ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

ПОГРЕШНОСТИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Учебное пособие

Санкт-Петербург
2006

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

КАФЕДРА КОМПЬЮТЕРНОЙ ТЕПЛОФИЗИКИ
И ЭНЕРГОФИЗИЧЕСКОГО МОНИТОРИНГА

А.И. ПОХОДУН

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ

ПОГРЕШНОСТИ И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

ИТМО
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГ
2006

Походун А.И. Экспериментальные методы исследований. Погрешности и неопределенности измерений. Учебное пособие. СПб: СПбГУ ИТМО, 2006. 112 с.

Ввиду усиления процесса международной интеграции в экономике, науке и промышленности остро стоит вопрос гармонизации отечественной нормативной документации с международными документами, в том числе в области метрологии.

В настоящем пособии изложен современный подход к оцениванию неопределенностей измерений, а также основные элементы документа «Руководство по выражению неопределенности измерений», разработанного ведущими международными метрологическими организациями. Этот документ приобрел статус неформального международного стандарта. Существует некоторое противоречие между заложенными в нем принципами и системой отечественных стандартов, касающихся погрешностей результатов измерений.

В пособии изложены, также основные положения отечественного нормативного документа, устанавливающего соответствие между двумя формами представления результатов измерений и их сравнительный анализ. Приведены примеры расчета неопределенностей измерений.

Для подготовки дипломированных специалистов по направлению 140000 - «Энергетика, энергетическое машиностроение и электроника», специальность 140402 – «Теплофизика», и бакалавров по направлению 140400 - "Техническая физика".

Рецензенты:

профессор кафедры физики Санкт-Петербургского государственного университета низкотемпературных и пищевых технологий, доктор технических наук, Заслуженный деятель науки РФ Платунов Евгений Степанович;

директор Санкт-Петербургского филиала Академии стандартизации и сертификации, кандидат технических наук Синяков Александр Игнатьевич.

Одобрено к изданию на заседании кафедры КТФ и ЭМ 17 сентября 2006 г. и на заседании методической комиссии инженерно-физического факультета 25 сентября 2006 г.

С О Д Е Р Ж А Н И Е

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время усилился процесс экономической и научной интеграции международного сообщества. Важным элементом этого процесса является гармонизация стандартов и других нормативных документов, в том числе в области метрологии, с целью устранения барьеров в торговом, промышленном, научном и культурном сотрудничестве.

В 1993 году под эгидой семи международных организаций:

- Международного бюро мер и весов,
- Международной электрической комиссии,
- Международной организации по стандартизации,
- Международной организации законодательной метрологии,
- Международного союза по чистой и прикладной химии,
- Международного союза по чистой и прикладной физике,
- Международной федерации клинической химии

был издан документ «Руководство по выражению неопределенности измерения». Целью документа являлось следующее:

- обеспечить полную информацию по составлению отчетов о неопределенностях измерений;
- предоставить основу для международного сличения результатов измерений;
- предоставить универсальный метод для выражения и оценивания неопределенности результата измерения, применимый ко всем видам измерений и всем типам данных, используемых при измерениях.

Величина, непосредственно используемая для выражения неопределенности измерения, должна быть внутренне согласующейся, то есть должна непосредственно выводиться из компонентов, составляющих ее, а также независимой от того, как эти компоненты группируются. Кроме того, должна существовать возможность непосредственного использования неопределенности, оцененной для одного результата, как составляющей при оценивании неопределенности другого измерения, в котором используется первый результат.

Принципы этого Руководства предназначены для использования в широком спектре измерений, включая те, которые требуются для:

поддержания контроля качества и обеспечение качества в процессе производства;

согласованности законов и регулирующих актов;

проведения фундаментальных и прикладных исследований и разработок в науке и технике;

эталонов и приборов для калибровки и испытаний по всей национальной системе измерений для обеспечения единства измерений и связи с национальными эталонами;

разработки, поддержание и сличения международных и национальных эталонов единиц физических величин, включая стандартные образцы веществ и материалов.

Руководство приобрело статус неформального международного стандарта.

Учитывая тот факт, что Россия активно участвует в процессе интеграции международного сообщества, остро стоит вопрос о гармонизации отечественных стандартов, в том числе в области метрологии, с международными нормативными документами.

Однако, отечественные нормативные документы практически не используют в понятия «неопределенность измерения» и «характеристики погрешности». Достаточно упомянуть стандарты и технические условия на общие технические требования к средствам измерений, на методы поверки, методики выполнения измерений, методы испытаний, стандарты Государственной системы обеспечения единства измерений и др.

Таким образом, существует противоречие между Руководством и системой отечественных нормативных документов.

Среди возникающих вопросов можно выделить следующие:

- насколько совпадает отечественная нормативная база с Руководством и в чем заключается несовпадение;

- каковы достоинства того и другого;

- стоит ли брать Руководство в качестве основы для переработки существующей отечественной нормативной базы;

- насколько подход, положенный в основу Руководства, научно обоснован и практически целесообразен;

- соответствует ли он национальным интересам страны;

- что делать поверителям Государственной метрологической службы, которая повседневно осуществляет проверку соответствия параметров средств измерений значениям, приведенных в стандартах, технических условиях, паспортах и т.д., где используются характеристики погрешности, а неопределенность.

«Краеугольным камнем» Руководство являются:

- отказ от использования понятий «погрешность» и «истинное значение измеряемой величины» в пользу понятий «неопределенность» и «оцененное значение измеряемой величины»;

- переход от классификации погрешностей по природе из проявления на случайные и систематические к другому делению – по способу оценивания неопределенностей измерений (по типу А – методами математической статистики и по типу В – другими методами).

Идейной основой замены термина «погрешность» на «неопределенность» является философская предпосылка агностицизма о том, что «истинное значение» непознаваемо и погрешность, как базирующаяся на использовании истинного значения измеряемой величины, теряет смысл. Поскольку Руководство имеет сугубо практическую направленность, то отказ от использования понятия «погрешность результата измерений» при изложении материала мотивируется тем, что оно опирается на понятие истинного значения, которое принципиально не может быть получено.

Основным понятием, используемым в Руководстве, является понятие «неопределенность измерения». Неопределенность измерения трактуется в двух смыслах – широком и узком, В широком смысле «неопределенность» трактуется как «сомнение», например: «…когда все известные или предполагаемые составляющие погрешности оценены и внесены соответствующие поправки, все еще остается неопределенность относительно истинности указанного результата, то есть сомнение в том, насколько точно результат измерения представляет значение измеряемой величины».

В узком смысле «неопределенность измерения есть параметр, связанный с результатом измерения, который характеризует разброс значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине». Последняя трактовка в точности соответствует определению неопределенности измерения, приводимому в международном словаре VIM. В качестве этого параметра в Руководстве используют стандартную неопределенность, суммарную неопределенность и расширенную неопределенность.

Оценки перечисленных неопределенностей получают на основе ряда экспериментальных данных (оценки неопределенностей по типу А) и на основе дополнительной, в том числе экспертной информации (оценки неопределенностей по типу В). К описанию неопределенностей применяется статистический подход независимо от способа их оценивания (при этом считается, что все поправки на систематические погрешности (эффекты) уже введены). В качестве неопределенности измерения обычно оценивают расширенную неопределенность, а для промежуточных величин, на основе которых получают результат измерения, вычисляют стандартные неопределенности.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ДОКУМЕНТА «РУКОВОДСТВО ПО ВЫРАЖЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ»

1. Рассматриваемый вопрос

Это *Руководство* устанавливает общее правило оценивания и выражения неопределенности измерения, которые следует соблюдать при различных уровнях точности и во многих областях, начиная от торговли до фундаментальных исследований. Это *Руководство,* главным образом, рассматривает выражение неопределенности измерения хорошо определенной физической величины – измеряемой величины, характеризуемой единственным значением. Это *Руководство* дает общие правила оценивания и выражения неопределенности измерения, а не подробные специальные технологические инструкции. В нем не обсуждается вопрос о том, как неопределенность конкретного результата измерения, оцененная однажды, может быть использована для различных целей, например, чтобы сделать выводы о совместимости этого результата с другими аналогичными результатами. Поэтому, может быть, необходимо создать конкретные стандарты, основанные на этом *Руководстве,* в которых бы рассматривались проблемы, характерные для специфических областей измерения, или различные применения количественных выражений неопределенностей. Такие стандарты будут упрощенными версиями данного *Руководства*.

2. Общие метрологические термины

2.1. Определение ряда общих метрологических терминов, используемых в этом в этом *Руководстве*, таких как «измеримая величина», «измеряемая величина» и «погрешность измерения», даны в Приложении B. Эти определения взяты из *Международного словаря основных и общих терминов в метрологии* (сокращенно VIM) [6]. Кроме того, в Приложении C даются определения ряда основных статистических терминов, взятых большей частью из Международного стандарта ISO 3534-1 [7]. Когда один из этих метрологических или статистических терминов (или близко связанный с ним термин) впервые используется в тексте, начиная с раздела **3**, он печатается жирным шрифтом, а номер подраздела, в котором он определен, ставится в скобках.

Поскольку определение общего метрологического термина «неопределенность измерения» представляет особую важность для этого *Руководства,* то оно дается как в Приложении B, так и в 2.2.3. Определения наиболее важных терминов, характерных для этого *Руководства*, даны в 2.3.1-2.3.6. Во всех этих подразделах и в Приложениях B и C использование скобок вокруг определенных слов некоторых терминов означает, что их можно опустить, если маловероятно, что это вызовет путаницу.

2.2. Термин «неопределенность»

Понятие неопределенности далее обсуждается в разделе 3 и Приложении D.

2.2.1. Слово «неопределенность» означает сомнение и, таким образом, в своем самом широком смысле «неопределенность измерения» означает сомнение относительно достоверности результата измерения. Из-за отсутствия различных слов для этого *общего понятия* неопределенности и специальных величин, которые дают *количественные меры* этого понятия, как, например, стандартное отклонение, необходимо использовать слово «неопределенность» в этих двух различных смыслах.

2.2.2. В этом *Руководстве* слово «неопределенность», используемое без прилагательных, относится как к общему понятию, так и к любым или всем количественным мерам этого понятия. Когда предлагается специфичное измерение, то используются соответствующие прилагательные.

2.2.3. Формальное определение термина «неопределенность измерения», разработанное для использования в этом *Руководстве* и понятие (VIM [6], пункт 3.9.), следующее:

неопределенность (измерения) есть параметр, связанный с результатом измерения, который характеризует дисперсию значений, которые могли быть обосновано приписаны измеряемой величине.

> **Примечание** 1.Параметром может быть, например, стандартное отклонение (или данное кратное ему) или полуширина интервала, имеющего установленный уровень доверия.
>
> 2.Неопределенность измерения обычно включает мало составляющих. Некоторые из этих составляющих могут быть оценены из статистического распределения результатов рядов измерений и могут характеризоваться экспериментальными стандартными отклонениями. Другие составляющие, которые могут быть характеризоваться стандартными отклонениями, оценивают из предполагаемых распределений вероятностей, основанных на опыте или другой информации.
>
> 3.Очевидно, что результат измерения является наилучшей оценкой значения измеряемой величины и что все составляющие неопределенности, включая те, которые возникают от систематических эффектов, таких как составляющие, связанные с поправками и эталонами сравнения, вносят вклад в дисперсию.

2.2.4. Определение неопределенности измерения, данное в 2.2.3, является рабочим, которое сфокусировано на результат измерения и его оцененную неопределенность. Однако оно не расходится с другими понятиями неопределенности измерения, такими как:

- мера возможной погрешности оцененного значения измеряемой величины, полученной как результат измерения;
- оценка, характеризующая диапазон значений, в пределах которого находится истинное значение измеряемой величины (VIM, первое издание, 1984, п.3.09).

Хотя эти два традиционных понятия определены как идеальное, они сосредоточивают внимание на *неизвестные* величины: «погрешность» результата измерения и «истинное значение» измеряемой величины (в противоположность его оцененному значению), соответственно. Тем не менее, независимо от того, какое понятие неопределенности принято, составляющая неопределенности всегда оценивается с использованием тех же самых данных и имеющейся информации (см. также Е.5).

2.3. Термины, специфичные для *Руководства*

В основном, термины, которые специально введены для этого *Руководства*, определяются в тексте, когда они впервые вводятся. Однако определения наиболее важных из этих терминов даны здесь для удобства

Примечание. Дальнейшее обслуживание терминов, связанных с приведенными, можно найти следующим образом: для 2.3.2 см. 3.3.3 и 4.2; для 2.3.3 см. 3.3.3 и 4.3; для 2.3.4 см. раздел 5 и уравнения (10) и (13); и для 2.3.5 и 2.3.6 см. раздел 6.

2.3.1. Стандартная неопределенность -
неопределенность результата измерения, выраженная как стандартное отклонение.

2.3.2. Оценка (неопределенности) по типу А –
метод оценивания неопределенности путем статистического анализа ряда наблюдений.

2.3.3. Оценка (неопределенности) по типу В –
метод оценивания неопределенности иным способом, чем статистический анализ рядов наблюдений.

2.3.4. Суммарная стандартная неопределенность –
стандартная неопределенность результата измерения, когда результат получают из значений ряда других величин, равная положительному квадратному корню суммы членов, причем члены являются дисперсиями или ковариациями этих других величин, взвешенными в соответствии с тем, как результат измерения изменяется в зависимости от изменения этих величин.

2.3.5. Расширенная неопределенность –
величина, определяющая интервал вокруг результата измерения, в пределах которого, можно ожидать, находится большая часть распределения значений, которые с достаточным основанием могли быть приписаны измеряемой величине.

> **Примечания. 1.** Эта часть распределения может рассматриваться как вероятность охвата или уровень доверия для интервала.
> **2**.Установление связи между конкретным уровнем доверия и интервалом, определенным расширенной неопределенностью, требует явных и неявных предложений относительно распределения вероятностей, характеризуемого результатом измерения и его суммарной стандартной неопределенностью. Уровень доверия, который может быть приписан этому интервалу, может быть известен только до той степени, в которой такие предложения могут быть оправданы.
> **3.**Расширенная неопределенность называется общей неопределенностью в параграфе 5 Рекомендаций INC-1 (1980).

2.3.6. Коэффициент охвата - числовой коэффициент, используемый как множитель суммарной стандартной неопределенности для получения расширенной неопределенности.

> **Примечание.** Коэффициент покрытия k обычно находится в диапазоне от 2 до 3.

3. Основные понятия

Дополнительное обсуждение основных понятий можно найти в Приложении D, в котором основное внимание уделено идеям «истинного» значения, погрешности и неопределенности и дается графическое представление этих понятий; и в Приложении E, где исследуется обоснование и статистическая база Рекомендации INC-1 (1980), на которых основано это *Руководство*. В Приложении J дается словарь основных математических символов, используемых в этом *Руководстве*.

3.1. Измерение

3.1.1. Целью **измерения** (B.2.5) является определение **значения** (B.2.2) **измеряемой величины** (B.2.9), т.е. значения **определенной величины** (B.2.1. Примечание 1), которую надо измерить. Поэтому измерение начинается соответствующей спецификации измеряемой величины, **метода измерения** (B.2.7) и **измерительной процедуры** (B.2.8).

Примечание. Термин «истинное значение» (см. Приложение D) не используется в этом *Руководстве* по причинам, указанным в D.3.5; термины «значение измеряемой величины» (или величины) и 2 истинное значение измеряемой величины» (или величины) рассматриваются как эквивалентные.

3.1.2. Обычно **результат измерения** (В.2.11) является только аппроксимацией или **оценкой** (С.2.26) значения измеряемой величины и, таким образом, будет полным, только когда сопровождается установлением **неопределенности** (В.2.18) этой оценки.

3.1.3. На практике спецификация или определение измеряемой величины зависит от требуемой **точности измерения** (В.2.14). Измеряемую величину следует определять с достаточной полнотой по отношению к требуемой точности, чтобы для всех практических целей, связанных с измерением, ее значение было единственным. Именно в этом смысле данное выражение «значение измеряемой величины» используется в этом *Руководстве*.

ПРИМЕР – Если длину стального стержня с номинальной длиной 1 м нужно определить с точностью до микрометра, то его спецификация должна включать температуру и давление, при которых эта длина определяется. Таким образом, измеряемую величину следует специфицировать, как, например, длина стержня при 25,00 ^{o}C и 101325 Па (плюс любые другие определяющие параметры, которые считают необходимыми, такие как способ, с помощью которого этот стержень поддерживается). Однако, если длина должна быть определена только с точностью до миллиметра, то ее спецификация не требует определения температуры или давления или значения любого другого определяющего параметра.

Примечание. Неполное определение измеряемой величины может вызвать достаточно большую составляющую неопределенности, которая должна быть включена в оценку неопределенности результата измерения (см. D.11, D.3.4 и D.6.2).

3.1.4. Во многих случаях результат измерения определяется на основе рядов наблюдений, полученных при условиях повторяемости (В.2.15. Примечание 1).

3.1.5. Предполагается, что изменения в повторных наблюдениях возникают из-за **влияющих величин** (В.2.10), которые могут оказать влияние на результат измерения и которые невозможно поддерживать полностью постоянными.

3.1.6. Математическая модель измерения, которая преобразует ряд повторных наблюдений в результат измерения, является крайне важной, т.к. кроме наблюдений, она обычно включает различные величины, которые точно неизвестны. Это отсутствие значения вносит вклад в неопределенность результата измерения наряду с изменениями повторных наблюдений и любой неопределенностью, связанной с самой математической моделью.

3.1.7. Это *Руководство* трактует измеряемую величину как скаляр (единичную величину). Распространение на ряд связанных измеряемых величин, определенных одновременно в том же самом измерении, требует замены скалярной измеряемой величины и ее дисперсии на векторную измеряемую величину и ковариационную матрицу.

3.2. Погрешности, эффекты и поправки

3.2.1. Обычно измерение обладает рядом несовершенств, которые вызывают погрешность (B.2.12) результата измерения. Традиционно погрешность рассматривают как состоящую из двух составляющих, а именно – случайной (B.2.20) и систематической (B.2.21) составляющей. Погрешность – идеализированное понятие, и погрешности не могут быть известны точно.

3.2.2. Случайная погрешность предположительно возникает из непредсказуемых или стохастических временных и пространственных изменений влияющих величин. Эффекты таких изменений, ниже называемые случайными эффектами, вызывают изменения измеряемой величины при повторных наблюдениях. Хотя случайная погрешность результата измерений не может быть компенсирована поправкой, ее обычно можно уменьшить, увеличив число наблюдений; ее математическое ожидание или ожидаемое значение (C.2.9, C.3.1) равняется нулю.

> **Примечания. 1.** Экспериментальное стандартное отклонение среднего арифметического или усредненного значения рядов наблюдений не является случайной погрешностью среднего значения, хотя оно так называется в некоторых публикациях. Это, на самом деле, мера неопределенности среднего значения, обусловленная случайными эффектами Точное значение погрешности среднего значения, возникающей из-за этих эффектов, не может быть известно.
>
> **2**.Термины «погрешность» и «неопределенность» не являются синонимами и представляют собой совершенно различные понятия; их не следует путать друг с другом или неправильно использовать.

3.2.3. Систематическую погрешность, подобно случайной погрешности, нельзя устранить, но ее также часто можно уменьшить. Если систематическая погрешность возникает в результате известного эффекта влияющей величины на результат измерений, называемого систематическим эффектом, то можно определить значение этого эффекта и, если оно значительно по размеру по сравнению с требуемой точностью измерения, то можно внести поправку (B.2.23) или поправочный коэффициент (B.2.24) для компенсации этого эффекта. Предполагается, что после внесения поправки математическая ожидание или ожидаемое значение погрешности, возникающей от систематического эффекта, равно нулю.

Примечание. Неопределенность поправки, вносимой в результат измерения для компенсации систематического эффекта, не является систематической погрешностью, часто называемой смещением, результата измерения, вызванного этим эффектом. Это, на самом деле, мера неопределенности результата из-за неполного знания требуемого значения поправки. Погрешность, возникающая от неполной компенсации систематического эффекта, ё не может быть известна точно. Термины «погрешность» и «неопределенность» следует использовать правильно и следить за тем, чтобы не путать их.

3.2.4. Предполагают, что в результате измерения внесены поправки на все известные значимые систематические эффекты и что предприняты все усилия, чтобы узнать такие эффекты.

Примечание. Часто измерительные приборы и системы настаиваются или калибруются с использованием эталонов и эталонных образцов, чтобы исключить систематические эффекты; однако неопределенности, связанные с этими эталонами и образцами все же должны учитываться.

3.3. Неопределенность

3.3.1. Неопределенность результата измерения отражает отсутствие точного знания значения измеряемой величины (см.2.2). Результат измерения после внесения поправки на известные систематические эффекты все еще являются только оценкой измеряемой величины вследствие неопределенности, возникающей из-за случайных эффектов и неточной поправки результата на систематические эффекты.

Примечание. Результат измерения (после внесения поправки) может быть, не зная того, очень близким к значению измеряемой величины (и поэтому иметь пренебрежительно малую погрешность), даже если он может иметь большую неопределенность. Таким образом, неопределенность результата измерения не следует путать с неизвестным остатком погрешности.

3.3.2. На практике существует много возможных источников неопределенности при измерении, включая:

а) неполное определение измеряемой величины;

в) несовершенную реализацию определения измеряемой величины;

c) нерепрезентативную выборку измерений;

d) неадекватное знание эффектов от условия окружающей среды, влияющих на измерения, или несовершенное измерение параметров окружающей среды;

e) субъективная систематическая погрешность оператора при снятии показаний аналоговых приборов;

f) конечная разрешающая способность прибора или порог чувствительности;

g) неточные значения, приписанные эталонам, используемым для измерения, и стандартным образцам и материалам;

h) неточные значения констант и других параметров, полученных из внешних источников и используемых в алгоритме обработке данных;

i) аппроксимации и предположения, используемые в методе измерения и измерительной процедуре;

j) изменения в повторных наблюдениях измеряемой величины при явно одинаковых условиях.

Эти источники необязательно являются независимыми, и некоторые из них от a) до i) могут вносить вклад в источник j). Конечно, неизвестный систематический эффект не может быть учтен в оценке неопределенности результата измерения, но он вносит вклад в его погрешность.

3.3.3.В соответствии с Международной рекомендацией INC-1 неопределенности разделяют на две категории в соответствии с методами их оценки: «А» и «В». Эти категории относятся к *неопределенности* и не являются заменителями терминов «случайная» и «систематическая». Неопределенность от внесения поправки на известный систематический эффект может быть получена в некоторых случаях как оценка по категории «А», в то время как в других случаях – как оценка по категории «В», также как и неопределенность, характеризующая случайный эффект.

Примечание. В некоторых публикациях неопределенности разделяют на категории «случайной» и «систематической» и связывают с погрешностями, возникающими соответственно из случайных и известных систематических эффектов. Такое разделение составляющих неопределенности может быть двусмысленным при общем применении. Например, «случайная» составляющая неопределенности в одном измерении может стать «систематической» составляющей неопределенности в другом измерении, в котором результат первого измерения используется в качестве входных данных. При разделении на категории методов оценки составляющих неопределенности, а не самих составляющих, такая двусмысленность устраняется. В тоже время это не мешает собирать отдельные составляющие, которые были оценены этими двумя различными методами, в указанные группы, чтобы использовать для конкретной цели (см.3.4.3.)

3.3.4. Целью классификаций на тип «А» и тип «В» является показ двух различных способов оценки составляющих неопределенности, и она используется только для удобства обсуждения. Она не предназначена для показа того факта, что существует какое-либо различие в природе этих составляющих, являющихся результатом этих двух типов вычисления. Оба типа оценивания основаны на распределениях вероятностей и составляющие неопределенности, являющиеся результатом использования каждого типа, определяются количественно дисперсией или стандартным отклонением.

3.3.5. Оцененную дисперсию u^2, характеризующую составляющую неопределенности, полученную в результате оценивания по типу «А», вычисляют из рядов повторных наблюдений, и она является знакомой статистической оценкой дисперсии s. Оцененное стандартное отклонение u, положительный квадратный корень из u^2 , является, таким образом, $u = s$ и для удобства его иногда называют *стандартной неопределенностью типа А*. Для составляющей неопределенности, полученной из оценивания по типу В, оцениваемую дисперсию u^2 вычисляют, используя имеющиеся данные, и оцененное стандартное отклонение u иногда называют *стандартной неопределенностью типа В*.

Таким образом, стандартную неопределенность типа А получают из функции плотности вероятностей, полученной из наблюдаемого распределения по частности, в то время как стандартную неопределенность типа В получают из предполагаемой функции вероятностей, основанной на степени уверенности в том, что событие произойдет (эта вероятность часто называется субъективной вероятностью). Оба эти подхода являются признанными интерпретациями вероятности.

Примечание. Оценка составляющей неопределенности по типу В обычно основывается на фонде сравнительно надежной информации.

3.3.6. Стандартная неопределенность результата измерений, полученного из значений ряда других величин, называют суммарной стандартной неопределенностью, обозначаемой как u_c. Она является оцененным стандартным отклонением, связанным с результатом, и равна положительному квадратному корню и суммарной дисперсии, полученной из всех составляющих дисперсии и ковариации, однако вычисленная путем использования так называемого закона распространения неопределенности (см. раздел 5).

3.3.7. Для удовлетворения требований в некоторых областях промышленности и торговли, а также требований области здравоохранения и безопасности используют *расширенную неопределенность U*, получаемую умножением суммарной стандартной неопределенности u_c на *коэффициент охвата k*. Целью использования *U* является показ интервала около результата измерения, в пределах которого, можно ожидать нахождение большей части распределения значений, которые могли быть с достаточным основанием приписаны измеряемой величине.

Примечание. Коэффициент охвата k всегда должен быть указан, чтобы можно было снова получить стандартную неопределенность измеряемой величины для использования ее при вычислении суммарной стандартной неопределенности других результатов измерений, которые могут завесить от этой величины.

3.4. Практические соображения

3.4.1. Если все величины, от которых зависит результат измерения, изменяются, их неопределенность можно оценить статистическими средствами. Однако, так как на практике это редко представляется возможным из-за ограниченного времени и ресурсов, неопределенность результата измерения обычно оценивают, используя математическую модель измерения и закон распространения неопределенности. Таким образом, подразумевается, что измерения можно моделировать математически до степени, определяемой требуемой точностью измерения.

3.4.2. Поскольку математическая модель может быть неполной, все упомянутые величины следует изменять до самой полной практической степени, чтобы оценивание неопределенности, на сколько это возможно могло быть основано на наблюдаемых данных. Всякий раз, когда это доступно, использование эмпирических моделей измерения, основанных на долговременных количественных данных, и использование эталонов сравнения, которые могут показать, находится ли измерения под статистическим контролем, должны составлять часть усилий, которые необходимо затратить для получения надежных оценок неопределенности. Математическая модель должна всегда пересматриваться, когда наблюдаемые данные, включая результаты независимых определений, той же самой измеряемой величины, показывают, что модель неполна. Хорошо спланированный эксперимент может значительно способствовать повышению надежности оценок неопределенности и является частью искусства проведения измерения.

3.4.3. Для того, чтобы решить, нормально ли функционирует измерительная система, экспериментально наблюдаемая изменчивость ее выходных величин, оцененная их наблюдаемыми стандартными отклонениями, часто сравнивают с предсказанным стандартным отклонением, полученным суммированием различных составляющих неопределенности, которые характеризуют измерение. В таких случаях следует рассматривать только те составляющие (независимо от того, получены ли они из оценивания по типу А или типу В), которые могут внести вклад в экспериментально наблюдаемую изменчивость этих выходных величин.

Примечание. Такой анализ может быть облегчен сбором тех составляющих, которые вносят вклад в изменчивость, и тех, которые не вносят вклад, в две отдельные соответствующим образом помеченные группы.

3.4.4. В некоторых случаях нет необходимости включать неопределенность поправки на систематический эффект в оценивание неопределенности результата измерения. Хотя неопределенность уже оценена, ею можно пренебречь, если ее вклад в суммарную стандартную неопределенность результата измерения незначителен. Если значения самой поправки незначительно по сравнению с суммарной стандартной неопределенностью, то ею самой тоже можно пренебречь.
3.4.5. Как часто случается на практике, особенно в области законодательной метрологии, измерительный прибор поверяется сравнением с эталоном и неопределенности, связанные с эталоном и процедурой сравнения, пренебрежительно малы по сравнению с требуемой точностью поверки. Примером может служить использование набора хорошо откалиброванных эталонов массы для поверки шкалы коммерческого прибора. В таких случаях, поскольку составляющая неопределенности достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь, измерение может рассматриваться как определение погрешности поверяемого устройства.
3.4.6. Оценка значения измеряемой величины, полученная в результате измерения, иногда выражается в единицах, принятых для эталона, а не в единицах, международной системе единиц физических величин (СИ). В таких случаях значение неопределенности, приписываемое результату измерения, может быть значительно меньше, чем когда результат выражается в соответствующих единицах СИ (в действительности, измеряемая величина была переопределена как отношение значения измеряемой величины к принятой величине эталона.
3.4.7. Грубые ошибки при регистрации или анализе данных могут вносить значительную неизвестную погрешность в результат измерения. Большие грубые ошибки можно распознать путем проверки данных; Небольшие – могут быть замаскированы или даже проявиться в виде случайных изменений. Меры неопределенности не предназначены дать объяснения таким ошибкам.
3.4.8. Описываемая методика дает схему определения неопределенности, но она не может заменить критические размышления, интеллектуальную честность и профессиональное мастерство. Оценка неопределенности не является ни рутинной работой, ни чисто математической; она зависит от детального знания природы, измеряемой величины, и измерения. Поэтому качество и ценность упомянутой неопределенности результата измерения, в конечном счете, зависит от понимания, критического анализа и честности тех, кто участвует в приписывании ее значения.

