Довгий О.Я., Файчак З.Є.

Методичні рекомендації

до вивчення курсу математики в І семестрі
для студентів І курсу спеціальності
"Початкове навчання"

УДК 510.6+22
ББК 22.122+126
Д – 59

Довгий О.Я., Файчак З.Є. Методичні рекомендації до вивчення курсу математики в І семестрі для студентів І курсу спеціальності ”Початкове навчання” / Івано-Франківськ: Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ, 2006. – 90 с.

Рецензенти:

Кульчицька Н.В. – кандидат педагогічних наук, доцент кафедри алгебри та геометрії Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Махней О.В. – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного аналізу і прикладної математики Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника

Рекомендовано до друку Вченою Радою
Педагогічного інституту
Прикарпатського національного університету
імені Василя Стефаника

Вступ

Автори, ураховуючи досвід навчально-методичної роботи зі студентами педагогічних спеціальностей, пропонують методичні рекомендації, щодо вивчення необхідного за обсягом курсу математики, яким студенти мають володіти, щоб мати фундамент для подальшого успішного освоєння інших розділів математики. Даний курс складається із таких двох основних математичних розділів: „Множини і відповідності між елементами множин” і „Математична логіка”. Також до даного курсу входить розділ „Елементи комбінаторики”, який показує безпосереднє застосування набутих знань із першого з основних розділів на практиці. Отже, **метою даного курсу** є познайомити студентів з основними поняттями і методами математики, необхідними для глибшого засвоєння всього курсу математики та методики викладання математики, а також підготовити студентів до самостійного вивчення тих розділів математики, які можуть бути потрібні додатково в практичній і дослідницькій роботі спеціалістів в області початкового навчання. **Завдання даного курсу** полягає в розкритті змісту і значення основних понять даного курсу математики, а саме: множина, підмножина, відношення між множинами, операції над множинами, декартовий добуток, відповідність і відношення, граф та графік, комбінаторна задача, висловлення, операції над висловленнями, таблиця істинності складеного висловлення, область визначення та множина істинності предиката, необхідна і достатня умови.

Перелік того, що студент повинен знати і вміти в результаті вивчення даного курсу

- **Студент повинен знати** основні теоретичні положення, навчитися використовувати їх при розв'язанні задач та виробити навики користування літературою.

- **Студент повинен уміти** зображати на кругах Ейлера-Венна множини, відношення перерізу, відношення включення, відношення виключення і відношення рівності між множинами; виконувати операції над множинами; знаходити характеристичні властивості множин, що містять в собі різні множини і операції над ними; знаходити множину декартового добутку даних множин, та кількість її елементів; зображати елементи декартового добутку множин на координатній площині; визначати пари чисел, які знаходяться у даній відповідності чи даному відношенню; будувати графіки бінарних відношень; класифікувати певні відношення за тими або іншими властивостями; встановлювати вид комбінаторної задачі і використовувати потрібні для розв’язку формули; побудувати таблицю істинності для складеного висловлення; знаходити область визначення та множину істинності предиката; розрізняти необхідні і достатні умови; доводити теореми методом від супротивного.

Конспект лекцій

В даному розділі методичних рекомендацій розкрито зміст всіх теоретичних положень даного курсу (для більш ширшого висвітлення теоретичного матеріалу призначені навчальні і навчально-методичні посібники зазначені в списку літератури), висвітлено доведення властивостей, а також акцентовано увагу на ті теоретичні положення, які студентам найважче зрозуміти в процесі вивчення даного курсу (врахована методика усунення нечіткостей та неоднозначностей в процесі освоєння теоретичних положень даного курсу).

Лекція 1. Множини

1. Вступ.
2. Поняття про множину. Елементи множини. Способи задання множин. Скінченні і нескінченні множини. Порожня множина. Числові множини.
3. Підмножина. Число підмножин. Власні і невласні підмножини. Відношення між множинами: рівність множин, нестроге і строге включення.
4. Універсальна множина. Діаграми Ейлера-Венна.

1. В стародавній Греції в VII-III ст. до нашої ери, коли Фалес, Піфагор і Евклід (і інші менш відомі стародавні вчені) систематизували відомі на той час математичні знання і виклали їх з точним обґрунтуванням, сформувалася наука, яку сьогодні називають – математика. Слово „математика” в перекладі з грецької означає „знання”, „наука”.

У сучасному світі математика відіграє велику роль у теоретичних, технічних і економічних дослідженнях.

2. ***Поняття множини*** є одним з найосновніших неозначуваних понять математики. Воно береться безпосередньо з досвіду і не зводиться до простіших понять, тобто це первісне і не означуване поняття.

Під множиною розуміють сукупність тих чи інших об'єктів, об'єднаних за деякими характерними ознаками (клас, загін, бригада, зграя, рій, колекція, набір тощо).

Об'єкти будь-якої природи, які входять до множини, називають її елементами. Елементами множини можуть бути і самі множини. Множини позначають великими, а їхні елементи – малими буквами латинського алфавіту. Наприклад, запис $a \in A$ означає, що елемент a належить множині A; запис $a \notin A$, або $a \overline{\in} A$, означає, що a не належить A.

Множину можна задати такими способами:

1. *Переліком елементів.* Наприклад, $A = \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10\}$. Елементи множини записують в фігурних дужках. Слід звернути увагу студентів на те, що порядок елементів у запису множини значення не має. Вважається, що всі елементи множини різні.

2. *За допомогою характеристичних властивостей, які* мають всі елементи даної множини. Наприклад, цю ж множину A можна записати так: $A = \{x \mid x$ – парні числа першого десятка$\}$, або $A = \{x | x \in \mathrm{N},\ x \le 10,\ x \vdots 2\}$.

Є одноелементні, двоелементні множини, множини, що містять багато елементів, безліч їх. Є порожня множина – Ø (множина предметів порожнього столу, множина натуральних чисел менших одиниці і т.д.).

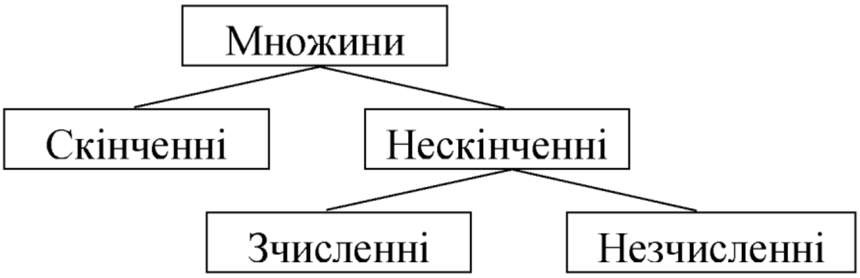
Існують загальноприйняті числові множини: **N**, **R**, **Z**, ….

Множина, що складається із обмеженого числа елементів, називається ***скінченною***. Наприклад, множина одноцифрових чисел, множина вершин квадрата. Множина, яка містить необмежену кількість елементів, називається ***нескінченною*** (числові множини **R**, **Z**…).

Нескінченні множини діляться на **зчисленні** і **незчисленні**.

Поняття нескінченності і незчисленності – це зовсім інші поняття, їх не слід путати або ототожнювати. Означення понять зчисленності і незчисленності для множини водиться після теми „Відповідності і відношення”.

Отже, можна множини групувати за такою схемою:



Так, множини **N** – множина натуральних чисел і **R** – множина дійсних чисел, обидві нескінченні, але перша з них зчисленна а друга незчисленна.

3. Введення поняття ***підмножини*** почнемо з прикладу. Так, розглядаючи множину учнів школи, можна виділяти такі її частини: множина окремих класів, множина відмінників, множина учасників художньої самодіяльності тощо. Множина B називається ***підмножиною*** множини A, якщо кожний елемент множини B є елементом множини A.

Число всіх підмножин множини, яка містить n елементів, дорівнює 2^n. Множину всіх підмножин M позначають через $P(M)$ і називають ***булеаном*** множини M (на честь англійського математика Д. Буля). Таким чином, якщо $M = \{a, b, c\}$, то $P(M) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, M\}$.

Якщо множина B є підмножиною множини A, то говорять, що множина B включається в множину A, або позначають на письмі $B \subset A$ (B включається в A, A містить B).

Підмножина B множини A називається ***власною підмножиною*** або ***правильною частиною*** *множини* A, якщо B є непорожня множина і в A знайдеться хоча б один елемент, якого немає в B.

Так, власними підмножинами множини M є всі її підмножини, крім $\varnothing$ і самої множини M – ***невласних підмножин***.

Слід чітко розрізняти знаки $\in$ (належить) і $\subset$ (включається). Так, для множини $M = \{a, b, c\}$ маємо $\{a\} \subset M$, але $\{a\} \notin M$, бо множина M не містить елемента $\{a\}$ (множина M не містить одноелементну множину $\{a\}$, але містить елемент a, тобто $a \in M$).

Дві множини A і B називаються ***рівними*** ($A = B$), тоді і тільки тоді, коли кожний елемент множини A є елементом множини B і навпаки, тобто якщо $A \subset B$ і $B \subset A$.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ і } B \subset A,$$

де символ $\Leftrightarrow$ означає “тоді і тільки тоді”.

Будь-які дві множини перебувають між собою в одному з таких відношень:

1. *Виключення* – обидві множини не порожні і не містять спільних елементів. Наприклад: $A = \{5, 18, n\}$ і $M = \{a, b, c, 7, 19\}$.

2. *Перерізу* – обидві множини не порожні, містять хоча б один спільний елемент, а також кожна з них містить хоча б один такий елемент, якого немає в іншій з двох розглядуваних. Наприклад: $B = \{5, 1, n\}$ і $M = \{a, b, c, 1, 19, 5\}$.

3. *Включення* – коли одна з них є власною підмножиною іншої. Наприклад: $N = \{a, b, c, 7, 19\}$ і $C = \{7, 19, a\}$.

4. *Рівності* – коли в кожній з них немає такого елемента, якого немає в іншій, тобто коли кожний елемент однієї множини є елементом іншої і навпаки.

4. Універсальна множина є постачальником елементів для тієї сукупності множин, які в даний час розглядаються.

Так, наприклад, якщо розглядати множину студентів потоку і ділити її на підмножини за рівнем написання контрольної роботи, то весь потік студентів буде універсальною множиною.

Універсальну множину позначають **U**. Це поняття має відносний характер і є стабільним тільки для певної ситуації в певний час. Одна й та сама множина M в одних випадках може бути підмножиною однієї універсальної множини, а в других – іншої, або ж універсальною множиною.

Так, наприклад, множина потоку студентів є універсальною множиною в попередньому прикладі, але одночасно і є підмножиною множини студентів України. Остання в свою чергу є підмножиною множини всіх студентів планети.

Для унаочнення відношень між множинами користуються ***діаграмами Ейлера-Венна***.

Множину на діаграмі Ейлера-Венна позначатимемо кругом. Універсальну множину **U** на діаграмі Ейлера-Венна позначатимемо прямокутником. Підмножини універсальної множини **U** будемо зображати кругами, розміщеними всередині прямокутника.

В залежності від відношень між двома множинами A і B, ці множини з допомогою кругів Ейлера-Венна зобразяться по-різному. Так, наприклад, якщо існують множини A і B, які не мають спільних елементів, а множина C має спільні елементи як і з множиною A так і з множиною B, то з допомогою кругів Ейлера-Венна ці множини можна зобразити як на рис.1.

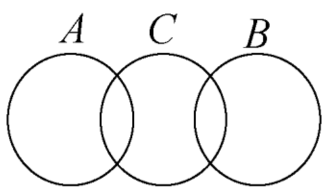


Рис.1

Лекція 2. Операції над множинами

1. Об'єднання, переріз і різниця множин. Доповнення.
2. Властивості операцій над множинами.

1. ***Об'єднанням*** (додаванням) множин A і B називається множина, яка містить усі ті і тільки ті елементи, які належать хоча б одній із множин A або B. Позначається $A\cup B$. За означенням: $A\cup B = \{x \mid x \in A$ або $x \in B$, або $x \in A$ і $x \in B\}$.

Під об'єднанням скінченої кількості множин (більше двох) розумітимемо результат послідовного об'єднання: другої множини з першою, третьої з об'єднанням перших двох і т.д.

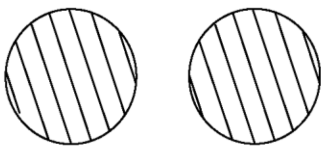
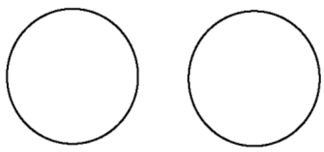
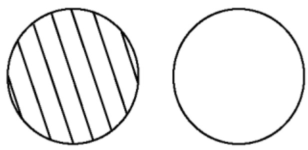
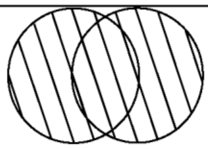
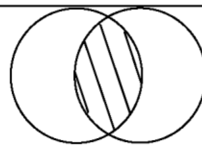
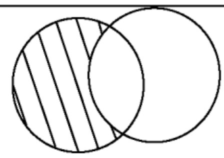
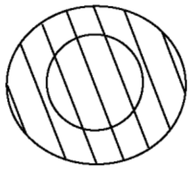
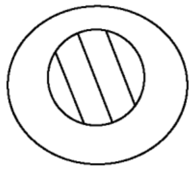
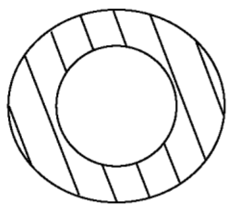
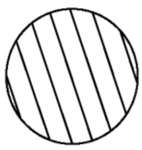
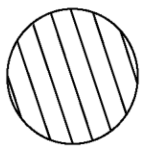
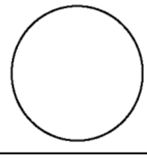
2. ***Перерізом*** множин A і B називається множина, що містить усі ті і тільки ті елементи, які належать кожній із цих множин одночасно. Позначається: $A\cap B$. Отже, за означенням $A\cap B = \{x \mid x \in A$ і $x \in B\}$.

