
Величини

1. Поняття про різні величини
2. Поняття про вимірювання величин
3. Історичні відомості про вимірювання величин

1. Поняття про різні величини

Скалярними величинами називають такі величини, які повністю характеризуються числовим значенням – числом. Це, наприклад, довжина, площа, об'єм, маса, густина та ін. Термін «скалярні» походить від латинського слова *Scala* – «східці, шкала», яку дістають при зображенні чисел на координатній осі.

Векторними величинами називають такі величини, для характеристики яких, крім числового значення, необхідно вказувати ще й напрямок дії. Такими є, зокрема, фізичні величини: швидкість, прискорення, сила та ін. Геометричне векторні величини зображують напрямленими відрізками, які називають векторами. Латинське слово *vector* означає «тягти у певному напрямку».

Далі розглядатимемо лише скалярні величини.

Щоб дати означення й сформулювати властивості скалярних величин, необхідно ввести поняття однорідних величин.

Однорідними величинами називають величини, які характеризують ту саму якість об'єктів. Наприклад, однорідними

величинами є всі довжини відрізків, усі площі фігур, усі маси тіл і т. д.

Для будь-якої системи однорідних величин повинно бути встановлено поняття рівності ($a == b$) і нерівності ($a < b$ або $b > a$). Довжини відрізків, наприклад, можна порівнювати за допомогою накладання, маси тіл – за допомогою терезів тощо.

Якщо в системі однорідних скалярних величин визначена операція додавання однорідних величин, яка дає змогу замінити дві однорідні величини a і b їхньою сумою $a + b$, то така система величин називається системою *адитивно-скалярних величин*. Суму n однакових доданків $a+a+\dots+a$ позначатимемо через na .

Скалярні величини, які мають властивість неперервності (виконується аксіома неперервності) і властивість щодо існування для двох величин a і b , причому $b < a$ такої величини c , що $a = b + c$, називають *неперервними*.

За допомогою вищеподаних аксіом ми ввели систему однорідних дитино-скалярних неперервних величин.

Надалі розглядатимемо лише *такі* величини, застосовуючи термін «величини».

2. Поняття про вимірювання величин

Одним з важливих завдань при вивченні величин є завдання вимірювання величин.

Відомо, що число можна дістати внаслідок або переліку елементів множини, або вимірювання величини. Перелік елементів скінченних множин дає натуральні числа і нуль; вісім столів,

двадцять чотири стільці, жодного яблука (нуль яблук) у кошику тощо.

Результат вимірювання величин характеризує інші сторони елементів множин: їхні розміри, масу, площу і т. д. Вимірювання різних величин може виконуватись різноманітними інструментами і різними способами. Доводиться вимірювати відстані між точками, довжини прямолінійних відрізків, довжини дуг кривої, площі фігур, проміжки часу, температуру, густину тіла тощо. Спільним при вимірюванні будь-яких величин є те, що вимірювання завжди є порівняння величини даного роду з певною величиною цього ж роду, взятою за одиницю вимірювання, і вираження результату порівняння числом. Наприклад, довжини відрізків, відстані між точками вимірюються в сантиметрах, кілометрах; площі фігур – у квадратних сантиметрах, квадратних метрах, арах, гектарах; величини кутів виражаються в секундах, градусах, радіанах; тривалість часу – у годинах, хвилинах, днях, роках; температура – в градусах і т. д.

Нехай маємо величину Φ певного роду. Візьмемо яку-небудь величину e цього ж роду за одиницю вимірювання. Тоді, якщо величину Φ можна розбити на n рівних частин, кожна з яких дорівнює e , то кажуть, що величина Φ кратна величині e , або що величина e вкладається n раз в величині Φ . Це записують так: $\Phi = ne$, де n – натуральне число.

Число n називається *мірою* або *числовим значенням* величини Φ , виміряної за допомогою одиниці вимірювання e . Воно показує відношення величини Φ до одиниці вимірювання e , тобто на яке

число слід помножити одиницю вимірювання e , щоб дістати величину Φ .

Якщо одиниці вимірювання немає, то міру величини вказати неможливо.

Мірою величини може бути як ціле число, так і дробове. Якщо величина Φ кратна одиниці вимірювання e , то мірою величини Φ є натуральне число.