4. Вычисление стандартной неопределенности

Дополнительное руководство по оцениванию составляющих неопределенности, главным образом практического характера, можно найти в Приложении F.

4.1. Моделирование измерения

4.1.1. В большинстве случаев измеряемая величина F не является прямо измеряемой, а зависит от N других измеряемых величин X. $X_2,\ldots, X_N$ через функциональную зависимость f

$$Y = f\,(X_1, X_2,\ldots X_N) \tag{1}$$

> **Примечания 1.** Для экономии обозначений в этом *Руководстве* один и тот же символ используется для обозначения физической величины (измеряемой величины) и случайной переменной (см. 4.2.1), которая представляет возможный результат наблюдений за этой величиной. Когда указывается, что величина на входе X_i имеет определенное распределение вероятностей, то символ используется в последнем смысле; предполагается, что физическая величина сама характеризуется существенно единственным значением (см. 1.2 и 3.1.3).
>
> **2.** В рядах наблюдений k-тое наблюдаемое значение обозначается как X_{ik}; поэтому, если R обозначает сопротивление резистора, то k-тое наблюдаемое значение сопротивления обозначается как R_k.
>
> **3.** Оценка X_i (строго говоря, его ожидания) обозначается x_i .

Пример. Энергия P (измеряемая величина), рассеиваемая при температуре t терморезистором, имеющим значение R_0 при определенной температуре t_0 и при линейном температурном коэффициенте сопротивления a с разностью потенциалов V, подаваемых на клеммы, зависит от V, R_0, a и t согласно

$$P = f(V,R_0,a,t) = V^2 / R_0[1 + a(t-t_0)]$$

> **Примечание.** Другие методы измерения P следует моделировать с помощью других математических выражений.

4.1.2. Сами входные величины $X_1, X_2,\ldots X_N$.. от которых зависит выходная величина Y, можно рассмотреть как измеряемые величины, и они сами могут зависеть от других величин, включая поправки и поправочные коэффициенты на систематические эффекты, что ведет к сложной функциональной зависимости f, которая никогда не может быть записана точно. Кроме того, f можно определить экспериментально (см. 5.1.4) или может существовать только как алгоритм, который должен быть реализован численно. Функцию f , в том виде как она представлена в этом *Руководстве*, следует интерпретировать в этом более широком смысле, а именно – как функцию, которая содержит каждую величину, включая все поправки и поправочные коэффициенты, которые могут внести значительную составляющую в результат измерения.

Таким образом, если данные показывают, что f не моделирует измерение до степени, налагаемой требуемой точностью результата измерения, то дополнительные входные величины должны быть включены в f для устранения неадекватности (см.3.4.2). Это может потребовать введения входной величины, чтобы отразить неполное знание явления, которое влияет на измеряемую величину. В примере 4.1.1 дополнительные входные величины могут быть необходимы, чтобы объяснить известное неравномерное распределение температуры по резистору, возможный нелинейный температурный коэффициент сопротивления или возможную зависимость сопротивления от атмосферного давления.

> **Примечание**. Так не менее, уравнение (1) может быть настолько элементарным, как $Y=X_1- X_2$. Оно отражает модели, например, сравнения двух определений одной и той же величины X.

4.1.3. Набор входных величин $X_1, X_2, \ldots X_N$ можно разделить на следующие категории:

- величины, чьи значения *и неопределенности* определяются непосредственно в текущем измерении. Эти значения и неопределенности можно получить, например, в результате одного наблюдения, повторных наблюдений или заключения, основанного оп опыте, и могут требовать определения поправок в показания прибора и поправок на влияющие величины такие, как окружающая температура, атмосферное давление и влажность;

- величины, чьи значения *и неопределенности* вносятся в измерение из внешних источников, такие как величины, связанные с аттестованными эталонами, стандартными образцами веществ и материалов или стандартными справочными данными.

4.1.4. Оценку измеряемой величины Y, обозначенную y, получают из уравнения (1), используя *входные оценки* $x_1, x_2, \ldots, x_N$ для значений N величина $X_1, X_2, \ldots, X_N$. Таким образом, *выходная оценка* y, которая является результатом измерения, выражается следующим образом

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_N) \qquad (2)$$

Примечание. В некоторых случаях оценку y можно получить из

$$y = \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_{1,k}, X_{2,k}, \ldots, X_{N,k})$$

Таким образом, y берется как среднее арифметическое или как среднее значение (см. 4.2.1) n независимых определений Y_k величины Y; при этом каждое определение имеет одну и ту же неопределенность и каждое основано на полном наборе наблюдаемых значений N входных величин X_i, полученных в то же самое время. Этому способу усреднения вместо: $y = f(\overline{X}_1, \overline{X}_2,..., \overline{X}_N)$, где $\overline{X}_1 = (\sum_{k=1}^{n} X_{i,k})/n$ является средним арифметическим отдельных наблюдений $X_{i,k}$, можно отдать предпочтение, когда f является нелинейной функцией входных величин X_1, X_2,…, X_N, но два подхода являются идентичными, если f является линейной функцией от X_i (см. H.2 и H.4).

4.1.5. Оцененное стандартное отклонение, связанное с выходной оценкой или с результатом измерения y, называемое *суммарной стандартной неопределенностью* и обозначаемое $u_c(y)$, получают из оцененного стандартного отклонения, связанного с каждой входной оценкой x_i, называемого *стандартной неопределенностью* и обозначаемой $u(x_i)$ (см.3.3.5 и 3.3.6).

4.1.6. Каждую входную оценку x_i и связанную с ней стандартную неопределенность $u(x_i)$ получают из распределения возможных значений входной величины X_i. Это распределение вероятностей может быть основано на частности, т.е. на рядах наблюдений $X_{i,k}$ величина X_i, или оно может быть *априорным* распределением. Оценивая составляющих стандартной неопределенности по типу А основаны на распределениях частности, в то время как оценивая по типу В базируется на *априорных* распределениях. Необходимо признать, что в обоих случаях распределения являются моделями, которые используются, чтобы представить состояние нашего знания.

4.2. Оценивание стандартной неопределенности по типу А

4.2.1. В большинстве случаев наилучшая доступная оценка математического ожидания или ожидаемого значения λq величины q, изменяющейся случайном образом [**случайная переменная** (C.2.2)], для которой были получены n независимых наблюдений q_k при одинаковых условиях измерения (см.B.2.1.5), является *среднее арифметическое или среднее значение* $\overline{q}$ (C.2.19) из n наблюдений

$$\overline{q} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} q_k$$

(3)

Таким образом, для входной величины X_i, оцененной из nнезависимых повторных наблюдений $X_{i,k}$, среднее арифметическое $\overline{X}_{i,k}$, полученное из уравнения (3), используется как входная оценка x_i в уравнении (2) для определения результата измерений y: т.е. $x_i = \overline{X}_i$. Те входные оценки, которые не определены их повторных наблюдений, должны быть получены другими методами, такими как те, которые указаны во второй категории п.4.1.3.

4.2.2. Отдельные наблюдения q_k отличаются по значению из-за случайных изменений влияющих величин или случайных эффектов (см.3.2.2).

Экспериментальную дисперсию наблюдений, которая оценивает дисперсию σ^2 распределения вероятностей q, получают, как

$$s^2(q_k) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}(q_k - \overline{q})^2 \qquad (4)$$

Эта оценка дисперсии выборки и ее положительный квадратный корень $s(q_k)$, называемый **экспериментальным стандартным отклонением** (В.2.17), характеризует изменчивость наблюдаемых значений q_k или, точнее, их дисперсию относительно среднего значения $\overline{q}$.

4.2.3. Наилучшая оценка $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$ дисперсия среднего значения выражается, как

$$s^2(\overline{q}) = \frac{s^2(q_k)}{n} \qquad (5)$$

Экспериментальная дисперсия среднего $s^2(\overline{q})$ и **экспериментальное стандартное отклонение среднего значения** $s(\overline{q})$ (В.2.17, Примечание 2), равное положительному квадратному корню из $s^2(\overline{q})$, количественно определяют, насколько хорошо $\overline{q}$ оценивает ожидание μ_k величины q, и также могут быть использованы в качестве меры неопределенности $\overline{q}$.

Таким образом, для входной величины X_i , определенной из n независимых повторных наблюдений X_{ik} , стандартная неопределенность $u(x_i)$ ее оценки $x_i = \overline{X}_i$ есть $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ с $s^2(\overline{X}_i)$, вычисленным согласно уравнению (5). Для удобства $u^2(x_i) = s^2(\overline{X}_i)$ и $u(x_i) = s(\overline{X}_i)$ иногда соответственно называют *дисперсией типа А и стандартной неопределенностью типа А*.

Примечания. 1. Число наблюдений n должно быть достаточно большим, чтобы $\overline{q}$ давало надежную оценку ожидания μ_q случайной переменной q и чтобы $s^2(\overline{q})$ обеспечивало надежную оценку дисперсии $\sigma^2(\overline{q}) = \sigma^2/n$ (см. Примечание к 4.3.2). При построении доверительных интервалов (см. 6.2.2) следует принимать различие между $s^2(\overline{q})$ и $\sigma^2(\overline{q})$.

2. Хотя дисперсия $s^2(\overline{q})$ является более фундаментальной величиной, на практике стандартное отклонение $s(\overline{q})$ является более удобным, т.к. оно имеет ту же самую размерность, что и q, и более легко понимаемое значение, чем значение дисперсии.

4.2.4. Для хорошего определенного измерения, находящегося под статистическим контролем, для метода может иметься суммарная или комбинированная оценка дисперсии s_P^2 (или суммарное экспериментальное стандартное отклонение s_p), которые характеризуют измерение. В таких случаях, когда значение измеряемой величины q определяется из n независимых наблюдений, экспериментальная дисперсия среднего арифметического значения наблюдений $\overline{q}$ лучше оценивается, как s_P^2/n, чем $s^2(\overline{q})/n$, и стандартная неопределенность есть $u = s_p/\sqrt{n}$.

4.2.6. Степени свободы V_i для $U(x_i)$, равные $n-1$ в простом случае, где $x_i = \overline{X}$ и $u(x_i) = s(X_i)$, вычисляются из n независимых наблюдений, как в 4.2.1 и 4.2.3, всегда следует давать при документальном подтверждении оценок составляющих неопределенности по типу А.

4.2.7. Если случайные изменения в наблюдениях входной величины коррелированны, например, по времени, то среднее значение и экспериментальное стандартное отклонение среднего, данные в 4.2.1 и 4.2.3, могут быть неподходящими оценивателями желаемых статистик. В таких случаях результаты наблюдений следует анализировать, используя статистические методы, специально предназначенные для обработки рядов коррелированных случайно изменяющихся измерений.

Примечание. Такие специальные методы используются для обработки результатов измерений эталонов частоты. Однако возможно, что по мере перехода от краткосрочных измерений к длительным измерениям других метрологических величин предположение о некоррелированности случайных вариаций может уже не иметь силы и могут также использоваться специальные методы.

4.2.8. Обсуждение оценивания стандартной неопределенности по типу А в 4.2.1 – 4.2.7 не означает, что оно является исчерпывающим. Существует много ситуаций, некоторые – довольно сложные, которые можно рассматривать с помощью статистических методов. Важным примером является использование калибровочных расчетов, часто основанных на методе наименьших квадратов, для оценки неопределенностей, возникающих как от кратковременных, так и длительных случайных изменений результатов сличений материальных артефактов с неизвестными значениями, таких как плоскопараллельные концевые меры и эталоны массы, с эталонами сравнения, значения которых известны. В таких сравнительно простых измерительных ситуациях составляющие неопределенности часто поддаются оцениванию статистическим анализам данных, полученных путем использования расчетов, состоящих из гнездовых последовательностей измерений измеряемой величины для ряда различных значений величин, от которых она зависит – так называемый анализ дисперсий.

Примечание. На более узких уровнях поверочной схемы, когда часто предполагается, что данные эталонов сравнения точно известны, так как они были откалиброваны в национальных лабораториях, обладающих первичными эталонами, неопределенность результата калибровки может включать только одну стандартную неопределенность типа А, оцененную из сгруппированного экспериментального стандартного отклонения, которое характеризует измерение.

4.3. Оценивание стандартной неопределенности по типу B

4.3.1.Для оценки x_i входной величины X_i, которая не была получена в результате повторных наблюдений, связанные с ними оценка дисперсии $u^2(x_i)$ или стандартная неопределенность $u(x_i)$ определяются на базе научного суждения, основанного на всей доступной информации возможной изменчивости X_i. Используемая для этого информация может включать:

- данные предварительных измерений;
- данные, полученные в результате опыта, или общее знание о поведении и свойствах соответствующих материалов и приборов;
- спецификации изготовителя;
- данные, которые приводятся в свидетельствах о калибровке и в других сертификатах;
- неопределенности, приписываемые справочным данным, взятым из справочников.

Для удобства $u^2(x_i)$ и $u(x_i)$, оцененные таким способом, иногда называются соответственно *дисперсией типа В* и *стандартной неопределенностью типа В*.

Примечание. Когда x_i получено из априорного распределения, связанная с ним дисперсия правильно должна записываться, как $u^2(X_i)$, но для простоты используются $u^2(x_i)$ и $u(x_i)$.

4.3.2. Правильное использование доступной информации для оценивания стандартной неопределенности по типу В требует интуиции, основанной на опыте и общих знаниях. Вместе с тем, оценка стандартной неопределенности по типу В может быть такой же надежной, как и оценка по типу А. Особенно в измерительной ситуации, когда оценивание по типу А основывается на небольшом числе статистически независимых наблюдений.

> **Примечание.** Если распределение вероятностей q в Примечании 1 к 4.2.3 является нормальным, тогда $\sigma\left[s(\overline{q})\right]/\sigma(\overline{q})$ - стандартное отклонение $s(\overline{q})$ по отношению к $\sigma(\overline{q})$ - приблизительно равно $\left[2(n-1)\right]^{-1/2}$. Таким образом, приняв $\sigma\left[s(\overline{q})\right]$ в качестве неопределенности $s(\overline{q})$, для $n=10$ наблюдений относительная неопределенность $s(\overline{q})$ составляет 24 процента, в то время как для $n=50$ наблюдений она составит 10 процентов (дополнительные значения даны в табл. Е1 Приложения Е).

4.3.3. Если оценка x_i берется из спецификации изготовителя, свидетельства о поверке, справочника или другого источника, и ее неопределенность дается как некоторое кратное стандартного отклонения, то стандартную неопределенность $u(x_i)$ можно принять равной указанному значению, деленному на множитель, и оцененная дисперсия $u^2(x_i)$ равна квадрату этого частного.

Пример. Свидетельство о калибровке утверждает, что масса m_s эталона из нержавеющей стали с номинальным значением 1 килограмм составляет 1000,000325 г и что «неопределенность этого значения равняется 240 мкг на уровне трех стандартных отклонений». Тогда стандартная неопределенность эталона массы есть просто $u(m_s)=(240$ мкг$)/3=80$ мкг. Это соответствует относительной стандартной неопределенности $u(m_s)/m_s=80 \cdot 10^{-5}$ (см.5.1.6). Оцененная дисперсия $u^2(m_s)=(80\text{ мкг})^2 = 6{,}4 \cdot 10^{-9}$ г^2.

> **Примечание.** Во многих случаях мало или совсем отсутствует информация об отдельных составляющих, из которых указанная неопределенность была получена. Это обычно не имеет значения, если придерживаться данного *Руководства,* т.к. все стандартные неопределенности трактуются одним и тем же способом при вычислении суммарной стандартной неопределенности результата измерения (см.раздел 5).

4.3.4. Приведенная неопределенность величины x_i необязательно дается в виде кратного стандартного отклонения. Вместо этого можно встретить, что упомянутая неопределенность определяет интервал, имеющий 90, 95 или 99 процентный уровень доверия (см. 6.2.2). Если не указано другого, то можно предположить, что использовалось нормальное распределение для вычисления упомянутой неопределенности, и стандартную неопределенность для x_i получают делением приведенной неопределенности на соответствующий коэффициент для нормального распределения. Коэффициенты, соответствующие выше указанным трем доверительным уровням, следующие: 1,64; 1,96 и 2,58.

> **Примечание.** Не было бы необходимости в таком предположении, если неопределенность была бы дана в соответствии с рекомендациями данного *Руководства*, рассматривающими сообщение о неопределенности, которые подчеркивают, что всегда должен быть указан использованный коэффициент охвата (см. 7.2.3).

Пример. Свидетельство о калибровке утверждает, что сопротивление эталонного резистора R_s с номинальным значением десять Ом есть 10,000742 Ом ± 129 мкОм при 23 ^{o}C и что «упомянутая неопределенность 129 мкОм определяет интервал, имеющий 99 процентный уровень доверия». Стандартную неопределенность резистора можно принять как $u(R_s)$= (129 мкОм)/2,58 = 50 мкОм, что соответствует относительной стандартной неопределенности $u(R_s)/ R_s$ = 5,0 · 10^{-6} (см. 5.1.6). Оцененная дисперсия есть $u^2(R_s)$= (50 мкОм)^2 = 2,5 · 10^{-9} Ом^2.

4.3.5. В том случае, когда основываясь на доступной информации можно утверждать, что существует вероятность «пятьдесят на пятьдесят» того, что значение входной величины X_i находится в интервале от a_- до a_+ (другими словами, вероятность того X_i находится в этом интервале составляет 0,5 или 50 %) можно использовать следующий подход к решению проблемы. Если можно предположить, что распределение возможных значений X_i приблизительно нормальная, то наилучшую оценку x_i величины X_i можно принять как среднюю точку этого интервала. Далее, если полуширина этого интервала обозначается как $a = (a_+ - a_-) / 2$, то можно принять $u(x_i) = 1{,}48a$, так как для нормального распределения с ожиданием $\mu \pm \sigma/1{,}48$ охватывает приблизительно 50 процентов распределения.

Пример. Станочник, определяющий размеры детали, оценивает, что ее длина находится, с вероятностью 0,5, в интервале от 10,07 мм до 10,15 мм и утверждает, что l=(10,11±0,04) мм, имея в виду, что ± 0,04 мм определяет интервал, имеющий 50 процентный уровень доверия. Тогда a= 0,04 мм и, предложив нормальное распределение для возможных значений l, стандартная неопределенность длины составляет $u(l)$= 1,48 · 0,04 мм = 0,06 мм и оцененная дисперсия $u^2(l)$=(1,48· 0,04 мм)^2 = 3,5 · 10^{-3} мм^2.

4.3.6. Рассмотрим случай подобный 4.3.5, но где основываясь на имеющейся информации, можно утверждать, что "есть приблизительно два шанса из трех, что значение X_i находится в интервале от a_- до a_+ (другими словами, вероятность того, что X_i находится в этом интервале, составляет около 0,67). Тогда с достаточным основанием можно принять $u(x_i) = a$, так как для нормального распределения с ожиданием μ и стандартным отклонением σ интервал $\mu \pm \sigma$ охватывает около 68,3 процента распределения.

> **Примечание.** Это дало бы значению $u(x_i)$ значительно большую значимость, чем та, которая, очевидно, оправдана, если бы надо было использовать действительно нормальное отклонение 0,96742, соответствующее вероятности $p=2/3$, т.е. если надо было бы записать $u(x_i) = a/0{,}96742=1{,}033a$.

4.3.7. В других случаях можно оценить только границы (верхний и нижний пределы) для X_i. В частности, утверждать, что «вероятность того, что значение X_i находится в интервале от a_- до a_+ для всех практических целей, равна единице и вероятность того, что X_i находится за пределами этого интервала равна нулю». Если нет конкретных сведений о возможных значениях X_i внутри интервала, то можно только предположить, что с одинаковой вероятностью X_i может находиться в любом месте в его пределах (равномерное или прямоугольное распределение возможных значений см. 4.4.5 и рис. 2а). Тогда x_i , ожидание или ожидаемое значение X_i является средней точкой интервала, $x_i = (a_+ + a_-) / 2$ с соответствующей дисперсией

$$u^2(x_i)= (a_+ - a_-)^2 / 12. \tag{6}$$

Если разность между границами $a_+ - a_-$ обозначить как 2a, тогда уравнение (6) принимает вид

$$u^2(x_i)=a^2/ 3. \tag{7}$$

> **Примечание**. Когда составляющая неопределенности, полученная таким образом, дает значительный вклад в неопределенность результата измерения, имеет смысла получить дополнительные данные для ее дальнейшего оценивания.

Примеры. 1. Справочник дает значения температурного коэффициента линейного расширения чистотой меди при 20°C $\alpha_{20}(Cu) = 16{,}52 \cdot 10^{-6}\ {}^{o}C^{-1}$ и просто утверждает, что «погрешность этого значения не должна превышать $0{,}40 \cdot 10^{-6}\ {}^{o}C^{-1}$». Основываясь на такой ограниченной информации, можно только предположить, что значение $\alpha_{20}(Cu)$ находится с равной вероятностью в интервале от 16,12 · 10^{-6} $^{o}C^{-1}$ до 16,92 · 10^{-6} $^{o}C^{-1}$ и что очень маловероятно, чтобы α_{20}(Cu) находится за пределами этого интервала. Дисперсия этого симметричного прямоугольного распределения возможных значений α_{20}(Cu) с полушириной α = 0,40 · 10^{-6} $^{o}C^{-1}$ тогда есть, из уравнения (7), $u^2(\alpha_{20})$ = (0,40 · 10^{-6} $^{o}C^{-1})^2$ /3 = 53,3 · 10^{-15} $^{o}C^{-2}$ и стандартная неопределенность есть $u(\alpha_{20})$ = (0,40 · 10^{-6} $^{o}C^{-1}$) / √3 = 0,23 · 10^{-6} $^{o}C^{-1}$.

1. В спецификациях изготовителя для цифрового вольтметра указывается, что «в промежутке от года до двух лет после калибровки прибора его погрешность на диапазоне 1 В равняется показанию, умноженному на 14 · 10^{-6} плюс диапазон, умноженный на 2 · 10^{-6}». Предположим, что прибор используется спустя 20 месяцев после калибровки для измерения разности потенциалов *V* на его диапазоне 1 В и установлено, что среднее арифметическое ряда независимых повторных наблюдений *V* равняется $\overline{V} = 0{,}928571$ В при стандартной неопределенности $u(\overline{V}) = 12 мкВ,$ вычисленной по типу А. Оценку по типу В стандартной неопределенности, связанную со спецификациями изготовителя, можно получить в предположении, что указанная погрешность дает симметричные границы аддитивной поправки к $\overline{V}, \Delta\overline{V}$ ожидания, равного нулю, и при равной вероятности нахождения в любом месте в пределах границ. Полуширина *a* симметричного прямоугольного распределения возможных значений $\overline{V}$ тогда есть а = (14 · 10^{-6}) · (0,928571 В) + (2· 10^{-6}) · (1 В) = 15 мкВ и из уравнения (7) $u^2(\Delta\overline{V}) = 75 мкВ^2$ и $u(\Delta\overline{V}) = 8{,}7 мкВ$. Оценка значения измеряемой величины *V*, для простоты обозначенная тем же самым символом *V* , выражается как $v = \overline{V} + \Delta\overline{V} = 0{,}928571$ В. Суммарную стандартную неопределенность этой оценки получают суммированием стандартной неопределенности *V*, равной 12 мкВ, вычисленной по типу А, со стандартной неопределенностью $\Delta\overline{V}$, равной 8,7 мкВ, вычисленной по типу В. Общий метод суммирования составляющих стандартной неопределенности дан в разделе 5, а этот конкретный пример рассмотрен в 5.1.5.

4.3.8. В 4.3.7 верхняя и нижняя граница a_+ и a_- для входной величины X_i могут быть симметричными относительно их лучшей оценки x_i; в частности, если нижняя граница записана в виде $a_- = x_i - b_-$, а верхняя граница в виде $a_+ = x_i + b_+$, тогда $b_- \neq b_+$. Так как в этом случае x_i (предполагаемое как ожидание X_i) не находится в центре интервала от a_- до a_+ , то распределение вероятностей X_i не может быть равномерным по всему интервалу. Однако, может не быть достаточной доступной информации, чтобы выбрать соответствующее распределение; различные модели приведут к различным выражениям для дисперсии. При отсутствии такой информации самой простой аппроксимацией является

$$u^2\ (x_i) = (b_+ + b_-)^2 / 12 = (a_+ - a_-)^2 / 12, \qquad (8)$$

которая является дисперсией прямоугольного распределения при полной ширине $b_+ + b_-$.

Пример. Если в примере 1, описанном в 4.3.7, значение коэффициента в справочнике дается как $\alpha_{20}(\mathrm{Cu}) = 16{,}52 \cdot 10^{-6}\ {}^{o}C^{-1}$ и утверждается, что наименьшим возможным значением является $16{,}12 \cdot 10^{-6}\ {}^{o}C^{-1}$, а наибольшим возможным значением является $16{,}92 \cdot 10^{-6}\ {}^{o}C^{-1}$, тогда $b_- = 0{,}12 \cdot 10^{-6}\ {}^{o}C^{-1}$, $b_+ = 0{,}40 \cdot 10^{-6}\ {}^{o}C^{-1}$ и из уравнения (8) $u(\alpha_{20}) = 0{,}15 \cdot 10^{-6}\ {}^{o}C^{-1}$.

Примечания. 1. Во многих практических измерительных ситуациях, где границы асимметричны, может быть целесообразным вносить поправку в оценку x_i величиной $(b_+ - b_-)/ 2$ таким образом, чтобы новая оценка x_i значения X_i находилась бы посередине границ $x_i' = (a_- + a_+)/2$. это сводит ситуацию к случаю, описанному в 4.3.7, при новых значениях $b_+' = b_-' = (b_+ + b_-)/2 = (a_+ - a_-)/2 = a$.

2. В случае асимметрии функция плотности вероятностей может быть показана, как $p(X_\mathrm{i}) = A exp[-\lambda(X_i - x_i)]$, основываясь на принципе максимальной энтропии, при $A = [\,в_- exp(\lambda в_-) + в + exp(-\lambda в_-)]$ и $\lambda = \{\exp[\lambda(в_- + в)] - 1\} / [b_- \exp[\lambda(b_- + b_-)] + b_-\}$. Это дает дисперсию $u^2(x_i) = b_+ b_- - (b_+ - -b_-)/\lambda$; для $b_+ > b_-$, $\lambda > 0$ и для $b_+ < b_-$, $\lambda < 0$.

4.3.9. В 4.3.7 из-за отсутствия конкретных данных о возможных значениях X_i в пределах его оцененных границ от a_- до a_+ можно только предположить, что с одинаковой вероятностью X_i может принять любое значение в пределах этих границ и что существует нулевая вероятность того, что это значение будет за пределами указанных границ. Такие разрывы ступенчатой функции в распределении вероятностей являются часто нефизическими. Во многих случаях более реалистично ожидать, что значения возле границ гораздо менее вероятны, чем те, которые находятся возле центра. Тогда целесообразно заменить симметричное прямоугольное распределение симметричным трапецеидальным распределением, имеющим одинаковые наклонные стороны (равнобедренная трапеция), с шириной основания $a_+ - a_- = 2a$ и с шириной верхней части $2a\beta$, где $0 \le \beta \le 1$. Когда $\beta \to 1$, это трапецеидальное распределение приближается к прямоугольному, описанному в разделе 4.3.7, в то время как для β =0 это – треугольное распределение (см. 4.4.6 и рис.2в). Предположив такое трапецеидальное распределение для X_i , можно найти, что ожидание X_i есть x_i = (a_- + a_+)/2, а связанная с ней дисперсия есть

$$u^2 (x_i) = a^2 (1 + \beta^2)/6, \tag{9а}$$

которая для треугольного распределения, β = 0, становится

$$u^2 (x_i) = a^2/6. \tag{9в}$$

Примечания. 1. Для нормального распределения с ожиданием μ и стандартной неопределенностью σ интервал μ ± 3σ покрывает приблизительно 99,73 процента распределения. Таким образом, если верхняя и нижняя границы a_+ и a_- определяют 99,73 процента, а не 100 процентные пределы, а также если можно предположить, что X_i распределена приблизительно нормально, а не так, как описано в 4.3.7, где нет конкретных данных о нахождении X_i между границами, тогда $u^2 (x_i) = a^2 /9$. Для сравнения: дисперсия симметричного прямоугольника шириной a есть $a^2/3$ [уравнение (7)], а дисперсия симметричного треугольного распределения полуширины a есть $a^2/6$ [уравнение (9в)]. Значение дисперсий этих трех распределений удивительно схожи, несмотря на большую разницу в количестве информации, необходимой для их обоснования.