Під перерізом скінченої кількості множин (більше двох) розумітимемо результат послідовного перерізу другої множини з першою, третьої з перерізом перших двох і т.д.

3. ***Різницею*** множин A і B називається множина, яка складається з усіх тих і тільки тих елементів множини A, які не належать B. Позначається $A \setminus B$. За означенням $A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ і } x \notin B\}$. Різниця універсальної множини **U** і її будь-якої підмножини A називається ***доповненням*** підмножини A до універсальної множини позначають $U \setminus A$ або $\overline{A}$.

Якщо $B \subset A$, то різницю множин A і B називають доповненням підмножини B до множини A і позначають $\overline{B_A}$, тобто $A \setminus B = \overline{B_A}$.

Розглянемо всі випадки відношень в яких можуть перебувати ті чи інші дві множини і зобразимо штриховою на кругах Ейлера-Венна множини, які утворяться в результаті певної операції:

	Об'єднання	Переріз	Різниця
Виключення		$A \cap B = \varnothing$ 	$A \setminus B = A$ 
Перерізу			
Включення $B \subset A$ (A містить B)			$A \setminus B = \overline{B_A}$,  $B \setminus A = \varnothing$
Рівності			$A \setminus B = \varnothing$, $B \setminus A = \varnothing$ 

Якщо над множинами проводять операції об'єднання, перерізу і різниці і в виразі відсутні дужки, то спочатку виконують операції перерізу, а потім, по порядку слідування, об'єднання і різницю.

Якщо, наприклад, існують множини A і B, які не мають спільних елементів, а множина C має спільні елементи як і з множиною A так і з множиною B, то з допомогою кругів Ейлера-Венна множина

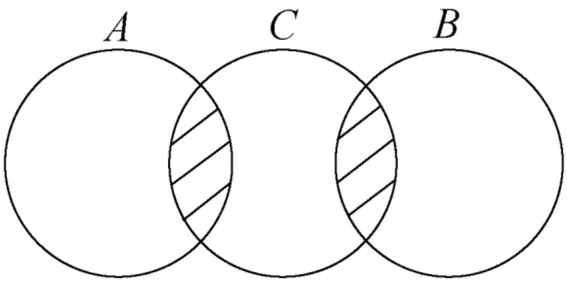


Рис.2а

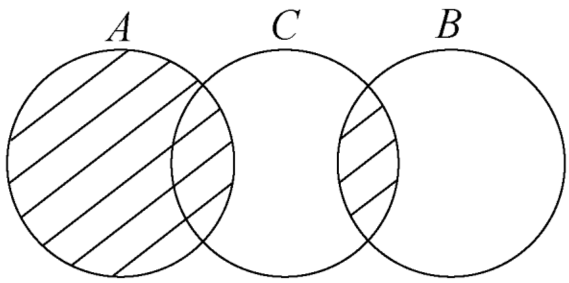


Рис.2б

$A \cup B \cap C$ це заштрихована область не як на рис. 2а (на цьому рисунку зображено множину $(A \cup B) \cap C$), а як на рис.2б.

4. Властивості операцій над множинами:

1°. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення;

2°. $A \cup B = B \cup A$ – переставна (комутативна) властивість операції об'єднання;

3°. $A \cap B = B \cap A$ – переставна (комутативна) властивість операції перерізу;

4°. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції об'єднання;

5°. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – сполучна (асоціативна) властивість операції перерізу;

6°. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції перерізу відносно об'єднання;

7°. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ – розподільна (дистрибутивна) властивість операції об'єднання відносно перерізу;

8°. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$, $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ – I-ий і II-ий закони де-Моргана відповідно;

9°. $A \cup (A \cap B) = A$; $A \cap (A \cup B) = A$ – закони поглинання;

10°. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$; $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$ – закони склеювання;

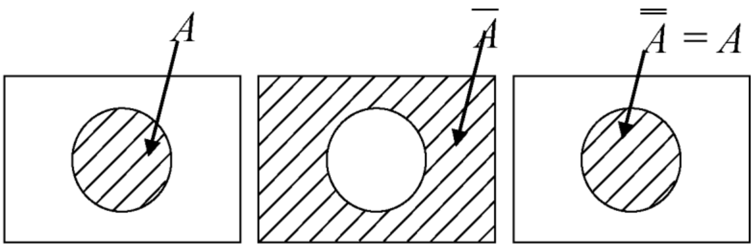
11°. $A \cup \overline{A} = \mathrm{U}$; $A \cup \varnothing = A$; $A \cup A = A$; $A \cap \varnothing = \varnothing$; $A \cap A = A$.

Всі властивості і закони легко доводяться з самих означень відповідних операцій над множинами і за допомогою означення рівності множин (можливе доведення за допомогою кругів Ейлера-Венна).

Доведемо першу рівність: $\overline{\overline{A}} = A$.

Для того щоб множини $\overline{\overline{A}}$ і A були рівні, необхідно і достатньо, щоб $\overline{\overline{A}} \subset A$ і $A \subset \overline{\overline{A}}$, тобто щоб будь-який елемент множини $\overline{\overline{A}}$ належав також і множині A, і навпаки.

Якщо $x \in \overline{\overline{A}}$, то $x \notin \overline{A}$, а отже $x \in A$. Отже кожен елемент множини $\overline{\overline{A}}$ є елементом множини A, тобто $\overline{\overline{A}} \subset A$. Якщо ж $x \in A$, то $x \notin \overline{A}$, а отже $x \in \overline{\overline{A}}$. Отже кожен елемент множини A є елементом множини $\overline{\overline{A}}$, тобто $A \subset \overline{\overline{A}}$. Так, як, $\overline{\overline{A}} \subset A$ і $A \subset \overline{\overline{A}}$, то згідно означення рівності множин, $\overline{\overline{A}} = A$. За допомогою кругів Ейлера-Венна доведення буде таким. Зобразимо на універсальній множині множину A, і заштрихуємо її. Потім множину $\overline{A}$, і заштрихуємо її. А потім множину $\overline{\overline{A}}$, і заштрихуємо її. Отримаємо ту ж саму множину A.



Доведемо ще будь-яку рівність, наприклад четверту:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Для того щоб множини $(A \cup B) \cup C$ і $A \cup (B \cup C)$ були рівні, необхідно і достатньо, щоб будь-який елемент множини $(A \cup B) \cup C$ належав також і множині $A \cup (B \cup C)$, і навпаки. Доведення складається з двох частин.

1) Якщо $x \in (A \cup B) \cup C$, то за означенням об'єднання множин елемент x належить хоча б одній з двох множин $A \cup B$ або C.

а) Якщо $x \in A \cup B$, то знову за означенням об'єднання множин елемент x належить хоча б одній з двох множин A або B. Якщо $x \in A$, то за означенням об'єднання множин $x \in A \cup (B \cup C)$. Якщо $x \in B$, то за означенням об'єднання множин $x \in B \cup C$, а отже $x \in A \cup (B \cup C)$.

б) Якщо $x \in C$, то за означенням об'єднання множин $x \in B \cup C$, а отже $x \in A \cup (B \cup C)$.

Таким чином, ми довели, що будь-який елемент множини $(A \cup B) \cup C$ належить також і множині $A \cup (B \cup C)$. Доведемо тепер, що будь-який елемент другої множини також належить першій.

2) Якщо $x \in A \cup (B \cup C)$, то за означенням об'єднання множин елемент x належить хоча б одній з двох множин A або $B \cup C$.

а) Якщо $x \in A$, то за означенням об'єднання множин $x \in A \cup B$, а отже $x \in (A \cup B) \cup C$.

б) Якщо $x \in B \cup C$, то знову за означенням об'єднання множин елемент x належить хоча б одній з двох множин B або C. Якщо $x \in B$, то за означенням об'єднання множин $x \in A \cup B$, а отже $x \in (A \cup B) \cup C$. Якщо $x \in C$, то за означенням об'єднання множин $x \in (A \cup B) \cup C$.

Отже тотожність доведена.

Доведення п'ятої рівності $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ буде набагато простіше. Якщо $x \in (A \cap B) \cap C$, то згідно означення перерізу множин $x \in A \cap B$ і $x \in C$, а отже $x \in A, x \in B$ і $x \in C$, а отже $x \in A \cap (B \cap C)$ і навпаки. Тотожність доведена.

Доведемо сьому рівність $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Якщо $x\in A\cup(B\cap C)$, то згідно означення операції об'єднання виконується хоча б одне з двох наступних тверджень: $x\in A$ або $x\in B\cap C$. а) Якщо $x\in A$, то згідно означення операції об'єднання $x\in A\cup B$ і $x\in A\cup C$, а отже згідно означення операції перерізу $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. б) Якщо $x\in B\cap C$, то згідно означення операції перерізу $x\in B$ і $x\in C$, а отже згідно означення операції об'єднання $x\in A\cup B$ і $x\in A\cup C$, а отже згідно означення операції перерізу $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. Тотожність доведена.

Доведемо один із законів де Моргана, наприклад цей: $\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$. Якщо $x\in\overline{(A\cup B)}$, то $x\in\mathbf{U}\setminus(A\cup B)$, тобто $x\in\mathbf{U}$ і $x\notin A$ і $x\notin B$, отже $x\in\mathbf{U}\setminus A$ і $x\in\mathbf{U}\setminus B$, тобто $x\in(\mathbf{U}\setminus A)\cap(\mathbf{U}\setminus B)$, тобто $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$. Перша частини доведена. Доведемо другу частину доведення. Якщо ж $x\in\overline{A}\cap\overline{B}$, то $x\in(\mathbf{U}\setminus A)\cap(\mathbf{U}\setminus B)$, то згідно означення операції перерізу $x\in\mathbf{U}\setminus A$ і $x\in\mathbf{U}\setminus B$, а отже згідно означення операції різниці $x\in\mathbf{U}$ і $x\notin A$ а також $x\in\mathbf{U}$ і $x\notin B$, отже $x\in\mathbf{U}$ і $x\notin A$ і $x\notin B$, отже $x\in\mathbf{U}\setminus(A\cup B)$, тобто $x\in\overline{(A\cup B)}$, що й треба було довести. Тотожність доведена.

Доведемо один із законів поглинання: $A\cup(A\cap B)=A$. За означенням об'єднання множин $A\subseteq A\cup(A\cap B)$, тобто досить довести що і навпаки $A\cup(A\cap B)\subseteq A$. Якщо $x\in A\cup(A\cap B)$, то згідно означення операції об'єднання $x\in A$, що й треба було довести, або $x\in A\cap B$, тобто згідно означення операції перерізу $x\in A$ і $x\in B$, тобто $x\in A$, що й треба було довести. Отже $A\subseteq A\cup(A\cap B)$ і $A\cup(A\cap B)\subseteq A$, тобто $A\cup(A\cap B)=A$. Тотожність доведена.

Доведемо один із законів склеювання: $(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})=A$. Згідно означення об'єднання множин, якщо $x\in(A\cap B)\cup(A\cap\overline{B})$, то хоча б $x\in A\cap B$ або хоча б $x\in A\cap\overline{B}$, а отже згідно означення операції перерізу $x\in A$. Перша частини доведена. Якщо ж $x\in A$, то згідно означення операцій об'єднання і перерізу $x \in (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$, що й треба було довести. Тотожність доведена.

Лекція 3. Декартів добуток

1. Кортеж.
2. Декартів добуток. Число елементів декартового добутку.
3. Властивості декартового добутку.

1. Як відомо з першої лекції, для множини не має значення порядок розміщення елементів і елементи множини не повторюються. Як же назвати такі об'єкти як багато цифрове число в якого цифри повторюються і також має значення порядок їх розташування, або слово в якого букви повторюються і також має значення порядок їх розташування. Тому доцільно ввести нове поняття, яке б відрізнялося від поняття множини. Це – **кортеж** (іноді говорять – розміщення**).** Приклади кортежів: слово – кортеж, складений із букв; запис числа – кортеж із цифр; речення – кортеж із слів; ще може бути кортеж машин і т. д.

Число елементів кортежу є його **довжиною**.

***Кортеж довжини* 2,** позначають (a, b), ще інакше називають **упорядкованою парою**, або двома елементами a і b, розміщеними в певному порядку.

Пари (a_1, b_1) і (a_2, b_2) називаються ***рівними*** тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$.

Наприклад, усі можливі кортежі довжини 2, тобто пари, складені з елементів множини $A = \{a, b, c\}$ такі: (a, a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c).

Аналогічно вводиться поняття ***кортежу довжини* 3**, тобто упорядкованої трійки (a, b, c). Три елементи розміщені в певному порядку утворюють ***кортеж довжини* 3**.

