1. При одинаковых пределах интегрирования определенный интеграл равен нулю:

$$\int_a^a f(x) dx = 0. \quad (121)$$

2. При перестановке пределов интегрирования определенный интеграл сохраняет абсолютное значение, но меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx. \quad (122)$$

3. Если дан ряд чисел  $a, b, c, \dots, k, l$ , расположенных в каком угодно порядке, то

$$\int_a^l f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx + \dots + \int_k^l f(x) dx. \quad (123)$$

Практически важен случай, когда числа  $a, b, c, \dots, k, l$  взяты в порядке возрастания или убывания.

4. Интеграл алгебраической суммы неизменного числа слагаемых равен алгебраической сумме интегралов отдельных слагаемых:

$$\int_a^b [f_1(x) dx + f_2(x) dx - f_3(x)] dx = \int_a^b f_1(x) dx + \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_3(x) dx. \quad (124)$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$$\int_a^b A f(x) dx = A \int_a^b f(x) dx, \text{ где } A = \text{const}. \quad (125)$$

## 11. Криволинейный интеграл

Пусть в поле некоторого вектора  $\vec{a}$  (например, силы  $\vec{F}$ , напряженности электрического  $\vec{E}$  или магнитного  $\vec{H}$  полей) задана кривая  $L$  (рис. 7). Разобьем ее на малые дуги  $\Delta l_i$ , каждой из которых соответствует определенное значение вектора  $\vec{a}_i$ . Составим произведение дуги  $\Delta l_i$  и проекции вектора  $\vec{a}_i$  на дугу  $\Delta l$ :

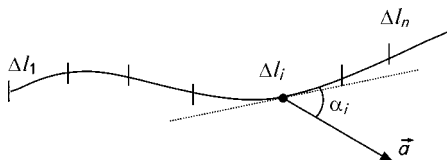


Рис. 7. К определению криволинейного интеграла

$$a_i \cos \alpha_i \cdot \Delta l_i,$$

где  $\alpha_i$  — угол между вектором  $\vec{a}_i$  и касательной к дуге в точке приложения вектора  $\vec{a}_i$ .

Сумма этих произведений при неограниченном возрастании и стремлении длин всех дуг к нулю называется **криволинейным интегралом**:

$$\lim_{\Delta l_i \rightarrow 0} \sum a_i \cos \alpha_i \Delta l_i = \int_L a \cos \alpha dl. \quad (126)$$

Элементарный участок  $dl$  кривой  $L$  можно рассматривать как вектор. Тогда криволинейный интеграл запишется через скалярное произведение:

$$\int_L a \cos \alpha dl = \int_L \vec{a} d\vec{l}. \quad (127)$$

Иногда произведение  $a \cos \alpha$ , то есть проекцию вектора  $a$  на направление  $dl$  обозначают  $a_l$ , тогда выражение для криволинейного интеграла принимает вид:



### 13. Дифференциальные уравнения

**Дифференциальным уравнением** называется уравнение, содержащее производные неизвестной функции (или нескольких неизвестных функций). Вместо производных в уравнение могут входить дифференциалы.

Общий вид дифференциального уравнения с одной неизвестной функцией:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (132)$$

**Порядком дифференциального уравнения** называется порядок наивысшей из производных, входящих в это уравнение. Если неизвестные функции зависят от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**; если от нескольких, то — **дифференциальным уравнением с частными производными**. Примером последнего типа уравнений является волновое уравнение:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \cdot \frac{\partial^2 S}{\partial t^2}. \quad (133)$$

Функция  $y = f(x)$  называется **решением дифференциального уравнения**  $n$ -го порядка, если последнее обращается в тождество для всех  $x \in (a, b)$  после подстановки этой функции и ее производных в уравнение. Предполагается, что функция  $y = f(x)$   $n$  раз непрерывно дифференцируема на промежутке  $(a, b)$ .

Любое дифференциальное уравнение вида (132) имеет бесконечное множество решений, которые могут быть записаны в виде:

$$y = y(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \quad (134)$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_n$  — произвольные постоянные;  $n$  — порядок дифференциального уравнения.

Выражение (134) называется **общим решением** дифференциального уравнения. Отметим, что при решении практических задач наибольший интерес представляет решение, удовлетворяющее начальным условиям:  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y_{0,1}$ ,  $y''(x_0) = y_{0,2}$ , ...,  $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$ . Поиск такого решения называется **задачей Коши**. Решение задачи Коши называется **частным решением**. Совокупность всех частных решений образует общее решение.

Справедлива следующая **теорема существования и единственности решения задачи Коши**. Если правая часть уравнения  $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$  и ее частные производные по переменным  $y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}$  непрерывны в рассматриваемой области  $G$ , то для любой точки  $(x_0, y_0, y_{0,1}, y_{0,2}, \dots, y_{0,n-1})$  из  $G$  на некотором интервале  $(x_0 - h, x_0 + h)$  существует единственное решение  $y(x)$  уравнения, удовлетворяющее начальным условиям  $y(x_0) = y_0$ ,  $y'(x_0) = y_{0,1}$ ,  $y''(x_0) = y_{0,2}$ , ...,  $y^{(n-1)}(x_0) = y_{0,n-1}$ .

График решения дифференциального уравнения называется **интегральной кривой дифференциального уравнения**.

Дифференциальные уравнения широко используются для описания, моделирования и исследования физических, химических, биологических, экономических процессов. Дальше будут рассмотрены дифференциальные уравнения, наиболее часто встречающиеся в физике и биофизике.

**Уравнением с разделяющимися переменными** называется уравнение первого порядка вида:

$$X_1 Y_1 dx + X_2 Y_2 dy = 0, \quad (135)$$

где функции  $X_1$ ,  $X_2$ ,  $Y_1$  и  $Y_2$  непрерывны, причем функции  $X_1$  и  $X_2$  зависят только<sup>1</sup> от  $x$ , а функции  $Y_1$  и  $Y_2$  — только от  $y$ . Делением на  $Y_1 X_2$  такое уравнение может быть приведено к виду:

$$\frac{X_1 dx}{X_2} + \frac{Y_2 dy}{Y_1} = 0. \quad (136)$$

Полученное уравнение называется *уравнением с разделенными переменными*. Процесс приведения называется *разделением переменных*. Общее решение уравнения (135) имеет вид:

$$\int \frac{X_1}{X_2} dx + \int \frac{Y_2}{Y_1} dy = C, \quad \text{где } C = \text{const}. \quad (137)$$

В тех случаях, когда общее решение не существенно, частное решение удобно определять по формуле:

$$\int_{x_0}^x \frac{X_1}{X_2} dx + \int_{y_0}^y \frac{Y_2}{Y_1} dy = 0, \quad (138)$$

где  $x_0$  и  $y_0$  — начальные значения.

**Линейным дифференциальным уравнением  $n$ -го порядка** называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x), \quad (139)$$

где  $y = y(x)$  — неизвестная функция;  $a_1(x)$ ,  $a_2(x)$ , ...,  $a_{n-1}(x)$ ,  $a_n(x)$ ,  $f(x)$  — известные функции, которые будем полагать непрерывными на промежутке  $(a, b)$ .

Уравнения

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \quad (140)$$

и

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x), \quad f(x) \neq 0. \quad (141)$$

называются соответственно *линейными дифференциальными уравнениями  $n$ -го порядка без правой части (однородными)* и *с правой частью (неоднородными)*.

<sup>1</sup> Одна из них или обе могут быть постоянными, то же справедливо для функций  $Y_1$  и  $Y_2$ .



Если множители  $a_1, a_2, \dots, a_n$  не зависят от  $x$ , то есть являются постоянными, то такое дифференциальное уравнение называется *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами*. Его решение разыскивается в виде  $y = e^{\lambda x}$ .

Далее будет рассмотрен **алгоритм отыскания решений линейных уравнений второго порядка**, который может быть обобщен для линейных уравнений произвольного порядка.

Для отыскания решения однородного линейного дифференциального уравнения<sup>1</sup> с постоянными коэффициентами

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \quad (142)$$

следует:

1) записать характеристическое уравнение:

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0; \quad (143)$$

2) найти корни этого уравнения:  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ ;

3) записать выражение для общего решения:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (144)$$

где  $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ ;  $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$  — линейно независимые решения уравнения (141).

Возможны следующие три случая:

а) дискриминант уравнения (142) положителен:  $a_1^2 - 4a_2 > 0$ . Тогда уравнение имеет два неравных действительных корня:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}.$$

Общее решение уравнения (141):

$$y(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}; \quad (145)$$

б) дискриминант уравнения (142) равен 0:  $a_1^2 - 4a_2 = 0$ . Тогда уравнение имеет два одинаковых корня:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{a_1}{2}.$$

---

<sup>1</sup> Однородное линейное уравнение первого порядка  $y' + P(x)y = 0$  является уравнением с разделяющимися переменными, и его общее решение вычисляется по формуле  $y(x) = C \exp\left(-\int_{x_0}^x P(x) dx\right)$ , где  $C$  — произвольная постоянная.

В этом случае в выражении для общего решения уравнения (141) помимо решения  $e^{-\frac{a_1}{2}x}$  присутствует линейно независимое решение  $xe^{-\frac{a_1}{2}x}$ , то есть общее решение имеет вид:

$$y = (C_1 + C_2x)e^{-\frac{a_1}{2}x}; \quad (146)$$

3) дискриминант уравнения (143) отрицателен:  $a_1^2 - 4a_2 < 0$ . Тогда характеристическое уравнение имеет комплексные корни:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm i\gamma,$$

где  $\gamma = \sqrt{a_2 - \frac{a_1^2}{4}}$ . Применив формулу Эйлера (17), получаем линейно независимые решения уравнения (142):

$$y_1 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \cos \gamma x; \quad y_2 = e^{-\frac{a_1}{2}x} \sin \gamma x, \quad (147)$$

при этом общее решение имеет вид:

$$y = e^{-\frac{a_1}{2}x} (C_1 \cos \gamma x + C_2 \sin \gamma x). \quad (148)$$

После тригонометрических преобразований уравнение (148) может быть сведено к виду:

$$y = C_3 e^{-\frac{a_1}{2}x} \sin (C_4 + \gamma x), \quad (149)$$

где  $C_3 \sin C_4 = C_1$ ;  $C_3 \cos C_4 = C_2$ , или

$$y = C_5 e^{-\frac{a_1}{2}x} \cos (C_6 + \gamma x), \quad (150)$$

где  $C_5 \cos C_6 = C_1$ ;  $-C_5 \sin C_6 = C_2$ .

Для решения задачи Коши нужно подставить выражение для общего решения в начальные условия и определить значения постоянных  $C_1$  и  $C_2$ , которые являются решениями системы линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) = y_0; \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) = y_{0,1}. \end{cases} \quad (151)$$

Общее решение линейного неоднородного уравнения

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x) \quad (152)$$

есть сумма какого-либо частного его решения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Частное решение линейного неоднородного уравнения можно найти **методом вариации произвольных постоянных**, который заключается в следующем.

Пусть общее решение соответствующего однородного уравнения  $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$  есть

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \quad (153)$$

где  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  — его линейно независимые решения.

Заменяем произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  неизвестными функциями  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ :

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x). \quad (154)$$

Вычисляем первую и вторую производные  $y'(x)$  и  $y''(x)$ :

$$y'(x) = C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) + C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x)$$

предположим, что

$$C_1'(x) y_1(x) + C_2'(x) y_2(x) = 0 \quad (155)$$

тогда

$$y'(x) = C_1(x) y_1'(x) + C_2(x) y_2'(x); \quad (156)$$

$$y''(x) = C_1'(x) y_1'(x) + C_1(x) y_1''(x) + C_2'(x) y_2'(x) + C_2(x) y_2''(x). \quad (157)$$

Подставим уравнения (154), (156) и (157) в формулу (152). После приведения подобных слагаемых получаем

$$C_1'(x) y_1'(x) + C_2'(x) y_2'(x) = f(x) \quad (158)$$

Неизвестные функции  $C_1'(x)$  и  $C_2'(x)$  являются решениями системы линейных дифференциальных уравнений (155) и (158):

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{f(x) y_2(x)}{y_1'(x) y_2(x) + y_1(x) y_2'(x)} \\ C_2'(x) = \frac{f(x) y_1(x)}{y_1(x) y_2'(x) + y_1'(x) y_2(x)} \end{cases} \quad (159)$$

Путем интегрирования находим  $C_1(x)$  и  $C_2(x)$ , подставляем в формулу (154) и получаем таким образом общее решение линейного неоднородного уравнения.

## 14. Ряды

**Рядом** называется выражение, имеющее вид бесконечного числа слагаемых:

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} a_i. \quad (160)$$

Иногда для упрощения расчетов бывает удобно разложить функцию в ряд.

*Ряд Тейлора:* функция  $f(x)$ , бесконечно дифференцируемая в окрестности точки  $a$ , может быть разложена в степенной ряд по степеням  $(x - a)$ :

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots \quad (161)$$

Разложения в степенные ряды некоторых функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (162)$$

$$e^{-x} = 1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots; \quad (163)$$

$$10^{-x} = e^{-x \cdot \ln 10} = 1 - \frac{x \cdot \ln 10}{1!} + \frac{(x \cdot \ln 10)^2}{2!} - \frac{(x \cdot \ln 10)^3}{3!} + \dots; \quad (164)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots; \quad (165)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots; \quad (166)$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \dots \quad (167)$$

Функция  $\operatorname{ctg} x$  не разлагается по степеням  $x$ .

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots; \quad (168)$$

$$\ln(1-x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \dots; \quad (169)$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \left[ x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right]; \quad (170)$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots ; \quad (171)$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \dots ; \quad (172)$$

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \frac{\pi}{2} - x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} - \dots ; \quad (173)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots ; \quad (174)$$

$$\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2} - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} - \frac{x^9}{9} + \dots . \quad (175)$$

## 15. Скалярное и векторное произведение векторов

**Скалярным произведением** вектора  $\vec{a}$  на вектор  $\vec{b}$  называется скаляр, равный произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}\vec{b}}). \quad (176)$$

Скалярное произведение обозначается  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  или  $(\vec{a}, \vec{b})$ .

### Свойства скалярного произведения

1. Скалярное произведение обращается в ноль, если один из сомножителей или оба являются ноль-векторами, или если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  перпендикулярны.

2. Свойство переместительности

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}. \quad (177)$$

3. Свойство распределительности

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}. \quad (178)$$

4. Свойство сочетательности относительно скалярного множителя

$$(m\vec{a}) \cdot \vec{b} = m(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (179)$$

5. Если векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны (то есть лежат на одной прямой или на параллельных прямых), то

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \pm |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \quad (180)$$

(знак «+», если  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  имеют одно и то же направление; знак «-» — если противоположное).

$$6. \quad \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2. \quad (181)$$

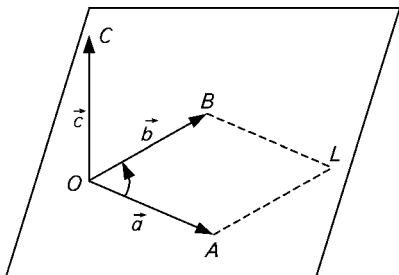


Рис. 9. К определению векторного произведения

Векторным произведением вектора  $\vec{a}$  (множимое) на не коллинеарный с ним вектор  $\vec{b}$  (множитель) называется третий вектор, модуль которого численно равен площади параллелограмма  $AOBL$  (рис. 9), построенного на векторах  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , то есть он равен  $|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{ab})$ , а направление перпендикулярно плоскости упомянутого параллелограмма, причем поворот вектора  $\vec{a}$ , совмещающий его по кратчайшему пути с вектором  $\vec{b}$ , совершается против часовой стрелки для наблюдателя, глаз которого помещается в точке  $C$ . Таким образом векторы  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  и  $\vec{c}$  образуют правую тройку векторов. Векторное произведение обозначается  $\vec{a} \times \vec{b}$  или  $[\vec{a}, \vec{b}]$ .

#### Свойства векторного произведения:

1. Векторное произведение обращается в ноль лишь тогда, когда векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  коллинеарны или если один из них или оба — ноль-векторы. В частности

$$\vec{a} \times \vec{a} = 0. \quad (182)$$

2. При перестановке слагаемых векторное произведение меняет знак на противоположный

$$\vec{a} \times \vec{b} = -[\vec{b} \times \vec{a}]. \quad (183)$$

Таким образом, векторное произведение не обладает свойством переместительности.

