

**А.Ф.Будник**

**ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОС В ПРОЦЕСАХ  
І МАТЕРІАЛАХ ДИЗАЙНУ  
МАТЕРІАЛІВ**

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник

Суми  
«Видавництво СумДУ»  
2008

УДК 536.24: 621.036

ББК 31.3

Б 90

Рецензенти:

д-р техн. наук, проф. В.Б.Тарельник  
(Національний аграрний університет, м. Суми);

д-р техн. наук, проф. І.Д.Погребняк  
(Інститут модифікації поверхні, м. Суми);

д-р техн. наук, проф. О.Р.Якуба  
(Національний аграрний університет, м. Суми)

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України  
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів  
(лист № 1.4/18-Г-811 від 04.04.2008 р.)*

**Будник А.Ф.**

Б 90 Тепломасоперенос у процесах і матеріалах дизайну  
матеріалів: Навчальний посібник. – Суми: Вид-во  
СумДУ, 2008. – 158 с.

ISBN 978-966-657-261-8

У посібнику розглянуто основні положення тепломасоперенесення, теорії та закономірності перенесення теплоти теплопровідністю, випромінюванням і конвекцією. Викладено основи теорії процесів масообміну в процесах і середовищах дизайну матеріалів. Наведено приклади практичного використання та розв'язання задач тепломасообміну.

Посібник має посилання на найбільш вживану літературу з питань, що розглядаються, та містить питання тестового контролю засвоєння знань теоретичного та практичного курсу за допомогою ПЕОМ, що дозволяє закласти засади для самостійної роботи фахівців у галузі тепломасоперенесення при дизайні матеріалів.

Для студентів-матеріалознавців III-IV рівнів акредитації під час вивчення дисципліни «Теорія тепломасопереносу в матеріалах» та виконання курсових, комплексних і дипломних проектів та самостійних робіт студентами з дисциплін навчального плану спеціальності 090101 «Прикладне матеріалознавство».

Посібник може бути корисним викладачам та аспірантам під час виконання навчальних і науково-дослідних робіт.

УДК 536.24: 621.036

ББК 31.3

© А.Ф. Будник, 2008

© Вид-во СумДУ, 2008

ISBN 978-966-657-261-8

## ЗМІСТ

	С
Вступ.....	5
Розділ 1 Теплопровідність. Основні положення теплопровідності..	9
1.1 Температурне поле, температурний градієнт, тепловий потік.....	9
1.2 Закон Фур'є. Коефіцієнт теплопровідності.....	11
1.3 Диференціальне рівняння теплопровідності.....	13
1.4 Крайові та граничні умови.....	16
Розділ 2 Стаціонарна теплопровідність.....	19
2.1 Теплопровідність однорідної плоскої стінки.....	19
2.2 Теплопровідність однорідної плоскої стінки з внутрішнім джерелом теплоти.....	20
2.3 Теплопровідність плоскої багат шарової стінки.....	22
2.4 Теплопровідність однорідної циліндричної стінки.....	24
2.5 Теплопровідність однорідної циліндричної стінки з внутрішнім джерелом теплоти.....	26
2.6 Теплопровідність багат шарової циліндричної стінки.....	27
Розділ 3 Нестационарна теплопровідність.....	30
3.1 Основні положення. Безрозмірні змінні.....	30
3.2 Охолодження (нагрівання) необмеженої плоскої стінки. Вплив значення критерію Біо на цей процес.....	32
Розділ 4 Конвективний теплообмін.....	37
4.1. Основні поняття. Режими течій. Примежовий шар.....	37
4.2. Диференціальне рівняння тепловіддачі.....	39
Розділ 5 Теплове випромінювання.....	40
5.1 Основні поняття і визначення.....	40
5.2 Основні закони теплового випромінювання.....	45
5.3 Теплообмін випромінюванням між двома сірими поверхнями.....	52
5.4 Теплообмін випромінюванням за наявності екранів.....	54
5.5 Випромінювання напівпрозорого середовища. Особливості випромінювання та поглинання газів.....	56
5.6 Складний теплообмін.....	60
Розділ 6 Основні визначення і рівняння масообміну.....	62

Розділ 7 Деякі характерні масообмінні процеси в металургії.	68
7.1 Тепло- і масообмінні процеси під час агломерації та випалення котунів.....	68
7.2 Масообмін під час виплавки чавуну.....	74
7.3 Масообмін під час відновлення шматка руди.....	82
7.4 Масообмін під час розкладання вапняку.....	85
7.5 Тепло- і масообмін під час сушіння.....	89
7.6 Методи чисельного аналізу процесів тепло-, масопере- несення.....	92
Розділ 8 Тестовий контроль засвоєння матеріалу лекційного курсу з предмета.....	94
Розділ 9 Приклади типових розрахунків теплових процесів дизайну матеріалів.....	96
9.1 Розрахунок тривалості нагрівання тонких тіл.....	96
9.2 Розрахунок тривалості нагрівання масивних тіл.....	97
9.3 Визначення тривалості витримки під час аустенізації.....	98
9.4 Розрахунок часу охолодження у середовищі під час гартування.....	99
9.5 Відпал сталевого литва.....	100
9.6 Термічне поліпшення сталевого литва.....	101
9.7 Ізотермічний відпал.....	103
9.8 Технологія цементації.....	105
9.9 Попередня термічна обробка ледебуритних інструментальних сталей.....	107
9.10 Типова технологія остаточної термічної обробки різальних інструментів із швидкорізальних сталей.....	109
Розділ 10 Практикум з предмета та методичні вказівки і приклади виконання самостійних робіт з курсу.....	118
Практична робота 1.....	118
Практична робота 2.....	129
Практична робота 3.....	138
Практична робота 4.....	152
Список використаної та рекомендованої літератури .....	158

## ВСТУП

Для технологічних процесів термічного впливу на виробничі процеси і матеріали (металургія, технологія термічної обробки та ін.) характерні декілька особливостей. Одна з них обумовлена тим, що масштаби виробництва металів і сплавів та їх термічної обробки вивели ці галузі промисловості щодо споживання сировини та палива на одне з перших місць серед інших галузей. Друга зводиться до того, що більшість цих процесів пов'язано з процесами одержання та обробки металів і сплавів та проходить при підвищених і високих температурах. Таким чином, і масштаби, і характер технологічних процесів потребують вивчення тепломасообмінних явищ, аналіз яких створює теоретичну базу для постійного вдосконалення конструкцій і теплових режимів термічних печей і агрегатів, можливостей впливати на структуру і властивості матеріалів, для оцінки шляхів підвищення якості продукції, зниження витрат палива і шкідливих викидів. Цим зумовлена особлива роль науки про перенесення енергії (теплоти) і маси речовини, яка дозволяє зрозуміти сутність конкретних теплотехнічних технологій.

Значення та роль знань явищ тепло-, масоперенесення в сучасній технології термічної обробки матеріалів і пірометалургії важко переоцінити. Від ступеня їх розвитку залежать техніко-економічні показники технологічного процесу термічної обробки матеріалів та металургійних агрегатів.

Дизайн (от англ. design – задум, проект) матеріалів (матеріалознавство) на сучасному етапі розвитку людства тісно пов'язаний з гострою необхідністю досягнення високої ефективності будь-якої технології тепло-, масообмінних процесів видобутку та термічного вдосконалення матеріалів. Це можливо лише за умови глибокого вивчення і розуміння законів перенесення теплової енергії і маси речовини. Особливого значення ці закони набувають під час організації управління, коли зростають вимоги до якості одержуваних матеріалів, безпеки і надійності печей і теплових агрегатів, їх екологічної чистоти. Необ-

хідно виділити ще одну особливість, характерну для термічних технологій, – у них процеси тепло- і масоперенесення взаємозв’язані, причому в деяких випадках досить важко визначити ведучу роль тієї чи іншої групи процесів. Процеси тепло- і масообміну, закони, що визначають їх перебіг, мають багато спільного.

Питання розвитку тепло-, масоперенесення входять до основних розділів сучасної фундаментальної науки, яка постійно розвиває методи дослідження явищ перенесення маси та енергії (у тому числі і при дизайні процесів та матеріалів) і дозволяє з’ясувати сутність термічних технологій.

Багато завдань, які нещодавно розв’язувалися тільки вузькими спеціалістами у галузі теорії тепломасоперенесення, завдяки впровадженню в інженерну практику швидкодійних ЕОМ можуть нині бути вирішені в умовах виробництва. Для цього інженери-матеріалознавці повинні глибоко розуміти фізичні особливості процесів, що проходять, і вміти математично описати досліджуване явище, а також з метою економії енергії і матеріалів раціонально розв’язувати питання дизайну систем термічного впливу.

*Теплообміном* називають процес поширення енергії у формі теплоти від одного тіла до іншого або від однієї частини тіла до іншої унаслідок різниці температур.

Теплообмін - це складний процес, тому для вивчення його розподіляють на прості явища. Існує три способи поширення теплоти в природі, які залежать від фізичних властивостей тіла: теплопровідність, конвективний теплообмін (конвекція) та теплове випромінювання (радіація або радіаційний теплообмін).

*Теплопровідністю* називають процес перенесення енергії внаслідок хаотичного руху та енергетичної взаємодії між мікрочастинками, з яких складається тіло (молекул, атомів, електронів); вона не залежить від руху тіла або його частин. Теплопровідність - це процес переходу енергії в суцільному середовищі. Механізм перенесення теплоти

теплопровідністю різних у твердих тілах, рідинах та газах.

*Конвекція* - це процес перенесення теплоти під час переміщення мікрочастинок тіла із середовища з однією температурою в середовище з іншою температурою. Конвекція спостерігається тільки в рідинах або газах і пов'язана з переміщенням самого середовища.

Процес перенесення теплоти конвекцією завжди супроводжується теплопровідністю внаслідок дотику частин середовища з різними температурами.

Передачу теплоти між середовищем (рідиною або газом) та стінкою називають *тепловіддачею*.

*Теплове випромінювання* - це наслідок складних збуджень частинок тіла (молекул, атомів тощо), які залежать від його температури та передаються за допомогою електромагнітних хвиль.

На відміну від поширення теплоти теплопровідністю та конвекцією теплове випромінювання може передаватися через вакуум.

За променистого теплообміну відбувається подвійне перетворення енергії. Спочатку внутрішня енергія тіла, що випромінює енергію, перетворюється на променисту енергію, яка передається в середовище, доки на своєму шляху не натрапить на непрозоре тіло, у якому відбувається процес перетворення променистої енергії на внутрішню енергію.

У техніці процес поширення або передачі теплоти здійснюється одночасно різними способами. Такий теплообмін називають *складним теплообміном*. Так, наприклад, передача теплоти конвекцією завжди супроводжується теплопровідністю.

Спільний процес перенесення теплоти конвекцією та теплопровідністю називають *конвективним теплообміном*, а якщо цей процес супроводжується тепловим випромінюванням – *радіаційно-конвективним*. У більшості теплообмінних апаратів різного призначення теплота від

одного середовища до іншого передається через відокремлюючу поверхню.

Процес передачі теплоти від одного середовища до іншого через відокремлюючу поверхню називають *теплопередачею*.

У техніці багато процесів перенесення теплоти супроводжуються перенесенням маси речовини - *масообміном*. Спільний процес теплообміну та масообміну називають *тепломасообміном*.

Завдяки науковій діяльності В.Є.Грум-Гржимайло, Л.М.Доброхотова, М.О.Глінкова, Б.І.Кітаєва, Г.П.Іванцова, А.В.Кавадєрова, І.Д.Симініна, М.В.Кірпічова, М.О.Міхєєва, О.А.Гухман, С.С.Кутателадзе, О.В.Ликова і цілого ряду інших вчених сформувався розділ науки, в якому постійно розширюється коло теоретичних питань з тепло-, масообміну, що вимагає вирішення практичних задач. Звичайно, курс «Теорія тепломасопереносу в матеріалах» передбачає засвоєння тільки фундаментальних, основоположних законів і закономірностей теплофізики термічних процесів. Конкретизація ряду особливостей теорії тепло-, масообміну для різних галузей термічних технологій повинна бути проведена в інших навчальних дисциплінах – «Термічна обробка», «Металургія чорних і кольорових металів», «Відновлення деталей машин» та інших. Можна стверджувати, що курс «Теорія тепломасопереносу в матеріалах» є базовою дисципліною для матеріалознавчих спеціальностей.

Крім лекцій, відповідно до програми, вивчення курсу тепломасоперенесення супроводжується проведенням практичних занять. Основна тематика занять наведена у розділі..., а контрольні завдання, методичні вказівки для самостійної роботи студентів та тестові питання оцінки вивчення лекційного матеріалу у розділах 7 та 9.

Посібник написаний відповідно до програми курсу, затвердженої Міністерством освіти і науки України для матеріалознавчих спеціальностей напряму 0901 «Інженерне матеріалознавство».



# РОЗДІЛ 1

## ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ. ОСНОВНІ ПОЛОЖЕННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

### 1.1 Температурне поле, температурний градієнт, тепловий потік

Процес поширення теплоти теплопровідністю – молекулярний процес, що відбувається за безпосереднього контакту тіл або частин тіла з різними температурами.

У чистому вигляді теплопровідність спостерігається в твердих тілах і тонких нерухомих шарах рідини.

У рідинах і твердих тілах теплота передається пружними хвилями. У металах пружні коливання кристалічних ґрат не мають основного значення. Передача теплоти головним чином відбувається шляхом дифузії вільних електронів.

У газах і рідинах теплота передається завдяки дифузії молекул та атомів.

Сукупність значень температур для всіх точок тіла або середовища, що розглядається, називають *температурним полем*. У загальному вигляді температура - це функція координат  $x, y, z$  та часу  $\tau$ :

$$T = f(x, y, z, \tau). \quad (1.1)$$

Розрізняють стаціонарні та нестаціонарні температурні поля. *Нестационарним температурним полем* називають поле і градієнт температур, які змінюються в часі.

*Стаціонарним температурним полем* називають поле, яке не змінюється з часом:

$$T = f(x, y, z). \quad (1.2)$$

Для такого поля можна записати:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0.$$

Температура може бути функцією однієї, двох або трьох координат і в цьому разі *поле* називають відповідно *одно-*,

дво- або тривимірним.

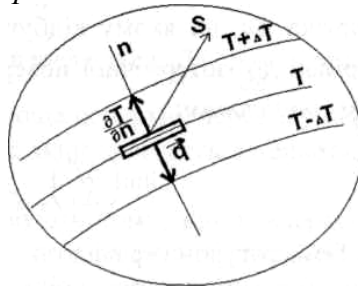


Рисунок 1.1 - Температурне поле, яке змінюється з часом

**Температурний градієнт.** За будь-якого температурного поля в тілі завжди є точки з однаковою температурою. Геометричне місце точок з однаковою температурою в певний момент часу називають *ізотермічною поверхнею* (рис. 1.1). Уздовж будь-якого довільного напрямку  $S$ , який не збігається з ізотермою, температура буде змінюватися. Границю відношення зміни температури  $\Delta T$  до відрізка  $\Delta n$ , на якому відбувається ця зміна, взятому по нормалі до ізотермічної поверхні, називають *температурним градієнтом*:

$$\lim \left( \frac{\Delta T}{\Delta n} \right)_{n \rightarrow 0} = \frac{\partial T}{\partial n} = \text{grad} T. \quad (1.3)$$

Температурний градієнт - це вектор, спрямований по нормалі до ізотермічної поверхні. Позитивний напрямок цього вектора - напрямок у бік збільшення температур.

**Тепловий потік.** Теплота довільно переноситься тільки в бік зменшення температури.

Кількість теплоти, яка проходить через будь-яку поверхню площею  $F$  за одиницю часу, називають *тепловим потоком*  $Q$ , [Дж/с = Вт].

Кількість теплоти, яка проходить через  $1 \text{ м}^2$  площі поверхні за одиницю часу, називають *питомим тепловим*

потоком, або густиною теплового потоку  $q$ ,  $[\text{Дж}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}) = \text{Вт}/\text{м}^2]$ .

Тепловий потік - це вектор, напрямком якого збігається з напрямком поширення теплоти та протилежний напрямку вектора температурного градієнта.

## 1.2 Закон Фур'є. Коефіцієнт теплопровідності

Французький учений Фур'є (1768-1830) експериментально встановив, що кількість теплоти, яка передається теплопровідністю, пропорційна температурному градієнту поверхні, через яку передається теплота, і часу, за який передається теплота:

$$Q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} F \tau, \quad (1.4)$$

де  $Q$  - кількість теплоти, яка передається, Дж;  $\partial T / \partial n$  - температурний градієнт, К/м;  $F$  - площа поверхні, через яку передається теплота,  $\text{м}^2$ ;  $\tau$  - час, за який передається теплота, с;  $\lambda$  - коефіцієнт пропорційності.

Частинну похідну застосовують тому, що температура змінюється не тільки нормаллю до елемента  $dF$ , але й за іншими напрямками, а для нестационарного поля ще й залежить від часу. Значення похідної постійне в межах вибраного інтервалу часу  $d\tau$ .

Знак "мінус" у рівнянні (1.4) свідчить про те, що теплота доволіно поширюється в напрямку меншого значення температур і температурний градієнт має невід'ємний напрямок, тобто

$$\vec{q} = -\lambda \text{grad} T. \quad (1.5)$$

Коефіцієнт пропорційності  $\lambda$  називають *коефіцієнтом теплопровідності*, який характеризує здатність тіла передавати теплоту.

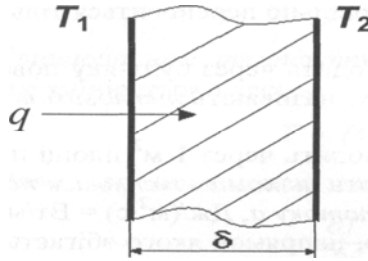


Рисунок 1.2 – Передача теплоти в часі через плоску пластину

Розглянемо випадок передачі теплоти за проміжок часу  $\tau$  через плоску пластину завтовшки  $\delta$ , площа якої  $F$ . Температури на поверхнях пластини  $T_1$  і  $T_2$  (рис. 1.2). При цьому  $T_1 > T_2$  і  $\Delta T = T_1 - T_2$ . Абсолютне значення кількості теплоти, яка передається через пластину (якщо не враховувати знак температурного градієнта) згідно із законом Фур'є буде дорівнювати

$$Q_\tau = \lambda \frac{\Delta T}{\delta} F \tau. \quad (1.6)$$

Якщо узяти, що  $\Delta T = 1$  К,  $\delta = 1$  м,  $F = 1$  м<sup>2</sup>,  $\tau = 1$  с, то з рівняння (1.6) будемо мати:

$$\lambda = \frac{Q\delta}{F\tau\Delta T}. \quad (1.7)$$

Звідси випливає *фізичний зміст коефіцієнта теплопровідності*: коефіцієнт теплопровідності - це кількість теплоти, яка передається від однієї поверхні до іншої на глибину 1 м за одиницю часу через одиницю поверхні за різниці температур між ними в один кельвін.

Розмірність коефіцієнта теплопровідності Дж·м/(м<sup>2</sup>·с·К) = Вт/(м·К) можна визначити з рівняння (1.7). Коефіцієнт теплопровідності  $\lambda$  - це фізична властивість речовини; він залежить від структури, густини, вологості, температури і тиску й знаходиться в межах: для газів – 0,05-0,5; рідини – 0,08-0,7; металів – 20-410 Вт/(м·К).

Найбільше значення коефіцієнта теплопровідності має

срібло:  $\lambda = 410 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$ . Матеріали зі значенням  $\lambda < 0,25 \text{ Вт/(м}\cdot\text{К)}$  застосовують для теплової ізоляції і називають *теплоізоляційними*. З підвищенням температури і вологості пористих матеріалів коефіцієнт теплопровідності збільшується, оскільки пори замість повітря заповнюються водою, яка має коефіцієнт теплопровідності більший, ніж у повітря.

### 1.3 Диференціальне рівняння теплопровідності

Під час вивчення фізичних явищ виникає по потребі встановлювання залежності між величинами, які характеризують ці явища. Цю залежність виражають математично за допомогою диференціальних рівнянь між фізичними величинами, які характеризують те чи інше явище, та просторово-часовими координатами.

Диференціальне рівняння теплопровідності встановлює залежність між величинами, які беруть участь у передачі теплоти теплопровідністю.

Для отримання рівнянь користуються методами математичної фізики, які дозволяють розглядати елементарний об'єм протягом елементарного проміжку часу. Такий підхід дозволяє знехтувати зміною ряду величин і спростити залежність.

Розглянемо процес поширення теплоти теплопровідністю через однорідне ізотропне тверде тіло зі сталим коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda$ , питомою теплоємністю  $c$ , густиною  $\rho$  та без внутрішнього джерела енергії.

Виділимо в тілі елементарний паралелепіпед з ребрами  $dx, dy, dz$  (рис. 1.3).

Складемо рівняння теплового балансу для цього паралелепіпеда і за допомогою закону Фур'є визначимо збільшення та витрату теплоти, яка передається теплопровідністю через кожне його ребро.

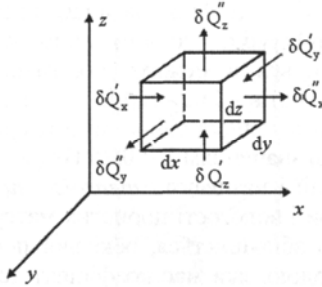


Рисунок 1.3 – Передача теплоти через елементарний паралелепіпед

У напрямку осі  $x$  через ребро площею  $dy \cdot dz$  за проміжок часу  $\tau$  надходить елементарна кількість теплоти

$$\delta Q'_x = -\lambda \cdot dy \cdot dz \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right) dt. \quad (1.8)$$

Через протилежне ребро паралелепіпед, що знаходиться на відстані  $dx$  та має температуру  $T + \frac{\partial T}{\partial x} dx$ , за цей самий час відводиться теплота в кількості

$$\delta Q''_x = -\lambda \frac{\partial}{\partial x} \left( T + \frac{\partial T}{\partial x} dx \right) dy \cdot dz \cdot d\tau. \quad (1.9)$$

Кількість теплоти, яка підводиться теплопровідністю до паралелепіпед в напрямку осі  $x$ , одержимо після почленного віднімання з рівняння (1.8) рівняння (1.9):

$$\delta Q_x = \delta Q'_x - \delta Q''_x = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau. \quad (1.10)$$

Аналогічно визначаємо кількість теплоти в напрямку осей  $y$  та  $z$ :

$$\delta Q_y = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau; \quad (1.11)$$

$$\delta Q_z = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} dx \cdot dy \cdot dz \cdot d\tau. \quad (1.12)$$

Кількість теплоти, що акумулюється в об'ємі  $dV = dx \cdot dy \cdot dz$  за час  $d\tau$ , одержуємо складанням рівнянь (1.10)-(1.12):

$$\partial Q = \partial Q_x + \partial Q_y + \partial Q_z = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) dV \cdot d\tau. \quad (1.13)$$

Згідно із законом збереження енергії цю кількість теплоти визначають за такою формулою:

$$\partial Q = c\rho dV \frac{\partial T}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.14)$$

Прирівнюючи ліві та праві частини рівнянь (1.13) і (1.14), одержимо диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = a \nabla^2 T \quad (1.15)$$

Величину  $a = \lambda/c\rho$  називають *коефіцієнтом температуропровідності*, а  $\nabla^2 T$  - оператором Лапласа.

Коефіцієнт температуропровідності характеризує здатність тіл змінювати температуру шарів у разі теплового впливу. Значення цього коефіцієнта неоднакові для різних матеріалів. Наприклад, для сухого дерева  $a = 0,972 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$ , а для срібла  $a = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2/\text{с}$ , тобто у дерева температуропровідність майже у 2000 разів менша. Величина, обернена  $a$ , характеризує температурну інерцію речовини.

Для стаціонарного режиму  $\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0$  і рівняння теплопровідності матиме вигляд

$$a \nabla^2 T = 0. \quad (1.16)$$

Рівняння (1.15) отримано стосовно однорідного ізотропного тіла. При цьому мали на увазі, що теплопровідність тіла  $\lambda$  не залежить від температури, а всередині тіла немає джерел теплоти. У такому разі рівняння (1.15) не можна використовувати, розглядаючи окремі задачі з внутрішнім джерелом енергії, які виділяють теплоту. Для цих випадків

диференціальне рівняння теплопровідності:

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = a \nabla^2 T + \frac{q_v}{c\rho}, \quad (1.17)$$

де  $q_v$  – об'ємна продуктивність внутрішніх джерел теплоти, кДж/м<sup>3</sup>. Фізичний зміст рівняння (1.15) полягає в тому, що воно пов'язує просторовий і часовий розподіл температур у межах нескінченно тонкого шару пластини. Отже, якщо мати в певний момент часу розподіл температури по товщині пластини, то можна визначити швидкість зміни температури кожного шару пластини з переходом до наступного моменту часу.

## 1.4 Крайові та граничні умови

Рівняння (1.15) належить до нескінченно малого елемента температурного поля і не визначає розвитку теплопровідності у всьому просторі, де проходить процес, і за весь час, протягом якого він проходить. Для математичного визначення певної задачі з відображенням кількісної і якісної її сторін потрібно доповнити диференціальне рівняння описом особливостей процесу, які розглядаються. Така сукупність дає крайові умови, або умови однозначності.

*Крайові умови* повинні мати всі особливості кожного випадку, який розглядають, і містити:

1) геометричні умови, які характеризують форму і розміри поверхні (тіла);

2) фізичні умови, які характеризують фізичні властивості тіла та навколишнього середовища (густина, в'язкість, теплопровідність тощо);

3) часові умови, які формують особливості перебігу процесу в часі;

4) граничні умови, що характеризують умови перебігу процесу на межах тіла.



*Граничні умови можна задати трьома способами.*

**Граничні умови першого роду.** За граничних умов першого роду задають розподіл температури на поверхні стінки  $T_T$  для кожного проміжка часу  $\tau$ :

$$T_T = f(x, y, z, \tau), \quad (1.18)$$

де  $x, y, z$  - координати поверхні тіла.

Якщо температура на поверхні тіла з часом залишається сталою, рівняння набирає вигляду

$$T_T = \text{const}.$$

За цих умов величина, яку визначають, - це кількість теплоти, що віддається.

**Граничні умови другого роду.** За граничних умов другого роду задають розподіл теплового потоку для кожної точки тіла в будь-який проміжок часу  $\tau$ :

$$q = f(x, y, z, \tau). \quad (1.19)$$

Аналогічно граничним умовам першого роду, якщо  $q$  - стала величина, будемо мати  $q = \text{const}$ .

Задача з умовами другого роду протилежна задачі з умовами першого роду, тобто визначається розподіл температур на поверхні.

**Граничні умови третього роду.** За граничних умов третього роду задається температура навколишнього середовища  $T_C$  і закон теплообміну між поверхнею тіла та навколишнім середовищем (закон Ньютона - Ріхмана), згідно з яким кількість теплоти, що віддається одиницею площі поверхні тіла за одиницю часу, пропорційна різниці температур між поверхнею тіла  $T_T$  і навколишнім середовищем  $T_C$  ( $T_T > T_C$ ), тобто

$$\partial = a(T_T - T_C), \quad (1.20)$$

де  $a$  - коефіцієнт пропорційності, який називають *коефіцієнтом тепловіддачі*,  $[\text{Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К})]$ ; він характеризує інтенсивність теплообміну між поверхнею тіла та навколишнім середовищем.

Зовнішня простота закону Ньютона - Ріхмана не відпо-

відає дійсності. Складність питання про теплообмін між тілом і навколишнім середовищем полягає у визначенні  $\alpha$  за певних умов задачі. Коефіцієнт тепловіддачі залежить від ряду факторів і на відміну від коефіцієнта теплопровідності не є фізичною сталою, характерною для даної речовини. Надалі, розв'язуючи задачі теплопровідності, вважатимемо, що коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha$  - це величина, яку задають.

Згідно із законом збереження енергії кількість теплоти, що віддається з одиниці площі поверхні за одиницю часу тепловіддачею, має дорівнювати кількості теплоти, яка підводиться до цієї поверхні теплопровідністю за цей самий проміжок часу:

$$\alpha(T_c - T_p) = -\lambda \left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{пов}}, \quad (1.21)$$

де  $\left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{пов}}$  - градієнт температури в напрямку нормалі до поверхні  $dF$ . Наведене рівняння можна записати в такому вигляді:

$$\left( \frac{\partial T}{\partial n} \right)_{\text{пов}} = -\frac{\alpha}{\lambda} (T_c - T_p), \quad (1.22)$$

що є математичним формулюванням граничних умов третього роду.

Поеднуючи умови однозначності з диференціальним рівнянням теплопровідності, можна визначити температуру в будь-якій точці тіла  $N$  і в будь-який момент часу.

## РОЗДІЛ 2

### СТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

#### 2.1 Теплопровідність однорідної плоскої стінки

Розглянемо передачу теплоти теплопровідністю в однорідній плоскій стінці завтовшки  $\delta$  (рис. 2.1). Коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = \text{const}$ , на поверхнях стінки температури  $T_1$  і  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ). Температурне поле - це функція тільки координати  $x$ , тобто воно одновимірне і температурний градієнт має вигляд  $dT/dx$ . Виділимо всередині стінки на відстані  $x$  від осі ординат шар завтовшки  $dx$ .

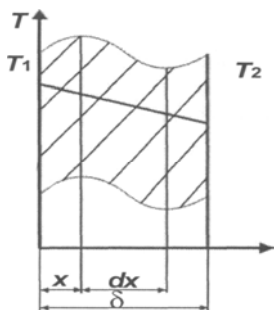


Рисунок 2.1 – Теплопровідність однорідної плоскої стінки

Згідно із законом Фур'є маємо

$$q = -\lambda \frac{dT}{dx}. \quad (2.1)$$

Звідси

$$dT = -\frac{q}{\lambda} dx. \quad (2.2)$$

За стаціонарного режиму кількість теплоти, яка проходить через кожний переріз, буде однакою, тобто величина  $q$  стала в кожному перерізі. Тому, проінтегрувавши рівняння (2.2), одержимо

$$T = -\frac{q}{\lambda} x + c. \quad (2.3)$$

За товщиною температура однорідної плоскої стінки змінюється за прямолінійним законом.

Сталу інтегрування  $c$  визначають з граничних умов: якщо  $x = 0$ ,  $T = T_1 = c$ , а якщо  $x = \delta$ ,  $T = T_2$ .

Підставивши ці значення у рівняння (2.3), матимемо

$$T_2 = -\frac{q}{\lambda} \delta + T_1, \quad (2.4)$$

звідки питомий тепловий потік буде дорівнювати

$$q = \frac{\lambda}{\delta} (T_1 - T_2). \quad (2.5)$$

Відношення  $\lambda/\delta$  називають *теплопровідністю стінки*, а обернену величину  $\delta/\lambda = K_\lambda$  - *внутрішнім термічним опором*.

## **2.2 Теплопровідність однорідної плоскої стінки з внутрішнім джерелом теплоти**

До внутрішніх джерел теплоти належать екзотермічні або ендотермічні реакції хімічних речовин, проходження електричного струму в провіднику за намагнічування заліза, процеси тепловиділення внаслідок радіоактивного розпаду, ядерні процеси в тепловидільних елементах тощо. Ці процеси характеризуються потужністю внутрішніх джерел теплоти  $q_V$  Вт/м<sup>3</sup>, що становить кількість теплоти, яку виділяє одиниця об'єму тіла за одиницю часу.

Наявність внутрішнього джерела теплоти зумовлює збільшення теплового потоку, що проходить через поверхню.

Розглянемо теплопровідність плоскої стінки необмеженої довжини з рівномірно розподіленим внутрішнім джерелом теплоти  $q_V$ . Товщина стінки  $2\delta$ , коефіцієнт теп-

лопровідності  $\lambda$  (рис. 2.2). Температура на осі пластини  $T_1$ , а на поверхні -  $T_2$ .

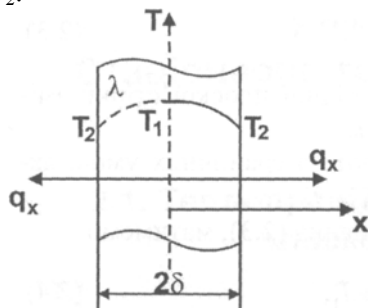


Рисунок 2.2 - Теплопровідність плоскої стінки з внутрішнім джерелом теплоти

Вважаємо, що процес теплопровідності проходить симетрично середній площині, а густина теплового потоку змінюється по осі  $x$  за залежністю згідно з рівнянням теплового балансу  $q_x = q_{vx}$ , з якої випливає, що якщо  $x = 0$ ,  $q = 0$ , а якщо  $x = \delta$ ,  $q = q_v \delta$ , тобто досягає свого найбільшого значення.

На підставі закону Фур'є можемо записати

$$q_x = q_v x = -\lambda \frac{dT}{dx}, \quad (2.6)$$

з якого, після розподілу змінних інтегрування і визначення констант з урахуванням граничних умов першого роду ( $x = 0$  та  $T = T_1, c = T_1$ ), рівняння температурної кривої матиме вигляд:

$$T = T_1 - \frac{q_v x^2}{2\lambda}. \quad (2.7)$$

Якщо  $x = \delta$ , то  $T = T_2$ , з рівняння (2.7) одержимо температурний напір між середньою площиною і зовнішньою поверхнею стінки:

$$T_1 - T_2 = \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} = \frac{q_\delta \delta}{2\lambda}, \quad (2.8)$$

де,  $q_v = q_v \delta$  - питомий тепловий потік на зовнішній поверхні стінки.

Якщо температуру  $T_l$  не задано, то сталу інтегрування виразимо через  $T_2$  - одержимо рівняння температурної кривої:

$$T = T_2 + \frac{q_v \delta^2}{2\lambda} \left[ 1 - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right]. \quad (2.9)$$

Рівняння (2.7) та (2.9) свідчать, що температура по товщині стінки змінюється параболічно.

## 2.3 Теплопровідність плоскої багатошарової стінки

Розглянемо поширення теплоти теплопровідністю в плоскій багатошаровій стінці (рис. 2.3).