Трійки (a_1, b_1, c_1) і (a_2, b_2, c_2) називаються ***рівними*** тоді і тільки тоді, коли $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$.

Наприклад, усі можливі кортежі довжини 3, тобто трійки, складені з елементів множини $A = \{1,0\}$ такі: (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 0, 0).

Аналогічно вводиться поняття упорядкованої n-ки елементів $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Упорядкована n-ка елементів множини A називається **кортежем** довжини n, складеним з елементів даної множини A.

Елементи кортежу називають його ***компонентами***, або ***координатами***.

2. Декартів добуток часто називають прямим добутком.

Декартовим добутком двох множин A і B називається множина всіх пар (a, b) (кортежів довжини 2), де $a \in A$ і $b \in B$.

Позначається декартів добуток – $A \times B$.

Множину декартового добутку скорочено можна записати так: $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Якщо $A = B$, то *декартовий* добуток $A \times A$ позначають через A^2 і називають декартовим або прямим квадратом множини A.

Очевидно, що коли хоча б одна з множин A або B нескінченна, то $A \times B$ є також нескінченною множиною.

За аналогією з декартовим добутком двох множин можна розглядати декартові добутки довільного скінченого числа n множин.

Декартовим добутком трьох множин A, B і C називається множина всіх трійок (a, b, c) (кортежів довжини 3), де $a \in A$, $b \in B$ і $c \in C$. Позначається декартовий добуток трьох множин A, B і C так $A \times B \times C$, тобто:

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) \mid a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Якщо $A = B = C$, то декартовий добуток $A \times A \times A$ позначають через A^3 і називають декартовим або прямим кубом множини A.

Декартовим добутком n множин A_1, A_2, A_3, і A_n називається множина всіх n-ок $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$ (кортежів довжини n), де $a_1 \in A_1$,

$a_2 \in A_2$, $a_3 \in A_3$ і $a_n \in A_n$. Позначається декартовий добуток n множин A_1, A_2, A_3, і A_n так $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n$, тобто:

$$A_1 \times A_2 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) | \ a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, a_3 \in A_3 \text{ і } a_n \in A_n\}.$$

Число елементів $n(A \times B)$ декартового добутку двох множин A і B дорівнює добутку чисел елементів першої і другої множини, тобто: $$n(A \times B) = n(A) \cdot n(B).$$

Доведемо це твердження.

Нехай: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_m\}$. Здійснивши декартовий добуток $A \times B$ цих множин, отримаємо тільки з елементом a_1 на першому місці в парі такі пари: $(a_1, b_1), (a_1, b_2), ..., (a_1, b_m)$, всього m пар. Аналогічно, з кожним з елементів множини A в декартовому добутку буде m пар. Тобто, це можна зобразити так:

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} (a_1, b_1) & (a_1, b_2) & \ldots & (a_1, b_m) \\ (a_2, b_1) & (a_2, b_2) & \ldots & (a_2, b_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & & & \\ (a_n, b_1) & (a_n, b_2) & \ldots & (a_n, b_m) \end{matrix}\right\}}_{m \text{ пар}} n \text{ рядів}$$

Таким чином, декартовий добуток цих множин усього міститиме $\underbrace{m + m + ... + m}_{n \text{ доданків}} = n \cdot m$, тобто $n(A \times B) = n \cdot m$. Якщо взяти декартовий добуток $B \times A$, то по аналогії отримаємо $n(B \times A) = m \cdot n$, але так як $n \cdot m = m \cdot n$, то $n(A \times B) = n(A) \cdot n(B)$. Твердження доведено.

Аналогічно, ***число елементів*** $n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_m)$ декартового добутку будь-якої скінченої кількості множин $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ дорівнює добутку чисел елементів всіх цих множин, тобто:

$$n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_m) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot ... \cdot n(A_m).$$

Доведемо і це твердження.

Для двох множин ми вже довели $n(A_1 \times A_2) = n(A_1) \cdot n(A_2)$. Візьмемо тепер третю множину A_3, яка має n_3 елементи і побудуємо декартовий добуток отриманої множини $A_1 \times A_2$, яка має

$n_1 \cdot n_2$ елементи на множину A_3. Тоді для цих двох множин, як уже доведено, кількість елементів декартового добутку $(A_1 \times A_2) \times A_3$ дорівнює добутку чисел елементів цих множин, тобто $n\big((A_1 \times A_2) \times A_3\big) = (n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$. Тобто для трьох множин дане твердження виконується.

Міркуючи таким самим чином, можна довести дане твердження для чотирьох, п’ятьох і більше множин. Доведення для довільного (можливо дуже великого) числа множин цим методом неповної індукції буде дуже громіздке і тому краще застосувати метод математичної індукції відомий нам ще зі школи. Згідно цього методу нам залишається припустивши виконання твердження при $m = k$, довести його виконання при $m = k + 1$. Зробимо це. Нехай $n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_k) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot ... \cdot n(A_k)$. Доведемо, що $n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_{k+1}) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot ... \cdot n(A_{k+1})$. Доведення. Так як $n(A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_{k+1}) = n\big((A_1 \times A_2 \times A_3 \times ... \times A_k) \times A_{k+1}\big) =$
$= \big(n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot ... \cdot n(A_k)\big) \cdot n(A_{k+1}) = n(A_1) \cdot n(A_2) \cdot n(A_3) \cdot ... \cdot n(A_{k+1})$.

Твердження доведено.

3. Декартів добуток має такі властивості:

1°. $A \times B \neq B \times A$ – декартів добуток не комутативний;

2°. $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$; $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

3°. $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$; $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;

4°. $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$; $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$.

Друга, третя і четверта властивості – це дистрибутивні властивості декартового добутку відносно операцій об’єднання, перерізу і різниці відповідно.

Всі ці властивості доводяться на основі означення декартового добутку, рівності множин і відповідних операцій над множинами (подібно до того як ми доводили властивості операцій над множинами на попередній лекції).

Доведемо некомутативну властивість декартового добутку: $A \times B \neq B \times A$, якщо $A \neq B$. Доведення цієї властивості слідує з самого означення декартового добутку і з того, що пари (a, b) і (b, a) не рівні, якщо $a \neq b$. Так як $A \neq B$, то такі пари обов'язково будуть і через це $A \times B \neq B \times A$. Властивість доведена.

Доведемо одну з дистрибутивних властивостей декартового добутку відносно об'єднання: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

Доведення. Нам слід довести, що кожен елемент (кортеж, довжини 2 чи 3 чи більшої (в залежності від того які елементи належать множинам), який є результатом декартового добутку), який належить множині $(A \cup B) \times C$ також належить множині $(A \times C) \cup (B \times C)$ і навпаки, що кожен елемент (кортеж), який належить множині $(A \times C) \cup (B \times C)$ також належить множині $(A \cup B) \times C$.

1) Якщо $x \in (A \cup B) \times C$, де x – елемент (кортеж), то згідно означення операції об'єднання і декартового добутку, отримаємо, що хоча б $x \in A \times C$ або $x \in B \times C$, тобто згідно означення операції об'єднання $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$.

2) Якщо $x \in (A \times C) \cup (B \times C)$, то згідно означення операції об'єднання хоча б $x \in A \times C$ або $x \in B \times C$, то згідно означення операції об'єднання і декартового добутку, отримаємо, $x \in (A \cup B) \times C$. Тотожність доведена.

Подібним чином доведемо одну з дистрибутивних властивостей декартового добутку відносно перерізу: $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.

Якщо $x \in A \times (B \cap C)$, то згідно означення операції перерізу і декартового добутку, отримаємо, $x \in A \times B$ і $x \in A \times C$, тобто $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$ і навпаки, якщо $x \in (A \times B) \cap (A \times C)$, то $x \in A \times B$ і $x \in A \times C$, а отже згідно означення операції перерізу і декартового добутку, отримаємо, $x \in A \times (B \cap C)$. Тотожність доведена.

Такими самими міркуваннями доведемо одну з дистрибутивних властивостей декартового добутку відносно різниці: $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Якщо $x \in (A \setminus B) \times C$, то згідно означення операції різниці і декартового добутку, отримаємо, $x \in A \times C$ і $x \notin B \times C$, тобто $x \in (A \times C) \setminus (B \times C)$ і навпаки, якщо $x \in (A \times C) \setminus (B \times C)$, то $x \in A \times C$ і $x \notin B \times C$, тобто згідно означення операції різниці і декартового добутку, отримаємо, $x \in (A \setminus B) \times C$. Тотожність доведена.

Лекція 4. Відповідності і відношення. Види відображень. Рівнопотужні і зчисленні множини

1. Бінарна відповідність. Наочні способи подання відповідностей. Типи відповідностей. Обернена відповідність.
2. Бінарне відношення. Способи задання відношень. Відношення обернене і протилежне даному.
3. Відображення множини “в” і “на” множину. Рівнопотужні множини. Зчислені множини.

1. В загальному ***бінарна відповідність*** між елементами множин *A* і *B* визначається самим словом бінарний (“бінарний” від латинського слова bis, що означає “двічі”, і показує, що мова йде про дві множини *A* і *B*). Наприклад: “Дівчина *a* навчається в ВУЗі *b*”, де $a \in A, b \in B$ (*a* належить множині *A* дівчат, а *b* – множині *B* ВУЗів).

Дане інтуїтивне, описове поняття ***відповідності*** можна замінити цілком конкретним математичним об’єктом – множиною пар (підмножиною відповідного декартового добутку), компоненти яких перебувають у даній відповідності.

Бінарною відповідністю, визначеною у множинах *A* і *B*, називається кожна підмножина декартового добутку $A \times B$.

Множина A – ***множина відправлення***, B – ***прибуття*** *відповідності α*. Разом їх називають базовими множинами відповідності *α*. Зрозуміло, що відповідність $\alpha \subset A \times B$. Дану відповідність позначають так: $A \xrightarrow{\alpha} B$.

Якщо між елементами *a*, *b* існує відповідність *α*, то позначають це так: $(a,b)\in\alpha$, або $a\alpha b$, або $\alpha(a)=b$.

При відповідності $A\xrightarrow{\alpha}B$ ***образом*** елемента $a\in A$ називають множину тих $b\in B$ (тих елементів з множини *B*), для яких $\alpha(a)=b$, тобто $(a,b)\in\alpha$. ***Прообразом*** елемента $b\in B$ називають множину тих $a\in A$, для яких $\alpha^{-1}(b)=a$, тобто $(a,b)\in\alpha$.

Множину всіх перших компонентів пар відповідності *α* називають ***областю визначення*** відповідності *α*. Множину всіх других компонентів пар відповідності *α* називають ***областю значень*** відповідності *α*.

Якщо дві множини *A* і *B*, співпадають, тобто *A* = *B*, то, між двома елементами однієї множини *A*, говорять не про відповідність, а про ***відношення на множині***.

Відповідність можна подати різними мовами (способами):

а) теоретико-множинною мовою (у вигляді множини пар);

б) мовою матриць (таблиць);

в) мовою графів.

Перша з них є зрозумілою з самого означення відповідності.

Дві останні відносяться до наочних способів подання відповідностей. Розглянемо їх.

Нехай *A* = {2; 3; 6; 12), *B* = {2; 3; 4} і відповідність $\alpha\subset A\times B$ має вигляд:

α = {(2, 2), (3, 3), (6, 2), (6, 3}, (12, 2), (12, 3), (12, 4)},

тобто змістовно α означає подільність чисел з множини *A* на числа з множини *B*.

Випишемо по вертикалі всі елементи множини *A*, а по горизонталі – множини *B* (рис. 3). Якщо пара $(a,b)\in\alpha$, де $a\in A, b\in B$, то на перетині відповідного рядка і стовпця записуємо 1, у противному разі записуємо 0. Одиниця і нуль тут визначають істинність висловлень про належність пар даній відповідності. Так, у рядку, де міститься елемент 6, є дві одиниці і один нуль. Це означає, що висловлення (6, 2)$\in\alpha$ (або “6 кратне 2”), (6, 3)$\in\alpha$ (або “6 кратне 3”) істинні, а висловлення (6, 4)$\in\alpha$ (або “6 кратне 4”) – хибне. Таку прямокутну таблицю з нулів і одиниць називають ***матрицею даної відповідності***.

$A \backslash B$	2	3	4
2	1	0	0
3	0	1	0
6	1	1	0
12	1	1	1

Рис. 3

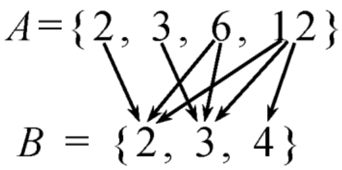


Рис. 4

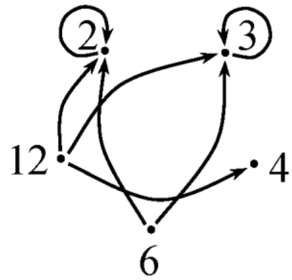


Рис. 5

Графом називають систему точок (вершин графа) і стрілок (орієнтовних ребер графа), які сполучають деякі з цих точок. Як подання відповідностей за допомогою графів розглянемо попередній приклад. Випишемо елементи множини A, а під ними елементи множини B (рис. 4). Якщо $(a, b) \in \alpha$, то проводимо стрілку від a до b. Виконавши таку побудову для всіх пар з α, дістанемо граф відповідності α.