3. Свойство распределительности

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}. \quad (184)$$

4. Свойство сочетательности относительно скалярного множителя

$$(m\vec{a}) \times \vec{b} = m(\vec{a} \times \vec{b}). \quad (185)$$

## Приложение 2

## ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Буквы	Название	Буквы	Название	Буквы	Название
Aa	а	Jj	йот	Ss	эс
Bb	бэ	Kk	ка	Tt	тэ
Cc	цэ	Ll	эль	Uu	у
Dd	дэ	Mm	эм	Vv	вэ
Ee	э	Nn	эн	Ww	дубль-вэ
Ff	эф	Oo	О	Xx	икс
Gg	гэ	Pp	пэ	Yy	игрек
Hh	аш	Qq	ку	Zz	зэт
Ii	и	Rr	эр		

## Приложение 3

## ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Буквы	Название	Буквы	Название	Буквы	Название
Αα	альфа	Ιι	йота	Ρρ	ро
Ββ	бета	Κκ	каппа	Σσ, ς	сигма
Γγ	гамма	Λλ	ламбда	Ττ	тау
Δδ	дельта	Μμ	мю (ми)	Υυ	ипсилон
Εε	эпсилон	Νν	ню (ни)	Φφ	фи
Ζζ	дзета	Ξξ	кси	Χχ	хи
Ηη	эта	Οο	омикрон	Ψψ	пси
Θθ	тета	Ππ	пи	Ωω	омега

## Приложение 4

## ЕДИНИЦЫ ИЗМЕРЕНИЯ И РАЗМЕРНОСТИ ФИЗИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

### 1. Основные единицы СИ

Величина	Единица			
	Наименование	Обозначение		
		русское	международное	символ
Длина	метр	м	m	<i>L</i>
Масса	килограмм	кг	kg	<i>M</i>
Время	секунда	с	s	<i>T</i>
Сила электрического тока	ампер	А	A	<i>I</i>
Термодинамическая температура	кельвин	К	K	$\Theta$
Сила света	кандела	кд	cd	<i>J</i>
Количество вещества	моль	моль	mol	<i>N</i>

### 2. Дополнительные единицы СИ

Величина	Единица		
	Наименование	Обозначение	
		русское	международное
Плоский угол	радиан	рад	rad
Телесный угол	стерадиан	ср	sr

### 3. Внесистемные единицы, их связь с единицами системы СИ

Наименование величины	Единица измерения			
	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ
		рус.	межд.	
Длина	микрон	мк	μ	1 мк = 10 <sup>-6</sup> м
	ангстрем	Е	Е	1 Е = 10 <sup>-10</sup> м
	световой год	св. год	l. y.	1 св. год = 9,46 · 10 <sup>15</sup> м
	парсек	пк	рс	1 пк = 3,09 · 10 <sup>16</sup> м
	астрономическая единица	а. е.	AU	1 а. е. = 1,50 · 10 <sup>11</sup> м



Наименование величины	Единица измерения			
	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ
		рус.	межд.	
Масса	тонна	т	t	1 т = $10^3$ кг
	центнер	ц	q	1 ц = 100 кг
	атомная единица массы	а. е. м.	u	1 а. е. м. = $1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Время	минута	мин	min	1 мин = 60 с
	час	ч	h	1 ч = 3600 с
	сутки	сут	d	1 сут = 86400 с
Плоский угол	градус	...°	...°	$1^\circ = \frac{\pi}{180} = 1,75 \cdot 10^{-2}$ рад
	минута	...'	...'	$1' = \frac{\pi}{108} \cdot 10^{-2} = 2,91 \cdot 10^{-4}$ рад
	секунда	..."	..."	$1'' = \frac{\pi}{648} \cdot 10^{-3} = 4,85 \cdot 10^{-6}$ рад
Площадь	ар	а	a	1 а = $10^2$ м <sup>2</sup>
	гектар	га	ha	1 га = $10^4$ м <sup>2</sup>
Объем	литр	л	L (l)	1 л = $10^{-3}$ м <sup>3</sup>
Угол поворота	оборот	об	rev	1 об = 2π рад
Частота вращения (угловая скорость)	оборот в секунду	об/с	rev/s	1 об/с = 1 с <sup>-1</sup>
	оборот в минуту	об/мин	rev/min	1 об/мин = 0,0167 с <sup>-1</sup>
Сила (вес)	килограмм-сила	кгс	kgf	1 кгс = 9,81 Н
	тонна-сила	тс	Tf, tf	1 тс = $9,81 \cdot 10^3$ Н
Работа	ватт · час	Вт · ч	W · h	1 Вт · ч = $3,6 \cdot 10^3$ Дж
Энергия	электрон-вольт	эВ	eV	1 эВ = $1,60 \cdot 10^{-19}$ Дж
Теплота	калория	кал	cal	1 кал = 4,19 Дж
Мощность	лошадиная сила	л. с.	h. p.	1 л. с. = 735,5 Вт
Давление	бар	бар	bar	1 бар = $10^5$ Па
	миллиметр ртутного столба	мм рт. ст.	mm Hg	1 мм рт. ст. = 133,3224 Па
	торр	Torr	Torr	1 Торр = 1/760 атм = = 133,3224 Па
	миллиметр водяного столба	мм вод. ст.	mm H <sub>2</sub> O	1 мм вод.ст. = 9,81 Па
	стандартная атмосфера	атм	atm	1 атм = $1,01325 \cdot 10^5$ Па

Наименование величины	Единица измерения			
	Наименование	Обозначение		Соотношение с единицей СИ
		рус.	межд.	
Температура	килограмм-сила на квадратный сантиметр	кгс/см <sup>2</sup>	kgf/m <sup>2</sup>	1 кгс/см <sup>2</sup> = 9,81 · 10 <sup>4</sup> Па
Логарифмическая величина	техническая атмосфера	(ат)	at	1 ат = 9,81 · 10 <sup>4</sup> Па
	градус Цельсия	°C	°C	1 °C = 1 К
	бел	Б	В	—
	децибел	дБ	dB	—
Напряжение (механическое)	килограмм-сила на квадратный миллиметр	кгс/мм <sup>2</sup>	kgf/mm <sup>2</sup>	1 кгс/мм <sup>2</sup> = 9,81 · 10 <sup>6</sup> Па
Напряженность магнитного поля	эрстед	Э	Oe	1 Э = 79,5775 А/м
Доза излучения	рад	рад	rad	1 рад = 0,01 Дж/кг
Мощность дозы излучения	рад в секунду	рад/с		1 рад/с = 0,01 Вт/кг
Экспозиционная доза	рентген	Р	R	1 Р = 2,58 · 10 <sup>-4</sup> Кл/кг
Активность изотопа	кюри	Ки	Ci	1 Ки = 3,700 · 10 <sup>10</sup> с <sup>-1</sup>
Относительная величина	процент	%	%	1% = 10 <sup>-2</sup>
	миллионная доля	млн <sup>-1</sup>	mln <sup>-1</sup>	1 млн <sup>-1</sup> = 10 <sup>-6</sup>

#### 4. Производные единицы СИ, имеющие собственные наименования

Величина	Единица			Выражение производной единицы	
	Наименование	Обозначение		через другие единицы СИ	через основные и дополнительные единицы СИ
		рус.	межд.		
Частота	герц	Гц	Hz	—	с <sup>-1</sup>
Уровни интенсивности звука, звукового давления	бел, децибел	Б, дБ	В, dB	1	1
Сила, вес	ньютон	Н	N	м · кг · с <sup>-2</sup>	м · кг · с <sup>-2</sup>

Величина	Единица			Выражение производной единицы	
	Наименование	Обозначение		через другие единицы СИ	через основные и дополнительные единицы СИ
		рус.	межд.		
Давление, механическое напряжение, модуль упругости	паскаль	Па	Pa	Н/м <sup>2</sup>	м <sup>-1</sup> · кг · с <sup>-2</sup>
Энергия, работа, количество теплоты	джоуль	Дж	J	Н · м	м <sup>2</sup> · кг · с <sup>-2</sup>
Мощность, поток энергии	ватт	Вт	W	Дж/с	м <sup>2</sup> · кг · с <sup>-3</sup>
Электрический заряд	кулон	Кл	C	А · с	А · с
Электрическое напряжение, электрический потенциал, электродвижущая сила	вольт	В	V	Вт/А	м <sup>2</sup> · кг · с <sup>-3</sup> · А <sup>-1</sup>
Электрическая емкость	фарада	Ф	F	Кл/В	м <sup>-2</sup> · кг <sup>-1</sup> · с <sup>4</sup> · А <sup>2</sup>
Электрическое сопротивление	ом	Ом	Ω	В/А	м <sup>2</sup> · кг · с <sup>-3</sup> · А <sup>-2</sup>
Электрическая проводимость	сименс	См	S	Ом <sup>-1</sup>	м <sup>-2</sup> · кг <sup>-1</sup> · с <sup>3</sup> · А <sup>2</sup>
Магнитный поток, поток магнитной индукции	вебер	Вб	Wb	В · с	м <sup>2</sup> · кг · с <sup>-2</sup> · А <sup>-1</sup>
Магнитная индукция, плотность магнитного потока	тесла	Тл	T	Вб/м <sup>2</sup>	кг · с <sup>-2</sup> · А <sup>-1</sup>
Индуктивность	генри	Гн	H	Вб/А	м <sup>2</sup> · кг · с <sup>-2</sup> · А <sup>-2</sup>
Оптическая сила	диоптрия	дптр	D	м <sup>-1</sup>	м <sup>-1</sup>
Световой поток	люмен	лм	lm	кд · ср	кд · ср
Освещенность	люкс	лк	lx	лм/м <sup>2</sup>	кд · ср · м <sup>-2</sup> ·
Активность радиоактивного источника	беккерель	Бк	Bq	с <sup>-1</sup>	с <sup>-1</sup>
Поглощенная доза	грэй	Гр	Gy	Дж/кг	м <sup>2</sup> · с <sup>-2</sup>
Эквивалентная доза	зиверт	Зв	Sv	Дж/кг	м <sup>2</sup> · с <sup>-2</sup>

## 5. Единицы измерения и размерности основных величин в системе СИ

### 5.1. Единицы пространства и времени

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Длина	$l$	м	m	м
Время	$t$	с	s	с
Площадь	$S, A$	м <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>
Объем	$V$	м <sup>3</sup>	m <sup>3</sup>	м <sup>3</sup>
Скорость	$v$	м/с	m/s	м/с
Ускорение	$a$	м/с <sup>2</sup>	m/s <sup>2</sup>	м/с <sup>2</sup>
Угловая скорость	$\omega$	рад/с	rad/s	с <sup>-1</sup>
Угловое ускорение	$\varepsilon$	рад/с <sup>2</sup>	rad/s <sup>2</sup>	с <sup>-2</sup>

### 5.2. Единицы периодических величин и связанных с ними характеристик

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Частота	$\nu, n, f$	Гц	Hz	с <sup>-1</sup>
Круговая частота	$\omega$	рад/с	rad/s	рад/с
Период	$T$	с	с	с
Длина волны	$\lambda$	м	m	м
Волновое число	$\sigma$	м <sup>-1</sup>	m <sup>-1</sup>	м <sup>-1</sup>
Круговое волновое число	$k$	Рад/м	rad/m	Рад/м
Фазовая скорость, скорость звука	$c, v$	м/с	m/s	м/с
Коэффициент затухания	$\beta$	с <sup>-1</sup>	с <sup>-1</sup>	с <sup>-1</sup>
Логарифмический декремент затухания	$\lambda$	1	1	1
Звуковое давление	$p$	Па, Н/м <sup>2</sup>	Pa, N/m <sup>2</sup>	кг/(м · с <sup>2</sup> )

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Интенсивность звука	$I$	Вт/м <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>	кг/с <sup>3</sup>
Уровень интенсивности звука	$L_B, L_{dB}$	Б, дБ	B, dB	1
Уровень звукового давления	$L_B, L_{dB}$	Б, дБ	B, dB	1
Громкость	$E$	фон	phon	1

### 5.3. Механические единицы

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Масса	$m$	кг	kg	кг
Момент инерции	$I, J$	кг · м <sup>2</sup>	kg · m <sup>2</sup>	м <sup>2</sup> · кг
Плотность	$\rho$	кг/м <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>
Удельный вес	$\gamma$	Н/м <sup>3</sup>	N/m <sup>3</sup>	кг/(м <sup>2</sup> · с <sup>2</sup> )
Удельный объем	$v$	м <sup>3</sup> /кг	m <sup>3</sup> /kg	м <sup>3</sup> /кг
Импульс	$P$	кг · м/с	kg · m/s	м · кг/с
Сила	$F$	Н	N	м · кг/с <sup>2</sup>
Импульс силы	$I$	Н · с	N · s	м · кг/с
Момент импульса	$L$	кг · м <sup>2</sup> /с	kg · m <sup>2</sup> /s	м <sup>2</sup> · кг/с
Момент силы, момент пары сил, вращающий момент	$M$	Н · м	N · m	м <sup>2</sup> · кг/с <sup>2</sup>
Импульс момента силы	$H$	Н · м · с	N · m · s	м <sup>2</sup> · кг/с
Давление	$p$	Па, Н/м <sup>2</sup>	Pa, N/m <sup>2</sup>	кг/(м · с <sup>2</sup> )
Нормальное напряжение	$\sigma$	Па, Н/м <sup>2</sup>	Pa, N/m <sup>2</sup>	кг/(м · с <sup>2</sup> )
Касательное напряжение	$\tau$	Па, Н/м <sup>2</sup>	Pa, N/m <sup>2</sup>	кг/(м · с <sup>2</sup> )
Модуль линейного растяжения (модуль Юнга)	$E$	Па, Н/м <sup>2</sup>	Pa, N/m <sup>2</sup>	кг/(м · с <sup>2</sup> )
Модуль сдвига	$G$	Па, Н/м <sup>2</sup>	Pa, N/m <sup>2</sup>	кг/(м · с <sup>2</sup> )
Модуль всестороннего сжатия	$K$	Па, Н/м <sup>2</sup>	Pa, N/m <sup>2</sup>	кг/(м · с <sup>2</sup> )
Энергия	$E$	Дж	J	м <sup>2</sup> · кг/с <sup>2</sup>

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Работа	$A, W$	Дж	J	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^2$
Кинетическая энергия	$E_{\text{кин}}, T$	Дж	J	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^2$
Потенциальная энергия	$E_{\text{пот}}, U$	Дж	J	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^2$
Объемная плотность энергии	$w$	Дж/м <sup>3</sup>	J/м <sup>3</sup>	$\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с}^2)$
Мощность	$P, N$	Вт	W	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^3$
Коэффициент полезного действия (КПД)	$\eta$	1	1	1
Коэффициент динамической вязкости (коэффициент внутреннего трения)	$\eta$	Па · с	Pa · s	$\text{кг}/(\text{м} \cdot \text{с})$
Коэффициент кинематической вязкости	$\nu$	м <sup>2</sup> /с	м <sup>2</sup> /s	м <sup>2</sup> /с
Коэффициент поверхностного натяжения	$\sigma$	Н/м; Дж/м <sup>2</sup>	N/m; J/м <sup>2</sup>	кг/с <sup>2</sup>

#### 5.4. Единицы молекулярной физики

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Атомный номер	$Z$	1	1	1
Относительная атомная масса	$A_r$	1	1	1
Относительная молекулярная масса	$M_r$	1	1	1
Молярная масса	$M$	кг/моль	kg/mol	кг/моль
Молярный объем	$V_m$	м <sup>3</sup> /моль	м <sup>3</sup> /mol	м <sup>3</sup> /моль
Объемная концентрация молекул или частиц	$n$	м <sup>-3</sup>	м <sup>-3</sup>	м <sup>-3</sup>
Массовая концентрация вещества	$\rho$	Кг/м <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Молярная концентрация вещества	$c$	моль/м <sup>3</sup>	mol/m <sup>3</sup>	моль/м <sup>3</sup>
Моляльность	$b, m$	моль/кг	mol/kg	моль/кг
Плотность	$\rho$	Кг/м <sup>3</sup>	kg/m <sup>3</sup>	кг/м <sup>3</sup>
Наиболее вероятная скорость	$v_{\text{вер}}$	м/с	m/s	м/с
Средняя арифметическая скорость	$\langle v \rangle$	м/с	m/s	м/с
Средняя квадратичная скорость	$v_{\text{ср. кв}}$	м/с	m/s	м/с
Средняя длина свободного пробега	$\lambda$	м	m	м
Коэффициент диффузии	$D$	м <sup>2</sup> /с	m <sup>2</sup> /s	м <sup>2</sup> /с
Коэффициент внутреннего трения (коэффициент вязкости)	$\eta$	Па · с	Pa · s	кг/(м · с)

### 5.5. Тепловые единицы

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Температура	$T$	К	К	К
Температура по Цельсию	$t, \theta$	°С	°C	°C
Градиент температуры	$dT/dx$	К/м	K/m	К/м
Температурный коэффициент линейного расширения	$\alpha_l$	К <sup>-1</sup>	К <sup>-1</sup>	К <sup>-1</sup>
Температурный коэффициент объемного расширения	$\alpha_v, \alpha$	К <sup>-1</sup>	К <sup>-1</sup>	К <sup>-1</sup>
Теплота, количество теплоты	$Q$	Дж	J	м <sup>2</sup> · кг/с <sup>2</sup>