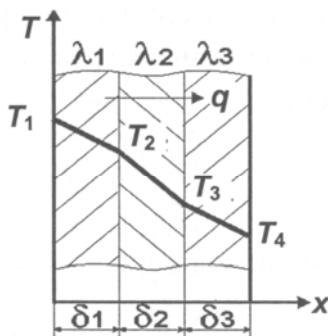


Рисунок 2.3 – Теплопровідність плоскої багатошарової стінки

У стаціонарному режимі тепловий потік для всіх шарів стінки буде однаковим і визначатиметься за рівняннями:

$$q = \frac{\lambda_1}{\delta_1} (T_1 - T_2) ; \quad (2.10)$$

$$q = \frac{\lambda_2}{\delta_2} (T_2 - T_3) ; \quad (2.11)$$

$$q = \frac{\lambda_3}{\delta_3} (T_3 - T_4) , \quad (2.12)$$

де  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  і  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  - відповідно коефіцієнти теплопровідності й товщини шарів стінки.

Зміна температури в кожному шарі:

$$T_1 - T_2 = q \frac{\delta_1}{\lambda_1} ; \quad (2.13)$$

$$T_2 - T_3 = q \frac{\delta_2}{\lambda_2} ; \quad (2.14)$$

$$T_3 - T_4 = q \frac{\delta_3}{\lambda_3} . \quad (2.15)$$

Якщо скласти ліві та праві частини рівнянь (2.13)-(2.15), одержимо рівняння для визначення повного температурного напору:

$$T_1 - T_4 = q \left( \frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3} \right) , \quad (2.16)$$

звідки питомий тепловий потік дорівнюватиме

$$q = \frac{T_1 - T_4}{\frac{\delta_1}{\lambda_1} + \frac{\delta_2}{\lambda_2} + \frac{\delta_3}{\lambda_3}} . \quad (2.17)$$

Для n-шарової стінки

$$q = \frac{T_1 - T_{n+1}}{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}}, \quad (2.18)$$

де  $\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\lambda_i}$  - загальний термічний опір багат шарової стінки.

Значення температур між окремими шарами визначатимемо рівняннями:

$$T_2 = T_1 - q \frac{\delta_1}{\lambda_1}, \quad (2.19)$$

$$T_3 = T_4 + q \frac{\delta_3}{\lambda_3}. \quad (2.20)$$

## 2.4 Теплопровідність однорідної циліндричної стінки

Розглянемо однорідну циліндричну стінку завдовжки  $l$ , внутрішнім радіусом  $r_1$ , зовнішнім  $r_2$  (рис. 2.4). Коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = \text{const}$ . Температурне поле - однорімірне.

Температура змінюється по радіусу. Виділимо на відстані радіуса  $r$  кільцевий шар  $dr$ . Згідно із законом Фур'є за одиницю часу через виділений шар  $dr$  проходить теплота в кількості

$$Q = -\lambda \frac{dT}{dr} F = -2\lambda\pi r l \frac{dT}{dr}. \quad (2.21)$$

Якщо розділимо змінні, одержимо

$$dT = -Q/2\pi\lambda l \cdot dr/r, \quad (2.22)$$

звідки після інтегрування матимемо

$$T = -\frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln r + c. \quad (2.23)$$



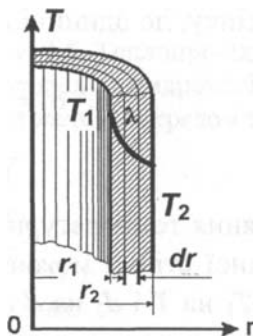


Рисунок 2.4 - Теплопровідність однорідної циліндричної стінки

Підставивши значення змінних на поверхнях стінки (якщо  $r = r_1$ ,  $T = T_1$  та якщо  $r = r_2$ ,  $T = T_2$ ) і виключивши сталу величину  $c$ , одержимо рівняння для визначення теплового потоку

$$Q = \frac{2\pi\lambda l}{\ln \frac{r_2}{r_1}} (T_1 - T_2) = \frac{2\pi\lambda l}{\ln \frac{d_2}{d_1}} (T_1 - T_2). \quad (2.24)$$

Якщо взяти відношення кількості теплоти, що проходить через стінку, до одиниці довжини, отримаємо

$$q_1 = \frac{Q}{l} = \frac{\pi(T_1 - T_2)}{\frac{1}{2\lambda} \ln \frac{d_2}{d_1}}. \quad (2.25)$$

Рівняння температурної кривої всередині однорідної циліндричної стінки можна одержати з рівняння (2.24), замінивши  $T_1$  на  $T$  і  $d_2$  на  $d$  та підставивши значення теплового потоку

$$T = T_1 - \frac{Q}{2\pi\lambda l} \ln \frac{d}{d_1} = T_1 - \frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{d_2}{d_1}} \ln \frac{d}{d_1}. \quad (2.26)$$

Звідки випливає, що за сталого коефіцієнта теплопровідності температура змінюється за логарифмічною кривою.

## 2.5 Теплопровідність однорідної циліндричної стінки з внутрішнім джерелом теплоти

Розглянемо однорідну циліндричну стінку з рівномірно розподіленим внутрішнім джерелом теплоти  $q_v$ , необмеженою довжиною  $l$ , внутрішнім радіусом  $r_1$ , зовнішнім –  $r_2$ , сталим коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda$ , відведенням теплоти через зовнішню поверхню (рис. 2.5). Тепловий потік будемо відносити до одиниці довжини. Згідно із законом Фур'є можемо записати

$$q_1 = -2\pi r \lambda \frac{dT}{dr}, \quad (2.27)$$

де  $q_1$  можна визначити як  $q_1 = q_v \pi (r^2 - r_1^2)$ . Після відповідних перетворень маємо:

$$dT = \frac{q_v}{2\lambda} \left( \frac{r_1^2}{r} - r \right) dr. \quad (2.28)$$

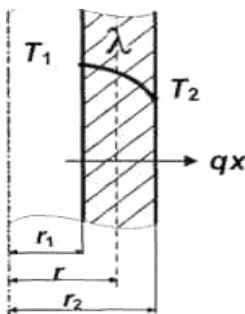


Рисунок 2.5 – Теплопровідність однорідної циліндричної стінки з внутрішнім джерелом теплоти

Проінтегрувавши рівняння (2.28) та визначивши константи інтегрування з граничних умов першого роду, одержимо рівняння зміни температури по товщині стінки

$$T_r = T_1 - \frac{q_v r_1^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r}{r_1} \right)^2 - 2 \ln \frac{r}{r_1} - 1 \right]. \quad (2.29)$$

Якщо візьмемо  $r = r_2$ , то з рівняння (2.29) одержимо рівняння для визначення перепаду температур по товщині стінки

$$T_1 - T_2 = \frac{q_v r_1^2}{4\lambda} \left[ \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 - 2 \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right] = \frac{q_1}{4\pi\lambda} \left( 1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} \right). \quad (2.30)$$

Якщо теплота відводиться через внутрішню поверхню стінки, то рівняння температурної кривої набирає такого вигляду:

$$T_r = T_2 - \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r_2}{r} + \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 - 1 \right], \quad (2.31)$$

а перепад температур у стінці визначатимемо за рівнянням

$$T_r = T_2 - \frac{q_v r_2^2}{4\lambda} \left[ 2 \ln \frac{r_2}{r_1} + \left( \frac{r}{r_2} \right)^2 - 1 \right] = \frac{q_1}{4\pi\lambda} \left( \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \ln \frac{r_2}{r_1} - 1 \right) \quad (2.32)$$

З одержаного рівняння випливає, що температура по товщині стінки змінюється за логарифмічною кривою.

## **2.6 Теплопровідність багатошарової циліндричної стінки**

Розглянемо неоднорідну багатошарову циліндричну стінку завдовжки  $l$ , із заданими діаметрами  $d_1, d_2, d_3, d_4$ , сталими коефіцієнтами теплопровідності  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  та заданими температурами на поверхнях  $T_1$  та  $T_2$  (рис. 2.6).

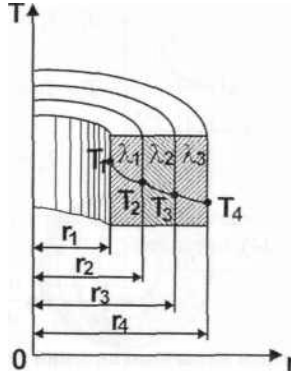


Рисунок 2.6 – Теплопровідність багатoshарової циліндричної стінки

За стаціонарного теплового режиму через усі шари стінки буде проходити однакова кількість теплоти. Тепловий потік визначимо за системою рівнянь

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{2\pi(T_1 - T_2)}{\frac{l}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}} \\ q_1 &= \frac{2\pi(T_2 - T_3)}{\frac{l}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}}; \\ q_1 &= \frac{2\pi(T_3 - T_4)}{\frac{l}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}} \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.33) щодо різниці температур, матимемо

$$\left. \begin{aligned} T_1 - T_2 &= \frac{q_l}{2\pi \lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}; \\ T_2 - T_3 &= \frac{q_l}{2\pi \lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}; \\ T_3 - T_4 &= \frac{q_l}{2\pi \lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}; \end{aligned} \right\} \quad (2.34)$$

Склавши окремо ліві і праві частини рівнянь (2.33) та (2.34), одержимо

$$T_1 - T_4 = \frac{q_l}{2\pi} \left( \frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3} \right), \quad (2.35)$$

звідки визначимо питомий тепловий потік за довжиною стінки:

$$q_l = \frac{2\pi(T_1 - T_4)}{\frac{1}{\lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1} + \frac{1}{\lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2} + \frac{1}{\lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}}. \quad (2.36)$$

Значення температур на внутрішніх поверхнях визначимо за рівняннями:

$$T_2 = T_1 - \frac{q_l}{2\pi \lambda_1} \ln \frac{d_2}{d_1}; \quad (2.37)$$

$$T_3 = T_2 - \frac{q_l}{2\pi \lambda_2} \ln \frac{d_3}{d_2}; T_4 = T_3 - \frac{q_l}{2\pi \lambda_3} \ln \frac{d_4}{d_3}. \quad (2.38)$$

## РОЗДІЛ 3

### НЕСТАЦІОНАРНА ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

#### 3.1. Основні положення. Безрозмірні змінні

У техніці, інженерних спорудах, природі широко поширені процеси нестационарної теплопровідності, наприклад, нагрівання й охолодження металу, охолодження металевих заготовок у ливарництві, нагрівання металу для термообробки, кування та інше. Усе це спричиняє зміну теплових потоків і температурних полів у елементах від найпростішої до найскладнішої форми. Внаслідок цього наведені приклади нестационарних процесів вирізняються великою складністю як фізичного, так і математичного аналізу.

*Нестационарними* називають процеси, в яких температура змінюється не тільки у просторовому вимірі, але й із часом.

Нестационарні процеси можуть бути періодичними, тобто повторюваними через певний проміжок часу, та більш поширеними, тобто перехідними, які характеризуються переходом від одного нестационарного процесу до іншого.

Передачу теплоти за нестационарного процесу можемо визначити, якщо знати закон зміни температурного поля  $T = f(x, y, z, \tau)$  і теплового потоку в просторі та часі  $\tau$ ,  $Q = f(x, y, z, \tau)$ . Ці залежності визначають з диференціального рівняння теплопровідності Фур'є, яке разом із граничними умовами третього роду та часовими умовами дає можливість записати рівняння температурного поля в загальному вигляді (вважаємо, що температура тіла в початковий момент часу  $\tau = 0$ ,  $T_0 = \text{const}$ ):

$$T = f(x, y, z, \tau, d, a, \lambda, T_0, T_c, l_0, l_1 \dots l_n). \quad (3.1)$$

Отже, як видно з рівняння (3.1), до параметрів, які характеризують просторово-часовий розподіл температур у твердому тілі, належать:

- характерні розміри тіла;
- коефіцієнт температуропровідності;
- значення температур у початковий момент і на межах тіла;
- коефіцієнти тепловіддачі і теплопровідності, які входять у граничні умови третього роду;
- характерний час (наприклад, за періодичного характеру процесу це може бути тривалість одного періоду).

*Параметр* - це величина, яка залишається сталою тільки в умовах певної задачі, в інших випадках вона може мати різні значення.

Велика кількість розмірних змінних і сталих величин надто ускладнює аналітичне розв'язання цього рівняння, для практичного його застосування змінні групують у безрозмірні комплекси, або **критерії**:

$\frac{\alpha l}{\lambda} = Bi$  - **критерій Біо**, який характеризує відношення вну-

трішнього термічного опору  $\frac{l}{\lambda}$  до зовнішнього  $\frac{1}{\alpha}$ ;

$\frac{\alpha \tau}{l^2} = Fo$  - **критерій Фур'є**, який визначає безрозмірний

час у задачах теплопровідності;  $\frac{x}{l}$  - безрозмірна координата.

Таким чином, скорочується кількість аргументів, від яких залежить характер температурного поля у просторі і часі. Використовуючи такий метод, можна числові результати розв'язання задач узагальнювати для певної групи явищ, які мають такі самі комплекси. Він набуває особливого значення, коли аналітична задача має певні складнощі і її можна розв'язати або експериментально, або числовим методом.

Після введення поняття надлишкової температури тіла

$\theta$ , відлік якої ведуть від температури навколишнього середовища  $T_c$  ( $\theta = T_T - T_c$ ), ураховуючи, що в початковий період часу  $\tau = 0$ ,  $\theta = \theta_1$ , одержимо безрозмірну температуру  $\frac{\theta}{\theta_0}$ , залежність якої можна записати критеріальним рівнянням

$$\frac{\theta}{\theta_0} = f\left(\frac{\alpha l}{\lambda}, \frac{\alpha \tau}{l^2}, \frac{x}{l}\right) = f\left(Bi, Fo, \frac{x}{l}\right). \quad (3.2)$$

Розв'язання задач з використанням цих залежностей дивись у розділі 8.

### **3.2 Охолодження (нагрівання) необмеженої плоскої стінки. Вплив значення критерію Біо на цей процес**

Розглянемо однорідну плоску стінку для моменту часу  $\tau_1$ , з коефіцієнтом теплопровідності  $\lambda$ , густиною  $\rho$ , теплоємністю  $c$ , завтовшки  $2\delta$ , необмеженими розмірами на осях  $x$  та  $y$  (рис. 3.1). Стінку симетрично охолоджує навколишнє середовище з температурою  $T_c$ . Коефіцієнт тепловіддачі з обох боків стінки  $\alpha$ .

Наявність фізичних величин дозволяє обчислити коефіцієнт температуропровідності  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ , де  $c\rho$  - об'ємна

теплоємність. Цей коефіцієнт визначає швидкість перебігу теплового процесу за нестационарного режиму, оскільки є відношенням здатності матеріалу проводити теплоту  $\lambda$  до здатності його накопичувати енергію. Відлік температури стінки для будь-якого проміжку часу будемо вести від температури навколишнього середовища. У початковий момент часу стінка має однакову сталу температуру  $T_0$  в усіх точках і, як наслідок, надлишкова температура  $\theta_0 = T_0 - T_c$  буде сталою величиною.



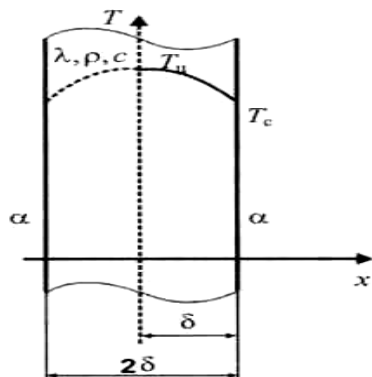


Рисунок 3.1 – Теплопровідність необмеженої плоскої стінки за нестационарного процесу

За заданих умов охолодження задача стає симетричною стосовно середньої площини, що дозволяє розглядати тільки половину стінки.

Поточні температури на поверхні стінки  $T_{\Pi}$  та її середній площині в центрі  $T_{\Pi}$  можна обчислити за допомогою таких рівнянь відповідно:

$$\frac{\theta_{\Pi}}{\theta_0} = \frac{T_{\Pi} - T_c}{T_0 - T_c} = f\left(\frac{\alpha l}{\lambda}, \frac{\alpha \tau}{l^2}\right) = f(Bi, Fo); \quad (3.3)$$

$$\frac{\theta_y}{\theta_0} = \frac{T_y - T_c}{T_0 - T_c} = f\left(\frac{\alpha l}{\lambda}, \frac{\alpha \tau}{l^2}\right) = f(Bi, Fo). \quad (3.4)$$

Кількість теплоти, що виділяється під час охолодження стінки з часом у навколишнє середовище:

$$Q_{\tau} = F 2 \delta c \rho (T_0 - T_{\text{ср.с}}),$$

де  $T_{\text{ср.с}}$  - середня температура стінки за певний проміжок часу, яку визначають з критеріальної залежності

$$\frac{Q_{\tau}}{Q_0} = f\left(\frac{\alpha l}{\lambda}, \frac{a \tau}{l^2}\right) = f(Bi, Fo), \quad (3.5)$$

де  $Q_0$  - початкова внутрішня енергія стінки, відлічувана від внутрішньої енергії за температури навколишнього середовища як від нуля,  $Q_0 = 2F_{\text{ср}}\delta(T_0 - T_c) = 2F_{\text{ср}}\delta\theta_0$ .

Критеріальні залежності (3.3)-(3.5) задають у спеціальній літературі з теорії теплопровідності у вигляді графіків або таблиць, з яких можна визначити безрозмірні температури на поверхні стінки  $\theta_{\text{п}}/\theta_0$  та на площині в центрі пластини  $\theta_{\text{ц}}/\theta_0$ . За допомогою таблиць або графіків спочатку знаходять значення  $Bi$  та  $Fo$  для заданих проміжків часу  $\tau$ , далі можна розрахувати безрозмірні температури для умов  $x = \delta$  і  $x = 0$ , а з них - надлишкові температури  $\theta_{\text{п}}$  і  $\theta_{\text{ц}}$ .

Визначивши температури усередині й на поверхні стінки для окремих моментів часу, проводять лінії зміни температури у товщі стінки. Для цього на поверхні стінки і всередині наносять точки, які відповідають температурам (рис. 3.2).

Нахил ліній зміни температур у товщі стінки від поверхні визначають за рівнянням граничних умов

$$\frac{\partial \theta_c}{\partial x} = \frac{\alpha}{\lambda} \theta_{\text{п}}(\tau) = \frac{\theta_{\text{п}}(\tau)}{\lambda \setminus \alpha}. \quad (3.6)$$

Для будь-якої  $\theta_{\text{п}}(\tau)$  на поверхні величина  $\frac{\partial \theta_{\text{п}}}{\partial x}$  означає нахил ліній у товщі стінки і є напрямком променя, який виходить з точки А, що розміщена від поверхні стінки на відстані  $x_0 = x_0 = \frac{\lambda}{\alpha}$  і має  $\theta = 0$  (див. рис. 3.2).

Проводячи з точки А промені, що відповідають одержаним значенням  $\theta_{\text{п}}(\tau)$  для окремих моментів часу - дотичних ліній до температурних кривих, наносять криві

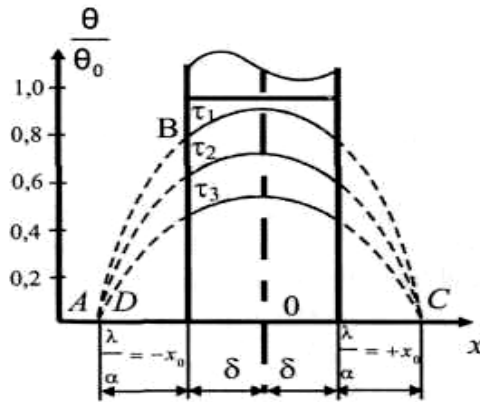


Рисунок 3.2 – Зміна температурного поля під час охолодження необмеженої плоскої стінки

зміни температур у товщі стінки. Усередині стінки  $\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0$ , і температурні криві мають у цьому місці симетричний вигин. Якщо граничні умови (3.6) помножити на  $\delta/\theta_0$  при  $x_0 = \pm \delta$ , то матимемо

$$\left[ \frac{\partial \left( \frac{\theta_{\Pi}}{\theta_0} \right)}{\partial \left( \frac{x}{\delta} \right)} \right]_{x=+\delta} = \frac{\alpha \delta}{\lambda} \left( \frac{Q_{\Pi}}{Q_0} \right)_{x=+\delta}. \quad (3.7)$$

Беручи до уваги, що  $\frac{\theta_{\Pi}}{\theta_0} = \theta$  - це безрозмірна температура,  $\frac{x}{\delta} = X$ — безрозмірна координата, вираз (3.7) можна записати в такому вигляді:

$$\left( \frac{\partial \theta}{\partial X} \right)_{x=1} = -Bi_i \theta_{x=1}. \quad (3.8)$$

Оскільки з рис. 3.2 видно, що

$$-\left(\frac{\partial \theta}{\partial X}\right)_{x=1} = \frac{\theta_{x=1}}{x_0} = \operatorname{tg} \varphi, \quad (3.9)$$

то з рівнянь (3.8) і (3.9) випливає

$$\frac{1}{x_0} = Bi. \quad (3.10)$$

Тобто відстань від точки А до поверхні стінки залежить від значення критерію  $Bi$ ; тим самим характер зміни температур у тілі залежить від значення цього критерію.

*Якщо охолодження (нагрівання) тіл проходить за малих значень критерію  $Bi$  ( $Bi < 0,1$ ), то дотичні до температурних кривих у точках перетину їх із поверхнею тіла будуть перетинатися з віссю абсцис у нескінченності, оскільки при  $Bi \rightarrow 0$ ,  $x_0 = \frac{1}{Bi} \rightarrow \infty$ .* Це означає, що температу-

ра в товщі тіла майже не відрізняється і температурні криві -горизонтальні лінії. Температура по товщині тіла змінюється рівномірно й дуже інтенсивно. Тому кількість теплоти, якою тіло обмінюється з навколишнім середовищем, залежить тільки від інтенсивності тепловіддачі.

*Якщо охолодження (нагрівання) тіл проходить за умови  $Bi \rightarrow \infty$  (практично  $Bi > 100$ ), наприклад, за контактного теплообміну або за великих значень коефіцієнтів тепловіддачі. За визначених властивостей матеріалу пластини  $\lambda$  і її*

розмірів умова  $Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda} \rightarrow \infty$  означає, що  $\alpha \rightarrow \infty$ , а тепловий

опір переходу теплоти від поверхні стінки до навколишнього середовища  $1/\alpha$  дорівнює нулю. У таких випадках температура поверхні пластини одразу дорівнює температурі середовища, у яке потрапляє пластина. Це впливає з

рівняння (3.10), оскільки при  $Bi = \infty$ ,  $x_0 = \frac{1}{Bi} = 0$  точка пере-

тину дотичних ліній до температурних кривих розміщена на поверхні пластини. За цих умов інтенсивність теплообміну між пластиною і навколишнім середовищем визначається фізичними властивостями матеріалу стінки і її розмірами. Зовнішні умови теплообміну на такий процес не впливають.

Для випадків, коли  $0,1 < Bi < 100$ , інтенсивність теплообміну між поверхнею стінки і навколишнім середовищем залежить як від фізичних властивостей матеріалу і розмірів стінки, так і від зовнішніх умов теплообміну, тобто від значення  $\alpha$ .

## РОЗДІЛ 4

### КОНВЕКТИВНИЙ ТЕПЛООБМІН

#### 4.1 Основні поняття. Режимы течій. Примежовий шар

*Конвективним теплообміном, або тепловіддачею, називають процес поширення теплоти теплопровідністю та конвекцією. Конвективний теплообмін спостерігається тільки в рухомих рідких і газоподібних середовищах.*

У природі існує два види течії рідини - вимушена та вільна.

*Вільною називають течію, яка виникає внаслідок різниці густин нагрітих і холодних частин тіла. Вимушена течія виникає під впливом зовнішніх сил (вентилятор, насос тощо).*

Конвективний теплообмін залежить від режиму течії рідини або газу. Розрізняють два основні режими течії - ламінарний і турбулентний.

За *ламінарного режиму* течія має спокійний, плавний характер, окремі шари середовища не перемішуються. Ламінарний режим трапляється рідко і характерний лише для тонких капілярних трубок або течії дуже в'язких середовищ.

За *турбулентного режиму* течія має неупорядкований вихровий характер, струмені потоку хаотичні та перемішуються між собою.

Ламінарна течія за певних умов переходить у турбулентну. Перехід течії з одного режиму в інший визначається числом Рейнольдса

$$Re = \frac{\omega \cdot l}{\nu}, \quad (4.1)$$

де  $\omega$  - середня швидкість руху середовища, м/с;  $l$  - лінійний розмір, м;  $\nu$  - коефіцієнт кінематичної в'язкості, м<sup>2</sup>/с.

Число Рейнольдса дозволяє порівняти сили інерції та сили в'язкості, виразити кількісне їх співвідношення. Якщо сили інерції не перевищують сили в'язкості, виникає турбулентний режим течії. Чим більше масштаб течії та її швидкість, тим більше число Рейнольдса. Число Рейнольдса - величина безрозмірна. Експериментально встановлено, що за значення  $Re < 2\,300$  спостерігається ламінарний режим течії,  $Re = 2\,300-10\,000$  - перехідний і якщо  $Re > 10\,000$  - турбулентний.

За поздовжнього руху рідини вздовж плоскої поверхні внаслідок впливу сил тертя та в'язкості, незалежно від режиму течії, утворюється тонкий ламінарний шар, у якому рідина наче «прилипає» до стінок і швидкість течії зменшується до нуля. Тонкий шар рідини, у якому швидкість змінюється від нуля на поверхні тіла до швидкості зовнішнього потоку, називають *гідродинамічним примежовим шаром*.

У процесі теплообміну біля поверхні формується тепловий примежовий шар, у межах якого температура рідини змінюється від температури стінки  $T_c$  до температури зовнішнього потоку середовища  $T_\infty$ .

Характер течії рідини зумовлює механізм перенесення теплоти в потоці. Якщо течія всередині теплового примежового шару ламінарна, то теплота поширюється теплопровідністю.

Із зовнішньої межі шару теплота переноситься переважно конвекцією.

На формування примежового шару впливають форма, розміри, характер поверхні твердого тіла, швидкість і фізичні властивості рідини. Інтенсивність тепловіддачі значною мірою залежить від структури примежового шару.

## 4.2 Диференціальне рівняння тепловіддачі

Диференціальне рівняння тепловіддачі характеризує процес теплообміну на межі зіткнення рідини або газу із стінкою. Розглянемо процес передачі теплоти на межі тіла.

Поблизу поверхні стінки утворюється тепловий примежовий шар, у якому температура змінюється від температури поверхні стінки  $T_{\Pi}$  до температури навколишнього середовища -  $T_c$ .

Частинки рідини в цьому шарі наче «прилипають» до поверхні стінки. Товщина шару залежить від фізичних властивостей рідини. У примежовому шарі теплота поширюється тільки теплопровідністю.

Кількість теплоти, яка передається теплопровідністю через примежовий шар, визначають за законом Фур'є:

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}, \quad (4.2)$$

де  $\frac{\partial T}{\partial n}$  - температурний градієнт по товщині шару, спрямований по нормалі до стінки.

Водночас, згідно із законом Ньютона, можна записати:

$$q = \alpha \Delta T, \quad (4.3)$$

де  $\Delta T$  - різниця температур рідини і тіла.

Якщо прирівняти рівняння (5.2) і (5.3), одержимо

$$\alpha = -\frac{\lambda}{\Delta T} \frac{\partial T}{\partial n}. \quad (4.4)$$

## РОЗДІЛ 5

## ТЕПЛОВЕ ВИПРОМІНЮВАННЯ

### 5.1 Основні поняття і визначення

Теплове випромінювання - це результат складних молекулярних і атомних процесів, які зумовлені впливом теплового стану тіла. Теплове випромінювання органічно притаманне будь-якому макрофізичному тілу і визначається винятково лише його температурою.

Згідно з електромагнітною теорією світла теплове випромінювання поширюється за допомогою електромагнітних хвиль, які випромінює тіло внаслідок хаотичного руху електронів. З квантового погляду теплове випромінювання має корпускулярну властивість, тобто променистий потік випромінюється і поглинається тілами дискретно, окремими порціями - квантами, носіями яких є фотони. Фотон - це частинка матерії, яка має енергію, кількість руху, електромагнітну масу.

Отже, теплове випромінювання подвійного характеру, оскільки має властивості безперервності поля електромагнітних хвиль і властивості дискретності, типові для фотонів.

Електромагнітні коливання характеризуються довжиною хвилі  $\lambda$  або частотою коливання  $\nu = \frac{c}{\lambda}$ , де  $c$  - швидкість поширення коливань (у вакуумі  $V_c = 3 \cdot 10^8$  м/с).

Електромагнітні коливання відомі під різними назвами - космічні, рентгенівські, ультрафіолетові, світлові, інфрачервоні, радіомагнітні.

Властивість передавати енергію у формі теплоти значною мірою мають світлові та інфрачервоні випромінювання. Світлові промені мають довжину хвилі  $\lambda = 0,4...0,8$  мк, а інфрачервоні -  $\lambda = 0,8...400$  мк. Під час променистого



теплообміну відбувається подвійне перетворення енергії: спочатку внутрішня енергія тіла, що випромінює, перетворюється на променисту енергію, яка поширюється променями, а потім промениста енергія перетворюється на внутрішню енергію поглинального тіла.

У результаті енергія переноситься від тіл, які мають вищу температуру, до тіл, які мають нижчу температуру. Таке явище називають передачею теплоти випромінюванням. У термічних цехах цей вид випромінювання зумовлює до 85–95% передачі теплоти від середовища печі до садки, що нагрівається. Променисту енергію випромінює кожне тіло, яке має температуру вище від абсолютного нуля, але кількість теплового випромінювання залежить від температури тіла. У системах, за кімнатної температури, теплове випромінювання незначне. Але за температур близько 550°C і вище передача теплоти випромінюванням - це переважно основний засіб теплопередачі. Зі зміною температури змінюється як повна енергія, що випромінюється, так і її розподілення. Довжина хвилі, на яку припадає максимальна випромінювальна здатність, зменшується зі зростанням температури тіла, що випромінює. Сонце випромінює енергію за температури 6000°C. Промені Сонця проходять через земну атмосферу, яка частково поглинає енергію, що призводить до зміни властивостей тих променів, які досягають поверхні Землі.

Якщо теплове випромінювання потрапляє на інші тіла, цей вид енергії частково поглинається, частково відбивається і частково проходить крізь них.

Загальну кількість променистої енергії, яка випромінюється з поверхні  $F$  у всіх довжинах хвиль спектра за одиницю часу  $t$ , називають інтегральним, або повним випромінювальним потоком  $Q$ , Вт.

Величину, яка числово дорівнює кількості енергії, випромінюваної одиницею поверхні тіла за одиницю часу,

називають випромінювальною здатністю тіла  $E$  (Вт/м<sup>2</sup>), або густиною інтегрального потоку випромінювання:

$$E = \frac{dQ}{dF}, \quad (5.1)$$

де  $dQ$  - променистий потік, Вт, який випромінюється з елемента поверхні  $dF$ , м<sup>2</sup>. Повний променистий потік з усієї поверхні буде дорівнювати

$$Q = \int E dF, \quad (5.2)$$

де  $F$  - повна площа поверхні тіла.

Якщо для всіх елементів поверхні тіла густина потоку стала, то повний променистий потік

$$Q = EF. \quad (5.3)$$

Розподіл енергії випромінювання за довжинами хвиль характеризується спектральною густиною випромінювання  $E_\lambda$ . Величина  $E_\lambda$  є відношенням густини потоку випромінювання в нескінченно малому інтервалі довжин хвиль  $\lambda$ , до  $\lambda + d\lambda$  до інтервалу довжин хвиль  $d\lambda$ , що розглядається, тобто  $E_\lambda = dE/d\lambda$  (Вт/м<sup>3</sup>). При цьому  $d\lambda$  прямує до нуля.

Різні тіла неоднаково поглинають, відбивають і пропускають променистий потік. З усього променистого потоку  $Q$  частина  $Q_A$  поглинається, частина  $Q_R$  відбивається і частина  $Q_D$  проходить крізь тіло (рис. 5.1).

Загальний променистий потік дорівнює

$$Q = Q_A + Q_R + Q_D. \quad (5.4)$$

А якщо поділимо обидві частини рівняння на значення променистого потоку  $Q$ , будемо мати

$$\frac{Q_A}{Q} + \frac{Q_R}{Q} + \frac{Q_D}{Q} = A + R + D = 1, \quad (5.5)$$

де  $\frac{Q_A}{Q} = A$  – частина променистого потоку, яку поглинає тіло (*коефіцієнт поглинання, або поглинальна здатність тіла*);

$\frac{Q_R}{Q} = R$  – частина променистого потоку, яку відбиває тіло (*коефіцієнт відбивання, або відбивна здатність тіла*);

$\frac{Q_D}{Q} = D$  – частина променистого потоку, що проходить крізь тіло (*коефіцієнт пропускання, або пропускна здатність тіла*).

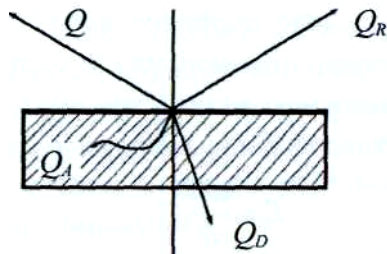


Рисунок 5.1 – Схема розподілу падаючої променистої енергії

Величини  $A$ ,  $R$ ,  $D$  змінюються від нуля до одиниці. Якщо  $A = 1$ , то  $R = 0$  і  $D = 0$ , тобто вся падаюча промениста енергія повністю поглинається тілом; такі тіла називають *абсолютно чорними тілами*.

Якщо  $R = 1$ , то  $A = 0$  і  $D = 0$ , тобто вся падаюча промениста енергія відбивається. Якщо відбивання підкоряється законам геометричної оптики, то такі тіла мають назву *дзеркальних*, а якщо світло поширюється на всі боки (дифузне відбивання), то їх називають *абсолютно білими*.