Граф відповідності будують ще й так. Зображують елементи множин A і B на площині не в лінійній послідовності, а, наприклад, точками на колі, і сполучають стрілками елементи, які перебувають у даній відповідності α. При цьому спільні елементи (якщо такі є) множин A *і* B виписують один раз. Парі виду (a, a) відповідатиме стрілка від a до a (петля графа) (рис. 5).

За допомогою таблиць і графів можна задавати (або ілюструвати) лише скінченні відповідності з порівняно невеликою кількістю елементів. Для нескінченних відповідностей такими способами можна ілюструвати лише деякі їх скінченні частини. Такі скінченні частини таблиць і графів дають часто досить наочне уявлення про зміст нескінченних відповідностей.

Серед великої різноманітності відповідностей виділяють деякі характерні їхні типи: ***порожня відповідність*** ($\alpha = \varnothing$); ***повна відповідність*** ($\alpha = A \times B$); ***відповідність всюди визначена у множині відправлення*** (усі елементи множини A є першими компонентами пар відповідності α); ***сюр'єктивна відповідність*** (відповідність на всю множину прибуття, тобто усі елементи множини B є другими компонентами пар відповідності α); ***ін'єктивна відповідність*** (елементи з множини прибуття містять не більше одного прообразу); ***функціональна відповідність*** або ***функція*** (відповідність, коли кожному елементу з множини відправлення відповідає не більше як один елемент (однозначність)); ***відображення*** (всюди визначена функціональна відповідність); ***бієктивна відповідність*** (сюр'єктивне відображення, яке є ще ін'єктивним, тобто це одночасно всюди визначена і сюр'єктивна, і ін'єктивна, і функціональна відповідність).

Оберненою відповідністю до відповідності $\alpha \subset A \times B$, називають таку відповідність, яка є підмножиною декартового добутку $B \times A$ і складається з тих і тільки тих пар (b, a), для яких $(a, b) \in \alpha$.

Відповідність, обернену до α, позначають через α^{-1}. Таким чином, $(b, a) \in \alpha^{-1} \Leftrightarrow (a, b) \in \alpha$.

Оберненим відображенням до відображення $A \xrightarrow{f} B$, називають таке відображення f^{-1}, що коли для кожного $x \in A$ і кожного $y \in B$ виконується $f(x) = y$, то $f^{-1}(y) = x$, тобто $f^{-1}\big(f(x)\big) = x$.

Ті відображення, які мають обернені відображення називають ***оборотними відображеннями***. Кожне бієктивне відображення є оборотним і навпаки.

2. Раніше було розглянуто відповідність, в якій множини відправлення і прибуття збігаються. Нам вже відомо, що такі відповідності називають ***відношеннями***, і при цьому говорять про відношення у множині.

Аналогічно, як і при відповідності, множину перших компонентів пар даного відношення називають областю визначення даного відношення, а множину других компонентів пар – областю його значень.

Наприклад, розглянемо на множині цілих чисел більших за -4 і менших за 7 бінарне відношення $\frac{6}{x}+2=y$. Якщо $x=-3$, то $y=0$, тобто пара $(-3,0)$ належить даному відношенні. Аналогічно даному відношенні будуть належати ще і такі пари: $(-2,-1)$, $(2,5)$, $(3,4)$, $(6,3)$. Отже, на множині $A=\{x|x\in Z,-4<x<7\}$ бінарне відношення $\frac{6}{x}+2=y$ має область визначення $\{-2,2,3,6\}$ і область значень $\{-1,3,4,5\}$.

Бінарним відношенням, визначеним у множині *M*, називають кожну підмножину декартового добутку $M\times M$, або декартового квадрата M^2.

Так, відношення "*a* паралельна *b*", "*a* перпендикулярна до *b*" розглядають у множині прямих на площині; відношення "*a* ділиться на *b*", "*a* взаємно-просте з *b*" – у множині натуральних чисел N тощо. Кожне рівняння (нерівність) з двома змінними, а також їхні системи у фіксованій числовій множині *M* є прикладами відношень у *M*.

Відношення, як і відповідності, можна зображати за допомогою таблиць (матриць) і графів. При зображенні за допомогою графів можуть бути: стрілки від *a* до *a* (петлі) (наприклад, для відношення подільності); разом із стрілкою від *a* до *b* також стрілка від *b* до *a* (наприклад, для відношень паралельності й перпендикулярності). Звичайно, елементи множини, на якій розглядається відношення, зображуються на площині один раз і розміщуються довільно.

Відношення можна задати одним з трьох способів:

1). На скінченій множині – *переліком пар*, які задає дана відповідність. Цей спосіб задання відповідності ще інакше називають матрицею, графіком або таблицею.

2). Вказавши на *характеристичну властивість* усіх пар, які задає дана відповідність. Наприклад, “$x < y$“ на множині чисел, “$a \perp b$“ на множині прямих.

3). На числових множинах – *графіком* на координатній площині. Коли графіком є не ізольовані точки і не лінія, а частина площини, її заштриховують.

Відношення $\overline{\varphi}$ між елементами множини X називається ***протилежним до відношення*** φ, якщо воно є доповненням відношення φ до декартового квадрата X^2. Відношення $\overline{\varphi}$ можна задати як заперечення даного відношення φ.

Відношення φ^{-1} називається ***оберненим до відношення*** φ, якщо $\varphi^{-1}(y) = x$ виконується тоді і тільки тоді, коли $\varphi(x) = y$, де $x \in X$, $y \in Y$. Відношення φ^{-1} можна задати переліком всіх пар, помінявши в кожній парі відношення φ місцями перший і другий компоненти. Щоб дістати граф відношення φ^{-1}, треба у графі відношення φ змінити напрям стрілок.

Перетином двох відношень називається відношення, графіком якого є перетин графіків даних відношень.

Об’єднанням двох відношень називається відношення, графік якого є об’єднанням графіків даних відношень.

3. ***Відображення множини*** A ***на множину*** B – це таке відображення, коли область значень відображення збігається з областю прибуття. Іншими словами, коли в множині B немає елементів, які б не були образами деякого або деяких елементів множини A.

***Відображення множини** A **в множину** B* – це таке відображення, коли в множині B можуть бути і елементи, які не є образами того чи іншого елемента множини A.

Якщо відображення f є бієктивним, то його називають ***взаємно-однозначним*** відображенням.

Кожна множина характеризується ***потужністю***. Потужність скінченої множини дорівнює числу її елементів.

Наприклад, множина $A = \{a, b, c, p, e\}$ має 5 елементів. Це число і буде її потужністю. Позначається так: $n(A) = 5$. Ця множина рівнопотужна множині пальців руки.

Множини A і B називають ***рівнопотужними*** (***еквівалентними***, ***рівносильними***) тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одне бієктивне (взаємно однозначне) відображення $A \xrightarrow{f} B$.

Позначають на письмі дві рівнопотужні множини A і B так: $A \sim B$.

Відношення рівнопотужності множин має властивості рефлексивності, симетричності, транзитивності.

На властивості транзитивності рівнопотужних множин здійснюється розподіл місць у театрі, кіно, в рейсових автобусах. Тут A – множина тих місць, на які продано квитки, B – множина проданих квитків, C – множина людей, які купили квитки з B. Поняття рівнопотужності множин використовується для уточнення поняття скінченої і нескінченної множини, яке розуміється нами лише на інтуїтивній основі.

Множина A є ***скінчена***, якщо не існує взаємно однозначного відображення цієї множини на деяку свою підмножину A_1, таку, що $A_1 \neq A$. Множину A називають ***нескінченною***, якщо вона рівнопотужна деякій своїй власній підмножині, тобто якщо $A \sim A_1$, де $A_1 \subset A$ і $A_1 \neq A$

Наприклад. A – множина додатних парних чисел, B – множина натуральних чисел, кратних 6, $B \subset A$, $A \sim B$ ($2 \rightarrow 6$, $4 \rightarrow 12$, $6 \rightarrow 18, \ldots$), тобто можна встановити взаємно однозначну відповідність між елементами цих множин. Отже A – нескінченна множина.

Множину, що має ту саму потужність, що і множина натурального ряду чисел, називають ***зчисленною***.

Множина цілих чисел – зчисленна, бо вона рівнопотужна з множиною натуральних чисел, бо існує біективне (взаємно однозначне) відображення: (0→1, 1→2, –1→3, 2→4, –2→5,...).

Множина дійсних чисел не є зчисленною.

Лекція 5. Властивості бінарних відношень. Упорядковані множини. Поняття про комбінаторику

1. Властивості відношень на множині.
2. Відношення еквівалентності. Розбиття множин на класи.
3. Відношення порядку і його властивості.
4. Упорядковані множини. Лінійно впорядковані множини. Повний порядок. Властивості дискретності і щільності лінійно упорядкованих множин.
5. Поняття про комбінаторні задачі.

1. Деякі з властивостей відношень на множині схожі між собою в одному і відмінні – в іншому. Отже, треба виділити найбільш загальні й істотні властивості відношень та покласти їх в основу характеристики найважливіших і найпоширеніших типів відношень.

Відношення α, визначене у множині M, називають:

рефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ виконується $(a,a) \in \alpha$ (a знаходиться у відношенні α само до себе). Відношення “подільності”, “паралельності прямих", “рівності” є рефлексивними, а відношення “більше”, “менше”, “перпендикулярності” – ні;

антирефлексивним, якщо для кожного $a \in M$ твердження $(a,a) \in \alpha$ не виконується (a не знаходиться у відношенні α само до себе). Антирефлексивними є відношення “більше”, “менше” у числових множинах і перпендикулярності – у множині прямих на площині;

арефлексивним (***нерефлексивним***), якщо деякі елементи $a \in M$ не знаходяться у відношенні $(a,a) \in \alpha$, а деякі елементи $a \in M$ знаходяться у відношенні $(a,a) \in \alpha$. Відношення „шанувати” на множині людей Землі (деякі люди себе шанують, а деякі – ні);

симетричним, якщо для будь-яких $a,b \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha \Rightarrow (b,a) \in \alpha$ (якщо *a* перебуває у відношенні *α* до *b*, то *b* також перебуває у відношенні *α* до *a*). Відношення “паралельності”, “перпендикулярності” прямих на площині, “подібності” геометричних фігур є симетричними;

антисиметричним, якщо для кожних $a,b \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha$ і $a \neq b \Rightarrow (b,a) \notin \alpha$ (якщо *a* перебуває у відношенні *α* до *b* і $a \neq b$, то *b* не перебуває у відношенні *α* до *a*). Антисиметричними є відношення “більше або дорівнює” (≥), “менше або дорівнює” (≤), “є підмножиною” ($\subseteq$);

асиметричним, якщо для кожних $a,b \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha \Rightarrow (b,a) \notin \alpha$ (якщо *a* перебуває у відношенні *α* до *b*, то *b* не перебуває у відношенні *α* до *a*). Асиметричними є відношення “подільності”, “більше”, “менше”;

транзитивним, якщо для будь-яких $a,b,c \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha$ і $(b,c) \in \alpha \Rightarrow (a,c) \in \alpha$ (якщо *a* знаходиться у відношенні *α* до *b*, а *b* – у відношенні *α* до *c*, то *a* перебуває у відношенні *α* до *c*);

антитранзитивним, якщо для будь-яких $a,b,c \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha$ і $(b,c) \in \alpha \Rightarrow (a,c) \notin \alpha$ (якщо *a* знаходиться у відношенні *α* до *b*, а *b* – у відношенні *α* до *c*, то *a* не перебуває у відношенні *α* до *c*);

транзитивним, якщо для будь-яких $a,b,c \in M$ виконується властивість $(a,b) \in \alpha$ і $(b,c) \in \alpha \Rightarrow (a,c) \in \alpha$ (якщо *a* знаходиться у відношенні *α* до *b*, а *b* – у відношенні *α* до *c*, то *a* перебуває у відношенні *α* до *c*);

атранзитивним, якщо відношення не є ні транзитивним ні антитранзитивним;

зв'язним, якщо для будь-яких $a, b \in M$ виконується властивість $a \neq b \Rightarrow (a,b) \in \alpha$, або $(b,a) \in \alpha$ (якщо $a \neq b$, то a перебуває у відношенні α до b, або навпаки). Зв'язними є відношення "більше", "менше", а відношення "подільності", "паралельності", ""перпендикулярності" – ні.

У процесі розвитку та практичної діяльності викристалізовувалися найважливіші групи відношень, зокрема відношення еквівалентності, порядку, функціональне (функція).

2. Відношення α, визначене у множині M, називають *відношенням* ***еквівалентності*** або ***еквівалентністю*** в M, якщо воно рефлексивне, симетричне й транзитивне. Для того щоб відношення α було відношенням еквівалентності, повинні виконуватися всі три властивості.

Наприклад, відношення рівності визначене на довільній множині M має всі три властивості, отже воно є відношенням еквівалентності: $a = a$ – рефлексивність; $a = b \Leftrightarrow b = a$ – симетричність; $(a = b) \wedge (b = c) \Rightarrow a = c$ – транзитивність.

Аналогічно відношення паралельності на множині прямих є відношенням еквівалентності, бо $a \parallel a$, $a \parallel b \Leftrightarrow b \parallel a$, $(a \parallel b) \wedge (b \parallel c) \Rightarrow a \parallel c$.