2. Трапецеидальное распределение эквивалентно свертыванию двух прямоугольных распределений, одного с полушириной a_1 , равной средней полуширине трапеции $a_1 = a(1 + \beta)/2$, другого с полушириной $a_2 = a(1- \beta)/2$. Дисперсия распределения есть $u^2 = a_1^2/3 + a_2^2/3$. Свернутое распределение можно интерпретировать как прямоугольное распределение, ширина которого $2a_1$ сама имеет неопределенность представленную прямоугольным распределением с шириной $2a_2$, и моделирует тот факт, что границы на входную величину точно известны. Но даже если a_2 составляет вплоть до 30 процентов от a_1, то u превышает $a_1/\sqrt{3}$ меньше, чем на 5 процентов.

4.3.10. Важно не вести «повторного счета» составляющих неопределенности. Если составляющая неопределенности, возникающая от конкретного эффекта, получена оцениванием по типу В, то она должна быть включена как независимая составляющая неопределенности в вычисление суммарной стандартной неопределенности результата измерения только до той степени, чтобы эффект не вносил вклад в проявляющуюся изменчивость наблюдений. Это объясняется тем, что неопределенность, обусловленная той частью эффекта, которая вносит вклад в наблюдаемую изменчивость, уже включена в составляющую неопределенности, полученную из статистического анализа наблюдений.

4.3.11. Обсуждение оценивания стандартной неопределенности по типу В в 4.3.3 – 4.3.9 рассматривается как только качественное. В дальнейшем оценивания неопределенности должны быть основаны на количественных данных в максимально возможной степени, как подчеркивается в 3.4.1 и 3.4.2.

4.4. Графическая иллюстрация оценивания стандартной неопределенности

4.4.1. На рис. 1 графически представлена оценка значения входной величины X_i и оценивание неопределенности этой оценки из неизвестного распределения возможных измеренных значений X_i или распределения вероятностей X_i, выборку которого получают путем повторных измерений.

4.4.2. На рис. 1а предполагают, что входной величиной X_i является температура t, что ее неизвестным распределением является нормальное распределение с ожиданием μ_t = 100 °C и стандартным отклонением σ = 1,5 °C. Тогда ее функция плотности вероятностей имеет вид

$$p(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot exp\left[(t-\mu)^2 / 2\sigma^2\right].$$

> **Примечание.** Определение функции плотности вероятностей $p\ (z)$ требует, чтобы она удовлетворяла условию $\int p\ (z)dz = 1$.

4.4.3. На рис 1b показана гистограмма n = 20 повторных наблюдений t_k температуры t, которая, как предполагается, была взята случайно из распределения, показанного на рис 1а. Для получения гистограммы 20 наблюдений или выборок, значения которых даны в табл.1, группировались в интервалы шириной 1°C (подготовка гистограммы, конечно, не требуется для статистического анализа данных). Среднее арифметическое или среднее значение $\bar{t}$ из n = 20 наблюдений, вычисленное согласно уравнению (3), равняется: $\bar{t}$ = 100,145 °C ≈ 100,14 °C, и предполагается, что оно является лучшей оценкой ожидания μ_t значения t, основанной на имеющихся данных. Экспериментальное стандартное отклонение $s(t_k)$ = 1,489 °C ≈ 1,49 °C, и экспериментальное стандартное отклонение среднего $s(\bar{t})$ среднего значения, вычисленное из уравнения (5), которое является стандартной неопределенностью $u(\bar{t}) = s(\bar{t}) = s(t_k) / \sqrt{20}$ = 0,333 ≈ 0,33 °C (вероятно, что для дальнейших расчетов все эти цифры желательно сохранить).

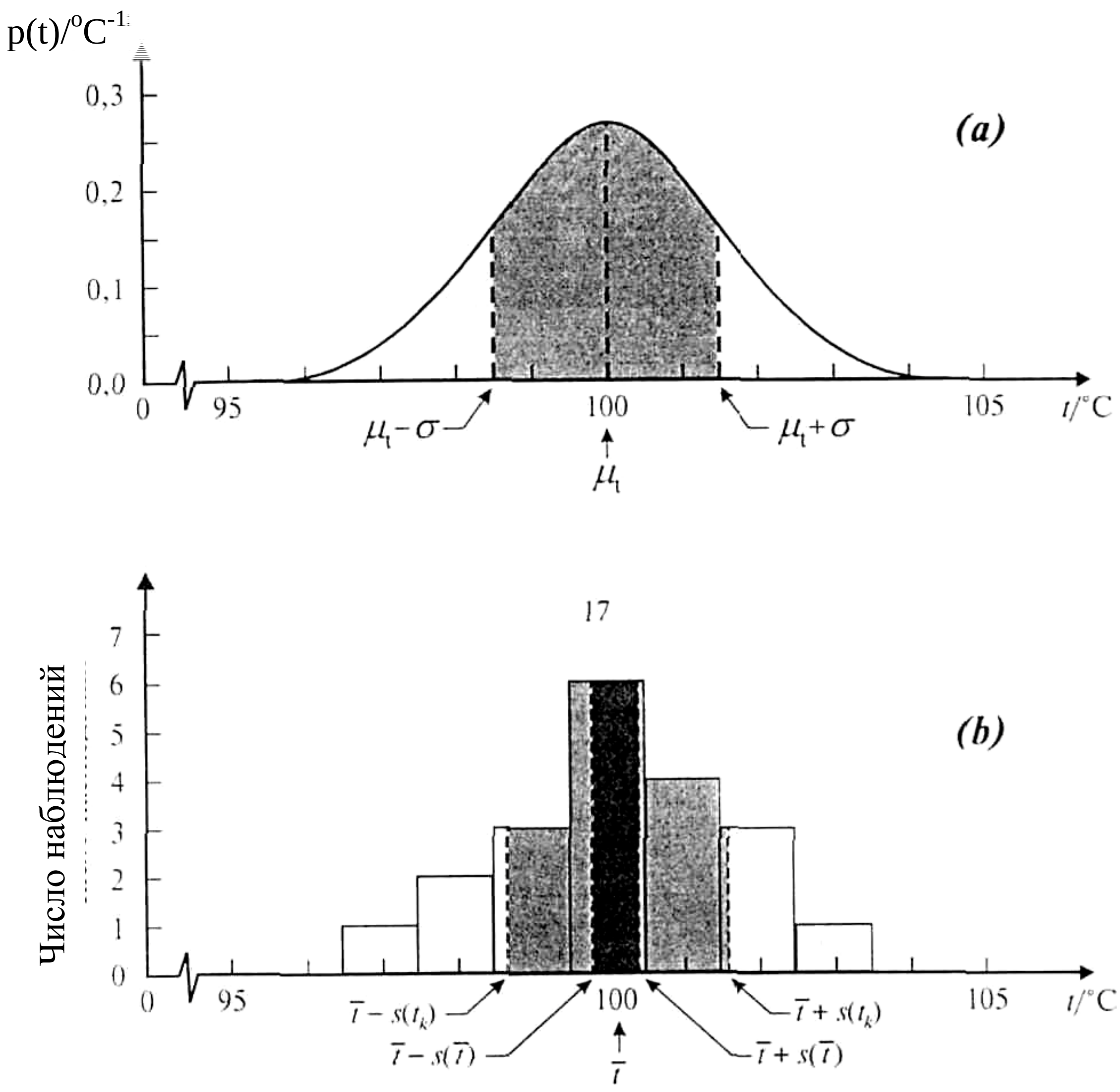

Рис. 1. Графическая иллюстрация оценивания стандартной неопределенности входной величины из повторных наблюдений

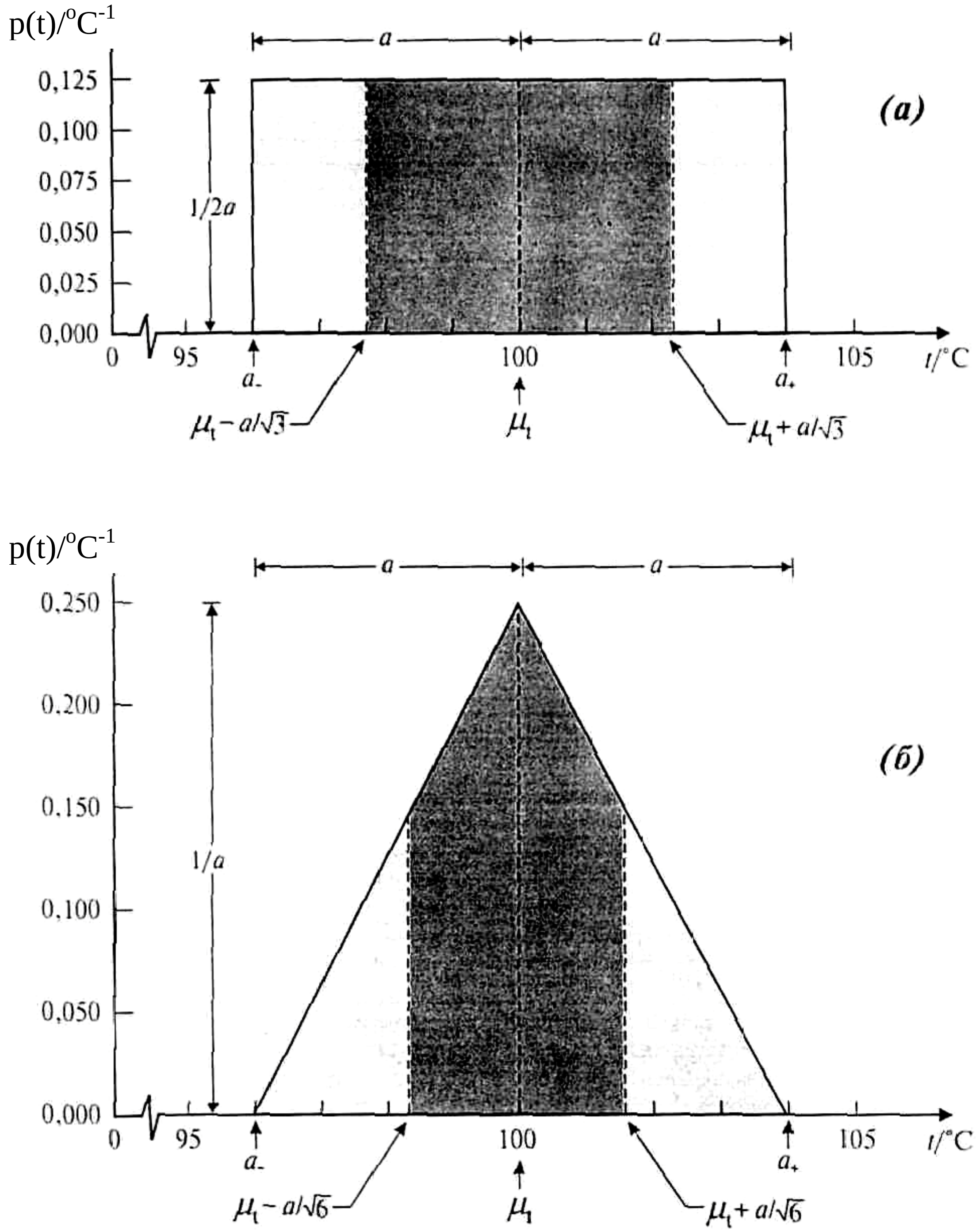

Рис. 2. Графическая иллюстрация оценивания стандартной неопределенности входной величины из априорного распределения

Примечание, Хотя данные в табл.1 являются правдоподобными, учитывая широкое использование цифровых электронных термометров с высоким разрешением, они приводятся в целях иллюстрации и не обязательно их следует истолковывать как описывающие реальное измерение.

Таблица 1. Двадцать повторных наблюдений температуры *t*, сгруппированных в интервалы 1^oC

Интервал $t_1 \le t < t_2$		Температура t, ^oC
t_1, ^oC	t_2, ^oC	
94,5	95,5	-
95,5	96,5	-
96,5	97,5	96,90
97,5	98,5	98,18; 98,25
98,5	99,5	98,61; 99,03; 99,49
99,5	100,5	99,56; 99,74; 99,89; 100,07; 100,33; 100,42
100,5	101,5	100,68; 100,95; 101,11; 101,20
101,5	102,5	101,57; 101,84; 102,36
102,5	103,5	102,72
103,5	104,5	-
104,5	105,5	-

4.4.4. На рис 2. графически показаны оценка значения входной величины X_i и оценивание неопределенности этой оценки из априорного распределения возможных значений X_i или распределения вероятностей X_i, основанной на всей имеющейся информации. Для обоих из показанных случаев снова предполагают, что входной величиной является температура *t*.

4.4.5. Для случая, показанного на рис.2а, предполагалось, что имеется мало информации о входной величине *t* и все, что можно сделать, так это предположить, что *t* описывается симметричным прямоугольным априорным распределением вероятностей с нижней границей $a_- = 96\ ^oC$ и верхней границей $a_+ = 104\ ^oC$ и, таким образом, полушириной $a = (a_+ - a_-)/2 = 4\ ^oC$ (см.4.3.7). Тогда функция плотности вероятностей величины *t* есть

$p(t) = 1/2a$, при $a_- \le t < a_+$,

$p(t) = 0$ в противном случае.

Как указано в 4.3.7,наилучшей оценкой t является ее ожидание $\mu_t=(a_+ - a_-)/2=100^oC$. Стандартная неопределенность этой оценки имеет вид $u(\mu_t) = a/\sqrt{3} \approx 2{,}3\ ^oC$, (см.уравнение 7).

4.4.6. Для случая, показанного на рис.2b, предполагается, что имеющаяся информация, касающаяся *t*, менее ограничена и что *t* можно описать симметричным треугольным *априорным* распределением вероятности при той же самой нижней границе a_- = 96 ^oC и той же самой верхней границе a_+ = 104 ^oC и, таким образом, той же полуширине a = (a_+ - a_-)/2 = 4 ^oC, как в 4.4.5 (см.4.3.9). Тогда функция плотности вероятностей величины t есть

$p(t)=(t- a_-)/a^2$, $a_- \leq t(a_+ + a_-)/2$,
$p(t)=(a_+ - t)/ a^2$, $(a_+ + a_-)/2 \leq t \leq a_+$,
$p(t)=0$ в противном случае.

Как указано в 4.3.9, ожидание величины t есть $\mu_t=(a_+ + a_-)/2$=100 ^oC, что вытекает из С.3.1. Стандартная неопределенность этой оценки есть
$u(\mu_t)= a/\sqrt{6}$=1,6 ^oC, что следует из С.3.2 (см. уравнение 9b).
Это последнее значение $u(\mu_t)$=1,6 ^oC можно сравнить с $u(\mu_t)$=2,3 ^oC, полученным в 4.4.5 из прямоугольного распределения с той же самой шириной 8 ^oC; из нормального распределения с σ =-1,5 ^oC из рис. 1а, чья ширина от -2,58σ до +2,58σ , включающая 99 процентов распределения, равна примерно 8 ^oC; и с $u(\bar{t}) = 0{,}33^0C$, полученной в 4.4.3 из 20 наблюдений, которые, как предполагалось, были взяты случайно из того же самого нормального распределения.

5. Определение суммарной стандартной неопределенности

5.1. Некоррелированные входные величины

Этот подраздел рассматривает случай, когда все входные величины **независимы** (с.3.7). Случай, когда две или более входные величины связаны между собой, т.е. взаимозависимы или коррелированны (С.2.8), обсуждается в 5.2.

5.1.1. Стандартная неопределенность y, где y оценка измеряемой величины Y и, следовательно, результат измерения получается путем соответствующего суммирования стандартных неопределенностей входных оценок $x_1, x_2 \ldots, x_N$ (см. 4.1). Эта *суммарная стандартная неопределенность* оценки y обозначается как $u_c(y)$.

> **Примечание.** По причинам, которые подобны указанным в Примечании к 4.3.1, символы $u_c(y)$ и $u_c^2(y)$ используются во всех случаях.

5.1.2. Суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ представляет собой положительный квадратный корень из суммарной дисперсии $u_c^2(y)$, полученной из формулы

$$u_C^2(y) = \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{df}{dx_i} \right)^2 u^2(x_i), \qquad (10)$$

где f - функция, приведенная в уравнении (1), каждая $u(x_i)$- стандартная неопределенность, оцененная, как описано в 4.2 (оценка по типу А) или в 4.3 (оценка по типу В). Суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ представляет собой оцененное стандартное отклонение и характеризует собой разброс значений, которые могут быть с достаточным основанием приписаны измеряемой величине Y (см.2.2.3). Уравнение (10) и его эквивалент для коррелированных входных величин - уравнение (13), оба из которых базируются на аппроксимации $Y = f(X_1, X_2,\ldots, X_N)$ рядом Тейлора первого порядка, выражают закон нераспространения неопределенности в терминах настоящего *Руководства*.

Примечание. При значительной нелинейности f члены более высокого порядка в разложении в ряд Тейлора должны быть включены в выражение для $u_c^2(y)$, уравнение (10). Когда распределение каждого X_i располагается симметрично относительно его среднего значения, самыми важными членами следующего более высокого порядка, которые надо добавить к членам уравнения (10), являются:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{d^2 f}{dx_i dx_j}\right)^2+\frac{df}{dx_i}\frac{d^3 f}{dx_i dx_j^2}\right)u^2(x_i)u^2(x_j).$$

5.1.3. Частные производные df/dx_i равны df/dX_i, оцененным как $X_i= x_i$ (см.Примечание 1 ниже). Эти производные, часто называемые коэффициентами чувствительности, показывают как входная оценка y изменяется с изменением значений входных оценок $x_1, x_2, \ldots, x_N$. В частности, изменения в y, вызванная небольшим изменением Δx_i во входной оценке x_i, дано формулой $(\Delta y)_I=(df/dx_i)\cdot(\Delta x_i)$. Если это изменение образовано стандартной неопределенностью оценки x_i , соответствующее изменение в y будет $(df/dx_i)\cdot u(x_i)$. Поэтому суммарную дисперсию $u_c^2(y)$ можно рассматривать как сумму членов, каждый из которых представляет оцененную дисперсию, связанную с выходной оценкой y, вызванной оцененной дисперсией, связанной с каждой входной оценкой x_i . Это предполагает запись уравнения (10) в виде

$$u_C^2(y)=\sum_{i=1}^{N}\left[c_i(x_i)\right]^2=\sum_{i=1}^{N}u_i^2(y), \tag{11а}$$

где $c_i = df / dx_i,$ $u_c(y) = |c_i| u(x_i)$. (11в)

Примечания. 1. Строго говоря, частные производные представляют собой $df/dx_i = df/dX_i$, оцененные на ожиданиях X_i. Однако на практике частные производные оцениваются как

$$df/dx_i = df/dX_i \;\; | \; x_1, x_2, \ldots, x_N$$

2. Суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$ можно численно рассчитать путем замены $c_i u(x_i)$ в уравнении (11а) на:

$$Z_i=1/2[f(x_1,\ldots,x_i+u(x_i),\ldots,x_N)-f(x_1,\ldots,x_i-u(x_i),\ldots,x_N)].$$

Таким образом, дается численная оценка $u_i(y)$ путем расчета изменения в y, обусловленного изменением в x_i на + $u(x_i)$ и на $-u(x_i)$. Тогда значение $u_i(y)$ может быть получено, как $|Z_i|$ и значения соответствующего коэффициента чувствительности c_i – как $Z_i/u(x_i)$.

Пример. Для примера 4.1.1, используя одно и то же обозначение для величины ее оценки в целях упрощения записи, имеем:

$c_1 = dP / dV = 2V/R_0 [1+\alpha(t-t_0)]=2P/V$;
$c_2 = dP / dR_0 = -V^2/R_0^2 [1+\alpha(t-t_0)]= -P/R_0$;
$c_3 = dP / d\alpha = -V^2(t-t_0)/R_0 [1+\alpha(t-t_0)]^2 = -P(t-t_0)/[1+ \alpha(1-t_0)]$,
$c_4 = dP / dt = -V^2\alpha/R_0 [1+\alpha(t-t_0)]^2= -P\alpha[1+\alpha(1-t_0)]$,
и
$u^2(P)=(dP/dV)^2u^2(V)+(dP/dR_{0)}^2u^2(R_0) + (dP/d\alpha)^2u^2(\alpha)+(dP/dt)^2u^2(t)=[c_{1u(V)]}^2 +$
$+[c_2u(R_0)]^2+[c_3u(\alpha)]^2+[c_4u(t)]^2= u_1^2(P)+u_2^2(P)+u_3^2(P)+u_4^2(P).$

5.1.4. Коэффициенты чувствительности df/dx_i вместо того, чтобы рассчитываться из функции f, иногда определяются экспериментальным путем с помощью измерения изменения в Y, вызванного изменением в выбранном X_i, поддерживая при этом остальные входные величины неизменными. В этом случае знание функции f (или части ее, когда так определяются только некоторые коэффициенты чувствительности) соответственно сводится к эмпирическому разложению в ряд Тейлора первого порядка, основанного на измеренных коэффициентах чувствительности.

5.1.5. Если уравнение (1) для измеряемой величины Y расширяется относительно номинальных значений $X_{i,0}$ входных величин $X_{i,}$ то для первого порядка (который обычно является адекватной аппроксимацией) $Y=Y_0+ c_1\delta_1+ c_2\delta_2+\ldots+ c_N\delta_N$, где $Y_0 =f (X_{1,0}, X_{2,0},\ldots X_{N,0})$, $c_i = (df/dX_i)$, оцененное при $X_i = X_{i,0}$ и $\delta_i= X_{i,} - X_{i,0}$. Таким образом, в целях анализа неопределенности, измеряемая величина обычно может аппроксимироваться линейной функцией ее переменных путем преобразования ее входных величин от X_i к δ_i .

Пример. Из примера 2 в 4.3.7 оценка измеряемой величины V равна $V = \overline{V} + \Delta\overline{V}$, где $\overline{V}$ =0,928571 В, $u(\Delta\overline{V}) = 12$ *мкВ* , суммированная поправка $\Delta\overline{V} = 0$ и $u(\Delta\overline{V}) = 8{,}7$ *мкВ* . Поскольку $dV / d\overline{V} = 1$ и $dV / d(\Delta\overline{V}) = 1$, суммарная дисперсия, связанная V дается формулой

$$u_c^2(V) = u^2(\overline{V}) + u^2(\Delta\overline{V}) = (12\ мкВ)^2 + (8{,}7\ мкВ)^2 = 219 \cdot 10^{-12} В^2$$

и суммарная стандартная неопределенность равна $u_c(V)$=15 мкВ, что соответствует относительной суммарной стандартной неопределенности $u_c(V)/V$=16 · 10^{-6} В (см.5.1.6). Это пример случая, когда измеряемая величина уже является линейной функцией величин, от которых она зависит, с коэффициентами c_i = +1. Из уравнения (10) следует, что если $Y=c_1X_1+c_2X_2+...+c_NX_N$, и константы c_i = +1 или -1, то $u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{N} u^2(x_i)$.

5.1.6. Если Y имеет вид $Y = cX_1^{p_1} \cdot X_2^{p_2} \cdot ... \cdot X_N^{p_N}$ и известно, что степени p_i представляют собой положительные или отрицательные числа, имеющие пренебрежимо малые неопределенности, то суммарную дисперсию, уравнение (10), можно выразить как

$$[u_C(y)/y]^2 = \sum_{i-1}^{N} [p_i u(x_i)/x_i]^2 \qquad (12)$$

Это уравнение имеет такой же вид, как и уравнение (11а), но с суммарной дисперсией $u_C^2(y)$, выраженной как относительная суммарная дисперсия $[u_c(y)/y]^2$, и оцененной дисперсией $u^2(x_i)$, связанной с каждой входной оценкой, выраженной как оцененная относительная дисперсия $[u(x_i)/ x_i]^2$. (Относительная суммарная стандартная неопределенность есть $u_c(y)/|y|$ и относительная стандартная неопределенность каждой входной оценки: $u(x_i)/|x_i|$, $|y| \neq 0$ и $|x_i| \neq 0$).

Примечания. 1. Преобразования измеряемой величины Y в этом виде в линейную функцию переменных (см. 5.1.5) легко достичь путем подстановки $X_i = X_{i,0}\ (1+\delta_i)$, и тогда получаем следующие приблизительные зависимости $(Y\text{-}Y_0)/Y_0 = \sum_{i=1}^{N} p_i\delta_i$. С другой стороны, логарифмическое преобразование $Z=\ln c + \sum_{i=1}^{N} p_i W_i$.

2. Если каждое p равно либо +1, либо минус 1, то уравнение (12) принимает вид $[u_c(y)/y]^2 = \sum_{i=1}^{N} [u(x_i)/x_i]^2$, который показывает, что в этом особом случае относительная суммарная дисперсия, связанная с оценкой y просто равна сумме оцененных относительных дисперсий, связанных с входными оценками x_i .

5.2. Коррелированные входные величины

5.2.1. Уравнение (10) и те уравнения, которые выведены из него, такие как (11) и (12), справедливы только в том случае, если входные величины X_i независимы или некоррелированы (считается, что инвариантами являются случайные переменные, а не физические величины – см. 4.1.1., Примечание 1). 1). Если какие-либо из X_i в значительной степени коррелированны, то корреляцию необходимо брать в расчет.

5.2.2. Когда входные величины коррелированны, соответствующее выражение для суммарной дисперсии $u_c^2(y)$, связанной с результатом измерения, будет

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{d\int}{dx_i}\frac{d\int}{dx_j}u\left(x_i,x_j\right) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{d\int}{dx_i}\right)^2 u^2\left(x_i\right) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{d\int}{dx_i}\frac{d\int}{dx_j}u\left(x_i,x_j\right), \tag{13}$$

где x_i и x_j являются оценками X_i и X_j , а $u(x_i, x_j)=$ $=u(x_j, x_i)$ являются оцененной ковариацией, связанной с x_i и x_j. Степень корреляции между x_i и x_j характеризуется оцененным **коэффициентом корреляции** (С.3.6)

$$r(x_i, x_j)=u(x_i, x_j)/u(x_i)\,u(x_j), \tag{14}$$

где $r(x_i, x_j)=r(x_j\ x_{i,})$, и $-1\le r(x_i, x_j)=\le +1$. Если оценки x_i и x_j независимы, то $r(x_i,x_j)=0$, и изменение одной из них не означает ожидаемого изменения другой (см. С.2.8, С.3.6 и С.3.7 для более подробной информации).

В терминах коэффициентов корреляции, которые легче истолковать, чем ковариации, член ковариации в уравнении (13) можно записать как

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{d\int}{d_i}\frac{d\int}{dx_j}u\left(x_i\right)u\left(x_j\right)r\left(x_i,x_j\right). \tag{15}$$

Таким образом, с помощью уравнения (11в) уравнение (13) принимает вид:

$$u_c^2\left(y\right) = \sum_{i=1}^{N}c_i^2u^2\left(x_i\right) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}c_ic_ju\left(x_i\right)u\left(x_j\right)r\left(x_i,x_j\right) \tag{16}$$

Примечания. 1. Для весьма особого случая, когда все входные оценки корреляции с коэффициентами корреляции $r(x_i, x_j)=+1$, уравнение (16) сводится к

$$u_c^2(y) = \Big(\sum_{i=1}^{N} c_i u\left(x_i\right)\Big)^2 = +\Big(\sum_{i=1}^{N} \frac{d\int}{dx_i} u\left(x_i\right)\Big)^2 .$$

Таким образом, суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$ является просто положительным квадратным корнем из *линейной суммы* членов, представляющих собой дисперсию выходной оценки y, вызванной стандартной неопределенностью каждой входной оценки x_i (см. 5.1.3). [Эту линейную сумму не следует путать с общим законом распространения погрешностей, хотя они и имеют похожую форму; стандартные неопределенности не являются погрешностями (см.Е.3.2)]

Пример. 1. Десять резисторов, каждый из которых имеет номинальное сопротивление R_i=1000 Ом, откалиброваны с пренебрежимо малой неопределенностью сличения с помощью такого же эталонного резистора R_s на 1000 Ом, характеризующегося стандартной неопределенностью $u(R_s)$=100 мОм, как указано в его свидетельстве о сертификации. Резисторы соединены последовательно с помощью проводов, имеющих пренебрежимо малое сопротивление для того, чтобы получить образцовое сопротивление R_{ref} с номинальным сопротивлением 10 кОм. Таким образом, $R_{ref} = f(R_i) = \sum_{i=1}^{10} R_i$. Поскольку $r(x_i,x_j) = r(R_i,R_j) = +1$ для каждой пары резисторов (см. F.1.2.3 Пример 2), то применимо уравнение этого Примечания. Так как для каждого резистора $d\int/dx_i = dR_{ref}/dR_i = 1$ и $u(x_i) = u(R_i) = u(R_s)$ (см. F.1.2.3, Пример 2), то это уравнение дает для суммарной стандартной неопределенности R_{ref} , выражение $u_c(R_{ref}) = \sum_{i=1}^{10} u(R_s)$=10·(100 мОм)=1 Ом. Результат $u_c(R_{ref})=[\sum_{i=1}^{10} u^2(R_s)]$=0,32 Ом, полученный с помощью уравнения (10), неверен, так как он не учитывает, что все калиброванные значения десяти резисторов коррелированны.