Якщо  $D = 1$ ,  $A = 0$  і  $R = 0$  - падаюча енергія повністю проходить крізь тіло, то такі тіла називають *абсолютно прозорими*, або *діатермічними*.

У природі не існує абсолютно чорних, білих або прозорих тіл. У реальних тіл, наприклад, сажі або чорного оксамиту, не менше 2-3 % усієї падаючої променистої енергії відбивається. Модель абсолютно чорного тіла - це отвір у боці порожнистого тіла. Промінь, який потрапляє в такий отвір, повністю поглинається після багатьох відбивань.

Чисте сухе повітря без домішок трьохатомних газів – вуглекислоти та водяної пари – це прозоре тіло для теплових променів.

Більшість твердих тіл у природі належать до сірих тіл. *Сіримі тілами* називають тіла, які мають суцільний спектр і поглинають не повністю ( $A < 1$ ), але однаковою мірою, промені всіх довжин хвиль за всіх температур. Розподіл енергії у спектрі випромінювання абсолютно чорного тіла за всіма частотами або довжинами хвиль відповідає термодинамічно рівноважному тепловому стану випромінювального тіла, не залежить від природи тіла і визначається тільки температурою.

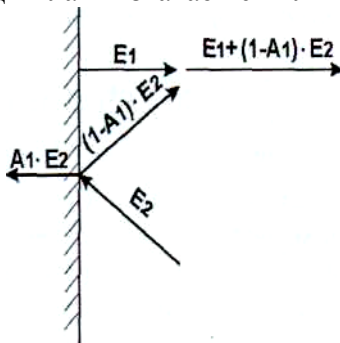


Рисунок 5.2 – Види променистих потоків

Розглянемо види променистих потоків (рис. 5.2). Якщо густина потоку випромінювання тіла  $E_1$ , то це - *густина*

потіку власного випромінювання тіла; вона повністю визначається температурою і фізичними властивостями тіла. Водночас із боку інших тіл на це тіло падає промениста енергія, густина потоку якої  $E_2$ . Частину падаючого випромінювання в кількості  $A_1 E_2$  поглинає тіло, а решту в кількості  $(1 - A_1) E_2$  відбиває. Суму власного потоку і густини потоку відбитого випромінювання тіла називають густиною потоку ефективного випромінювання:

$$E_{\text{еф}} = E_1 + (1 - A_1) E_2. \quad (5.6)$$

Сума потоків власного  $Q_{\text{вл}}$  і відбитого  $Q_{\text{від}}$  випромінювань дає *потік ефективного випромінювання*:

$$Q_{\text{еф}} = Q_{\text{вл}} + Q_{\text{від}}.$$

Різницю між падаючим потоком  $Q_{\text{пад}}$  і ефективним потоком випромінювання  $Q_{\text{еф}}$

$$Q_{\text{рез}} = Q_{\text{пад}} - Q_{\text{еф}}$$

або різницю потоків поглинутого і власного випромінювань

$$Q_{\text{рез}} = Q_{\text{погл}} - Q_{\text{вл}}$$

називають *результуючим потоком випромінювання*.

Якщо поглинуте тілом падаюче випромінювання переходить у теплоту і тіло має власне теплове випромінювання, то результуючий потік випромінювання визначає теплопередачу випромінюванням.

## 5.2 Основні закони теплового випромінювання

**Закон Планка.** Велике значення в теорії теплового випромінювання має питання про поширення променистої енергії, яку випромінює абсолютно чорне тіло за окремими частотами або довжинами хвиль спектра. Енергія, яку випромінює тіло, однозначно визначається його температу-

рою та довжиною хвиль. Закон зміни інтенсивності випромінювання за довжинами хвиль установив Планк у 1900 р.

Згідно із законом Планка для абсолютно чорного тіла розподіл енергії за довжинами хвиль підлягає залежності

$$E_{0\lambda} = \frac{C_1 \lambda^{-5}}{\exp(C_2 / \lambda T) - 1}, \quad (5.7)$$

де  $C_1$  - стала, яка дорівнює  $3,7 \cdot 10^{16}$  Вт·м<sup>2</sup>;  $\lambda$  - довжина хвилі, м;  $C_2$  - стала, яка дорівнює  $0,0144$  м · К;  $T$  – абсолютна температура, К.

Додатковий індекс “0” величини  $E_\lambda$  вказує на її належність до абсолютно чорного тіла.

З рівняння (5.7) видно, що інтенсивність випромінювання дорівнює нулю, коли  $T = 0$ , або коли  $\lambda = 0$  чи  $\lambda = \infty$ . Розподіл інтенсивності випромінювання залежно від температури та довжини хвиль відповідно до закону Планка показано на рис. 5.3. З ізотерм, наведених на рисунку, видно, що інтенсивність випромінювання для дуже коротких хвиль швидко зростає до максимуму, а потім повільно зменшується, але нульового значення не досягає навіть за найбільших довжин хвиль згідно із законом Планка теплового спектра.

Заштрихована площа на графіку (див. рис. 5.3), обмежена ізотермою, що відповідає довжинам хвиль  $\lambda$  та  $\lambda + d\lambda$ , визначає кількість енергії, яка випромінюється з одиниці поверхні тіла за одиницю часу за температури  $T$  в інтервалі довжин хвиль  $d\lambda$ .

Для граничних умов, коли  $\lambda T \gg C_2$ , закон має спрощений вигляд

$$E_\lambda = \frac{C_1 T}{C_2 \lambda^4}. \quad (5.8)$$

Залежність (5.8) виражає закон Релея -Джінса.

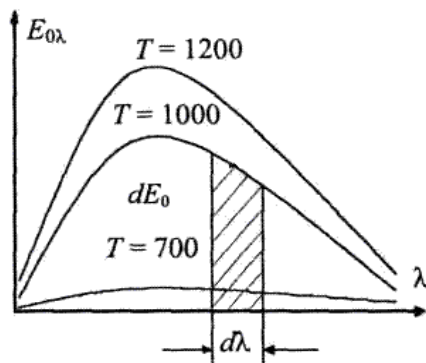


Рисунок 5.3 – Розподіл інтенсивності випромінювання залежно від температури і довжини хвиль

**Закон Віна.** Закон Віна впливає з рівняння (5.7), хоча встановлений до появи закону Планка. Згідно з цим законом *максимальна інтенсивність випромінювання з підвищенням температури зміщується в бік коротких хвиль*. Закон Віна можна описати рівнянням

$$\lambda_{\max} T = 2,9 \cdot 10^{-3}, \quad (5.8a)$$

де  $\lambda_{\max}$  - довжина хвилі, яка відповідає максимальній інтенсивності випромінювання, м.

За допомогою закону Віна будь-який відомий розподіл інтенсивності випромінювання за однієї температури можна перерахувати на розподіл інтенсивності за іншої температури.

**Закон Стефана-Больцмана.** Кількість енергії, яку випромінює відрізок хвиль довжиною  $d\lambda$ , буде еквівалентна заштрихованій на рис. 5.3 площі і визначатися з рівняння

$$dE_0 = E_{\lambda_0} d\lambda \quad (5.9)$$

Повна кількість енергії, яка випромінюється з  $1 \text{ м}^2$  поверхні абсолютно чорного тіла для всіх довжин хвиль від  $\lambda = 0$  до  $\lambda = \infty$ , дорівнюватиме

$$E_0 = \int_0^{\infty} E_{0\lambda} d\lambda . \quad (5.10)$$

Після підстановки в рівняння (5.10) рівняння (5.7) отримаємо закон Стефана-Больцмана

$$E_0 = \int_0^{\infty} \frac{C_1 \lambda^{-5} d\lambda}{e^{\frac{C_2}{\lambda T}} - 1} = \sigma_0 T^4 , \quad (5.11)$$

де  $\sigma_0$  - стала випромінювання абсолютно чорного тіла, яка дорівнює  $5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$ .

Закон Стефана-Больцмана можна сформулювати так: повна кількість енергії, яка випромінюється з одиниці поверхні абсолютно чорного тіла, пропорційна четвертому степеню абсолютної температури.

Цей закон дослідно встановив чеський учений Й.Стефан у 1879 р. і теоретично обґрунтував австрійський учений Л.Больцман у 1881 р.

Закон Стефана-Больцмана стосується теплового випромінювання за всіма довжинами хвиль. Кількість енергії, яку випромінює абсолютно чорне тіло у зонах обмежених смуг спектра, зростає по-різному залежно від місця знаходження і ширини цих смуг. Якісний склад повної енергії, що випромінюється, зі збільшенням температури змінюється, оскільки темп її зростання в короткохвильовій частині спектра вище, ніж у довгохвильовій. Переважна частина випромінюваної енергії за температур до 1500-2000 К припадає на невидиме оком довгохвильове випромінювання, а за температури близько 6000°C (температура Сонця) майже половина всієї енергії сприймається у вигляді світла і близького до нього ультрафіолетового випромінювання.

У технічних розрахунках, за великих значень температури, рівняння (5.11) використовують у вигляді

$$E_0 = C_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4 ; \quad (5.12)$$

у цьому разі  $C_0 = \sigma_0 10^8 = 5,67 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{К}^4)$  - коефіцієнт ви-



промінювання абсолютно чорного тіла.

Закон Стефана-Больцмана справедливий для абсолютно чорного тіла, але його можна застосувати і до сірих тіл, але з іншим (меншим) коефіцієнтом випромінювання  $C$ :

$$E = C \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (5.13)$$

Якщо порівняти рівняння (5.12) і (5.13), то знаходимо відносну випромінювальну здатність, або *ступінь чорноти тіла*:

$$\varepsilon = \frac{E}{E_0} = \frac{C \left( \frac{T}{100} \right)^4}{C_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4} = \frac{C}{C_0}. \quad (5.14)$$

Ступінь чорноти є змінюється від 0 до 1. Розрахункове рівняння для випромінювання сірого тіла таке:

$$E = \varepsilon E_0 = \varepsilon C_0 \left( \frac{T}{100} \right)^4. \quad (5.15)$$

Ступінь чорноти вказує, наскільки тіло наближається до абсолютно чорного тіла за своєю здатністю випромінювати; він залежить від природи тіла, стану його поверхні (насамперед, шорсткості) і температури. Значення ступеня чорноти наведено в довідковій літературі ( $0,01 < \varepsilon < 0,99$ ).

**Закон Ламберта.** За законом Стефана-Больцмана можна визначити кількість енергії, яку випромінює тіло у всіх напрямках. Випромінювання відбувається по-різному в різних напрямках простору. Закон Ламберта встановлює, що інтенсивність випромінювання з одиниці поверхні абсолютно чорного тіла в довільному напрямку пропорційна косинусу кута (тому інколи цей закон називають «законом косинусів») між цим напрямком і нормаллю до поверхні:

$$E_\varphi = E \cos \varphi. \quad (5.16)$$

**Закон Кірхгофа.** Цей закон встановлює зв'язок між випромінювальною та поглинальною здатностями будь-якого тіла. Припустимо, що є сіра поверхня з температурою  $T$  і абсолютно чорна поверхня з температурою  $T_0$ . Поверхні розміщені паралельно одна одній на такій відстані, що випромінювання кожної з них обов'язково потрапляє на другу (рис. 5.4).

Складемо енергетичний баланс, ураховуючи, що  $T > T_0$ , коефіцієнт поглинання сірої поверхні  $A$ , чорної поверхні  $A_0 = 1$ .

Енергію, яку випромінює сіре тіло ( $E$ ), буде повністю поглинати чорне тіло. Енергію, випромінювану абсолютно чорним тілом ( $E_0$ ), частково (у кількості  $A E_0$ ) буде поглинати сіре тіло, а частково (у кількості  $(1-A)E_0$ ) вона, відбившись, потраплятиме на абсолютно чорну поверхню і поглинатиметься нею.

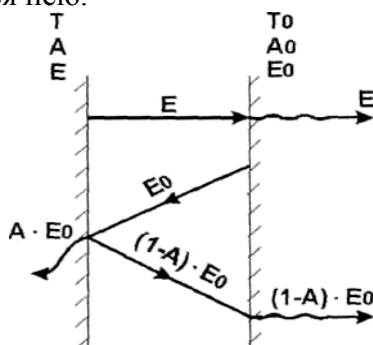


Рисунок 5.4 - Зв'язок між випромінювальною і поглинальною здатностями тіл

Отже, енергетичний баланс матиме такий вигляд:

$$E_{\text{вих}} = q = E - A E_0, \quad (5.17)$$

де  $E_{\text{вих}}$  - вихідний потік енергії.

У разі якщо  $T = T_0$  будемо мати термодинамічну рівновагу між поверхнями. Якщо  $q = 0$ , рівняння (5.17) ма-

тиме такий вигляд:

$$\frac{E}{A} = E_0. \quad (5.18)$$

Це співвідношення справедливе для будь-яких тіл і можна записати закон Кірхгофа

$$\frac{E_1}{A_1} = \frac{E_2}{A_2} = K = \frac{E_0}{A_0} = E_0 = f(T). \quad (5.19)$$

З отриманого рівняння випливає, що для будь-яких тіл відношення випромінювальної здатності до їх поглинальної здатності дорівнює випромінювальній здатності абсолютно чорного тіла за тій самої температури.

Якщо в рівняння (5.19) підставити  $E_1 = C_1 \left( \frac{T}{100} \right)^4$  і

$E_2 = C_2 \left( \frac{T}{100} \right)^4$ , то одержимо

$$\frac{C_1}{A_1} = \frac{C_2}{A_2} = K = C_0. \quad (5.20)$$

З рівняння (5.20) випливає перший наслідок закону Кірхгофа: відношення коефіцієнта випромінювання до коефіцієнта поглинання для всіх тіл одне й те саме і дорівнює коефіцієнту випромінювання абсолютно чорного тіла.

Другий наслідок випливає із зіставлення рівнянь (5.14) і (5.20): поглинальна здатність тіла числово дорівнює ступеню чорноти тіла  $A = \varepsilon$ .

Із закону Кірхгофа випливає, що випромінювальна здатність тіл тим більша, чим більша їх поглинальна здатність. Тіла, які добре відбивають променисту енергію, самі випромінюють дуже мало (наприклад, випромінювальна здатність абсолютно білого тіла дорівнює нулю).

Якщо потрібно зменшити втрати теплоти будь-якою поверхнею, то її обробляють так, щоб вона мала найменше

значення  $\epsilon$ . Поліровані поверхні мають дуже малі значення  $\epsilon$ . На шорстких і забруднених поверхнях, а також на поверхнях, покритих оксидною плівкою, значення  $\epsilon$  збільшується у десятки разів, може навіть наблизитися до одиниці. Значення  $\epsilon$  та  $A$  залежать від температури. Для металів вони з підвищенням температури зростають, для деяких неметалів - знижуються.

### 5.3 Теплообмін випромінюванням між двома сірими поверхнями

Нехай маємо дві паралельні плоскі сірі пластини з однаковими площами поверхонь  $F$  ( $\text{м}^2$ ), температурами  $T_1$  і  $T_2$ , причому  $T_1 > T_2$  (рис. 5.5). Розглянемо баланс енергії під час теплообміну випромінюванням між ними в умовах стаціонарного процесу, тобто за незмінності температур  $T_1$  і  $T_2$  у часі. Середовище між пластинами діатермічне.

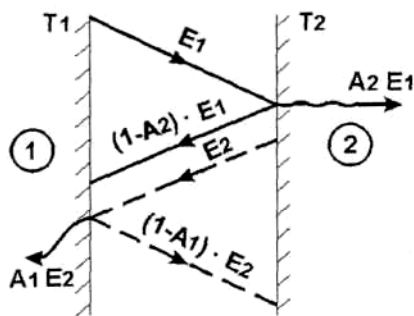


Рисунок 5.5 – Теплообмін випромінюванням між двома паралельними поверхнями

З одиниці поверхні за одиницю часу випромінюється енергія  $E_1$ . З цього потоку другою поверхнею поглинається енергія  $A_2 E_1$  і відбивається потік  $(1-A_2)E_1 = E_1 - A_2 E_1$ . У зв'язку з тим, що повний потік випромінювання дорівнює  $Q = EP$ , то згідно із законом Стефана-Больцмана поверхня першої пластини випромінює  $Q = FC_1 \left( \frac{T_1}{100} \right)^4$  і відбиває

потік  $Q_2(1 - A_1)$ , де  $Q_2$  - повний потік випромінювання з другої поверхні;  $Q_1$  - повний потік випромінювання з першої поверхні. Тоді

$$Q_1 = FC_1 \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 + Q_2(1 - A_1), \quad (5.21)$$

$$Q_2 = FC_2 \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 + Q_1(1 - A_2); \quad (5.22)$$

Розв'язавши ці рівняння, визначимо  $Q = Q_1 - Q_2$ , тобто результуючий потік між двома поверхнями:

$$Q = C_3 F \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right], \quad (5.23)$$

де  $C_3$ - зведений коефіцієнт випромінювання:

$$C_3 = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_0}}, \quad (5.24)$$

або  $C_3 = A_3 C_0$ , де  $A_3 = \frac{1}{\frac{1}{A_1} + \frac{1}{A_2} - 1}$  - зведений коефіцієнт

поглинання. Якщо  $A = \varepsilon$ , то  $C_3 = \varepsilon_3 C_0$ , де  $\varepsilon_3$  - зведений ступінь чорноти системи:

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2} - 1}. \quad (5.25)$$

На підставі викладеного результуючий потік можна визначити за рівнянням

$$Q = \varepsilon_3 C_0 F \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (5.26)$$

#### 5.4 Теплообмін випромінюванням за наявності екранів

З отриманого рівняння (5.26) випливає, що для того, щоб змінити теплообмін випромінюванням, потрібно змінити температуру тіла, що випромінює енергію, і ступінь чорноти системи. Якщо потрібно зменшити потік випромінювання за незмінної температури тіла, що випромінює, застосовують екрани між тілами (рис. 5.6).

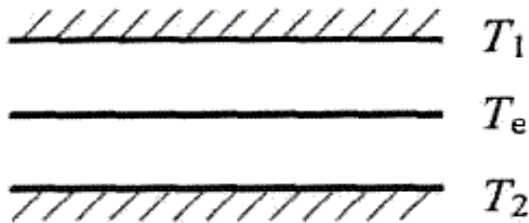


Рисунок 5.6 – Теплообмін випромінюванням за наявності екранів

Вважатимемо, що коефіцієнти випромінювання, або ступені чорноти, для пластин і екрана однакові, а температури їх  $T_1 > T_e > T_2$ , причому  $T_1 > T_e > T_2$ . За відсутності екрана потік випромінювання з  $1 \text{ м}^2$  пластини буде дорівнювати

$$q_{1-2} = C_3 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (5.27)$$

За наявності екрана він отримує від 1 м<sup>2</sup> першої пластини

$$q_{1-e} = C_3 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_e}{100} \right)^4 \right]. \quad (5.28)$$

Від екрана до другої пластини передається

$$q_{e-2} = C_3 \left[ \left( \frac{T_e}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (5.29)$$

За сталого теплового режиму  $q_{1-e} = q_{e-2}$ , тобто

$$\left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_e}{100} \right)^4 = \left( \frac{T_e}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4,$$

звідки

$$\left( \frac{T_e}{100} \right)^4 = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 + \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right]. \quad (5.30)$$

Після підстановки (5.30) у (5.28) отримаємо

$$q_{1-e} = \frac{1}{2} C_3 \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] = \frac{1}{2} q_{1-2}. \quad (5.31)$$

З рівняння (5.31) випливає, що один екран зменшує потік випромінювання вдвічі. За наявності  $n$  екранів потік зменшується в  $n + 1$  разів. Ефект від застосування екранів збільшується, якщо використовувати екрани з низьким значенням коефіцієнта випромінювання. Якщо коефіцієнти випромінювання  $C_{1-e} = C_{2-e}$  і  $C_{1-2} = C_c$ , то за наявності

одного екрана  $\frac{q_e}{q} = \frac{1}{2} \frac{C_e}{C_c}$ . Припустімо, наприклад, що

$C_e = 0,3$ , і  $C_c = 4,5$ , тоді  $\frac{q_e}{q} = \frac{1}{30}$ , тобто тепловіддача зменшується в 30 разів.

Екрани широко використовують у тих випадках, коли

потрібно значно знизити руйнівний вплив теплових променів на поверхні (наприклад, обмурівка (футерування) робочого простору термічних пічок та нагрівальних пристроїв), або коли потрібно захистити від випромінювання людей, що працюють біля гарячих поверхонь, та в багатьох інших випадках.

### **5.5 Випромінювання напівпрозорого середовища. Особливості випромінювання та поглинання газів**

Прозорість газоподібного середовища ослаблюється за наявності в ньому дрібних твердих частинок або краплин рідини у вигляді хмари, а також за наявності полярних молекул. Під час взаємодії електромагнітних хвиль випромінювання з частками речовини середовища виникає поглинання та розсіювання променистого потоку, що призводить до ослаблення інтенсивності цього потоку. Цим пояснюється часткова прозорість середовища. За високих температур розжарені тверді частинки надають середовищу, у якому вони розміщені, видимого забарвлення у вигляді світіння, інтенсивність якого повністю визначають розсіюванням променистого потоку. Це явище значно збільшує ступінь чорноти маси, яка випромінює.

Випромінювання газів зумовлює коливальний і обертальний рух атомів, і якщо вони мають вільні електричні заряди, то випромінюють електромагнітні хвилі. Одно- і двоатомні гази (водень, гелій, азот, сухе і чисте повітря) належать до прозорих тіл і теплових променів не випромінюють. Трьох- та багатоатомні гази мають значну поглинальну та випромінювальну здатності. У теплотехнічних установках особливого значення надають трьохатомним компонентам продуктів згоряння палива - вуглекислоті  $\text{CO}_2$ , сірчастому ангідриду  $\text{SO}_2$  і водяній парі  $\text{H}_2\text{O}$ .

Порівняно з твердими тілами випромінювання і погли-



нання газів має ряд особливостей. Для твердих тіл характерні суцільні спектри випромінювання, тобто вони випромінюють і поглинають енергію всіх довжин хвиль від  $\lambda = 0$  до  $\lambda = \infty$ . Випромінювання і поглинання газів характеризуються властивостями вибірності (селективності). Гази випромінюють і поглинають енергію в деяких інтервалах довжин хвиль, тобто в смугах, розміщених у різних частинах спектра. Наприклад, спектр поглинання вуглекислоти складається з ряду смуг, три з яких найпотужніші. Аналогічне явище характерне для водяної пари. В інших довжинах хвиль променистої енергії ці гази прозорі. Тобто селективність випромінювання газів веде до селективності їх поглинання.

Друга відмінність полягає в тому, що якщо випромінювання і поглинання енергії у твердих тілах відбуваються тільки з поверхні, то в газах випромінювання має об'ємний характер. У ньому беруть участь усі мікрочастинки об'єму. Газові об'єми не відбивають теплові промені. Для смугастих спектрів закон Стефана-Больцмана видозмінений і записується у вигляді

$$E = C \left( \frac{T}{100} \right)^n. \quad (5.41)$$

Показник степеня для  $\text{CO}_2$   $n = 3,5$ , а для водяної пари  $n = 3$ . Для зручності розрахунків потрібно вважати, що випромінювання газів теж відповідає закону четвертого степеня, але тоді до коефіцієнта  $C$  вводять поправку на температуру, оскільки  $C=f(T)$ .

Під час проходження теплових променів через газ їх енергія зменшується, тобто відбувається їх послаблення, що зумовлено кількістю молекул газу на шляху потоку. Кількість молекул пропорційна парціальному тиску  $p$ , газу, що поглинає теплові промені, та довжині шляху променя  $l$ .

Поглиналина здатність газу залежить також і від його

температури, отже,  $A = f(T, p, l)$ . За смугастих спектрів значення густини потоку випромінювання відрізняється від такого значення, знайденого за законом Стефана - Больцмана. Так, густину потоку інтегрального випромінювання для двоокису вуглецю і водяної пари згідно з дослідними даними визначають за формулами:

$$E_{CO_2} = 3,5(pl)^{0,33} \left( \frac{T}{100} \right)^{3,5}; \quad (5.42)$$

$$E_{H_2O} = 3,5p^{0,8}l^{0,6} \left( \frac{T}{100} \right)^3. \quad (5.43)$$

Еквівалентну довжину шляху променя визначають за виразом

$$l = 3,6 \frac{V}{F}, \quad (5.44)$$

де  $V$  – об'єм газу;  $F$  - площа поверхні випромінювального об'єму (поверхня оболонки, з якою проходить теплообмін). Так, довжина шляху променя для сфери діаметром  $d$  дорівнює  $0,6 d$ ;  $0,9 d$  - для циліндра нескінченної довжини діаметром  $d$ ;  $1,8\delta$  - для плоского шару завтовшки  $\delta$ .

Розглянемо процес проходження енергії через напівпрозоре середовище. Будемо вважати задачу одновимірною, тому що вісь  $x$  спрямовано щодо внутрішньої нормалі до поверхні шару (рис. 5.8). Беремо до уваги, що густина потоку монохроматичного випромінювання має назву спектральної інтенсивності випромінювання  $J_{\lambda x}$ , де індекс  $\lambda$  позначає визначену довжину хвилі, а індекс  $x$  - визначений напрям, заданий віссю  $x$ . Зменшення густини потоку у міру його заглиблення в товщу середовища пропорційне відношенню  $dJ_{\lambda x}/dx$ . Візьмемо, що густина потоку енергії, яка входить у шар,  $J_{\lambda 0}$ . На відстані  $x$  від поверхні вона дорівнює  $J_{\lambda x}$ . (рис. 5.8). При цьому  $J_{\lambda 0} > J_{\lambda x}$ . Тоді

$$\frac{dJ_{\lambda x}}{dx} = -\alpha_{\lambda} J_{\lambda x}, \quad (5.45)$$

де  $\alpha_{\lambda}$  - коефіцієнт поглинання середовища. Знак «мінус» наявний тому, що в додатному напрямку осі  $x$  величина  $dJ_{\lambda x}$  від'ємна. Беручи до уваги, що коефіцієнт  $\alpha_{\lambda}$  не залежить від  $x$ , у результаті інтегрування отримуємо

$$\begin{aligned} \int_{J_{\lambda 0}}^{J_{\lambda x}} \frac{dJ_{\lambda x}}{J_{\lambda x}} &= -\alpha_{\lambda} \int_0^x dx; \\ \ln \frac{J_{\lambda x}}{J_{\lambda 0}} &= -\alpha_{\lambda} x; \\ J_{\lambda x} &= J_{\lambda 0} e^{-\alpha_{\lambda} x}. \end{aligned} \quad (5.46)$$

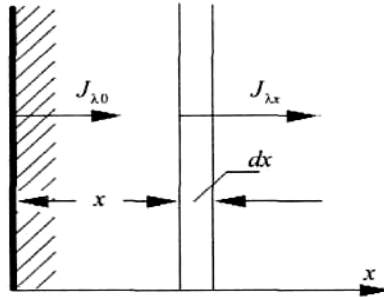


Рисунок 5.8 - До виведення формули закону Бугера

Формула (5.46) - це вираження закону Бугера.

Оскільки відбивною здатністю поверхні плоского шару напівпрозорого середовища можна знехтувати, то пропускна здатність такого шару  $D$  - це відношення енергії, яка виходить з цього шару, до енергії, яка увійшла всередину шару:

$$D = \frac{J_{\lambda x}}{J_{\lambda 0}} = e^{-\alpha_{\lambda} x}. \quad (5.47)$$

Тоді поглинальну здатність шару напівпрозорого середо-

вища визначають за формулою

$$A = 1 - e^{-\alpha\lambda x} \quad (5.48)$$

Поглинання в газах селективне, тому величина  $A$  набирає характеру фізичної сталої тільки в умовах монохроматичності випромінювання. За законом Кірхгофа і на підставі (5.48) маємо

$$\varepsilon_\lambda = A = 1 - e^{-\alpha_\lambda x}. \quad (5.49)$$

Аналіз виразу (9.49) показує, що ступінь чорноти газу  $\varepsilon_\lambda$  залежить від коефіцієнта поглинання середовища і товщини шару газу. Якщо коефіцієнт поглинання газу не дорівнює нулю, то ступінь чорноти газу і коефіцієнт поглинання зростають разом із товщиною шару газу. Якщо  $x = \infty$ , отримуємо  $\varepsilon_\lambda = A_\lambda = 1$ . Випромінювання необмежено товстого шару газу називають *чорним випромінюванням газу*. Чим більше коефіцієнт поглинання середовища, тим менша товщина  $x$  зумовлює практичну нескінченність шару.

Інтегральний ступінь чорноти газу (у всьому інтервалі зміни довжин хвиль) визначають, як правило, експериментально.

## 5.6 Складний теплообмін

Розглянуті раніше види теплообміну на практиці, як правило, самостійно трапляються рідко. Найчастіше передача теплоти теплопровідністю, конвекцією і випромінюванням відбувається сумісно, і такий вид теплообміну називають *складним*.

Під час теплообміну між навколишнім середовищем із температурою  $T_c$  і стінкою з температурою  $T_n$  сумарна густина теплового потоку середовища до стінки буде дорівнювати сумі густини потоку під час конвективного теплообміну  $q_k$  і густини потоку випромінювання  $q_v$ :

$$q_0 = q_k + q_v. \quad (5.50)$$

Кількісною характеристикою такого процесу буде сумарний коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha_0$

$$\alpha_0 = \alpha_k + \alpha_\varepsilon, \quad (5.51)$$

де  $\alpha_k$  - коефіцієнт тепловіддачі конвекцією;  $\alpha_\varepsilon$  - коефіцієнт тепловіддачі випромінюванням.

Сумарну густину теплового потоку можна подати так:

$$q_0 = \alpha_0 (T_p - T_c) = (\alpha_k + \alpha_\varepsilon) (T_c - T_\Pi). \quad (5.52)$$

Густину конвективного теплового потоку визначають рівнянням

$$q_k = \alpha_k (T_c - T_\Pi). \quad (5.53)$$

Густина теплового потоку випромінювання дорівнює

$$q_\varepsilon = \varepsilon C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_\Pi}{100} \right)^4 \right]. \quad (5.54)$$

Після підстановки (5.53) і (5.54) в (5.50) одержуємо

$$q_0 = \alpha_k (T_c - T_\Pi) + \varepsilon C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_\Pi}{100} \right)^4 \right]. \quad (5.55)$$

Якщо винесемо різницю температур  $T_c - T_\Pi$  за дужки, матимемо

$$q_0 = \left\{ \alpha_k + \varepsilon C_0 \left[ \frac{\left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_\Pi}{100} \right)^4}{(T_c - T_\Pi)} \right] \right\} (T_c - T_\Pi). \quad (5.56)$$

Прирівнявши рівняння (5.52) і (5.56), одержимо

$$\alpha_\varepsilon = \varepsilon \cdot C_0 \cdot 10^8 \frac{T_c^4 - T_\Pi^4}{T_c - T_\Pi} = \varepsilon \cdot C_0 \left[ \frac{1}{10^8} (T_c^3 + T_c T_\Pi + T_c T_\Pi^2 + T_\Pi^3) \right] = \varepsilon \cdot C_0 \theta, \quad (5.57)$$

де  $\theta = \left[ \frac{1}{10^8} (T_c^3 + T_c T_\Pi + T_c T_\Pi^2 + T_\Pi^3) \right]$  - температурний коефіцієнт системи, значення його залежить лише від температур  $T_c$  і  $T_\Pi$ ;  $\varepsilon$  - зведений ступінь чорноти системи;  $C_0$  -

коефіцієнт випромінювання абсолютно чорного тіла.

Якщо стінку омиває краплинна рідина, наприклад вода, то  $\alpha_b = 0$ ,  $\alpha_o = \alpha_k$ , а якщо основним теплообміном є теплообмін випромінюванням, то сумарний тепловий потік буде дорівнювати

$$q_0 = (\varepsilon_k + \varepsilon) C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right], \quad (5.58)$$

$$\text{де } \varepsilon_k = \frac{\alpha_k (T_p - T_c)}{C_0 \left[ \left( \frac{T_c}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_{II}}{100} \right)^4 \right]} = \frac{\alpha_k}{C_0 \theta}. \quad (5.59)$$

## РОЗДІЛ 6

### ОСНОВНІ ВИЗНАЧЕННЯ І РІВНЯННЯ МАСООБМІНУ

Велика кількість технологічних процесів у металургійній, хіміко-термічній, хімічній, нафтохімічній, паперовій, харчовій та інших галузях промисловості супроводжуються перенесенням маси речовини, тобто масообміном, наприклад, хіміко-термічні процеси обробки металів і сплавів, сушіння, упарювання, сорбція, кондиціонування повітря, конденсація водяної пари з парогазової суміші, випаровування рідини тощо.

У природі процеси теплообміну часто супроводжуються такими явищами, коли відбувається перенесення маси однієї речовини стосовно маси іншої, які можуть бути як у гомогенному, так і гетерогенному стані. Такі процеси називали *масообміном*. Кількісна характеристика процесу масообміну — *дифузія*.

Дифузія - це довільний процес проникнення однієї речовини в іншу і встановлення в них рівноважного розподілу концентрацій.

Процес дифузії, зумовлений молекулярним рухом речовин під впливом різниці концентрацій, має назву *концентраційної дифузії*. Якщо цей процес зумовлено різницею температур, використовують термін *термодифузія* (ефект Соре), а якщо різницею тисків - *бародифузія*.

Кількість речовини, що переноситься під час масообміну, прямо пропорційна поверхні поділу фаз та рушійній силі процесу у вигляді різниці концентрацій речовини, яка розподіляється між фазами.

Масу речовини, що проходить за одиницю часу через одиницю поверхні у напрямку нормалі до неї  $dn$ , називають густиною потоку маси  $J$ , моль/(м<sup>2</sup>·с). Для одного із компонентів двокомпонентної суміші газів густину потоку маси визначають за законом Фіка. Аналогічно закону Фур'є, який визначає величину потоку теплоти, потік маси одного з компонентів під час дифузії за законом Фіка визначають з рівняння

$$J = -D_c \frac{dC}{dn} = -D_c \text{grad}C, \quad (6.1)$$

де  $D_c$  - коефіцієнт дифузії, м<sup>2</sup>/с;  $dC/dn$  - градієнт концентрацій;  $C$  - місцева концентрація компонента, яку визначають відношенням його маси до об'єму суміші, кг/м<sup>3</sup>.