Відношення «навчатися в одному класі» на множині учнів школи є також відношенням еквівалентності.

За допомогою відношення еквівалентності виконується досить поширена операція – ***розбиття*** не порожньої множини на підмножини, які називають ***класами***, або *класами еквівалентності*.

Покажемо, як зв'язані на множині M відношення еквівалентності з поняттям розбиття цієї множини.

Кожне розбиття S множини M визначає, при тому тільки єдине, відношення еквівалентності α, і навпаки, кожному відношенню еквівалентності α на M відповідає, при тому тільки єдине, розбиття S множини M.

Будь-яке відношення еквівалентності α здійснює, при тому тільки єдине, розбиття S множини M на класи, і навпаки, кожне розбиття S множини M визначає, при тому тільки єдине, відношення еквівалентності α.

Відношення еквівалентності α здійснює **розбиття *S* множини *M* на класи**, так що:
1) кожен елемент множини належить одному і тільки одному класу;
2) будь-які два елементи одного класу перебувають у даному відношенні еквівалентності;
3) будь-які два елементи, що належать різним класам, не перебувають у цьому відношенні.

Наприклад: *Відношення паралельності на множині площин* розбиває цю множину на класи еквівалентності (стопи паралельних площин) так, що: 1) будь-яка площина належить одному і тільки одному із цих класів; 2) будь-які дві площини одного класу паралельні між собою; 3) будь-які дві площини різних класів не паралельні між собою.

Тут класи еквівалентності послужили джерелом утворення нового поняття – напряму нормалі стопа площин (перпендикулярної (нормальної) прямої стопа площин: кожен із класів еквівалентності площин, тобто кожна стопка паралельних площин, задає напрям своєї нормалі.

Відношення еквівалентності наочно зображується системою повних графів, побудованих на класах еквівалентності. ***Повним*** називають граф, в якого всі точки сполучено стрілками і всі вершини мають петлі. Між кожною парою точок проходять дві протилежні стрілки (властивість симетричності), тоді для простоти рисунка їх замінюють відрізком, який сполучає ці точки.

3. Одним із основних понять сучасної математики є *поняття структури* ***порядку***. Структури порядку визначаються бінарними відношеннями порядку на множині.

Досі ми розглядали множини, порядок розміщення елементів яких нас не цікавив. Проте вже в декартовому добутку множин порядок розміщення був не абияким: елементами декартового добутку $A \times B$ є такі пари елементів, у яких перший компонент обов'язково належить множині *A,* а другий – *B.* Тобто, в будь-якій такій парі елемент множини *A* передує елементу множини *B*.

У повсякденному житті часто користуємося виразами: “передує”, “слідує за”, “ближче”, “далі”, “вище”, “нижче” і т. д. Наприклад, понеділок “передує” вівторку і “слідує за” неділею.

Абстрагуючись від конкретних множин і об'єктів, які є їх елементами, вважатимемо, що коли між елементами множини *M* встановлено відношення «передує», тобто елементи множини розміщено так, що для будь-якої пари елементів *x* і *y* можна вказати, який із них передує іншому, то на множині установлене *відношення* ***строгого*** *порядку*.

Замість “*x* передує *y*“ коротко пишуть $x < y$ і тоді “*y* слідує за *x*”, $y > x$, тобто відношення строгого порядку антисиметричне. Оскільки в множині елементи різні (не повторюються), то цілком зрозуміло, що ніякий елемент не передує сам собі. Отже, це відношення антирефлексивне. Якщо ж один елемент передує другому, а другий – третьому, то тим більше перший з цих елементів передує третьому, тобто відношення транзитивне.

Таким чином, відношення строгого порядку на множині *A* визначається трьома умовами:

1) *антирефлексивність:* для будь-якого $x \in A$ не має місця $x < x$;

2) *антисиметричність:* для будь-яких $x \in A$ і $y \in A$, таких, що $x < y$ і $x \neq y$, не має місця $y < x$;

3) *транзитивність:* для будь-яких $x \in A$ і $y \in A$, і $z \in A$ таких, що $x < y$, а $y < z$, має місце $x < z$.

Наприклад, відношення “менше” на множині $\{1, 4, 6, 8, 9\}$ є відношенням строгого порядку, бо:

1) $(x < y \text{ і } y < z) \Rightarrow x < z$ – відношення транзитивне $(1 < 4$ і $4 < 6) \Rightarrow 1 < 6$; $(1 < 6 \text{ і } 6 < 8) \Rightarrow 1 < 8$; $(4 < 6 \text{ і } 6 < 9) \Rightarrow 4 < 9$;…..

2) $1 < 4 \Rightarrow \overline{4 < 1}$; $4 < 6 \Rightarrow \overline{6 < 4}$;… – відношення антисиметричне.

3) $\overline{1 < 1}$; $\overline{4 < 4}$;… – відношення антирефлексивне.

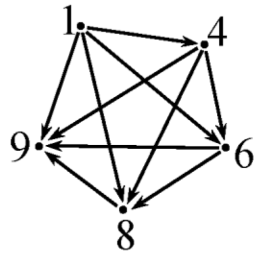


Рис. 6

Отже відношення “менше” на даній множині є відношенням строгого порядку. Граф цього відношення (рис. 6) не має петель. Будь-яку пару чисел (x, y), таку, що $x < y$, зв’язує тільки одна стрілка, яка йде від x до y. Графіком відношення є така множина: $\{(1, 4), (1, 6), (1, 8), (1, 9), (4, 6), (4, 8), (4, 9), (6, 8), (6, 9), (8, 9)\}$.

Уточнимо відношення порядку таким означенням.

Відношення α, визначене у множині M, називають відношенням ***строгого*** *порядку,* якщо воно транзитивне і асиметричне, і відношенням ***нестрогого*** *порядку,* якщо воно транзитивне і антисиметричне.

З означення випливає, що відношення строгого порядку – антирефлексивне, а нестрогого – рефлексивне. Серед відношень строгого порядку є такі відношення: “більший”, “грубіший”, “швидший”, “важчий”, “темніший”, “густіший”, “старший”, “молодший”. Відношеннями нестрогого порядку у множині чисел є «більше або дорівнює» , «менше або дорівнює», або відношення подільності у множині N натуральних чисел є також відношенням нестрогого порядку.

4. Множина називається ***упорядкованою***, якщо відносно будь-яких її елементів x і y встановлено, який з них слідує за другим (або, навпаки, який передує другому), причому задовольняються умови антирефлексивності, антисиметричності і транзитивності.

Це може бути, наприклад, множина членів сім'ї, елементи якої упорядковані за віком.

Звичайно, з натуральних чисел можна утворити і невпорядковану множину, при умові, коли нас не цікавить порядок слідування елементів, а лише якась інша умова, наприклад, нас цікавлять лише парні числа першого десятка. Елементи цієї множини можна записати в будь-якому порядку: а) в порядку зростання: (2, 4, 6, 8, 10); б) в порядку спадання: (10, 8; 6, 4, 2); в) будь як: {6, 4, 2, 8, 10).

Елементи множини можуть бути упорядковані за будь-якою ознакою (за кольором, за формою і т. ін.). Так, щоб легше користуватися словником, у ньому слова упорядковують за буквами, які стоять “швидше” в алфавіті. Числові множини здебільшого впорядковані за величиною чисел.

Початковим елементом упорядкованої множини називають елемент, якому не передує ніякий інший елемент, тобто початковий елемент не має попереднього. Елемент, який не має наступного, називають ***останнім***. Звичайно, не всяка множина має початковий або останній елемент. У множині натуральних чисел початковим елементом є 1, останнього елемента немає.

Якщо $a > b$ і якщо для будь-якого елемента $x \neq a$ і $x \neq b$ із того, що $a > x$, слідує, що x не $> b$, то вважають, що a безпосередньо слідує за b.

Відношення порядку в упорядкованій множині називають *відношенням* ***лінійного*** або ***цілковитого порядку***, якщо це відношення зв'язне. Пригадаємо, відношення φ на множині M називається зв'язним, якщо для будь-яких двох елементів цієї множини $a \neq b$ виконується або $a \varphi b$, або $b \varphi a$. Відношення порядку, яке не має властивості зв'язності, називають *відношенням* ***часткового порядку***. Відповідно множину називають ***лінійно-упорядкованою*** або ***частково упорядкованою*** множиною.

Наприклад відношення “x кратне y” на множині натуральних чисел є відношенням часткового і нестрогого порядку: це відношення рефлексивне (a кратне a) і не для будь-якої пари нерівних натуральних чисел виконується одне з двох або a кратне b, або b кратне a.

Відношення "$a > b$" – відношення лінійного і строгого порядку на множині натуральних чисел; це відношення антирефлексивне і для будь-якої пари натуральних чисел таких, що $a \neq b$, виконується одна із умов: або $a > b$ або $b > a$.

Якщо в упорядкованій множині M кожна непорожня множина має найменший елемент, то такий порядок називають ***повним***, а множину – ***цілком упорядкованою***.

Повний порядок – завжди лінійний, оскільки будь-яка двоелементна підмножина даної множини має найменший елемент, а отже, для будь-якої пари різних елементів цілком упорядкованої множини хоч би одне із співвідношень $a > b$ або $b > a$ правильне.

Лінійно упорядковані множини мають ряд властивостей. Розглянемо деякі з них.

Нехай a, b, c – елементи множини M, упорядкованої деяким відношенням. Якщо відомо, що елемент a перебуває в цьому відношенні з елементом b і елемент b перебуває в цьому відношенні з елементом c, то говорять, що елемент b лежить між елементами a і c.

Наприклад, якщо множина натуральних чисел упорядкована відношенням "$x < y$", то з того, що $2 < 5$ і $5 < 7$, слідує, що число 5 лежить між числами 2 і 7.

Множина X, яка є лінійно впорядкованою, називається ***дискретною***, якщо між будь-якими двома її елементами лежить лише скінчена множина елементів. Наприклад: множина цілих чисел, множина натуральних чисел.

Лінійно впорядкована множина називається ***щільною***, якщо для будь-яких різних елементів цієї множини існує елемент множини, що лежить між ними. Наприклад: множина раціональних чисел, дійсних чисел.

5. Поняття про комбінаторні задачі можна розпочати вводити з наступної простої комбінаторної задачі.

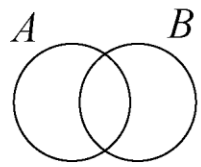
Серед семи дівчаток було три з бантиками і шість з косичками. Скільки було таких дівчаток, що мали і бантик і косички, якщо в кожної дівчинки серед цих семи був або бантик або косички?

Дана задача легко розв'язується за допомогою наступного правила, яке називають **правилом суми**:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

У справедливості цього правила легко переконатися за допомогою міркувань, що випливають з означення об'єднання множин: до елементів множини A, їх буде $n(A)$, приєднаємо елементи множини B, які не входять до складу множини A, їх буде $n(B) - n(A \cap B)$.

Якщо повернутися до нашої задачі і позначити множину дівчат з бантиками через множину A, а множину дівчат з косичками через множину B, то згідно даних задачі (три з бантиками і шість з косичками, а всього тільки сім) деякі дівчата повинні мати і бантик і косички, тобто повинні належати множині $A \cap B$. Множини, про які йдеться в задачі, перебуватимуть в відношенні перерізу і на кругах Ейлера-Венна зобразяться наступним чином:



З правила суми знайдемо $n(A \cap B)$:

$n(A \cap B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B) = 3 + 6 - 7 = 2$ (д.).

Відповідь: 2 дівчаток мали і бантик і косички.

Розглянемо іншу задачу. Скільки всіх чотирицифрових чисел є у десятковій системі числення?

Дана задача легко розв'язується за допомогою наступного правила, яке називають **правилом добутку**: число елементів декартового добутку скінчених множин дорівнює добутку чисел елементів у кожній з даних множин. Іншими словами: якщо елемент a_1 можна вибрати n_1 способами, а після його вибору елемент a_2 можна вибрати n_2 способами і т. д., а елемент a_n після вибору всіх попередніх – n_k способами, то тоді кортеж (a_1, a_2, …, a_k) можна вибрати $n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

У справедливості цього правила ми вже переконалися при виведенні числа елементів декартового добутку (число способів, якими можна вибрати кортеж довжини k, це не що інше, як число кортежів довжини k).

Повернемося до нашої задачі. Так як в числі на першому місці нуль не може бути, то перша цифра вибирається з множини з дев’яти елементів а решту з множини з десяти елементів, а тому: є $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$ чисел.

Розглянуті два правила (**правило суми і правило добутку**) є самі елементарні і майже очевидні правила комбінаторики, і за повного осмислення будь-якої комбінаторної задачі, можуть її розв’язати.

В комбінаториці розглядаються ще і такі поняття як ***розміщення*** з m елементів по n ***без повторення*** і ***з повторенням***; ***перестановка*** з елементів множини M ***без повторення*** і ***з повторенням***; ***комбінація*** (***вибірка***, ***сполучення***) з m елементів по n. Дані поняття дають змогу швидко за допомогою відповідної формули розв’язати складну комбінаторну задачу. Розгляд цих понять за браком аудиторного часу виноситься на самостійне опрацювання.