Можливий випадок, коли величина Φ не кратна величині e . Поділимо величину e на q рівних частин. Тоді, якщо величина Φ кратна величині $e' = (p/q)e$, де $1 \leq p \leq q$, то Φ і e називаються *сумірними*. Мірою величини Φ з одиницею вимірювання e буде не ціле, а дробове (раціональне) число n таке, що
$$\Phi = n' e' = n' \frac{p}{q} e = n e.$$

Дві величини Φ_1 і Φ_2 називаються *сумірними* якщо вони сумірні з тією самою одиницею вимірювання e .

Величини одного й того самого роду можна порівнювати між собою. З двох величин більшою є та, міра якої при однаковій одиниці вимірювання більша:

$$(m(\Phi_1) = n_1; m(\Phi_2) = n_2; n_2 > n_1) \Rightarrow \Phi_2 > \Phi_1.$$

Так, $1 \text{ м} > 90 \text{ см}$, бо $1 \text{ м} = 100 \text{ см}$ і $100 > 90$;

$3500 \text{ с} < 1 \text{ год}$, бо $1 \text{ год} = 3600 \text{ с}$ і $3500 < 3600$.

Означення 1. Мірою величини Φ називається число $m(\Phi)$, поставлене у відповідність величині Φ так, що виконуються такі вимоги:

1) міра будь-якої величини Φ невід'ємна: $m(\Phi) > 0$;

2) рівні величини мають рівні міри: $\Phi_1 = \Phi_2$ звідси $m(\Phi_1) = m(\Phi_2)$;

3) міра величини Φ дорівнює сумі мір величин, на які можна розбити дану величину: $\Phi = \sum_{i=1}^n \Phi_i \Rightarrow m(\Phi) = \sum_{i=1}^n m(\Phi_i)$;

4) деяка величина e того самого роду, що й величина Φ , має міру, яка дорівнює одиниці: $m(e)=1$. Величина e називається *одиницею вимірювання* величини Φ .

Наведені вимоги називаються *аксіомами міри величини Φ* . З них випливає такий наслідок.

Наслідок. Більша величина має більшу міру.

До цього часу розглядалися величини, сумірні з одиницею вимірювання. Мірою таких величин є раціональне число. Проте можливий випадок, коли величина Φ не кратна жодній $1/q$ (де q – будь-яке натуральне число) частині одиниці вимірювання e . Такі величини Φ і e називаються *несумірними*. При цьому міру величини Φ з одиницею вимірювання e не можна виразити раціональним числом. Ця обставина є однією з причин розширення множини раціональних чисел, доповнивши її так званими додатними ірраціональними числами.

Введемо поняття довжини відрізка. *Довжиною відрізка* називається додатна величина, визначена для кожного відрізка так, що:

- 1) рівні відрізки мають рівні довжини;
- 2) якщо відрізок складається із скінченного числа відрізків, то його довжина дорівнює сумі довжин цих відрізків;

3) існує відрізок, довжина якого дорівнює одиниці.

Наведені умови, яким повинна задовольняти довжина відрізка, називаються *властивостями* або *аксіомами* довжини. Неважко впевнитися, що визначена таким чином довжина відрізка задовольняє властивості рефлексивності, симетричності та транзитивності. Завдання вимірювання довжини (міри) відрізка полягає у послідовному відкладанні одиничного відрізка і його частин на даному відрізку, довжину якого треба виміряти.

3. Історичні відомості про вимірювання величин

Ідея вимірювання величин, як і ідея лічби, зародилася ще в сиву давнину і пов'язана з першими кроками трудової діяльності людини. Ці дві ідеї тісно пов'язані між собою і в основу їх покладено ідею числа.

Не можна уявити собі життя людини» яка б не виконувала якісь вимірювання. Знання мір довжини, площі, об'єму» маси були необхідними уже на початку розвитку людини, що будувала собі житло, виготовляла найпростіші знаряддя праці.

Першими вимірювальними приладами людини, як і при лічбі, були пальці рук, і ніг та деякі інші частини людського тіла: фут - довжина ступні, дюйм - довжина суглоба великого пальця руки.

Для вимірювання невеликих відстаней використовували аршин - крок. Великі відстані вимірювали переходами і днями. Наприклад, в одному з оповідань Джека Лондона індієць так характеризує відстань до якогось міста: «Ідеш 10 снів, 20 снів, 40 снів» (тобто діб). В Англії указом короля Генріха I за одиницю довжини

було прийнято відстань від носа короля до кінця середнього пальця його витягнутої руки – ярд, У багатьох народів мірою відстані була стріла – дальність польоту стріли. Звідси вирази – «не допускати на рушничний постріл», а пізніше – «на гарматний постріл».