З рівняння (6.1) випливає, що густина дифузного потоку речовини прямо пропорційна градієнту концентрацій.

Знак „мінус" у рівнянні вказує на те, що перенесення речовини відбувається в бік меншої концентрації.

Коефіцієнт дифузії газів і парів залежить від їх природи, тиску, температури; його визначають з рівняння

$$D_c = D_0 \frac{p_0}{p} \left( \frac{273+t}{273} \right)^{1+n}, \quad (6.2)$$

де  $D_0$  - коефіцієнт дифузії за нормальних умов;  $p_0$  - тиск за нормальних умов;  $n$  - показник степеня, який залежить від складу газової суміші.

Так, наприклад, рівняння (6.2) для суміші повітря і водяної пари має вигляд

$$D_c = \frac{2.28}{p} \left( \frac{T}{273} \right)^{1.8}, \quad (6.3)$$

де  $p$  – тиск суміші;  $T$  – температура суміші.

Концентрацію компонента  $C$  суміші визначають, виходячи з рівняння стану  $pV_c = mRT$ , де  $p$  - парціальний тиск повітря;  $V_c$  – об'єм суміші;  $R$  - питома газова стала;  $m$  - маса компонента:

$$C = \frac{m}{V_c} = \frac{p}{RT}. \quad (6.4)$$

Після підстановки рівняння (6.4) у рівняння (6.1) одержимо

$$J = -\frac{D_c}{RT} \frac{\partial p}{\partial n} = -D_m \frac{\partial p}{\partial n}, \quad (6.5)$$

де  $D_m$ , - коефіцієнт молекулярної дифузії, віднесений до градієнта парціального тиску компонента.

У рухомому середовищі речовина переноситься як дифузиею, так і конвекцією.

За стаціонарного процесу  $\left( \frac{\partial C}{\partial \tau} \right) = 0$  і сталого коефі-

цієнта дифузії, аналогічно диференціальному рівнянню перенесення енергії рухомого середовища, записують диференціальне рівняння Фіка, яке відображає матеріальний баланс дифузії в умовах вимушеного руху:

$$\omega_x \frac{\partial C}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial C}{\partial y} + \omega_z \frac{\partial C}{\partial z} = D_c \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right). \quad (6.6)$$

За турбулентного режиму течії двокомпонентної суміші, наприклад, рідина - газ, аналогічно виникненню гідродинамічного примежового шару, на поверхні поділу фаз виникає дифузний примежовий шар, у якому спостерігається різка зміна концентрації речовини, що переноситься.



На міжфазній поверхні речовина переноситься за рахунок молекулярної дифузії, і основний закон масовіддачі, аналогічно до закону тепловіддачі Ньютона - Ріхмана, записують у вигляді

$$J = \beta \Delta C = \beta (C_{\pi} - C_c), \quad (6.11)$$

де  $\beta$  - коефіцієнт масовіддачі, віднесений до різниці концентрацій речовини, що дифундує, м/с;  $C_{\pi}$  і  $C_c$  - концентрація компонента на поверхні поділу фаз і на відстані від неї відповідно, кг/м<sup>3</sup>.

З рівняння (5.7), аналогічно диференціальному рівнянню теплообміну, можна записати умови масоперенесення на межі потоку:

$$\beta \Delta C = D \left( \frac{\partial C}{\partial n} \right). \quad (6.12)$$

Рівняння спільного процесу масоперенесення речовини дифузією і конвекцією для двовимірного потоку має вигляд:

$$\omega_x \frac{\partial C}{\partial x} + \omega_y \frac{\partial C}{\partial y} = D_c \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right). \quad (6.13)$$

Точне аналітичне розв'язання диференціальних рівнянь тепломасообміну - складне завдання, але разом з умовами однозначності, які описують ті чи інші особливості будь-якого явища, дозволяє використовувати теорію подібності для одержання чисел або критеріїв подібності, за допомогою яких можна розрахувати процеси. Основних критеріїв масообміну декілька.

1 Дифузний критерій Пекле - критерій взаємодій конвективного і молекулярного процесів перенесення тепло-ти, який характеризує відношення конвективного перенесення маси до молекулярної дифузії:

$$Pe_D = \frac{\omega \cdot l}{D} = Re \cdot Pr, \quad (6.14)$$

де  $\omega$  - швидкість масоперенесення, м/с;  $l$  - визначальний

розмір, м.

2 Дифузний критерій Нуссельта (число Шервуда  $Sh$ ) - безрозмірний критерій масообміну, який випливає з рівняння (6.8):

$$Nu_D = \frac{\beta \cdot l^2}{D}. \quad (6.15)$$

3 Дифузний критерій Прандтля (число Шмідта  $Sc$ ) - критерій подібності швидкісних і концентраційних полів у потоці:

$$Pr_D = \frac{\nu}{D} = \frac{\mu}{\rho D}, \quad (6.16)$$

де  $\nu$  - коефіцієнт кінематичної в'язкості,  $\text{м}^2/\text{с}$ ;  $\mu$  - коефіцієнт динамічної в'язкості,  $\text{кгс}/\text{м}^2$ ;  $\rho$  - густина,  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

4 Критерій подібності Льюїса - Семенова - критерій подібності полів концентрацій і температур у потоці:

$$Le = \frac{D}{a} = \frac{Pr}{Pr_D}, \quad (6.17)$$

де  $a$  - коефіцієнт теплопровідності,  $\text{м}^2/\text{с}$ .

5 Дифузний критерій Фур'є, який характеризує гомохронність полів перенесення теплоти і маси речовини:

$$Fo_D = \frac{D\tau}{l^2}. \quad (6.18)$$

6 Критерій Гухмана, що характеризує вплив масоперенесення на теплообмін:

$$Gu = \frac{T_c - T_M}{T_c}, \quad (6.19)$$

де  $T_c$  і  $T_M$  - абсолютні температури парогазової суміші за сухим та мокрим термометром.

7 Дифузний критерій Стантона ( $St_D = f(Re, Pr)$ ) – критерій вимушеного конвективного перенесення, що характеризує взаємодію інтегральної тепловіддачі з конвективним перенесенням теплоти у течії середовища:

$$St_D = \frac{Nu_D}{Re \cdot Pr_D}. \quad (6.20)$$

Вивчаючи процес масообміну, для визначення коефіцієнта масовіддачі, аналогічно визначенню коефіцієнта тепловіддачі, складають критеріальну залежність

$$Nu_D = f(Re, Pr_D, Fo_D, Gu, ArK), \quad (6.21)$$

де  $Ar = \frac{gl^3 \Delta p}{\nu^3}$  - критерій подібності вільної конвекції Архімеда, який характеризує взаємодію архімедової сили, що виникає внаслідок різниці густини ( $\Delta p$ ) та сил в'язкого тертя середовища.

Що ж стосується окремих задач масообміну, то з критеріальної залежності (6.21) можна виключити ті чи інші критерії подібності. Наприклад, для стаціонарних процесів не буде критерію Фур'є тощо.

## РОЗДІЛ 7

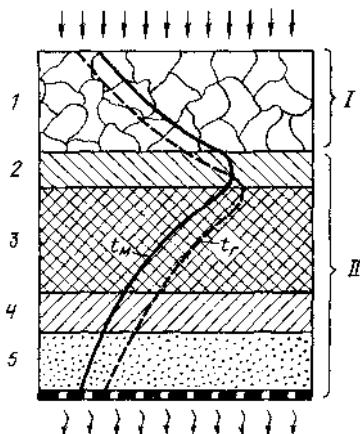
### ДЕЯКІ ХАРАКТЕРНІ МАСООБМІННІ ПРОЦЕСИ У МЕТАЛУРГІЇ

#### 7.1 Тепло- і масообмінні процеси під час агломерації і випаленні котунів

Теплові процеси в шарі (рис. 7.1), що агломерується, зосереджені у верхньому ступені теплообміну, в якому тепло передається від агломерата до повітря, а також у нижній, в якій тепло від продуктів горіння передається до шихти. Обидва ступені теплообміну зв'язані активною зоною - горіння твердого палива. Температура газу, що входить до зони горіння, визначається теплообміном у верхньому ступені. Температура газу, що виходить із зони горіння, залежить не тільки від теплообміну у верхньому ступені, але і від теплоти згоряння палива.

Масообмінні процеси під час агломерації, головним чином у зоні горіння, можуть бути схематично зображені реакціями окислення вуглецю до  $\text{CO}$  і  $\text{CO}_2$ , окислення  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  до  $\text{Fe}_2\text{O}_3$ , розкладання вапняку з утворенням  $\text{CaO}$  і  $\text{CO}_2$ . На виході газу із зони горіння вірогідні реакції відновлення гематиту і магнетиту оксидом вуглецю відповідно

Рисунок 7.1 - Структура агломерацийного шару: 1 - спікання агломерату, 2 - зона горіння, 3 - зона підігріву, 4 - зона сушіння, 5 - волога шахта,  $t_m$  і  $t_g$  - температури матеріалу і газу;  $I$  і  $II$  - верхній і нижній ступені теплообміну



до  $\text{Fe}_3\text{O}_4$  і  $\text{FeO}$ . Процеси масообміну характеризуються складом газової фази, їх доцільно описувати рівнянням витрачання  $\text{O}_2$  за висотою зони горіння

$$d(\text{O}_2)/dz = S(\beta_1 + \beta_2)\text{O}_2 - \beta_3(1-S)\text{O}_2, \quad (7.1)$$

а також рівняннями, що характеризують утворення  $\text{CO}_2$  і  $\text{CO}$ :

$$\begin{aligned} d(\text{CO}_2)/dz &= s[\beta_2(\text{O}_2) - \omega_1\text{CO}_2 - \omega_2\text{CO}] + (v_1 + v_2)\text{CO}(1-s)(1-p) + \\ &+ (1-s)\beta_4; \\ d(\text{CO})/dz &= s[\beta_1\text{O}_2 + 2\omega_1\text{CO}_2 - \omega_2\text{CO}] - (v_1 + v_2)\text{CO}(1-s)(1-p). \end{aligned} \quad (7.2)$$

Тут  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  - швидкості витрачання кисню за реакцією горіння  $\text{C}$  і окислення  $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ;  $\omega_1$  і  $\omega_2$  - швидкості утворення  $\text{CO}_2$  і  $\text{CO}$  при горінні вуглецю палива;  $v_1$  і  $v_2$  - швидкості переходу  $\text{CO}$  і  $\text{CO}_2$  при відновленні оксидів заліза;  $\beta_4$  - швидкість накопичення  $\text{CO}_2$  при розкладанні вапняку;  $s$  - відносна поверхня шматочків твердого палива, а  $p$  - частка поверхні шматочків вапняку від загальної поверхні негорючої частини шихти.

Розв'язують систему одним з чисельних способів, задаючи склад газу-окислювача на вхід у зону. Для повітря (21 %  $\text{O}_2$ , початковий вміст  $\text{CO}$  і  $\text{CO}_2$  дорівнює нулю) результати розрахунку подані в таблиці. 7.1. Там само наведені й експериментальні дані. Порівняння їх свідчить про достатню точність для інженерних розрахунків спрощеного аналізу масообмінних процесів.

Газ, що формується в зоні горіння, впливає на якість агломерату через вміст  $\text{O}_2$  і  $\text{CO}$ . При малій концентрації  $\text{O}_2$  створюються умови для деякого відновлення оксидів заліза і навпаки. Останнє можливе при низькій витраті палива.

В основі випалення і зміцнення котунів лежать явища спікання тонкодисперсних матеріалів. Міцність при випаленні формується за рахунок утворення і зростання контактів між частинками і зменшення пористості. Найбільш поширене випалення котунів у газовому середовищі

Таблиця 7.1 – Порівняння результатів розрахунку (чисельник) вмісту  $(O_2)_x$ , CO і  $CO_2\%$  (об'ємн.) з дослідними даними (знаменник) для умов агломерації неофлюсованого магнетитового концентрату величиною 1-3 мм

z, мм	$(O_2)_x$	CO	$CO_2$
Витрата вуглецю 2%			
5	20,49/19,10	0,14/0,60	0,31/1,8
10	17,58/17,00	1,12/0,85	2,30/3,10
15	13,48/8,00	3,04/2,00	5,48/5,40
20	8,20/8,00	4,41/4,20	8,23/8,80
25	5,61/6,00	5,55/5,30	10,25/9,10
30	4,86/5,20	6,03/5,65	11,77/12,50
Витрата вуглецю 5%			
5	20,55/19,50	0,16/0,40	0,35/1,60
10	17,38/17,55	0,62/0,70	2,80/2,60
15	12,47/14,00	2,40/2,41	5,17/5,79
20	6,35/7,30	5,42/5,65	11,28/12,10
25	3,30/2,19	7,62/7,40	15,70/17,00
30	1,38/0,95	8,55/9,05	17,80/18,90
Примітка. Витрата $0,5 \text{ м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ ; величина коксового дрібняка 0,56-1,0 мм; за даними дослідів $z_0 \approx 30 \text{ мм}$			

вищі. Формування характеристик котунів як залізорудної сировини починається в зоні сушіння. Видалення вологи в цій зоні залежить перш за все від типу зв'язку води з концентратом і глиною (адсорбційною, капілярною), типу

взаємодії поверхні твердих частинок з водою (гідрофільне, гідрофобне), капілярного тиску, який визначається формою поверхні частинки (плоска, увігнута, опукла) і станом води в порах. Для збереження порізності і форми котуна його сушіння доцільно здійснювати в три стадії, перша з яких - дифузія води до поверхні котуна з його центру, друга - випаровування води і третя - дифузія пари води в рухомий біля котуна газ. Дотримання цього механізму визначається градієнтами температур і вологості, які встановлюються під час нагрівання сирих котунів. Дуже високі градієнти можуть призвести до того, що паротворення проходитиме усередині котуна з можливим його руйнуванням. Дуже малі градієнти призведуть до зниження продуктивності обпалювальної машини.

З іншого боку, аналіз експериментальних даних свідчить, що зміна вологості котунів у ході сушіння підлягає класичним закономірностям; спочатку вологість міняється зі сталою швидкістю, а потім, починаючи з деякого критичного значення  $W_{кр} = 1,0-1,5\%$ , швидкість сушіння постійно падає. Якість сушіння котунів у шарі зручно характеризувати ступенем видалення вологи  $\varphi_{H_2O} = (W_{нач} - W)/W_{нач}$ . У припущенні, тепло, що підводиться до котунів, витрачається в зоні сушіння на видалення вологи, отримана розрахункова формула

$$\bar{\varphi}_{H_2O} = \frac{l_c}{H} + \frac{c_{\Gamma} w_{OG}}{H \alpha_v} \left\{ 1 - \exp \left[ - \frac{\alpha_v (H - l_c)}{c_{\Gamma} w_{OG}} \right] \right\}, \quad (7.3)$$

$$\text{де} \quad l_c = w_{исп} (\tau - \tau_c) \quad (7.4)$$

- товщина шару висушеного матеріалу;

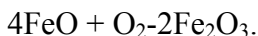
$$w_{сип} = \frac{c_{\Gamma} w_{OG} (t_{\Gamma} - t_{\Pi})}{\rho_H (1 - w_{поч}) [w_{поч} q_n + (c_{OK} + 4,187 w_{поч}) (t_{\Pi} - t_H)]} \quad (7.5)$$

- швидкість переміщення зони випаровування по висоті шару;  $\tau_c$  - час завершення сушіння котунів у верхньому горизонті шару;

$t_{\Gamma}$ ,  $t_{\Pi}$ ,  $t_H$  - температури газу-теплоносія на вході в зону випаровування, поверхні випаровування і початкова матеріалу;  $c_{ок}$ ,  $\rho_n$  - теплоємність і початкова щільність котунів.

На основі наведених формул можна знайти параметри, які визначають оптимальні умови сушіння.

Висушений котун надходить у зону випалення. Оскільки найбільш поширеними котунами є магнетитові, то найбільш характерними процесами, що супроводжують теплові, будуть окислення магнетиту в гематит, хімічна взаємодія твердих фаз металоносної і порожньої породи котунів, рекристалізація магнетиту і гематиту, утворення рідкої фази, кількість якої залежить при даному складі сировини від температури випалення. При високих температурах газу-теплоносія можлива також дисоціація гематиту. Більшість з названих явищ носить масообмінний характер. Необхідно відмітити, що тут названі основні явища. Вони проходять на фоні інших процесів: таких, як розкладання гідратів, десульфуратії. Не всі ці явища достатньо глибоко вивчені аналітично й експериментально, що не дозволяє подати їх єдиною моделлю. Тому розглянемо процес окислення магнетиту для одиночного котуна. Умовно, оскільки хімічним аналізом визначається FeO, запишемо цю реакцію у вигляді



Із цього співвідношення виходить, що на 1 кг FeO витрачається 1/9 кг O<sub>2</sub>.

При окисненні котуна утворюється реакційна поверхня, яка, як і котуни, має сферичну форму. Ця поверхня в процесі масообміну постійно переміщується від поверхні котуна до його центра. Швидкість її переміщення  $w_{PI}$  може бути знайдена, якщо розглянути баланс кисню за малий проміжок часу  $dt$  при зміні координати реакційної поверхні на  $dr_p$ :

$$-\rho_{M\text{FeO}} N_p^{dr} / 9 = 1,429 k c(r_p) dt, \quad (7.6)$$



де  $g_{\text{FeO},H}$  - початковий вміст FeO у котунах;  $c(r_p)$  - надмірна об'ємна концентрація кисню на реакційній поверхні; 1,429 - щільність кисню за нормальних умов,  $k$  - константа швидкості реакції.

З цього виразу виходить:

$$W_{\text{рп}} = dr_p/d\tau = 9 \cdot 1,429 k c(r_p) / \rho_{\text{MgFeO},H}. \quad (7.7)$$

Далі необхідно мати на увазі, що у сферичному шарі окисленого (зовнішнього) матеріалу кисень не витрачається. Тоді для ізотермічних умов  $c(r_p)$  може бути знайдене розв'язанням диференціального рівняння дифузії

$$\partial^2 c / \partial r^2 + (2/r) \partial c / \partial r = 0 \quad (7.8)$$

за граничних умов: на поверхні котуна  $r = R$ ;  $D \partial c / \partial r = \beta [c_0 - c(R)]$ ; на реакційній поверхні  $r = r_p$ ;  $D \partial c / \partial r = k c / (r_p)$ , де  $c_0$  і  $c(R)$  - надмірні концентрації  $\text{O}_2$  у газі-теплоносії і на поверхні котуна. Розв'язання (7.8) за даних умов

$$(c(r_p)/c_0) = (D/k r_p^2) [r_p^{-1} - R^{-1} + D/(k r_p^2) + D/(\beta R^2)]. \quad (7.9)$$

Після підстановки цього розв'язання у вираз для  $w_{\text{рп}}$  і перетворення отримаємо

$$(1 - r_p^2/R^2)/2 - [1 - D/(\beta R)](1 - r_p^3/R^3)/3 + (1 - r_p IR)D/(kR) = 12,861 D c_0 \tau / (\rho_{\text{MgFeO},H} R^2). \quad (7.10)$$

Тепер, якщо нехтувати деякими факторами, наприклад відсутністю кристалічних перетворень у зернах магнетиту, а також мати на увазі, що для умов випалення  $D/(\beta R) < 1,0$  і  $(D/kR) \leq 1,0$ , то можна дійти висновку: окислення котунів лімітується в основному дифузією  $\text{O}_2$  в шар гематиту. При оцінці технологічних процесів зручніше використовувати не положення реакційної поверхні  $r_p$ , а ступінь окислення котунів

$$\varphi_{\text{O}_2} = 1 - (r_p/R)^3 = 1 - g_{\text{FeO}} g_{\text{Fe},H} / (g_{\text{FeO}} + H g_{\text{Fe}}), \quad (7.11)$$

де  $g_i$  - поточний і початковий вміст Fe і FeO. Можна спростити (7.10):

$$[1 - (1 - \varphi_{\text{O}_2})^2/3]/2 - \varphi_{\text{O}_2} = 12,861 D c_0 \tau / (\rho_{\text{MgFeO},H} R^2). \quad (7.12)$$

Отримане рівняння описує кінетику окислення залізо-

рудних котунів. Маючи у своєму розпорядженні відомості про коефіцієнти дифузії, концентрації оксидів заліза і кисню, можна розрахувати ступінь окислення. Якщо ж  $\varphi_{O_2}$  відома з дослідних даних, то (7.12) можна використовувати для визначення ефективного коефіцієнта дифузії  $D$ . Дане завдання може бути вирішене і в неізотермічній постановці, але при цьому мають бути враховані залежності всіх коефіцієнтів і параметрів від температури. Природно, що в цьому випадку аналітичний вираз типу (7.12) отримати не вдасться внаслідок нелінійності завдання. Процес окислення котунів у неізотермічних умовах можна розрахувати чисельними методами на ЕОМ.

## 7.2 Масообмін під час виплавки чавуну

Переробка залізорудної сировини в доменних печах - перший технологічний процес, пов'язаний з отриманням залізовуглецевого розплаву - чавуну. Цей процес більш за інших насичений тепломасообмінними явищами, такими як нагрівання і плавлення залізорудних матеріалів, перегрів розплаву і шлаку, розкладання карбонатів, відновлення оксидів заліза та інших елементів, окислення вуглецю, палива, що надходить з дуттям, та ін. Вказані процеси взаємозв'язані, багато з них проходять одночасно, що ускладнює їх вивчення. Незважаючи на це, на сьогодні вдалося встановити фундаментальні залежності, які і будуть наведені нижче.

При математичному описі теплообміну і відновлення між цими явищами можна знайти певну аналогію, пов'язану з характером погашення потенціалів процесів за високою шару. Для теплообміну таким потенціалом є різниця температур потоків теплоносіїв, а для відновлення – різниця, що діє, і рівноважного парціального тиску відновника (в ізотермічних умовах) або його концентрацій (при пос-

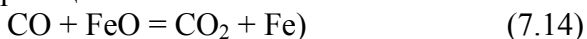
тійному тиску). Проте це далеко не повна аналогія.

Перш за все потенціал теплоперенесення пов'язаний зі станом обох потоків, тоді як потенціал відновного процесу не залежить від стану (ступеня відновлення) залізородного матеріалу. Крім того, якщо коефіцієнт тепловіддачі в рівнянні теплообміну порівняно мало змінюється за висотою шару, то коефіцієнт масообміну при відновленні значно залежить від ступеня відновлення матеріалу і, отже, буде змінним по ходу процесу. Ця відмінність пояснюється визначальним впливом дифузійних і хімічних опорів при відновленні кускового залізородного матеріалу, тоді як теплообмін у шарі, як правило, лімітує зовнішній опір. Зазначені особливості відновного процесу, як, втім, й інших фізико-хімічних процесів, багато в чому визначають відмінність результатів теоретичного аналізу явищ тепло- і масообміну в шарі за подібності їх математичних моделей.

Розглянемо процес масообміну в протитечії стосовно відновних процесів, ураховуючи положення Б.І.Китаєва. Відповідно до них процес відновлення заліза з оксидів газоподібним відновником описується реакціями першого порядку. В цьому випадку для сталих температур і тиску як хімічний потенціал можна використовувати потенціал, виражений безпосередньо через концентрації відновника або продукту реакції в газовій фазі. Відомо два способи запису концентраційного потенціалу для гетерогенної реакції:

$$X_{(\text{газ})} + Y_{(\text{тверд})} = XY_{(\text{газ})} + Y'_{(\text{тверд})} \quad (7.13)$$

(наприклад, для реакції



$$\Delta C_I = C_X - \bar{C}_X \{CO - \bar{C}O\}. \quad (7.15)$$

Цей запис дуже наочний при графічній інтерпретації процесу погашення потенціалу за висотою шару і тому зручніший для якісного аналізу полів концентрації в доменних печах.

Інший запис потенціалу

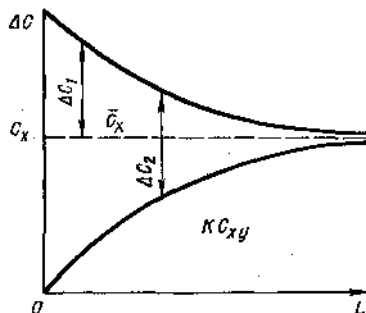
$$\Delta C_2 = C_X - \bar{K} C_{XY}, \quad (7.16)$$

де  $\bar{K}$  і  $C_X$  - константа рівноваги і рівноважна концентрація, зручніше використовувати для кількісних розрахунків у реальних умовах промислових агрегатів (за постійності суми концентрацій  $C_X + C_Y$ , змінній температурі і так далі). Співвідношення між цими записами дуже просте:

$$\Delta C_2 = (1 + \bar{K}) \Delta C_1. \quad (7.17)$$

Перехід у розрахунках від однієї системи до іншої ілюструється рис.7.2. Використовуються всі системи запису концентраційного потенціалу: перша головним чином для уявлення загальної картини процесу в шарі; друга в основному для розрахунку, тим більше, що саме в цій системі були отримані обширні дані щодо (коефіцієнтів масообміну відновного процесу).

Рисунок 7.2 – Кінетика погашення концентраційних потенціалів по шляху руху газів



Швидкість процесу відновлення в першій системі можна визначити, наприклад, за таким рівнянням:

$$v = k(C_X - \bar{C}_X), \quad (7.18)$$

де  $k$  - константа швидкості реакції, м/с;

$v$  - швидкість витрати відновника на одиницю реагуючої поверхні,  $\text{м}^3/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$ .

Строго кажучи, вираз (7.18) справедливий при підста-

новці як  $C_X$  концентрації, вимірюваної безпосередньо на поверхні реагування, тоді як в умовах експерименту з шаром кускових матеріалів, як правило, можна визначити тільки концентрацію в потоці газу (у міжкусковому просторі шаруючи). При записі потенціалу можна використувати концентрації в потоці газу. При цьому коефіцієнт пропорційності в кінетичному рівнянні повинен містити суму хімічного і дифузійних опорів (аналогічно сумарному коефіцієнту теплопередачі в теорії теплообміну) і його можна назвати тоді сумарним коефіцієнтом масообміну.

Загальне рівняння швидкості відновлення в шарі в диференціальному вигляді

$$dV_X = K_{\Sigma\Sigma} (C_X - \bar{C}_X) f_{\text{пит}} S_{\text{ш}} dy, \quad (7.19)$$

де  $S_{\text{ш}}$  - перетин шахти,  $\text{м}^2$ ;  $y$  - висота шару,  $\text{м}$ ;  $f_{\text{пит}}$  - питома поверхня шару,  $\text{м}^2/\text{м}^3$ ;  $V_X$  - кількість відновника, що прореагував,  $\text{м}^3/\text{с}$ ;  $K_{\Sigma\Sigma}$  - сумарний коефіцієнт масообміну в шарі,  $\text{м}/\text{с}$ .

У (7.19) сумарний коефіцієнт масообміну відмічений знаком  $\Sigma\Sigma$ , щоб відрізнити прийняту в даному випадку першу систему зображення потенціалу, а висоту шару відлічують від входу потоку газу.

Тим часом той самий приріст  $dV_X$  можна визначити за зміною концентрації відновника в потоці газу:

$$dV_X = -G_I dC_X. \quad (7.20)$$

З (7.19) і (7.20) отримаємо нове диференціальне рівняння для зміни концентрації за висотою шару:

$$G_I dC_X = K_{\Sigma\Sigma} (C_X - \bar{C}_X) f_{\text{уд}} S_{\text{ш}} dy. \quad (7.21)$$

Цікаво провести таку аналогію між масо- і теплообміном у протитечії. Очевидно, аналогом теплоємності може служити кількість відновника, стехіометрично необхідна для повного відновлення всього заліза руди. Позначимо цю величину, що є за своїм фізичним сенсом так званою масоємністю потоку матеріалів, через  $W_M^*$ . Тим часом загальна кількість відновника, яка може бути витрачена на

процес,

$$W_{\Gamma}^* = G_{\Gamma}(C'_X - \bar{C}_X). \quad (7.22)$$

Величина  $W_{\Gamma}^*$  - "хімічна можливість", або масоємність, потоку газу.

Позначивши  $\phi_{Fe}$  відносний ступінь відновлення заліза (частку віднятого кисню оксиду заліза) і  $C$  - відносний потенціал масообміну

$$C = \{C_X - \bar{C}_X\} / (C'_X - \bar{C}_X), \quad (7.23)$$

можна дуже просто записати рівняння матеріального балансу для зустрічних потоків газу і матеріалу:

$$W_M^* d\phi_{Fe} = W_{\Gamma}^* dC. \quad (7.24)$$

Як видно, відношення (7.24) досконале аналогічно формулі балансу тепла в протитечії, вираженого через теплоємності потоків газу і матеріалу (їх водяні числа). Отже,  $W_M^*$  - масообмінний аналог теплоємності потоку матеріалів, а  $W_{\Gamma}^*$  відповідає теплоємності потоку газу.

Якщо врахувати, що відношення  $G_{\Gamma}/S_{Ш}$  дорівнює швидкості потоку газу  $w_{\Gamma}$  на повний переріз апарата (за нормальних умов) і використовувати об'ємний коефіцієнт масообміну  $K_{\Sigma V} = K_{\Sigma\Sigma} f_{VD}$ , то рівняння масообміну (7.21) можна записати у вигляді градієнта відносного потенціалу за висотою шару:

$$dC/dy = (-K_{\Sigma V}/w_{\Gamma})C. \quad (7.25)$$

Таким чином, рівняння (7.24) і (7.25) описують масообмін у шарі в найзагальнішому вигляді.

Загальна картина масообміну в протитечії газу і матеріалу може бути отримана розв'язанням системи рівнянь (7.24) і (7.25) при постійному (середньому) значенні сумарного коефіцієнта масообміну:  $K_{\Sigma V} = \text{const}$ . У багатьох практичних випадках цього достатньо для наближених розрахунків. Проте щодо цього допущення потрібно зробити одне невелике зауваження.

Поверхня реагування в хімічній протитечії незмінно убуває і може дійти до нуля, тоді як поверхня нагрівання

або залишається постійною, або збільшується в результаті подрібнення кускових матеріалів. Якщо при розрахунку користуються об'ємним коефіцієнтом масообміну  $K_{\Sigma V}$ , то саме він відображає зменшення поверхні реагування так само, як і збільшення внутрішнього дифузійного опору за рахунок заглиблення фронту всередину куска (при цьому  $K_{\Sigma V}$  по ходу процесу зменшується). Отже, для розрахунків за рівнянням (7.25) при  $K_{\Sigma V} = \text{const}$  необхідно знати закон усереднювання  $K_{\Sigma V}$  за висотою шару.

Вважаючи, що коефіцієнт масообміну є функцією тільки висоти шару, розв'язання рівняння (7.25) можна отримати в такому вигляді:

$$\ln C'' = \frac{1}{w_F} \int_0^{H_0} K_{\Sigma V} dy. \quad (7.26)$$

Права частина співвідношення (7.26) - середньоінтегральне значення коефіцієнта масообміну за висотою шару  $H_0$ , знаючи яке можемо вести розрахунок  $C''$  за (7.25) при  $K_{\Sigma V} = \text{const}$ , хоча розрахункове розмежування концентрації за висотою шару в цьому випадку і не відповідатиме точно дійсному. Практичне визначення середнього значення має великі труднощі, тому для розгляду найзагальніших закономірностей масообмінної протитечії можна обмежитися зробленим допущенням.

За аналогією з теплообміном у шарі можна виділити два основні типи масообмінної протитечії залежно від співвідношення масоємностей потоків  $W_F^*/W_M^*$ .

Тип протитечії  $W_F^* < W_M^*$ . В цьому випадку (рис. 7.3 а) може бути повністю використана відновна здатність потоку газу (при ідеальній завершеності процесу), але навіть за цієї умови залізо не буде відновлене до кінця.

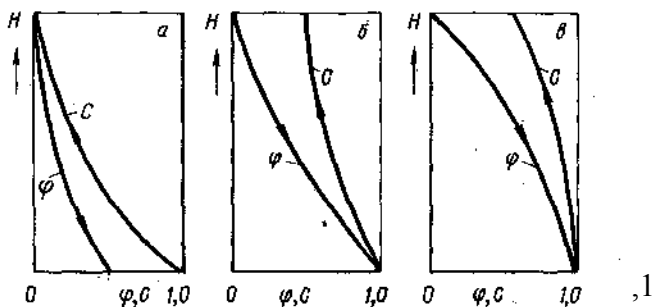


Рисунок 7.3 – Три типи масообмінних протитечій:  
*a* -  $W_{\Gamma}^* < W_M^*$ ,  $K_{\Sigma V} = \text{const}$ ; *б* -  $W_{\Gamma}^* > W_M^*$ ,  $K_{\Sigma V} = \text{const}$ ;  
*в* -  $W_{\Gamma}^* > W_M^*$ ,  $K_{\Sigma V} = K(l - \varphi_{Fe})$

Проінтегрувавши рівняння (7.25), отримаємо вираз для залежності концентрації відновника від висоти шару:

$$C_X = \exp(-K_{\Sigma V} y / w_{\Gamma}). \quad (7.27)$$

Для продуктів реакції (наприклад,  $\text{CO}_2$ ) маємо дещо інше рівняння:

$$\text{CO}_2 / \bar{C} O = l \cdot \exp(-K_{\Sigma V} y / w_{\Gamma}). \quad (7.28)$$

Значення  $\varphi_{Fe}$  отримаємо, використовуючи рівняння (7.24), з якого виходить, що для завершеної протитечії

$$\bar{\varphi}_{Fe} = C(W_{\Gamma}^* / W_M^*). \quad (7.29)$$

На виході матеріалів з апарата досягається максимально можливий ступінь відновлення

$$\varphi_{Fe}'' = W_{\Gamma}^* / W_M^*, \quad (7.30)$$

оскільки  $C = 1$ , а для поточного значення ступеня відновлення

$$\varphi_{Fe} = (W_{\Gamma}^* / W_M^*) \exp(-K_{\Sigma V} y / w_{\Gamma}). \quad (7.31)$$

Тип протитечії  $W_{\Gamma}^* > W_M^*$ . За цієї умови потік матеріалів може бути оброблений повністю, тобто оксиди заліза будуть відновлені, а гази вийдуть з протитечії використаними лише частково, як це графічно показано на рис. 7.4 б.