2. Оцененные дисперсии $u^2(x_i)$и оцененные ковариации $u(x_i,x_j)$можно рассматривать, как элементы ковариационной матрицы с элементами u_{ij} матрицы являются дисперсиями $u^2(x_i)$, в то время как внедиагональные элементы u_{ij} ($i \neq j$). Если две входные оценки некоррелированы, то их ковариации и соответствующие элементы и u_{ij} и u_{ji} ковариационной матрицы равны 0. Если все входные оценки некоррелированы, то все внедиагональные элементы равны нулю и ковариационная матрица является диагональной (см. также С.3.5).

3. В целях численного оценивания уравнение (16) можно записать, как

$$u_c^2(y) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} Z_i Z_j r\left(x_i, x_j\right),$$

где Z_i дано в 5.1.3, Примечание 2.

4. Если X_i особого вида, рассмотренные в 5.1.6, коррелированны, то в правой части уравнения (12) необходимо добавить следующие члены

$$2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\left[\frac{p_i u(x_i)}{x_i}\right]\left[\frac{p_j u(x_j)}{x_j}\right] r\left(x_i, x_j\right).$$

5.2.3. Рассмотрим два средние арифметические $\overline{q}$ и $\overline{r}$, которые оценивают μ_q и μ_r двух случайно изменяющихся величин q и r, и пусть $\overline{q}$ и $\overline{r}$ вычисляются из n независимых пар одновременных наблюдений q и r, сделанных при одинаковых условиях измерений (см. В.2.15). Тогда ковариация $\overline{q}$ и $\overline{r}$ оценивается по формуле (см.С.3.4)

$$s\left(\overline{q},\overline{r}\right)=\frac{1}{n\left(n-1\right)}\sum_{k=1}^{n}\left(q_k-\overline{q}\right)\left(r_k-\overline{r}\right), \tag{17}$$

где q_k и r_k являются индивидуальными наблюдениями величин q и r, а $\overline{q}$ и $\overline{r}$ рассчитываются их наблюдений в соответствии с уравнением (3). Если в действительности наблюдения некоррелированы, то предполагается, что расчетная ковариация примерно равна 0.

Таким образом, оцененная ковариация двух коррелированных входных величин X_i и X_j, которые оцениваются посредством $\overline{X}_i$ и $\overline{X}_j$, определенными из независимых пар повторных одновременных наблюдений, дается формулой $u(x_i,x_j)=s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)$, где $s(\overline{X}_i,\overline{X}_j)$, рассчитываются в соответствии с уравнением (17). Такое использование уравнения (17) можно рассматривать, как оценку ковариации по типу А. Оцененный коэффициент корреляции для X_i и X_j получают из уравнения (14) $r(x_i,x_j)=r(X_i,X_j)=s(\overline{X}_i\overline{X}_j)/s(\overline{X}_i)s(\overline{X}_j)$.

Примечание. Примеры, когда необходимо использовать ковариации, рассчитанные из уравнения (17), даны в Н.2 и Н.4.

5.2.4. Может существовать значительная корреляция между двумя входными величинами, если при их определении используют один и тот же измерительный прибор, физический эталон измерения или справочные данные, имеющие значительную стандартную неопределенность. Например, если поправка на температуру, необходимая для оценки входной величины X_i, получается с помощью некоторого термометра и такая же поправка на температуру, необходимая для оценки входной величины X_j, тоже получается с помощью этого же термометра, то две входные величины могут быть значительно коррелированны, Однако, если X_i и X_j в этом примере переопределены как величины без поправок, и величины, которые определяют калибровочную кривую термометра, включены как добавочные входные величины с независимыми стандартными неопределенностями, корреляция между X_i и X_j устраняется (см. F.1.2.3 и F.1.2.4 для дальнейшего обслуживания).

5.2.5. Корреляция между входными величинами нельзя игнорировать, если они имеются и значительны. Связанные с ними ковариации следует оценивать экспериментально, если это возможно, изменяя коррелированные входные величины (см.С.3.6. Примечание 3) или используя всю имеющуюся информацию о коррелированной изменчивости рассматриваемых величин (оценивание ковариации по типу В). Правильное понимание, базирующееся на прошлом опыте и общих знаниях (см.4.3.1 и 4.3.2), особо необходимо при оценивании степени корреляции между входными величинами, возникающей из-за эффектов, оказывающих общие влияния, таких как температура окружающей среды, атмосферное давление и влажность. К счастью, во многих случаях эффекты таких влияний имеют пренебрежимо малую взаимосвязь, так что можно предположить, что входные величины, испытывающие такие влияния, некоррелированы. Однако, если нельзя предположить, что они некоррелированы, сами корреляции могут быть исключены, если общие влияния введены как добавочные независимые входные величины, как указано в 5.2.4.

6. Определение расширенной неопределенности

6.1. Общие положения

6.1.1. Рекомендация INC-1 (1980), разработанная Рабочей группой по составлению отчета о неопределенностях, на которой базируется данное *Руководство* (см. Введение), и Рекомендации 1 (Cl-1981) и 1 (Cl-1986), разработанные МКМВ, которые одобрили и вновь утвердили INC-1 (1980) (см. А.2 и А.3), поддерживают использование суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$ в качестве параметра для количественного выражения неопределенности результата измерения. В самом деле, во второй из его рекомендаций МКМВ предложил «всем участникам при представлении результатов всех международных сличений или других работ под эгидой МКМВ и консультативных комитетов» использовать, как это теперь называется, суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$.

6.1.2. Хотя $u_c(y)$ может повсеместно использоваться для выражения неопределенности результата измерения, в некоторых случаях в торговле, промышленности и регулирующих актах, а также когда дело касается здоровья и безопасности, часто необходимо дать меру неопределенности, которая указывает интервал для результата измерения, в пределах которого, можно ожидать, находится ли большая часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать измеряемой величине. Существование такого требования было признано Рабочей группой и привело к появлению параграфа 5 Рекомендации INC-1 (1980). Оно также отражено в Рекомендации 1 (С1-1986) МКМВ.

6.2. Расширенная неопределенность

6.2.1. Дополнительная мера неопределенности, которая соответствует требованию указания интервала, как упомянуто в 6.1.2, называется

расширенной неопределенностью и обозначается символом *U.* Расширенную неопределенность *U* получают путем умножения суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$ на ***коэффициент охвата*** *k*

$$U=k\,u_c(y). \tag{18}$$

Тогда результат измерения удобно выражается как $Y = y \pm U$, что означает, что наилучшей оценкой значения, приписываемого измеряемой величине *Y*, является *y*, и что интервал от $y - U$ до $y + U$ содержит, можно ожидать, большую часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать *Y* . Такой интервал также выражается в виде $y - U \leq Y \leq y + U$.

6.2.2. Термины «**доверительный интервал**» и «**уровень доверия**» имеют в статистике специальные определения и применяются к интервалу, определяемому *U*, только когда выполнены определенные условия, включая условие, чтобы все составляющие неопределенности, которые входят в $u_c(y)$, были бы получены из оценивания по типу А. Таким образом, в данном *Руководстве* слово «**доверие**» не используется для модификации слова «**интервал**», когда ссылаются на интервал, определяемый *U;* и термин «**доверительный уровень**» также не используется в связи с интервалом и предпочитается скорее термин «**уровень доверия**». Более конкретно, *U* рассматривается как задание интервала вокруг результата измерения, который содержит большую часть *p* распределения вероятностей, характеризуемого стандартной неопределенностью, и *p* является «***вероятностью охвата***» или «***уровнем доверия***» для этого интервала.

6.2.3. Если это возможно, необходимо оценить и указать доверительный уровень *p*, связанный с интервалом, определяемым *U*. Надо признать, что умножение $u_c(y)$ на какую-то постоянную величину не дает никакой новой информации, а просто представляет ранее имевшуюся информацию в новом виде. Однако нужно также признать, что в большинстве случаев уровень доверия *p* (особенно для значений *p*, близких к 1) будет скорее неопределенным не только из-за ограниченного знания распределения вероятностей, характеризуемых *y* и $u_c(y)$ (особенно в крайних областях), но также из-за неопределенности самой $u_c(y)$ (см. Примечание 2 к 2.3.5, 6.3.2).

> **Примечание.** Предпочтительный способ указания результата измерения, когда мера неопределенности есть $u_c(y)$ или *U*, смотри соответственно в 7.2.2. и 7.2.4.

6.3. Выбор коэффициента охвата

6.3.1. Значение коэффициента охвата *k* выбирается на основе уровня доверия, требуемого интервала от *y-U* до *Y+ U*. Обычно *k* бывает в диапазоне от 2 до 3. Однако в особых случаях *k* может выходить за пределы этого диапазона.

Богатый опыт и полное знание способов применения результата измерения может ускорить выбор нужного значения k.

> **Примечание.** Иногда может обнаружиться, что известная поправка b на систематический эффект не вносилась в сообщаемый результат измерения, а вместо этого была сделана попытка учесть эффект путем расширения «***неопределенности***», приписываемой результату. Этого следует избегать; только при особых обстоятельствах не вносятся поправки в результат измерения на известные значимые систематические эффекты. Оценивание неопределенности результата измерения не следует путать с предписанием безопасного допуска какой-либо величине.

6.3.2. В идеале хотелось бы иметь возможность выбрать конкретное значение коэффициента охвата k, которое бы обеспечило интервал $Y = y \pm U = y \pm ku_c(y)$, соответствующий выбранному уровню доверия, такому как 95 или 99 процентов; равным образом, для заданного значения k хотелось бы иметь возможность четко указать уровень доверия, связанный с этим интервалом. Однако это не легко осуществить на практике, поскольку это требует полного знания распределения вероятностей, характеризуемого результатом измерения y и его суммарной стандартной неопределенности $u_c(y)$. Хотя эти параметры обладают большой значимостью, сами по себе они недостаточны для того, чтобы установить интервалы, имеющие точно известные уровни доверия.

6.3.3. Рекомендации INC-1 (1980) не показывает, как следует устанавливать отношения между k и p. Однако часто является адекватным более простой подход, где распределение вероятностей, характеризуемое y и $u_c(y)$, является приблизительно нормальным и число эффективных степеней свободы $u_c(y)$ значительно. В этом случае, часто встречающемся на практике, можно предположить, что принятие $k = 2$ дает интервал, имеющий уровень доверия примерно 95 процентов, а принятие $k = 3$ дает интервал, имеющий уровень доверия приблизительно 99 процентов.

7. Составление отчета о неопределенности

7.1. Общие рекомендации

7.1.1. В целом, при движении вверх по иерархии измерений требуется все больше подробностей о том, как были получены результат измерения и его неопределенность. Тем не менее, на любом уровне этой иерархии, включая коммерческую и регулирующую деятельность на рынке, инженерную работу в промышленности, калибровочные услуги более низкого уровня, промышленные исследования и разработки, академические исследования, промышленные исходные эталоны и калибровочные лаборатории, национальные лаборатории эталонов и МБМВ, вся информация, необходимая для повторного оценивания измерения должна быть доступна для тех, кто может в ней нуждаться. Глубинная разница заключается в том, что на более низких уровнях и иерархической цепи большая часть необходимой информации может быть сделана доступной в форме опубликованных отчетов о калибровке и испытаниях, спецификаций по испытаниям, сертификатов о калибровке и испытаниях, руководств по эксплуатации, международных и национальных стандартов и локальных регулирующих актов.

7.1.2. Когда подробности об измерении, включая то, как была оценена неопределенность его результата, обеспечиваются ссылкой на существующие документы, как это часто бывает в случае, когда результаты калибровки приводятся в сертификате, настоятельно необходимо, чтобы эти документы поддерживались на современном уровне так, чтобы они соответствовали непосредственно используемой в настоящее время процедуре измерения.

7.1.3. Огромное число измерений производится каждый день в промышленности и торговле без каких-либо развернутых отчетов о неопределенности. Однако многие из них проводятся с помощью приборов, подлежащих периодической калибровке или узаконенной поверке. Если известно, что используемые приборы находятся в соответствии с их спецификациями или существующими нормативными документами, то неопределенности их показаний могут быть извлечены из этих спецификаций или нормативных документов.

7.1.4. Хотя на практике количество информации, необходимое для того, чтобы задокументировать результат измерения, зависит от его предполагаемого использования, основной принцип назначения требований к ним остается неизменным: при составлении отчета о результате измерения и его неопределенности лучше дать слишком много информации, чем слишком мало. Например, следует:

а) ясно описать методы, используемые для вычисления результата измерения и его неопределенности из экспериментальных наблюдений и входных данных;

б) перечислить все составляющие неопределенностей и полностью задокументировать, как они оценивались;

в) представить анализ данных таким образом, чтобы можно было легко следовать всем его важным этапам и в случае необходимости независимо повторить вычисления сообщаемого результата;

г) дать все поправки и константы, используемые в анализе, и их источники.

Для того, чтобы проверить приведенный выше спISOк, нужно спросить себя: «Дал ли я достаточно информации в достаточно ясном виде для того, чтобы мой результат можно было улучшить в будущем, если появится новая информация или новые данные?»

7.2. Конкретные рекомендации

7.2.1. Когда указывается результат измерения и мерой неопределенности является суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$, следует:

а) дать полное описание того, как определяется измеряемая величина Y;

б) дать оценку y измеряемой величины Y и ее суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$; всегда должны быть указаны единицы для y и $u_c(y)$;

в) в случае необходимости включить относительную неопределенность $u_c(y)/|y|$, $|y| \neq 0$;

г) дать информацию, приведенную в 7.2.7, или сослаться на опубликованный документ, содержащий ее.

Если это предполагается полезным для лиц, которые намерены воспользоваться результатом измерения, например, для того чтобы помочь в будущем при расчетах коэффициентов охвата или помочь в понимании измерения, можно указать:

- оцененные эффективные степени свободы $\nu_{эфф}$;
- суммарные стандартные неопределенности по типу А и В – $u_{cA}(y)$ и $u_{cB}(y)$, и их оцененные эффективные степени свободы $\nu_{эффA}$ и $\nu_{эффB}$.

7.2.2. Когда мера неопределенности - $u_c(y)$, лучше всего указать численный результат измерения одним из следующих способов для того, чтобы предотвратить не понимание (предполагается, что величина, чье значение сообщается, является эталоном массы m_s с номинальным значением 100 г; слова в скобках можно опустить для краткости, если u_c определяется где-либо еще в документе, сообщающем результат):

1) «m_s =100,02147 г с (суммарной стандартной неопределенностью) u_c = 0,35 мг;
2) «m_s =100,02147(35) г, где цифры в скобках являются численным значением (суммарной стандартной неопределенности u_c, соответствующим последним цифрам приведенного результата»;
3) «m_s =100,02147(0,00035) г, где число в скобках является численным значением (суммарной стандартной неопределенности) u_c, выраженной в единицах приведенного результата;
4) «m_s =(100,02147 ± 0,00035) г, где число, следующее за знаком ± является численным значением (суммарной стандартной неопределенности) u_c, а не доверительным интервалом.

Примечание. Форму со знаком ± следует по возможности избегать, поскольку традиционно она использовалась для указания интервала, соответствующего высокому уровню доверия, и, следовательно, может быть спутана с расширенной неопределенностью (см. 7.2.4). Далее, хотя скобки в 4) используются с целью предотвращения такой путаницы, запись $Y=yu_c(y)$ может быть все-таки неправильно истолковано, особенно если скобки случайно будут опущены, а именно, что здесь подразумевается расширенная неопределенность с k = 1 и что интервал $y - u_c(y) \leq Y \leq y + u_c(y)$

имеет определенный уровень доверия p, а именно - уровень, связанный с нормальным распределением. Как указано в 6.3.2, истолкование $u_c(y)$ таким способом обычно трудно оправдать.

7.2.3. Когда указывается результат измерения и мерой неопределенности является расширенная неопределенность $U = k$, следует:

а) дать полное описание, как определена измеряемая величина Y;

б) указать результат измерения, как $Y = y \pm U$ и привести единицы для y и U;

в) когда приемлемо, включить относительную расширенную неопределенность $U/|y|$, $|y| \neq 0$;

г) дать значение k, используемое для получения U (или дать и k, и $u_c(y)$ для удобства тех, кто использует результат);

д) привести приблизительный уровень доверия, связанный с интервалом $y \pm U$ и указать, как он был определен;

е) дать информацию, описанную в 7.2.7, или ссылку на опубликованный документ, содержащий ее.

7.2.4. Когда мерой неопределенности является U , то лучше всего для максимальной ясности указать численный результат измерения, как в следующем примере (слова в скобках можно опустить для краткости, если U , u_c, и k определены где-либо еще в документе, сообщающем результат).

«m_s = (100,02147± 0,00079) г, где число, следующее за знаком ± , является численным значением (расширенной неопределенности) $U = ku_c$, где U определено из (суммарной стандартной неопределенности) u_c = 35 мг и (коэффициента охвата) k = 2,26, основанного на t – распределении для ν = 9 степеней свободы, и определяет интервал, оцененный как имеющий уровень доверия 95 процентов».

7.2.5. Если процедура измерения определяет одновременно более одной измеряемой величины, то есть если она дает значения двух или более выходных оценок y_i, то кроме y_i и $u_c(y_i)$ для каждой нужно дать элементы ковариационной матрицы $u(y_i,y_j)$ или элементы $r(y_i,y_j)$ ***матрицы коэффициентов корреляции***, а лучше и те, и другие.

7.2.6. Численные значения оценки y и ее стандартной неопределенности $u_c(y)$ или расширенной неопределенности U не следует давать с избыточным числом цифр. Обычно достаточно привести $u_c(y)$ и U (а также стандартной неопределенности $u(x_i)$ входных оценок x_i) от силы с двумя значащими цифрами, хотя в некоторых случаях может быть необходимо сохранить дополнительные цифры для того, чтобы избежать погрешностей округления в последующих расчетах.

При сообщении окончательных результатов может быть уместным округлить неопределенности в сторону увеличения, а не до ближайшей цифры. Например, $u_c(y)$ =10,47 мОм можно округлить до 11 мОм. Однако здравый смысл должен возобладать, и значение, такое как $u(x_i)$ = 28,05 кГц, следует округлить до 28 кГц. Выходные и входные оценки должны округляться так, чтобы соответствовать своим неопределенностям: например, если y = 10,05762 Ом с $u_c(y)$ =27 мОм, то y следует округлить до 10,058 Ом. Коэффициенты корреляции должны даваться с точностью до третьей цифры, если их абсолютное значение близки к единицы.

7.2.7. При подробном описании того, как были получены результат измерения и его неопределенность, необходимо следовать рекомендациям 7.1.4 и, таким образом:

а) дать значения каждой входной оценке x_i и ее стандартной неопределенности $u(x_i)$ вместе с описанием того, как они были получены;

б) дать оцененные ковариации и коэффициенты корреляции (а лучше и те, и другие) для всех коррелированных входных оценок и методы, использованные для их получения;

в) указать степени свободы для стандартной неопределенности каждой входной оценки и то, как они были получены;

г) дать функциональную зависимость $Y=f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$, и, в случае необходимости – частные производные или коэффициенты чувствительности df/dx_i . Однако любой из таких коэффициентов, определенных экспериментально, привести необходимо.

Примечание. Поскольку функциональная зависимость f может быть чрезвычайно сложной и может отсутствовать в явном виде, а только в виде компьютерной программы, не всегда оказывается возможным дать f и ее производные. В этом случае f можно описать общими терминами или дать соответствующую ссылку на используемую программу. В таких случаях важно, чтобы было ясным, как были получены оценка y измеряемой величины Y и ее суммарная стандартная неопределенность $u_c(y)$.

8. Краткое описание процедуры оценивания и выражения неопределенности

Этапы, которым нужно следовать при оценивании и выражении неопределенности результата измерения, как представлено в данном *Руководстве,* можно свести к следующим:

1. Выразите математически зависимость между измеряемой величиной Y и входными величинами X_i , от которых она зависит $Y=f(X_1, X_2, \ldots, X_N)$. Функция f должна содержать каждую величину, включая все поправки и поправочные множители, которая может внести значительную составляющую в неопределенность результата измерения (см.4.1.1 и 4.1.2).

2. Определите x_i – оцененное значение входной величины X_i , либо на основе статистического анализа рядов наблюдений или другими средствами (см.4.1.3).

3. Оцените *стандартную неопределенность* $u(x_i)$ каждой входной оценки x_i. Для входной оценки, полученной из статистического анализа рядов наблюдений, стандартная неопределенность оценивается, как описано в 4.2 (*оценивание стандартной неопределенности по типу* А). Для входной оценки, полученной другими средствами, стандартная неопределенность $u(x_i)$оценивается, как описано в 4.3 (*оценивание стандартной неопределенности по типу* В).

4. Если значения каких-либо входных величин коррелированны, оцените их ковариации (см. 5.2).

5. Рассчитайте результат измерения, то есть оценку y измеряемой величины Y из функциональной зависимости f, используя для входных величин X_i оценки x_i, полученные на этапе 2 (см. 4.1.4).

6. Определите *суммарную стандартную неопределенность* $u_c(y)$ результата измерения y из стандартных неопределенностей и ковариаций, связанных с входными оценками, как описано в разделе 5. Если измерения определяет одновременно более одной входной величины, рассчитайте их ковариации (см. 7.2.5).

7. Если требуется дать *расширенную неопределенность* U, чьей целью является обеспечение интервала от $y - U$ до $y + U$, в пределах которого, предположительно, находится большая часть распределения значений, которые можно с достаточным основанием приписать измеряемой величине Y, умножьте суммарную стандартную неопределенность $u_c(y)$ *на коэффициент охвата* k, обычно находящийся в диапазоне от 2 до 3, чтобы получить $U = k\, u_c(y)$. Выберете k, исходя из желаемого уровня доверия, требуемого для интервала (см. 6.2 и 6.3).

8. Сообщите результат измерения y вместе с его суммарной стандартной неопределенностью $u_c(y)$ или расширенной неопределенностью U, как рассмотрено в 7.2.1 и 7.2.3; используйте одну из форм, как указано в 7.2.2 и 7.2.4. Опишите, как подчеркнуто также в разделе 7, каким образом были получены y и $u_c(y)$ или U.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение В. Основные метрологические термины

В.1. Источник определений

При составлении данного *Руководства* по основным метрологическим терминам были использованы определения из *Международного словаря основных и общих терминов метрологии* (сокращенно VIM), второе издание, выпущенного Международной организацией по стандартизации (ISO) от имени семи организаций, оказавших поддержку при его создании и представивших своих экспертов для подготовки. Среди них: Международное бюро мер и весов (МБМВ), Международная электротехническая комиссия (МЭК), Международная федерация клинической химии (МФКХ), ISO, Международный союз по теоретической и прикладной химии (ИЮПАК), Международный союз по теоретической и прикладной физике (ИЮПАП) и Международная организация законодательной метрологии (МОЗМ). VIM должен являться основополагающим источником, к которому следует обращаться относительно определения терминов, не включенных либо в *Руководство,* либо в текст.

Примечание. Некоторые основные статистические термины и понятия приведены в приложении С, в то время как термины «истинное значение», «погрешность» и «неопределенность» рассматриваются далее в приложении D.

В.2. Определения

Как в разделе 2, в следующих далее определениях использование скобок, ограничивающих определенные слова некоторых терминов, означает, что эти слова могут быть опущены, если это не вызовет путаницы.

Термины, выделенные жирным шрифтом в некоторых примечаниях, являются дополнительными метрологическими терминами, определение которых даются в этих примечаниях прямо или косвенно.

В.2.1. (Измеримая) величина [VIM] - свойство явления, объекта или вещества, которое может выделяться качественно и определяться количественно.

Примечания. 1. Термин «величина» может обозначать величину в общем смысле [см. примеры а)] или **конкретную величину** [см. примеры b)].

Примеры.

а) величины в общем смысле: длина, время, масса, температура, электрическое сопротивление, концентрация вещества;

b) конкретные величины:

- длина данного стержня;
- электрическое сопротивление данного образца провода;
- концентрация этанола в данной пробе вина.

2. Величины, которые можно расположить по порядку значений величины друг относительно друга называются **однородными величинами**.

3. Однородные величины могут быть сгруппированы по **категориям величин**, например:

- работа, теплота, энергия;
- толщина, длина окружности, длина волны.

4. Обозначения величин приведены в ISO 31.

В.2.2. Значение (величины) [VIM 1.18] – значение конкретной величины, выражаемое, как правило, произведением единицы измерения на число.

Примеры.

а) длина стержня 5,34 м или 534 см;

b) масса тела 0,152 кг или 152 г;

c) количество вещества
пробы воды (H_2O) 0,012 моль или 12 ммоль.

Примечания. 1. Значение величины может быть положительным, отрицательным или нулевым;
2. Значение величины может быть выражено разными способами.
3. Значения величин, имеющих размерность, равную 1, как правило, выражаются безразмерным числом.
4. Величина, которая не может быть выражена в виде произведения единицы измерения на число, может быть выражена ссылкой на принятую условную шкалу или на измерительную процедуру, или на то и другое.

В.2.3. Истинное значение (величины) [VIM 1.19] - значение, соответствующее определению данной конкретной величины.
Примечания. 1. Это – значение, которое могло бы быть получено при идеальном измерении.
2. Истинное значение по природе не определимо.
3. В английском языке неопределенный артикль чаще, чем определенный, используется в сочетании с термином «истинное значение», так как может быть много значений, соответствующих определению данной конкретной величины.

Пояснение к *Руководству*: см. приложение D, в частности – D.3.5, где указаны причины, по которым термин «истинное значение» не используется в этом *Руководстве* и по которым термин «истинное значение измеряемой величины» (или величины) или «значение измеряемой величины» (или величины) рассматриваются как эквивалентные.

В.2.4. Действительное значение (величины) [VIM 1.20] - значение, приписываемое конкретной величине и принимаемое, часто по соглашению, как имеющее неопределенность, приемлемую для данной цели.

Примеры 1. «Действительное значение величины» иногда называют приписанным значением, наилучшей оценкой величины, номинальным значением или исходным значением. Однако «исходное значение» - в этом смысле, не следует путать с «исходным значением» в смысле, указанном в Примечании к 5.7 [VIM].
2. Часто для определения действительного значения используется несколько результатов измерений величины.

В.2.5. Измерение [VIM 2.1] – совокупность операций, имеющих целью определения значения величины.
Примечание: операции могут выполняться автоматически.

В.2.6. Принцип измерения [VIM 2.3] - научная основа измерения.

Примеры

а) применение термоэлектрического эффекта для измерения температуры;

в) применение эффекта Джозефсона для измерения разности электрического потенциала;

с) применение эффекта Доплера для измерения скорости;

d) применение эффекта Рамана для измерения волнового числа молекулярных вибраций.

В.2.7. Метод измерения [VIM 2.4] – логическая последовательность операций, описанная в общем виде, которая применяется при выполнении измерений.

Примечание: методы измерения могут быть различными, например:

- метод измерений замещением;
- дифференциальный метод;
- нулевой метод.

В.2.8. Измерительная процедура [VIM 2.5] (методика выполнения измерений) - специально описанная совокупность операций, используемая при выполнении конкретных измерений в соответствии с данным методом.

Примечание: измерительная процедура обычно вносится в документ, который сам иногда называется «измерительная процедура» (или метод измерения) и обычно содержащиеся в нем сведения являются достаточными для оператора, чтобы выполнить измерения без дополнительной информации.

В.2.9. Измеряемая физическая величина [VIM 2.6] - конкретная величина, подвергаемая измерению.

Пример: давление пара в данной пробе воды при 20 ^{0}С.

Примечание: определение измеряемой физической величины может потребовать определения таких величин, как время, температура и давление.

В.2.10. Влияющая величина [VIM 2.7] - величина, которая не является предметом измерения, но влияющая на результат измерения.

Примеры:

а) температура микрометра, применяемого для измерения длины;

b) частота при измерении амплитуды переменного электрического напряжения;

с) концентрация билирубина при измерении концентрации гемоглобина в пробе плазмы крови человека.

Пояснение к *Руководству*: определение влияющей величины подразумевает включение величин, связанных с измерительными эталонами, образцовыми веществами и справочными данными, от которых может зависеть результат измерения, а также от таких явлений, как кратковременные флюктуации параметров измерительного прибора, и таких величин, как температура окружающей среды, атмосферное давление и влажность.

B.2.11. Результат измерения [VIM 3.1] - значение, приписываемое измеряемой величине, полученное путем измерения.

Примечания. 1. При приведении результата следует ясно указать, относится ли он к:
- показанию прибора;
- результату без учета поправки;
- результату с учетом поправки или к среднему нескольких значений.

2. Полная формулировка результата измерения включает информацию о неопределенности измерения.

B.2.12. Неисправленный результат измерения [VIM 3.3] - результат измерения до введения поправки на систематическую погрешность.

B.2.13. Исправленный результат измерения [VIM 3.4] - результат измерения после введения поправки на систематическую погрешность.

B.2.14. Точность измерения [VIM 3.5] - близость результата измерения к истинному значению измеряемой величины.

Примечания. 1. «Точность» является качественным понятием.

2. Не следует употреблять термин **прецизионность** вместо «точности».

B.2.15. Сходимость (результатов измерений) [VIM 3.6] - близость результатов последовательных измерений одной и той же измеряемой величины, выполненных в одинаковых условиях измерений.

Примечания. 1. Эти условия называются условиями сходимости.

2. К условиям сходимости относятся:
- одна и та же измерительная процедура;
- один и тот же наблюдатель;
- один и тот же измерительный прибор, применяемый в одних и тех же условиях;
- одно и то же место;
- повторение измерений в течение короткого периода времени.