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Удельная теплота испарения	$r$	Дж/кг	J/kg	$\text{м}^2/\text{с}^2$
Удельная теплота плавления	$\lambda$	Дж/кг	J/kg	$\text{м}^2/\text{с}^2$
Тепловой поток	$\Phi$	Вт	W	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^3$
Поверхностная плотность теплового потока	$q, \varphi$	Вт/м <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>	кг/с <sup>3</sup>
Коэффициент теплопроводности	$\kappa$	Вт/м · К	W/m · К	$\text{м} \cdot \text{кг}/(\text{с}^3 \cdot \text{К})$
Коэффициенты теплоотдачи и теплопередачи	$K$	Вт/м <sup>2</sup> · К	W/m <sup>2</sup> · К	кг/(с <sup>3</sup> · К)
Коэффициент температуропроводности	$a$	м <sup>2</sup> /с	м <sup>2</sup> /s	м <sup>2</sup> /с
Термическое сопротивление	$R$	К/Вт	K/W	$\text{К} \cdot \text{с}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{кг})$
Теплоемкость	$C$	Дж/К	J/K	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$
Удельная (массовая) теплоемкость	$c$	Дж/(кг · К)	J/(kg · К)	$\text{м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$
Молярная теплоемкость	$C$	$\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	J/(mol · К)	$\frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}$
Удельная теплоемкость при постоянном объеме	$C_V$	Дж/(кг · К)	J/(kg · К)	$\text{м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$
Удельная теплоемкость при постоянном давлении	$C_p$	Дж/(кг · К)	J/(kg · К)	$\text{м}^2/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$
Молярная теплоемкость при постоянном объеме	$C_{V\mu}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	J/(mol · К)	$\frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}$
Молярная теплоемкость при постоянном давлении	$C_{p\mu}$	$\frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$	J/(mol · К)	$\frac{\text{м}^2 \cdot \text{кг}}{\text{с}^2 \cdot \text{К} \cdot \text{моль}}$
Показатель адиабаты	$\gamma$	1	1	1
Энтропия	$S$	Дж/К	J/K	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{К})$



Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Энергия	$E$	Дж	J	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^2$
Внутренняя энергия	$U$	Дж	J	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^2$
Энтальпия	$H$	Дж	J	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^2$
Свободная энергия Гельмгольца	$F$	Дж	J	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^2$
Свободная энергия Гиббса	$G$	Дж	J	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/\text{с}^2$
Химический потенциал	$\mu$	Дж/моль	J/mol	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{моль})$
Электрохимический потенциал	$\bar{\mu}$	Дж/моль	J/mol	$\text{м}^2 \cdot \text{кг}/(\text{с}^2 \cdot \text{моль})$

### 5.6. Электрические и магнитные единицы

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Электрический заряд	$q$	Кл	С	$\text{А} \cdot \text{с}$
Линейная плотность заряда	$\tau$	Кл/м	С/м	$\text{А} \cdot \text{с}/\text{м}$
Поверхностная плотность заряда	$\sigma$	Кл/м <sup>2</sup>	С/м <sup>2</sup>	$\text{А} \cdot \text{с}/\text{м}^2$
Объемная плотность заряда	$\rho$	Кл/м <sup>3</sup>	С/м <sup>3</sup>	$\text{А} \cdot \text{с}/\text{м}^3$
Напряженность электрического поля	$E$	В/м	V/m	$\text{м} \cdot \text{кг}/(\text{А} \cdot \text{с}^3)$
Электрическое смещение (индукция)	$D$	Кл/м <sup>2</sup>	С/м <sup>2</sup>	$\text{А} \cdot \text{с}/\text{м}^2$
Электрическая постоянная	$\varepsilon_0$	Ф/м	F/m	$\text{А}^2 \cdot \text{с}^4/(\text{м}^3 \cdot \text{кг})$
Абсолютная диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon_a, \varepsilon$	Ф/м	F/m	$\text{А}^2 \cdot \text{с}^4/(\text{м}^3 \cdot \text{кг})$
Относительная диэлектрическая проницаемость	$\varepsilon, \varepsilon_r$	1	1	1

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Поток электрического смещения (индукции)	$\Psi$	Кл	С	$A \cdot c$
Электрический потенциал	$\phi$	В	V	$m^2 \cdot кг / (A \cdot c^3)$
Напряжение, разность потенциалов	$U, \Delta\phi$	В	V	$m^2 \cdot кг / (A \cdot c^3)$
Электродвижущая сила (ЭДС)	$\mathcal{E}$	В	V	$m^2 \cdot кг / (A \cdot c^3)$
Емкость	$C$	Ф	F	$A^2 \cdot c^4 / (m^2 \cdot кг)$
Электрический дипольный момент	$p$	Кл $\cdot$ м	C $\cdot$ m	$A \cdot c \cdot m$
Вектор поляризации (поляризованность)	$P$	Кл/м <sup>2</sup>	C/m <sup>2</sup>	$A \cdot c / m^2$
Диэлектрическая восприимчивость	$\chi$	1	1	1
Сила тока	$I$	А	A	A
Плотность тока	$J$	A/м <sup>2</sup>	A/m <sup>2</sup>	A/m <sup>2</sup>
Электрическое сопротивление	$R$	Ом	$\Omega$	$m^2 \cdot кг / (A^2 \cdot c^3)$
Электрическая проводимость	$\sigma$	См	S	$A^2 \cdot c^3 / (m^2 \cdot кг)$
Удельное электрическое сопротивление	$\rho$	Ом $\cdot$ м	$\Omega \cdot m$	$m^3 \cdot кг / (A^2 \cdot c^3)$
Удельная электрическая проводимость	$\gamma, \sigma$	См/м	S/m	$A^2 \cdot c^3 / (m^3 \cdot кг)$
Подвижность ионов	$b$	м <sup>2</sup> /В $\cdot$ с	m <sup>2</sup> /(V $\cdot$ s)	$A \cdot c^2 / кг$
Напряженность магнитного поля	$H$	A/м	A/m	A/m
Магнитная постоянная	$\mu_0$	Гн/м	H/m	$m \cdot кг / (A^2 \cdot c^2)$
Абсолютная магнитная проницаемость	$\mu_a, \mu$	Гн/м	H/m	$m \cdot кг / (A^2 \cdot c^2)$
Относительная магнитная проницаемость	$\mu, \mu_r$	1	1	1
Магнитная индукция	$B$	Тл	T	$кг / (A \cdot c^2)$
Магнитный поток	$\Phi$	Вб	Wb	$m^2 \cdot кг / (A \cdot c^2)$

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Магнитный момент	$p_m$	$A \cdot m^2$	$A \cdot m^2$	$A \cdot m^2$
Вектор интенсивности намагничивания (намагниченность)	$M$	$A/m$	$A/m$	$A/m$
Индуктивность и взаимная индуктивность	$L$	Гн	Н	$m^2 \cdot kg/(A^2 \cdot c^2)$
Магнитная восприимчивость	$\kappa, \chi$	1	1	1
Магнитодвижущая сила	$F$	А	А	А
Магнитное сопротивление	$R_m$	$A/B\phi$	$A/Wb$	$A^2 \cdot c^2/(m^2 \cdot kg)$
Емкостное сопротивление	$X_C$	Ом	$\Omega$	$m^2 \cdot kg/(A^2 \cdot c^3)$
Индуктивное сопротивление	$X_L$	Ом	$\Omega$	$m^2 \cdot kg/(A^2 \cdot c^3)$
Импеданс, полное электрическое сопротивление	$Z$	Ом	$\Omega$	$m^2 \cdot kg/(A^2 \cdot c^3)$
Добротность	$Q$	1	1	1
Объемная плотность энергии электромагнитного поля	$w$	$Дж/м^3$	$J/m^3$	$kg/(m \cdot c^2)$
Вектор Пойнтинга	$I, S$	$Вт/м^2$	$W/m^2$	$kg/c^3$

### 5.7. Оптические единицы

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Сила света	$J$	кд	cd	кд
Световой поток	$\Phi$	лм	lm	кд · ср
Освещенность	$E$	лк	lx	кд · ср · м <sup>-2</sup>
Активность радиоактивного источника	$A$	Бк	Bq	c <sup>-1</sup>

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Спектральная объемная плотность энергии излучения (при данной длине волны)	$W_1$	Дж/м <sup>4</sup>	J/m <sup>4</sup>	кг/(м <sup>2</sup> · с <sup>2</sup> )
Мощность излучения, поток энергии излучения	$P$ , Ф	Вт	W	м <sup>2</sup> · кг/с <sup>3</sup>
Плотность потока энергии излучения	φ, ψ	Вт/м <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>	кг/с <sup>3</sup>
Энергетическая светимость	$R_e$	Вт/м <sup>2</sup>	W/m <sup>2</sup>	кг/с <sup>3</sup>
Спектральный коэффициент поглощения	$\alpha(\lambda)$	1	1	1
Спектральный коэффициент отражения	$\rho(\lambda)$	1	1	1
Спектральный коэффициент пропускания	$\tau(\lambda)$	1	1	1
Спектральный коэффициент энергетической яркости	$\beta(\lambda)$	1	1	1
Оптическая плотность	$D$	1	1	1
Натуральный (линейный) показатель ослабления	$\mu$ , $\mu_i$	м <sup>-1</sup>	m <sup>-1</sup>	м <sup>-1</sup>
Коэффициент поглощения	$\alpha$	м <sup>-1</sup>	m <sup>-1</sup>	м <sup>-1</sup>
Молярный показатель поглощения	$\varepsilon$	м <sup>2</sup> /моль	m <sup>2</sup> /mol	м <sup>2</sup> /моль
Абсолютный показатель преломления	$n$	1	1	1
Относительный показатель преломления	$n_{ij}$	1	1	1
Фокусное расстояние	$f$	м	m	м

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Оптическая сила линзы	$D$	дптр	D	$\text{м}^{-1}$
Угол поворота плоскости поляризации	$\alpha$	рад	rad	рад
Молярная оптическая вращательная способность	$\alpha_n$	$\frac{\text{рад} \cdot \text{м}^2}{\text{моль}}$	$\frac{\text{rad} \cdot \text{m}^2}{\text{mol}}$	$\frac{\text{рад} \cdot \text{м}^2}{\text{моль}}$
Удельная (массовая) оптическая вращательная способность раствора	$\alpha_m, [\alpha]$	$\text{рад} \cdot \text{м}^2/\text{кг}$	$\text{rad} \cdot \text{m}^2/\text{kg}$	$\text{рад} \cdot \text{м}^2/\text{кг}$

### 5.8. Единицы атомной и ядерной физики

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Атомный номер	$Z$	1	1	1
Число нейтронов	$N$	1	1	1
Массовое число, число нуклонов	$A$	1	1	1
Магнитный момент частицы или ядра	$\mu$	$\text{А} \cdot \text{м}^2$	$\text{А} \cdot \text{m}^2$	$\text{А} \cdot \text{м}^2$
Гиромагнитное отношение	$\gamma$	$\text{А} \cdot \text{м}^2/(\text{Дж} \cdot \text{с})$	$\text{А} \cdot \text{m}^2/(\text{J} \cdot \text{s})$	$\text{А} \cdot \text{с}/\text{кг}$
$g$ -фактор атома или электрона	$g$	1	1	1
$g$ -фактор ядра или ядерной частицы	$g$	1	1	1
Угловая частота Лармора	$\omega_L$	рад/с	rad/s	рад/с
Угловая частота прецессии	$\omega_N$	$\text{с}^{-1}$	$\text{s}^{-1}$	$\text{с}^{-1}$
Циклотронная угловая частота	$\omega_C$	рад/с	rad/s	рад/с

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Орбитальное квантовое число (спинового момента импульса)	$l, L$	1	1	1
Спиновое квантовое число (спинового момента импульса)	$s, S$	1	1	1
Спин	$S$	Дж · с	J · s	кг · м <sup>2</sup> /с
Квантовое число полного момента импульса	$j, J$	1	1	1
Квантовое число ядерного спина	$I$	1	1	1
Главное квантовое число	$n$	1	1	1
Магнитное квантовое число	$m, M$	1	1	1
Дефект массы	$\Delta m$	кг	kg	кг
Среднее время жизни (радионуклида)	$\tau$	с	s	с
Активность (радионуклида в источнике)	$A$	Бк	Bq	с <sup>-1</sup>
Постоянная радиоактивного распада (радионуклида)	$\lambda$	с <sup>-1</sup>	s <sup>-</sup>	с <sup>-1</sup>
Период полураспада радионуклида	$T_{1/2}$	с	s	с

### 5.9. Единицы ядерных реакций и ионизирующего излучения

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Сечение взаимодействия	$\sigma$	м <sup>2</sup>	m <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>
Линейный коэффициент ослабления	$\mu, \mu_l$	м <sup>-1</sup>	m <sup>-1</sup>	м <sup>-1</sup>

Величина	Символ	Обозначение единицы		Размерность в СИ
		рус.	межд.	
Массовый коэффициент ослабления	$\mu_m$	м <sup>2</sup> /кг	м <sup>2</sup> /kg	м <sup>2</sup> /кг
Молярный коэффициент ослабления	$\mu_c$	м <sup>2</sup> /моль	м <sup>2</sup> /mol	м <sup>2</sup> /моль
Атомный коэффициент ослабления	$\mu_a, \mu_{ат}$	м <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>	м <sup>2</sup>
Слой половинного ослабления	$d_{1/2}$	м	м	м
Средний линейный пробег частицы	$R, R_l$	м	м	м
Линейная плотность ионизации	$N_{и\ l}$	м <sup>-1</sup>	м <sup>-1</sup>	м <sup>-1</sup>
Средняя длина свободного пробега	$l, \lambda$	м	м	м
Экспозиционная доза	$D_{экс}$	Кл/кг	С/kg	А · с/кг
Мощность экспозиционной дозы	$P_{экс}$	Кл/(кг · с)	С/(kg · s)	А/кг
Поглощенная доза	$D_{пог}$	Гр	Gy	м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>
Мощность поглощенной дозы	$P_{пог}$	Гр/с	Gy/s	м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup>
Эквивалентная доза	$H$	Зв	Sv	м <sup>2</sup> /с <sup>2</sup>
Мощность эквивалентной дозы	$H$	Зв/с	Sv/s	м <sup>2</sup> /с <sup>3</sup>

## Приложение 5

## ТЕМПЕРАТУРНЫЕ ШКАЛЫ

## 1. Соотношения между единицами (градусами) разных шкал

Единица	К	°С	°F	°Rank	°R
Кельвин, К	1	1	1,8	1,8	0,8
Градус Цельсия, °С	1	1	1,8	1,8	0,8
Градус Фаренгейта, °F	0,556	0,556	1	1	0,445
Градус Ренкина, °Ra	0,556	0,556	1	1	0,445
Градус Реомюра, °R	1,25	1,25	2,25	2,25	1

## 2. Соотношения между значениями температуры в разных шкалах

Температура	Эквивалент по шкале	
	Цельсия	Кельвина
$X\text{ }^{\circ}\text{C}$ (шкала Цельсия)	$X\text{ }^{\circ}\text{C}$	$(X + 273,15)\text{ }^{\circ}\text{K}$
$X\text{ }^{\circ}\text{R}$ (шкала Реомюра)	$\frac{5}{4} X\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\left(\frac{5}{4} X + 273,15\right)\text{ }^{\circ}\text{K}$
$X\text{ }^{\circ}\text{F}$ (шкала Фаренгейта)	$\frac{5}{9}(X - 32)\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\left(\frac{5}{9} X + 255,38\right)\text{ }^{\circ}\text{K}$
$X\text{ }^{\circ}\text{Ra}$ (шкала Ренкина)	$\left(\frac{5}{9} X - 273,15\right)\text{ }^{\circ}\text{C}$	$\frac{5}{9} X\text{ }^{\circ}\text{K}$
$X\text{ K}$ (шкала Кельвина)	$(X - 273,15)\text{ }^{\circ}\text{C}$	$X\text{ }^{\circ}\text{K}$

## Приложение 6

### СВОДНАЯ ТАБЛИЦА ФИЗИЧЕСКИХ МЕТОДОВ АНАЛИЗА

№ п/п	Задачи, решаемые химиком-фармацевтом	Методы анализа									
		Спектроскопия	Спектроскопия КР	Спектроскопия ЯМР	Масс-спектроскопия	Рентгеноструктурный	Микроскопический	Поляриметрия	Рефрактометрия	Дериватография	Хроматография
1	Идентификация соединений и их составляющих (качественный анализ)		×		×	×				×	×
2	Количественный элементный и фазовый анализ	×	×			×				×	
3	Контроль состава вещества	×				×			×		×
4	Изучение кинетики химических реакций (механизмы превращения)	×		×	×					×	
5	Пространственная структура молекул и систем, стереохимия (исследование взаимодействия с окружающей средой)	×	×	×			×	×			



[illegible]

---

# КЛЮЧИ К ПРАКТИЧЕСКИМ И ТЕСТОВЫМ ЗАДАНИЯМ

## ОТВЕТЫ К ЗАДАЧАМ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**Глава 1.** 1.1.  $t_{1/2} = 4$  ч; 1.2.  $k_{el} = 9,6 \cdot 10^{-3} \text{ ч}^{-1}$ ; 1.3.  $m = 142$  мкг; 1.4.  $t_{1/2} = 1,7$  ч; 1.5.  $c_0 = 46$  мкг/л; 1.6.  $t = 12$  ч; 1.7.  $t = 7,4$  ч; 1.8.  $m = 106$  мкг; 1.9.  $c^* = 43,5$  мкг/л;  $M_H = 196$  мкг.