Розрахунок масообміну в протитечії при  $W_{\Gamma}^* > W_M^*$  і  $K_{\Sigma V} = \text{const}$  відрізняється тим, що повне завершення процесу ( $\phi_{\text{Fe}} = 1$ ) можливе при кінцевому значенні висоти шару. Отже, рівняння (7.30) справедливе у випадку  $W_{\Gamma}^* > W_M^*$  при  $\phi_{\text{Fe}} \leq 1$ .

На решті висоти шару повинна виконуватися умова

$$dC/dy = d\phi_{\text{Fe}}/dy = 0. \quad (7.32)$$

Розв'язуючи спільно (7.24) і (7.25), для завершеної протитечії отримаємо

$$\phi_{\text{Fe}} = (W_{\Gamma}^* > W_M^* - 1) [\exp(K_{\Sigma V} y / w_{\Gamma}) - 1], \quad (7.33)$$

де висота шару відлічена назустріч потоку газу.

Отже, висота шару, необхідна для повного відновлення оксидів заліза,

$$y_{1,0} = -(K_{\Sigma V} / w_{\Gamma}) \ln(1 - W_M^* / W_{\Gamma}^*) \quad (7.34)$$

Для завершеної протитечії у випадку  $W_{\Gamma}^* > W_M^*$  баланс кисню можна записати так:

$$W_M^* (1 - \phi_{\text{Fe}}) = W_{\Gamma}^* (1 - C) \quad (7.35)$$

Максимально можливому використанню газу за цих умов відповідає мінімальне значення відносного потенціалу на виході газу з шару:

$$C'' = 1 - W_M^* / W_{\Gamma}^*, \quad (7.36)$$

яке виходить із співвідношення (7.35) при  $\phi_{\text{Fe}} = 0$ .

Необхідно підкреслити, що в реальній обстановці для  $W_{\Gamma}^* > W_M^*$  криві можуть бути опуклими щодо осі абсцис (див. рис. 7.4 в) унаслідок зменшення коефіцієнта масообміну (аж до нуля) із зростанням ступеня відновлення.

Якщо взяти до уваги реальні ступені відновлення в шахті доменної печі від 0-0,5, то співвідношення масоємностей  $W_{\Gamma}^* / W_M^*$  якісно можна виявити за опуклістю кривих  $\text{CO}_2(y)$ .

При рівності так званої масоємності потоків газу і матеріалу, тобто якщо  $W_{\Gamma}^* = W_M^*$ , повному використанню відновлювальної здатності газу ( $C'' = 0$ ) відповідає відновлення заліза на 100 % ( $\phi_{\text{Fe}} = 1$ ), що теоретично можливо

також при нескінченно великій висоті шару. Форма кривих може бути дуже різною - від прямої до складної.

Відзначимо також, що характер кривих для  $W_G^* < W_M^*$  (див. рис. 7.4 а) повністю відповідає реальним умовам шхати доменної печі, де початкова концентрація  $C'_X$  визначається ступенем розвитку прямого відновлення в ділянці печі, що знаходиться нижче. Таким чином, навіть найпростіше математичне формулювання явищ масообміну в протитечії дозволяє відтворити загальну картину процесу ізотермічної області в доменних печах.

Стосовно умов доменних печей необхідно розглянути складніший комплекс явищ, зокрема наявність реакції діоксиду вуглецю з вуглецем коксу, зміна рівноважного складу газу за висотою печі внаслідок зміни температури та інші питання, що вимагають спеціальних знань.

### 7.3 Масообмін під час відновлення шматка руди

Розглянемо відновлення шматка руди кулястої форми, коли температура на фронті реакції і по перетину шматка не міняється. Для таких ізотермічних умов на поверхні шматка з радіусом  $r^*$  підтримується постійним парціальний тиск газу-відновника  $p_0$ , а реакція між газом і твердою фазою є реакцією першого порядку стосовно парціального тиску відновних і окислювальних компонентів газу і проходить без зміни об'єму. Зазначені особливості задовольняють практично всі реакції непрямого (побічного) відновлення заліза, якщо вони здійснюються в дифузійному режимі. Для уточнення завдання потрібно також вказати, що обмивання газом шматка відбувається рівномірно по всій поверхні, що забезпечує таку саму рівномірність процесів відновлення. Останнє також визначається ізотропністю всіх властивостей твердої фази в об'ємі шматка. Постійними беруть і константи, що характеризують перебіг хімічної

реакції, - константу швидкості реакції  $k$ , коефіцієнт дифузії газу в порах  $D_n$ . Відмічене дозволяє записати граничні умови завдання (рис. 7.4)

$$\begin{aligned} \Delta p &= \Delta p_0 = p_0 - p^* \text{ для } r = r^*, \\ \partial \Delta p / \partial x &= 0 \text{ для } r = 0, \end{aligned} \quad (7.37)$$

де  $p^*$  - рівноважна концентрація газу-відновника. Граничні умови для центра шматка відповідають симетричності завдання.

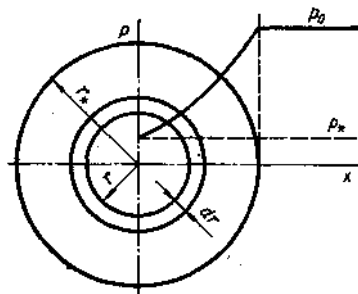


Рисунок 7.4 – До формулювання завдання щодо відновлення шматка руди

Приступаючи до математичного опису завдання, пов'язаного насамперед зі складанням диференціального рівняння процесу, вважатимемо, що на якійсь стадії процесу (див. рис. 7.5) реакція проходить в об'ємі сфери, поверхня якої  $4\pi r^2$ , а товщина оболонки  $dr$ . Для такої оболонки зміна швидкості відновлення по газу

$$dv = 4\pi r^2 dr k_V [p(r) - p^*], \quad (7.38)$$

де  $k_V = kV/F$  - константа швидкості реакції, віднесена до одиниці об'єму;  $V$  - об'єм шматка руди, а  $F$  - величина реакційної поверхні.

Газ-відновник потрапляє до реакційної оболонки через пори реагуючого шматка за рахунок дифузії. Це приводить до того, що дифузійний потік відновника  $J_B$  (потік маси) міняється за товщиною шматка, тобто:

$$dJ_B/dr = -dv. \quad (7.39)$$

Далі потрібно мати на увазі, що газ-відновник шляхом дифузії проникає через оболонку всередину шматка. Вираз

для дифузійного потоку для даних умов запишеться так:

$$J_B = -4\pi r^2 D_{\Pi} \frac{1}{RT} \frac{d}{dr} [p(r) - p_*] \quad (7.40)$$

де  $R$  - газова стала, а  $T$  - температура.

Диференціюючи цей вираз і прирівнюючи отриманий результат до значення  $dv$  з (7.38), після перетворення можна, отримати

$$RT(k_V/D_{\Pi})\Delta p = d^2\Delta p/dr^2 + (2/r)d\Delta p/dr. \quad (7.41)$$

Розв'язання цього рівняння для прийнятих граничних умов має вигляд

$$\Delta p/\Delta p_0 = (R/r)Sh(r\sqrt{k_V RT/D_{\Pi}})/Sh(R\sqrt{k_V RT/D_{\Pi}}) \quad (7.42)$$

Отриманий розв'язок встановлює розподіл парціального тиску за товщиною шматка, а також залежно від характеристик процесу відновлення і властивостей газу.

Під час аналізу процесів відновлення інтерес становлять інтегральні показники, зокрема швидкість відновлення для всього шматка. Цю величину можна отримати, якщо визначити інтеграл

$$v = \int_0^R dv = \int_0^R 4\pi r^2 dr k_V \Delta p. \quad (7.43)$$

Після інтеграції з урахуванням попереднього виразу і перетворення отримаємо

$$v = 4\pi R^2 \sqrt{k_V RT/D_{\Pi}} [D_{\Pi}\Delta p/(RT)] [\text{cth}(R\sqrt{k_V RT/D_{\Pi}}) - (R\sqrt{k_V RT/D_{\Pi}})^{-1}]. \quad (7.44)$$

Отриманий вираз відрізняється складністю і неочевидністю зв'язків. Щоб простежити вплив якого-небудь одного або групи параметрів на швидкість відновлення  $v$ , потрібно вдатися до чисельних розрахунків.

Для аналізу роботи печей і промислових установок частіше застосовується ступінь відновлення заліза  $\varphi_{Fe}$ , який пов'язаний з  $v$  співвідношенням

$$v = (4/3)\pi r^3 2R\varphi_{Fe}. \quad (7.45)$$

Використання цієї і попередньої формули дозволяє пов'язати ступінь відновлення зі всіма параметрами, що визначають процес відновлення шматка руди. При аналізі таких процесів слід мати на увазі, що додаткова конкретизація завдання завжди приводить до спрощення зв'язків, що цікавлять. Так, зокрема, коли шматки руди великі, параметр  $R\sqrt{k_V RT / D_{II}} \rightarrow \infty$ , і після відповідних перетворень

$$\varphi_{Fe} = \frac{3}{Rg_{O_2}} \sqrt{\frac{k_V D_{II}}{RT}} \Delta p,$$

а якщо шматки невеликі, то параметр  $R\sqrt{k_V RT / D_{II}} \rightarrow 0$ , і після перетворень отримаємо

$$\varphi_{Fe} = (k_V / g_{O_2}) \Delta p. \quad (7.47)$$

У першому випадку ступінь відновлення обернено пропорційний розміру шматка і залежить від квадратного кореня з добутку константи швидкості реакції, віднесеної до об'єму, і коефіцієнта дифузії через пори. У другому – ступінь відновлення не залежить від радіуса шматка. Формула для цього випадку широко використовується при експериментальній оцінці коефіцієнтів дифузії.

## 7.4 Масообмін під час розкладання вапняку

Одним із компонентів доменної шихти є вапняк, який розкладається активно при  $\geq 900^\circ\text{C}$  за реакцією



При вирішенні прикладних завдань виникає необхідність оцінки розвитку явищ розкладання вапняку, таких як рух фронту розкладання (межі  $\text{CaO} - \text{CaCO}_3$ ), часу розкладання та ін.

Як приклад розглянемо випалення шматка вапняку в ізотермічних умовах. Останнє означає, що підведення тепла до реакційної поверхні здійснюється достатньо швидко, не обмежуючи за теплом процес розкладання. Для конкре-

тності візьмемо шматок сферичної форми. Через деякий проміжок, часу від початку процесу в шматку сформується дві зони: зовнішня буде подана  $\text{CaO}$ , внутрішня -  $\text{CaCO}_3$ . Зони розділені реакційною поверхнею, також сферичною. Як тільки виникає зона  $\text{CaO}$ , то з'являється дифузія  $\text{CO}_2$  через цей зовнішній шар шматка. Вона існуватиме до тих пір, поки не зникне  $\text{CaCO}_3$ , при розкладанні якого й утворюється дифузійний потік  $\text{CO}_2$ . Виведення виразу для швидкості руху фронту реакції розкладання  $\text{CaCO}_3$  проведемо в припущенні сталого процесу, коли швидкості утворення  $\text{CO}_2$  при дисоціації вапняку -  $v_1$  і дифузії  $\text{CO}_2$  -  $v_2$  через зону  $\text{CO}_2$  однакові, отже,  $v_1 = v_2 = v$ .

Таким чином,

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= kS(1 - p/p_0) = k_1(4\pi^2/p_0)(p_0 - p) \\ v_2 &= -4\pi^2 D dp/dr, \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

де  $k = k_0 \exp[-E/(RT)]$  - константа швидкості прямої реакції;  $S = 4\pi r^2$  - поверхня фронту реакції;  $p_0$  - пружність дисоціації  $\text{CaCO}_3$  при заданій температурі;  $p$  - тиск  $\text{CO}_2$  на поверхні фронту реакції;  $D$  - коефіцієнт дифузії  $\text{CO}_2$  через зону  $\text{CaO}$ ;  $r$  - змінний радіус ядра  $\text{CaCO}_3$ .

Розділивши змінні в рівнянні для  $v_2$ , можна його проінтегрувати в межах від  $r$  до  $R$  - радіуса початкового шматка і від  $p$  до  $P$  - парціального тиску  $\text{CO}_2$  у газі, що омиває шматок. У результаті отримаємо

$$P - p = \frac{v_2}{4\pi D} (R^{-1} - r^{-1}) v_2 / (4\pi D). \quad (7.49)$$

Визначивши з цього виразу  $p$  і підставивши його в рівняння для  $v_1$ , після перетворень матимемо

$$v = 4\pi r^2 R k_1 (p_0 - P) / [p_0 D R + r k_1 (R - r)]. \quad (7.50)$$

Цей вираз визначає співвідношення характеристик процесу, при яких забезпечується сталий режим розкладання  $\text{CaCO}_3$ .

Швидкість просування фронту реакції  $dr/dt$  має бути

пов'язана з масою вапняку, що прореагував,  $G$  і часом  $\tau$ . Для цього врахуємо, що

$$v = (dG/d\tau) = p4\pi r^2 dr/d\tau, \quad (7.51)$$

звідки випливає

$$dr/d\tau = v/(4\pi r^2 p), \quad (7.52)$$

а з урахуванням (7.50)

$$dr/d\tau = Rk_l D(p_0 - P)/[p_0 DR\rho + rk_l \rho(R - r)]. \quad (7.53)$$

Після розділення змінних та інтеграції в межах  $R - r$  і  $0 - \tau$  можна отримати формулу для визначення положення фронту реакції від часу:

$$\tau = \rho[R^3 - r^3/(3DR) - R^2 - r^2/(2D) - (p_0/k_l)(R - r)](p_0 - P)^{-1}. \quad (7.54)$$

Час повної дисоціації шматка вапняку визначається зникненням ядра, що не розклалося ( $r \rightarrow 0$ ). Оцінюючи роль окремих чинників, необхідно зазначити, що зі зростанням розмірів початкових шматків зближення тиску  $P$  і  $p_0$  уповільнює процес розкладання, протилежно впливають коефіцієнт дифузії і температура. Їх збільшення прискорює процес, особливо температура, яка впливає на процес через  $k_l$ ,  $p_0$  і  $D$ . Відмітимо, що експеримент принципово підтверджує відмічене.

Більш повно картину масообміну при розкладанні  $\text{CaCO}_3$  можна отримати, якщо взяти до уваги разом з дифузією і теплообмін. Облік теплообміну природно ускладнює завдання, оскільки виникає неізотермічність температурного поля, яка позначається на відмінності швидкостей реакції, обумовлених відмінністю температур шматка. Нижче наведено розв'язання задачі, отримане П.В.Гельдом і В.К.Івановим.

Теплообмін врахуємо, приймаючи на поверхні сферичного шматка граничні умови I роду, тобто  $T = T_a = \text{const}$ . Математично завдання, окрім вже відомих рівнянь (7.48), повинне містити рівняння, що відображають розвиток теплообмінних явищ і, перш за все, диференціальне рівняння теплопровідності Фур'є:

$$cp \partial t / \partial \tau = \lambda (\partial^2 t / \partial x^2 + \partial^2 t / \partial y^2 + \partial^2 t / \partial z^2). \quad (7.55)$$

Для даного масообмінного завдання - розкладання вапняку можна нехтувати витратою тепла на нагрівання продуктів реакцій, зокрема СаО, похибка від цього допущення складе  $\approx 5\%$ . Це допущення приводить до спрощення (7.55):

$$\partial^2 t / \partial x^2 + \partial^2 t / \partial y^2 + \partial^2 t / \partial z^2 = 0. \quad (7.56)$$

Якщо шматок має сферичну форму, а граничні умови завдання: на поверхні шматка

$$z = R, t = t_{нов},$$

на фронті реакції

$$r = r^*, t = t_p + \Delta t = t^*,$$

у центрі  $r = 0$ ,  $\partial t / \partial r = 0$  (умова симетричності), то розв'язання (7.55) має вигляд:

$$t = t_{нов} - (t_{нов} - t^*)(R/r - 1)r^*/(R - r^*). \quad (7.57)$$

Отриманий розв'язок характеризує температурне поле шматка і має бути пов'язаний з тепловим потоком зовнішнього шару і тепловим ефектом розкладання вапняку. Тепловий потік у фронті реакції

$$g^* = -\lambda (\partial t / \partial r)_{r=r^*}. \quad (7.58)$$

Він цілком витрачається на процес дисоціації вапняку, тобто

$$g^* = Q \rho \partial r^* / \partial x, \quad (7.59)$$

де  $Q$  - тепловий ефект, віднесений до  $\text{CaCO}_3$ .

Сумісне розв'язання останніх трьох рівнянь дозволяє отримати

$$t_{нов} - t^* = -(Q \rho / \lambda) [r^*(R - r^*) / R] dr^* / dx. \quad (7.60)$$

Доречно зробити ще одне допущення: нехтувати перегрівом реакційної зони  $\Delta t$ . Якщо мати на увазі, що в доменних і вапновипалювальних печах  $\text{CaCO}_3$  розкладається при  $900 - 1000^\circ\text{C}$ , а перегрів не перевищує  $30 - 40^\circ\text{C}$ , то вказане допущення не може істотно вплинути на остаточні висновки, проте здатне значно спростити остаточні формули. З урахуванням відміченого за граничних умов

$$(r^*)_{\tau=0} = R \text{ и } (r^*)_{\tau>0} = r^*$$



рівняння (7.60) інтегрується і після перетворень зводиться до вигляду

$$\tau = \{Q\rho/[\lambda(t_{n0B}-t_p)]\} [R^2/6 + r^{*3}/(3r) - r^{*2}/2]. \quad (7.61)$$

Цей вираз встановлює зв'язок кількості вапняку, що розклався, і часу з іншими, тепловими, характеристиками процесу.

Час повного випалення шматка можна знайти з останньої формули і умови  $r^* = 0$ :

$$\tau_{\text{полн}} = (Q\rho/\lambda)R^2/[6(t_{\text{нов}}-t_p)]. \quad (7.62)$$

Формули (7.61) і (7.62) дещо занижують час розкладання вапняку через прийняте допущення про відсутність нагрівання продуктів реакції  $\text{CaO}$  і  $\text{CO}_2$ . Це припущення можна скоректувати, збільшивши тепловий ефект, що підставляється в кінцеві вирази, на добавку тепла, що витрачається для нагрівання продуктів розкладання  $Q' = Q + \Delta Q$ . Такий підхід, по суті, допускає витрату тепла тільки в реакційній зоні. Строго кажучи, це не так, тому що, нагрівання і  $\text{CaO}$  і  $\text{CO}_2$ , відбувається і за межами реакційної зони. Тому зміна  $Q$  за рахунок витрати тепла на нагрівання продуктів розкладання  $\Delta Q$  приводить до деякого збільшення часу розкладання шматка в порівнянні з фактичним. Достатньо хороше наближення досягається, якщо час розкладання шматка розрахувати двічі: за  $Q$  і за  $Q' = Q + \Delta Q$ , а потім як остаточний результат взяти середнє.

## 7.5 Тепло- і масообмін під час сушіння

Тепло- і масообмін, пов'язаний з видаленням вологи з матеріалів, як правило, здійснюють у сушильних апаратах (сушарках). Організація цих процесів вимагає підведення теплоти, необхідної для випаровування вологи в матеріалі, що сушиться, а також неперервного відведення водяної пари.

Передача теплоти матеріалу в процесі сушіння із зовнішнім джерелом тепла може здійснюватися від нагрітої

поверхні, нагрітого повітря або димових газів. Нагріта поверхня передає теплоту теплопровідністю або випромінюванням, а димові гази (повітря) - конвекцією. За способом передачі теплоти розрізняють такі види сушіння: контактну, коли нагріта поверхня стикається з поверхнею сирого матеріалу (паперу, тонкого шару сипучих матеріалів); радіаційну, коли передача теплоти на поверхню матеріалу, що сушиться, здійснюється інфрачервоними (тепловими) променями від різних випромінювачів, що обігріваються електрикою або газом (сушіння різних покриттів, ливарних форм і так далі); у нерухомому шарі (котунів і агломераційних шихт фільтрівним потоком продуктів згоряння палива); дисперсних матеріалів у киплячому шарі; конвективну, коли підведення теплоти і відведення водяної пари забезпечуються за рахунок руху нагрітих газів (повітря) поблизу матеріалу, що сушиться. Цей вид сушіння найбільш поширений, його використовують для монолітних і сипких матеріалів.

Існують й інші види сушіння - в електромагнітному полі сублімація, проте вони в металургії і машинобудуванні не поширені.

У металургії найбільш поширене конвективне сушіння, в ході якого теплообмін між газом і матеріалом здійснюють всіма видами теплопередачі. Проте при температурах газу, що рідко перевищують 200-300°C, променистою тепловіддачею від газів можна нехтувати. Можна також нехтувати і передачею теплоти від газів теплопровідністю унаслідок руху теплоносія. Тому основний вид теплопередачі від газів до матеріалу - конвекція. Досліди показують, що за однакових температурних і гідродинамічних умов підведення теплоти до вільної поверхні вологого тіла коефіцієнт тепловіддачі вищий, ніж за відсутності випаровування. А.В.Ликов пояснює це явище потраплянням разом із парою в примежовий шар субмікроскопічних частинок вологи, яка в ньому випаровується. Отже, при обми-

ванні вологого тіла нагрітим газом випаровування вологи відбувається не тільки усередині матеріалу, але і в об'ємі примежового шару (об'ємне випаровування). Коефіцієнт тепловіддачі від газів до вологого матеріалу можна обчислити за рівняннями конвективного теплообміну. Під час руху газу через шар вологого дисперсного матеріалу в розрахунки вводять об'ємний коефіцієнт тепловіддачі.

Аналіз, виконаний стосовно конвективного сушіння, показав, що його інтенсивність визначається величиною щільності теплового потоку, сприйманою поверхнею тіла. Проте ця залежність досить складна. Щільність теплового потоку можна збільшити, підвищивши температуру гріючого середовища (газу) або коефіцієнт тепловіддачі. У тому й іншому випадку процеси паротворення будуть прискорені в результаті підведення теплоти. Проте в першому випадку за рахунок зростання температури теплоносія збільшаться і градієнти температур по перетину тіла, що ускладнить переміщення вологи зсередини до поверхні. Таким чином, для полегшення переміщення вологи до поверхні не завжди доцільно підвищувати температуру нагрівального середовища. Ефективніша дія на коефіцієнт тепловіддачі. Збільшити його можна, підвищивши швидкість газового потоку або замінивши, наприклад, подовжнє обмивання тіла на поперечне.

Процес сушіння інтенсифікується також під час вакуумування матеріалу.

Можлива інтенсифікація сушіння одночасним застосуванням конвективного, радіаційного і вакуумного способів. Вибір варіанта визначається технологічними вимогами до процесу і залежить від властивостей матеріалу і їх змін при видаленні вологи, а також від дії теплоти. В процесі сушіння вогнетривких виробів і котунів збільшується їх міцність, що необхідно для подальшої обробки цих матеріалів при випаленні. При цьому не байдуже, як здійснене сушіння. Важливо, щоб вироби (котуни) після сушіння не

мали тріщин та інших дефектів у структурі, тобто їх структурно-механічні характеристики покращали. Ці явища досліджуються поки що експериментально.

## **7.6 Методи чисельного аналізу процесів тепло-, масоперенесення**

Під час пошуку кількісного опису явищ тепло-, масообміну інженер, як правило, вводить в розгляд деяку систему звичайних диференціальних рівнянь або рівнянь з частинними похідними, справедливу в певній області, і накладає на цю систему необхідні граничні і початкові умови. На цій стадії математична модель явищ замкнута, і для практичних застосувань потрібно тільки знайти розв'язаннями для конкретної множини числових даних. Тут, проте, виникають основні труднощі, оскільки точному розв'язанню існуючими методами піддаються лише рівняння найпростішого вигляду в геометрично тривіальних межах. Наприклад, у розв'язаннях розглянутих завдань теплоперенесення використаний метод розділення змінних, тобто метод рядів Фур'є. Очевидно, що успіх його застосування у викладеному вигляді пов'язаний з лінійністю диференціальних рівнянь, постійністю їх коефіцієнтів і деякими іншими умовами. Іншими словами, цей метод застосовний до досить обмеженого класу завдань, і в загальному випадку розв'язання системи рівнянь скільки-небудь точної математичної моделі становить значні труднощі.

Щоб подолати ці труднощі і мати можливість використовувати цифрову ЕОМ, необхідно перетворити завдання до чисто алгебраїчної форми, що містить тільки основні арифметичні операції. Для досягнення цієї мети можна використовувати різні види дискретизації безперервного завдання, визначеного диференціальними рівняннями. При такій дискретизації нескінченна множина чисел, що становлять невідому функцію (або функцію), замінюється

скінченним числом невідомих параметрів, а для цього потрібна деяка апроксимація.

Чисельними методами можна розв'язувати будь-яку задачу, проте вони мають досить істотний недолік: отримані результати важко аналізувати й узагальнювати. Дійсно, кожне конкретне фізичне явище описується рівнянням з багатьма параметрами, і чисельне розв'язання виходить у формі багатовимірних таблиць числових даних. Крім того, теоретично можливе чисельне розв'язання деяких завдань вимагає таких великих ресурсів ЕОМ, що стає практично неможливим. Неоцінимим інструментом для дослідження залежностей невідомої функції від параметрів завдання, наприклад температури від умов нагрівання, в цьому випадку є наближені аналітичні методи.

Найбільш поширені чисельні методи - скінченних різниць (МКР) і скінченних елементів (МКЕ). МКР зручний для розв'язання рівнянь математичних моделей процесів, що проходять у системах з порівняно простою геометрією, МКЕ переважний для систем складної форми. З наближених аналітичних методів великою популярністю користуються методи Рітца, Канторовича, Галеркіна і Біо. Основні положення цих методів розглядаються нами головним чином на прикладах вирішення завдань теплопровідності. Використання їх для вирішення завдань інших типів тепло-, масоперенесення не викликає принципових утруднень.

## РОЗДІЛ 8

### ТЕСТОВИЙ КОНТРОЛЬ ЗАСВОЄННЯ МАТЕРІАЛУ ЛЕКЦІЙНОГО КУРСУ З ПРЕДМЕТА

- 1 Основні види теплообміну – це...
- 2 Складний теплообмін – це...
- 3 Що називають температурним полем?
- 4 Стаціонарне і нестаціонарне температурні поля – це...
- 5 Що називають ізотермічною поверхнею?
- 6 Температурний градієнт – це...
- 7 Що називають тепловим потоком?
- 8 У чому полягає закон Фур'є?
- 9 Коефіцієнт теплопровідності, його фізичний зміст.
- 10 Розмірність коефіцієнта теплопровідності.
- 11 Фактори, від яких залежить коефіцієнт теплопровідності. Межі його значень для газів, рідин і металів.
- 12 Які матеріали називають ізоляційними?
- 13 Навіщо використовують крайові умови, як їх ще називають?
- 14 Які характеристики повинні мати крайові умови?
- 15 Якими величинами задаються граничні умови першого роду?
- 16 Якими величинами задаються граничні умови другого роду?
- 17 Якими величинами задаються граничні умови третього роду?
- 18 У чому полягає закон Ньютона - Ріхмана?
- 19 Що таке коефіцієнт тепловіддачі?
- 20 Що таке теплопередача?
- 21 Тепловий потік теплопередачі визначається формулою...
- 22 Який фізичний зміст коефіцієнта теплопередачі і як його визначити?
- 23 Що називають повним термічним опором теплопередачі? З яких величин він складається?

24 Що називають лінійним термічним опором теплопередачі і як його визначити?

25 Зменшення втрат теплоти ізоляцією можливе за таких вимог...

26 Інтенсифікувати теплопередачу можна за рахунок...

27 З якою метою використовують оребрені поверхні?

28 Нестационарне температурне поле – це...

29 Конвективний теплообмін – це...

30 Розрізняють такі види течії...

31 Які режими течії зустрічаються? Які їх характеристики?

32 Значення якої величини визначає режим течії, її позначення, склад і розмірність.

33 Межові значення числа Рейнольдса для різних режимів течії.

34 Теорія подібності встановлює...

35 Моделювання – це...

36 До умов однозначності належать...

37 Які явища можуть бути подібними?

38 Що називають критеріями подібності?

39 Критеріальні рівняння – це...

40 Перша теорема подібності...

41 Друга теорема подібності...

42 Третя теорема подібності...

43 Які критерії називають визначальними?

44 Метод наближеного моделювання...

45 До критеріїв гідромеханічної подібності належать...

46 До критеріїв теплової подібності відносять...

47 Що називають дифузією і які види дифузії існують?

48 Що називають густиною потоку маси?

49 Рівняння закону Фіка.

50 Коефіцієнт дифузії газів і парів, його визначення.

51 Рівняння основного закону масовіддачі...

52 Основні критерії масообміну.

53 Загальний вигляд критеріальної залежності для визначення коефіцієнта масовіддачі.

## РОЗДІЛ 9

### ПРИКЛАДИ ТИПОВИХ РОЗРАХУНКІВ ТЕПЛОВИХ ПРОЦЕСІВ ДИЗАЙНУ МАТЕРІАЛІВ

#### 9.1 Розрахунок тривалості нагрівання тонких тіл

##### Завдання

Визначити час нагрівання для гартування листа ресори товщиною 15 мм з розмірами 100х15х900 мм. Матеріал: сталь 55С2.

##### Розв'язання

1 Для сталі 55С2  $A_{c3} = 820$  °С. Температура нагрівання  $t = 820^\circ + 40^\circ = 860^\circ\text{C}$ .

2 Беремо завантаження в пічі з температурою  $t_c = 870^\circ\text{C}$ .

3 Початкова температура металу  $t_{\text{м.поч}} = 20$  °С.

4 Визначаємо критерій Біо за формулою  $Bi = \frac{\alpha S}{\lambda}$ :

$$S = \frac{0,015}{2} = 0,0075.$$

За довідниковими даними (додаток А) середній коефіцієнт тепловіддачі за цикл нагрівання  $\alpha = 180 \frac{Bm}{m^2 \cdot K}$ .

Коефіцієнт теплопровідності за довідниковими даними

(додаток Б)  $\lambda = 32,6 \frac{Bm}{m \cdot K}$ ,  $Bi = \frac{180 \cdot 0,0075}{32,6} = 0,041$ .

Тіло тонке, тому що  $Bi < 0,25$ .

5 Визначаємо масу пластини за довідниковими даними

(додаток Г), густина  $\rho = 7830 \frac{Kz}{m^3}$ :

$$G = 7830 \cdot 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,015 = 10,6 \text{ кг}.$$

6 Визначаємо активну поверхню, яка сприймає тепло, якщо пластина розміщена плазом на поді печі:

$$F = 0,9 \cdot 0,1 + 0,9 \cdot 0,015 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 0,015 \cdot 0,2 = 0,12 \text{ м}^2.$$



Питома теплоємність  $c = 695 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}}$  (додаток В)

7 Час нагрівання дорівнює за формулою

$$\tau = \frac{10,6 \cdot 695}{180 \cdot 0,12} \ln \left( \frac{870 - 25}{870 - 860} \right) = 1513c = 25 \text{хв.}$$

## 9.2 Розрахунок тривалості нагрівання масивних тіл

Визначити час нагрівання валу діаметром 300 мм із сталі 40ХН при завантаженні виробу від температури цеху в піч, яка нагріта до температури гартування.

Розв'язання

1 Визначаємо температуру гартування

$$t_z = A_{c3} + (20 - 40)^\circ\text{C}.$$

Для сталі 40ХН  $A_{c3} = 780^\circ\text{C}$ .

$$t_z = 780^\circ\text{C} + 40\text{C} = 820^\circ\text{C}.$$

Беремо температуру печі  $t_{II} = 830^\circ\text{C}$ .

2 Визначаємо критерій Ві за формулою

$$Bi = \frac{\alpha \cdot S}{\lambda};$$

$$R = 0,15.$$

За таблицею додатка А визначаємо середній коефіцієнт

тепловіддачі  $\alpha = 180 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ; за таблицею додатка Б

визначаємо  $\lambda = 32,6 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$ ;

$$Bi = \frac{180 \cdot 0,015}{27,2} = 0,99, \text{ отже, вал, який нагрівається, - тіло}$$

масивне ( $Bi > 0,25$ ).

3 Визначаємо температурний критерій за формулою

$$\Theta = \frac{t_{\Pi} - t_z}{t_{\Pi} - t_{\text{м.поч}}} = \frac{830 - 820}{830 - 20} = 0,012.$$

4 За номограмою додатка К за критеріями  $Bi = 0,99$  і  $\Theta = 0,012$  визначаємо критерій Фур'є  $Fo = 2,6$ .

5 Час нагрівання становить за формулою:

$$\tau = \frac{Fo R^2}{\alpha} = \frac{2,6 \cdot 0,15^2}{5,83 \cdot 10^{-6}} = 1003 \text{ с} = 2,78 \text{ год} \approx 3 \text{ год}.$$

Коефіцієнт температуропровідності вибираємо за таблицею додатка Б,  $\alpha = 5,83 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{с}$ .

### 9.3 Визначення тривалості витримки під час аустенітизації

#### Завдання

Визначити час, який необхідний для нагрівання центра валу діаметром 300 мм із сталі 40ХН до температури, яка забезпечує виконання гартування.

#### Розв'язання

Для сталі 40ХН  $A_{C3} = 780^\circ\text{C}$ , отже, температура гартування для поверхні  $t_r = 780 + 40 = 820^\circ\text{C}$ .