Лекція 6. Висловлення. Алгебра висловлень

1. Висловлення.
2. Логічні операції над висловленнями.
3. Формули. Таблиці істинності. Рівносильні формули.
4. Властивості і закони операцій над висловленнями. Тотожно істинні формули. Логічне слідування.

1. Люди, висловлюючись, передають свої судження й умовиводи, тобто фіксують їх за допомогою речень. Висловлення – основний об'єкт вивчення математичної логіки. ***Висловленнями***

називають такі речення відносно яких можна поставити запитання: істинні вони чи хибні? Ці речення обов'язково є розповідні чи стверджувальні. Тобто ***висловленням*** *називається твердження, про яке можна сказати або дізнатися,* ***істинне*** (*правильне*) *воно чи* ***хибне*** (*неправильне*).

Прикладами висловлень є такі: 1). Якщо кожний з доданків ділиться на 3, то їхня сума також ділиться на 3. 2). Число (–5) менше числа (–8). 3). Число 2 – просте число. 4). Чайковський – англійський композитор. 5). Гіпотенуза прямокутного трикутника більша за його сторону.

Наші знання дають підставу твердити, що висловлення 1, 3 і 5 – правильні, або істинні, а висловлення 2 і 4 – хибні. Терміни «висловлення», «істинне висловлення», «хибне висловлення» належать до неозначуваних понять, їх розуміння дається нам досвідом, суспільною практикою.

Наступні два речення: 6). «Піди купи хліба». 7). «Скільки днів до нового року?» не є висловленнями, бо відносно них немає сенсу ставити запитання, істинні вони чи хибні, вони не мають значень істинності.

Подібно тому як в геометрії розглядають лише форму фігури не беручи до уваги з чого вона зроблена, в математичній логіці абстрагуються від конкретного змісту висловлення, вивчаючи його тільки з точки зору того, істинне вони чи хибне.

З наведених вище висловлень 2) – 5) не можна виділити більш коротші. Такі висловлення називають ***елементарними*** або *атомарними*, *неподільними*.

Висловлення 1) не елементарне, з нього можна виділити два самостійних висловлення: «кожний з доданків ділиться на 3» і «їхня сума також ділиться на «3». Висловлення 1) утворено з цих двох висловлень за допомогою словосполучення «якщо ..., то ...».

Якщо якесь конкретне висловлення, наприклад, «Івась – учень сьомого класу», треба позначити буквою, то пишуть A: «Івась – учень сьомого класу». При цьому говорять, що A – це ім'я висловлення «Івась – учень сьомого класу». Якщо висловлення А істинне, то записують $A = 1$ (або і); якщо A – хибне, то $A = 0$ (або х). Зазначимо, що тут 1 і 0 – не числа, а просто символи для позначення істинності або хибності.

Твердження $x + 3 = 5$ не є висловленням, бо при одних значеннях x воно істинне (при $x = 2$), при інших – хибне. Такі твердження називають *висловлювальними формами або предикатами* про які йтиме мова пізніше.

З простих висловлень за допомогою сполучників «і», «або», «якщо..., то...», «тоді і тільки тоді, коли» можна утворити ***складені*** висловлення.

2. При утворенні складених висловлень (це особливо стосується математичних текстів) найчастіше вживають сполучники «і», «або» (у виключаючому і не виключаючому розумінні), «якщо ..., то ...», «тоді і тільки тоді, якщо ...» і частку «не».

Візьмемо, наприклад, такі висловлення: A: «Сума цифр натурального числа m кратна дев’яти», B: «Натуральне число m кратне дев’яти» (m – якесь конкретне число а не змінна). За допомогою сполучників можна дістати чимало інших висловлень, істинних і хибних. Наприклад, «Якщо сума цифр натурального числа m кратна дев’яти, то натуральне число m кратне дев’яти», «сума цифр натурального числа m кратна дев’яти і натуральне число m не кратне дев’яти» і т. д. Ці складені висловлення є результатом ***алгебри висловлень***, яка використовуючи ***логічні операції***, дає змогу з одних висловлень утворювати інші, більш складені висловлення. Математичну логіку цікавить тільки значення істинності висловлень, тому з самих означень логічних операцій має випливати значення істинності складеного висловлення за значенням істинності його складових частин (компонентів).

Запереченням висловлення A називається висловлення «не A», яке істинне тоді і тільки тоді, коли A хибне. Таблиця істинності заперечення висловлення має вигляд:

A	$\overline{A}$
1	0
0	1

Операцію ***заперечення*** переважно позначають знаком $^{-}$. У звичайній мові цій операції відповідає частка «не». Запис $\overline{A}$ читається: «не A», «неправда, що A».

Нехай, наприклад A: «сьогодні перше січня і п'ять хвилин першої ночі», B: «11 – просте число». Очевидно, що $A = 0$, $B = 1$. Тоді $\overline{A}$: «неправда, що сьогодні перше січня і п'ять хвилин першої ночі» і зрозуміло, що $\overline{A} = 1$. Аналогічно $\overline{B}$: «11 – не просте число» і $\overline{B} = 0$.

Операція заперечення майже адекватно передає смисл застосування частки «не» в практиці розмовної та письмової мови.

Диз'юнкцією двох висловлень A, B називається таке висловлення $A \vee B$ («A або B»), яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення хибні. Таблиця істинності диз'юнкції двох висловлень має вигляд

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Операція ***диз'юнкції*** позначається знаком $\vee$. У звичайній мові їй відповідає сполучник «або» в невиключаючому розумінні. Запис $A \vee B$ читається як «A диз'юнкція B», або як «A або B».

Висловлення «Я вивчу ці правила або не здам математику» містить елементарні компоненти A: «Я вивчу ці правила», B: «Я не здам математику» і може бути символічно записане у вигляді $A \vee B$.

Операція диз'юнкції дає ***логічне додавання*** висловлень.

Знак диз'юнкції «$\vee$» схожий із знаком об'єднання множин «$\cup$».

Кон'юнкцією двох висловлень A, B називається висловлення $A \wedge B$ («A і B»), яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли обидва висловлення A і B істинні. Таблиця істинності кон'юнкції двох висловлень має вигляд:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Операцію ***кон'юнкції*** переважно позначають знаком $\wedge$. У звичайній мові їй відповідає сполучник «і». Запис $A \wedge B$ читається як «A кон'юнкція B» або як «A і B».

Операція кон'юнкції дає ***логічний добуток*** висловлень.

Знак кон'юнкції «$\wedge$» схожий із знаком перерізу множин «$\cap$».

Імплікацією двох висловлень A, B називають висловлення $A \Rightarrow B$ ("якщо A, то B"), яке буде хибним тоді і тільки тоді, коли A – істинне, а B – хибне. Таблиця істинності імплікації двох висловлень має вигляд:

A	B	$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{B}$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Операція ***імплікації*** відіграє важливу роль у логіці і особливо в математиці. Її переважно позначають знаком $\Rightarrow$ (іноді $\rightarrow$ чи $\supset$). Запис $A \Rightarrow B$ читається: "A імплікує B". Часто для читання цієї операції застосовують словосполучення: "Якщо A, то B", "з A слідує B", "B є наслідком з A". Висловлення A називають ***умовою*** (*антицедентом*) імплікації $A \Rightarrow B$, а висловлення B – ***наслідком*** (*консеквентом*).

"Якщо хочеш успішно здати екзамен з математики, то треба сумлінно вчити все те що скаже викладач" – імплікація. В марематичній логіці зміст висловлення не беруть до уваги, а оцінюють висловлення лише двома значеннями: "істина" і "хибність".

Висловлення $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ називається *імплікацією*, ***протилежною даній***, імплікація $B \Rightarrow A$ – ***оберненою даній***, а імплікація $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – ***оберненою до протилежної***.

Еквіваленцією двох висловлень A, B називається таке висловлення $A \Leftrightarrow B$ ("A тоді і тільки тоді, коли B"), яке істинне тоді і тільки тоді, коли обидва компоненти A і B мають однакові значення істинності. Таблиця істинності еквіваленції має вигляд:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Операцію ***еквіваленції*** переважно позначають символом $\Leftrightarrow$. Запис А $\Leftrightarrow$ В читається: «A еквівалентне B», У звичайній мові цій операції відповідають словосполучення «A тоді і тільки тоді, коли B», «A необхідно й достатньо для B», «A, якщо і тільки якщо B».

3. Так само як з чисел за допомогою арифметичних операцій утворюють числові вирази, перетворюють їх, спрощують, знаходять їхнє числове значення, у математичній логіці з одних висловлень за допомогою скінченого числа застосувань логічних операцій $\bar{}$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, утворюють нові висловлення. Кожне складене висловлення зображується ***формулою***. Поняття формули (логічного виразу) як і будь-якого іншого виразу, можна ввести строго за індуктивним означенням, а саме:

а) кожне з елементарних висловлень є формулою;

б) якщо A, B – формули, то формулами є також і такі вирази: $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \Rightarrow B$, $A \Leftrightarrow B$;

в) ніякі інші логічні вирази, крім тих, які утворені за правилами пунктів а) і б) не є формулами.

Існують наступні ***правила однозначного порядку виконання*** *відповідних логічних операцій*, які застосовано в даній формулі.

1. Спочатку виконують логічні операції в самих внутрішніх дужках, потім у наступній за нею дужці і так далі, поки не буде виконано останню в такому порядку логічну операцію.

2. Якщо у формулі відсутні дужки, то *порядок виконання логічних операцій такий*: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

3. Вираз, що міститься під знаком операції заперечення, в дужки не беруть, але вважають його таким, який знаходиться в дужках, і обчислення його виконують окремо.

Компонентою формули (логічного виразу) є висловлення, яке може набувати лише одне з двох значень: 1 або 0. *Такі змінні називають* ***логічними***.

Оскільки кожна формула містить скінчену кількість таких змінних, а кожна змінна набуває лише двох значень, то існує лише скінчена кількість різних наборів значень змінних формули. Всі різні набори значень змінних формули лежать в основі так званої **таблиці істинності** формули.

Формула яка містить n різних логічних змінних має в своїй таблиці істинності 2^n різних наборів значень цих змінних. Доведемо це твердження.

Для формул з двома різними логічними змінними є тільки чотири різних набори їхніх значень – 11, 10, 01, 00. Для формул з трьома різними змінними коли перша з них набуває значення 1 для інших двох існуватимуть ці чотири набори і коли перша з них набуває значення 0 для інших двох також існуватимуть ці чотири набори, тобто 111, 110, 101, 100 і 011, 010, 001, 000 – вісім наборів.

По аналогії, для формул з чотирма різними логічними змінними існуватиме в два рази більше наборів ніж з трьома, тобто 16. І т.д. Твердження доведено методом неповної індукції. Очевидне доведення методом математичної індукції, бо якщо дане твердження виконується для деякого k числа компонент, то для $k+1$-ої компоненти треба існуюче число наборів значень змінних для k числа компонент помножити на два і в результаті отримаємо 2^{k+1}, що й треба було довести.

Розглянемо побудову таблиці істинності для формули: H: $\overline{A} \Rightarrow A \vee B$. Вона місти дві різні компоненти, а тому 4 різних набори їх значень.

A	B	$\overline{A} \Rightarrow A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Розглянемо побудову таблиці істинності для формули: F: $(\overline{A} \vee B) \wedge (B \Rightarrow C)$. Вона місти три різні компоненти, то існуватиме 8 різних наборів їх значень. Цей раз ми запишемо і результати проміжних обчислень:

A	B	C	$\overline{A}$	$(\overline{A} \vee B)$	$B \Rightarrow C$	$(\overline{A} \vee B) \wedge (B \Rightarrow C)$
1	1	1	0	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0
1	0	1	0	0	1	0
1	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	1

Побудуємо таблиці істинності для формул: F: $(A \Rightarrow B)$ і H: $(\overline{A} \vee B)$.

A	B	$A \Rightarrow B$	$\overline{A} \vee B$
0	0	1	1

0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1

Як бачимо, при однакових наборах значень їхніх компонентів A і B ці формули набувають однакових значень істинності. Дві формули називають ***рівносильними***, якщо вони на однакових наборах значень компонентів набувають однакових значень істинності. Якщо формули F і H рівносильні, то пишуть $F = H$.

Звертаємо увагу на рівносильність $(A \Rightarrow B)$ і $(\overline{A} \vee B)$, оскільки вона дає змогу замінити операцію $\Rightarrow$ операціями $\overline{}$, і $\vee$.

Аналогічно можна показати, що справедлива рівносильність $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, згідно з якою можна замінити операцію $\Leftrightarrow$ на $\Rightarrow$ і $\wedge$, а отже, на $\overline{}$, $\vee$, $\wedge$.

Таким чином, у логіці можна було б обмежитися трьома операціями: $\overline{}$, $\vee$, $\wedge$ (в техніці, користуються в основному лише ними). В математиці зручно користуватися також операціями імплікації та еквіваленції.

4. Основні властивості та закони операцій над висловленнями.