3. Сходимость может выражаться в количественно через параметры, характеризующие дисперсию результатов.

В.2.16. Воспроизводимость (результатов измерений) [VIM 3.7] – близость результатов измерений одной и той же измеряемой величины, при проведении измерений в измененных условиях.

Примечания. 1. Для обоснованного утверждения о воспроизводимости следует указывать, какие условия были изменены.

2. Изменяющиеся условия могут включать:
- принцип измерения;
- наблюдателя;
- метод измерения;
- измерительный прибор;
- измерительный эталон:
- место;
- условия применения;
- время.

3. Воспроизводимость может быть выражена количественно с помощью параметров, характеризующих дисперсию результатов.

4. В этих случаях обычно подразумевается, что результаты измерения являются исправленными результатами.

В.2.17. Экспериментальное стандартное отклонение [VIM 3.8] - величина $s(q_k)$ для ряда n измерений одной и той же измеряемой величины, характеризующая рассеяние результатов и определяемая по формуле

$$s(q_k) = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{n}(q_k - \bar{q})^2}{n-1}},$$

где q_k – результат k-го измерения; $\bar{q}$- среднее арифметическое из n рассматриваемых результатов.

Примечания. 1. Если рассматривать ряд значений n как выборку из распределения, то $\bar{q}$ - несмещенная оценка среднего значения μ_q , а $s^2(q_k)$ - несмещенная оценка дисперсии σ^2 этого распределения.

2. Выражение $s(q_k)/\sqrt{n}$ является оценкой стандартного отклонения распределения $\bar{q}$ и называется **экспериментальным стандартным отклонением среднего значения.**

3. «Экспериментальное стандартное отклонение среднего значения» иногда не правильно называют **средней квадратической погрешностью среднего значения.**

Пояснение к *Руководству*: Некоторые обозначения, применяемые в VIM, были изменены с целью достижения единообразия с обозначениями, используемыми в 4.2 данного *Руководства*.

B.2.18. Неопределенность (измерения) [VIM 3.9] - параметр, связанный с результатом измерений и характеризующий рассеяние значений, которые достаточно обоснованно могли бы быть приписаны измеряемой величине.

Примечания. 1. Параметром может быть, например, стандартное отклонение (или число, кратное ему), или половина интервала, имеющего указанный уровень доверия.

2. Неопределенность измерения состоит, в общем случае, из многих составляющих. Некоторые из этих составляющих могут быть оценены на основании статистического распределения результатов рядов измерений и могут характеризоваться экспериментальными стандартными отклонениями. Другие составляющие, которые также могут характеризоваться стандартными отклонениями, вычисляются из предполагаемого распределения вероятностей, основанного на опыте или другой информации.

3. Подразумевается, что результат измерения является лучшей оценкой значения измеряемой величины и что все составляющие неопределенности, включая составляющие, обусловленные систематическими эффектами, такими как связанные с поправками и эталонами, приводят к рассеянию.

Пояснение к *Руководству*. В VIM указывается, что определение и примечания – идентичны определению и примечаниям в данном *Руководстве* (см. 2.2.3).

B.2.19. Погрешность (измерения) [VIM 3.10] - отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

Примечания. 1. Так как истинное значение не может быть определено, на практике применяется действительное значение (см. VIM 1.19 [B.2.3] и 1.20 [B.2.4]).

2. Когда необходимо различать «относительную погрешность» и «погрешность», последнюю иногда называют **абсолютной погрешностью измерения.** Этот термин не следует путать с **абсолютным значением погрешности,** которое является модулем погрешности.

Пояснение к *Руководству:* если результат измерения зависит от значений еще каких-либо величин, помимо измеряемой, погрешности измеряемых значений этих величин вносят вклад в погрешность результата измерения. См. также Пояснения к B.2.22 и B.2.3 *Руководства.*

B.2.20. Относительная погрешность [VIM 3.12] - отношения погрешности измерения к истинному значению измеряемой величины.

Примечание. Так как истинное значение не может быть определено, на практике применяется действительное значение (см. [VIM] 1.19 [B.2.3] и 1.20 [B.2.4]).

Пояснение к *Руководству*. См. Пояснение к B.2.3 *Руководства*.

В.2.21. Случайная погрешность [VIM 3.13] - разность результата измерения и среднего значения, которое могло бы быть получено при бесконечно большом числе повторных измерений одной и той же измеряемой величины, проводимых в условиях сходимости.

Примечания. 1. Случайная погрешность равна погрешности измерения минус систематическая погрешность.

2. Так как может быть выполнено только ограниченное число измерений, можно определить только оценку случайной погрешности.

Пояснение к *Руководству*. См. Пояснение к В.2.22 *Руководства*.

В.2.22 Систематическая погрешность [VIM 3.14] - разность между средним значением, получаемым при бесконечном числе измерений одной и той же измеряемой величины в условиях сходимости, и истинным значением измеряемой величины.

Примечания. 1. Систематическая погрешность равна погрешности измерения минус случайная погрешность.

2. Как и истинное значение, систематическая погрешность и ее причины не могут быть полностью известны.

3. Что касается измерительного прибора, см. «систематическая погрешность (измерительного прибора)» [VIM 5.25].

Пояснение к *Руководству.* Погрешность результата измерения (см. В.2.19) может часто рассматриваться как результат воздействия ряда случайных и систематических эффектов, которые вносят свой вклад в погрешность результата измерения. См. также Пояснение к В.2.19 и В.2.3 *Руководства*.

В.2.23. Поправка [VIM 3.15] – значение величины, которое алгебраически суммируется с неисправленным результатом измерения для компенсации систематической погрешности.

Примечания 1. Поправка равна оцененной систематической погрешности, взятой с обратным знаком.

2. Так как систематическая погрешность не может быть известна точно, компенсация не может быть полной.

В.2.24 Поправочный коэффициент [VIM 3.16] - числовой коэффициент, на который умножают неисправленный результат измерения для компенсации систематической погрешности.

Примечание. Так как систематическая погрешность не может быть точно известна, компенсация не может быть полной.

Приложение С. Основные статистические термины и понятия

С.1. Источник определений

Определения основных статистических терминов, приведенных в этом Приложении, взяты из Международного стандарта ISO 3534-1, который должен быть основополагающим источником для определения терминов, не включенных в данный текст. Некоторые из этих терминов и лежащие в их основе понятия подробно рассматриваются в С.3, а в разделе С.2, для более удобного пользования этим *Руководством,* приведены их формальные определения. Однако определение некоторых терминов, связанных с основными и включенных в С.3, не основаны непосредственно на стандарте ISO 3534-1.

С.2. Определения

Как в разделе 2 и Приложении В, заключение некоторых новых слов у терминов в скобки означает, что эти слова могут быть опущены, если это не приведет к путанице. Определения терминов С.2.1- С.2.14 даны в понятиях свойств совокупностей. Определения терминов С.2.15 – С.2.31 относятся к ряду наблюдений.

С.2.1. Вероятность [ISO 3534-1, 1.1] – действительное число в интервале от 0 до 1, приписываемое случайному событию.

> **Примечание.** Его можно отнести к долговременной относительной частоте события или степени уверенности, что событие произойдет. При высокой степени уверенности, вероятность близка к 1.

С.2.2. Случайная переменная величина; переменная [ISO 3534-1, 1.2] - переменная величина, которая может принимать любое значение из указанного ряда величин и с которой связано *распределение вероятностей* ([ISO 3534-1] 1.3[**С.2.3**]).

> **Примечания. 1**. Случайная переменная величина, которая может принимать только отдельные значения, называется «дискретной». Случайная переменная величина, которая может принимать любое значение в пределах конечного или бесконечного интервала, называется «непрерывной».
>
> **2**. Вероятность события А обозначается Pr(A) или P(A).

Пояснение к *Руководству*. Обозначение Pr(A) применяется в *данном Руководстве* вместо обозначения P_r(A), которое используется в ISO 3534-1.

С.2.3. Распределения вероятностей (случайной переменной величины)

[ISO 3534-1, 1.3] – функция, определяющая вероятность того, что случайная величина принимает любое заданное значение или принадлежит к заданному ряду значений.

Примечание. Вероятность всего ряда значений случайной переменной равна 1.

С.2.4. Функция распределения [ISO 3534-1, 1.4] - функция, определяющая для каждого значения x вероятность того, что случайная величина X меньше или равна x

$$F(x) = Pr(X \le x).$$

С.2.5. Функция плотности вероятностей (для непрерывной случайной переменной) [ISO 3534-1, 1.5] - производная (если она существует) функции распределения

$$f(x) = dF(x)/dx.$$

Примечание. $f(x)\ dx$ это «элемент вероятности»

$$f(x)\ dx=Pr(x<X<x+ dx).$$

С.2.6. Функция вероятностной меры [ISO 3534-1, 1.6] - функция, определяющая для каждого значения x_i дискретной случайной переменной X вероятность p_i того, что случайная величина равна x_i

$$p_i =Pr(X=x_i).$$

С.2.7. Параметр [ISO 3534-1, 1.12] - величина, используемая в описании распределения вероятностей случайной переменной.

С.2.8. Корреляция [ISO 3534-1, 1.13] - связь между двумя или несколькими случайными переменными в пределах распределения двух или более случайных переменных величин.

Примечание. Большинство статистических мер корреляции оценивают только степень линейной связи.

С.2.9. Ожидание (случайной переменной или распределения вероятностей); **ожидаемое значение, среднее значение** [ISO 3534-1, 1.18] -

1. Для дискретной случайной переменной X, принимающей значения x_i с вероятностью p_i, ожидаемое значение, если оно существует, составляет

$$\mu = E(X) = \sum p_i\, x_i,$$

причем суммирование происходит по всем значениям x_i, которые может принимать X.

2. Для непрерывной случайной переменной *X*, имеющей функцию плотности вероятностей *f(x)*, ожидаемое значение, если оно существует, составляет

$$\mu = E(X) = \int x f(x) dx,$$

причем интегрирование происходит по всему интервалу (интервалам) изменения *X*.

С.2.10. Центрированная случайная переменная [ISO 3534-1, 1.21] - случайная величина, ожидаемое значение которой равно нулю.

> **Примечание**. Если случайная переменная *X* имеет ожидаемое значение, равное μ, соответствующая центрированная случайная переменная – это (X- μ).

С.2.11. Дисперсия (случайной переменной или распределение вероятностей) [ISO 3534-1, 1.22] - ожидаемое значение квадрата *центрированной случайной переменной* ([ISO 3534-1] 1.21 [С.2.10])

$$\sigma^2 = V(X) = E\{[X - E(X)]^2\}.$$

С.2.12. Стандартное отклонение (случайной переменной или распределения вероятностей) [ISO 3534-1, 1.23] - положительный квадратный корень из дисперсии

$$\sigma = \sqrt{V(X)}.$$

С.2.13. Центральный момент[1] порядка *q* [ISO 3534-1, 1.28] - при одномерном распределении ожидаемое значение q-ой степени центрированной случайной переменной (X- μ) составляет:

$$E\,[(X-\mu)^q].$$

> **Примечание.** Центральный момент второго порядка представляет собой *дисперсию* ([ISO 3534-1] 1.22[С.2.11]) случайной переменной *X*.

С.2.14. Нормальное распределение; распределение Лапласа-Гаусса [ISO 3534-1, 1.37] – распределение вероятностей непрерывной случайной переменной *X*, функция плотности вероятностей которой равна

---

[1] Если в определении моментов величины *X*, *X-a*, *Y*, *Y-b*, и т.д. заменить на их абсолютные величины, т.е. |*X*|, |*X-a*|, |*Y*|, |*Y-b*| и т.д., то будут определены другие моменты, называемые «абсолютными моментами».

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}exp\left[-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\mu}{\sigma}\right]^2\right],$$

где $-\infty < x < +\infty$.

Примечание. μ – ожидаемое значение и σ – стандартное отклонение нормального распределения.

С.2.15. Характеристика [ISO 3534-1, 2.2] - свойство, которое помогает идентифицировать или различать отдельные объекты данной совокупности.

Примечание. Характеристика может быть количественной (выражена через переменные величины) или качественной (выражена через свойства элементов совокупности).

С.2.16. Совокупность [ISO 3534-1, 2.3] - множество рассматриваемых объектов.

Примечание. Для случайной переменной *распределение вероятностей* ([ISO 3534-1] 1.3 [С.2.3]) рассматривается как определяющее совокупность этой переменной.

С.2.17. Частота [ISO 3534-1, 2.11] - число случаев данного типа событий или число наблюдений, попадающих в определенную группу.

С.2.18. Частное распределение [ISO 3534-1, 2.15] - эмпирическое соотношение между значениями характеристики и их частотами или относительными частотами.

Примечание. Распределение может быть графически представлено в виде *гистограммы* ([ISO 3534-1] 2.17), *столбцовой диаграммы* ([ISO 3534-1] 2.18), *графика накоплений частоты* ([ISO 3534-1] 2.19), или *прямоугольной таблицы* ([ISO 3534-1] 2.22).

С.2.19. Среднее арифметическое; среднее значение [ISO 3534-1, 2.26] - сумма значений, деленная на их число.

Примечания. 1. Термин «среднее арифметическое» обычно применяется, когда речь идет о параметре совокупности, а термин «среднее значение» - когда речь идет о результате вычисления по данным, полученным в выборке.

2. Среднее значение простой случайной выборки, взятой из совокупности, представляет собой несмещенную оценку среднего арифметического этой совокупности. Однако иногда применяются и другие оценки, такие как среднее геометрическое или гармоническое, медиана или мода.

С.2.20. Дисперсия [ISO 3534-1, 2.23] - мера рассеяния, которая представляет собой сумму возведенных в квадрат отклонений наблюдаемых значений от их среднего значения, деленную на число, на единицу меньше, чем число наблюдений.

Пример. Для n наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$ со средним значением

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum x_i$$

дисперсия составляет

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum (x_i - \bar{x})^2.$$

Примечания. 1. Дисперсия выборки представляет собой несмещенную оценку дисперсии совокупности.

2. Дисперсия представляет собой центральный момент второго порядка, умноженный на *n/(n-1)* (см. примечание к [ISO 3534-1] 2.39).

Пояснение к *Руководству*. Дисперсия, определение которой приводится здесь, более точно определена как «выборочная оценка дисперсии совокупности». Дисперсия выборки обычно определяется как центральный момент второго порядка выборки (см. С.2.13 и С.2.22).

С.2.21. Стандартное отклонение [ISO 3534-1, 2.34] - положительный квадратный корень из дисперсии.

Примечание. Стандартное отклонение выборки представляет собой смещенную оценку отклонения совокупности.

С.2.22. Центральный момент порядка *q* [ISO 3534-1, 2.37] - в распределении одномерной характеристики среднее арифметическое значение q-ой степени разности между наблюдаемыми значениями и их средним значением $\bar{x}$ составляет:

$$\frac{1}{n}\sum_i (x_i - \bar{x})^q,$$

где n - число наблюдений.

С.2.23. Статистика [ISO 3534-1, 2.49] - функция выборки случайных переменных.

Примечание. Статистика, как функция случайных переменных, также является случайной величиной и в качестве таковой принимает различные значения от выборки к выборке. Значение статистики, полученное путем использования наблюдаемых величин в этой функции, может быть использовано при статистической проверке или в качестве оценки параметра совокупности, такого как среднее значение или стандартное отклонение.

С.2.24. Оценивание [ISO 3534-1, 2.49] - Операция приписывания, на основании наблюдений в выборке, числовых значений параметрам распределения, выбранного в качестве статистической модели совокупности, из которой взята эта выборка.

Примечание. Результат этой операции может быть выражен как единственное значение (точечная оценка; см. [ISO 3534-1] 2.51 [С.2.26]) или как интервальная оценка (см. [ISO 3534-1] 2.57[С.2.27] и 2.58.[С.2.28]).

С.2.25. Оценка [ISO 3534-1, 2.50] - статистика, используемая для оценивания параметра совокупности.

С.2.26. Значение оценки [ISO 3534-1, 2.51] - значение статистики, полученное в результате оценивания.

С.2.27. Двусторонний доверительный интервал [ISO 3534-1, 2.57] - если T_1 и T_2 - это две функции наблюдаемых значений, а Θ – параметр совокупности, подлежащий оценке, вероятность $P_r(T_1 \leq \Theta \leq T_2)$ по крайней мере равна ($1\text{-}\alpha$) [где ($1\text{-}\alpha$) - фиксированное число, положительное и меньшее единицы], то интервал между T_1 и T_2 представляет собой двусторонний ($1\text{-}\alpha$) доверительный интервал для Θ.

Примечания. 1. Границы T_1 и T_2 доверительного интервала являются статистиками ([ISO 3534-1] 2.45 [С.2.23]) и в качестве таковых обычно принимают различные значения от выборки к выборке.

2. В больших сериях выборок относительная частота случаев, когда истинное значение параметра совокупности Θ накрывается доверительным интервалом, больше либо равна ($1\text{-}\alpha$).

С.2.28. Односторонний доверительный интервал [ISO 3534-1, 2.58] – если T является функцией наблюдаемых значений, а Θ - параметр совокупности, подлежащий определению, вероятность $P_r(T \geq \Theta)$ [или вероятность $P_r(T \leq \Theta)$] по крайней мере равна ($1\text{-}\alpha$) [где ($1\text{-}\alpha$) – фиксированное число, положительное и меньше единицы], то интервал от наименьшего возможного значения Θ до T (или интервал от T до наибольшего возможного значения Θ) является односторонним ($1\text{-}\alpha$) доверительным интервалом для Θ.

Примечания 1. Граница T доверительного интервала *является статистикой* ([ISO 3534-1] 2.45 [С.2.23]) и в качестве таковой будет, как правило, принимать различные значения от выборки к выборке.

2. См. Примечание 2 [ISO 3534-1] 2.57 [С.2.27].

С.2.29. Коэффициент доверия; доверительный уровень [ISO 3534-1, 2.59] - значение *(1-α)* вероятности, связанное с доверительным интервалом или статистическим интервалом охвата (см. [ISO 3534-1 2.57 [С.2.27], 2.58 [С.2.28] и 2.61 [С.2.30]).

Примечание. *(1-α)* часто выражается в процентах.

С.2.30. Статистический интервал охвата [ISO 3534-1, 2.61] - интервал, для которого с заданным доверительным уровнем констатировать, что он включает, по крайней мере, определенную часть совокупности.

Примечания 1. Если обе границы определяются статистиками, интервал является двусторонним. Если одна из двух границ не является конечной или представляет собой граничное значение переменной величины, интервал является односторонним.

2. Его называют «статистически допустимый интервал». Такой термин не следует использовать, так как это может вызвать путаницу с «допустимым интервалом», определенным в ISO 3534-2.

С.2.31. Степени свободы [ISO 3534-1, 2.85] - обычно число членов в сумме минус число ограничений на члены суммы.

С.3. Расшифровка терминов и понятий

С.3.1. Ожидание

Ожидание функции $g(z)$ от случайной переменной z с плотностью распределения вероятностей $p(z)$ определяется уравнением

$$E[g(z)] = \int g(z)\, p(z)dz,$$

где из определения $p(z)$ следует, что $\int p(z)dz = 1$. Ожидание случайной переменной z, обозначаемое через μ_z, которое также называется ожидаемая величина или среднее значение z, определяется по формуле

$$\mu_z \equiv E(z) = \int z\, p(z)dz,$$

оно оценивается статистически через $\bar{z}$ - среднее арифметическое значение или среднее из n независимых наблюдений z_i случайной переменной z, плотность распределения вероятностей которой $p(z)$

$$\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i \ .$$

C.3.2. Дисперсия

Дисперсия случайной переменной представляет собой ожидаемое значение квадратичного отклонения от ее ожидания. Таким образом, дисперсия случайной переменной z с плотностью распределения вероятностей $p(z)$ определяется по формуле

$$\sigma^2(z) = \int (z - \mu_z)^2 p(z)dz,$$

где μ_z – ожидаемое значение z. Дисперсия $\sigma^2(z)$ может быть оценена по формуле

$$s^2(z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2,$$

где $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$ и z_i – n независимых наблюдений z.

> **Примечания. 1.** Множитель $n - 1$ в выражении для $s^2(z_i)$ обусловлен корреляцией между z_i и $\bar{z}$ и отражает тот факт, что есть только $n - 1$ независимых членов в множестве $\{z_i - \bar{z}\}$.
>
> 2. Если ожидание $\mu_я$ известно, то дисперсия может быть оценена по формуле:
>
> $$s^2(z_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \mu_z)^2.$$

Дисперсия среднего арифметического или среднего наблюдений, в отличие от дисперсии индивидуальных наблюдений, является надлежащей мерой неопределенности результата измерения. Дисперсию переменной z следует старательно отличать от дисперсии среднего $\bar{z}$. Дисперсия среднего арифметического рядов n не зависимых наблюдений z_i определяется по уравнению $\sigma^2(\bar{z}) = \sigma^2(z_i)/n$ и оценивается через экспериментально полученную дисперсию среднего значения:

$$s^2(\bar{z}) = \frac{s^2(z_i)}{n} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(z_i - \bar{z})^2.$$

C.3.3. Стандартное отклонение

Стандартное отклонение представляет собой положительный квадратный корень из дисперсии. Так как стандартную неопределенность, оцениваемую по типу А, получают, беря квадратный корень из статистически оцененной дисперсии, часто более удобно при определении стандартной неопределенности, оцениваемой по типу В, оценивать сначала нестатистический эквивалент стандартного отклонения, а затем, для получения эквивалента дисперсии – возводить в квадрат это стандартное отклонение.

С.3.4. Ковариация

Ковариация двух случайных переменных является мерой их взаимной зависимости. Ковариация случайных переменных y и z определяется по формуле

$$cov(y,z) = cov(z,y) = E\{[y - E(y)][z - E(z)]\},$$

откуда следует, что

$$cov(y,z) = cov(z,y) = \iint(y - \mu_y)(z - \mu_z)p(y,z)dydz =$$

$$=\iint yzp(y,z)dydz - \mu_y\mu_z,$$

где $p(y,z)$ – совместная функция плотности распределения вероятностей двух случайных переменных y и z. Ковариация $cov(y,z)$ [обозначаемая также $v(y,z)$] может быть оценена с помощью $s(y_i,z_i)$, полученной из n независимых пар y_i и z_i одновременных наблюдений y и z

$$s(y_i,z_i) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})(z_i - \bar{z}),$$

где $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$ *и* $\bar{z} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} z_i$.

> **Примечание.** Оцененная ковариация двух средних значений $\bar{y}$ и $\bar{z}$ определяется как $s(\bar{y},\bar{z}) = s(y_i,z_i)/n$.

С.3.5. Ковариационная матрица

При многомерном распределении вероятностей матрица V с элементами, равными дисперсиям и ковариациям случайных переменных, называется ковариационной матрицей. Диагональные элементы $v(z,z) \equiv \sigma^2(z)$ или $s(z_i,z_i) \equiv s^2(z_i)$ являются дисперсиями, а недиагональные элементы $v(y,z)$ или $s(y_i,z_i)$ являются ковариациями.

С.3.6. Коэффициент корреляции

Коэффициент корреляции является мерой относительной взаимной зависимости двух случайных величин, равной отношению их ковариаций к положительному квадратному корню из произведения их дисперсий.
Таким образом,

$$\rho(y,z) = \rho(z,y) = \frac{\nu(y,z)}{\sqrt{\nu(y,y)\nu(z,z)}} = \frac{\nu(y,z)}{\sigma(y)\sigma(z)}$$

с оценками

$$r(y_i,z_i) = r(z_i,y_i) = \frac{s(y_i,z_i)}{\sqrt{s(y_i,y_i)s(z_i,z_i)}} = \frac{s(y_i,z_i)}{s(y_i)s(z_i)}.$$

коэффициент корреляции является просто числом, таким что $-1 \le r(y_i,z_i) \le +1$.

Примечания. 1. Так как ρ и r являются просто числами в диапазоне от -1 до +1 включительно, а ковариации, как правило, представляют собой величины с неудобной физической размерностью и амплитудой, коэффициенты корреляции обычно более употребительны, чем ковариации.

2. Для многомерного распределения вероятностей вместо ковариационной матрицы обычно применяется матрица коэффициентов корреляции. Так как $\rho(y,y) = 1$ и $r(y_i,y_i) = 1$, диагональные элементы этой матрицы равны единице.

3. Если входные оценки x_i и x_j коррелированны (см.2.2) и если изменения δ_i в x_i вызывает изменения δ_j в x_j, то коэффициент корреляции, связанный с x_i и x_j, оценивается приблизительно как:

$$r(x_i, x_j) \approx u(x_i)\delta_j / u(x_j)\delta_i.$$

Это соотношение может служить основой для экспериментального оценивания коэффициента корреляции. Оно может быть также использовано для приблизительного расчета изменения в одной из входных оценок, обусловленного изменением в другой, если их коэффициент корреляции известен.

С.3.7. Независимость

Две случайные переменные являются статистически независимыми, если их совместное распределение вероятностей является произведением их индивидуальных распределений вероятностей.

> **Примечание.** Если две случайные переменные независимы, их ковариация и коэффициент корреляции являются нулевыми, но обратное утверждение не обязательно верно.

С.3.8. *t*-распределение; распределение Стьюдента

t-распределение или распределение Стьюдента представляет собой распределение вероятностей непрерывной случайной величины *t*, функция плотности распределения вероятностей который имеет вид

$$p(t,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi\nu}} \frac{\Gamma\left[\frac{\nu+1}{2}\right]}{\Gamma\left[\frac{\nu}{2}\right]} \left[1 + \frac{t^2}{\nu}\right]^{-(\nu+1)/2}$$

$-\infty < t < +\infty$,

где Γ есть гамма – функция и $\nu > 0$.

Ожидание *t*-распределения равно нулю, а его дисперсия равна $\nu/(\nu-2)$ для $\nu > 2$.

При $\nu \to \infty$, *t*-распределение стремится к нормальному распределению с $\mu = 0$ и $\sigma = 1$ (см. С.2.14).

Распределение вероятностей переменной $(\bar{z} - \mu_z)/s(\bar{z})$ представляет собой *t*-распределение, если случайная величина z распределена нормально с ожиданием μ_z, где $\bar{z}$ - среднее арифметическое n независимых наблюдений z_i величины z; $s(z_i)$ - экспериментальное отклонение n наблюдений, а $s(\bar{z}) = s(z_i)/\sqrt{n}$ - экспериментальное стандартное отклонение среднего $\bar{z}$ с $\nu = n-1$ степенями свободы.

Приложение D. «Истинное» значение, погрешность и неопределенность

Термин **истинное значение** (B.2.3) традиционно использовался в публикациях, посвященных неопределенности, однако в данном *Руководстве* в силу причин, изложенных в этом Приложении, этот термин не применяется. Так как термины «измеряемая величина», «погрешность» и «неопределенность» часто понимаются неправильно, в данном Приложении в дополнение к сведениям, приведенным в разделе 3, содержится обсуждение идей, лежащих в основе этих терминов. Чтобы проиллюстрировать, почему понятие неопределенности, принятая в данном *Руководстве,* основано на результате измерения и его оцененной неопределенности, а не на непознаваемых величинах – «истинном» значении и погрешности приведены два рисунка.

D.1. Измеряемая величина

D.1.1. Первым шагом при проведении измерения является определение измеряемой величины – то есть величины, которую предстоит измерить; измеряемая величина не может быть определена значением, а только путем описания величины. Однако, в принципе, измеряемая величина может быть *полностью* описана только при неограниченном количестве информации. Таким образом, до той степени, в которой оно дает поле для интерпретации, неполное определение измеряемой величины вносит в неопределенность результата измерения составляющую, которая может быть, а может и не быть значимой по сравнению с точностью, требуемой от измерения.

D.1.2. Обычно определение измеряемой величины уточняют некоторые физические состояния и условия.

> **Пример.** Скорость звука в сухом воздухе, состоящем из N_2 = 0,7808, O_2 = 0,2095, Ar = 0,00935 и CO_2 = 0,00035 (молярная доля), при температуре T = 273,15 K и давлении p = 101325 Pa.

D.2. Реализованная величина

D.2.1. В идеальном случае - величина, реализованная при измерении, должна быть полностью согласованна с определением измеряемой величины. Часто, однако, такая величина не может быть реализована, и тогда осуществляется измерение величины, которая является лишь аппроксимацией измеряемой величины.

D.3. «Истинное» значение и исправленное значение

D.3.1. В результат измерения реализованной величины вносится поправка на различие между ней и измеряемой величиной, чтобы определить, каким бы был результат измерения, если бы реализованная величина действительно полностью удовлетворяла бы определению измеряемой величины. В результат измерения реализованной величины вносятся также поправки на все другие известные значимые систематические эффекты. Хотя окончательный исправленный результат иногда рассматривается как наилучшая оценка «истинного» значения измеряемой величины, в действительности, этот результат просто является наилучшей оценкой значения величины, предназначенной для измерения.

D.3.2. В качестве примера предположим, что измеряемой величиной является толщина данного листа материала при заданной температуре. Образец доводится до температуры, близкой к заданной, и его толщина измеряется в определенном месте с помощью микрометра. Толщина материала в этом месте и при этой температуре, при давлении, оказываемом микрометром – представляет собой реализованную величину.