**Глава 2.** 2.1.  $v = 2,6$  м/с; 2.2.  $R = 0,4$  м; 2.3.  $a = 1,24$  м/с<sup>2</sup>; 2.4.  $F = 1,2$  Н; 2.5.  $E_k = 35$  мкДж; 2.6.  $F = 1,13$  пН; 2.7.  $x = 0,05 \cos(2\pi t + \pi/4)$  м; 2.8.  $F_{\max} = 18,5$  мкН; 2.9.  $E = 0,28$  мкДж; 2.10.  $t = 15$  с; 2.11.  $S = 7,1$  см; 2.12.  $a = 1$  м/с<sup>2</sup>; 2.13.  $\Delta\varphi = \frac{\pi}{4}$ ; 2.14.  $\lambda = 17$  мм; 2.15. 30 фон.

**Глава 3.** 3.1.  $t_1 = 215$  °С (работа мышцы не может быть описана на основании законов для цикла Карно); 3.2.  $Q = 294$  мДж; 3.3.  $m = 30,6$  кг; 3.4.  $N_{\text{пол}} = 15$  Вт; 3.5.  $N_{\text{общ}} = 0,4$  Вт; 3.6.  $a = 0,18$  Н;  $b = 13,6$  мм/с.

**Глава 4.** 4.1.  $n_{\text{кол}} = 57$ ; 4.2.  $N = 2,5 \cdot 10^{20}$ ; 4.3.  $\rho = 1,15$  кг/м<sup>3</sup>; 4.4.  $E_{\text{пост}} = 150$  Дж; 4.5.  $v_{\text{вер}} = 484$  м/с; 4.6.  $h = 5,5$  км; 4.7.  $C_{V\mu} = 20,8$  Дж/(моль · К); 4.8.  $C_{pm} = 278$  Дж/(кг · К); 4.9.  $Q = 3,4$  кДж; 4.10.  $A = 30$  Дж; 4.11. В 4 раза; 4.12. Уменьшилась в 2,6 раза; 4.13.  $\eta = 15$  %; 4.14. Увеличится в 2 раза; 4.15.  $\Delta S = 245$  Дж/К; 4.16.  $\Delta G = -1326,19$  кДж/моль; 4.17.  $p_1 = 9,7$  МПа;  $p_2 = 6,0$  МПа; 4.18. На 24 атм; 4.19.  $\lambda = 7,0 \cdot 10^{-8}$  м; 4.20.  $t = -50$  °С; 4.21.  $v = 6,95 \cdot 10^9$  с<sup>-1</sup>; 4.22.  $\eta = 2,1 \cdot 10^{-5}$  Вт/(м · К); 4.23.  $Q = 104$  кДж.

**Глава 5.** 5.1.  $S = 5$  кДж/К; 5.2.  $\Delta G^0 = 5,7$  кДж/моль; 5.3.  $K = 421$ ; 5.4.  $\Delta G^0 = 69,2$  кДж/моль; 5.5.  $c_o/c_i = 3,2$ ; 5.6.  $\Delta\varphi = -88$  мВ; 5.7.  $\Delta\mu = -12,7$  кДж/моль; 5.8.  $\beta = 225$  кВт; 5.9.  $\eta = 42$  %.

**Глава 6.** 6.1.  $W_{H_2O} = 2,6$  кДж/моль;  $W_{\text{белок}} = 58,3$  кДж/моль;  $W_{\text{тепл}} \sim 2,5$  кДж/моль; 6.2.  $A = 0,866$  кДж/моль; 6.3.  $w_{\text{дд}} = -72$  кДж/моль; 6.4.  $\alpha = 1,57 \cdot 10^{30}$  м<sup>3</sup>; 6.5.  $\Delta G = 11,9$  кДж/моль; 6.6.  $t = 18$  °С; 6.7.  $U_1 = 0$ ;  $U_2 = 6,25$  кДж/моль;  $U_3 = 12,5$  кДж/моль;  $U_4 = 0$ ;  $U_5 = 12,5$  кДж/моль;  $U_6 = 0$ ;  $U_7 = 0$ ; 6.8.  $r_0 = 0,32$  нм; 6.9.  $E_{\min} = -0,98$  кДж; 6.10.  $\Delta S = 550$  Дж/К; 6.11.  $E_{\text{акт}} = 53,6$  кДж/моль; 6.12.  $v_{\max} = 26,8$  ммоль/мин;  $[S'] = 3,7$  ммоль/л; 6.13.  $v_k = 8,88$  ммоль/мин;  $v_H = 9,43$  ммоль/мин; 6.14.  $4 \cdot 10^{-4}$ .

**Глава 7.** 7.1.  $v = 11,1$  м/с; 7.2.  $v = 7,4$  мм/с; 7.3.  $d_{\min} = 13,8$  см; 7.4.  $d = 0,5$  см; 7.5.  $m = 40$  мГ; 7.6.  $\Delta p = 464$  Па; 7.7.  $\sigma = 58$  мН/м; 7.8.  $\Delta l = 0,2$  мм; 7.9.  $F = 2,3$  кН; 7.10.  $I_Q = 78$  кВт/м<sup>2</sup>; 7.11.  $c = 128$  Дж/(кг · К).

**Глава 8.** 8.1.  $\eta = 4,9$  мПа · с; 8.2.  $Q_{\max} = 9,0$  л/мин; 8.3. В 900 раз; 8.4.  $X = 2,5 \cdot 10^5$  Па · с · м<sup>-3</sup>; 8.5.  $v = 2,3$  мм/ч; 8.6.  $N = 16$ ; 8.7.  $E = 1,2$  МПа.

**Глава 9.** 9.1.  $E = 2,34$  кВ/м; 9.2.  $A = 1,01$  мкДж;  $W_1 = 1,35$  мкДж;  $W_2 = 0,34$  мкДж; 9.3.  $v = 5,9 \cdot 10^6$  м/с; 9.4.  $A = 54$  нДж; 9.5.  $F = 46$  мН;  $W = 67,5$  мкДж; 9.6.  $q = 40$  нКл; 9.7.  $j = 20$  МА/м<sup>2</sup>; 9.8.  $U_r = 6,3$  В;  $U_R = 2,7$  В;  $\eta = 30$  %; 9.9.  $t = 3,2$  мин; 9.10.  $m = 5$  г; 9.11.  $H = 1,2$  кА/м; 9.12.  $\Phi = 23,6$  мкВб; 9.13.  $H = 149$  А/м; 9.14.  $P_m = 3,1$  мА · м<sup>2</sup>; 9.15.  $T = 3,55$  нс; 9.16.  $A = 0,57$  мДж; 9.17.  $\Delta t = 0,2$  мс; 9.18.  $B = 12,5$  мТл; 9.19.  $t = 2,3$  мс; 9.20.  $w = 40$  Дж/м<sup>3</sup>; 9.21.  $I = 1,1$  А;  $U_R = 110$  В;  $U_L = 190$  В; 9.22.  $C = 92$  мкФ; 9.23.  $\varphi = 60^\circ$ ;  $P = 121$  Вт; 9.24.  $C = 280$  пФ; 9.25.  $T = 3,33$  мс;  $L = 0,2$  Гн;  $q = 26,5 \sin 600\pi t$  мкКл;  $U = 18,9 \sin 600\pi t$  В; 9.26.  $W_{\text{эл}} = 19,7 \sin^2 10^3 \pi t$  мкДж;  $W_{\text{м}} = 19,7 \cos^2 10^3 \pi t$  мкДж;  $W_{\text{эл0}} = W_{\text{м0}} = 19,7$  мкДж; 9.27.  $R = 4$  Ом;  $C = 1,27$  мкФ;  $\omega_0 = 1,25 \cdot 10^3$  рад/с; 9.28.  $\varepsilon = 26$ .

**Глава 10.** 10.1.  $\varepsilon = 1,9$ ; 10.2.  $\tau = 17$  нс;  $\nu = 5,9 \cdot 10^7$  с<sup>-1</sup>; 10.3.  $S_{\text{кв}} = 0,2$  мкм; 10.4.  $A = 0,65$  нм<sup>2</sup>; 10.5.  $N = 1,68 \cdot 10^4$ ; 10.6.  $t_{\text{пл}} = 15,5$  °С.

**Глава 11.** 11.1.  $K = 156$ ; 11.2.  $D = 5,7 \cdot 10^{-9}$  м<sup>2</sup>/с; 11.3.  $P = 0,33$  м/с; 11.4.  $\Delta G = 11,4$  кДж/моль; 11.5.  $\varphi = 61,5$  мВ; 11.6.  $c_1/c_2 = 100$ ; 11.7. В 7 раз; 11.8.  $\Delta \varphi = -1,7$  мВ; 11.9. В 95 раз; 11.10.  $\Delta G = 85,8$  кДж/моль; 11.11.  $\Delta G = 23,7$  кДж/моль.

**Глава 12.** 12.1.  $\Delta \varphi = -100$  мВ; 12.2.  $t = 37$  °С; 12.3. В 30 раз; 12.4.  $\Delta \varphi = 50$  мВ; 12.5.  $\Delta \varphi_{\text{К}} = -101$  мВ;  $\Delta \varphi_{\text{Na}} = +59$  мВ;  $\Delta \varphi_{\text{П}} = -66$  мВ;  $\Delta \varphi_{\text{ПД}} = +52$  мВ; 12.6.  $N = 6,25 \cdot 10^4$ ; 12.7.  $g_{\text{Na}} = 18,5$  пСм; 12.8.  $\Delta \varphi = 18$  мВ; 12.9.  $x = 125$  мкм; 12.10.  $\lambda = 43$  мкм; 12.11.  $D = 405$  мкм.

**Глава 13.** 13.1.  $\text{tg } i = n$ ; 13.2.  $v = 2,26 \cdot 10^8$  м/с; 13.3.  $R = -6,25$  см; 13.4. а)  $\Gamma = 10$ ; б)  $\Gamma = 4$ ; в)  $\Gamma = 16$ ; 13.5. а) 0; б)  $\frac{\pi}{2}$ ; в)  $\pi$ ; г)  $\frac{3}{2}\pi$ ; д)  $\pi$ ; 13.6. а)  $\lambda_1 = 400$  нм;  $\lambda_2 = 500$  нм;  $\lambda_3 = 667$  нм; б)  $\lambda_1 = 444$  нм;  $\lambda_2 = 571$  нм; 13.7.  $\lambda = 640$  нм, что соответствует красному цвету; 13.8. В голубой ( $\lambda = 493$  нм); 13.9.  $\lambda = 490$  нм; 13.10.  $N = 100$ ; 13.11.  $\lambda = 651$  нм; 13.12.  $l = 0,28$  см; 13.13.  $\alpha = 230$  м<sup>-1</sup>; 13.14.  $T = 0,75$ ;  $D = 0,125$ ; 13.15. В 16 раз; 13.16. В 8 раз; 13.17.  $n = 2,4$ ; 13.18.  $\alpha_2 = 66^\circ 15'$ ; 13.19.  $\Phi = 3,9 \cdot 10^{14}$  Вт; 13.20.  $T = 602$  К; 13.21. а)  $\lambda_{\text{max}} = 9,90$  мкм (ИК-область); б)  $\lambda_{\text{max}} = 1,16$  мкм (ИК-область); в)  $\lambda_{\text{max}} = 500$  нм (видимый диапазон); г)  $\lambda_{\text{max}} = 290$  пм (рентгеновское излучение).

**Глава 14.** 14.1.  $\Delta D = 5$  дптр; 14.2.  $d = 10$  см; 14.3.  $D = 1,5$  дптр; 14.4.  $H = 7$  см; 14.5.  $N = 63$ ; 14.6.  $k = 0,5$ .

**Глава 15.** 15.1.  $r_2 = 213$  пм; 15.2.  $v = 7,27 \cdot 10^5$  м/с;  $\omega = 1,52 \cdot 10^{15}$  рад/с; 15.3.  $\nu = 6,53 \cdot 10^{15}$  Гц;  $T = 1,53 \cdot 10^{-16}$  с; 15.4.  $E_{\text{кин}} = 13,5$  эВ;  $E_{\text{пот}} = -27,0$  эВ;  $E = -13,5$  эВ; 15.5.  $U_{\text{и}} = 13,5$  эВ; 15.6.  $\Delta m = 0,10806$  а. е. м; 15.7.  $\Delta E = 4,53$  пДж; 15.8.  $Z = 0$ ;  $A = 1$ , частица нейтрон ( ${}_0^1n$ ); 15.9.  $Z = 19$ ;  $A = 41$ , элемент калий ( ${}_{19}^{41}\text{K}$ ); 15.10. 3  $\alpha$ - и 2  $\beta^-$ -частицы; 15.11.  $\lambda = 2,11 \cdot 10^{-6}$  с $^{-1}$ ; 15.12. 58 %; 15.13.  $\lambda = 6,97 \cdot 10^{-2}$  сут $^{-1}$ ;  $T_{1/2} = 10$  сут; 15.14.  $a = 1,67 \cdot 10^{11}$  Бк; 15.15.  $m = 0,175$  мг; 15.16.  $\lambda_0 = 197$  нм; 15.17.  $A = 2,5$  эВ; 15.18.  $E = 3,98 \cdot 10^{-19}$  Дж;  $E = 4,42 \cdot 10^{-36}$  кг;  $E = 1,33 \cdot 10^{-27}$  кг·м/с; 15.19.  $U = 1,5$  МВ; 15.20. а)  $\lambda_{\text{Б}} = 7,29 \cdot 10^{-6}$  м; б)  $\lambda_{\text{Б}} = 6,63 \cdot 10^{-33}$  м; 15.21.  $U = 6$  В; 15.22.  $\Delta E = 6,6 \cdot 10^{-8}$  эВ; 15.23.  $E_{1s} = -13,5$  эВ;  $E_{2p} = -3,4$  эВ;  $E_{3d} = -1,5$  эВ;  $L_{1s} = 0$ ;  $L_{2p} = 1,5 \cdot 10^{-34}$  м $^2$ ·кг/с;  $L_{3d} = 2,6 \cdot 10^{-34}$  м $^2$ ·кг/с; 15.24.  $\lambda_0 = 24,86$  пм; 15.25.  $\mu_m = 6,66$  м $^2$ /кг.

**Глава 16.** 16.1.  $\Phi = 4$  %; 16.2.  $\nu = 0,5$  моль; 16.3.  $V = 3,38$  мл; 16.4.  $N = 5,8 \cdot 10^{12}$ ; 16.5.  $E_{\text{полг}} = 21$  Дж; 16.6.  $P_{\text{полг}} = 7,3 \cdot 10^{-2}$  рад/с.

**Глава 17.** 17.1.  $\Delta\Phi = 0,25$  мВ; 17.2.  $\gamma = 30^\circ$ ; 17.3.  $P = 5,4$  мВт; 17.4. На 0,65 %; 17.5.  $\lambda_{\text{max}} = 9,57$  мкм; 17.6. На  $\Delta\lambda_{\text{max}} = 30$  нм в сторону более коротких волн.

**Глава 18.** 18.1.  $\varepsilon = 38$  М $^{-1}$ ·см $^{-1}$ ; 18.2.  $c = 0,083$  М; 18.3.  $\nu = 1,14 \cdot 10^6$  м/с; 18.4.  $q/m = 22$  МКл/кг; 18.5.  $l = 147$  пм; 18.6.  $d = 240$  пм; 18.7.  $z_1 = 0,30$  мкм;  $z_2 = 0,20$  мкм; 18.8.  $z = 0,194$  нм; 18.9.  $c = 0,052$  г/см $^3$ ; 18.10.  $c_2 = 6,67$  %; 18.11.  $R = 1,29 \cdot 10^{-5}$  м $^3$ /моль.

## ОТВЕТЫ К ВОПРОСАМ ТЕСТОВОГО КОНТРОЛЯ

**Глава 1.** 1.1. д; 1.2. д; 1.3. б; 1.4. г; 1.5. б; 1.6. в; 1.7. а; 1.8. г; 1.9. д; 1.10. г; 1.11. в; 1.12. б.

**Глава 2.** 2.1. б; 2.2. в; 2.3. д; 2.4. б; 2.5. д; 2.6. а; 2.7. д; 2.8. д; 2.9. г; 2.10. г; 2.11. а; 2.12. в; 2.13. д; 2.14. г; 2.15. в.