Долоня – ширина чотирьох пальців руки. Для вимірювання тканини використовували також лікоть – відстань від кінця пальців до ліктя та подвійний лікоть – моток тканини навколо ліктя.

В Єгипті мірою відстані були: лікоть народний (6 долонь) і лікоть царський (7 долонь). За еталон ліктя брали царський лікоть (525 мм), цеглини єгипетських пірамід мали довжину народного ліктя (450 мм).

Дуже поширеною одиницею довжини була четверть – п'ядь. } тепер, наприклад» щоб приблизно виміряти довжину чи ширину столу, іноді користуються четвертю.

Довжину обводу стовбура дерева зручно було вимірювати двома руками в обхват» звідси пішла міра – маховий сажень ~ - відстань між кінцями пальців витягнутих двох рук. Висоту вимірювали мірою, що називається косий сажень – відстань від закаблука лівої ноги до кінця пальців витягнутої вгору правої руки.

Для вимірювання великих відстаней було прийнято версту – 500 сажнів, милю – 7 верст. Арабська миля дорівнює 4 тисячам ліктів, лікоть ~ ширина 8 кулаків, кулак – ширина 4 пальців, палець – 6 волосин з морди осла. У Франції землю вимірювали в туазах. Туаз – 6 ступнів короля – довжина 12 суглобів великого пальця руки.

Звичайно, всі одиниці міри були дуже неточними і незручними.

Такий різнобій у одиницях міри довжини часто використовувався у феодальному і капіталістичному суспільствах з метою експлуатації народних мас. Землевласники, купці користувалися мірою більшого розміру, коли міряли щось для себе, зокрема, коли збирали податки, а коли продавали щось народу, міряли тією самою мірою меншого розміру.

Крім того, такі одиниці довжини були незручними для використання ще й тим, що співвідношення між більшими і меншими одиницями виміру були найрізноманітніші без будь-якої закономірності. До того ж у різних країнах і навіть у різних губерніях були різні одиниці вимірювання, що ускладнювало торгівлю, обмін тощо.

Одиниці площі також були найрізноманітнішими і не завжди зв'язаними з одиницями довжини. У Римі за одиницю площі брали югер – величину ділянки, яку за день виорює пара волів. У Росії за одиницю земельної міри, з якої брали данину» був плуг, а пізніше – десятина. Проте десятини були різні: тульська, калужська, костромська, архангельська і ін. Податковою одиницею площі була соха.

Не менш різноманітними були і одиниці об'єму. Наприклад, об'єми рідких тіл вимірювали такими одиницями, як бочка – 40 відер; відро – 10 штоф; штоф – 2 пляшки; пляшка – 2 сороковки, сорокояка – 2,5 сотки, сотка – 2 шкалики.

У зв'язку з розвитком обміну продуктами виникла потреба вимірювати масу тіла. Який народ і коли саме винайшов терези – невідомо. До нас дійшло зображення важільних терезів у древніх пам'ятниках Єгипту другого тисячоліття до н. е. Мірою маси було зерно. І тепер є одиниця аптекарської ваги гран – зерно.

Одиниця маси дорогоцінних металів і каменів – карат – маса насіння одного із видів бобів (карат $\approx 0,2$ г).

Пізніше за одиницю маси почали брати масу води, що наповнює певний посуд. Російська одиниця маси була гривна, пізніше її почали називати фунт. Фунти також були різні. Наприклад, державний торговий фунт – 409 г, ревельський – 427 г, гродненський – 367 г і т. д. Одиницею маси був пуд – 40 фунтів і золотник. Купці не тільки міряли на власний аршин, а й важили власними фунтами. Ще у 1550 р, при царюванні Івана Грозного суворо заборонялося важити товари не у «пудовщиків». У купців, які важили своїми гирями, товари відбиралися на користь «великого государя», а їх разом з сім'ями висилали.

Феодальні землевласники були прихильниками безсистемного використання мір для закабалення бідного населення. Незважаючи на закони про міри і вагу, що видавались, такі незручні одиниці мір існували в усіх країнах дуже довго.

У кінці XVIII ст. у Франції революційні маси знищили старий феодальний лад і оголосили республіку. Національні збори Франції утворили комісію з п'яти академіків, якій доручили розробити нову зручну систему мір.