D.3.3. Температура материала в момент измерения и приложенное давление - определяются. Неисправленный результат измерения реализованной величины затем корректируется путем учета: калибровочной кривой микрометра, отклонения температуры образца от заданной температуры, а также небольшого сжатия образца от приложенного давления.

D.3.4. Исправленный результат может быть назван наилучшей оценкой «истинного» значения; «истинного» в том смысле, что оно является значением величины, которая принимается за величину, полностью удовлетворяющую определению измеряемой величины; но если бы микрометр был приложен к другой части листа материала, реализованная величина была бы другой, с другим «истинным» значением. Однако это «истинное» значение также соответствовало бы определению измеряемой величины, так как в нем не уточняется – должна ли быть толщина определена в конкретном месте листа. Следовательно, в этом случае из-за неполного определения измеряемой величины «истинное» значение имеет неопределенность, которая может быть оценена по измерениям, выполненным в различных точках листа. На некотором уровне каждая измеряемая величина имеет такую «собственную» неопределенность, которая, в принципе, может быть оценена тем или иным способом. Она является минимальной неопределенностью, с которой может быть определена измеряемая величина, и каждое измерение, при котором достигается такая неопределенность, может рассматриваться как наилучшее возможное измерение измеряемой величины. Для получения значения рассматриваемой величины, имеющей меньшую неопределенность, необходимо, чтобы измеряемая величина имела более полное определение.

Примечания. 1. В рассмотренном примере определение измеряемой величины оставляет без внимания много других параметров, которые, возможно, могли бы повлиять на толщину: атмосферное давление, влажность, положение листа в гравитационном поле, способ, которым он закреплен, и так далее.

2. Хотя измеряемая величина должна быть определена достаточно подробно, чтобы любая неопределенность, обусловленная неполнотой ее определения, была пренебрежительно малой по сравнению с требуемой точностью измерения, следует признать, что это не всегда будет практично. Определение может, например, быть неполным, так как оно не уточняет параметры, которые по неоправданному предположению, могут иметь пренебрежительно малое влияние; или это определение может включать условия, которые никогда полностью не выполняются и неполное воспроизведение которых трудно учесть. В примере, приведенном в D.1.2, скорость звука предполагает бесконечные плоские волны исчезающе малой амплитуды. С учетом того, что измерение не соответствует этим условия, должны быть приняты во внимание дифракция и нелинейные эффекты.

3. Неадекватное определение измеряемой величины может привести к несоответствию между результатами измерений одной и той же величины, проводившихся в различных лабораториях.

D.3.5. Термин «истинное значение измеряемой величины» или величины (часто сокращаемое до «истинного значения») не применяется в данном *Руководстве,* так как слово «истинное» рассматривается как избыточное. Термин «измеряемая величина» (см. B.2.9) означает «данная величина, подлежащая измерению». Следовательно, термин «значение измеряемой величины» означает «значение данной величины, подлежащей измерению». Так как под термином «данная величина» в общепринятой практике подразумевается определенная или конкретная величина (см. B.2.1, Примечание 1), то прилагательное «истинное» в термине «истинное значение измеряемой величины» (или в термине «истинное значение величины») не является необходимым – «истинное» значение измеряемой величины (или величины) просто является значением измеряемой величины (или величины). Кроме того, как отмечалось ранее, единственное «истинное» значение является идеализированным понятием.

D.4. Погрешность

Исправленный результат измерения не является значением измеряемой величины – то есть он с погрешностью – из-за несовершенного измерения реализованной величины, обусловленного: случайными изменениями наблюдений (случайные эффекты), неточным определением поправок на систематические эффекты и неполным знанием некоторых физических явлений (также систематические эффекты). Ни значения реализованной величины, ни значение измеряемой величины не могут быть когда-либо известны точно; все, что может быть известно – это их оцененные значения. В приведенном выше примере измеряемая толщина листа может быть ошибочна, то есть может отличаться от измеряемой величины (толщины листа), так как каждый из следующих эффектов может привести к неизвестной погрешности в результате измерения:

a) небольшие расхождения между показаниями микрометра, когда он неоднократно применяется для той же самой реализованной величины;

b) несовершенная калибровка микрометра;

c) несовершенное измерение температуры и приложенного давления;

d) неполное знание о влиянии температуры, атмосферного давления и влажности на образец или микрометр, или на то, и другое.

D.5. Неопределенность

D.5.1. оскольку точные значения составляющих погрешности результата измерения неизвестны и непознаваемы, то неопределенности, связанные со случайными и систематическими эффектами, которые приводят к погрешности, могут быть оценены. Но, даже если оцененные неопределенности незначительны, нет еще никакой гарантии, что погрешность результата измерения будет незначительной, так как при определении поправки или в оценке неполноты знания систематический эффект может не учитываться, поскольку он не распознается. Таким образом, неопределенность результата измерения не обязательно является указанием на правдоподобность того, что результат измерения близок к значению измеряемой величины; это просто оценка правдоподобия близости к наилучшему значению, которое соответствует имеющимся сейчас знаниям.

D.5.2. Неопределенность измерения, следовательно, выражает тот факт, что для данной измеряемой величины и для данного результата ее измерения нет единственного значения, а есть бесконечное число значений, рассеянных вокруг результата, который согласуется со всеми наблюдениями и данными, а также со знанием физического мира и который с различной степенью уверенности может быть приписан измеряемой величине.

D.5.3. К счастью, в большинстве практических измерительных ситуаций многое из обсуждавшегося в данном Приложении не применяется. Примерами могут служить случаи, когда измеряемая величина достаточно хорошо определена; когда эталоны или приборы калибруются с помощью хорошо изученных эталонов сравнения, которые согласованы с национальными эталонами; и когда неопределенности калибровочных поправок незначительны по сравнению с неопределенностями, обусловленными случайными влияниями приборов или ограниченным числом наблюдений (см. Е.4.3). Тем не менее, неполное знание влияющих величин и их эффектов часто вносит значительный вклад в неопределенность результата измерения.

D.6. Графическое представление

D.6.1. Рисунок D.1 иллюстрирует некоторые идеи, обсуждавшиеся в разделе 3 *Руководства* и в этом Приложении. Из этого рисунка ясно, почему основное внимание в *Руководстве* сконцентрировано на неопределенности, а не на погрешности. Точное значение погрешности результата измерения, как правило, неизвестно и непознаваемом . Все, что можно сделать – это оценить значения входных величин, включая поправки на известные систематические эффекты вместе , с их стандартными неопределенностями (оцененными стандартными отклонениями), обусловленными как неизвестными распределениями вероятностей, выборки для которых получают путем повторных наблюдений, так и субъективными или *априорными* распределениями, основанными на всей имеющейся информации, а затем рассчитать результат измерения по оцененным значениям входных величин и суммарную стандартную неопределенность этого результата – по стандартным неопределенностям этих оцененных значений. Только в случае, если есть твердая уверенность в том,, что все эти операции были выполнены правильно и все значимые статистические эффекты были учтены, можно предложить, что результат измерения является надежной оценкой измеряемой величины и что его суммарная стандартная неопределенность является надежной мерой ее *возможной* погрешности.

> **Примечания. 1**. На рис. D.1a наблюдения для большей наглядности представлены в виде гистограммы (см. 4.4.3 и Рис. 1b).
>
> **2.** Поправка на погрешность равна оценке погрешности, взятой с обратным знаком. Таким образом, на рис. D.1 и D.2 стрелка, иллюстрирующая поправку на погрешность, равна по длине, но направлена в противоположном направлении по отношению к стрелке, которая должна была бы иллюстрировать саму погрешность, и наоборот. В текстовых пояснениях к рисунку указывается – иллюстрирует ли данная стрелка поправку или погрешность.

D.6.2. На рис.D.2 те же самые понятия, графически изображенные на рис. D.1, представлены в несколько ином виде. Более того, на рис. D.2 проиллюстрировано, что может быть много значений измеряемой величины, если определение измеряемой величины является неполным (подпункт *g* рисунка). Неопределенность, обусловленная этой неполнотой определения, выраженная как дисперсия, оценивается на основании результатов измерений, полученных при множественных реализациях измеряемой величины с использованием одного и того же метода, приборов и и.д. (см. D.3.4).

> **Примечание.** В столбце, обозначенном «Дисперсия», под дисперсиями понимаются дисперсии $u_i^2(y)$, определенные уравнением (11) в п.5.1.3; следовательно, они суммируются линейно, как показано на рисунке.

Концепция, основанная на наблюдаемых величинах

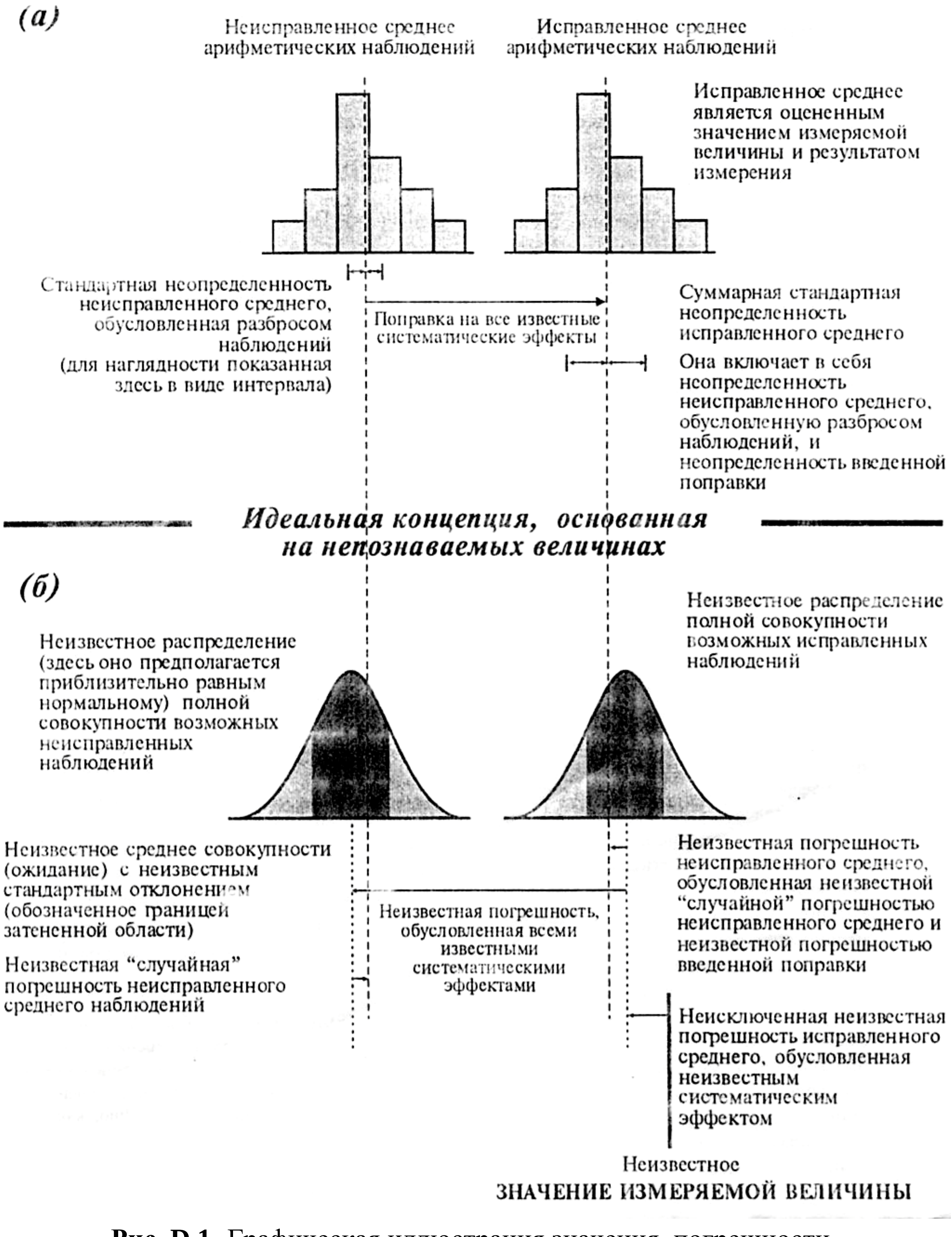

Рис. D.1. Графическая иллюстрация значения, погрешности и неопределенности

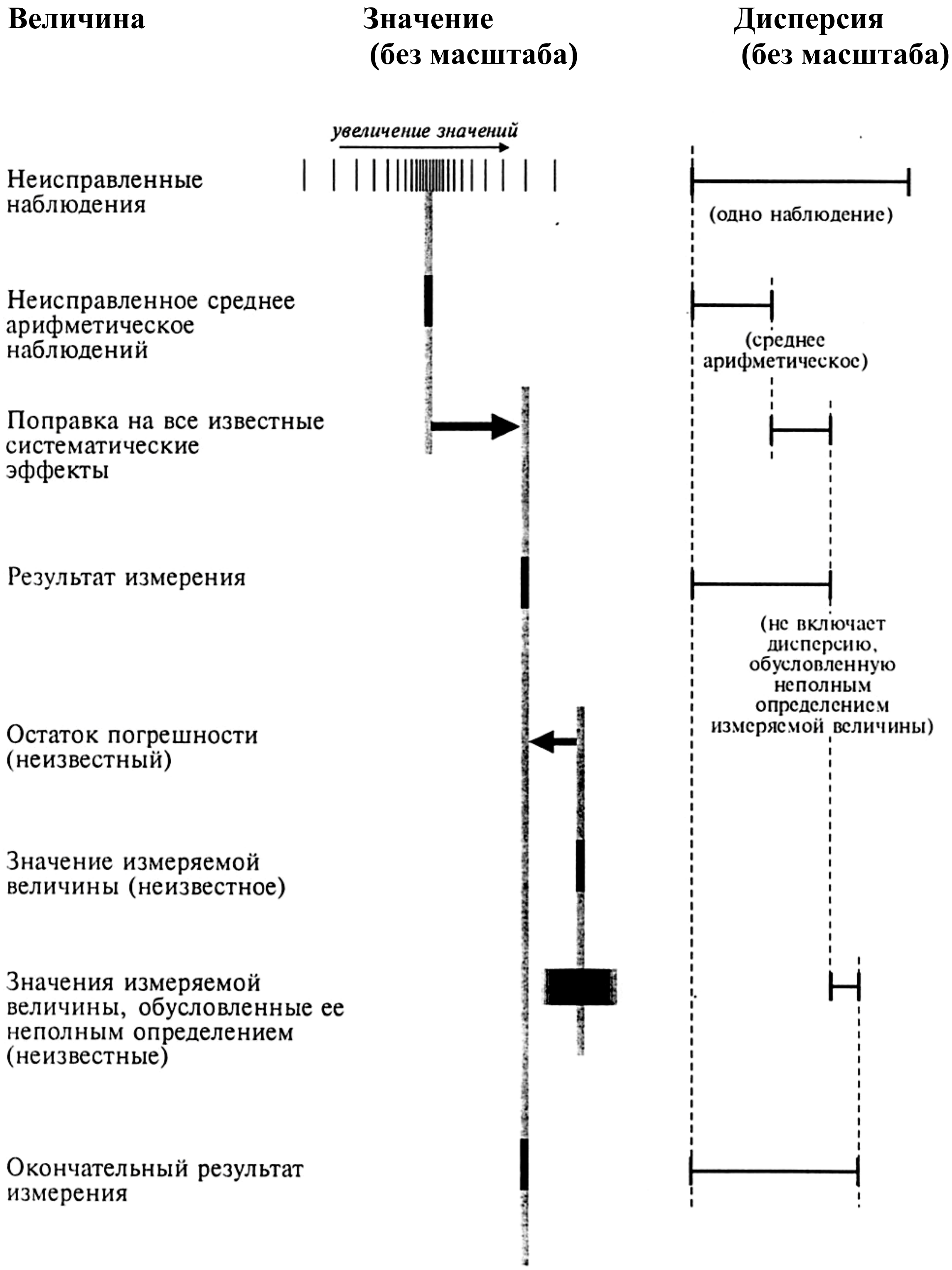

Рис. D.2. Графическая иллюстрация значений, погрешности и неопределенности

ГЛАВА 2. ПРИМЕНЕНИЕ «РУКОВОДСТВА ПО ВЫРАЖЕНИЮ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ»

1. Рекомендации по применению *Руководства*

1.1. Основным количественным выражением неопределенности измерений является стандартная неопределенность (u).

1.2. Основным количественным выражением неопределенности измерений, при котором результат определяют через значения других величин, является суммарная стандартная неопределенность (u_c).

1.3. В тех случаях, когда это необходимо, вычисляют расширенную неопределенность (U) по формуле

$$U = k \cdot u_c, \tag{2.1}$$

где k – коэффициент охвата (числовой коэффициент, используемый как множитель суммарной стандартной неопределенности для получения расширенной неопределенности).

1.4. В *Руководстве* измеряемую величину Y определяют как

$$Y = f\,(X_1,\ldots,X_m), \tag{2.2}$$

где $X_1,\ldots, X_m$ – входные величины (непосредственно измеряемые или другие величины, влияющие на результат измерения); m - число этих величин; f – вид функциональной зависимости.

1.5. Оценку измеряемой величины y вычисляют, как функцию оценок входных величин $x_1,\ldots, x_m$ после внесения поправок на все известные источники неопределенности, имеющие систематический характер

$$y= f\,(x_1,\ldots,x_m). \tag{2.3}$$

1.6. Затем вычисляют стандартные неопределенности величин $u(x_i)$ ($i = 1,\ldots,m$)
и возможные коэффициенты корреляции $r(x_i, x_j)$ оценок i-ой и j-ой входных величин ($j = 1,\ldots,m$).

1.7. Различают два типа вычисления стандартной неопределенности:

- вычисление по типу А – путем статистического анализа результатов многократных измерений;
- вычисление по типу В – с использованием других способов.

1.8. Вычисление стандартной неопределенности u.

1.8.1. Вычисление стандартной неопределенности (u_A) по типу А.

1.8.1.1. Исходными данными для вычисления являются результаты многократных измерений: $x_{i1},\ldots,x_{in_i}$ ($i = 1,\ldots,m$), где n_i – число измерений i-ой входной величины.

1.8.1.2. Стандартную неопределенность единичного измерения *i*-ой входной величины вычисляют по формуле

$$u_{A,i} = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1} \sum_{q=1}^{n_i} \left(x_{iq} - \overline{x}_i \right)^2},$$

(2.4)

где $\overline{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{q=1}^{n_i} x_{iq}$ - среднее арифметическое результатов измерений *i*-ой входной величины.

1.8.1.3. Стандартную неопределенность измерений *i*-ой входной величины, при которых результат определяют как среднее арифметическое, вычисляют по формуле

$$u_A(x_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i - 1)} \sum_{q=1}^{n_i} \left(x_{iq} - \overline{x}_i \right)^2}.$$

(2.5)

1.8.2. Вычисление стандартной неопределенности (u_B) по типу В.

1.8.2.1. Исходными данными для вычисления является следующая информация:

- данные предшествовавших измерений величин, входящих в уравнение измерения; сведения о виде распределения вероятностей;
- данные, основанные на опыте исследователя или общих знаниях о поведении и свойствах соответствующих приборов и материалов;
- неопределенности констант и справочных данных;
- данные поверки, калибровки, сведения изготовителя о приборе и др.

1.8.2.2. Неопределенности этих данных обычно представляют в виде границ отклонения значения величины от ее оценки. Наиболее распространенный способ формализации неполного знания о значении величины заключается в постулировании равномерного закона распределения возможных значений этой величины в указанных (нижней и верхней) границах ([b_{i-}, b_{i+}] для i-ой входной величины). При этом стандартную неопределенность, вычисляемую по типу В, определяют по формуле

$$u_B(x_i) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}},$$

(2.6)

а для симметричных границ ($\pm b_i$)

$$u_B(x_i) = \frac{b_i}{\sqrt{3}}.$$

(2.7)

1.8.2.3. В случае других законов распределения формулы для вычисления неопределенности по типу В будут иными.

1.8.3. Для вычисления коэффициента корреляции используют согласованные пары измерений (x_{il}, x_{jl}) (l = 1,…,n_{ij}, где n_{ij} – число согласованных пар результатов измерений)

$$r(x_i, x_j) = \frac{\sum_{l=1}^{n_{ij}} \left(x_{il} - \bar{x}_i\right)\left(x_{jl} - \bar{x}_j\right)}{\sqrt{\sum_{l=1}^{n_{ij}} \left(x_{il} - \bar{x}_i\right)^2 \sum_{l=1}^{n_{ij}} \left(x_{jl} - \bar{x}_j\right)^2}}.$$

(2.8)

1.9. Вычисление суммарной стандартной неопределенности (u_c).

1.9.1. В случае некоррелированных оценок $x_1,\ldots,x_m$ суммарную стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2\left(x_i\right).$$

(2.9)

1.9.2. В случае коррелированных оценок $x_1,\ldots,x_m$ суммарную стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u_C^2(y) = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2\left(x_i\right) + \sum_{i=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} r\left(x_i, x_j\right) u\left(x_i\right) u\left(x_j\right),$$

(2.10)

где $r(x_i,x_j)$ - коэффициент корреляции; $u(x_i)$ – стандартная неопределенность i-ой входной величины, вычисленная по типу А или по типу В.

1.10. Выбор коэффициента охвата k при вычислении расширенной неопределенности.

1.10.1. В общем случае коэффициент охвата выбирают в соответствии с формулой

$$k = t_p(\nu_{eff}), \qquad (2.11)$$

где $t_p(\nu_{eff})$ - квантиль распределения Стьюдента с эффективным числом степеней свободы ν_{eff} и доверительной вероятностью (уровнем доверия) p. Значения коэффициента $t_p(\nu_{eff})$ приведены в приложении Г.

1.10.2. Число степеней свободы определяют по формуле

$$\nu_{eff} = \frac{u_C^4}{\sum_{i=1}^{m} \frac{u^4(x_i)}{\nu_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^4},$$

(2.12)

где ν_i – число степеней свободы при определении i-ой входной величины; $\nu_i = n_i - 1$ для вычисления неопределенностей по типу А; $\nu_i = \infty$ для вычисления неопределенностей по типу В.

1.10.3. Во многих практических случаях при вычислении неопределенностей измерений делают предположение о нормальности закона распределения возможных значений измеряемой величины и полагают

$k = 2$ при $p \approx 0{,}95$ и $k = 3$ при $p \approx 0{,}99$.

При предположении о равномерности закона распределения полагают

$k = 1{,}65$ при $p \approx 0{,}95$ и $k = 1{,}71$ при $p \approx 0{,}99$.

1.11. При представлении результатов измерений *Руководство* рекомендует приводить достаточное количество информации для возможности проанализировать или повторить весь процесс получения результата измерений и вычисления неопределенностей измерений, а именно:

- алгоритм получения результата измерений;
- алгоритм расчета всех поправок и их неопределенностей;
- неопределенности всех используемых данных и способы их получения;
- алгоритмы вычисления суммарной и расширенной неопределенностей (включая значение коэффициента k).

2. Соответствие между формами представления результатов измерений, используемыми в отечественных нормативных документах по метрологии, и формой, используемой в *Руководстве*

2.1. При проведении совместных работ с зарубежными странами, в работах, проводимых под эгидой Международного комитета по мерам и весам и его консультативных комитетов, при подготовке публикаций в зарубежной печати, при публикациях работ по определению физических констант и в других случаях, связанных с выполнением международных метрологических работ, целесообразно руководствоваться нижеприведенными схемами.
2.2. При вычислении неопределенности измерений следует придерживаться последовательности, показанной на рис. 2.1.

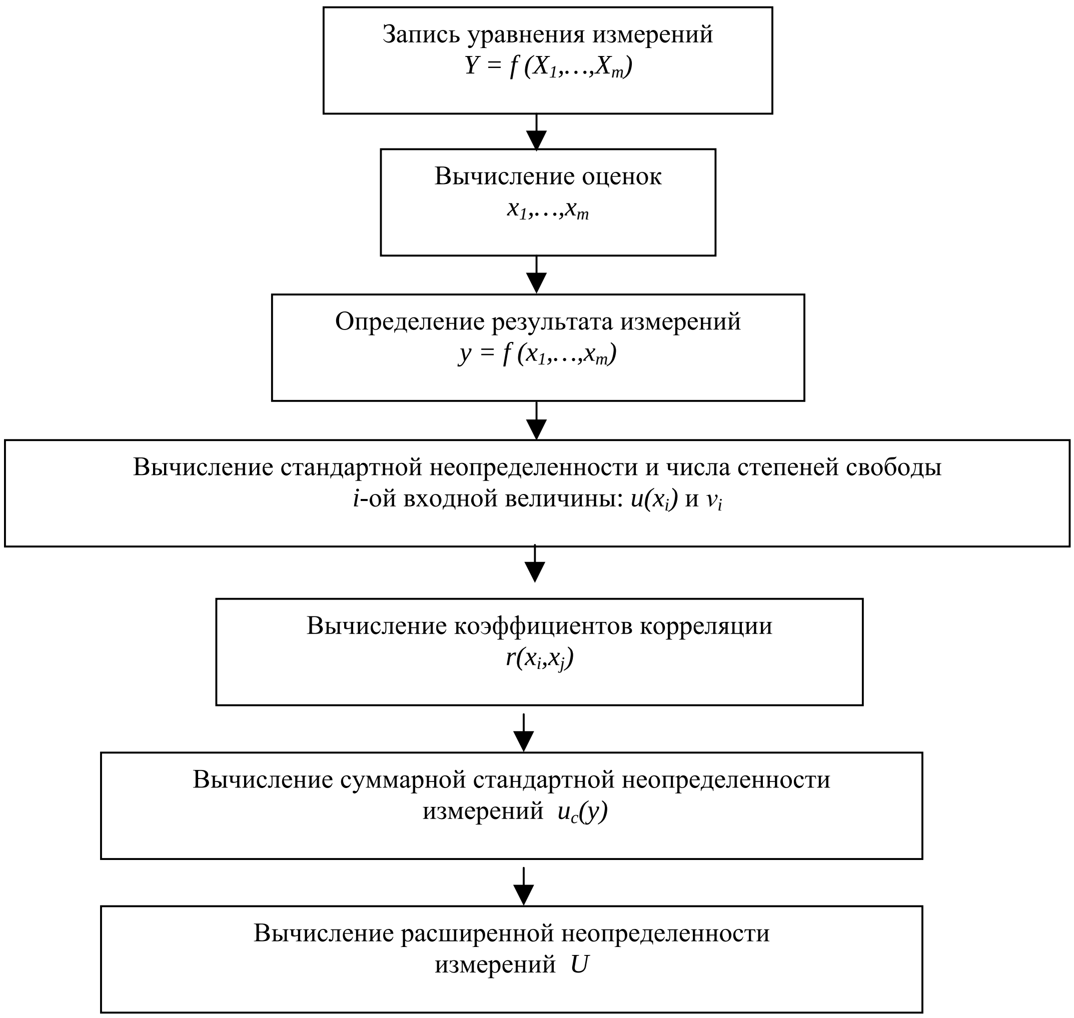

Рис. 2.1. Последовательность действий при вычислении неопределенности измерений

2.3. Сопоставление способов оценивания доверительных границ погрешности и вычисления расширенной неопределенности измерений приведено в табл.2.1.

Таблица 2.1. Сопоставление способов оценивания доверительных границ погрешности и расширенной неопределенности измерений

<table>
<tr>
<td rowspan="3">Отечественные нормативные документы</td>
<td>$\frac{\theta(p)}{S} < 0{,}8$</td>
<td>$0{,}8 \le \frac{\theta(p)}{S} \le 8$</td>
<td>$\frac{\theta(p)}{S} > 8$</td>
</tr>
<tr>
<td>$\Delta_p = t_p(f_{aa})S$,
$S = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^2 S^2(\bar{x}_i)}$</td>
<td>$\Delta_p = \frac{t_p(f_{эфф})S + \theta(p)}{S + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^2 \theta_i^2/3}}\sqrt{S^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^2 \theta_i^2/3}$,
$\theta(p) = K\sqrt{\sum_{i=1}^{m_{сист}}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^2 \theta_i^2}$,
$K = 1{,}1$ при $p = 0{,}95$;
$K = 1{,}4$ при $p = 0{,}99$; $m_{сист} > 4$;</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">$f_{эфф} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^2 S^2(\bar{x}_i)\right)^2 - \frac{2}{m+1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^4 S^4(\bar{x}_i)}{\frac{1}{m+1}\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^4 S^4(\bar{x}_i)}$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">Руководство</td>
<td colspan="3">$U_p = t_p(\nu_{eff})\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^2 u^2(x_i)}$,
$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{m}\frac{u^4(x_i)}{\nu_i}\left(\frac{df}{dx_i}\right)^4}$,
$\nu_i = n_i - 1$ для неопределенностей, вычисленных по типу А;
$\nu_i = \infty$ для неопределенностей, вычисленных по типу В.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="3">Для большинства практических случаев в предположении:
- нормального закона распределения: $U_{0,95} = 2u_c$, $U_{0,99} = 3u_c$;
- равномерного закона распределения: $U_{0,95} = 1{,}65u_c$, $U_{0,99} = 1{,}71u_c$;</td>
</tr>
</table>

2.4. При сопоставлении оценок характеристик погрешности и неопределенностей измерений рекомендуется использовать следующую схему (с учетом пояснений п.п. А.5 и А.6):

СКО, характеризующее случайную погрешность	↔	Стандартная неопределенность, вычисленная по типу А
СКО, характеризующее неисключенную систематическую погрешность	↔	Стандартная неопределенность, вычисленная по типу В
СКО, характеризующее суммарную погрешность	↔	Суммарная стандартная неопределенность
Доверительные границы погрешности	↔	Расширенная неопределенность

2.5. Если отсутствует достаточная информация для неопределенности *u* в соответствии с *Руководством,* то ее оценка u€ может быть получена на основании оценок характеристик погрешности по приведенным ниже схемам. Схемы 1 и 2 соответствуют двум различным способам представления результатов измерений, принятым в отечественных нормативных документах. Необходимо отметить, что оценки неопределенностей, полученные таким образом, в ряде случаев не совпадают со значениями неопределенностей, полученными в соответствии с *Руководством* (см. приложение В).