**Глава 3.** 3.1. г; 3.2. в; 3.3. а; 3.4. б; 3.5. а; 3.6. д; 3.7. г.

**Глава 4.** 4.1. б; 4.2. г; 4.3. д; 4.4. а; 4.5. г; 4.6. б; 4.7. г; 4.8. г; 4.9. б; 4.10. г; 4.11. б; 4.12. а; 4.13. б; 4.14. в; 4.15. д; 4.16. а; 4.17. б; 4.18. б; 4.19. в.

**Глава 5.** 5.1. в; 5.2. а, г; 5.3. д; 5.4. а; 5.5. в; 5.6. б; 5.7. в; 5.8. д; 5.9. б; 5.10. в.

**Глава 6.** 6.1. в; 6.2. г; 6.3. г; 6.4. а; 6.5. д; 6.6. б; 6.7. а; 6.8. б; 6.9. г; 6.10. д; 6.11. б; 6.12. г; 6.13. а.

**Глава 7.** 7.1. г; 7.2. б; 7.3. в; 7.4. г; 7.5. в; 7.6. а; 7.7. а; 7.8. г; 7.9. д; 7.10. а; 7.11. г; 7.12. б.

**Глава 8.** 8.1. б; 8.2. а; 8.3. а; 8.4. в; 8.5. г; 8.6. г; 8.7. в; 8.8. а; 8.9. в; 8.10. г; 8.11. а; 8.12. д; 8.13. б; 8.14. б; 8.15. а.

**Глава 9.** 9.1. г; 9.2. а; 9.3. б; 9.4. г; 9.5. д; 9.6. а; 9.7. д; 9.8. б; 9.9. в; 9.10. г; 9.11. б; 9.12. г; 9.13. а; 9.14. б; 9.15. г; 9.16. а; 9.17. б; 9.18. г; 9.19. б; 9.20. г; 9.21. г; 9.22. в; 9.23. г; 9.24. в; 9.25. б; 9.26. д; 9.27. б; 9.28. б; 9.29. а; 9.30. б.

**Глава 10.** 10.1. в; 10.2. г; 10.3. в; 10.4. а; 10.5. б; 10.6. г; 10.7. в; 10.8. г; 10.9. а; 10.10. б; 10.11. б; 10.12. а.

**Глава 11.** 11.1. д; 11.2. а; 11.3. г; 11.4. а; 11.5. г; 11.6. б; 11.7. в; 11.8. г; 11.9. д; 11.10. б; 11.11. б; 11.12. в.

**Глава 12.** 12.1. в; 12.2. г; 12.3. г; 12.4. б; 12.5. а; 12.6. а; 12.7. б; 12.8. д; 12.9. д; 12.10. в.

**Глава 13.** 13.1. г; 13.2. д; 13.3. а; 13.4. г; 13.5. г; 13.6. в; 13.7. а; 13.8. в; 13.9. д; 13.10. а; 13.11. г; 13.12. г; 13.13. в; 13.14. в; 13.15. г; 13.16. д; 13.17. а; 13.18. г; 13.19. б; 13.20. г.

**Глава 14.** 14.1. в; 14.2. д; 14.3. а; 14.4. а; 14.5. д; 14.6. б; 14.7. в; 14.8. г; 14.9. а; 14.10. б; 14.11. б; 14.12. б.

**Глава 15.** 15.1. б; 15.2. б; 15.3. в; 15.4. в; 15.5. б; 15.6. г; 15.7. д; 15.8. д; 15.9. б; 15.10. г; 15.11. б; 15.12. в; 15.13. г; 15.14. а; 15.15. б; 15.16. г; 15.17. г; 15.18. д; 15.19. а; 15.20. д.

**Глава 16.** 16.1. г; 16.2. а; 16.3. б; 16.4. в; 16.5. б; 16.6. д; 16.7. а; 16.8. в; 16.9. д; 16.10. а; 16.11. б; 16.12. в; 16.13. г; 16.14. в.

**Глава 17.** 17.1. г; 17.2. в; 17.3. г; 17.4. б; 17.5. а; 17.6. д.

**Глава 18.** 18.1. а; 18.2. г; 18.3. в; 18.4. д; 18.5. б; 18.6. в; 18.7. г; 18.8. б; 18.9. д; 18.10. б; 18.11. в; 18.12. в; 18.13. а; 18.14. г; 18.15. б; 18.16. г; 18.17. в; 18.18. г; 18.19. а; 18.20. в.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Абрагам А.* Ядерный магнетизм / Пер. с англ.— М.: Изд. иностр. лит., 1963.— 471 с.
- Ахиезер А. И.* Общая физика. Электрические и магнитные явления: Справ. пособие.— К.: Наук. думка, 1981.— 471 с.
- Бабилев Ф. В., Андроник И. Я.* Полиморфизм лекарственных веществ / Под ред. А. И. Тенцовой.— Кишинев: Штиинца, 1981.— 239 с.
- Белая М. Л., Левадный В. Г.* Молекулярная структура воды.— М.: Знание, 1987.— 64 с.— (Новое в жизни, науке, технике.— Сер. «Физика»; № 11).
- Березов Т. Т., Коровкин Б. Ф.* Биологическая химия: Учебник для вузов.— М: Медицина, 2002.— 704 с.
- Биофизика* / Под общ. ред. П. Г. Костюка.— К.: Вища шк. Головное изд-во, 1988.— 504 с.
- Биофизика* / Под ред. В. Ф. Антонова.— М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 1999.— 288 с.
- Боковой А. А., Финкельштейн Э. Б., Херувимов А. Н.* Законы электромагнетизма.— М.: Наука, 1970.— 348 с.
- Бранд Дж., Эглинтон Г.* Применение спектроскопии в органической химии / Пер. с англ.; Под ред. Ю. Н. Шейнкера.— М.: Мир, 1967.— 279 с.
- Браун Д., Флойд А., Снейсберн М.* Спектроскопия органических веществ / Пер. с англ.— М.: Мир, 1992.— 303 с.
- Вилков Л. В., Пентин Ю. А.* Физические методы исследования в химии: Структурные методы и оптическая спектроскопия.— М.: Мир, 2003.— 683 с.
- Владимиров Ю. А., Потапенко А. Я.* Физико-химические основы фотобиологических процессов.— М.: Высш. шк., 1989.— 199 с.
- Владимиров Ю. А., Рошункин Д. И., Потапенко А. Я., Деев А. И.* Биофизика.— М.: Медицина, 1983.— 272 с.
- Волобуев А. Н.* Биофизика.— Самара: «Самар. дом печати», 1999.— 168 с.
- Волькенштейн В. С.* Сборник задач по общему курсу физики.— М.: Наука, 1990.— 397 с.
- Волькенштейн М. В.* Биофизика.— М.: Наука, 1990.— 397 с.
- Горбачук Т. Т.* Збірник задач.— К.: Вища шк., 1993.— 265 с.
- Гороновский И. Т., Назаренко Ю. П., Некряч Е. Ф.* Краткий справочник по химии / Под общ. ред. А. Т. Пилипенко.— К.: Наук. думка, 1987.— 829 с.
- Гофман Ю. В.* Законы, формулы, задачи физики.— К.: Наук. думка, 1977.— 574 с.
- Граселли Дж., Снейвилл М., Балкин Б.* Применение спектроскопии КР в химии / Пер. с англ.; Под ред. Ю. А. Пентина.— М.: Мир, 1984.— 216 с.
- Губанов Н. И., Утепбергенов А. А.* Медицинская биофизика.— М.: Медицина, 1978.— 336 с.

- Губський Ю. І. Біологічна хімія.— Київ—Тернопіль: Укрмедкнига, 2000.— 508 с.
- Давид Р. Введение в биофизику.— М.: Мир, 1982.— 208 с.
- Де Дюв К. Путешествие в мир живой клетки: Пер. с англ./Предисл. Ю. А. Овчинникова.— М.: Мир, 1987.— 256 с.
- Деньгуб В. М., Смирнов В. Г. Единицы величин: Словарь-справочник.— М.: Из-во стандартов, 1990.— 256 с.
- Державна Фармакопея України / Державне підприємство «Науково-експертний фармакопейний центр».— 1-е вид.— Харків: РІПЕГ, 2001.— 556 с.
- Доис Э. Количественные проблемы биохимии: Пер. с англ.— М.: Мир, 1983.— 376 с.
- Драго Р. Физические методы в химии / Пер. с англ.; Под ред. О. А. Реутова.— М.: Мир, 1981.— Т. 1 — 422 с.; Т. 2 — 456 с.
- Дубровский И. М., Егоров Б. В., Рябошанка К. П. Справочник по физике.— К.: Наук. думка, 1986.— 556 с.
- Енохович А. С. Справочник по физике и технике: Учеб. пособ. для учащихся.— М.: Просвещение, 1989.— 223 с.
- Жубанов Б. А., Агашкин О. В., Рухина Л. Б. Атлас инфракрасных спектров некоторых гетероциклических мономеров и полимеров.— Алма-Ата: Наука, 1984.— 150 с.
- Задачи по физике: Учеб. пособие / И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова и др.; Под ред. О. Я. Савченко.— М.: Наука, 1988.— 416 с.
- Зима В. Л. Біофізика: Збірник задач: Навч. посіб.— К.: Вища шк., 2001.— 124 с.
- Иванов-Муромский К. А. Электромагнитная биология.— К.: Наук. думка, 1977.— 156 с.
- Исмаилов Э. Ш. Биофизическое действие СВЧ-излучений.— М.: Энергоатомиздат, 1987.— 144 с.
- Калинюк Т. Г., Лопушанський Я. Й. Фізичні величини у фармації.— Львів: Ліга-Прес, 2002.— 248 с.
- Каро К., Педли Т., Шротер Р., Сид У. Механика кровообращения: Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.— 624 с.
- Китайгородский А. И., Зоркий П. М., Бельский В. К. Строение органического вещества.— М.: Наука, 1982.— 510 с.
- Козел С. М., Раиба Э. И., Славатинский С. А. Сборник задач по физике.— М.: Наука, 1987.— 301 с.
- Кольрауш К. Спектры комбинационного рассеяния / Пер. с нем.— М.: Изд. иностр. лит., 1952.— 466 с.
- Корнилов М. Ю., Кутров Г. П. Ядерный магнитный резонанс в химии.— К.: Вища шк., 1985.— 199 с.
- Красовский И. В., Вайль Е. И., Безуглый В. Д. Физическая и коллоидная химия.— К.: Вища школа, 1983.— 352 с.
- Кузмичев В. Е. Законы и формулы физики: Справочник.— К.: Наук. думка, 1989.— 861 с.
- Кухлинг Х. Справочник по физике / Пер. с нем.; Под ред. Е. М. Лейкина.— М.: Мир, 1985.— 519 с.
- Левтов В. А., Регирер С. А., Шадрин Н. Х. Реология крови.— М.: Медицина, 1982.— 272 с.
- Ленский А. С. Введение в бионеорганическую и биофизическую химию: Учеб. пособие для студентов медицинских вузов.— М.: Высш. шк., 1989.— 256 с.
- Леше А. Физика молекул / Пер. с нем.; Под ред. П. Г. Крюкова.— М.: Мир, 1987.— 228 с.
- Люминесцентный анализ / Под ред. М. А. Константиновой-Шлезингер.— М.: Физматгиз, 1961.— 399 с.
- Молчанов Г. Ультразвук в фармации.— М.: Медицина, 1980.— 176 с.
- Позднякова В. Т. Микроскопический анализ фармацевтических препаратов и ядов.— М.: Медицина, 1986.
- Поль Р. В. Оптика и атомная физика / Пер. с нем.; Под ред. Н. А. Толстого.— М.: Наука, 1966.— 552 с.

- Ремизов А. Н. Медицинская и биологическая физика.— М.: Высш. шк., 1999.— 616 с.
- Ремизов А. Н., Исакова Н. Х., Максина А. Г. Сборник задач по медицинской и биологической физике.— М.: Высш. шк., 1987.— 159 с.
- Рис Э., Стернберг М. От клеток к атомам: иллюстрированное введение в молекулярную биологию: Пер. с англ.— М.: Мир, 1988.— 144 с.
- Россель Жан. Общая физика / Пер. с англ.; Под ред. К. П. Яковлева.— М.: Мир, 1964.— 506 с.
- Рубин А. Б. Биофизика. В 2-х кн.— М.: Высш. шк., 1987.— 622 с.
- Русев В. Ф., Мищенко С. В., Пронина Н. В. Медицинская физика (сборник вопросов и задач).— Полтава: Изд-во «АСМИ», 2001.— 172 с.
- Рыбин И. А. Лекции по биофизике.— Свердловск: Изд-во Уральского университета, 1990.— 240 с.
- Савельев И. В. Сборник вопросов и задач по общей физике.— М.: Астрель; АСТ, 2001.— 319 с.
- Сердюк А. М. Взаимодействие организма с электромагнитными полями как с фактором окружающей среды.— К.: Наук. думка, 1977.— 228 с.
- Серова Ф. Г., Янкина А. А. Сборник задач по термодинамике.— М.: Просвещение, 1976.— 160 с.
- Сильверстейн Р., Басслер Г., Моррил Т. Спектрометрическая идентификация органических соединений / Пер. с англ. под ред. А. М. Мальцева.— М.: Мир, 1977.— 590 с.
- Смит А. Л. Прикладная ИК-спектроскопия: Основы, техника аналитического применения / Пер. с англ. Б. Н. Тарасевича; Под ред. А. А. Мальцева.— М.: Мир, 1982.— 327 с.
- Соловьев В. И., Фирсов А. А., Филов В. А. Фармакокинетика.— М.: Медицина, 1980.— 423 с.
- Спектроскопия комбинационного рассеяния света в газах и жидкостях.— Под ред. А. Вебера / Пер. с англ.— М.: Мир, 1982.— 373 с.
- Тарьян И. Физика для врачей и биологов.— Budapest: Akadémiai kiadó, 1969.— 600 с.
- Трофимова Т. И., Павлова З. Г. Сборник задач по курсу физики с решениями: Учеб. пособие для вузов.— 2-е изд., испр.— М.: Высш. шк., 2001.— 591 с.: ил.
- Установление структуры органических соединений физическими и химическими методами / Пер. с англ.; Под ред. А. Вайсберга.— М.: Химия, 1967. Т. 11: Кн. 1.— 531 с.; Кн. 2.— 800 с.— (Методы органической химии, серия монографий)
- Фано У., Фано Л. Физика атомов и молекул / Пер. с англ.; Под ред. Л. И. Пономарева. М.: Наука, 1980.— 656 с.
- Фейнман Р., Лейтон Р., Сэнкс М. Задачи и упражнения с ответами и решениями.— М.: Мир, 1978.— 656 с.
- Фен Дж. Машины, энергия, энтропия: Пер. с англ.— М.: Мир, 1986.— 336 с.
- Физиология человека / Под ред. Г. И. Косицкого.— М.: Медицина, 1985.— 544 с.
- Физиология человека. В 3-х томах / Под ред. Р. Шмидта и Г. Тевса.— М.: Мир, 1996.— 880 с.
- Физический энциклопедический словарь.— М.: Наука, 1984.— 944 с.
- Финеан Дж., Колман Р., Мичелл Р. Мембраны и их функции в клетке.— М.: Мир, 1977.— 200 с.
- Фриш С. Э. Оптические спектры атомов.— М.— Л.: Физматгиз, 1963.— 640 с.
- Хроматография: Практическое применение, методы.— В 2 т. / Пер. с англ.; Под ред. Э. Хефтмана.— М.: Мир, 1986.— Т. 1.— 366 с.; Т. 2.— 422 с.
- Чертов А. Г., Воробьев А. А. Задачник по физике: Учеб. пособие.— 4-е изд. перераб. и доп.— М.: Высш. шк., 1981.— 496 с.
- Швикин Б. Н., Мускинова Н. А. Физическая электроника в задачах.— М.: Наука, 1987.— 255 с.



## АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

### А

Аберрация  
— сферическая 448  
— хроматическая 448  
Адаптация 156  
Аккомодация 447  
Активность  
— оптическая 171, 432  
Активность изотопа 469  
Актин 73  
Альфа-распад 466  
Альфа-спираль 176  
Аминокислоты  
— ароматические 513  
Амплитуда  
— колебания 52  
— волны 52  
Амфифильность 332  
Анализ  
— дифференциально-термический 594  
— колориметрический 548  
— микроскопический  
Микроскопия 581  
— рентгено-структурный  
РСА 575  
— спектральный 546  
— — молекулярный 547  
— термический 593—600  
— фотоколориметрический 548  
— Фурье 240  
— хроматографический. См. хроматография  
Анализатор 430, 591  
Анизотропия 211  
Аннигиляция пары 488

Антиоксиданты 511, 542  
Антипорт 374  
Астигматизм 447

### Б

Бактериородопсин 334, 372  
Белки  
— интегральные 333  
— мембранные 333  
— периферические 334  
Белки 174, 175, 177  
Бета-распад 466  
Бета-форма белка 176  
Биолюминесценция 540  
Близорукость 448  
БЛМ. См. мембраны плоские билипидные

### В

Валиномицин 367  
Вектор  
— Пойнтинга 318, 502  
Вектор Умова 63  
Векторкардиография 538  
Вероятность  
— термодинамическая 108  
Вес  
— статистический 108  
Вещества  
— неполярные 266  
— оптически активные 589  
— поверхностно-активные 208  
— полярные 266  
— хиральные 589  
Взаимодействие  
— материальное 96  
— механическое 95

- света с веществом 419
  - тепловое 96
  - Взаимодействия**
    - ван-дер-ваальсовы 163
    - гидрофобные 164, 170
    - диполь-дипольные 163
    - дисперсионные 164
    - индукционные 164
    - ион-дипольные 163
    - ориентационные 163
    - сильные 162
    - слабые 162
  - Вискозиметрия** 205
  - Вода, структура** 164—170
  - Волна**
    - линейно поляризованная 427
    - плоскополяризованная 589
    - пульсовая 240
  - Волны** 60
    - де Бройля 461, 475
    - звуковые 63
    - когерентные 403
    - плоские 60
    - поперечные 60
    - продольные 60
    - упругие 60
    - электромагнитные 315
  - Восприимчивость**
    - диэлектрическая 267
    - магнитная 289
  - Вращение**
    - внутреннее 171
    - оптическое 591
    - плоскости поляризации 432
    - тела 37
    - удельное 432, 503
  - Время**
    - достижения максимальной концентрации препарата 26
    - жизни изотопа 469
    - оседлой жизни 169
    - оседлой жизни молекулы 335
    - релаксации 200
  - Выход квантовый**
    - — хемилюминесценции 542
    - — реакции 517
  - Вязкость** 127
    - динамическая 205
    - жидкостей 203
    - кинематическая 206
    - крови 229
- Г**
- Газ**
    - идеальный 84
  - Гамма-излучение** 467, 486, 527
  - Гель-состояние** 340
  - Гематокрит** 225
  - Гемодинамика** 225
  - Гемореология** 225
  - Генератор эквивалентный** 534
  - Гидродинамика** 202
  - Гидростатика** 201
  - Гидрофильность** 169
  - Гидрофобность** 169
  - Гиперметропия** 448
  - Гиперполяризация** 383
    - следовая 385
  - Гипохромизм** 192
  - Глаз**
    - приведенный редуцированный 446
  - Глаз** 443
  - Гликокаликс** 334
  - Глобула белковая** 178
  - Глубина**
    - проникновения излучения 505
  - Гош-конформация** 174, 340
  - Грамицидин** 369
  - Граница**
    - рентгеновского спектра коротковолновая 484
    - фотоэффекта красная 474
  - Громкость** 65
- Д**
- Давление**
    - гидростатическое 203, 230
    - диастолическое 237
    - динамическое 203
    - жидкости 201
    - звуковое 64
    - избыточное 209
    - крови 230
    - насыщенного пара 121
    - онкотическое 242
    - парциальное 92
    - систолическое 238
    - статическое 203
    - трансмуральное 230
  - Дальнозоркость** 448
    - старческая 447
  - Дальтонизм** 454

## Движение

- аperiodическое 57
- вращательное
- — равномерное 40
- — равнопеременное 40
- колебательное 52
- неperiodическое 57
- нестационарное 202
- поступательное 37
- прямолинейное
- — равномерное 39
- — равнопеременное 39
- стационарное 202

## Декремент

- затухания 56
- — логарифмический 56, 309

## Денатурация 192

## Деполаризация 383, 384

- следовая 385

## Дериватограф 596

## Дериватография 596

## Дефект массы 465

## Деформация

- упругая 213

## Диаграмма состояния 123

## Диамантики 289

## Диаметр

- эффективный 126

## Диапазон

- видимый 396, 503, 509
- сверхвысокочастотный 502
- ультравысокочастотный 502

## Диастола 235

## Динамика 36

## Диполь

- электрический 261

## Дисперсия

- оптического вращения 589
- света
- — аномальная 421
- — нормальная 421
- Дисперсия 419, 421
- угловая 417

## Диссипация энергии 47, 147

## Дифрактограмма 579

## Дифракция 411, 475

- света 411—419
- — на щели 412
- — Фраунгофера 412
- — Френеля 412
- электронов 475

## Диффузия 126, 347

- латеральная 335
- облегченная 347, 363

## Диэлектрики 266

## Длина

- волны 60
- пути оптическая 397, 404
- свободного пробега молекул
- средняя 126
- тубуса микроскопа оптическая 403

## ДНК. См. кислоты нуклеиновые

## Добротность контура 309

## Доза

- нагрузочная 29
- облучения 504
- поглощенная 512, 520
- эквивалентная 521
- экспозиционная 520

## Дозиметрия 504, 520, 521

## ДТА. См. анализ дифференциально-термический

## ДТГ. См. термогравиметрия деривативная

## Дуализм корпускулярно-волновой 396

**Е**

## Единица массы атомная 465

**Ж**

## Жесткость 53

## Жидкости

- неньютоновские 204
- — ньютоновские 204

## Жидкость

- идеальная 202

## Жидкость перегретая 116

**З**

## Закон

- Ампера 280
- Архимеда 201
- Бера 423
- Био—Савара—Лапласа 283
- Бойля—Мариотта 101
- Брюстера 431
- Бугера—Ламберта 423
- Бугера—Ламберта—Бера 424, 517, 548
- Вебера 450

- Вебера—Фехнера 65, 450
- — психофизический 450
- Вина второй 436, 472
- «все или ничего» 387
- Гей — Люссак 85, 100
- Гесса 142
- Гука 52, 213, 554
- Дальтона 92
- движения 37
- Джоуля—Ленца 274, 501
- Дюлонга и Пти 215
- Кирхгофа 434
- Кулона 256
- Ленца 292
- Малюса 429, 591
- Мозли 485
- Ньютона второй 43, 50
- Ньютона первый 43, 50
- Ньютона третий 43, 50
- обратимости световых лучей 400
- Ома 272
- — в дифференциальной форме 273
- — для полной цепи 272
- — для участка цепи 272
- отражения 398
- Паскаля 201
- поглощения. См. закон Бугера—Ламберта
- полного тока 280, 314
- преломления. См. закон Снеллиуса
- радиоактивного распада 468
- Рихмана 215
- Рэлея 426
- Рэлея—Джинса 472
- смещения Вина 436, 472
- Снеллиуса 398
- сохранения
- — заряда 255
- — импульса 45
- — энергии 47, 96, 203
- Стефана—Больцмана 435, 471
- термодинамики второй 105, 111, 143
- термодинамики первый 96, 111, 141
- Фарадея 292, 313
- Фарадея второй 275
- Фарадея первый 275
- Шарля 86, 100
- электромагнитной индукции 292

- Заряд
  - индуцированный 263
  - пробный 257
  - точечный 256
  - удельный 283
  - электрический 255
- Заряды
  - связанные 269
- Захват электронный 467
- Звук 63
- Значение
  - напряжения действующее эффективное 304
  - собственное 478
  - тока действующее (эффективное) 304
- Зоны Френеля 413
- Зрение
  - скотопическое 449
  - фотопическое 449
- Зрение 443

## И

- Излучение
  - видимое 509, 609
  - высокочастотное 611
  - звуковое 614
  - инфракрасное 509, 610
  - ионизирующее 486, 522, 523
  - оптическое 396, 509
  - радиочастотное 502, 503, 505
  - рентгеновское 483, 485, 486, 492, 527, 576
  - — первичное 485
  - — тормозное 484
  - сверхвысокочастотное 611, 629
  - тепловое 432, 433, 435
  - ультравысокочастотное 502
  - ультразвуковое 614
  - ультрафиолетовое 509, 511, 513, 515
  - характеристическое 577
  - ядерное 486
- Изобара 100
- Изображение
  - действительное 402
  - мнимое 402
- Изоклины 13
  - главные 13
- Изомерия 174
  - поворотная 174

Изомеры  
— оптические 589  
Изотерма 101  
— реального газа 114  
Изотопы 465  
— радиоактивные 466  
Изохора 100  
ИК-спектр. *См.* спектр инфракрасный  
ИК-спектроскопия. *См.* спектроскопия инфракрасная  
Импеданс 302  
— биологических тканей 500  
Импульс 44  
— нервный 380, 389  
— фотона 474  
Ингибирование  
— конкурентное 183, 364  
— неконкурентное 185  
Индуктивность 293  
— взаимная 297  
Индукция  
— взаимная 297  
— магнитная 277  
— электрическая 258  
— — в диэлектрике 268  
— электромагнитная 291  
Интенсивность 62  
— волны 405  
— — электромагнитной 319  
Интерференция 403—410  
— в оптическом клине 409  
— в отраженном свете 408  
— в проходящем свете 407  
— в тонких пленках 406  
— на двух щелях 405  
Интерферометр 410  
Инфузия препарата 28  
Ионизация 462  
Ионофор 366  
Испарение 121  
Источник тока 271

**Й**

Йодопсин 453

**К**

Камера  
— фармакокинетическая 19  
Каналы мембранные 359—362, 396  
Картина  
— дифракционная 411  
— интерференционная 405  
Карты стерические 175

Катализ ферментативный 180  
Катастрофа ультрафиолетовая 470  
Квант 461  
Кинематика 36  
Кислоты нуклеиновые 187, 513  
Кластеры 167, 198  
Клиренс 23  
Колебания  
— гармонические 52  
— механические 52  
— — вынужденные 57  
— — затухающие 55  
— — незатухающие 52  
— нормальные 87, 557  
— электромагнитные 304—311  
Кольца Ньютона 409  
Комплементарность 188  
Конверсия интеркомбинационная 508  
Конденсатор электрический 264  
— плоский 259, 265  
Конденсация 121  
Константа  
— Михаэлиса 182, 185  
— равновесия 179  
— скорости реакции 180  
— химического равновесия 146  
— элиминации 20  
Контакт термодинамический 95  
Контур  
— колебательный 304  
— — идеальный 304  
— пробный 276  
Контурные связанные 297  
Конфигурация 174  
Конформация 174  
Кооперативность 179, 186  
Коэффициент  
— взаимности Онзагера 152  
— внутреннего трения 127  
— вязкого трения 55  
— вязкости 127  
— диффузии 126  
— — газов 126  
— — жидкостей 200  
— затухания 56, 505  
— качества излучения 521  
— мощности 304  
— отражения 433  
— поверхностного натяжения 207, 208  
— поглощения 433

- — линейный 485
  - — массовый 485
  - полезного действия 105, 154
  - — — мышцы 79
  - проницаемости 350
  - пропускания 424, 433
  - Пуассона 213
  - распределения 349
  - расширения температурный 214
  - серости 435
  - сжимаемости 199
  - сопротивления 55
  - — температурный 273
  - теплопроводности 128
  - фильтрации 243
  - КПД. См. коэффициент полезного действия
  - Красная граница фотоэффекта. См. граница фотоэффекта красная
  - Кривая
    - интегральная 11
    - испарения 123
    - нагревания 122
    - плавления 123
    - сублимации 123
  - Кристаллизация 122
  - Кристаллы
    - атомные 211
    - жидкие 201
    - ионные 211
    - металлические 212
    - молекулярные 212
  - Критерий
    - Клаузиуса 143
    - Рэлея 417
    - устойчивости стационарного состояния 156
    - эволюции классической термодинамики 143
    - эволюции открытой системы 156
  - КРС. См. спектроскопия комбинационного рассеяния света
- Л**
- Лиганды 186
  - Линза 400
    - рассеивающая 401
    - собирающая 401
    - собирающая 400
  - Линии
    - магнитной индукции 279
    - электрического поля 257
  - Линии тока 202
  - Лиофильность 208
  - Лиофобность 209
  - Липиды 332
  - Липосомы 337
  - Лупа 402
  - Лучепреломление двойное 590
  - Люминесценция 540
- М**
- Магнетики 286
  - Магнетон
    - Бора 288
    - ядерный 288
  - Магнитография 539
  - Магнитокардиография 538
  - Магнитоэнцефалография 538
  - Макромолекулы 162
  - Макросостояние системы 110
  - Масс-спектр 569
  - Масс-спектрограф 571
  - Масс-спектрометр 570, 571
  - Масс-спектроскопия 569
  - Масса 41
    - фотона 474
  - Машина
    - тепловая 102, 103
    - холодильная 103
  - Маятник
    - математический 53
    - пружинный 53
    - физический 54
  - Мембраны
    - базальные 336
    - биологические 331
    - искусственные 336, 337
    - плоские билипидные (БЛМ) 338
  - Мениск 209
  - Метод
    - Вестергрена 234
    - изоклин 18
    - Лайнуивера—Берка 183, 365
    - Пуанкаре—Ляпунова 14
    - фиксации потенциала 386
  - Методы
    - спектрофотометрические 547
  - Микрокалориметрия 339, 343
  - Микроскопия 581
    - люминесцентная 585
    - световая 582
    - электронная 586
  - Микросостояние системы 109

Миозин 73  
Миопия 448  
Модель  
— атома Бора 459, 461, 463  
— атома планетарная 460  
— Вольтерра 7  
— жидкой воды 167  
— индуцированного соответствия 181  
— ключ — замок 181  
— Кошланда 181  
— мерцающих кластеров 167  
— Самойлова 167  
— Уотсона—Крика 188  
— фармакокинетическая 19  
— — многокамерная 28  
— — непрерывного введения препарата 30  
— — однокамерная 23  
— — с подкамерой 26  
— Фишера 181  
— Франка  
Пульс 235, 237, 239  
— «хищник—жертва» 7  
— — в иммунологии 12  
— черного тела 434  
Модификаторы ферментативных реакций 183  
Модуль  
— сдвига 213  
— упругости 240  
— Юнга 213, 240  
Момент  
— вращающий 48, 263, 277  
— дипольный 262  
— импульса 48  
— — орбитальный 286  
— инерции 48  
— магнитный 277, 562  
— — орбитальный 286  
— — спиновый 287  
— — электрона 288  
— механический  
— — ядра 563  
— пары сил 213  
— силы 43, 48  
Монослой. См. слой мономолекулярный  
Мостики солевые 163  
Мощность 45, 50  
— мышцы 79  
— поглощенной дозы 521  
— удельная 505

— экспозиционной дозы 520  
— электрического тока 274

**Н**

Намагниченность 289  
Напряжение 264, 271  
Напряженность  
— магнитного поля 280  
— электрического поля 256  
Насос  
— кальциевый 371  
— натрий-калиевый 369, 383  
— электрогенный 371  
Насыщение  
— магнитное 291  
Натяжение поверхностное 207, 209  
Нейтрон 465  
Неравенство  
— Клаузиуса 107  
Николь 591  
Номер атомный 465  
Нуклон 465

**О**

Оболочка  
— гидратная 169  
— электронная 483  
Объектив 402  
Объем  
— кажущийся 22  
— крови ударный 238  
Окисление липидов перекисное 541  
Окуляр 402  
Опсин 451  
Оптика 396  
— волновая 403, 405, 407, 409  
— волоконная 399  
— геометрическая 397, 399, 401  
— просветленная 409  
— физическая 396  
Опыт  
— Юнга 405  
Ось  
— линзы побочная 401  
— оптическая главная 400  
Ответ локальный 387  
Отношение  
— гироманнитное 287, 562  
— — спиновое 287  
— Доннана 356  
— магнитомеханическое 287  
Отражение света 398  
— — полное внутреннее 399