Беремо температуру печі  $t_{\Pi} = 830^\circ\text{C}$ , а температуру центра  $t_{\text{ц}} = 875^\circ\text{C}$ .

$$\text{Критерій Біо } Bi = \frac{\alpha \cdot R}{\lambda} = \frac{180 \cdot 0,15}{27,2} = 0,99 \text{ (див.приклад 8.2).}$$

Температурний критерій центра визначаємо за формулою:

$$\Theta = \frac{t_{\Pi} - t_{\text{ц}}}{t_{\Pi} - t_{\text{м.поч}}} = \frac{830 - 815}{830 - 20} = 0,019.$$

За графіком (див. додаток Ж) визначаємо критерій  $Fo$ , знаючи  $Bi = 0,99$  та  $\Theta = 0,019$  для центра циліндра  $Fo = 2,8$ :

$$\tau = \frac{FoR^2}{\alpha} = \frac{2,8 \cdot 0,15^2}{5,83 \cdot 10^{-6}} = 10806c = 3god.$$

Час на прогрівання 3,0 - 2,78 = 0,22 год, або 13 хв. Збільши-  
 мого на 40% і одержимо тривалість витримки

$$\tau_{вид} = 0,22 \cdot 1,4 = 0,3 год \approx 20 хв.$$

Практично можна взяти час витримки

$$\tau_{вид} = \frac{1}{3} \tau_{нагр} = 1god.$$

#### 9.4 Розрахунок часу охолодження у середовищі під час гартування

##### Завдання

Визначити час охолодження вала діаметром 300 мм, довжиною 200 мм із сталі 40ХН при гартуванні у маслі. Беремо:  $t_c = 30^\circ C$ ;  $t_n = 830^\circ C$ ;  $t_k = 100^\circ C$ .

$$F = 2\pi RL + 2 \frac{\pi \cdot D^2}{4} = \pi DL + 2 \frac{\pi \cdot D^2}{4} = 3,14 \cdot 0,3 \cdot 0,2 + 2 \frac{3,14 \cdot 0,3^2}{4} = 2,02 m^2.$$

$$\text{Маса валу } G = \frac{\pi D^2}{4} L \cdot 7830 = \frac{3,14 \cdot 0,3^2}{4} 2 \cdot 7830 = 1106 кг.$$

За таблицями додатків А і Б визначаємо теплотехнічні коефіцієнти:

$$c = 692 \frac{Дж}{кг \cdot K} \text{ (табл. додатка Б);}$$

$$\alpha = 400 \frac{Вт}{м^2 \cdot K} \text{ (табл. додатка А);}$$

$$\tau = \frac{1106 \cdot 695}{400 \cdot 2,02} \cdot \ln \frac{20 - 830}{20 - 100} = 2202c = 0,6god.$$

## 9.5 Відпал сталевого литва

### Завдання

Розробити технологію відпалу литої станини, яка складається із плоских елементів з найбільшою товщиною 200 мм із сталі 35ХГСЛ-II.

### Розв'язання

Точка  $A_{C3}=805^{\circ}\text{C}$ ;  $t_{\text{відп}}=805 + (30-50)^{\circ}\text{C}$

1 Визначаємо тривалість нагрівання. Розрахунковий перетин  $S=200$  мм.

Критерій  $Bi = \frac{\alpha S}{\lambda}$ ;  $\alpha_{cp} = 180 \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}}$ ;  $\lambda = 26,7 \frac{\text{Вт}}{\text{м} \cdot \text{К}}$  (за табл.

додатків А і Б).

$$Bi = \frac{180 \cdot 0,1}{26,7} = 0,67. \text{ Тіло масивне.}$$

$$\text{Температурний критерій } \Theta_c = \frac{t_c - t_{\text{м.кін}}}{t_c - t_{\text{м.поч}}} = \frac{865 - 855}{865 - 25} = 0,012.$$

2 Критерій Фур'є за графіком (додаток Д) для пластини ( $Bi=0,67$  і  $\Theta=0,012$ )  $Fo = 7,8$ ;

$a = 5,83 \text{ м}^2/\text{с}$  (за табл. додатка Б);

$$\tau = \frac{Fo S^2}{\alpha} = \frac{7,8 \cdot 0,1^2}{5,83 \cdot 10^{-6}} = 13379 \text{ с} = 3,7 \text{ год}, \text{ беремо } 4 \text{ години.}$$

$$3 \text{ Тривалість витримки } \tau_{\text{вит}} = \frac{1,2 \cdot 200}{100} = 2,4 \text{ год} \approx 2,5 \text{ год}.$$

4 Тривалість охолодження до  $640^{\circ}\text{C}$

$$\tau_{\text{охол}} = \frac{855 - 640}{35} = 6,1 \text{ год} = 6 \text{ год}.$$

5 Тривалість витримки при температурі  $660-640^{\circ}\text{C}$

$$\tau_{\text{вит}} = 2,4 \text{ год} = 2,5 \text{ год}.$$

6 Тривалість охолодження від  $640$  до  $400^{\circ}\text{C}$   $\tau$

$$\tau_{охол} = \frac{640 - 400}{35} = 6,7 год = 7 год.$$

## 9.6 Термічне поліпшення сталевих литва

### Завдання

Провести термічну обробку литого елемента станини у вигляді пластини 200х400х1200 мм із сталі 35ХГ2СЛ-ІІІ для отримання за всім перетином високого поєднання міцності, в'язкості і пластичності.

### Розв'язання

Потрібні механічні властивості можуть бути отримані гартуванням з подальшим високотемпературним відпуском.

#### 1 Режим гартування.

Температура гартування  $t_r = A_{c3} + (20 \dots 40)^\circ\text{C}$ . Для сталі 35ХГ2СЛ  $A_{c3} = 805^\circ\text{C}$ .  $t_r = 805 + (20 \dots 40) = 825 \dots 845^\circ\text{C}$ .  
Температура печі –  $855^\circ\text{C}$ .

Як встановлено у задачі прикладу 8.5, елемент, який розглядається, становить масивне тіло  $Bi = \frac{180 \cdot 0,1}{26,7} = 0,6726,7$ .

Визначаємо температурний критерій

$$\Theta_u = \frac{t_{II} - t_{м.кін}}{t_{II} - t_{м.поч}} = \frac{855 - 545}{855 - 25} = 0,012.$$

За графіком (додаток Д) для випадку  $Bi = 0,67$  і  $\Theta = 0,012$  критерій  $Fo = 7,7$ . Тоді час нагрівання

$$\tau_n = \frac{Fo S^2}{\alpha} = \frac{7,7 \cdot 0,1^2}{5,83 \cdot 10^{-6}} = 13207 \text{ c} = 3,7 год \approx 4 год.$$

Тривалість витримки  $\tau_{вид} = \frac{1}{3} \tau_n = \frac{1}{3} 4 = 1,3 год = 1,5 год$ .

Для визначення швидкості охолодження визначимо  $V_{кр}$ . За діаграмою ізотермічного розпаду аустеніту сталі

35ХГ2СЛ-Ш визначаємо температуру мінімальної стійкості аустеніту  $t = 600\text{ }^{\circ}\text{C}$ , час мінімальної стійкості переохолодженого аустеніту

$$V_{кр} = \frac{855 - 600}{10} = 25^{\circ}\text{C/с}.$$

Як середовище для охолодження призначаємо мінеральне масло. Тривалість витримки у маслі визначимо за формулою. Для цього з таблиць додатка Б визначаємо питому теплоємність сталі  $c = 695\text{ Дж/(кгК)}$

Середній коефіцієнт тепловіддачі у маслі  $\alpha = 400\text{ Вт/(м}^2\text{К)}$ .

Активна поверхня пластини

$$F = 0,4 \cdot 0,2 \cdot 2 + 0,2 \cdot 1,2 \cdot 2 + 0,4 \cdot 1,2 \cdot 2 = 1,6\text{ м}^2.$$

Маса пластини  $\rho = 7830\text{ кг/м}^3$  (додаток Г)

$$G = 7830 \cdot 0,4 \cdot 0,2 \cdot 1,2 = 752\text{ кг}.$$

За формулою тривалість витримки пластини у маслі ( $t=30^{\circ}\text{C}$ ) при її гартуванні становитиме

$$\tau = \frac{752 \cdot 695}{400 \cdot 1,6} \ln \left( \frac{30 - 855}{30 - 100} \right) = 2014\text{ с} = 0,56\text{ год} \approx 40\text{ хв}.$$

2 Режим відпуску.

Температурний критерій

$$\Theta_u = \frac{t_c - t_{м.кін}}{t_c - t_{м.поч}} = \frac{575 - 550}{575 - 25} = 0,245;$$

$$\alpha = 5,28 \cdot 10^{-6}\text{ м}^2/\text{с}; Fo = 4,8.$$

Тривалість нагрівання

$$\tau_n = \frac{Fo S^2}{\alpha} = \frac{4,8 \cdot 0,1^2}{5,28 \cdot 10^{-6}} = 9090\text{ с} = 2,5\text{ год}.$$

Тривалість витримки при відпуску – 4 години.

Тривалість охолодження від температури відпуску

$$\tau = \frac{600 - 100}{500} = 10 \text{ год.}$$

## 9.7 Ізотермічний відпал

### Завдання

Розробити технологію попередньої термообробки після кування вал-шестерні з найбільшим діаметром бочки 450 мм зі сталі 34ХМ.

### Розв'язання

Сталь 34ХМ належить за флокеночутливістю до другої групи. Через це відпал будемо проводити згідно з графіком. Накопичення призначаємо при температурі 600°C.

Визначаємо температуру точки  $A_{C3}$ . З довідника  $A_{C3} = 790^\circ\text{C}$ .

Температура нагрівання  $t_0 = 790 + (20-40) \cdot 810-830^\circ\text{C}$ . Беремо температуру печі  $t_n = 840^\circ\text{C}$ . Визначаємо час нагрівання від 600°C до температури відпалу  $t = 830^\circ\text{C}$ .

Критерій  $Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}$  значення  $\alpha$  і  $\lambda$  визначаємо з таблиць

додатків 1 і 2. Середнє значення коефіцієнта тепловіддачі за цикл нагрівання  $\alpha = 180 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ ; коефіцієнт теплопровідності для хромомолібденової сталі  $\lambda = 29,1 \text{ Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ .

$$Bi = \frac{180 \cdot 0,225}{29,1} = 1,39.$$

Визначаємо температурний критерій

$$\Theta_u = \frac{t_{II} - t_{м.кін}}{t_{II} - t_{м.поч}} = \frac{840 - 830}{840 - 600} = 0,042.$$

Для циліндра за графіком (див. додаток К) визначаємо критерій  $Fo = 1,5$ . Для випадку, коли  $Bi = 1,39$  і  $\Theta = 0,042$ , коефіцієнт температуропровідності за додатком Б для хромомолібденової сталі  $\alpha = 5,39 \cdot 10^{-6} \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ .

Час нагрівання  $\tau = \frac{1,5 \cdot 0,225^2}{5,39 \cdot 10^{-6}} = 14088c = 3,9 год.$

Тривалість витримки при температурі відпалу  
 $\tau_{вид} = \frac{0,5 \cdot 450}{100} = 2,25 год \approx 2,5 год.$

Час охолодження до 300°C зі швидкістю 40°C/год

$$\tau_{охол} = \frac{830 - 300}{40} = 13,25 год \approx 14 год.$$

Тривалість витримки при 300-350°C

$$\tau = \frac{2,450}{100} = 9 год.$$

Час нагрівання від 350 до 660°C. Температурний критерій

$$\Theta_{\eta} = \frac{t_c - t_{м.кін}}{t_c - t_{м.поч}} = \frac{660 - 640}{660 - 350} = 0,065.$$

Критерій Fo= 1,3;  $\alpha = 6,67 \cdot 10^{-6} м^2 / с$  (додатки Б і К).

Час нагрівання  $\tau = \frac{1,3 \cdot 0,225^2}{6,67 \cdot 10^{-6}} = 9866c = 2,7 год \approx 3 год.$

Тривалість витримки при температурі 640-660°C обчислюється, виходячи з рекомендацій - 2 г на 25 мм діаметра:

$$\tau = \frac{2 \cdot 450}{25} = 36 год.$$

Тривалість охолодження від 660 до 400°C зі швидкістю 40 °C/год становить

$$\tau_{охол} = \frac{660 - 400}{40} = 6,5 год.$$

Тривалість охолодження від 400 до 100°C зі швидкістю 20°C/год становить

$$\tau_{охол} = \frac{400 - 100}{20} = 15 год.$$



## 9.8 Технологія цементації

### Завдання

Шестерня діаметром 200 мм з висотою маточини 40 мм, діаметр отвору 30 мм, виготовлена із сталі 12Х2Н4А. Розробити режим хіміко-термічної і термічної обробки для отримання на поверхні зуба твердості 60-62 HRC, а в серцевині зуба твердості – 35-38 HRC.

### Розв'язання

Шестерня виготовлена зі сталі третьої групи, отже, деталь відповідального призначення. Необхідні властивості можуть бути забезпечені цементацією з подальшим подвійним гартуванням і низьким відпуском. Призначаємо глибину цементації 1,2 мм.

Графік технології будуємо відповідно до рекомендацій. Проводимо розрахунок етапів технології.

1 Тривалість витримки при цементації:  $\frac{1,2}{0,15} = 8 \text{ год}.$

2 Після цементації охолодження на повітрі протягом часу

$$\tau_{\text{охол}} = \frac{940 - 25}{350} = 2,6 \text{ год}.$$

3 Час нагрівання на перше гартування.

Визначаємо розрахунковий перетин.

Розглядаємо шестерню як пластину  $2S = L = 40 \text{ мм}.$

Температура гартування для сталі 12Х2Н4А

$$t_r = A_{C3} + (20 \dots 40) = 850 + (20-40) = 870-890^\circ\text{C};$$

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}.$$

З таблиць додатків А і Б визначаємо:

- середній коефіцієнт тепловіддачі  $\alpha = 180 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К});$

- коефіцієнт теплопровідності  $\lambda = 26,4 \text{ Вт/(мК)}$ .

$$Bi = \frac{180 \cdot 0,2}{26,4} = 14088c = 3,920d. \quad Bi > 0,25; \text{ тіло тонке.}$$

Час нагрівання визначається за формулою

$$\tau = \frac{Gc}{\alpha F} \ln \left( \frac{t_c - t_{м.кін}}{t_c - t_{м.поч}} \right).$$

$$\text{Маса } G = \frac{\pi D_H^2}{4} Lp - \frac{\pi d_{BH}^2}{4} Lp = \left( \frac{\pi}{4} \right) Lp (D_H^2 - d_{BH}^2).$$

Густина сталі  $\rho = 7830 \text{ кг/м}^3$  (додаток Г).

$$G = 0,785 \cdot 0,04 \cdot 7830 \cdot (0,2^2 - 0,03^2) = 9,6 \text{ кг}.$$

Середня теплоємність (таблиця додатка Б)  $c = 687 \text{ Дж/кгК}$ .

Площа активної поверхні, яка сприймає тепло:

$$\begin{aligned} F &= \pi D_H L + \frac{\pi D_H^2}{4} 2 + \pi d_{BH} L - \frac{\pi d_{BH}^2}{4} 2 = \\ &= 3,14 \cdot 0,2 \cdot 0,04 + 0,785 \cdot 0,04 \cdot 2 + 3,14 \cdot 0,03 \cdot 0,2 - \\ &\quad - 0,785 \cdot 0,0009 \cdot 0,2 = 0,107 \text{ м}^2. \end{aligned}$$

Час нагрівання

$$\tau = \frac{9,6 \cdot 687}{18 / 0,107} \ln \left( \frac{900 - 25}{900 - 850} \right) = 1631c = 25 \text{ хв}.$$

Беремо 0,5 години.

4 Визначаємо середовище для охолодження під час гартування. За діаграмою ізотермічного розпаду аустеніту для сталі 12Х2Н4А  $t = 890^\circ\text{C}$ ;  $\tau = 8c$ .

$$V_{кр} = \frac{890 - 400}{8} = 73^\circ\text{C} / c.$$

Як середовище для охолодження призначаємо мінеральне масло. Час витримки у маслі розраховуємо за

формулою:

$$\tau = \frac{Gc}{\alpha F} \ln \left( \frac{t_c - t_{м.кін}}{t_c - t_{м.поч}} \right).$$

$G=9.6\text{кг}$ ,  $c=687\text{Дж/кгК}$ ,  $\alpha=400\text{ Вт/(м}^2\text{К)}$  (додаток А),  
 $t_c=50^\circ\text{C}$ ,  $t_{м.кін}=100^\circ\text{C}$ ,  $t_{м.поч}=890^\circ\text{C}$ .

$$\tau = \frac{9,6 \cdot 687}{400 \cdot 0,107} \ln \left( \frac{50 - 890}{50 - 100} \right) = 434\text{с} = 7,2\text{хв.}$$

Візьмемо 10 хвилин.

5 Визначаємо режим другого гартування. Температура нагрівання  $t_g = A_{CI} + (20-40)^\circ\text{C}$ .

Для сталі типу 90Х2Н4А  $A_{CI} = 760^\circ\text{C}$ .

$$t_g = 760 + (20-40) = 789-800^\circ\text{C}.$$

Час нагрівання визначаємо за формулою

$$\tau = \frac{9,6 \cdot 687}{400 \cdot 0,107} \ln \left( \frac{800 - 25}{810 - 800} \right) = 1489\text{с} = 24\text{хв.}$$

Беремо 0,5 години і весь тепловий режим повторюємо.

$$6 \text{ Режим відпуску. Час нагрівання } - \frac{150}{100} = 1,5 \text{ год.}$$

Тривалість витримки  $3,6 \cdot 40 = 144 \text{ хх} = 2,4 \text{ год}$ . Беремо

$$\tau_{охол} = 2,5 \text{ год.}$$

$$\text{Тривалість охолодження } \tau_{охол} = \frac{150}{50} = 3 \text{ год.}$$

Загальний цикл усієї технології - 20,1 год.

## 9.9 Попередня термічна обробка ледебуритних інструментальних сталей

### Завдання

Розробити режим ізотермічного відпалу поковок із сталі Р18 діаметром 50 мм, довжиною 400 мм.

## Розв'язання

Режим ізотермічного відпалу розробляємо, йдучи двома шляхами.

1 Розрахунковий діаметр  $D_n = 50$  мм (табл. 1). Визначаємо, до якого типу належить тіло при нагріванні.

$$Bi = \frac{\alpha R}{\lambda}.$$

За таблицями додатків А і Б визначаємо  $\alpha = 180 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ ,  
 $\lambda = 28,5 \text{ Вт}/(\text{мК})$ .

$$Bi = \frac{180 \cdot 0,025}{28,5} = 0,158. \text{ Тіло тонке.}$$

Для цього визначаємо масу поковки:  $G = \frac{\pi D_H^2}{4} l \rho$ , де  $\rho$  - густина за таблицею додатка Д для сталі Р18:  $\rho = 8690 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

$$G = 0,785 \cdot 0,05^2 \cdot 0,4 \cdot 8690 = 6,8 \text{ кг}.$$

Активна поверхня поковки (як циліндра)

$$F = \pi D_H l + \frac{\pi D_H^2}{4} 2;$$

$$F = 3,14 \cdot 0,050 \cdot 4 + 0,785 \cdot 0,0522 = 0,067 \text{ м}^2.$$

За таблицею додатка Б визначаємо теплоємність:  $c = 670 \text{ Дж}/(\text{кгК})$ .

За таблицею додатка А - коефіцієнт тепловіддачі:  
 $\alpha = 250 \text{ Вт}/(\text{м}^2\text{К})$ .

Температура відпалу  $t_v = 890^\circ\text{C}$ ;  $t_{\text{м.кін}} = 880^\circ\text{C}$ ,  $t_{\text{м.поч}} = 25^\circ\text{C}$

Час

нагрівання

$$\tau = \frac{6,8 \cdot 670}{250 \cdot 0,067} \ln \left( \frac{890 - 25}{890 - 880} \right) = 1213 \text{ с} = 0,33 \text{ год} = 0,4 \text{ год}.$$

Час витримки при температурі відпалу

$$\tau_{\text{вид}} = 0,8 \cdot 50 = 40 \text{ хв} = 0,7 \text{ год}.$$

Час охолодження до ізотермічної витримки

$$\tau_{вид} = \frac{880 \cdot 730}{50} = 3200 \text{ год}.$$

Час витримки до повного розпаду аустеніту згідно з діаграмою ізотермічного розпаду аустеніту сталі P18 при температурі 730°C становить 15000 с = 4,2 год ≈ 4,5 год.

Час охолодження з піччю після ізотермічної витримки

$$\tau_{охол} = \frac{730 \cdot 600}{30} = 2,3200 \approx 2,5200 \text{ год}.$$

Час охолодження на повітрі

$$\tau_{охол} = \frac{600 - 25}{350} = 1,6200 \approx 2,5200 \text{ год}.$$

2 У разі, коли мова йде про велику кількість поковок, нагрівання ведуть зі швидкістю  $\leq 100^\circ\text{C}/\text{годину}$ .

$$\tau_{нагр} = \frac{850 - 25}{100} = 8,25200 \approx 8,5200 \text{ год}.$$

Температуру відпалу призначають  $A_{c1} + (20-40)^\circ\text{C}$ .

Для сталі P18  $A_{c1} = 320^\circ\text{C}$ , отже,  $t_B = 820 + (20-40)^\circ\text{C} = 840-860^\circ\text{C}$ .

## **9.10 Типова технологія остаточної термічної обробки різальних інструментів зі швидкорізальних сталей**

### **Завдання**

Розробити технологію гартування з відпуском свердла зі сталі P18 діаметром 50 мм, довжиною ріжучої частини 255 мм. Загальна довжина свердла - 440 мм, глибина канавки - 15 мм.

### **Розв'язання**

Припустимо, що свердло є суцільним циліндром, який нагрівається з одного кінця. Нагрівання проводимо у соляних ваннах. Згідно з літературними рекомендаціями розрахунковий перетин для свердла має дорівнювати половині діаметра свердла. У нашому випадку цей перетин становить 25 мм, а через це свердло до температури нагрівання

нагріваємо з двома підігріваннями при  $600$  і  $800^{\circ}\text{C}$ . Температуру гартування беремо  $1270\text{--}1290^{\circ}\text{C}$  ( $A_{c1} = 820^{\circ}\text{C}$ ).

Визначаємо  $W$  з формули:

$$W = \frac{DL}{4l_1 + D} = \frac{(D-h)L}{4l_1 + (Dh)} = \frac{(5,0-1,5)44}{4 \cdot 25,5 + (5,0-1,5)} = \frac{3,5 \cdot 4,4}{4 \cdot 25,5 + 3,5} = \frac{154}{105,5} = 1,5 \text{ см.}$$

Користуючись формулою і таблицею додатка, знаходимо: час нагрівання і витримки при  $600^{\circ}\text{C}$  становить  $7,5 \cdot 1,5 = 10,5 \text{ хв}$ ; при  $800^{\circ}\text{C}$  –  $13 \cdot 1,5 - 7 \cdot 1,5 = 9 \text{ хв}$ ; при  $1280^{\circ}\text{C}$  –  $5 \cdot 1,5 = 7,5 \text{ хв}$ .

Необхідно відмітити, що нагрівання і витримку при другому підігріванні слід призначати з врахуванням нагрівання і витримки при першому підігріванні, як це показано на прикладі стосовно температури  $800^{\circ}\text{C}$ .

Критична швидкість гартування за формулою становить

$$V_{кр} = \frac{t_H - t}{\tau} = \frac{1290 - 750}{100} = 5,4^{\circ}\text{C} / \text{с}.$$

Візьмемо гартування у мінеральному маслі.

Тривалість витримки у маслі визначаємо за формулою, враховуючи, що активна поверхня свердла становить  $F = 0,067 \text{ м}^2$ , маса  $G = 6,8 \text{ кг}$ , теплоємність  $c = 670 \text{ Дж/кг} \cdot \text{K}$ .

Коефіцієнт тепловіддачі при охолодженні у маслі  $a = 400 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{K}$  (таблиця 2 додатка А).

$$\tau = \frac{6,8 \cdot 670}{400 \cdot 0,067} \ln \left( \frac{20 - 1280}{20 - 100} \right) = 458 \text{ с} = 7,8 \text{ хв} = 10 \text{ хв}.$$

Режим відпуску (нагрівання в печі): час нагрівання за формулою при коефіцієнтах  $c = 548 \text{ Дж/(кгK)}$ ,  $a = 90 \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{K}$  (таблиці додатків А і Б),  $t_c = 570^{\circ}\text{C}$ ,  $t_{\text{мпоч}} = 25^{\circ}\text{C}$ .

$$\tau = \frac{6,8 \cdot 548}{90 \cdot 0,067} \ln \left( \frac{570 - 25}{570 - 560} \right) = 2493 \text{ с} \approx 41 \text{ хв} \approx 40 \text{ хв}.$$

Час охолодження (з розрахунку швидкості охолодження  $\theta^{\circ}\text{C/хв}$ )

$$\tau_{\text{охол}} = \frac{560 - 25}{6} = 79 \text{ хв} \approx 80 \text{ хв}.$$

## ДОДАТОК А

Орієнтовні значення коефіцієнта тепловіддачі  $a, \text{Вт}/(\text{м}^2 \text{К})$

Таблиця А.1

Середовище	Температура поверхні тіла, °С					
	100	200	300	400	500	600
Нагрівання в печі з температурою, °С:						
1100	145	160	170	190	210	225
900	100	110	125	140	155	170
600	60	65	70	85	100	115
Охолодження від 900 °С:						
у воді 20 °С	800	2000	1200	400	500	2000
у маслі 50 °С	200	400	500	700	1000	1200
на повітрі	15	18	22	30	40	50

Таблиця А.2

Температура поверхні тіла, °С					За цикл 320 °С до $t$ , °С	
700	800	900	1000	1100	$t$ , °С	$a_{\text{сеп}}$
245	270	300	330	400	1100	250
185	200	320	-	-	900	180
-	-	-	-	-	600	90
1500	1000	-	-	-	-	2000...1000
700	300	250	-	-	-	500...300
55	70	85	100	125	125	50...30

## ДОДАТОК Б

Таблиця Б. 1 – Фізичні властивості низьколегованих сталей

Сталі марганцеві	Сталі хромисті	Коефіцієнт теплопровідності сталей $\lambda, \text{Вт/(мК)}$ :	Середня теплоємність $C$ від 0 до $t$ °C кДж/(кгК)	Температура, °C	
				Властивості	
41,5	44,8	'	0,486	100	
40,0	42,2	'	0,502	200	
38,8	39,3	'	0,519	300	
37,0	36,4	'	0,536	400	
35,2	-	'	0,548	500	
34,3	32,6	'	0,586	600	
30,9	-	'	0,645	700	
26,4	26,7	'	0,695	800	
-	-	'	0,687	900	
-	-	'	0,674	1000	
-	-	'	0,670	1100	
-	-	'	0,670	1200	



Продовження таблиці Б1

Сталі хромонікелеві	Сталі хромованадієві	Сталі хромомолібденові	Сталі кремнемарганцеві	Сталі хромокремніс- ті
38,4	52,3	43,8	41,5	-
37,9	48,7	41,9	41,5	38,7
36,8	-	41,3	39,4	-
36,8	45,4	39,5	39,0	35,9
34,5	41,9	36,5	36,3	33,5
32,4	-	32,3	34,9	32,6
28,0	-	29,8	33,7	-
27,2	-	29,1	32,6	26,7
26,4	-	28,5	-	-
27,7	-	-	-	-
28,8	-	-	-	-
-	-	-	-	-

Продовження табл. Б.1

Властивості	Температура, °С									
	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000
1 Коефіцієнт температуропровідності сталей $\alpha 10^{-6}, \text{ м}^2/\text{с}$ :										
хромистих	11,38	10,28	8,89	7,50	6,39	5,28	3,55	5,83	-	-
марганцевих	10,56	9,72	8,89	7,78	6,39	5,56	3,33	5,83	-	-
хромокремєні- стих	10,41	9,44	8,47	7,50	6,11	5,28	-	5,83	-	-
кремнемарган- цевих	10,56	10,00	8,89	8,05	6,67	5,83	3,61	7,22	-	-
хромомолібде- нових	11,11	10,00	9,44	8,05	6,67	5,28	3,33	5,39	6,11	-
хромованадіє- вих	13,33	11,67	10,55	9,44	8,61	7,78	-	-	-	-
хромонікеле- вих	9,72	9,17	8,33	7,50	6,39	5,28	3,06	5,83	5,56	5,83

## ДОДАТОК В

Фізичні властивості вуглецевих сталей  
Таблиця В. 1

Властивості	Температура, °С					
	100	200	300	400	500	600
Середня теплоємність $C$ від 0 до $t$ °С, кДж/(кгК)	0,486	0,507	0,523	0,540	0,561	0,590
Коефіцієнт теплопровідності сталей $\lambda$ , Вт/(мК):						
маловуглецевих	55,6	52,7	48,5	45,0	40,8	37,1
середньовуглецевих	49,3	48,1	45,6	42,4	39,1	35,7
високо вуглецевих	46,5	44,0	40,8	37,7	35,0	32,3
Коефіцієнт температуропровідності сталей $\alpha 10^2$ , м <sup>2</sup> /год						
маловуглецевих	5,2	4,6	4,2	3,5	2,9	2,3
середньовуглецевих	4,7	4,2	3,8	3,3	2,8	2,3
високо вуглецевих	4,3	3,8	3,4	2,9	2,5	2,2

Таблиця В.2

Властивості	Температура, °С						
	700	800	900	1000	1100	1200	1300
Середня теплоємність $C$ від $0$ до $t$ °С, кДж/(кг·К)	0,62 0	0,69 5	0,69 5	0,69 1	0,68 7	0,68 2	0,68 2
Коефіцієнт теплопровідності сталей $\lambda$ , Вт/(мК):							
маловуглецевих	34,2	30,1	27,3	27,7	28,5	29,8	-
середньовуглецевих	32,4	26,2	26,0	26,9	28,0	29,5	-
високовуглецевих	29,2	24,1	25,2	26,5	27,9	29,4	-
Коефіцієнт температуропровідності сталей $\alpha 10^{-6}$ , м <sup>2</sup> /с:							
маловуглецевих	4,72	4,44	5,56	5,56	5,83	-	-
середньовуглецевих	5,00	5,00	5,56	5,56	5,56	-	-
високовуглецевих	3,61	5,56	5,56	5,56	5,83	-	-

## ДОДАТОК Г

### Густина сталей

Таблиця Г.2

Матеріали	Вуглецеві сталі				Низьколеговані сталі			
	08кп	20	50	У10	50Г, 40Х, 40ХС	Х, ШХ15, 90ХС	30ХГС, 20ХН3А	30ХН3М
Густина, $\text{кг/м}^3$	7880	7860	7850	7830	7830	7800	7840	7830

Продовження таблиці Г.2

Матеріали	Високолеговані сталі					Сплави	
	Р18, Р6М5	3Х13, 3Х2В8	2Х18Н9	Х18Н25	Г13	Чавун сірий	Д16
Густина, $\text{кг/м}^3$	8690	8200	7920	7800	7700	7100	2750

**РОЗДІЛ 10**  
**ПРАКТИКУМ З ПРЕДМЕТА ТА МЕТОДИЧНІ**  
**ВКАЗІВКИ І ПРИКЛАДИ ВИКОНАННЯ**  
**САМОСТІЙНИХ РОБІТ З КУРСУ**

**Практична робота 1**

«Особливості розрахунку нагрівання та охолодження  
термомасивних тіл при граничних умовах I роду»

**1 Теоретичні відомості**

Диференціальне рівняння Фур'є-Кірхгофа встановлює зв'язок між часовою і просторовою змінами температури тіла в будь-якій точці при нагріванні та охолодженні:

$$C_v \rho \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial t}{\partial z} \right) + q_v,$$

де  $C_v$  - ізохорична теплоємність;

$q$  - питома потужність внутрішніх джерел (стоків) теплоти;

$\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності;

$\rho$  - щільність тіла, яке нагрівається (охолоджується);

$\tau$  - час нагрівання (охолодження).

При сталій теплопровідності рівняння спрощується і набуває вигляду

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_v}{C_v \rho},$$

де  $a = \frac{\lambda}{C_v \rho}$  - ізохорична температуропровідність. Ізохо-

рична температуропровідність є теплофізичним параметром. Вона характеризує здатність речовини вирівнювати температуру. Це означає, що тіла, які мають більшу температуропровідність, нагріваються (охолоджуються) швидше в порівнянні з тілами, що мають меншу температуропровідність.

Температуропровідність змінюється від  $1,4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$  для масел до  $0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2/\text{с}$  для срібла.

Диференціальне рівняння Фур'є-Кірхгофа описує багато явищ температуропровідності. Щоб із безлічі цих явищ виділити одне і дати його повний математичний опис, до диференціального рівняння температуропровідності потрібно додати умови однозначності, які містять геометричні, фізичні, часові та граничні умови.

**Геометричні умови** визначають форму і розміри тіла, в якому проходить процес, що вивчається.

**Фізичні умови** задаються теплофізичними параметрами тіла ( $\lambda, C_v$ ) і розподілом внутрішніх джерел теплоти.

**Часові (початкові) умови** містять розподіл температури в тілі в початковий момент часу.

Граничні умови визначають особливості проходження процесу на поверхні тіла. Вони можуть бути задані декількома способами.

Граничні умови I роду. В цьому випадку задається розподіл температури на поверхні тіла для кожного проміжку часу:

$$t = f(x, y, z, \tau),$$

де  $t$  – температура поверхні тіла;

$x, y, z$  – координати поверхні тіла.

В окремому випадку, коли температура на поверхні тіла не змінюється в часі,  $t = f(x, y, z)$ , і якщо вона постійна на поверхні, то  $t = \text{const}$ .

### 1.1 Нагрівання тіл при $t_{\text{нов}} = \text{const}$

Температурні графіки процесу нагрівання при строгій реалізації граничної умови  $t_{\text{нов}} = \text{const}$  наведені на рис.1 суцільними лініями: в момент  $\tau = 0$  температура поверх-

ні тіла стрибком підвищується від початкового значення  $t^{поч}$  до заданого  $t_{нов}$  і далі підтримується незмінною аж до досягнення заданого значення перепаду температур (абсолютного  $\Delta t^{кін} = t_{нов} - t_{ц}^{кін}$  або відносного  $\theta^{кін} = \frac{t_{нов} - t_{ц}^{кін}}{t_{нов} - t_{ц}^{поч}}$ ).