Схема 1.

y – результат измерений;
S – СКО случайной погрешности результата измерений;
$\theta(p)$ – доверительные границы неисключенной систематической погрешности результата измерений;
$m_{сист}$ – число источников неисключенной систематической погрешности;
n – число измерений.

y – результат измерений;
$\hat{u}_A$ = S – оценка стандартной неопределенности, вычисленной по типу А;

$\hat{u}_B = \theta(p) \big/ \left(K\sqrt{3}\right)$ - оценка стандартной неопределенности, вычисленной по типу В;
K = 1,1 при p = 0,95;
K = 1,4 при p = 0,99; $m_{сист} > 4$;

$\hat{u}_C = \sqrt{\hat{u}_A^2 + \hat{u}_B^2}$ - оценка суммарной стандартной неопределенности;

$\hat{\nu}_{eff} = (n-1)\left[1 + \dfrac{\hat{u}_B^2}{\hat{u}_A^2}\right]$ - оценка эффективного числа степеней свободы;

$\hat{U}_p = t_p\left(\hat{\nu}_{eff}\right)\hat{u}_C$ - оценка расширенной неопределенности.

Схема 2.

y – результат измерений;

$\Delta(p)$ – доверительные границы погрешности измерений;

p - доверительная вероятность.

y – результат измерений;

$\hat{U}_p = \Delta_p$ - оценка расширенной неопределенности;

$\hat{u}_c = \dfrac{\Delta_p}{z_P}$ - оценка суммарной стандартной неопределенности;

$Z_з$ – квантиль нормального распределения.

Оценить неопределенности u_A и u_B по отдельности, зная только Δ_p, невозможно.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ ПОДХОДОВ К ВЫРАЖЕНИЮ ТОЧНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

3.1. Приложение А.

А.1. Целью измерения является получение оценки истинного значения измеряемой величины, Понятие погрешности измерений, как разности между результатом измерений и истинным (действительным) значением измеряемой величины, используется для описания точности измерений в отечественных НД. Говоря об оценивании погрешности, в отечественной метрологической практике подразумевают оценивание ее характеристик.

Погрешность → **Характеристика погрешности** → **Алгоритм оценивания** → **Оценка характеристики погрешности**

А.2. В *Руководстве* для выражения точности измерений вводят понятие неопределенности измерений. Неопределенность измерений понимают как неполное знание значения измеряемой величины и для количественного выражения этой неполноты вводят распределение вероятностей возможных (обоснованно приписанных) значений измеряемой величины. Таким образом, параметр этого распределения (также называемый – неопределенность) количественно характеризует точность результата измерений.

А.3. Сходными для обоих подходов являются последовательности действий при оценивании характеристик погрешности и вычислении неопределенности измерений:

- анализ уравнения измерений;
- выявление всех источников погрешности (неопределенности) измерений и их количественное оценивание;
- введение поправок на систематические погрешности (эффекты), которые можно исключить.

А.4. Методы вычисления неопределенности, также как и методы оценивания характеристик погрешности, заимствованы из математической статистики, однако при этом используются различные интерпретации закона распределения вероятностей случайной величины. Кроме изложенных в *Руководстве* и отечественных НД на практике используют и другие методы вычисления неопределенности и оценивания характеристик погрешности.

Возможные различия между оценками характеристик погрешности (в соответствии с отечественными НД) и неопределенностями (в соответствии с *Руководством*) проиллюстрированы в примерах (см. приложения Б и В).

Различие двух подходов проявляется также в практике неопределенности и характеристик погрешности, основанной на разных интерпретациях вероятности: частотной и субъективной. В частности, доверительные границы погрешности (отложенные от результата измерений) накрывают истинное значение измеряемой величины с заданной доверительной вероятностью (частотная интерпретация вероятности), В то же время аналогичный интервал ($y-U_p$, $y+U_p$) трактуется в *Руководстве* как интервал, содержащий заданную долю распределения значений, которые могли бы быть обоснованно приписаны измеряемой величине (субъективная интерпретация вероятности).

А.5. В общем случае не существует однозначного соответствия между случайными погрешностями и неопределенностями, вычисленными по типу А (а также неисключенными систематическими погрешностями и неопределенностями, вычисленными по типу В). Деление на систематические и случайные погрешности обусловлено природой их возникновения и проявления в ходе измерительного эксперимента, а деление на неопределенности, вычисляемые по типу А и по типу В – методами их расчета.

А.6. Результаты сравнительного анализа процедур оценивания характеристик погрешности и вычисления неопределенности измерений приведены в табл. А.1 и А.2.

Таблица А.1. Процедура оценивания характеристик погрешности результата измерений

<table>
<tr><td>Погрешность</td><td colspan="3">$\xi = y - y_{ист}$ $y = y_{ист} + \xi$</td></tr>
<tr><td>Модель погрешности</td><td colspan="3">ξ –случайная величина с плотностью распределения вероятностей
$p(x;\, E, \sigma^2, \ldots)$, E – математическое ожидание, σ^2 – дисперсия</td></tr>
<tr><td>Характеристики погрешности</td><td>S –СКО</td><td>θ – граница неисключенной систематической погрешности</td><td>Δ_p – доверительные границы</td></tr>
<tr><td>Исходные данные для оценивания характеристик погрешности</td><td colspan="3">1. Модель объекта исследования.
2. Экспериментальные данные x_{iq}; $q = 1,\ldots,n_i$; $I = 1,\ldots,m$.
3. Информация о законах распределения.
4. Сведения об источниках погрешностей, их природе и характеристиках составляющих ($S(x_i)$, θ_i, структурная модель погрешности.
5. Стандартные справочные данные и другие справочные материалы.</td></tr>
<tr><td>Методы оценивания характеристик:

3. Случайных погрешностей

2. Неисключенных систематических погрешностей

3.Суммарной погрешности</td><td colspan="3">$$S(x_{il}) = \sqrt{\frac{1}{n_i - 1}\sum_{q=1}^{n_i}\left(x_{iq} - \overline{x}_i\right)^2};$$
$$S(\overline{x}_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i - 1)}\sum_{q=1}^{n_i}\left(x_{iq} - \overline{x}_i\right)^2};$$
$$S^2 = \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S^2(\overline{x}_i), \qquad \Delta_p = t_p(f_{эфф})S$$
$$\theta(p) = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \theta_i^2}$$
$$\Delta_p = \frac{t_p(f_{эфф})S + \theta(p)}{S + \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\theta_i^2}{3}}}\sqrt{S^2 + \sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \frac{\theta_i^2}{3}};$$
где $\theta(p) = K\sqrt{\sum_{i=1}^{m_{сист}}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 \theta_i^2}$, $K = 1{,}1$ при $p = 0{,}95$;
$K = 1{,}4$ при $p = 0{,}99$; $m_{сист} > 4$; $S = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 S^2(\overline{x}_i)}$</td></tr>
<tr><td>Форма представления характеристик погрешности</td><td colspan="2">$\theta(p)$, S, n</td><td>Δ_p</td></tr>
<tr><td>Интерпретация полученных результатов</td><td colspan="3">Интервал ($-\Delta_p$, Δ_p) с вероятностью p содержит погрешность измерений, что равносильно тому, что интервал ($y - \Delta_p$, $y + \Delta_p$) с вероятностью p содержит истинное значение измеряемой величины.</td></tr>
</table>

Таблица А.2. Процедура вычисления неопределенности измерений

Модель неопределенности (представление знания о значении измеряемой величины)	η – случайная величина с плотностью распределения вероятностей *p(x; y, u^2,…), y* – математическое ожидание, u^2 – дисперсия		
Неопределенность (количественная мера)	Стандартная U	Суммарная $u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} u_i^2}$	Расширенная $U_p = k \cdot u_c$
Исходные данные для вычисления неопределенности	1. Модель объекта исследования. 2. Экспериментальные данные x_{iq}, $q = 1,\ldots,n_i$; $I = 1,\ldots,m$. 3. Информация о законах распределения. 4. Сведения об источниках неопределенности и информация о значениях неопределенности. 5. Стандартные справочные данные и другие справочные материалы.		
Методы вычисления неопределенности:			
1) по типу А	$u_{A,i} = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq} - \overline{x}_i)^2}{n_i - 1}}$, $u_A(x_i) = \sqrt{\frac{\sum_{q=1}^{n_i}(x_{iq} - \overline{x}_i)^2}{n_i(n_i - 1)}}$		
2) по типу В	$u_B(x_i) = \frac{b_i}{\sqrt{3}}$		
3) расширенной неопределенности	$U_p = t_p(\nu_{eff}) \cdot u_c$, $\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\sum_{i=1}^{m} \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right)^4}{\nu_i}}$, $u_c = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i} u(x_i)\right)^2}$; $U_{0,95} = 2u_c$, $U_{0,99} = 3u_c$ - для нормального закона; $U_{0,95} = 1{,}65u_c$, $U_{0,99} = 1{,}71u_c$ - для равномерного закона.		
Представление неопределенности	u_c, U_p, k, u_i, ν_i		
Интерпретация полученных результатов	Интервал (y-U_p, y+U_p) содержит большую долю (p) распределения значений, которые могли бы быть обосновано приписаны измеряемой величине.		

3.2. Приложение Б. Измерение силы электрического тока с помощью вольтметра и токового шунта

Б.1. Уравнение измерений

$$I = f(V,R) = \frac{V}{R} \ , \qquad (Б.1)$$

где I - сила тока, V - напряжение, R - сопротивление шунта.

Б.2. Нахождение результата измерений.

Б.2.1. В результате измерений напряжения при температуре t = (23,00 ±0,05) ^{o}C получают ряд значений V_i в милливольтах, $I = 1,\ldots,n$; $n = 10$;
100,68; 100,83; 100,79; 100,64; 100,63; 100,94; 100,60; 100,68; 100,76; 100,65.

Б.2.2. На основе полученных значений вычисляют среднее значение напряжения по формуле

$$\bar{V} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} V_i = 100{,}72 \text{ мВ.}$$

(Б.2)

Б.2.3. Значения сопротивления шунта установленного при его калибровке для $I = 10\ A$ и $t = 23{,}00\ ^{o}$C и равно

R_o = 0,010088 Ом.

Б.2.4. Результат измерения силы тока получают по формуле:

$$I = \frac{\bar{V}}{R_0} = 9{,}984 \text{ А.}$$

(Б.3)

Б.3. Анализ источников погрешности результата измерений

Б.3.1. СКО $\bar{V}$, характеризующее случайную составляющую погрешности при измерениях напряжения, вычисляют по формуле

$$S(\bar{V}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(V_i - \bar{V}\right)^2}{n(n-1)}} = 3{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ мВ,}$$

(Б.4)

$$\tilde{S}(\bar{V}) = 0{,}034\,\%.$$

Здесь и далее по тексту знак тильды над буквой, обозначающей характеристику погрешности (неопределенности), означает, что данная характеристика приведена в относительном виде.

Б.3.2. Границы неисключенной систематической погрешности вольтметра определены при его калибровке в виде следующего выражения (в выражениях для границ погрешностей при разных значениях отклонений от нуля будем опускать знак ±)

$$\theta_V = 3 \cdot 10^{-4} \cdot V + 0{,}02 \text{ мВ} \qquad (Б.5)$$

Тогда при $V = \overline{V}$ получают

$$\theta_V = 5{,}0 \cdot 10^{-2} \text{ мВ},$$
$$\overline{\theta}_V = 0{,}050 \ \%.$$

Б.3.3. Границы неисключенной систематической погрешности значения сопротивления шунта, определенные при его калибровке, равны

$$\overline{\theta}_R = 0{,}070 \ \%.$$

Тогда при $R = R_0$ получают

$$\theta_R = 7 \cdot 10^{-4} \cdot R_0 = 7{,}1 \cdot 10^{-6} \text{ Ом}. \qquad (Б.6)$$

Б.3.4. Границы неисключенной систематической составляющей погрешности значения сопротивления шунта, обусловленной погрешностью измерений температуры, находят из формулы, определяющей зависимость сопротивления от температуры

$$R = R_0 \cdot [1 + a \cdot (t - t_0)], \qquad (Б.7)$$

где R_0 - значение сопротивления при $t = t_0$ (t_0 = 23,00 °С; R_0 = 0,010088 Ом); a - температурный коэффициент ($a = 6 \cdot 10^{-6}$К$^{-1}$).
В случае, когда границы погрешности измерения температуры равны Δt, границы соответствующей составляющей погрешности значения сопротивления равны

$$\theta_{R,t} = a \cdot \Delta t \cdot R. \qquad (Б.8)$$

Таким образом, при Δt = 0,05 °С получают

$$\theta_{R,t} = 3{,}0 \cdot 10^{-9} \text{ Ом},$$
$$\overline{\theta}_{R,t} = 3{,}0 \cdot 10^{-9} \ \%.$$

В дальнейшем эту составляющую погрешности (ввиду ее малости по сравнению с другими составляющими) можно не учитывать.

Б.4. Вычисления характеристик погрешности результата измерений.

Б.4.1. Делают предположение о равномерном законе распределения неисключенных систематических составляющих погрешности результата измерений внутри их границ θ_v и θ_R . Тогда СКО суммарной неисключенной систематической составляющей погрешности результата измерений силы тока определяют по формуле

$$s_{\theta} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 \cdot \frac{\theta_v^2}{3} + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot \frac{\theta_R^2}{3}},$$

(Б.9)

где $\frac{\partial f}{\partial V} = \frac{1}{R}, \frac{\partial f}{\partial R} = -\frac{V}{R^2}$ - коэффициенты влияния. Таким образом, получают

$$S_{\theta} = \sqrt{\left(\frac{1}{R_0}\right)^2 \cdot \frac{\theta_{\nu}^2}{3} + \left(\frac{\overline{V}}{R_0^2}\right)^2 \cdot \frac{\theta_R^2}{3}} \;=\; 5{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{А},$$

$$S_{\theta}^{\%} = 0{,}050\,\%.$$

Б.4.2. Доверительные границы суммарной неисключенной систематической составляющей погрешности результата измерений силы тока при доверительной вероятности p = 0,095 оценивают по формуле

$$\theta(0{,}95) = 1{,}1\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 \theta_{\nu}^2 + \left(\frac{V}{R^2}\right)^2 \cdot \theta_R^2} \;=\; 9{,}5 \cdot 10^{-3}\,A,$$

(Б.10)

$$\theta_{0,95}^{\%} = 0{,}95\%.$$

Б.4.3. СКО случайной составляющей погрешности результата измерений силы тока определяют по формуле

$$S = \frac{\partial f}{\partial V} \cdot S(\overline{V}) = 3{,}4 \cdot 10^{-3}\;\; A, \qquad \text{(Б.11)}$$

$$S^{\%} = 0{,}034\%.$$

Б.4.4. СКО суммарной погрешности результата измерений силы тока вычисляют по формуле

$$S_\Sigma = \sqrt{S^2 + S_\theta^2} = 6{,}0 \cdot 10^{-3},$$
$$\tilde{S}_\Sigma = 0{,}060\%.$$

(Б.12)

Б.4.5. Доверительные границы погрешности результата измерений силы тока при $p = 0{,}95$ и числе эффективных степеней свободы $f_{эфф} = n - 1 = 9$ вычисляют по формуле

$$\Delta_{0,95} = \frac{t_{0,95}(9) \cdot S + \theta(0{,}95)}{S + S_\theta} \cdot S_\Sigma = 0{,}012 \text{ А},$$
$$\tilde{\Delta}_{0,95} = 0{,}12\%.$$

(Б.13)

Б.5. Вычисление неопределенности измерений.

Б.5.1. По типу А вычисляют стандартную неопределенность, обусловленную источниками неопределенности, имеющими случайный характер.

Б.5.1.1. Стандартную неопределенность напряжения, обусловленную источниками неопределенности, имеющими случайный характер, определяют по формуле

$$u_A(V) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(V_i - \overline{V}\right)^2}{n(n-1)}},$$
$$u_A(V) = 3{,}4 \cdot 10^{-2} \text{ мВ}, \qquad (Б.14)$$
$$\tilde{u}_A(V) = 0{,}034\%$$

Б.5.1.2. Стандартную неопределенность силы тока, обусловленную источниками неопределенности, имеющими случайный характер, определяют по формуле

$$u_A = \frac{\partial f}{\partial V} \cdot u_A(V) = 3{,}4 \cdot 10^{-3} \text{ А}, \qquad (Б.15)$$
$$\tilde{u}_A = 0{,}034\%.$$

Б.5.2. По типу В вычисляют стандартные неопределенности, обусловленные источниками неопределенности, имеющими систематический характер. Закон распределения величин внутри границ считают равномерным.

Б.5.2.1. Границы систематического смещения при измерениях напряжения, определенные при калибровке вольтметра, равны $3 \cdot 10^{-4} \cdot V + 0{,}02$. Тогда соответствующую стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u_{B,V} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot \overline{V} + 0{,}02}{\sqrt{3}} = 2{,}9 \cdot 10^{-2} \text{ мВ},$$

$$u\%_{B,V} = 0{,}029\%.$$

(Б.16)

Б.5.2.2. Границы, внутри которых лежит значение сопротивления шунта, определены при калибровке шунта и равны $7 \cdot 10^{-4} \cdot R$. Тогда при $R = R_o$ соответствующую стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u_{B,R} = \frac{3 \cdot 10^{-4} \cdot R_0}{\sqrt{3}} = 4{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ Ом},$$

(Б.17)

$$u\%_{B,R} = 0{,}040\%.$$

Б.5.2.3. Границы изменения значения сопротивления шунта, обусловленного изменением температуры, равны $\alpha \cdot \Delta t \cdot R_o$. Соответствующую стандартную неопределенность получают в соответствии с формулой

$$u_{B,t} = \frac{\alpha \cdot \Delta t \cdot R_0}{\sqrt{3}} = 1{,}7 \cdot 10^{-9} \text{ Ом},$$

$$u\%_{B,t} = 1{,}7 \cdot 10^{-5}\%.$$

(Б.18)

В дальнейшем этой составляющей неопределенности (ввиду ее малости по сравнению с другими составляющими) можно пренебречь.

Б.5.2.4. Суммарную стандартную неопределенность, вычисленную по типу В, определяют по формуле

$$u_B = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial V}\right)^2 u_{BY}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial R}\right)^2 \cdot u_{B,R}^2} = 5{,}0 \cdot 10^{-3} \text{ А},$$

$$u\%_B = 0{,}050\%.$$

(Б.19)

Б.5.3. Суммарную стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 6{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{А},$$

$$\tilde{u}_c = 0{,}060\%.$$

(Б.20)

Б.5.4. Эффективное число степеней свободы

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\dfrac{\left(\dfrac{1}{R} \cdot u_A\right)^4}{n-1} + \dfrac{\left(\dfrac{1}{R} \cdot u_{BY}\right)^4}{\infty} + \dfrac{\left(\dfrac{V}{R^2} \cdot u_{B,R}\right)^4}{\infty}} = 87.$$

(Б.21)

Б.5.5. Коэффициент охвата получают по формуле

$$k = t_{0,95}(\nu_{eff}) = 1{,}99.$$

(Б.22)

Б.5.6. Расширенную неопределенность определяют следующим образом

$$U_{0,95} = k \cdot u_c = 0{,}012\ \text{А},$$

$$\tilde{U}_{0,95} = 0{,}12\%. \qquad (Б.23)$$

Б.6. Переход от характеристик погрешности к неопределенности измерений.

Б.6.1. Используя оценки характеристик погрешности, полученные в п.п. Б.3 и Б.4 данного примера, можно продемонстрировать получение оценок неопределенностей в соответствии с п.4.4 настоящей рекомендации.

Схема Б.1.

$I = 9{,}984$ А,

$S = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$ А,

$\theta(0{,}95) = 9{,}5 \cdot 10^{-3}$ А,

$m_{сист} = 2$,

$n = 10$

→

$I = 9{,}984$ А,

$\tilde{u}_A = S = 3{,}4 \cdot 10^{-3}$ А,

$$\tilde{u}_B = \frac{\theta(0{,}95)}{K \cdot \sqrt{3}} = 5{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{А},$$

$K = 1{,}1$; $p = 0{,}95$,

$$\tilde{u}_c = \sqrt{\tilde{u}_A^2 + \tilde{u}_B^2} = 6{,}0 \cdot 10^{-3}\ \text{А},$$

$$\tilde{\nu}_{eff} = (n-1)\left[1 + \frac{\tilde{u}_B^2}{\tilde{u}_A^2}\right]^2 = 87,$$

$$\tilde{U}_{0,95} = t_{0,95}(\tilde{\nu}_{eff} = 87) \cdot \tilde{u}_c = 0{,}012\ \text{А}$$

В данном примере неопределенности измерений, вычисленные в п. Б.5 данного примера в соответствии с *Руководством*, совпадают с их оценками, полученными по схеме Б.1.

Схема Б.2.

I = 9,984 А,

$\Delta_{0,95}$ = 0,012 А,

p = 0,95

→

I = 9,984 А,

$U_{0,95} = \Delta_{0,95} = 0{,}012$ А,

$z_{0,95} = 2$,

$u_c = \dfrac{\Delta_{0,95}}{z_{0,95}} = \dfrac{0{,}012}{2} = 0{,}006$ А.

В данном примере разность неопределенностей измерений, вычисленных в п.Б.5 данного примера в соответствии с Руководством, и их оценок, полученных по схеме Б.2, меньше погрешности округления при вычислениях.

3.3. Приложение В. Измерения длины штриховой меры

Измерение длины штриховой меры проводят на государственном первичном эталоне единицы длины интерференционным методом.

В.1. Уравнение измерений

$$L = A \cdot \frac{\lambda}{2n_B} + \alpha L_0 \cdot (20 - t) + \Delta l_s, \quad \text{(В.1)}$$

где L – длина штриховой меры; L_o – опорное значение длины штриховой меры (L_o = 1,000 м); γ – длина волны излучения (γ = 0,632 991 398 2 мкм); A – число импульсов; $n_в$ – показатель преломления воздуха ($n_в$ = 1,000275236); t –

температура штриховой меры (t = 20,125 °С); α – коэффициент линейного расширения (α = 1,15 · 10^{-5} $К^{-1}$); Δl_s– поправка на размер коллиматорной щели (Δl_s = 0,031 мкм).

В.2. Нахождение результата измерений

В.2.1. В результате измерений числа импульсов и внесения поправок на известные систематические погрешности в соответствии с уравнением измерения (В.1) получают ряд значений L_i в метрах, i = 1,…,n; n = 10:

1,000 001 356; 1,000 001 584; 1,000 001 383; 1,000 001 469; 1,000 001 491; 1,000 001 466; 1,000 001 575; 1, 000 001 397; 1,000 001 405; 1,000 001 334.

В.2.2. Длину штриховой меры определяют по формуле

$$\overline{L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} L_i = 1{,}000001474 \text{ м}. \qquad (В.2)$$

В.3. Анализ источников погрешности результата измерений

В.3.1. СКО случайной составляющей погрешности определяют по формуле

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(L_i - \overline{L}\right)^2}{n(n-1)}} = 2{,}5\cdot 10^{-8} \text{ м}$$

(В.3)

Для более контактной записи значений характеристик погрешности (неопределенности) в дальнейшем будем использовать микрометры (мкм)

S = 0,025 мкм.

В.3.2. Границы неисключенных систематических погрешностей:

- определения показателя преломления воздуха $\theta_в$ = 2,0 · 10^{-8};
- значения длины волны θ_γ = 6,2 · 10^{-9} мкм;
- определения температуры меры θ_t = 0,003 °С;
- определения поправки на размер коллиматорной щели $\theta_{\Delta l}$ = 0,002 мкм.

Составляющие погрешности результата измерений, обусловленные погрешностями значений L_0 и α пренебрежимо малы.

В.4. Вычисление характеристик погрешности результата измерений

В.4.1. В предложении о равномерном законе распределения неисключенных систематических составляющих погрешности внутри границ $\theta_в$, θ_γ , θ_t и $\theta_{\Delta l}$

СКО неисключенной систематической составляющей погрешности результата измерений вычисляют по формуле

$$S_\theta\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial n_в}\right)^2\cdot\frac{\theta_в^2}{3}+\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)^2\cdot\frac{\theta_\lambda^2}{3}+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\cdot\frac{\theta_t^2}{3}+\left(\frac{\partial f}{\partial(\Delta l)}\right)^2\cdot\frac{\theta_{\Delta l}^2}{3}}, \qquad (В.4)$$

где $\frac{\partial f}{\partial m_в}=-A\cdot\frac{\lambda}{2n_в^2}$, $\frac{\partial f}{\partial\lambda}=A\cdot\frac{1}{2n_в}$, $\frac{\partial f}{\partial t}=\alpha\cdot L_0$, $\frac{\partial f}{\partial(\Delta l)}=1$- коэффициенты влияния.

Таким образом, получают

$$S_\theta=\sqrt{\left(A\cdot\frac{\lambda}{2n_в^2}\right)^2\cdot\frac{\theta_в^2}{3}+\left(A\cdot\frac{1}{2n_и}\right)^2\cdot\frac{\theta_\lambda^2}{3}+\left(\alpha\cdot L_0\right)^2\cdot\frac{\theta_t^2}{3}+\left(1\right)^2\cdot\frac{\theta_{\Delta l}^2}{3}}. \qquad (В.5)$$

Для упрощения расчетов можно принять $A\cdot\frac{\lambda}{2n_в}\approx 1\,м,$, $n_в\approx 1{,}00$, $\lambda\approx 0{,}633\,мкм$.

Тогда получают $S_\theta\approx 0{,}024$ мкм.

В.4.2. Доверительные границы неисключенной систематической составляющей погрешности результата измерений для p = 0,99 и $m_{сист}$ = 4 (К = 1,23, см. МИ 2083-90) вычисляют по формуле

$$\theta(0{,}99)=1{,}23\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial n_в}\right)^2\cdot\theta_в^2+\left(\frac{\partial f}{\partial\lambda}\right)^2\cdot\theta_\lambda^2+\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2\cdot\theta_t^2+\left(\frac{\partial f}{\partial(\Delta l)}\right)^2\cdot\theta_{\Delta l}^2},$$

(В.6)

Расчет коэффициентов влияния по п.В.4.1

$\theta(0{,}99)$ = 0,051 мкм.

В.4.3. СКО суммарной погрешности определяют по формуле

$$S_\Sigma=\sqrt{S^2+S_\theta^2=0{,}035}\,мкм. \qquad (В.7)$$

В.4.4. Доверительные границы суммарной погрешности при p = 0,99 и $f_{эфф}$ = n-1 = 9 вычисляют по формуле

$$\Delta_{0,99} = \frac{t_{0,99}(9)\cdot S + \theta(0,99)}{S + S_в}\cdot\sqrt{S^2 + S_в}\ . \qquad (В.8)$$

В.5. Вычисление неопределенности измерений

В.5.1. По типу А вычисляют стандартную неопределенность, обусловленную источниками неопределенности, имеющими случайный характер при измерении длины штриховой меры

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(L_i - \bar{L}\right)^2}{n(n-1)}} = 0,025 \text{ мкм}$$

(В.9)

В.5.2. По пункту В вычисляют стандартную неопределенность, обусловленную источниками неопределенности, имеющими систематический характер. Закон распределения величин внутри границ считают равномерным.

В.5.2.1. Границы, внутри которых лежит значение показателя преломления воздуха, равны $\theta_в = 2,0\cdot10^{-8}$. Стандартную неопределенность, обусловленную неточным знанием данного параметра, определяют, как

$$u_{B.в} = \frac{\theta_в}{\sqrt{3}} = 1,2\cdot10^{-8}. \qquad (В.10)$$

В.5.2.2. Границы, внутри которых лежит значение длины волны излучения, равны $\theta_\gamma = 6,2\cdot10^{-9}$ мкм. Тогда соответствующую стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u_{B.\lambda} = \frac{\theta_\lambda}{\sqrt{3}} = 3,6\cdot10^{-9} \text{ мкм.}$$

(В.11)

В.5.2.3. Границы, внутри которых лежит значение температуры штриховой меры, равны $\theta_t = 0,003$ °C. Стандартную неопределенность, обусловленную неточным знанием температуры, вычисляют по формуле

$$u_{B.t} = \frac{\theta_t}{\sqrt{3}} = 0,002^{\circ}C.$$

(В.12)

В.5.2.4. Границы, внутри которых лежит значение поправки на размер коллиматорной щели, равны $\theta_{\Delta l} = 0,02$ мкм. Тогда соответствующую стандартную неопределенность получают по формуле

$$u_{B.\Delta l} = \frac{\theta_{\Delta l}}{\sqrt{3}} = 0{,}001 \text{ мкм.} \tag{B.13}$$

В.5.2.5. Суммарную стандартную неопределенность, вычисленную по типу В, определяют по формуле

$$u_{в} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial n_{в}}\right)^2 \cdot u_{в}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)^2 \cdot u_{\lambda}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)^2 \cdot u_{t}^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial (\Delta l)}\right)^2 \cdot u_{\Delta l}^2} \tag{B.14}$$

Расчет коэффициентов влияния по п. В.4.1 $u_{в} \approx 0{,}024$ мкм.