## П

- Падение напряжения 271
- Пар
  - насыщенный 121
  - пересыщенный 116
- Пара сил 43
- Парамагнетики 290
- Параметр
  - кооперативности 180
- Параметры
  - термодинамические 95
- Передача
  - энергии линейная 489
- Перемещение 37
  - среднее квадратичное 335
- Перенос
  - диффузный 242
  - конвективный 242
  - транскапиллярный 241—249
  - эстафетный 367
- Переносчики 363
  - каналообразующие 369
  - подвижные 367
- Переходы
  - конформационные 177
  - спираль—клубок 179
  - фазовые 120
- Переходы
  - фазовые в мембранах 339, 341, 343
  - электронные 507, 510
  - — безызлучательные 508
  - — излучательные 507
- Период 40
  - колебаний 52, 56
  - — маятника 53
  - полувыведения препарата 23
  - полураспада 468
- Пигменты зрительные 449
- Пиноцитоз 348
- Плавнение 122
  - белка 179
  - нуклеиновых кислот 192
- Плоскость
  - главная оптической системы 445
  - поляризатора 428
  - поляризации 427
  - фазовая 11
- Плотность
  - ионизации линейная 489
  - оптическая 424, 549
  - потока 125
  - — теплового 216
  - тока 270
  - энергетической светимости спектральная 433, 469, 470
  - энергии
    - — излучения 502
  - — магнитного поля объемная 296
  - — объемная 62
  - — электрического поля объемная 265
  - — электромагнитного поля 318
- Поверхности
  - эквипотенциальные 261
- Поглощение света 422, 423
- Подвижность 275, 351
  - молекулярная 163
- Подоболочка электронная 483
- Показатель
  - адиабаты 101
  - ослабления 425
  - — натуральный 425
  - поглощения 423
  - — молярный 423, 548
  - — монохроматический 423
  - — натуральный 423
  - преломления
    - — абсолютный 397, 403
    - — относительный 398
    - — относительный 600
  - рассеяния 425
  - — натуральный 425
- Показатель преломления
  - абсолютный 316
- Поле
  - магнитное 276
  - силовое 46
  - сторонних сил 271
  - электрическое 256
- Полипептид 174
- Поляризатор 428, 591
- Поляризация 426, 427, 429, 431
  - деформационная 266
  - ионная 266, 504
  - ориентационная 266
  - света
    - — линейная 427
    - — при отражении 431
    - — при преломлении 431
    - — при рассеянии 432
    - — циркулярная (круговая) 427



- — эллиптическая 428
- электронная 266
- Поляризованность 267
- Поляризуемость 268
- Поляриметр 591
- Поляриметрия 588
- Порог
  - болевого ощущения 63
  - дифференциальный 450
  - слышимости 63
  - — стандартный 63
  - чувствительности абсолютный 450
  - чувствительности разностный 450
- Портрет
  - фазовый 11
  - — модели «хищник—жертва» 11, 18
- Поры мембранные 333
- Порядок
  - ближний 199
  - дальний 199
  - спектра 415
- Постоянная
  - Больцмана 88
  - Вина вторая 472
  - Вина первая 472
  - газовая универсальная 90, 99
  - длины нервного волокна 391
  - радиоактивного распада 468
  - Ридберга 463
  - Стефана — Больцмана 435, 471
  - экранирования 485, 565
- Постулаты Бора 461
- Потенциал 260
  - выхода 474
  - действия 383
  - Доннана 358
  - поздний рецепторный 453
  - покоя 72, 380
  - поля точечного заряда 261
  - ранний рецепторный 453
  - следовой 385
  - термодинамический 111
  - — Гиббса 111, 113
  - химический 146
  - электрохимический 146
- Поток 125, 349
  - жидкости 202
  - излучения 433
  - магнитной индукции 279
  - магнитный 279
  - — полный 293
  - напряженности электрического поля 257
  - обобщенный 151
  - тепловой 216
  - энергии 62
- Правила
  - Кирхгофа 274
  - Чаргоффа 188
- Правило
  - Ленца 292
  - смещения 467
- Предел
  - разрешения 418
  - — микроскопа 419
- Преломление света 398
- Призма Никола 591
- Принцип
  - Гюйгенса — Френеля 411
  - наименьшего действия 397
  - Паули 483
  - суперпозиции магнитных полей 279
  - суперпозиции электрических полей 257
- Проводимость 272
  - ионная 275
  - удельная 273
  - — электролитов 275
- Проницаемость
  - диэлектрическая абсолютная 256
  - диэлектрическая относительная 256
  - магнитная относительная 289
- Прооксиданты 542
- Протон 465
- Процесс
  - адиабатический 101
  - изобарический 99
  - изотермический 100
  - изохорический 100
  - круговой 102
  - необратимый 95
  - обратимый 95
  - релаксационный 564
  - сопрягающий 150
  - сопряженный 150
  - термодинамический 95
  - — квазистатический 95
- Процессы
  - линейные 151

- сопряженные 149—154
- фотобиологические 509

Псевдовектор 40

Пси-функция 477

Путь 38

## Р

Работа

- магнитного поля 282
- механическая 45, 50
- мышцы 79
- осмотическая 147
- расширения газа 96
- химическая 147
- электрическая 147
- электрического поля 260
- элементарная 97

Равновесие

- Доннана 357
- термодинамическое 95
- фильтрационно-реабсорбционное 243
- химическое 181

Радикалы свободные 513, 541

Радиоактивность 466

Радиопротекторы 526

Радиосенсибилизаторы 526

Радиус

- боровский 462

Радиус-вектор 37

Разность

- фаз 404
- хода волн 62
- — оптическая 404

Распад радиоактивный 466

Распределение

- Больцмана 94, 200, 563
- Максвелла 89

Рассеяние

- неупругое 558
- рэлеевское 558
- света 425
- упругое 558

Расстояние

- наилучшего видения 447
- наилучшего зрения 402
- фокусное 401, 444

Расширение

- тепловое 213

Рацемат 589

Реабсорбция в капиллярах 242, 243

Реактанс 302

Реакции

- перекисного окисления липидов 515

- сопряженные. См. процессы сопряженные

- темновые 509

- ферментативные 180

- фотосенсибилизированные 515

- фотохимические 509

- экзергонические 145

- эндергонические 145

Реверсия мембранного потенциала 384

Редупликация ДНК 189

Резонанс 58

- напряжений 302

- поглощения излучения 504

- протонный магнитный 566

- электронный парамагнитный 561

- ядерный магнитный 561

Релаксация

- поперечная 565

- продольная 565

- спин-решеточная 564

- спин-спиновая 565

Рентгеновское излучение См. излучение рентгеновское

Рентгенограмма 577

Реобазы 388

Реполаризация 385

Ретиналь 451, 510

Рефрактометрия 600

Решетка дифракционная 415

РНК. См. кислоты нуклеиновые

Родопсин 451

Ряды радиоактивные 468

## С

Самоиндукция 293

Сарколемма 72

Саркомер 75

Сателлиты 559

Свет 396

- естественный 427

- плоскополяризованный 427, 588

- поляризованный 426

- частично поляризованный 428

Светимость

- энергетическая 433

- — полная (интегральная) 434

Световод 399, 519

- волоконный 399

- СВЧ. См. диапазон сверхвысокочастотный
- СВЧ-радиометрия 540
- Связи
- водородные 164, 165
  - дисульфидные 177
  - ионные 163
  - ковалентные 162
  - пептидные 174
  - сильные 162
  - слабые 162
- Сдвиг
- батохромный 451
  - химический 565
- Сегнетоэлектрики 267
- Семейства радиоактивные 468
- Серии спектральные 464
- Сечение
- поглощения 517
  - — эффективное 424
- Сила 43
- Ампера 280
  - Архимеда 233
  - внутреннего трения 127
  - возвращающая 53
  - выталкивающая 201
  - Лоренца 282
  - обобщенная 151
  - оптическая 401, 445
  - поверхностного натяжения 207
  - подъемная 201
  - равнодействующая 43
  - Стокса 205, 233
  - тока 269
  - центробежная 47
  - центростремительная 47
  - электродвижущая 271
  - — индукции 291
- Силы
- квазиупругие 52
  - консервативные 46
  - упругие 52
- Симпорт 374
- Система
- грубая 14
  - закрытая 94
  - изолированная 94
  - открытая 94
  - отсчета 36
- Системы
- ремонтные 516
- Системы ремонтные 523
- Систола 235
- Скорость 38
- возрастания энтропии 148
  - колебаний 54
  - кровотока 229
  - линейная 38, 202
  - наиболее вероятная 90
  - объемная 202
  - оседания эритроцитов 233—235
  - проведения нервного импульса 390—391
  - пульсовой волны 240
  - сдвига 226
  - сопряженной реакции максимальной 150
  - средняя арифметическая 91
  - средняя квадратичная 91
  - транскапиллярного кровотока 248
  - угловая 39
  - фазовая 60
- Слой мономолекулярный 336
- Смачивание 208
- Смесь рацемическая 171
- Смещение 52
- Соединения
- гидрофильные 169
  - гидрофобные 169
  - неполярные 169
  - полярные 169
- Соленоид 285, 293
- Соотношение
- Майера 99
  - неопределенностей Гейзенберга 476
- Сопротивление
- активное 298
  - волновое 317
  - гидравлическое 204, 231
  - гидродинамическое 204
  - емкостное 300
  - индуктивное 299
  - критическое 310
  - полное 302
  - реактивное 302
  - тепловое 216
  - удельное 273
  - электрическое 272
- Сопряжение 149
- Состояние
- агрегатное 120
  - возбужденное 463

- газообразное 84
  - жидкокристаллическое 339
  - критическое 116
  - метастабильное 116
  - равновесия 14
  - равновесное 84, 141
  - рефракторное 387
  - стационарное 14, 141, 461
  - — неустойчивое 14
  - — устойчивое 14
  - твердокристаллическое 340
  - термодинамическое 95
  - Спайк 383
  - Спектр
    - атомный 463
    - вращательный 552
    - действия 512
    - излучения 434
    - — теплового 433
    - инфракрасный 548, 551
    - колебательный 552
    - комбинационного рассеяния 548
    - линейчатый 547
    - непрерывный 547
    - поглощения 512, 547, 549
    - полосатый 547
    - рентгеновский 484
    - — линейчатый 484
    - — сплошной 547
    - теплового излучения 539
    - флуоресценции 548
    - характеристический 485
    - электронный 548, 549
  - Спектрополяриметрия 590
  - Спектроскопия 546
    - инфракрасная (ИК) 551
    - комбинационного рассеяния света (КРС) 556
    - ультрафиолетовая (УФ) 546
    - ядерного магнитного резонанса (ЯМР) 561
  - Спектрофотометр 547, 549
  - Спин 287, 482, 562
  - Способность
    - излучения проникающая 489
    - разрешающая 417, 418
    - — глаза 583
    - — дифракционной решетки 417
    - — масс-спектрометра 573
    - — микроскопа 583
    - разрешающая линейная 446
    - разрешающая угловая 446
  - Среднее время жизни радиоактивного изотопа. См. время жизни изотопа
  - Степени свободы 86
    - вращательные 87
    - колебательные 87
    - поступательные 86
  - Степень
    - сопряжения 153
  - Стереоизомеры 170
    - левовращающие 171
    - правовращающие 171
  - Структура
    - белка спиральная 176
    - вторичная 170
    - — белка 176
    - — ДНК 189
    - первичная 170
    - — белка 174
    - — нуклеиновой кислоты 188
    - третичная 170
    - — белка 177
    - — ДНК 192
    - четвертичная 170
    - — белка 177
  - Стэкинг-взаимодействия 189
  - Сублимация 121
  - Субъединица макромолекулы 170
  - Субъединицы 177
- Т**
- ТГ. См. термогравиметрия
  - Тела
    - аморфные 123, 201, 211, 212
    - анизотропные 211
    - изотропные 211
    - кристаллические 211
  - Тело
    - абсолютно твердое 36
    - абсолютно черное 434
    - отсчета 36
    - пробное 276
    - рабочее 102
    - серое 434
  - Температура 84
    - кипения 121, 123
    - критическая 116
    - Кюри 291
    - плавления 122, 123
    - фазового перехода 124, 341
  - Теорема
    - Гаусса для магнитных полей 280

- Гюйгенса—Штейнера 49
  - Коши 11
  - о неразрывности струи 202
  - о равномерном распределении энергии 88
  - Пригожина 155
  - Теория
    - Аббе 582
    - зрения трехкомпонентная 454
    - мишени 516, 525
    - режущего цилиндра 227
    - Старлинга 242
    - «тепловой смерти» Вселенной 111
    - Френкеля 199
    - Эйнтховена 537
  - Тепловизоры 539
  - Теплоемкость 97
    - газов 97
    - жидкостей 200
    - молярная 89, 98, 215
    - при постоянном давлении 99
    - при постоянном объеме 98
    - твердых тел 214
    - удельная 98, 214
  - Теплообмен 215
  - Теплопроводность 128
    - твердых тел 215
  - Теплопродукция мышц 79
  - Теплота
    - испарения 121
    - парообразования 121
    - плавления 122
    - удельная 122
    - приведенная 106
    - фазового перехода 120
  - Термогравиметрия 595
    - деривативная 596
    - дифференциальная 596
  - Термодинамика
    - линейная 151, 153
    - равновесная 140
  - Термостат 94
  - Тест-ткань 22
  - Течение жидкости
    - ламинарное 205, 229
    - турбулентное 206, 229
  - Ток
    - импульсный 499, 502
    - индукционный 291
    - квазистационарный 297
    - конвекционный 269
    - переменный 297—304
    - полный 312
    - поляризации 313
    - постоянный 269—276
    - проводимости 269, 311
    - смещения 311
    - Фуко 291
    - электрический 269, 498, 499, 501
  - Точка
    - главная 445
    - изображающая 11
    - критическая 116, 123
    - особая 13
    - — седло 16
    - — узел 15
    - — фокус 16
    - — центр 16
    - представляющая 11
    - тройная 124
    - узловая 445
  - Точки
    - особые, виды 15
  - Траектория 38
    - фазовая 11
  - Транс-конформация 172, 340
  - Трансляция 191
  - Транспорт веществ 347
    - — активный 153, 347, 369
    - — вторично-активный 348
    - — индуцированный ионный 366
    - — обменный 368
    - — пассивный 347
    - — первично-активный 348
    - — с помощью переносчиков 363
    - — селективный 347
    - — сопряженный 348, 373
    - — через каналы 359
  - Тропониин 73
  - Трубка
    - рентгеновская 483, 577
  - Трубка тока 202
- У**
- Увеличение
    - линейное 402, 445
    - — линзы 402
    - — лупы 402
    - — микроскопа 403
    - — полезное 584
    - — угловое 445
  - УВЧ. См. диапазон ультравысокочастотный

## Угол

- апертурный 419
- Брюстера 431
- краевой 208
- отражения 398
- — предельный 399
- падения 398
- — предельный 399
- преломления 398
- — предельный 398

## Унипорт 373

## Уравнение

- адиабаты 101
- Бернулли 203
- Ван-дер-Ваальса 114
- волновое 315
- Гольдмана 354
- Гольдмана—Ходжкина—Катца 383
- дифференциальное
- — вынужденных колебаний 58, 310
- — затухающих колебаний 55, 308
- — незатухающих колебаний 53, 306
- изобары 100
- изоклины 13
- изотермы 101
- изохоры 100
- кинетической теории газов
- — основное 92
- Клапейрона—Клаузиуса 124
- Лайнуивера—Бэрка 365
- Менделеева—Клапейрона 93
- Михаэлиса—Ментен 182
- Нернста 356, 380
- Нернста—Планка электродиффузионное 353
- Ньютона 127
- плоской волны 61
- Пуазейля 233
- Пуассона 101
- состояния 95
- — идеального газа 93
- — реального газа 114
- телеграфное 390
- Теорелла 352
- термодинамики основное 111
- Уссинга — Теорелла 355
- Фика 126, 348
- Фурье 128
- Хилла 78
- Хилла (для гемоглобина) 187
- Шредингера 478

- Эйнштейна для внешнего фотоэффекта 474

## Уравнения

- Максвелла 313
- материальные 315
- Онзагера 151
- поля 314

## Уровень интенсивности звука 63

## Уровень энергии

- — возбужденный 507
- — невозбужденный 507
- — основной 507
- — синглетный 507
- — триплетный 508

## Ускорение 38

- колебаний 54
- нормальное 41
- полное 41
- тангенциальное 41
- угловое 40
- центростремительное 41

## Условие

- Вульфа—Брэгга 485, 486, 578
- квантования орбит 461
- нормировки 478
- стационарности 461
- частот 461

## Ф

## Фагоцитоз 348

## Фаза 52, 120

## Фактор надежности 391

## Фармакокинетика 19

## Ферменты. См. катализ ферментативный

## Ферромагнетики 290

## Фильтрация 242, 347

## «Флип-флоп»-переход 335

## Флуоресценция 541

## Фокус

- линзы главный 401

## Фон радиоактивный естественный 486

## Формула

- Аррениуса 180
- Бальмера 463
- барометрическая 93
- Больцмана 109, 359
- Борна 359
- Жюрена 210
- Лапласа 209
- Планка 469, 471, 507
- Пуазейля 204, 231
- Рэлея—Джинса 469

- Стокса 205
- Томсона 307
- тонкой линзы 401
- Фосфоресценция 508, 541
- Фотон 461, 473
  - рассеянный 487
- Фотопродукты 509
- Фотосенсибилизаторы 515
- Фотоэффект 472, 473, 487
  - внешний 473
  - внутренний 473
- Фронт волновой 60
- Функция 470
  - волновая 477
  - диссипативная 149, 153
  - распределения энергии излучения абсолютно черного тела 470, 434
  - собственная 478
  - состояния 95