1°. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення;

2°. $A \vee B = B \vee A$, – переставна (комутативна) властивість;

3°. $A \wedge B = B \wedge A$, – переставна (комутативна) властивість;

4°. $(A \vee B) \vee C = A \vee (B \vee C)$ – сполучна (асоціативна) властивість;

5°. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C)$ – сполучна (асоціативна) властивість;

6°. $A \wedge (B \vee C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – I розподільна (дистрибутивна);

7°. $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$ – друга розподільна властивість;

8°. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$; $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$ – закони де Моргана;

9°. $A \vee \overline{A} = 1$ – закон виключеного третього;

10°. $A = A$ – закон тотожності;

11°. $A \vee 0 = A$; 12°. $A \vee A = A$; 13°. $A \wedge 0 = 0$; 14°. $A \wedge A = A$;

15°. $A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B$; 16°. $A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$;

17°. $A \wedge \overline{A}$ – закон несуперечливості;

18°. Закон двоїстості – якщо в тотожностях замінити $\wedge$ на $\vee$ (і навпаки), то тотожність не порушиться;

19°. $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – закон контрапозиції;

20°. $A \wedge (A \Rightarrow B) = B$ – стверджувальний модус;

21°. $\overline{B} \wedge (A \Rightarrow B) = \overline{A}$ – заперечливий модус;

22°. $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ – закон силогізму.

Дані властивості безпосередньо випливають з означення операцій над висловленнями і рівносильності формул. Вони або дуже прості, або доводяться з допомогою таблиць істинності.

Сукупність усіх висловлень разом з визначеними на ній логічними операціями $\overline{}$, $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ і основними властивостями цих операцій називають ***алгеброю висловлень***.

Формули, які для всіх можливих наборів значень істинності їхніх компонентів набувають тільки значення 1 (істина) називають ***тотожно істинними*** або ***тавтологіями***. Наприклад, формули $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$, $A \wedge (A \Rightarrow B) \Rightarrow B$, $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)$ є тавтологіями. Існують і інші тавтології.

Формули, які для всіх можливих наборів значень істинності їхніх компонентів набувають тільки значення 0 (хибність) називають ***тотожно хибними*** або ***суперечностями***. Очевидно, щоб дістати суперечність, досить взяти заперечення від тотожно істинної формули. Суперечливими є, наприклад, такі формули:

$$A \wedge \overline{A}, \quad \overline{(A \Rightarrow B) \Rightarrow (\overline{B} \Rightarrow \overline{A})}, \quad \overline{(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow C)}$$

Формула B називається ***логічним наслідком*** з формули A (або B логічно виходить з A), якщо B набуває значення 1 на всіх тих наборах значень логічних змінних, на яких A набуває значення 1. Якщо B логічно виходить з A, то пишуть $A \mid = B$.

Розглянемо таблиці істинності двох формул: $A \Leftrightarrow B$ і $A \Rightarrow B$:

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$A \Rightarrow B$
0	0	1	1
0	1	0	1

1	0	0	0
1	1	1	1

Формула $A \Rightarrow B$ набуває значення 1 на всіх тих наборах значень логічних змінних, на яких формула $A \Leftrightarrow B$ набуває значення 1. Отже, B логічно виходить з A, тобто $A \Leftrightarrow B \mid = A \Rightarrow B$.

Згідно з означенням, будь-яка формула логічно виходить з тотожно хибної формули (суперечності) і тотожно істинна формула логічно виходить з будь-якої формули.

Лекція 7. Предикати

1. Предикати.
2. Операції над предикатами і таблиця їх множин істинності.
3. Логічне слідування і рівносильність предикатів.

1. Часто значення істинності висловлення змінюється залежно від зміни множини об'єктів, яких воно стосується. Наприклад, твердження “x ділиться на 9”, а також твердження “t парне число” не є висловленнями, бо не можна сказати істинні вони чи хибні. Якщо замість змінної x підставити в перше речення, наприклад, числа 18, 27, 36, 45, дістанемо істинне висловлення, якщо ж підставити, наприклад, 44, дістанемо хибне висловлення, бо 44 не ділиться на 9. Друге речення буде правильним (істинним) висловленням при $t = 2$, $t = 4$, $t = 6$ і т. д. і хибним при $t = 1$; $t = 3$; $t = 5$; $t = 7$ і т. д.

Через те, що ці твердження при одних значеннях змінних є істинні, при інших – хибні, вони не є висловленнями. Такі твердження називають *предикатами* (висловлювальними формами, логічними функціями, змінними висловленнями).

Тобто, речення, які містять змінні аргументи і які після підстановки замість змінних аргументів імен конкретних об'єктів з певної множини M перетворюються у висловлення, називають ***предикатами*** (*висловлювальними формами, логічними функціями, змінними висловленнями*).

Отже ми від логіки висловлень перейшли до такого ступеня математичної логіки, як *логіка предикатів*, який має досконалішу символіку, виразні, багаті засоби вираження різних тверджень, досконалі засоби аналізу логічних міркувань.

Дані твердження “x ділиться на 9”, “t парне число” є висловлювальними формами від однієї змінної, одномісними висловлювальними формами, або логічними функціями однієї змінної. Ще вони є змінними висловленнями зі значеннями або істини або хибності. Задамо цим твердженням назви h і p відповідно. Тоді їх можна записати таким чином: $h(x)$: “x ділиться на 9” і $p(t)$: “t парне число”.

Слово «предикат» у перекладі з латинської мови означає «присудок». Наприклад, у реченні $h(x)$, що означає “x ділиться на 9”, підметом є змінна x, а присудком – «ділиться», а решта слів пояснювальні (“на що ділиться”? на 9).

Предикати $h(x)$, чи $p(t)$ визначають, як перший, так і другий, відповідно два одномісні відображення, визначені на множині N натуральних чисел, з множиною значень у дво-елементній множині $\{0; 1\}$, де 0 і 1 є, відповідно, позначеннями хибності та істини. Так само, наприклад, предикат $d(m)$: “m – студент” визначає відображення d, визначене на множині імен конкретних людей з множиною значень в $\{0; 1\}$. Отже, можна уявити собі предикат як логічну функцію, яка кожній змінній ставить у відповідність один і тільки один елемент із множини $\{1, 0\}$ (істинне, хибне).

Область визначення предиката – це область визначення його змінної. Областю визначення предикатів $h(x)$ і $p(t)$ є числова множина $M = \mathrm{N}$ об'єктів, а областю визначення предиката $d(m)$ є множина імен конкретних людей. Характерною особливістю будь-якого предиката є те, що множина значень завжди є двоелементна множина $\{1, 0\}$ (істинне, хибне).

Отже, ***одномісним предикатом*** називається деяке відображення h, визначене на деякій множині M, яке набуває значення лише в двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення $M \mapsto \{0; 1\}$.

Вираз $h(x)$ називають ***висловлювальною формою*** *предиката h*. Будь-який предикат $h(x)$ розбиває область визначення $M_h = M$ на дві підмножини, на одній із яких він перетворюється в істинне висловлення, на другій – в хибне. Першу з цих множин називають ***множиною істинності*** предиката $h(x)$ і позначають через T_h.

Логічні функції, або предикати, можуть бути і від двох або кількох змінних.

Двомісним предикатом називається відображення f, визначене на деякій предметній множині M, яке набуває значення лише в двоелементній множині $\{0;\ 1\}$, тобто відображення: $M^2 \xrightarrow{f} \{0; 1\}$, де $M^2 = M \times M$.

Двомісні предикати визначають відношення між об'єктами.

Розглянемо, наприклад, бінарне відношення "x кратне y" на множині N, яке кожній парі декартового квадрата $(x, y) \in \mathrm{N}^2$ ставить у відповідність один і тільки один елемент множини $\{1,\ 0\}$, тобто визначає логічну функцію двох змінних. Позначимо її через $h(x, y)$. Множина істинності T_h цієї функції є підмножиною N^2, тобто $T_h \subset \mathrm{N}^2$ і $T_h = \{(x, y) \mid h(x, y)\}$. Отже: $T_h = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathrm{N}^2, h(x, y)\} = \{(1, 1),\ (2, 1),\ (3, 1), \ldots,\ (2, 2),\ (4, 2), \ldots,\ (3, 3),\ (6, 3), \ldots\ (4, 4), \ldots, (5, 5), \ldots, (6, 6), \ldots\}$. Зрозуміло, що в цьому прикладі множина істинності предиката $h(x, y)$, множина T_h, є нескінченною, бо нескінченною множиною є множина визначення цього предиката, множина $M_h = \mathrm{N}$ і отже нескінченною множиною є множина N^2 .

Якщо двомісний предикат визначений на множині M, то його характеристичною множиною є підмножина прямого квадрата M^2 області визначення.

Так, наприклад, для предиката $h(x, y)$: "x кратне y" визначеного на множині N характеристичною множиною є множина $\mathrm{N}_h^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathrm{N} \wedge x \text{ кратне } y\}$. Очевидно, що множина $\mathrm{N}_h^2 = T_h$, бо це є множина таких пар (x, y) з натуральних чисел, в яких перша компонента ділиться на другу, тобто множина істинності предиката $h(x, y)$.

Рівняння, нерівності та їх системи є найпоширенішими в математиці прикладами предикатів.

Наприклад, розглянемо тримісний предикат $h(x, y, z)$: “$x + y = z$” визначений на деякій числовій множині M. Характеристичною множиною, а інакше – областю істинності, цього предиката є підмножина всіх трійок декартового добутку M^3, а точніше множина $M_h^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in M \wedge \text{“}x + y = z\text{”}\}$.

І, наприклад, якщо $M = \{-3, 0, 1, 2\}$, то $M_h^3 = \{(-3, 0, -3), (0, -3, -3), (0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 2, 2), (1, 0, 1), (1, 1, 2), (2, 0, 2)\}$, тобто це всі кортежі довжиною три, компоненти яких належать множині M і притому сума двох перших компонентів дорівнює третьому.

Предикат називається ***тотожно істинним***, якщо його область істинності збігається з універсальною множиною, на якій він розглядається, і ***тотожно хибним***, якщо множина його істинності порожня.

Предикати називаються ***рівносильними***, якщо їхні області істинності збігаються.

По-аналогії, до означення двомісного предиката, ***n-місним предикатом*** називається відображення f, визначене на деякій предметній множині M, яке набуває значення лише в двоелементній множині $\{0; 1\}$, тобто відображення $M^n \xrightarrow{f} \{0; 1\}$.

Прикладом n-місного предиката може бути невизначене рівняння $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$ на множині дійсних, чи цілих, чи натуральних чисел (з шкільного курсу відомо, що рівняння називається невизначеним, якщо воно має більше чим один єдиний розв'язок).

Предикат визначений на Ø, тобто предикат, в якого множина предметних змінних є порожньою, можна вважати **нуль-місним** предикатом. Зрозуміло, що такий предикат не залежатиме від області визначення і буде звичайним висловленням. Наприклад, нуль-місний предикат „Жінка читає книжку” є звичайним висловленням, тоді як предикат „Жінка x читає книжку” – є одномісним предикатом.

Аналогічно як і в випадку з висловленнями означаються *елементарні* предикати (предикати, з яких не можна виділити простіших) і всі операції над ними, тобто *логіку висловлень* можна розглядати як частинний випадок *логіки предикатів*.

Таблиця 1.

Предикати	**Область істинності**
$\overline{h(x)}$ заперечення предиката $h(x)$	$\mathrm{U} \setminus T_h$ – доповнення множини істинності предиката $h(x)$ до універсальної множини
$h(x) \vee p(x)$ диз'юнкція предикатів $h(x)$ і $p(x)$	$T_h \cup T_p$ – об'єднання множин істинності предикатів $h(x)$ і $p(x)$
$h(x) \wedge p(x)$ кон'юнкція предикатів $h(x)$ і $p(x)$	$T_h \cap T_p$ – переріз множин істинності предикатів $h(x)$ і $p(x)$
$h(x) \Rightarrow p(x)$ імплікація предикатів $h(x)$ і $p(x)$	$\mathrm{U} \setminus (T_h \setminus T_p)$ – доповнення множини $T_h \setminus T_p$ на якій істинний лише предикат $h(x)$ і хибний предикат $p(x)$ до універсальної множини
$h(x) \Leftrightarrow p(x)$ еквіваленція предикатів $h(x)$ і $p(x)$	$\mathrm{U} \setminus (T_h \setminus T_p) \cup \mathrm{U} \setminus (T_p \setminus T_h)$ або $(T_h \cap T_p) \cup \big((\mathrm{U} \setminus T_h) \cap (\mathrm{U} \setminus T_p)\big)$

2. Перейдемо до алгебри над предикатами. За допомогою логічних операцій – *заперечення*, *диз'юнкції*, *кон'юнкції*, *імплікації*, й *еквіваленції* із предикатів можна сконструювати нові предикати, для яких область істинності визначають за одним відповідним з наведених в таблиці 1 ***правил***.

Як бачимо з таблиці область істинності еквіваленції предикатів $h(x)$ і $p(x)$ подана двома виразами. Рівність цих виразів очевидна за допомогою кругів Ейлера (рис. 9) (тут зображено частковий випадок).