В.5.3. Суммарную стандартную неопределенность вычисляют по формуле

$$u_c = \sqrt{u_A^2 + u_B^2} = 0{,}035 \text{ мкм} \tag{B.15}$$

В.5.4. Эффективное число степеней свободы

$$\nu_{eff} = \frac{u_c^4}{\frac{(u_A)^4}{n-1} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial n_{в}} \cdot u_{в}\right)^4}{\infty} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial \lambda} \cdot u_{\gamma}\right)^4}{\infty} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial t} \cdot u_{t}\right)^4}{\infty} + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial (\Delta l)} \cdot u_{\Delta l}\right)^4}{\infty}} = 35.$$

(В.16)

В.5.5. Коэффициент охвата определяют следующим образом

$$k = t_{0,95}(\nu_{eff}) = 2{,}78.$$

(В.17)

В.5.6. Расширенную неопределенность определяют, как

$$U_{0,99} = k \cdot u_c = 0{,}097 \text{ мкм}.$$

(В.18)

В.6. Переход от характеристик погрешности к неопределенности измерений

В.6.1. Используя оценки характеристик погрешности, полученные в п. В.4 данного примера, можно продемонстрировать получение оценок неопределенностей в соответствии с п.4.4 настоящей рекомендации.

Схема В.1.

Y = 1,000001474 м,
S = 0,025 мкм,
θ (0,99) = 0,051 мкм,
$m_{сист}$ = 4,
n = 10.

→

Y = 1,000001474 м,
$\hat{u}_A = S = 0{,}025$ мкм,
$\hat{u}_B = \dfrac{\theta(0{,}99)}{K \cdot \sqrt{3}} = 0{,}024$ мкм,
p = 0,99; K = 1,23,
$\hat{u}_c = \sqrt{\hat{u}_A^2 + \hat{u}_B^2} = 0{,}035$ мкм,
$\hat{\nu}_{eff} = (n-1)\left[1 + \dfrac{\hat{u}_B^2}{\hat{u}_A^2}\right]^2 = 35,$
$\hat{U}_{0,99} = t_{0,99}(35) \cdot \hat{u}_c = 0{,}097$ мкм.

В данном примере неопределенности измерений в п. Б.5 данного примера в соответствии с *Руководством*, совпадают с их оценками, полученными по схеме В.1.

Схема В.2.

L = 1,000001474 м,
p = 0,99,
$\Delta_{0,99}$ = 0,094 мкм.

→

Y = 1,000001474 м,
z = 0,99,
$\hat{U}_{0,99} = \Delta_{0,99} = 0{,}094$ мкм,
$\hat{u}_c = \dfrac{\Delta_{0,99}}{z_{0,99}} = \dfrac{0{,}094}{3} = 0{,}031$ мкм.

Разность неопределенностей измерений, вычисленных в п.Б.5 данного примера в соответствии с *Руководством*, и их оценок, полученных по схеме В.2 (когда отсутствует достаточная информация для их оценки в соответствии с *Руководством*), в данном примере равны

$$\frac{\hat{U}_{0,99} - U_{0,99}}{U_{0,99}} \cdot 100 = \frac{0{,}094 - 0{,}097}{0{,}097} \cdot 100 = 3\%,$$

$$\frac{\tilde{u}_c - u_c}{u_c}\cdot 100 = \frac{0{,}031 - 0{,}035}{0{,}035}\cdot 100 = 11\% .$$

Эти различия вызваны разными алгоритмами определения коэффициента охвата при вычислении расширенной неопределенности и коэффициента при суммировании систематической и случайной составляющих суммарной погрешности.

3.4. Приложение Г. Значение коэффициента $t_p(\nu)$ для случайной величины, имеющей распределение Стьюдента с ν степенями свободы

ν	p = 0,95	p = 0,99	ν	p = 0,95	p = 0,99
3	3,182	5,841	16	2,120	2,921
4	2,776	4,604	18	2,101	2,878
5	2,571	4,032	20	2,086	2,845
6	2,447	3,707	22	2,074	2,819
7	2,365	3,499	24	2,064	2,797
8	2,306	3,355	26	2,056	2,779
9	2,262	3,250	28	2,048	2,763
10	2,228	3,169	30	2,042	2,750
12	2,179	3,055	∞	1,960	2,576
14	2,145	2,977			

ГЛАВА 3. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА ОЦЕНОК НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ В ТЕРМОМЕТРИИ

Пример 1. Расчет оценки неопределенности измерения температуры в канале металлического блока

Определить оценку неопределенности измерения температуры в канале металлического блока, помещенного в термостат, прецизионным цифровым термометром с платиновым первичным преобразователем сопротивления. Имеются следующие исходные данные для расчета неопределенности измерений.

1.В процессе измерений было сделано 30 наблюдений, приведенных в табл.1.

Таблица 1. Результаты наблюдений

№ наблюде-ния i	Результат наблюдения T_i, ^oC	№ наблю-дения i	Результат наблюдения T_i, ^oC	№ наблю-дения i	Результат наблюдения T_i, ^oC
1	160,751	11	160,743	21	160,756
2	160,733	12	160,755	22	160,771
3	160,728	13	160,761	23	160,770
4	160,775	14	160,749	24	160,755
5	160,750	15	160,750	25	160,744
6	160,762	16	160,748	26	160,747
7	160,750	17	160,755	27	160,750
8	160,766	18	160,768	28	160,753
9	160,751	19	160,771	29	160,742
10	160,748	20	160,745	30	160,749

2. Расчетная величина поправки вводимой в результат измерений, необходимой для учета влияния теплоотвода по корпусу термометра и термического сопротивления между чувствительным элементом термометра и стенкой канала металлического блока, составляет 0,025 ^oC. Неопределенность величины поправки с использованием теплового моделирования лежит в пределах от 0,005 до минус 0,005 ^oC. Имеются основания предполагать, что плотность вероятности неопределенности имеет равномерное распределение.

3. В свидетельстве поверки использованного измерительного прибора указана его доверительная погрешность равная 0,01 ^oC с вероятностью 0,95 (2σ).

Решение.

В задаче рассматривается случай прямых измерений, не требующий представления измеряемой величины в виде функциональной зависимости. В этом случае неопределенность результата измерений может быть представлена в виде суммы неопределенностей, вызванных влиянием различных факторов, которые могут быть определены на основе всей доступной информации. При этом можно предположить, что все составляющие неопределенности не коррелированны.

Из условия задачи можно определить следующие источники неопределенности результата измерения:

1.Случайная составляющая показаний термометра T_i, вызванная случайным изменением всех возможных влияющих на результат измерения эффектов.

2. Неточность метода оценки поправки, вводимой для учета влияния эффекта теплоотвода по корпусу термометра.

3. Вероятностный характер оценки погрешности термометра.

Суммарная стандартная неопределенность u_Σ измерения температуры может быть описана следующим соотношением

$$u_\Sigma = \sqrt{(u_A)^2 + (u_{B1})^2 + (u_{B2})^2}\ ,$$

где u_A – оценка случайной составляющей суммарной неопределенности результата измерения температуры, оцениваемая по типу А; u_{B1} – оценка составляющей неопределенности результата измерения температуры, обусловленная неопределенностью поправки, вводимой для учета эффекта теплоотвода по корпусу термометра; u_{B2} – оценка составляющей неопределенности результата измерения температуры, обусловленная неопределенностью оценки погрешности термометра.

1. Неопределенность случайной составляющей результата измерения температуры, оцениваемая по типу А.

1.1.Определяем оценку результата измерений температуры в канале металлического блока, как среднее арифметическое из результатов 30 наблюдений:

$$\bar{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} T_i = \frac{1}{30}\sum_{i=1}^{30} T_i = 160{,}7532\,.$$

1.2.Определяем стандартную неопределенность u_A по типу А оценки $\bar{T}$

$$u_A = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(T_i - \bar{T})^2}{n(n-1)}} = 0{,}002°C\,.$$

Исправленное значение результата измерения температуры в блоке, учитывающее влияние теплоотвода, может быть получено путем введения поправки

$$T_{изм.} = \overline{T} + \Delta T = 160{,}7532 + 0{,}025 = 160{,}7557\ ^{o}\text{C}.$$

2. Оценки стандартных неопределенностей результата измерений, вызванные неопределенностями поправки, вводимой для учета эффекта теплоотвода и погрешности термометра, определяются по типу В

2.1. Оценка неопределенности u_{B1} поправки, вводимой для учета эффекта влияния теплоотвода по корпусу термометра**.**

Из общих рассуждений и полученных экспериментальных данных известно, что неопределенность величины поправки лежит в пределах ± 0,005 ^{o}C. То есть, верхней границей b_+ распределения поправки является значение плюс 0,005^{o}C, а нижней, b_-- минус 0,005^{o}C. В этом случае стандартная неопределенность поправки u_{B1} может быть определена из соотношения:

$$u_{B1} = \frac{b_+ - b_-}{2 \cdot \sqrt{3}} = \frac{0{,}005 - (-0{,}005)}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}0015\,^{\circ}C$$

2.2. Оценка неопределенности u_{B2} результата измерения, вызванная вероятностным характером оценки погрешности термометра.

В свидетельстве о поверке термометра указана его доверительная погрешность, равная 0,01 ^{o}C с вероятностью 0,95, что соответствует коэффициенту Стьюдента равному величине 1,96. Из этого следует, что стандартная неопределенность термометра $u(\delta)$ равна

$$u_{B2} = 0{,}01 / 1{,}96 \approx 0{,}005\ ^{o}\text{C},$$

где 1,96 – коэффициент Стьюдента, соответствующий 95 % уровню доверия для нормального распределения.

3. Оценка суммарной стандартной неопределенности

Полагая, что влияющие факторы не коррелированны, оценка суммарной стандартной неопределенности u_Σ может быть получена в виде положительного квадратного корня из суммы дисперсий: u_A^2, u_{B1}^2 и u_{B2}^2, то есть:

$$u_\Sigma = \sqrt{u_A^2 + u_{B1}^2 + u_{B2}^2} = \sqrt{(0{,}002)^2 + (0{,}0015)^2 + (0{,}005)^2} \approx 0{,}006\ ^{0}\text{C}.$$

Ответ: $\mathbf{u_\Sigma}$ = 0,006 ^{0}C.

Пример 2. Расчет неопределенности калибровки платинового термометра сопротивления методом сличения с образцовым термометром в термостате

Технический платиновый термопреобразователь сопротивления типа ZPA-11215 был откалиброван в одной из точек температурного диапазона методом его сличения с образцовым термопреобразователем сопротивления ЭТС-25 в жидкостном термостате.

Результаты одновременных измерений сопротивлений, калибруемого и образцового термометров, приведены в табл.2.

Таблица 2. Результаты измерений

№ наблюдения, i	Значения сопротивления R_{oi} образцового термометра ЭТС-25, Ом	Значения сопротивления $R_{\text{т}i}$ технического термометра ZPA-11215, Ом
1	27,43904	105,3872
2	27,43921	105,3863
3	27,43886	105,3861
4	27,43836	105,3847
5	27,43808	105,3820
6	27,43765	105,3797
7	27,43680	105,3770
8	27,43635	105,3732

Определить суммарную неопределенность результата калибровки технического термометра, если известно, что:

1. Расширенная (K = 2) неопределенность калибровки образцового термопреобразователя сопротивления, указанная в сертификате, составляет 0,002^{o}C.

2. Сопротивление технического термометра ZPA-11215 при 0 ^{o}C равно 100 Ом, а его чувствительность при измеряемой температуре (коэффициент преобразования) S = 0,4Ом/ ^{o}C.

3. Сопротивление образцового термометра ЭТС-25 при температуре 0,01 ^{o}C составляет 25 Ом.

4. Сопротивление образцового термометра измерялось с помощью прецизионного мультиметра, расширенная (K = 3) неопределенность калибровки которого, указанная в сертификате, составляет 0,000015 Ом.

5. Сопротивление технического термометра измерялось с помощью автоматического моста, расширенная (K = 3) неопределенность калибровки которого, указанная в сертификате, составляет 0,0003 Ом.

6. Нестабильность температуры в рабочем объеме термостата составляет ± 0,002 ^{o}C.

7. Наибольшая разность температур между двумя точками в рабочем объеме термостата составляет 0,02 °С.

Решение.

В соответствии с определением понятия калибровки средств измерений эта процедура представляет собой **«Совокупность операций, устанавливающих соотношение между значением величины, полученным с помощью данного средства измерений и соответствующим значением величины, определенным с помощью эталона с целью определения действительных метрологических характеристик этого средства измерений».**

При калибровке технического термометра методом его сличения с образцовым термометром в термостате, выполняются следующие операции:

1. Измерение температуры образцовым термометром;
2. Измерение температуры техническим термометром;
3. Определение разности показаний термометров при измерении ими одной и той же температуры поддерживаемой в рабочем объеме термостата.

Неопределенность калибровки представляет собой неопределенности оценок этих разностей в каждой точке калибровки.

К факторам, определяющим неопределенность калибровки можно отнести:

1. Неопределенность результата измерения температуры образцовым термометром,

2. Неоднородность температурного поля и нестабильность поддержания температуры в рабочем объеме термостата.

3. Неопределенность результата измерения температуры калибруемым термометром.

Для оценки неопределенности результата калибровки в каждой точке используют суммарную стандартную неопределенность оценки.

Суммарная стандартная неопределенность результата калибровки u_Σ технического термометра складывается из следующих неопределенностей:

- стандартная неопределенность измерения температуры в рабочем объеме термостата образцовым прибором $u_{\Sigma O}$;

- стандартная неопределенность, обусловленная неоднородностью температурного поля и нестабильностью поддержания температуры в термостате $u_{\Sigma T}$;

- стандартная неопределенность измерения температуры калибруемым техническим

термометром $u_{\Sigma P}$.

Суммарная стандартная неопределенность результата калибровки u_Σ технического термометра может быть представлена в виде

$$u_\Sigma = \sqrt{(u_{\Sigma O})^2 + (u_{\Sigma T})^2 + (u_{\Sigma P})^2}\ .$$

Суммарная стандартная неопределенность измерения температуры в рабочем объеме термостата образцовым прибором $u_{\Sigma O}$ может быть представлена в виде

$$u_{\Sigma O} = \sqrt{(u_{AO})^2 + (u_{BO})^2} \,,$$

где u_{AO} - стандартная неопределенность типа А измерения температуры в рабочем объеме термостата образцовым прибором; u_{BO} - стандартная неопределенность типа В измерения температуры в рабочем объеме термостата образцовым прибором.
Стандартная неопределенность u_{AO} представляет собой среднее квадратическое отклонение оценки среднего значения результата измерения температуры образцовым термометром и может быть определена из соотношения:

$$u_{AO} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(t_{oi} - \bar{t}_o)^2} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R_{Oi} - \bar{R}_O}{S_O}\right)^2} \,,$$

где $n = 8$ – число наблюдений температуры с помощью образцового термометра; t_{Oi} – i-й результат наблюдения температуры с помощью образцового термометра в процессе калибровки; $\bar{t}_O$ - среднее значение температуры из n наблюдений; R_{Oi} - i–й результат наблюдения сопротивления образцового термометра в процессе калибровки; $\bar{R}_O$ - среднее значение сопротивления образцового термометра из n наблюдений; S_O = 0,1 Ом / $^{\circ}$C – чувствительность образцового термометра при измеряемой температуре;

Определяем по 8 наблюдениям среднее значение сопротивления образцового термометра $\bar{R}_O$

$$\bar{R}_O = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} R_{Oi} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} R_{Oi} = 27{,}438$$

Тогда $u_{AO} \approx 0{,}0023$ $^{\circ}$C.

Стандартная неопределенность u_{BO} измерения температуры образцовым термометром, оцениваемая по типу В, складывается из стандартных неопределенностей калибровок образцового термометра и прецизионного мультиметра, то есть

$$u_{BO} = \sqrt{(u_{TO})^2 + (u_M)^2} \,,$$

где u_{TO} - стандартная неопределенность калибровки образцового термометра; u_M - стандартная неопределенность калибровки прецизионного мультиметра.

Из условий задачи известно, что в сертификате калибровки указана расширенная (K=2) неопределенность калибровки образцового термопреобразователя сопротивления u_{TO}. Таким образом, стандартная неопределенность калибровки прецизионного мультиметра равна:

$$u_{TO} = U_{TO} / K = 0{,}002 / 2 = 0{,}001\ ^oC.$$

Аналогично может быть определена в температурном эквиваленте стандартная неопределенность u_M калибровки образцового мультиметра, учитывая, что в этом случае коэффициент охвата К = 3

$$u_M = \frac{U_M^R}{K \cdot S_{обр}} = \frac{0{,}000015}{3 \cdot 0{,}1} = 0{,}00005\ °C,$$

где U_M^R - расширенная (K=3) неопределенность калибровки прецизионного мультиметра при измерении сопротивления, выраженная в омах; $S_{обр}$ = 0,1 Ом / ^{o}C - чувствительность образцового термометра при измеряемой температуре.

Выполнив необходимые расчеты, получаем

$$u_{BO} = \sqrt{(u_{TO})^2 + (u_M)^2} = \sqrt{(0{,}001)^2 + (0{,}00005)^2} \approx 0{,}001°C,$$

$$u_{\Sigma O} = \sqrt{(u_{AO})^2 + (u_{BO})^2} = \sqrt{(0{,}0023)^2 + (0{,}001)^2} \approx 0{,}003°C.$$

Суммарная стандартная неопределенность, обусловленная неоднородностью температурного поля и нестабильностью поддержания температуры в термостате $u_{\Sigma T}$, может быть оценена по типу В. В общем виде суммарная стандартная неопределенность $u_{\Sigma T}$ может быть представлена в виде

$$u_{\Sigma T} = \sqrt{(u_{T1})^2 + (u_{T2})^2},$$

где u_{T1} и u_{T2} – составляющие суммарной стандартной неопределенности, обусловленные соответственно неоднородностью температурного поля и нестабильностью поддержания температуры в термостате.

Для определения составляющей u_{T1} выполним следующие рассуждения. Из условий задачи известно, что неравномерность температурного поля в рабочем объеме термостата лежит в пределах ± 0,02 ^{o}C, то есть верхней границей b_+ распределения неравномерности является значение плюс 0,02 ^{o}C, а нижней, b_- - минус 0,02 ^{o}C. Можно предположить, что неравномерность температурного поля в рабочем объеме термостата носит равновероятный характер. В этом случае стандартная неопределенность неравномерности распределения температурного поля будет равна

$$u_{T1} = \frac{b_{+} - b_{-}}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{0{,}02 - (-0{,}02)}{2\cdot\sqrt{3}} \approx 0{,}012\ °C\ .$$

Аналогично рассуждая, находим оценку стандартной неопределенности u_{T2}. Из условий задачи известно, что нестабильность температуры в рабочем объеме термостата лежит в пределах ± 0,002 °C. То есть верхней границей a_{+} распределения нестабильности температуры является значение плюс 0,002, а нижней, a_{-} – минус 0,002 °C. Поскольку никакой информации о законе распределения нестабильности температуры в рабочем объеме термостата не имеется, можно предположить, что любое ее значение в указанных пределах равновероятно. В этом случае стандартная неопределенность нестабильности значений температуры в рабочем объеме термостата может быть определена из соотношения

$$u_{T2} = \frac{a_{+} - a_{-}}{2\cdot\sqrt{3}} = \frac{0{,}002 - (-0{,}002)}{2\cdot\sqrt{3}} \approx 0{,}0012\ °C\ .$$

Таким образом, суммарная стандартная неопределенность $u_{\Sigma T}$ может быть определена из соотношения

$$u_{\Sigma T} = \sqrt{(u_{T1})^2 + (u_{T2})^2} = \sqrt{(0{,}012)^2 + (0{,}0012)^2} = 0{,}012\ °\text{C}.$$

Суммарная неопределенность $u_{\Sigma P}$ измерения температуры в рабочем объеме термостата техническим термометром может быть представлена в виде

$$u_{\Sigma P} = \sqrt{(u_{AP})^2 + (u_{BP})^2}\ ,$$

где u_{AP} и u_{BP} - соответственно оценки неопределенности по типу *A* и типу *B*.

Используя данные результата калибровки технического термометра, оценка неопределенности по типу *A* может быть определена из соотношения

$$u_{AP} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(t_{Pi} - \bar{t}_P\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R_{Pi} - \bar{R}_P}{S_t}\right)^2}\ ,$$

где t_{Pi} – i-й результат наблюдения температуры с помощью технического термометра в процессе его калибровки; $n = 8$ – число наблюдений температуры с помощью образцового термометра; $\bar{t}_P$ - среднее значение температуры из n наблюдений; R_{Pi} - i-й результат наблюдения сопротивления технического термометра; $\bar{R}_P$ - среднее значение сопротивления из n наблюдений;

Определяем среднее значение $\bar{R}_P$ результатов наблюдений сопротивления технического термометра в процессе калибровки

$$\bar{R}_P = \frac{1}{n}\sum_{i}^{n} R_{Pi} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8} R_{Pi} \approx 109{,}449 \text{ Ом.}$$

Можем предположить, что неопределенность типа А результатов измерений температуры с помощью технического термометра имеет нормальное распределение. Тогда, оценка стандартной неопределенности u_{AP} определяется из соотношения

$$u_{AP} = \sqrt{\frac{1}{n\cdot(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{R_{Pi}-\bar{R}_P}{S_t}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{8(8\text{-}1)}\sum_{i=1}^{7}\left(\frac{R_{Pi}-109{,}44}{0{,}385}\right)^2} \approx 0{,}01\ {}^{\circ}C,$$

где $S_t = \dfrac{dR}{dt}$ = 0,385 Ом / °С - чувствительность технического термопреобразователя сопротивления при измеряемой температуре (берется из справочных данных, указанных в ГОСТ на номинальные статические характеристики термопреобразователей сопротивления).

Оценка u_{BP} может быть выражена в виде суммы предполагаемых (известных) составляющих стандартных неопределенностей, оцененных по типу В. Известной составляющей является стандартная неопределенность u_{BM} калибровки автоматического моста, использованного для измерения сопротивления технического термометра.

То есть $u_{BP} = u_{BM}$.

Из условия задачи известна расширенная (K=3) неопределенность U_M^R калибровки моста. Тогда стандартная неопределенность u_M^R может быть определена из соотношения

$$u_M^R = U_M^R / 3 = 0{,}0003 / 3 = 0{,}0001 \text{ Ом,}$$

где u_M^R и u_M^R - соответственно расширенная и стандартная оценки неопределенности калибровки моста, выраженные в единицах сопротивления.

Оценка u_{BM} , представляющая собой стандартную неопределенность калибровки моста, выраженная в температурном эквиваленте с учетом чувствительности технического термометра, может быть определена из соотношения

$$u_{BM} = u_M^R \ / \ S_t = 0{,}0001 / 0{,}385 \approx 0{,}0003 \ ^{o}\mathrm{C}.$$

Таким образом

$$u_{\Sigma P} = \sqrt{(u_{AP})^2 + (u_{BP})^2} = \sqrt{(0{,}01)^2 + (0{,}0003)^2} \approx 0{,}01 \ °C.$$

По рассчитанным оценкам составляющих $u_{\Sigma O}$, $u_{\Sigma \mathrm{T}}$ и $u_{\Sigma \mathrm{P}}$ находим суммарную стандартную неопределенность результата калибровки u_{Σ} технического термометра

$$u_{\Sigma} = \sqrt{(u_{\Sigma O})^2 + (u_{\Sigma \mathrm{T}})^2 + (u_{\Sigma \mathrm{P}})^2} = \sqrt{(0{,}003)^2 + (0{,}012)^2 + (0{,}01)^2} \approx 0{,}016 \ °C .$$

Ответ: $\mathbf{u_{\Sigma}}$ = 0,016 ^{o}С.

ЛИТЕРАТУРА

1. РМГ 29-99. «ГСИ. Метрология. Основные термины и определения». ИПК Изд. стандартов, М., 2000.
2. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. International Organization for Standardization, Switzerland, 1995.
3. МИ 2552-99. ГСИ. Применение «Руководства по выражению неопределенности измерений», СП-б., 1999.
4. Дойников А.С. Соотношение понятий «погрешность» и «неопределенность. «Законодательная и прикладная метрология», М., 2002, № 5.
5. Чуновкина А.Г. Погрешность измерения, неопределенность измерения и неопределенность измеряемой величины. «Измерительная техника», М., 2000, № 7.
6. Исаев Л.К. О неопределенности результатов измерений. «Измерительная техника», М., 1993, № 8.
7. Тарбеев Ю.В., Слаев В.А., Чуновкина А.Г. Проблемы применения в России «Руководства по выражению неопределенности измерений», «Измерительная техника», 1997, № 1.

История кафедры компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга

Начало теплофизической научной школы в университете было положено организацией в 1938 году кафедры приборов теплосилового контроля, заведующим которой стал профессор, доктор технических наук Г.М.Кондратьев (1887-1958). В 1954 году вышла в свет его монография «Регулярный тепловой режим». Изложенные в ней идеи впоследствии были успешно применены в различных областях, например, при создании нового типа приборов для исследования теплофизических свойств веществ и параметров теплообмена.

В начале пятидесятых годов началась разработка методов теплового расчета радиоэлектронных устройств, а в дальнейшем и других приборов – оптических, оптико-электронных, гироскопических. Серия этих работ была выполнена под руководством заслуженного деятеля науки и техники РФ, профессора, доктора технических наук Г.Н.Дульнева, возглавлявшего кафедру с 1958 по 1995 год. В результате был создан новый математический аппарат анализа теплового режима сложных технических систем и приборов, разработаны методы проектирования приборов с заданным тепловым режимом. Комплекс этих работ прилагается и в нашей стране, и за рубежом как новое научное направление в теплофизике.

Кафедра приборов теплосилового контроля за свою многолетнюю историю не раз изменяла свое название. Так, с 1947 года она именовалась кафедрой тепловых и контрольно-измерительных приборов, с 1965 года – кафедрой теплофизики, с 1991 года – кафедрой компьютерной теплофизики и энергофизического мониторинга. Однако, основным направлением ее научной и педагогической деятельности оставалось применение учения о теплообмене в физике и приборостроении. С 1995 года заведующим кафедрой является профессор, доктор технических наук А.В.Шарков.

Многолетняя деятельность кафедры привела к созданию научной и педагогической школы теплофизиков-приборостроителей, из которой вышли доктора наук А.Н. Гордов, А.И. Лазарев, Г.Н.Дульнев, Б.Н.Олейник, Е.С. Платунов, О.Е. Сергеев, Н.А. Ярышев, В.Н. Васильев, Ю.П. Заричняк, А.В.Шарков, С.Е. Буравой, В.В. Курепин, В.Г. Парфенов, Г.Н. Лукьянов и другие ученые -теплофизики.

Сотрудники кафедры принимали участие в разработке нового поколения вычислительных машин, исследований термооптических явлений в астрокосмических комплексах, в реализации международных программ космических исследований. Так, предложенные на кафедре методы были использованы при проектировании телевизионных камер космических аппаратов в проекте «ВЕГА», при создании лазерного устройства в проекте «ФОБОС».

Возможности разработанных на кафедре методов математического моделирования тепловых процессов в сложных системах и технике теплофизического эксперимента были продемонстрированы при анализе процессов теплообмена в организме человека; при создании электрогенераторов, работа которых использует явления сверхпроводимости; при создании оригинальных образцов оборонной, медицинской и измерительной техники.

В рамках традиционных направлений развиваются работы по созданию методов и приборов для измерения температуры, тепловых потоков, теплофизических свойств веществ, исследования коэффициентов переноса в неоднородных средах, а также работы по созданию принципиально новых композиционных материалов – особо прочных, термостойких, теплоизоляционных и т.д.

В последние годы наряду с традиционными научными направлениями появился ряд новых, связанных с экологическим мониторингом, энергосберегающими технологиями, биологией и медицинским теплофизическим приборостроением.

На базе ведущихся на кафедре научных исследований осуществляется обучение молодых специалистов, первый выпуск которых по специальности «Теплофизика» состоялся в 1969 году.

В 1998 году кафедра получила также право обучения по новому для нашего университета направлению «Техническая физика». В июне 1998 года состоялся первый выпуск бакалавров, а в 2000 году – магистров физики.

На кафедре ведется подготовка научных кадров высшей квалификации в аспирантуре и докторантуре по специальностям 01.04.14 «Теплофизика и теоретическая теплотехника» и 05.11.01 «Приборы и методы измерения тепловых величин».

Сейчас коллектив кафедры продолжает развитие как ставших уже традиционными научных направлений и направлений подготовки специалистов, так и ведет поиск в новых областях науки и техники.