Комісія запропонувала за основну одиницю довжини прийняти метр – одну сорокамільйонну частину довжини паризького земного меридіана, а від неї утворити всі інші одиниці довжини, поклавши в основу співвідношення між ними число 10 – основу системи нумерації: декаметр – 10 м, гектометр – 10 декаметрів == 100м, кілометр – 10 гектометрів – 1000 м, дециметр – 0,1 м, сантиметр ~ - 0,01 м. Ця система була дуже зручною, і все ж вона надто повільно впроваджувалась у життя. У 1869 р. Петербурзька академія наук звернулася до наукових закладів усього світу з закликом прийняти метричну систему мір як міжнародну. І тільки у 1875 р. було підписано «конвенцію метра» і встановлено міжнародне бюро мір і ваги.

Запровадження метричної системи мір у життя гальмувала не революція, як писали буржуазні історики, а, навпаки, реакційні кола всіляко затримували її розвиток, виходячи з того, що ця система введена в час революції. Так, наприклад, академік Фусе відхилив підручник з геометрії М. І. Лобачевського лише тому, що в ньому за одиницю довжини прийнято було «французький метр», а за одиницю для вимірювання дуг – «французький градус».

У Росії Д. І. Менделєєв, який стояв на чолі Головної палати мір і ваги, добився того, що царський уряд дозволив поряд з старими мірами користуватися метричною системою мір. І лише після перемоги Великої Жовтневої соціалістичної революції у 1918р. декретом Раднаркому за підписом В. І. Леніна метрична система мір була введена як обов'язкова.

Метрична система мір стала міжнародною. У наукових цілях останнім часом впроваджується більш досконала система одиниць вимірювання «51» – Система Інтернаціональна.

Виміряти якусь величину, це означає порівняти її з іншою, – величиною цього самого роду, прийнятою за одиницю. /БІ) Вимірювання довжин. Ще за дві тисячі років до н. е. в історич-^— ях документах (папірус Ахмеса і Московський папірус) зустрічаються правила і формули для вимірювання геометричних величин.

Математичні дослідження, які проводились у математичних і філософських школах Фалеса, Евдокса, Піфагора, Арістотеля та інших вчених, було узагальнено Евклідом в його «Началах» (III ст. до н. е.), які відіграли велику роль у розвитку геометрії. Істотним додатком до «Начал» була теорія вимірювання величин, основи якої заклав Архімед.

За час, що минув від Евкліда і Архімеда, геометрія збагатилась багатьма новими відкриттями, які істотно змінили погляд на геометрію як науку і на властивості реального простору.

Виняткову роль відіграло створення геніальним російським вченим М. І. Лобачевським неевклідової геометрії, яка пізніше дістала назву геометрії Лобачевського. Слідом за нею виникають інші геометрії – Рімана, аналітична геометрія, проєктивна тощо.

На межі XIX і XX ст. вперше було поставлено і розв'язано завдання аксіоматичного обґрунтування геометрії. Майже одночасно, незалежно одна від одної, було створено три формально рівнозначних системи побудови Евклідової геометрії:

- 1) система італійського математика Пієрі;

- 2) система німецького математика Гільберта;
- 3) система російського математика В. Ф. Кагана.

З методичного і методологічного погляду ці три системи відрізняються шляхами реалізації «метричної» структури евклідового простору:

Гільберт аксіоматизував поняття рівності (конгруентності);

Пієрі до основних (неозначуваних) понять відніс рух;

Каган – відстань між двома точками.

Хоч аксіоматика Кагана за простотою і науковістю не поступалась аксіоматиці Гільберта» проте вона не мала у свій час визнання, бо, як підкреслював Клейн, її простота досягалася завдяки припущенню, що відстань завжди може бути виражена деяким числом. Тоді це вважалося недоліком, оскільки погляд на ірраціональні числа як фіктивні, недійсні, абсурдні числа був ще досить поширеним.

Після виходу у світ книги Кагана з докладним викладом його системи (1904 р.) було створено ряд геометричних книг, у яких за основне, неозначуване поняття (зміст якого розкривається за допомогою системи аксіом) прийнято поняття відстані між двома точками. Поширенню аксіоматики Кагана сприяло створення французьким математиком Фреше загального поняття метричного простору як такої множини точок, у якій кожній парі точок A і B відповідає певне число r_{AB} , що характеризує відстань між точками A і B .