Індекси тут означають: пов - поверхні; поч - початок; кін - кінець нагрівання, ц - центр тіла. Цьому варіанту організації нагрівання, що характеризується умовою  $Bi \rightarrow \infty$ , практично адекватні (за тривалістю нагрівання) реальні процеси з  $Bi \geq 100$ .

Температурні графіки реального процесу на рис. 1 зображені пунктирними лініями. Цей процес можна розглядати в інженерній практиці як такий, що відповідає граничним умовам I роду.

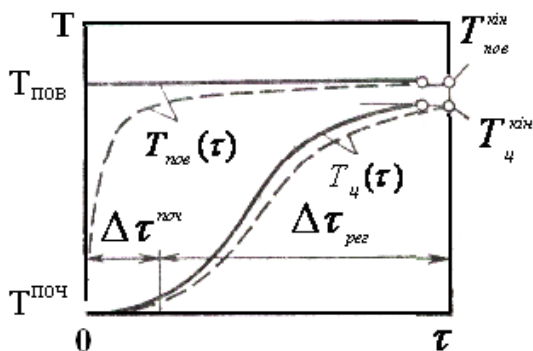


Рисунок 1 – Температурні графіки ідеального і наближеного до нього реального процесів нагрівання при граничних умовах  $T_{нов} = const$

При  $Bi \rightarrow \infty$  температурне поле описується нескінченним рядом. Після завершення початкового періоду, тривалість якого відповідає числу Фур'є  $F_0^{поч} = a\Delta\tau^{поч} / S^2$ , температурне поле з похибкою не більше 1% описується першим членом ряду



$$\frac{t_{нов} - t(x, \tau)}{t_{нов} - t_{\psi}^{noch}} = \frac{4}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x}{S}\right) \exp\left(-\frac{a^2}{4} F_0\right),$$

а відносний перепад температур  $\theta$  за товщиною тіла при  $F_0 \geq F_0^{noch}$  - виразом

$$\theta = \frac{t_{нов} - t_{\psi}(\tau)}{t_{нов} - t_{\psi}^{noch}} = \frac{4}{\pi} a \cdot \exp(-\epsilon F_0), \quad (1)$$

де коефіцієнти  $a$  і  $\epsilon$  мають такі значення:

для пластини ( $F_0^{noch} \approx 0,3$ ) відповідно 1,27 і 2,47;

для циліндра ( $F_0^{noch} \approx 0,25$ ) – 1,61 і 5,78;

для кулі – 2 і 9,87.

Задаючись величиною  $\theta^{нов}$  за (1), можна знайти тривалість  $\tau^{кін}$  вирівнювання температур за товщиною тіла. Практично повне вирівнювання можна знайти, наприклад, взявши  $\theta^{нов} = 0,01$ . Цьому відповідає приблизне значення величини  $F_0^{кін} = a(\Delta\tau^{noch} + \Delta\tau_{pn}) / S^2$ , що дорівнює 1,96; 0,88 і 0,54 для пластини, циліндра і кулі. При одному й тому самому значенні характерного розміру значення величини  $\tau^{кін}$  для тіл різної форми співвідносяться таким чином:

$$\tau_{пластина}^{кін} : \tau_{циліндр}^{кін} : \tau_{кулі}^{кін} = 1 : 0,45 : 0,28.$$

Суттєве значення тривалості нагрівання досягається шляхом реалізації рівномірного поля теплових потоків уздовж усієї поверхні тіла (реалізація всебічного рівномірного нагрівання, що зменшує значення характерного розміру тіла, яке нагрівається).

## 1.2 Вирівнювання температур у тілі при

$t_{нов} = const$  після його форсованого нагрівання

Розглянемо процес двоступеневого нагрівання, в якому на першому етапі організовується форсоване підведення

тепла при  $q_{нов} = const$  (період тривалістю  $\Delta\tau_1$ ), а на другому - вирівнювання температур у тілі при  $t_{нов} = t_{нов}^{кін} = const$  (період тривалістю  $\Delta\tau_2$ ). Температурні графіки подані на рис.2. У момент  $\tau = \Delta\tau_1$  температура на осі тіла відрізняється від початкової і дорівнює  $t_y(\Delta\tau_1)$ .

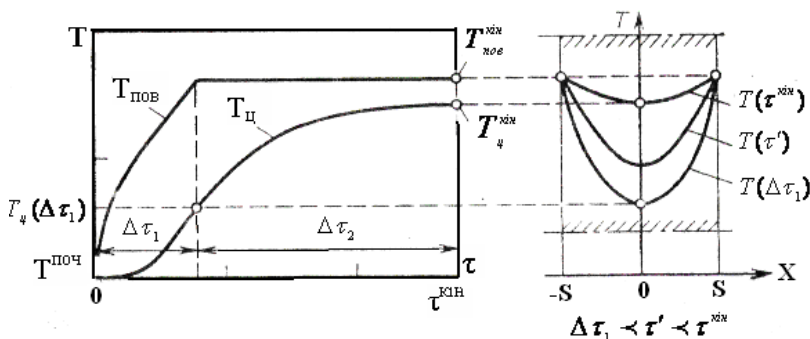


Рисунок 2 - Температурні графіки форсованого нагрівання з подальшим вирівнюванням температур при  $T_{нов} = const$

Якщо  $a\Delta\tau/S^2 \geq F_0^{noch}$ , то  $t_y(\Delta\tau_1)$  знаходять за відомими формулами для граничних умов II роду. Для пластини тривалість вирівнювання температури  $t_e = \Delta\tau_2$  може бути знайдена при  $F_0 \geq F_0^{noch}$  за відомим розв'язанням:  $\theta = \frac{t_{нов} - t_y(\tau)}{t_{нов} - t_y(\tau_1)} = 1,03 \exp(-2,47F_0)$ .

Час практично повного вирівнювання ( $\theta^{кін} = 0,01$ ) для пластини знаходять із  $F_0 = a\tau_e/S^2 = 1,5 - 1,6$ . Форсування нагрівання на початковій стадії дозволяє зменшити його тривалість.

### 1.3 Нагрівання тіл при зміні $t_{нов}$ зі сталою швидкістю

У початковий (нульовий) момент часу тіло є ізотермічним і його температура дорівнює  $t^{нов}$ . У подальші моменти часу температура поверхні тіла починає змінюватися зі сталою швидкістю  $V_{нов}$ . Цьому відповідають такі умови:

$$\tau = 0; t(x) = t^{нов}; \quad \tau > 0; \quad t_{нов}(\tau) = t^{нов} + V_{нов} \cdot \tau,$$

що ілюструються рис. 3.

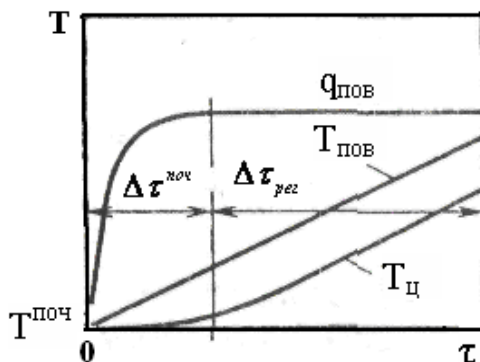


Рисунок 3 – Характеристики процесу нагрівання при  $\theta_{нов} = const$

Температурне поле при симетричному двосторонньому нагріванні пластини товщиною  $2S$  описується рівнянням (без малозначущої суми ряду при  $(F_0 \geq F_0^{нов})$ ):

$$\frac{t(x, \tau) - t^{нов}}{V_{нов} \cdot S^2 / a} = F_0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{S} \right)^2.$$

З цього рівняння знаходять:

$$\frac{t_{(x)} - t_u}{t_{нов} - t_u} = \left(\frac{x}{S}\right)^2; \Delta t = t_{нов} - t_u = \frac{1}{2} V_{нов} \frac{S^2}{a},$$

$$q_{нов} = \lambda \frac{dt}{dx} \Big|_{x=\pm S} = 2\lambda \frac{\Delta t}{S}.$$

Таким чином, у будь-який момент регулярного періоду температурне поле в пластині описується квадратичною параболою, температурний перепад за товщиною пластини і щільність теплового потоку на її поверхні сталі.

Простота розрахункових рівнянь для випадку, що розглядається, дозволяє досить ефективно розв'язувати складні задачі на основі використання властивості адитивності інтегралів диференціального рівняння Фур'є. Розглянемо це на прикладі термообробки металу.

Припустимо, що термообробка (відпалювання) здійснюється у вигляді тріступеневого процесу, заданого графіком  $t_{нов}(\tau)$  (рис. 4): підвищення  $t_{нов}$  зі швидкістю  $b_1$ , витримка ( $b_2 = 0$ ) і зниження температури поверхні до початкового значення зі швидкістю  $b_3$ .

Тривалість ступенів процесу позначена відповідно через  $\Delta\tau_1, \Delta\tau_2, \Delta\tau_3$ .

Цей процес можна подати як результат поєднання трьох теплових режимів (рис.4 б).

Перший тепловий режим - нагрівання з  $V_{нов} = b_1$ , здійснюється з початком першого ступеня, при цьому до тіла підводиться тепловий потік щільністю  $q_{пов1}$  (рис.4 в).

Другий тепловий режим - охолодження поверхні тіла зі сталою швидкістю  $V_{пов2} = -b_1$  і щільністю теплового потоку  $q_{пов2}$ . Цей режим реалізується з початком другого ступеня нагрівання, тобто з моменту  $\tau_1 = \Delta\tau_1$ . Його параметри вибрані такими, щоб сумарний результат впливу на тіло першого і другого теплових режимів забезпечував заданий характер другого етапу процесу: витримку при

$t_{нов} = const$ . При досягненні регулярного режиму щільності теплового потоку  $q_{пов2}$  дорівнює  $q_{пов1}$  і має протилежний знак.

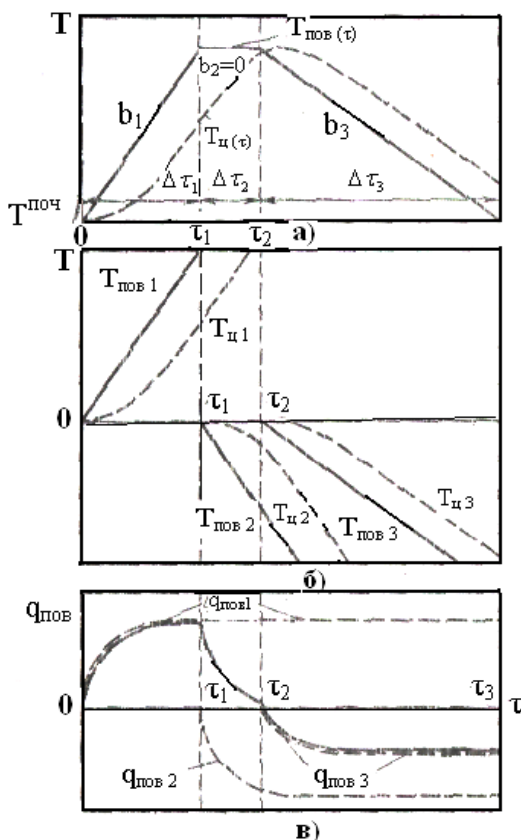


Рисунок 4 – До розрахунку характеристик процесу нагрівання на основі властивостей адитивності інтегралів Фур'є при  $\theta_{нов} = const$

Третій тепловий режим, який починається в момент  $\tau_2 = \Delta \tau_1 + \Delta \tau_2$  - охолодження поверхні тіла зі сталою швидкістю  $V_{пов3} = -b_3$ . У сумі всі три режими на третьому

ступені процесу дають задану вихідним графіком швидкість зниження температури поверхні. Складаючи ординати температурних і теплових графіків трьох режимів, можна встановити зміну в часі температури осі тіла (рис.4 а, графік  $t_y(\tau)$ ), щільності теплового потоку на його поверхні (рис.4 в, графік  $t_y(\tau)$ ) і на цій основі знайти умови реалізації заданого процесу.

Варіант організації нагрівання, який розглядається з  $V_{нов} = const$  цінний для інженерної практики ще й тим, що за його допомогою можна розрахувати характеристики процесу зі складними граничними умовами I роду.

## 2 Приклад розрахунку нагрівання при граничних умовах I роду

Сталева плита товщиною  $2S = 0,15$  м нагріта в печі з перепадом температур по перерізу  $t_{нов} - t_y = 200^\circ\text{C}$ . Температура поверхні плити  $t_{нов} = 900^\circ\text{C}$ . Плита повинна бути видана з печі при тій самій температурі поверхні, але перепад температури по її перерізу повинен бути зменшений до  $25^\circ\text{C}$ . Коефіцієнт температуропровідності сталі  $a = 0,025$  м<sup>2</sup>/год. Необхідно визначити час витримки плити в печі.

Розрахункове рівняння для такого випадку організації нагрівання має вигляд

$$\theta = \frac{t_{нов} - t_y(\tau)}{t_{нов} - t_y(\tau_1)} = 1,03 \exp(-2,47 F_0). \quad (2)$$

Причому  $t_{нов} = 900^\circ\text{C}$ ,  $t_y(\tau) = 875^\circ\text{C}$  - кінцева температура центра плити,  $t_y(\tau_1) = 700^\circ\text{C}$  - початкова температура центра плити.

$$F_0 = \frac{a\tau}{S^2} - \text{число Фур'є.}$$

Тоді рівняння (2) переписеться таким чином:

$$\frac{900 - 875}{900 - 700} = 1,03 \exp(-2,47 \frac{a\tau}{S^2}) = 0,125.$$

Звідси знаходимо час витримки плити в печі

$$\tau = (\frac{S^2}{2,47}) \ln(\frac{1,03}{0,125}).$$

Підставляючи значення, знаходимо

$$\tau = (\frac{0,075^2}{2,47 \cdot 0,025}) \ln 8,24 = 0,19 \text{ год.}$$

Таким чином, для вирівнювання перепаду температури по перерізу плити до 25°C необхідна витримка її в печі протягом 11 хвилин.

### 3 Завдання для виконання розрахункової самостійної роботи наведені в табл. 2.1

Таблиця 2.1

Номер варіан- та	Товщина пласти- ни, м	Перепад температур по перерізу, °C	Температура поверхні пластини, °C	Коефіцієнт температуро- провідності сталі, м²/год
1	2	3	4	5
1	0,10	100	800	0,022
2	0,12	120	850	0,022
3	0,14	140	850	0,023
4	0,16	160	870	0,024
5	0,18	180	890	0,025
6	0,20	200	910	0,026
7	0,25	200	930	0,027
8	0,27	250	950	0,028
9	0,29	260	970	0,029

Продовження таблиці 2.1

1	2	3	4	5
10	0,30	270	980	0,030
11	0,31	250	960	0,035
12	0,28	260	940	0,034
13	0,26	240	920	0,033
14	0,24	220	900	0,032
15	0,22	200	890	0,031
16	0,20	170	870	0,030
17	0,18	150	850	0,029
18	0,16	130	840	0,027
19	0,14	110	820	0,026
20	0,12	100	810	0,025
21	0,10	90	790	0,024
22	0,19	180	840	0,023
23	0,17	160	820	0,021
24	0,15	140	810	0,020
25	0,13	120	800	0,020
26	0,11	110	790	0,022
27	0,29	300	950	0,025
28	0,27	280	930	0,024
29	0,25	270	920	0,023
30	0,23	250	900	0,021



## Практична робота 2

«Особливості розрахунку нагрівання та охолодження термомасивних тіл при граничних умовах II роду»

### 1 Теоретичні відомості

При граничних умовах II роду ( $q_{\text{пов}} = \text{const}$ ) диференціального рівняння Фур'є – Кірхгофа задається розподіл щільності теплового потоку на поверхні тіла як функція координат та часу (нестационарна теплопровідність):

$$q_{\text{пов}} = f(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in F, \quad (1)$$

де  $F$  – поверхня нагрівання.

Використовуючи закон Фур'є, можемо (1) записати

$$-\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_{\text{пов}} = f(x, y, z, \tau), \quad x, y, z \in F, \quad (2)$$

де  $n$  – внутрішня нормаль до поверхні  $F$ .

У процесах стаціонарної теплопровідності функція  $f$  в умовах (1) і (2) не залежить від часу, і ці умови називають умовами Неймана.

### 1.1 Узагальнені змінні процеси нестационарної теплопровідності

Першою підзадачею, яку доводиться розв'язувати під час аналізу тієї чи іншої конкретної задачі теплопровідності, є встановлення масштабів, що визначають процес.

Найбільш наочно існування природних масштабів проходження процесу можна показати на прикладі геометричних розмірів тіла. Дійсно, розглядаючи процес нагрівання тіл однакової геометричної форми із одного й того самого матеріалу, що нагріваються за однакових граничних умов, можна стверджувати (не розв'язуючи задачі), що залежність температури тіла від значення визначаючої координати буде різною для тіл різних розмірів. Але цю залежність можна зробити універсальною, якщо використати відносні координати тіла, тобто поточну координату, ви-

ражену в частках від характерного розміру тіла. Головною перевагою такої зміни є те, що вона має порядок одиниці. Математично, наприклад для пластини, це виражається таким чином, що  $x/S$  змінюється від 0 до 1.

Менш наочне, але також природне, існування масштабу часу. Як впливає з рівняння теплопровідності, можна говорити про два типи зміни кількості теплоти. Якщо  $S$  – характерний розмір тіла, то, з одного боку, кількість тепла дорівнює  $c\rho S^3$  і визначає зміну температури  $S^3$  ( $m^3$ ) тіла за одиницю часу на  $\Delta t$ , а іншого – через цей об’єм унаслідок теплопровідності проходить тепловий потік  $\lambda S^2 \Delta t / S$ . Відношення  $c\rho S^3 \Delta t (\lambda S \Delta t) = c\rho S^2 / \lambda = S^2 / a$  можна трактувати як масштаб часу релаксації теплових збуджень і час проходження процесу виражати не в абстрактних секундах, а в частках від часу релаксації, що характеризує темп саме цього процесу. Тоді другою узагальнюючою змінною буде

безрозмірний час  $\tau / \tau_p = \tau / (S^2 / a) = \frac{\alpha \cdot \tau}{S^2}$ . Ця змінна назива-

ється числом Фур’є і позначається  $Fo$ . Тут  $a = \lambda / c\rho$  – коефіцієнт температуропровідності, а  $S$  – характерний розмір.

Якими б не були граничні умови при нагріванні твердого тіла, на шкалі температур завжди існують два опорних значення, між якими змінюється поточна температура будь-якої точки тіла: початкова температура  $t_{\text{поч}}$  і деяка характерна температура процесу  $t_*$ , що визначається типом граничних умов. По суті, справи процес нагрівання – це процес гасіння температурного «потенціалу»  $P_{\text{max}} = t_* - t^{\text{поч}}$  у часі. Величину  $P_{\text{max}}$  часто називають максимальним температурним перепадом. «Ступінь завершеності» процесу теплопровідності можна визначити як відношення поточного температурного перепаду  $P = t - t^{\text{поч}}$  до максимального, тобто

$$\theta = P / P_{\text{max}} = (t - t^{\text{поч}}) / (t_* - t^{\text{поч}}).$$

Неважно помітити, що так само, як і для  $X = x/S$ ,  $\theta$  зміню-

ється від 0 до 1.

Одновимірне рівняння теплопровідності при сталому коефіцієнті теплопровідності  $\lambda = \text{const}$  і встановленій залежності первинних змінних має вигляд

$$\partial t / \partial \tau = a \partial^2 t / \partial x^2 + q_v / (c\rho),$$

де  $a = \frac{\lambda}{c\rho}$  - коефіцієнт теплопроводності;

$q_v$  – об’ємна щільність теплового потоку.

Зважаючи, що

$$x = S \cdot X, \tau = Fo \cdot S^2 / \alpha \text{ і } t = t^{\text{поч}} + \theta (t - t^{\text{поч}}),$$

це рівняння набере вигляду

$$\frac{\partial \theta}{\partial Fo} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial X^2} + \frac{q_v S^2}{\lambda (t - t^{\text{поч}})}.$$

Безрозмірний комплекс  $(q_v S^2 / \lambda) / (t - t^{\text{поч}})$  називають числом Померанцева і позначають  $Ro$ . Фізична суть  $Ro$  стає зрозумілою, якщо помітити, що  $q_v S^2 / \lambda$  має розмірність температури. Тоді число Померанцева можна трактувати як відношення приросту температури тіла до максимального температурного перепаду. Альтернативне формулювання визначає  $Ro$  як відношення кількості теплоти  $q_v S^3$ , що виділилася (поглинулася) всередині тіла за одиницю часу, до кількості теплоти  $\lambda(t^* - t^{\text{поч}}) \cdot S^2 / S$ , що пройшла крізь тіло внаслідок теплопровідності.

Граничні умови I роду [1] не дають додаткової інформації про масштаби процесу теплопровідності і про узагальнені параметри. Тут просто визначається величина характерної температури процесу  $t - t^{\text{поч}}$ . На противагу цьому в рівняннях, які описують граничні умови I і II роду, містяться додаткові величини, що повинно привести до появи нових безрозмірних комплексів (чисел). Підставивши у формулу граничних умов II роду для пластини –  $\lambda (\partial t / \partial x)_{x=S} = q_{\text{нов}}$ , замість первинних змінних їх вирази через масштаби –  $[\lambda (t - t^{\text{нов}}) / S] \cdot (\partial \theta / \partial X)_{X=1} = q_{\text{нов}}$ , або

$$-(\partial \Theta / \partial X)_{X=1} = Ki,$$

де  $Ki = (q_{нов} \cdot S / \lambda) / (t - t^{пов})$  – число Кирпичова.

Цей комплекс можна трактувати як безрозмірну щільність теплового потоку (безрозмірний градієнт температури) на поверхні тіла.

Таким чином, на відміну від випадку граничних умов I роду, коли узагальнююче розв'язання рівняння теплопровідності має вигляд  $\theta = f(X, Fo, Bi)$ , при граничних умовах II роду серед визначальних параметрів безрозмірної температури  $\theta$  з'являється ще й число Кирпичова, тобто  $\theta = f(X, Fo, Ro, Ki)$ .

У такій постановці задачі визначеною величиною залишається характерна температура процесу  $t^*$ . Тут вона позбавлена конкретного фізичного змісту і в принципі могла бути будь-якою. На практиці, щоб надати  $t^*$  наочності, вводять так звану температуру печі, яка визначається співвідношенням  $t_{печ} = t^{поч} + q_{пов} \cdot S / \lambda$ .

## 1.2 Нагрівання тіл при граничних умовах ( $q_{нов} = const$ )

Якщо до тіла з початковою температурою  $t^{поч}$  підводиться тепловий потік зі сталою щільністю  $q_{пов}$ , то в тілі формується температурне поле. З достатньо високою точністю подібні умови теплообміну реалізуються при нагріванні тіл високотемпературними джерелами теплоти, коли теплообмін здійснюється випромінюванням за законом Стефана-Больцмана.

Наприклад, для пластини таке температурне поле записується у вигляді

$$\frac{t(x, \tau) - t^{поч}}{q_{нов} \cdot S / \lambda} = Fo + \frac{1}{2} \left( \frac{x}{S} \right)^2 - \frac{1}{6} + f(Fo, \frac{x}{S})$$

де  $f(F_0, x/S)$  - сума нескінченно спадаючого ряду, нехтовно мала при  $F_0 \geq F^{пон}$ .

Протягом регулярного періоду перепад температур за товщиною тіла постійний, тобто,  $\Delta t = t_{пов} - t_n = q_{пов} \cdot S / 2\lambda = \text{const}$ , а розподіл температури має параболічний характер

$$(t(x) - t_n) / (t_{нов} - t_n) = (x / S)^2.$$

Унаслідок сталості величин  $q_{нов}$  дотичні до температурних кривих на межах тіла в різні моменти часу паралельні між собою. Значення температури поверхні пластинки в момент завершення початкового періоду можна оцінити за формулою

$$t_{нов}(\tau = \Delta \tau^{поч}) \approx t^{поч} + 1,27 \Delta t.$$

Співвідношення, зведені для розглянутого варіанта організації нагрівання, можуть бути використані в приблизних розрахунках процесів зі складною часовою залежністю  $q_{нов}$ , якщо використати для  $q_{нов}(\tau)$  кускову апроксимацію, припустивши, що  $q_{нов} = \text{const}$  для кожного відрізка  $\Delta \tau_i$ .

### 1.3 Вирівнювання температур у тілі при $q_{нов} = 0$

Процес вирівнювання температури в нагрітому тілі можна організовувати різними способами. Перший варіант цього процесу при  $t_{нов} = \text{const}$  розглянуто в практичній роботі 1.

Розглянемо другий варіант організації процесу вирівнювання. Тіло (наприклад, пластина товщиною  $2S$ ) нагрівається до стану, при якому ентальпія тіла дорівнює кінцевому значенню, що визначається заданими величинами  $t_{нов}^{кін}, t_n^{кін}$ , потім витримка в адіабатичних умовах (при

$q_{нов} = 0$ ). Очевидно, середня температура тіла в ході процесу вирівнювання незмінна і дорівнює кінцевому заданому значенню  $t^{кін}$ .

Для температурних графіків цього варіанта характерні перегрів поверхні тіла на завершальній стадії підвищення температури і на стадії вирівнювання, аж до його закінчення, а також менша загальна тривалість процесу нагрівання з першим варіантом.

$$\frac{\partial t}{\partial x} \Big|_{x=\pm S} = 0,$$

У процесі вирівнювання температурні криві в тілі мають дві особливості. Перша - дотичні до графіків розподілу температури в точках на поверхні тіла розміщуються під кутом до горизонталі, який дорівнює 0;

друга - наявність на температурній кривій точок, що є загальними для всіх температурних кривих на етапі вирівнювання температур, які відповідають рівню  $t_{кін}$ , і обмежених шаром  $2S'$ .

У процесі вирівнювання відбувається теплообмін між масою тіла за межами шару  $2S'$  і перегрітою стосовно середньої кінцевої температури  $t^{кін}$ , а також масою тіла в межах шару  $2S'$ , що має в кожній своїй точці температуру, меншу, ніж  $t^{кін}$ .

Якщо розподіл температури в тілі в момент  $\tau^*$  (момент завершення підведення тіла тепла) описується квадратичною параболою, то  $S' = S\sqrt{3} = 0,577S$ .

Для оцінювання тривалості стадії вирівнювання процес вирівнювання  $\tau_b''$  температури в тілі товщиною  $2S$  при  $q_{нов}=0$  можна розглядати як процес вирівнювання температури в тілі товщиною  $2S'$  при  $t^{нов} = t^{кін} = const$ .

При  $t_{нов} = t^{кін} Fo_{\epsilon} = a\tau'' / (S')^2 = 1,5 - 1,6$ . Оскільки  $S' = S / \sqrt{3}$ ,

$$\text{то } Fo_b = a \cdot \tau_b'' / S^2 = 0,50 - 0,53$$

Тривалість вирівнювання температури при  $q_{\text{пов}}=0$  і  $t_{\text{пов}} = \text{const.}$  для тіл різної форми – пластини, циліндра і кулі – приблизно співвідносяться як 1/3, 1/2 і 1/1,66 відповідно.

Розглянутий варіант вирівнювання температур у нагрітому тілі доцільно використати (якщо технологічні умови допускають перегрів матеріалу) для скорочення загальної тривалості процесу нагрівання.

## **2 Приклад розрахунку теплових характеристик при нагріванні**

Сталева пластина товщиною  $2S = 0,2$  м нагрівається в камерній печі протягом 15 хвилин.

Потрібно визначити температуру поверхні і середньої площини пластини. Щільність теплового потоку в печі  $q_{\text{пов}} = 165$  кВт/м<sup>2</sup>. Середня температура печі  $t_{\text{печ}} = 1200^\circ\text{C}$ . Коефіцієнт теплопровідності сталі  $\lambda = 35$  Вт/(мК). Коефіцієнт температуропровідності сталі  $a = 0,03$  м<sup>2</sup>/год. Початкова температура пластини відповідає температурі термічного цеху і дорівнює  $20^\circ\text{C}$ .

Розв'язання задачі починаємо з визначення характеристик коефіцієнтів (чисел) процесу.

Число Фур'є знайдемо з формули

$$Fo = a \cdot \tau / S^2,$$

де  $a$  – температуропровідність сталі, м<sup>2</sup>/год;

$\tau$  – час нагрівання пластини, год;

$S$  – характерний розмір пластини, м.

Підставляючи значення, маємо

$$Fo = 0,03 \cdot 0,25 / (0,1)^2 = 0,75.$$

Число Кирпичова знаходимо за формулою

$$Ki = q_{\text{пов}} \cdot S / [\lambda(t_{\text{печ}} - t^{\text{поч}})],$$

де  $q_{\text{пов}}$  - щільність теплового потоку, Вт/м<sup>2</sup>;

$S$  – характерний розмір пластини, м;

$\lambda$  – коефіцієнт теплопровідності сталі, Вт/(м · К);

$t_{\text{печ}}$  – середня температура печі, °С;

$t^{\text{поч}}$  - початкова температура печі, °С.

Визначаючи значення, маємо

$$Ki = 165000 \cdot 0,1 / [35(1200-20)] = 0.3995 \approx 0.4.$$

При  $Fo \geq 0,1$  (в нашому випадку  $Fo = 0,75$ ) безрозмірну температуру поверхні пластини  $\theta$  знаходимо при  $X = 1$  за формулою

$$\theta_{\text{пов}} = Ki (Fo + 1/3),$$

або, підставляючи значення величин,

$$\theta_{\text{пов}} = 0,4(0,75 + 0,33) = 0,433.$$

Справжню температуру поверхні пластини знаходимо з формули

$$t_{\text{пов}} = t^{\text{поч}} + (t_{\text{печ}} - t^{\text{поч}}) \theta_{\text{пов}}$$

Після підстановки

$$t_{\text{пов}} = 20 + (1200 - 20) \cdot 0,433 = 531^{\circ}\text{C}.$$

Безрозмірна температура середньої товщини пластини при  $X = 0$

$$\theta_{\text{сер.пл}} = Ki (Fo - 1/6),$$

підставляючи значення,

$$\theta_{\text{сер.пл}} = 0,4 (0,75 - 0,167) = 0,233.$$

Справжня температура середньої площини пластин (центра)

$$t_{\text{сер.пл}} = t^{\text{поч}} + (t_{\text{печ}} - t^{\text{поч}}) \theta_{\text{сер.пл}}.$$

Підставляючи значення з умови прикладу, маємо

$$t_{\text{сер.пл}} = 20 + (1200 - 20) \cdot 0,233 = 295^{\circ}\text{C}$$

Різниця температур поверхні і центра пластини

$$\Delta t = t_{\text{пов}} - t_{\text{сер.пл}}, \text{ або } \Delta t = 531 - 295 = 236^{\circ}\text{C}.$$



### 3 Завдання для виконання самостійної розрахункової роботи наведені у табл. 3.1

Таблиця 1

Номер варіан- ту	Товщина пласти- ни, м	Щільність теплового потoku, Вт/м <sup>2</sup>	Серед- ня темпе- ратура печі, °С	Коефіцієнт теплопро- відності, Вт/(мК)	Коефіцієнт температу- ропровідно- сті, м <sup>2</sup> /год
1	2	3	4	5	6
1	0,20	150	1200	35	0,025
2	0,21	155	1200	35	0,026
3	0,22	165	1200	35	0,027
4	0,23	170	1100	35	0,028
5	0,24	175	1100	35	0,029
6	0,25	180	1050	38	0,030
7	0,26	185	1050	38	0,030
8	0,27	190	1050	38	0,029
9	0,28	195	1050	38	0,029
10	0,29	200	1200	39	0,031
11	0,30	205	1200	39	0,032
12	0,20	180	1000	37	0,026
13	0,25	200	1200	39	0,029
14	0,30	210	1050	36	0,029
15	0,21	160	1050	34	0,029
16	0,22	170	1050	32	0,031
17	0,23	180	1100	33	0,030
18	0,24	190	1150	33	0,030
19	0,25	190	1200	34	0,033
20	0,26	195	1200	34	0,032
21	0,27	200	1150	34	0,026
22	0,28	200	1000	30	0,027
23	0,29	200	1000	30	0,028
24	0,30	205	1000	30	0,029
25	0,28	205	1100	31	0,030
26	0,26	200	1200	32	0,033
27	0,24	195	1150	31	0,029
28	0,22	190	1100	31	0,029
29	0,20	185	980	30	0,029
30	0,18	180	950	29	0,028

### **Практична робота 3**

«Вивчення особливостей нагрівання садки в печах типу СНЗ» і завдання СРС для визначення технологічних параметрів термообробки

#### **1 Загальні відомості**

Електропечі застосовують для відпалу, нормалізації й загартування сталевих деталей. Перевагами цих печей є можливість застосування контрольованої атмосфери й механізація завантаження та розвантаження. У нижній частині кожуха печі кріпиться трубопровід, що складається із двох ліній: по одній подається газ, по іншій - повітря. Газ і повітря, змішуючись у пальнику й згоряючи в камері згоряння, створюють полум'яну газову завісу, що перекриває проріз при відчинених дверцятах. Цей типаж складається із трьох груп камерних печей з металевими нагрівачами, які підбирають залежно від температур нагрівання (700, 1000 і 1250°C).

Печі з робочою температурою до 700°C призначені для відпуску сталевих деталей, а також для обробки деталей з кольорових металів і сплавів. Печі з температурою до 1000°C служать для відпалу, нормалізації й загартування сталевих деталей, а печі з робочою температурою до 1250°C призначаються для термічної обробки деталей та інструментів зі швидкорізальних та інших високолегованих сталей. Ці печі мають індекс СНЗ.

#### **2 Визначення технологічних параметрів термообробки**

##### **2.1 Нагрівання металу в печах**

Нагрівання металу є однією з головних операцій термічної обробки, яка характеризується температурою й швидкістю нагрівання. **Під температурою нагрівання**

**мають на увазі кінцеву температуру металу, при якій він видається з печі.** При цьому метал повинен бути нагрітий однаково по площині, периметру й довжині (визначають температуру в °С по поверхні металу, що нагрівається). Швидкість нагрівання в град/годину означає зміну температури металу за одиницю часу.