**Х**

- Характеристика
  - вольтамперная 272
- Хемилюминесценция 541
- Хиральность 170
- Хроматограф 605
- Хроматография 603
  - колоночная 604
  - плоскослойная 604
- Хромофор 451, 551
- Хронаксия 388

**Ц**

- Центр
  - инерции 44
  - линзы оптический 401
  - масс 44
- Центрифугирование 47
- Цикл 102
  - Карно 103
  - обратный 103
  - прямой 102
- Цис-конформация 172, 342

**Ч**

- Частота
  - круговая собственная 56
  - резонансная 58, 302
  - собственная 307
  - угловая 52
  - циклическая 52

- циклотронная 282
- Число**
- волновое 61, 403
  - квантовое 482
  - — главное 480, 482
  - — магнитное 482, 263
  - — орбитальное 482
  - — спиновое 288, 482, 263
  - координационное 166, 168
  - массовое 465
  - Рейнольдса 206, 229

**Ш****Шкала**

- Кельвина 85
- Реомюра 84
- температурная 84
- термодинамическая 85
- Цельсия 85
- Фаренгейта 84

**Э**

- ЭДС. См. сила электродвижущая
- Эквивалент
  - химический 275
  - электрохимический 275
- Электрограмма 533
- Электродиализ 617
- Электродинамика 255
- Електроемкость 264
- Электрокардиография 533
- Электролиз 275
- Электролиты 275
- Электрон
  - комптоновский 487
  - отдачи 487
- Электроплазмолиз 617
- Электрореинография 533
- Электростатика 255
- Электрофорез 608
- Электроэнцефалография 533
- Элиминация 20
- Энергия
  - активации 180
  - внутренняя 96, 111, 113
  - — реального газа 117
  - вращательного движения 86
  - ионизации 463
  - кинетическая 45
  - — колебаний 55
  - — вращательного движения 50
  - — электрона в атоме 462

- колебательная 551
- колебательного движения 86
- магнитного поля 296, 305
- молекул средняя 86, 88
- полная
  - — колебаний 55
  - — электрона в атоме 462
- поступательного движения 86
- потенциальная 45
  - — диполя 263
  - — колебаний 55
  - — рамки с током 278
  - — системы зарядов 266
  - — электрона в атоме 462
- свободная Гельмгольца 111, 113
- свободная Гиббса 111, 113, 145
- свободная стандартная 146
- связи ядра 465
- электрического поля 265, 305
- Энтальпия 111, 113, 142
  - удельная плавления 343
- Энтропия 107, 143, 343

ЭПР. См. резонанс электронный парамагнитный

Эффект

- Джоуля—Томсона 117
- Доплера акустический 65
- капиллярный 209
- Комптона 487
- кооперативный 186
- образования пар 487
- ориентации связей 172
- тепловой 142, 227

Эффективность

- сопряжения 154

## Я

Явления переноса 125, 127

Ядро

- атомное 460
- отдачи 488

ЯМР. См. резонанс ядерный магнитный



## СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие .....	3
<b>Глава 1. Математическая биофизика .....</b>	<b>7</b>
§ 1.1. Модель «хищник—жертва» .....	7
§ 1.2. Метод изоклин .....	12
§ 1.3. Анализ модели «хищник—жертва» с помощью метода изоклин .....	16
§ 1.4. Особенности моделирования фармакокинетических процессов .....	18
§ 1.5. Однокамерная фармакокинетическая модель .....	19
§ 1.6. Фармакокинетическая модель с подкамерой .....	24
§ 1.7. Многокамерные фармакокинетические модели .....	26
§ 1.8. Модель непрерывного введения препарата .....	28
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	30
Задачи для самостоятельного решения .....	32
Вопросы тестового контроля .....	33
<b>Глава 2. Механика .....</b>	<b>36</b>
§ 2.1. Кинематика .....	36
§ 2.2. Динамика .....	41
§ 2.3. Механические колебания .....	52
§ 2.4. Упругие волны. Звук .....	60
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	66
Задачи для самостоятельного решения .....	68
Вопросы тестового контроля .....	69
<b>Глава 3. Биофизика мышечного сокращения .....</b>	<b>72</b>
§ 3.1. Строение мышечного волокна .....	72
§ 3.2. Сокращение мышцы .....	75
§ 3.3. Мощность и скорость сокращения мышцы .....	78
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	80
Задачи для самостоятельного решения .....	81
Вопросы тестового контроля .....	81
<b>Глава 4. Молекулярная физика и термодинамика .....</b>	<b>83</b>
§ 4.1. Основы молекулярно-кинетической теории газов .....	83
§ 4.2. Основные понятия термодинамики. Первый закон термодинамики ...	94

§ 4.3. Цикл Карно. Второй закон термодинамики .....	102
§ 4.4. Термодинамические потенциалы .....	111
§ 4.5. Реальные газы .....	113
§ 4.6. Фазовые переходы .....	120
§ 4.7. Явления переноса .....	125
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	129
Задачи для самостоятельного решения .....	134
Вопросы тестового контроля .....	136
<b>Глава 5. Термодинамика биологических процессов .....</b>	<b>140</b>
§ 5.1. Особенности биологических объектов как термодинамических систем .....	140
§ 5.2. Первый закон термодинамики в химии и биологии .....	141
§ 5.3. Второй закон термодинамики для открытых систем .....	143
§ 5.4. Изменение стандартной свободной энергии. Химический и электрохимический потенциалы .....	145
§ 5.5. Скорость возрастания энтропии и диссипативная функция .....	147
§ 5.6. Сопряженные процессы .....	149
§ 5.7. Положения линейной неравновесной термодинамики. Уравнения Онзагера .....	151
§ 5.8. Критерии достижения и устойчивости стационарных состояний .....	154
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	156
Задачи для самостоятельного решения .....	159
Вопросы тестового контроля .....	160
<b>Глава 6. Молекулярная биофизика .....</b>	<b>162</b>
§ 6.1. Виды взаимодействий в макромолекулах .....	162
§ 6.2. Структура воды и гидрофобные взаимодействия .....	164
§ 6.3. Структура и свойства биополимеров .....	170
§ 6.4. Структура белков .....	174
§ 6.5. Переходы спираль — клубок .....	178
§ 6.6. Ферментный катализ .....	180
§ 6.7. Биофизика нуклеиновых кислот .....	187
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	193
Задачи для самостоятельного решения .....	195
Вопросы тестового контроля .....	196
<b>Глава 7. Свойства жидкостей и твердых тел .....</b>	<b>198</b>
§ 7.1. Строение жидкостей .....	198
§ 7.2. Гидростатика и гидродинамика .....	201
§ 7.3. Поверхностные явления .....	207
§ 7.4. Строение твердых тел .....	211
§ 7.5. Свойства твердых тел .....	212
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	217
Задачи для самостоятельного решения .....	222
Вопросы тестового контроля .....	223

<b>Глава 8. Биофизика системы кровообращения</b>	225
§ 8.1. Реологические и гемодинамические характеристики крови	225
§ 8.2. Скорость оседания эритроцитов	233
§ 8.3. Модель Франка. Пульсовая волна	235
§ 8.4. Перенос веществ в капиллярной сети	241
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач	250
Задачи для самостоятельного решения	252
Вопросы тестового контроля	253
<b>Глава 9. Электромагнетизм</b>	255
§ 9.1. Электростатика	255
§ 9.2. Проводники в электрическом поле. Энергия электрического поля	263
§ 9.3. Диэлектрики в электрическом поле	266
§ 9.4. Постоянный электрический ток	269
§ 9.5. Магнитостатика	276
§ 9.6. Магнитные свойства тел	285
§ 9.7. Электромагнитная индукция	291
§ 9.8. Переменный ток	297
§ 9.9. Электромагнитные колебания	304
§ 9.10. Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны	311
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач	319
Задачи для самостоятельного решения	323
Вопросы тестового контроля	325
<b>Глава 10. Строение и свойства биологических мембран</b>	331
§ 10.1. Структура мембран	331
§ 10.2. Искусственные мембранные структуры	336
§ 10.3. Фазовые переходы в мембранах	339
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач	344
Задачи для самостоятельного решения	344
Вопросы тестового контроля	345
<b>Глава 11. Транспорт веществ через биологические мембраны</b>	347
§ 11.1. Пассивный транспорт нейтральных частиц	348
§ 11.2. Пассивный транспорт ионов	351
§ 11.3. Уравнение Нернста	355
§ 11.4. Равновесие Доннана	357
§ 11.5. Ионный транспорт через каналы	359
§ 11.6. Пассивный транспорт веществ с помощью переносчиков	363
§ 11.7. Индуцированный ионный транспорт	366
§ 11.8. Активный транспорт	369
§ 11.9. Вторично-активный транспорт	373
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач	375
Задачи для самостоятельного решения	376
Вопросы тестового контроля	377
<b>Глава 12. Биофизика нервного импульса</b>	380
§ 12.1. Потенциал покоя	380
§ 12.2. Потенциал действия	383

§ 12.3. Раздражение мембраны электрическим током .....	387
§ 12.4. Распространение возбуждения по нервному волокну .....	389
§ 12.5. Скорость проведения нервного импульса .....	390
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	392
Задачи для самостоятельного решения .....	393
Вопросы тестового контроля .....	394
<b>Глава 13. Оптика .....</b>	<b>396</b>
§ 13.1. Геометрическая оптика .....	397
§ 13.2. Интерференция света .....	403
§ 13.3. Дифракция света .....	411
§ 13.4. Дисперсия света .....	419
§ 13.5. Поглощение света .....	422
§ 13.6. Рассеяние света .....	425
§ 13.7. Поляризация света .....	426
§ 13.8. Тепловое излучение .....	432
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	436
Задачи для самостоятельного решения .....	438
Вопросы тестового контроля .....	439
<b>Глава 14. Биофизика зрения .....</b>	<b>443</b>
§ 14.1. Оптическая система глаза человека .....	443
§ 14.2. Молекулярный механизм зрения .....	449
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	454
Задачи для самостоятельного решения .....	457
Вопросы тестового контроля .....	457
<b>Глава 15. Атомная физика и квантовая механика .....</b>	<b>459</b>
§ 15.1. Строение атома по теории Бора .....	459
§ 15.2. Ядерные реакции. Радиоактивность .....	465
§ 15.3. Формула Планка .....	469
§ 15.4. Фотоэффект. Корпускулярные свойства света .....	472
§ 15.5. Волновые свойства частиц. Соотношение неопределенностей .....	474
§ 15.6. Волновая функция. Уравнение Шредингера .....	477
§ 15.7. Квантовые числа. Принцип Паули .....	482
§ 15.8. Рентгеновское излучение .....	483
§ 15.9. Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом .....	486
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	489
Задачи для самостоятельного решения .....	493
Вопросы тестового контроля .....	494
<b>Глава 16. Действие физических факторов на биологические объекты .....</b>	<b>498</b>
§ 16.1. Воздействие электрического тока на живой организм .....	498
§ 16.2. Механизм биологического действия электромагнитных волн радиочастотного диапазона .....	502
§ 16.3. Электронные переходы в атомах и молекулах .....	507
§ 16.4. Воздействие излучения оптического диапазона на биологические объекты .....	509

§ 16.5. Воздействие ультрафиолетового излучения на биологические молекулы .....	511
§ 16.6. Теория мишени .....	516
§ 16.7. Оптическое излучение в медицине .....	518
§ 16.8. Дозы ионизирующих излучений .....	520
§ 16.9. Воздействие ионизирующего излучения на организм .....	522
§ 16.10. Количественная оценка радиоповреждений .....	524
§ 16.11. Модификация радиобиологических эффектов .....	526
§ 16.12. Ионизирующее излучение в медицине .....	527
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	529
Задачи для самостоятельного решения .....	530
Вопросы тестового контроля .....	530
<b>Глава 17. Собственные физические поля человека .....</b>	<b>533</b>
§ 17.1. Электрические и магнитные поля человека. Физические основы электрокардиографии .....	533
§ 17.2. Тепловое излучение .....	539
§ 17.3. Биолюминесценция .....	540
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	543
Задачи для самостоятельного решения .....	544
Вопросы тестового контроля .....	545
<b>Глава 18. Физические методы анализа лекарственных средств .....</b>	<b>546</b>
§ 18.1. Спектральный анализ. Спектроскопия в видимой и ультрафиолетовой области .....	546
§ 18.2. Инфракрасная спектроскопия .....	551
§ 18.3. Спектроскопия комбинационного рассеяния света .....	556
§ 18.4. Спектроскопия ядерного магнитного резонанса .....	561
§ 18.5. Масс-спектрометрия .....	569
§ 18.6. Рентгеноструктурный анализ .....	575
§ 18.7. Микроскопический анализ .....	581
§ 18.8. Поляриметрия .....	588
§ 18.9. Термический анализ .....	593
§ 18.10. Рефрактометрия .....	600
§ 18.11. Хроматография .....	603
§ 18.12. Физические методы в производстве лекарственных средств .....	608
<i>Практические и тестовые задания</i>	
Примеры решения задач .....	622
Задачи для самостоятельного решения .....	625
Вопросы тестового контроля .....	626
<b>Приложения .....</b>	<b>630</b>
<b>Приложение 1. Краткие сведения по высшей математике .....</b>	<b>630</b>
1. Комплексные числа .....	630
2. Пределы .....	631
3. Производные .....	633
4. Исследование функций .....	636
5. Дифференциалы .....	638
6. Дифференциалы в приближенных вычислениях .....	639
7. Частные производные и дифференциалы. Полный дифференциал ...	640

8. Градиент функции .....	641
9. Неопределенный интеграл .....	641
10. Определенный интеграл .....	643
11. Криволинейный интеграл .....	645
12. Теорема о среднем .....	646
13. Дифференциальные уравнения .....	647
14. Ряды .....	652
15. Скалярное и векторное произведения векторов .....	653
Приложение 2. Латинский алфавит .....	655
Приложение 3. Греческий алфавит .....	655
Приложение 4. Единицы измерения и размерности физических величин .....	657
1. Основные единицы СИ .....	657
2. Дополнительные единицы СИ .....	657
3. Внесистемные единицы, их связь с единицами системы СИ .....	657
4. Производные единицы СИ, имеющие собственные наименования ..	658
5. Единицы измерения и размерности основных величин в системе СИ .....	660
Приложение 5. Температурные шкалы .....	671
1. Соотношения между единицами (градусами) разных шкал .....	671
2. Соотношения между значениями температуры в разных шкалах .....	672
Приложение 6. Сводная таблица физических методов анализа .....	672
Ключи к практическим и тестовым заданиям .....	674
Ответы к задачам для самостоятельного решения .....	674
Ответы к вопросам тестового контроля .....	676
Список литературы .....	678
Алфавитный указатель .....	681

Навчальне видання

**ТІМАНЮК Володимир Олександрович**  
**ЖИВОТОВА Олена Миколаївна**

## **БІОФІЗИКА**

Підручник для студентів  
вищих навчальних закладів

*Російською мовою*

Відповідальна за випуск *Тетяна Озацька*  
Редактор *Ірина Коновалова*  
Художній редактор *Яків Ярешко*  
Технічний редактор *Михайло Теплицький*  
Коректор *Лора Мокроусова*

Підписано до друку 20.11.2003.  
Формат 60×90/16. Папір офсетний. Гарнітура Times ET. Друк офсетний.  
Ум. друк. арк. 44,37. Ум. фарбовідб. 45,50. Обл.-вид. арк. 53,21.  
Наклад 3000 пр. Зам. № 874.

Видавництво Національного фармацевтичного університету.  
61002, Харків, вул. Пушкінська, 53.  
Свідоцтво серії ДК № 33 від 04.04.2000.

ТОВ «Золоті сторінки».  
61145, Харків, вул. Космічна, 26.  
Свідоцтво серії ДК № 276 від 12.12.2000.

Редакційно-видавничу та додрукарську підготовку виконано  
Харківським державним редакційно-видавничим підприємством «Оригінал».  
61022, Харків, пл. Свободи, 5, Держпром, 6-й під'їзд, 6-й поверх.  
Тел.: (0572) 43-41-07, 43-31-51.  
Свідоцтво серії ДК № 584 від 04.09.2001.

**Тіманюк В. О., Животова О. М.**  
Т41 Біофізика: Підруч. для студ. вищ. навч. закл.— Х.: Вид-во  
НФаУ; Золоті сторінки, 2003.— 704 с.: іл.— Рос. мова.  
ISBN 966-615-190-1.  
ISBN 966-8032-78-0.

До підручника включено теоретичний матеріал, приклади розв'язування типових задач, задачі для самостійного розв'язування і запитання для тестового контролю для всіх розділів курсу «Біофізики». Особлива увага звернена на зв'язок біофізики з фармацевтичними і медичними науками.

Призначений для студентів фармацевтичних та медичних вищих навчальних закладів.

**ББК 28.901я73**  
**УДК 577.3(075.8)**