На вирішення питання про швидкість нагрівання впливає велика кількість факторів. Особливо важливими є:

а) **теплопровідність**, яка різна для сталі різного складу; чим більше вуглецю й легуючих елементів у сталі, тим нижча її теплопровідність, і нагрівати таку сталь потрібно з меншою швидкістю;

б) **перетин виробу**; чим він крупніший, тим повільніше повинно бути нагрівання, тому що внаслідок різниці температур між зовнішньою й внутрішньою частинами виробу виникають внутрішні напруги, які можуть призвести при швидкому нагріванні до появи тріщин;

в) **форма виробу**; чим вона складніша й чим більше в ній різких переходів від товстих до тонких частин, тим більше може бути його жолоблення й навіть утворення тріщин.

Напруги в сталі з'являються в інтервалі температур 0-500°С. Вище цієї межі сталь набуває достатньої пластичності, і напруги небезпеки не становлять. Потрібно також урахувати і фазові перетворення. Небезпечним моментом для появи тріщин є великий перепад температур на початку нагрівання між зовнішньою частиною й серцевиною виробу, а також коли температура зовнішньої поверхні досягає критичної точки. Під час розроблення режиму нагрівання потрібно прагнути до мінімальної тривалості нагрівання й до забезпечення необхідної якості. Неправильне нагрівання може викликати тріщини (внаслідок різких змін температури або недостатньої температури нагрівання, або нерівномірного нагрівання), перегрів, перепад, велике окиснювання, знеуглецювання й

іноді науглецьовування.

Для розрахунків часу нагрівання й охолодження виробів при термічній обробці використовують такі властивості: теплопровідність, теплоємність, температуропровідність і коефіцієнт тепловіддачі.

Теплопровідність залежить від складу сталі й температури. Зі збільшенням вмісту вуглецю й легуючих елементів теплопровідність зменшується. Теплопровідність також знижується зі зростанням температури (табл. 1).

Таблиця 1 - Теплопровідність деяких металів і сплавів

Метал або сплав	Коефіцієнт теплопровідності $\lambda$ , кДж/м·год·град, при температурі, °С			
	20	400	600	1000
Залізо	276	193	151	101
Сталь: 20	260	167	134	101
50	235	163	126	92
B10	168	126	113	84
40X,40XC,	176	134	117	88
ШХ15,9XC	155	126	109	84
30XГC	142	117	105	84
P18	88	101	96	101
3X2Y8	84	84	84	92
Г13	42	59	67	84
Мідь	1411	1319	1285	-
Латунь Л90	368	599	703	-
Бронза Бр.ОС8012	172	226	260	-
Алюміній	729	1164	1524	-
Дюралюміній	574	942	1256	-
Сірий чавун	176	151	142	-

Теплоємність сталі залежить від вмісту вуглецю й температури. Зі збільшенням температури теплоємність зростає. Як правило, для розрахунків користуються середньою теплоємністю за цикл нагрівання. Величини сере-

дної теплоємності металів подані в табл. 2. Для теплових розрахунків часто користуються об'ємною теплоємністю, або теплоємністю одиниці об'єму  $C_v = c_v \gamma$  кДж/м<sup>3</sup>·град, де  $\gamma$  – питома вага сплаву, кг/м<sup>3</sup>.

Таблиця 2 - Середня теплоємність деяких металів і сплавів

Метал або сплав	Середня теплоємність $C_{cp}$ , кДж/кг·град, в інтервалі температур від 0° до			
	20	400	800	1200
Залізо	0,452	0,519	0,649	0,645
Вуглецеві й маловуглецеві сталі	0,461	0,536	0,687	0,678
Швидкорізальна сталь	0,398	0,448	0,532	0,565
Мідь	0,381	0,419	0,448	-
Алюміній	0,921	0,955	-	-
Сірий чавун	0,541	-	-	-

**Температуропровідність** - швидкість зміни температури виробу - це відношення коефіцієнта теплопровідності до об'ємної теплоємності:

$$\alpha = \frac{\lambda}{c\gamma} = \frac{\lambda}{c_v}.$$

Перехід тепла можливий тільки від тіл з більшою температурою до тіл з меншою температурою; процес передачі тепла триває до вирівнювання температури. Розрізняють три форми передачі тепла: теплопровідністю, конвекцією, випромінюванням. Передача тепла виробам, що нагріваються, в печах при високій температурі відбувається головним чином випромінюванням; передачею конвекцією при високих температурах можна знехтувати.

Випромінювання стін, склепіння, поду печі й газів, що мають різну температуру, можна замінити одним джерелом, що

має середню температуру, яку називають температурою печі  $t_{\text{печі}}$  в °С.

При термічній обробці нагрівання або охолодження виробів може відбуватися **або при сталій температурі, або при заданій швидкості нагрівання чи охолодження.**

При розрахунку часу нагрівання різних тіл зручно їх розділити на «тонкі» й «масивні». Всі метали мають високу теплопровідність. До тонких виробів віднесені ті, які мають при нагріванні або охолодженні завдяки теплопровідності незначний перепад температур за товщиною виробу.

Для розрахунків цей перепад температур внаслідок незначності може не братися до уваги. Вироби, у яких при нагріванні або охолодженні не можна знехтувати різницею температур поверхні й центра, відносять до масивних тіл. За такого розбивання всіх виробів, що нагрівають, будуть мати значення їхні розміри, теплопровідність й інтенсивність нагрівання або охолодження. Виріб відносно великого розміру, але який нагрівають дуже повільно, при нагріванні може вважатися тонким тілом, тому що перепад температур буде незначним. І навпаки, чим інтенсивніше буде нагрівання або охолодження, тим менші за товщиною вироби повинні бути віднесені до масивних тіл.

При передачі тепла від зовнішнього середовища на межі середовище-метал-середовище виріб буде відчувати зовнішній опір, який обернено пропорційний коефіцієнту тепловіддачі від навколишнього середовища на поверхню металу й дорівнює  $1/\alpha$ . Передача тепла усередині виробу зумовлюватиме внутрішній опір, обернено пропорційний коефіцієнту теплопровідності й прямо пропорційний товщині виробу  $S/\lambda$ .

**Відношення внутрішнього теплового опору до зовнішнього теплового опору становить безрозмірну величину й називається критерієм Біо, який позначають**

$$Bi = \frac{\frac{S}{\lambda}}{\frac{1}{\alpha}} = \frac{S\alpha}{\lambda},$$

де  $S/\lambda$  - внутрішній тепловий опір пластини товщиною  $2S$  або циліндра радіусом  $S$ ;  $1/\alpha$  - зовнішній тепловий опір.

Критерієм Біо користуються для встановлення меж тонких і масивних тіл.

Якщо товщина виробу невелика, а коефіцієнт теплопровідності високий, то величина  $Bi$  буде дуже малою. У цьому разі нагрівання буде залежати від зовнішньої тепловіддачі.

Якщо товщина тіла значна, тобто збільшується внутрішній опір і температурний перепад по перетину зростає, стає більшим і значення  $Bi$ ; такі тіла при нагріванні й охолодженні вважаються масивними. За основну межу між тонкими й масивними виробами беруть такий перетин, для якого критерій Біо дорівнює 0,25; при цьому значенні  $Bi$  максимальний перепад температури по перетину виробу становить 10% від початкової різниці температур виробу й зовнішнього середовища, тобто  $\Delta t = 0,1 (t_{\text{сп}} - t_0)$ . Таким чином, якщо критерій  $Bi \leq 0,25$ , розрахунки виконуються за формулами для тонких тіл, якщо  $Bi > 0,25$ , - за формулами для масивних тіл. Виходячи зі значення  $Bi = 0,25$ , можна визначити граничні товщини тонких тіл при різних термічних операціях (табл. 3).

## **2.2 Визначення часу нагрівання й охолодження виробів при термообробці**

При конвективному теплообміні час нагрівання виробу до необхідної температури визначається за формулою

$$\tau = \frac{G \cdot c}{\alpha \cdot F} \cdot 2,3 \lg \left( \frac{t_n - t_1}{t_n - t_2} \right), \quad \text{година},$$

де  $G$  - вага виробу;  $c$  - середня питома теплоємність;  
 $\alpha$  - коефіцієнт тепловіддачі;  $F$  - активна поверхня виробу;

$t_n$  - температура в печі;  $t_1$  - початкова температура металу;  
 $t_2$  - кінцева температура металу.

Під активною поверхнею  $F$  розуміють поверхню тіла, що сприймає тепло від зовнішнього середовища. При складному профілі виробу, що нагрівається, активна поверхня береться по периметру, що обгинає виріб.

Для розрахунку часу нагрівання й охолодження масивних тіл із критерієм  $Bi < 4,0$  можна користуватися формулою для тонких тіл із введенням поправкового коефіцієнта  $m$ , що залежить від масивності тіл та їхньої форми.

Таблиця 3 - Граничні товщини тонких тіл (при  $Bi = 0,25$ )

Операція термічної обробки	Середовище нагрівання або охолодження	Температура середовища, °C	Середній коефіцієнт тепловіддачі, $\text{кдж}/\text{м}^2 \cdot \text{год} \cdot \text{град}$	Гранична товщина тіла, що розраховується як тонке, мм
Нагрівання для загартування	Повітря або пічні газы	750-950	544	100
Те саме	Розплавлений хлористий барій	1200-1300	4187	12
Нагрівання для високого відпуску	Повітря або пічні газы	550-700	335	160
Нагрівання для низького відпуску	Те саме	100-300	126	400
Те саме	Масло	150-250	1256	40
Те саме	Селітра	250-350	1256	40
Охолодження	Вода	20-30	5000-2000	2-6
	Масло	4187-1256	20934-8374	10-40
	Повітря	209-84		200-500
Примітка. Середнє значення коефіцієнта теплопровідності сталі $\lambda$ – 105 $\text{кдж}/\text{м} \cdot \text{год} \cdot \text{град}$ , або 1,05 $\text{кДж}/\text{мм} \cdot \text{год} \cdot \text{град}$				



Формула має такий вигляд:

$$\tau = \frac{G \cdot c \cdot m}{\alpha \cdot F} \cdot 2,3 \lg \cdot \left( \frac{t_n - t_1}{t_n - t_2} \right), \quad \text{година.}$$

Поправкові коефіцієнти  $m$  дорівнюють:

- для пластини -  $1+1/3 \text{ Ві}$ ;
- для циліндра -  $1+1/4 \text{ Ві}$ ;
- для кулі -  $1+1/5 \text{ Ві}$ .

При розрахунках часу нагрівання як тонких, так і масивних тіл потрібно брати до уваги спосіб їхнього укладання в печі й відстані між ними. На рис. 1 наведені коефіцієнти  $K_{\text{розм}}$  часу нагрівання виробів круглого й квадратного перетинів залежно від розміщення в печі.






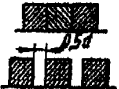





Розміщення виробів	Коефіцієнт часу нагрівання $K_{\text{роз}}$	Розміщення виробів	Коефіцієнт часу нагрівання $K_{\text{роз}}$
	1		1
	1		1,4
	2		4
	1,4		2,2
	1,3		2,0
			1,8

Рисунок 1 - Коефіцієнти часу нагрівання залежно від розміщення виробів у печі;  $d$  - діаметр або сторона квадрата

### 2.3 Розрахунок часу нагрівання й охолодження в середовищі зі сталою температурою за допоміжними графіками

Розрахунок часу нагрівання й охолодження як тонких, так і масивних тіл зручно вести за спеціальними графіками. Вони складені для розрахунку часу нагрівання або охолодження поверхні й середньої площини пластини (рис. 3), а також для поверхні й осі циліндра (рис. 4). За цими графіками можна також шляхом перемножування температурних критеріїв визначити температуру різних точок, поверхні й центра дисків, призм для будь-якого моменту часу.

По осі абсцис відкладене значення незалежної перемінної - відносного часу (критерій Фур'є) у логарифмічному масштабі, а по осі ординат - температурний критерій (відносна температура), що є відношенням поточної різниці температури даної точки й навколишнього середовища до цієї самої різниці до початку нагрівання або охолодження:

$$\theta = \frac{t_c - t_{нов}}{t_c - t_{поч}}.$$

Прямі лінії на діаграмі, що міняють свій напрямок, відносять до різних значень критерію  $Bi$ ; виробам більшого перетину відповідає більше значення критерію  $Bi$ , а виробам меншого перетину - менше. Проміжні значення критерію  $Bi$  визначаються інтерполяцією. За значенням критеріїв  $Bi$  й  $\theta$  на графіку визначається критерій  $Fo$ , звідки визначається час нагрівання. Далі за критеріями  $Bi$  й  $Fo$  за графіком для нагрівання середньої площини пластини або осі циліндра можна визначити температурний критерій і температуру середньої площини пластини або осі циліндра.

## 2.4 Розрахунок часу витримки для вирівнювання температури

Після досягнення заданої температури виробам необхідна витримка для вирівнювання температури. Залежність перепаду температур наприкінці нагрівання від перепаду на початку нагрівання виражається експонентними рівняннями.

Але розрахунок часу вирівнювання для тіл різної форми може бути зроблений і більш простим методом - шляхом перемноження коефіцієнтів  $K_F$  і  $K_T$ .

Коефіцієнт  $K_F$  залежить від форми тіла і становить значення  $\frac{\alpha \cdot \tau}{S^2}$  ( $S$  - половина мінімального розміру;  $\alpha$  - коефіцієнт температуропровідності;  $\tau$  - час), при якому перепад  $\Delta t = t_{\text{пов}} - t_{\text{центра}}$  зменшується до 1% свого первісного значення. Коефіцієнт  $K_T$  залежить від відношення перепаду температур наприкінці нагрівання до його первісного значення  $\Delta t_{\text{поч.}}$ . Коефіцієнти  $K_F$  і  $K_T$  наведені в табл. 5 і 6.

Перемножуючи коефіцієнти  $K_F$  й  $K_T$ , одержуємо значення критерію Фур'є:

$$K_F \cdot K_T = F_o = \frac{\alpha \cdot \tau}{S^2}.$$

Звідси час витримки

$$\tau = K_F \cdot K_T \cdot \frac{S^2}{\alpha}, \text{ год.}$$

У практичних розрахунках час витримки при нагріванні під загартування часто беруть таким, що дорівнює від 1/4 до 1/5 від часу нагрівання.

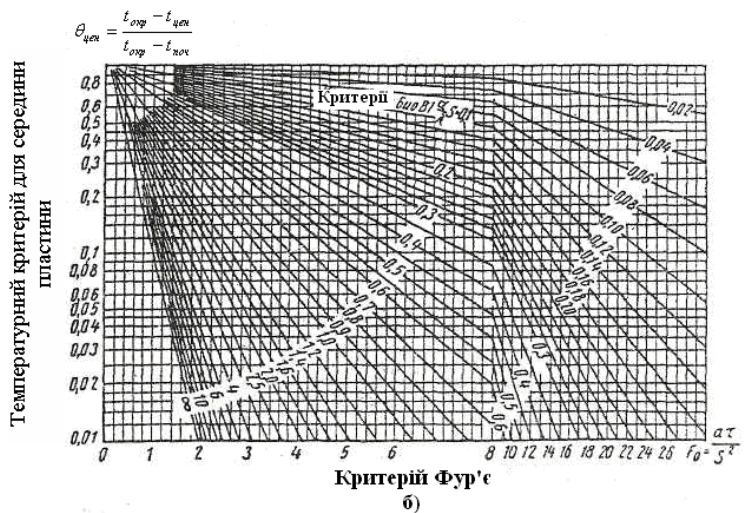
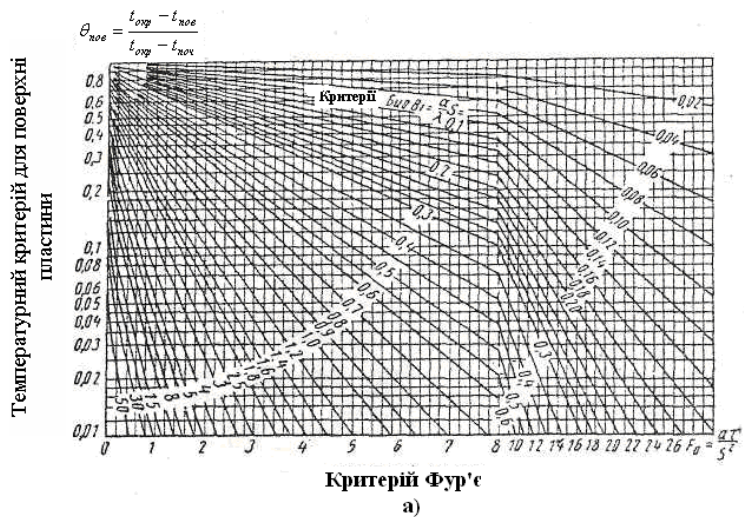


Рисунок 2 - Графіки для розрахунку часу нагрівання або охолодження пластини: а - поверхні; б - середньої площини

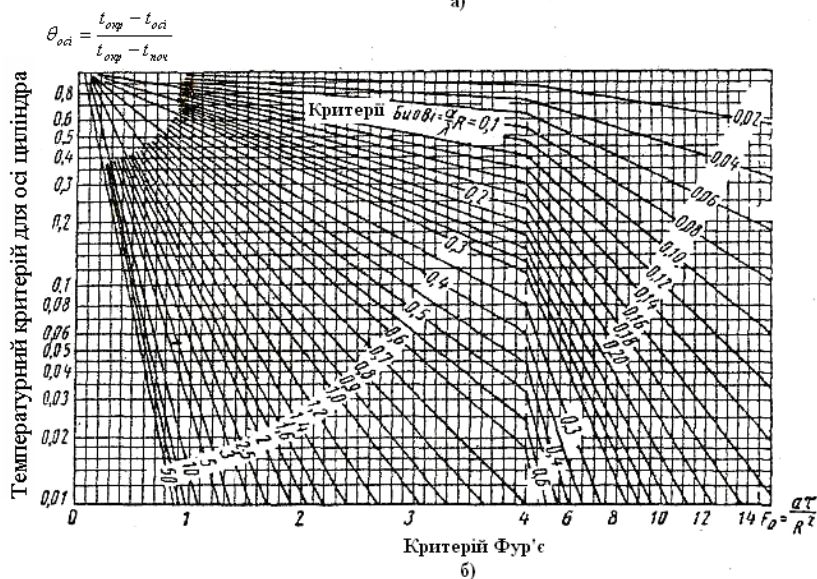
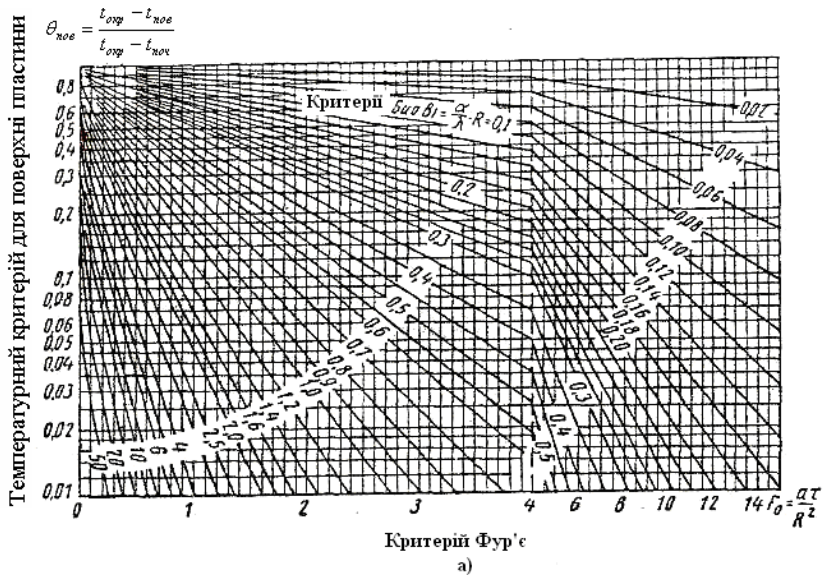


Рисунок 3 - Графіки для розрахунку часу нагрівання або охолодження циліндра: а - поверхні; б - осі циліндра.

Таблиця 4 - Значення коефіцієнта  $K_F$ 

Паралелепіпед	$K_F$	Паралелепіпед	$K_F$	Циліндр		$K_F$
				D	H	
1x1x1	0,63	1x2x2	1,25	1	5	0,81
1x1x1,5	0,77	1x2x3	1,39	1	4	0,80
1x1x2	0,85	1x2x4	1,46	1	3	0,79
1x1x3	0,91	1x2x5	1,49	1	2	0,74
1x1x4	0,93	1x3x3	1,57	1	1,5	0,68
1x1x5	0,94	1x3x4	1,67	1	1	0,56
1x1,5x1,5	0,99	1x3x5	1,71	1,5	1	0,91
1x1,5x2	1,09	1x4x4	1,79	2	1	1,18
1x1,5x3	1,21	1x4x5	1,84	3	1	1,52
1x1,5x4	1,27	1x5x5	1,88	4	1	1,76
1x1,5x5	1,29			5	1	1,88

Таблиця 5 - Значення коефіцієнта  $K_T$ 

$\frac{\Delta t}{\Delta t_{поч}}$	$K_T$	$\frac{\Delta t}{\Delta t_{поч}}$	$K_T$	$\frac{\Delta t}{\Delta t_{поч}}$	$K_T$	$\frac{\Delta t}{\Delta t_{поч}}$	$K_T$
0,01	1,00	0,08	0,55	0,20	0,35	0,40	0,20
0,02	0,85	1,10	0,50	0,25	0,30		
0,05	0,65	0,15	0,41	0,30	0,260	0,50	0,15

### 3 Завдання для самостійної роботи студента із визначення технологічних параметрів термообробки контрольованих атмосфер

3.1 Визначити час нагрівання валу із середньовуглецевої сталі діаметром 90 мм, довжиною  $\ell = L$  до  $t = t_2$  °C.

Температура в печі  $t = t_n$  °C, температура в цеху  $t = t_1$  °C.

Середня теплоємність сталі  $c_{cp} = C$ , коефіцієнт тепло-

віддачі  $\alpha$  кДж/м<sup>2</sup>·год·град. Маса 1 погонного метра сталі діаметром 90 мм дорівнює 50кг.

3.2 Технічне завдання для визначення технологічних параметрів термообробки наведені в табл.6.

Таблица 6 - Технологічні параметри термообробки

Номер бригади	Параметр					
	L,мм	t <sub>1</sub> ,°C	t <sub>2</sub> ,C	t <sub>n</sub> °,C	C	$\alpha$ , кДж/м <sup>2</sup> ·год·град
1	0,3	18	850	1000	0,59	480
2	0,5	19	800	850	0,65	500
3	0,7	20	810	900	0,61	520
4	0,9	21	830	950	0,63	540
5	0,4	22	860	940	0,58	545
6	0,6	23	870	920	0,57	550
7	0,8	21	820	890	0,62	525
8	1,0	20	840	960	0,60	540
9	1,1	19	800	930	0,65	500

## **Практична робота 4**

### **«Визначення технологічних параметрів печі СПЩМ-6.12/10 і завдання на СРС»**

#### **1 Загальні відомості**

Шахтні печі застосовують для термічної обробки деталей великої довжини, наприклад, осей, валів, труб напрямних.

Діаметр вертикальних камерних печей дорівнює 0,5-3,5 м, а висота – 1-30 м. Малі печі використовують для світлого відпалу, газової цементації, азотування (при введенні реторти), нагрівання під відпуск і загартування. Більші печі застосовують для нагрівання під загартування й відпуск довгих деталей (валів, осей, спеціальних труб і т.п.).

Для кращого використання об'єму печі одночасно нагрівають велику кількість деталей, розміщуючи їх на спеціальних підвісах або в кошиках. Паливом для вертикальних печей може служити газ або мазут. Але дуже часто ці печі бувають й електричними. Останнім часом почали застосовувати вакуумні електричні печі.

Малі вертикальні печі розраховані на високі, середні й низькі температури. Високотемпературні електричні печі (до 1300°C) частіше мають квадратний перетин і нагріваються горизонтально розміщеними глобаровими стрижнями. Середньотемпературні (до 1000°C) і низькотемпературні (до 700°C) печі нагріваються металевими елементами опору, розміщеними на внутрішніх стінках печі.

Вертикальні електричні муфельні печі широко використовуються для газової цементації. Цементацію в цих печах проводять природним газом, бензолом або гасом. Рідке паливо вводять у цементаційну реторту через крапельник, розміщений на кришці печі. Однією з основних частин печі



є жаростійка ніхромова реторта 1, що вгорі споряджена добре теплоізоляційною кришкою 5, яка герметично закривається відкидними болтами 4. По центру кришки проходить вертикальний вал з насадженням на ньому вентилятором 3, що приводяться у рух електродвигуном 7 потужністю 0,8 кВт. Для охолодження підшипників ззовні кришки на валу встановлюється ще один пропелерний вентилятор 6.

Деталі завантажують у дірчасті кошики 2 і поміщають у реторту. Після розігрівання печі цементуючий газ або гас (по 60-80 крапель на хвилину) подають у реторту, де він швидко випаровується. Газ, що утворюється, підхоплюється вентилятором, проганяється через отвори в кошику, енергійно омиває оброблювані деталі й іде через відвідну трубку у кришці печі на спалювання.

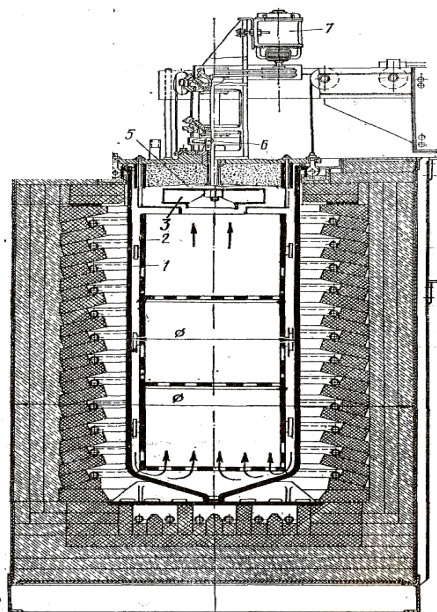


Рисунок 1 - Електрична вертикальна муфельна піч для газової цементації

У кришці печі повинен бути передбачений третій отвір для "свідків". Термін служби реторти з жаростійкої сталі становить 3000-4000 год, питома витрата сталі - 0,8% від маси оброблюваних деталей.

## **2 Визначення продуктивності печі СШЦМ-6.12/10**

### **2.1 Вихідні дані для розрахунку**

Температура цементації  $t_{\text{ц}}$ .

Глибина цементаційного шару 0,7-0,8 мм.

Цементації піддаються валики розміром  $d \times \ell$  мм.

Матеріал валиків - сталь 20.

Піч працює безупинно.

### **2.2 Розрахунок укладання деталей у печі**

Кошик печі СШЦМ-6.12/10 має розміри  $\varnothing 600 \times 300$  мм. На дно кошика встановлюється решітка з отвором для проникнення цементаційного газу. Валики встановлюються вертикально у відведені для них осередки на спеціальних підставках в  $n$  рядів. В одному ряді укладається  $N$  деталей. Відстань між валиками становить 20-25 мм. Оскільки в піч можна помістити два кошики, кількість валиків, що завантажують одночасно, буде

$$a = N \cdot n \cdot 2 \text{ деталей.}$$

Вага одного валика  $q = \rho \cdot V$  кг,  $\rho = 7800$  (кг/м<sup>3</sup>),

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot \ell \text{ (м}^3\text{)}.$$

Вага садки  $G = q \cdot a$  (кг).

Вага кошиків – 80 кг.

### 2.3 Розрахунок часу нагрівання деталей і визначення продуктивності печі

Критерій  $Bi$  для заданої деталі

$$Bi = \frac{S \cdot \alpha}{\lambda},$$

де  $S$  - радіус, або половина товщини деталі, м;

$\lambda$  - коефіцієнт теплопровідності сталі.

Для сталі 20-29, 19 Вт/м·К (або 105 кДж/м·година·К);

$\alpha$  - розрахунковий сумарний коефіцієнт тепловіддачі.

При  $Bi < 0,25$  час нагрівання заданих деталей може бути визначено за формулою нагрівання тонких тіл, тобто

$$\tau = \frac{G \cdot c}{\alpha \cdot F} \cdot 2,3 \lg \left( \frac{t_{cp} - t_{mn}}{t_{cp} - t_{mk}} \right),$$

де  $c$  - середня теплоємність сталі 20 - 0,71 кДж/кг·°С;

$t_{cp}$  - температура середовища (печі), °С,  $t_{cp}$ ;

$t_{mn}$  - температура металу початкова, °С,  $t_{mn}=20^\circ\text{C}$ ;

$t_{mk}$  - температура металу кінцева;

$G$  - вага садки, кг;

$F$  - активна поверхня садки, м<sup>2</sup>;

$$F = \pi \cdot da \cdot \left( \ell + \frac{d}{2} \right), \text{ м}^2,$$

$\alpha$  - сумарний коефіцієнт тепловіддачі визначається за формулою

$$\alpha = 0,13 \cdot C_{np} \left( \frac{T}{100} \right)^3 + 41,9 \text{ кДж/м}^2 \cdot \text{год} \cdot \text{К},$$

а наведений коефіцієнт випромінювання - за формулою

$$C_{np} = \frac{20,5}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{F_1}{F_2} \cdot \left(\frac{1}{\varepsilon_2} - 1\right)} \text{ кДж/м}^2 \cdot \text{година}; \text{ К}^4 (\text{Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4),$$

де  $\varepsilon_1$  - ступінь чорноти оброблюваної сталі дорівнює 0,3;  
 $\varepsilon_2$  - ступінь чорноти вогнетривкої кладки, дорівнює 0,75;  
 $F_1$  - поверхня металу, що сприймає тепло,

$$F_1 = \pi \cdot da \cdot \left(\ell + \frac{d}{2}\right),$$

$F_2$  - внутрішня поверхня печі - з паспорта печі 5,24м<sup>2</sup>

Оскільки деталі встановлюються в кошиках одна на іншу, можна взяти коефіцієнт укладання  $K_u = 2$ . У цьому разі час нагрівання дорівнює 2 години.

Час витримки при цементації для одержання шару глибиною 0,7-0,8 мм за довідковими даними [3] становить 2,8 години. Час завантаження й вивантаження беремо 0,2 години.

Таким чином, повний цикл процесу - час нагрівання деталей, тривалість витримки (цементації) і час на завантаження й вивантаження деталей - становить

$$P = 2\tau_n + 2,8 + 0,2, \text{ година.}$$

Продуктивність печі при цьому буде

$$A = G/P \text{ кг/годину.}$$

Цей технологічний параметр печі використовується при розрахунку потрібного устаткування в цеху або на термічній ділянці відповідно до програми й типу виробництва.

### 3 Завдання для виконання самостійної роботи наведені в таблиці 4.1

Таблиця 4.1

Номер бригади	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Температура цементації	920	922	923	924	925	927	928	929	930
Діаметр валика d, м	0,06	0,085	0,068	0,075	0,08	0,088	0,078	0,070	0,065
Довжина валика l, м	0,2	0,18	0,15	0,14	0,12	0,10	0,16	0,17	0,13
Температура печі t, °C	950	960	970	980	990	1000	990	980	970
Число деталей N, шт.	35	30	37	32	30	25	32	33	34
Число рядів, n	1	1	2	2	2	3	2	1	2

## СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Юдаев Б.М. Теплопередача. – М.: Высшая школа, 1981.-319с.
2. Ключников А.Д., Кузьмин В.Н., Попов С.К. Теплообмен и тепловые режимы в промышленных печах. – М.: Энергоиздат, 1990. – 175с.
3. Телегин А.С., Швидкий В.С., Ярошенко Ю.Г. Тепло-массоперенос. – М.: Металлургия, 1995.
4. Рустем С.Л. Оборудование и проектирование термических цехов. -М.: Машгиз, 1962. –С.115 -129.
5. Соколов К. Н. Оборудование термических цехов. - Киев-Донецк.: Вища школа, 1984. –С. 237-258.
6. Рустем С.Л. Устаткування й проектування термічних цехів. -М.: Машгиз, 1962. -С. 206-235.
7. Соколов К.Н. Устаткування термічних цехів, - Київ - Донецьк: Вища школа, 1984. -С.71-83.
8. Шмиков А. А. Довідник терміста. -М.: Машгиз, 1961. -392 с.
9. Лабій В. Й. Тепломасообмін. – Львів: Тріада Плюс, 1998. - 280 с.
10. Константинов С.М. Теплообмін. – Київ: Політехніка інпрес, 2005. - 305 с.
11. Драганов Б.Х., Долінський А.А., Міщенко А.В. та ін. Теплотехніка. – Київ: Либідь, 2005. - 360 с.
12. Беляев Н. М. Основы теплопередачи. – К.: Высш. шк., 1989. – 342 с.
13. Кутателадзе С.С. Основы теории теплообмена. – Новосибирск: Наука, 1970. – 660 с.
14. Лукач Ю.Е. Исследование теплоотдачи при кипении бинарных смесей: Автореф. дис. ... канд. техн. наук. – К.: КПИ, 1952.
15. Луцик Р.В. Теплообмін. – К.: КНУТД, 2004. – 126 с.
16. Лыков А.А. Тепломасообмен: Справочник. – М.: Энергия, 1978. – 480 с.
17. Юдаев Б.Н. Теплопередача. – М.: Высш. шк., 1981. – 320 с.

Навчальне видання

**Будник** Анатолій Федорович

**ТЕПЛОМАСОПЕРЕНОС В ПРОЦЕСАХ  
І МАТЕРІАЛАХ ДИЗАЙНУ  
МАТЕРІАЛІВ**

Навчальний посібник

Дизайн обкладинки А.Ф.Будника  
Редактор Н.А.Гавриленко  
Комп'ютерне верстання В.Д.Вінницької

Формат 60х84/16. Ум. друк. арк. 9,3. Тираж 300 пр. Зам. № 1297.

Видавець і виготовлювач Сумський державний університет  
вул. Р.-Корсакова,2, м. Суми, 40007  
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 3062 від 17.12.2007.  
40007, Суми, вул. Р.-Корсакова,2.