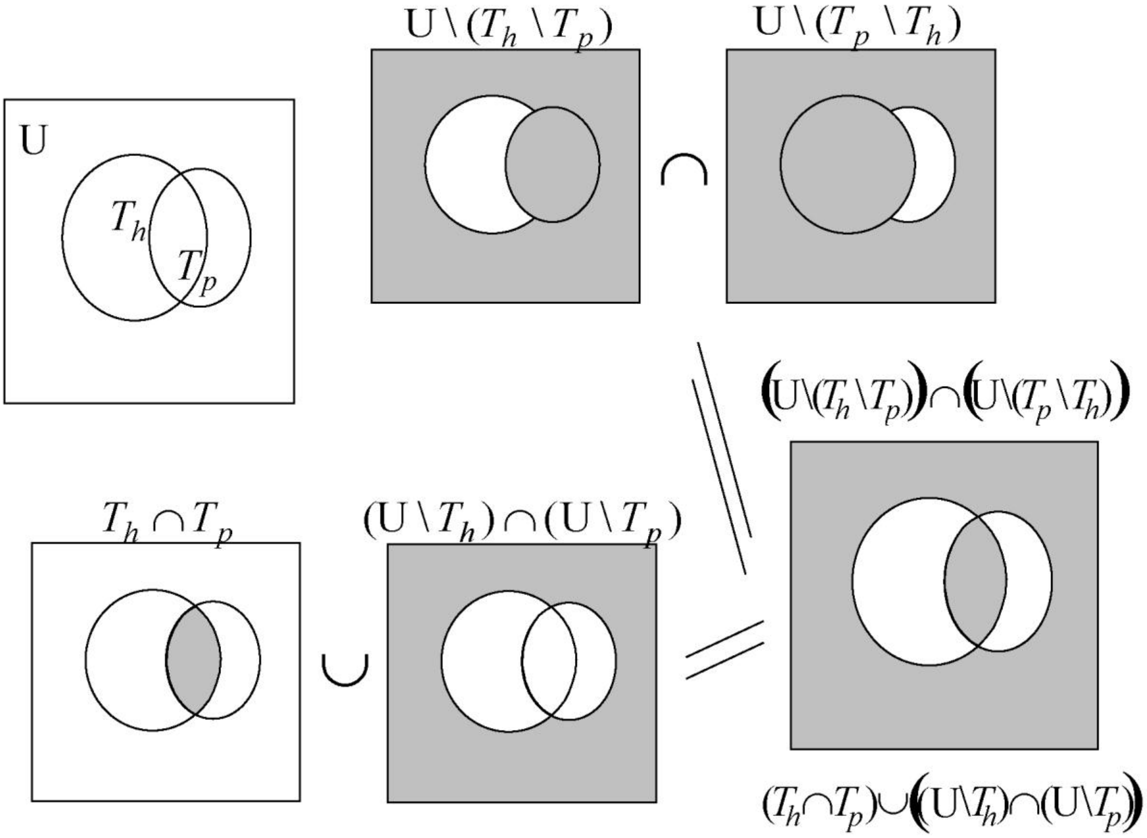


Рис. 9.

Так, дійсно, якщо $a \in T_{h(x)\Leftrightarrow p(x)} \Rightarrow h(a) \Leftrightarrow p(a) = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(h(a) = 1 \wedge p(a) = 1\right) \vee \left(h(a) = 0 \wedge p(a) = 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a \in T_h \wedge a \in T_p\right) \vee \left(a \in \mathrm{U} \setminus T_h \wedge a \in \mathrm{U} \setminus T_p\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a \in \left(T_h \cap T_p\right)\right) \vee \left(a \in \left(\mathrm{U} \setminus T_h \cap \mathrm{U} \setminus T_p\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(a \in \left(T_h \cap T_p\right)\right) \vee \left(a \in \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \Rightarrow a \in \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow T_{h(x)\Leftrightarrow p(x)} \subseteq \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right).$$

І навпаки, $a \in \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(a \in \left(T_h \cap T_p\right)\right) \vee \left(a \in \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(h(a) = 1 \wedge p(a) = 1\right) \vee \left(h(a) = 0 \wedge p(a) = 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(a) \Leftrightarrow p(a) = 1 \Rightarrow a \in T_{h(x) \Leftrightarrow p(x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right) \subseteq T_{h(x) \Leftrightarrow p(x)}.$$

Отже $T_{h(x) \Leftrightarrow p(x)} = \left(\left(T_h \cap T_p\right) \cup \left(\overline{T_h} \cap \overline{T_p}\right)\right)$.

Аналогічно можна довести справедливість решти правил.

3. Розглянемо дві одномісні формули логіки предикатів (це, як нам вже відомо, можуть бути і два елементарні одномісні предикати) $F(x)$ і $E(x)$ визначені на множині M з характеристичними множинами M_F і M_E відповідно, причому $M_F \subset M_E$. Тоді при підстановці замість імен конкретних елементів з M імплікація $F(x) \Rightarrow E(x)$ завжди буде істиною, бо при $F(a) = 1$ для $a \in M$ $E(a) = 1$. При цьому говорять, що предикат $E(x)$ логічно виходить з предиката $F(x)$ і скорочено позначають так: $F(x) \mid = E(x)$.

Отже, якщо на M визначені дві одномісні формули логіки предикатів $F(x)$ і $E(x)$, а M_F і M_E – відповідні їм характеристичні множини, то з того, що $M_F \subset M_E$, випливає, що $E(x)$ ***логічно слідує*** *з* $F(x)$. І навпаки, якщо $E(x)$ ***логічно слідує*** *з* $F(x)$ тоді $M_F \subset M_E$.

Отже: $\quad M_F \subset M_E \Leftrightarrow F(x) \mid = E(x)$

Наприклад, предикат $h(x)$: “$x^2 - 1 = 0$” логічно слідує з предиката $p(x)$: “$x - 1 = 0$” на множині цілих чисел, бо $M_h = \{-1, 1\}$, $M_p = \{1\}$, тобто $M_p \subset M_h$, а отже: $p(x) \mid = h(x)$. А якщо ще задано предикат $m(x)$: “$-9 \le x \le 5$” на цій же множині, то очевидно, що $M_p \subset M_m$, а отже: $h(x) \mid = m(x)$ і $M_p \subset M_m$, а отже: $p(x) \mid = m(x)$. Тобто логічне слідування, так, як і відношення включення, має властивості *рефлексивності*, *антисиметричності* і *транзитивності*.

Якщо в імплікації $F(x) \Rightarrow E(x)$ $E(x)$ є логічним наслідком $F(x)$, то говорять, що $F(x)$ є достатня умова для $E(x)$, *а* $E(x)$ – необхідна умова для $F(x)$.

Наприклад, щоб число ділилося на 9, необхідно, але недостатньо, щоб воно ділилося на 3, тобто “$x \vdots 3$” є необхідна умова для “$x \vdots 9$”, а для того щоб число ділилося на 3 достатньо, щоб воно ділилося на 9, але це не є необхідним, тобто “$x \vdots 9$” є достатня умова для “$x \vdots 3$”. В імплікації $(x \vdots 9) \Rightarrow (x \vdots 3)$ предикат “$x \vdots 3$” є логічним наслідком предиката “$x \vdots 9$”.

Розглянемо ще дві одномісні формули логіки предикатів $E(x)$ і $F(x)$, які є логічними наслідками одна одної, тобто $E(x)$ є логічним наслідком $F(x)$, і навпаки, $F(x)$ є логічним наслідком $E(x)$. В цьому випадку, з того, що $M_F \subset M_E$ і $M_E \subset M_F$, слідує, що $M_F = M_E$, тобто множини істинності їх збігаються, а предикати рівносильні. В цьому випадку $F(x)$ є необхідною і достатньою умовою для $E(x)$ і, навпаки, $E(x)$ є необхідною і достатньою умовою для $F(x)$ і для всіх x з області визначення предикатів $E(x)$ і $F(x)$ істинна еквіваленція $F(x) \Leftrightarrow E(x)$.

Лекція 8. Квантори. Теореми

1. Квантори. Переходи між кванторами існування і загальності.
2. Будова теорем. Види теорем.
3. Необхідні і достатні умови.
4. Доведення теорем.

1. Часто у висловленнях використовуються слова «всі», «для всіх», «будь-які», «існує», «хоч би один», «знайдеться» тощо. В математиці прийнято замість слів «всі», «будь-які» використовувати знак $\forall$ – ***квантор загальності*** (перевернута вниз перша буква англійського слова All – всі). Замість слів “існує”, “хоч би один” використовується знак $\exists$ – ***квантор існування*** (перевернута вліво перша буква англійського слова Exists – існує), $\exists!$ означає “існує тільки один”. Операції, про які йдеться, називаються *операціями квантифікації* або *операціями зв'язування квантором змінних.* Змінна, яка міститься під знаком квантора, називається зв'язаною змінною, а змінна, яка не міститься під знаком квантора – вільною змінною.

Розглянемо висловлення “$\exists\, x \in R, \forall y \in R : x + y = x$”. Дане висловлення є хибним, бо не існує такого дійсного числа x, щоб в результаті додавання до нього будь-якого дійсного числа y, отримували x. Розглянемо інше висловлення “$\exists\, x \in R, \forall y \in R : x + y = y$”. Дане висловлення є істинним, бо насправді існує таке дійсне число x (це число нуль), що в результаті додавання до нього будь-якого дійсного числа y, отримаємо y. Ще строгіше, невтративши істинності, останнє висловлення можна переписати в такому вигляді “$\exists! x \in R, \forall y \in R : x + y = y$”, бо це число x є нуль і воно єдине.

Попередні висловлення отримано з двомісних предикатів “$x + y = x$” і “$x + y = y$” шляхом зв’язування обох змінних.

Операції квантифікації при зв'язуванні кванторами всіх змінних предиката перетворюють його у висловлення. Якщо ж в n-місному предикаті, виконуючи операції квантифікації, зв'язують кванторами m змінних, то в результаті отримують $n - m$-місний предикат.

Означимо операції з використанням квантора загальності і квантора існування для одномісних предикатів більш строгіше. Отже:

Квантором загальності називається така операція $\forall$, яка кожному одномісному предикату $f(x)$, визначеному на множині M, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\forall x): f(x)$ (читається: “Для будь-якого x виконується $f(x)$”), яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли для будь-якого $a \in M$ $f(a) = 1$.

Квантором існування називається така операція $\exists$, яка кожному одномісному предикату $f(x)$, визначеному на множині M, ставить у відповідність одне і тільки одне висловлення $(\exists x): f(x)$ (читається: “Існує таке x, що виконується $f(x)$”, яке буде істинним тоді і тільки тоді, коли існує хоча б одне $a \in M$ таке, що $f(a) = 1$.

Переставляння місцями різнойменних кванторів $\forall, \exists$ може призвести до утворення відмінного не тільки за змістом а й за значенням істинності висловлення. Для переконання в цьому розглянемо предикат $p(x, y)$: “x кратне y”, визначений на множині N. За допомогою застосування кванторів, можемо утворити з нього вісім таких висловлень:

1. $(\forall x)(\forall y): p(x, y)$ – “Для будь-якого x і для будь-якого y виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є хибним.

2. $(\forall y)(\forall x): p(x, y)$ – “Для будь-якого y і для будь-якого x виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є також хибним.

3. $(\exists x)(\exists y): p(x, y)$ – “Існує таке x та існує таке y, що виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є істинним.

4. $(\exists y)(\exists x): p(x, y)$ – “Існує таке y та існує таке x, що виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є також істинним.

5. $(\exists x)(\forall y): p(x, y)$ – “Існує таке x, що для будь-якого y виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є хибним.

6. $(\forall y)(\exists x): p(x, y)$ – “Для будь-якого y існує таке x, що виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є істинним.

7. $(\forall x)(\exists y): p(x, y)$ – “Для будь-якого x існує таке y що виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є істинним.

8. $(\exists y)(\forall x): p(x, y)$ – “Існує таке y, що для будь-якого x виконується: x кратне y”. Зрозуміло, що це висловлення є істинним.

За допомогою кванторів можна записати кожне математичне твердження так, щоб було точно відомо, яких об'єктів воно стосується. Наприклад, твердження “Для будь-яких двох чисел існує таке третє число, яке є їхньою сумою”, використовуючи предикат $h(x, y, z)$: “$x + y = z$”, можна записати так: $(\forall x)(\forall y)(\exists z): h(x,\ y,\ z)$.

Такі компактні записи мають свої переваги. Вони сприяють кращому зосередженню уваги на основній суті означуваного поняття, глибокому його аналізу, міцному запам'ятовуванню і, що дуже важливо, дають змогу чисто алгебраїчно перетворювати ці поняття, а саме міркування перетворювати в обчислення.

Наведені вище приклади символічних записів є фактично формули логіки предикатів, аналогічні формулам алгебри висловлень. В утворенні таких формул можуть брати участь, крім предикатів і кванторів – також логічні операції $\overline{}, \vee, \wedge, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ алгебри висловлень.

Розглянемо висловлення $\overline{\exists x : h(x)}$ тобто “Неправильно, що існує таке *x*, для якого виконується h”. Дане висловлення означає те саме, що й висловлення “Для кожного x виконується $\overline{h}$”, тобто $(\forall x) : \overline{h(x)}$.

Перевіримо рівносильність цих двох висловлень, тобто, що:

$$\overline{\exists x : h(x)} = (\forall x) : \overline{h(x)}.$$

Нехай $\overline{(\exists x) : h(x)}$ є істинне висловлення. Тоді $(\exists x) : h(x)$ є хибне висловлення. За означенням квантора існування це означає, що для довільного $a \in M$ не виконуватиметься $h(a)$, тобто виконуватиметься $\overline{h(a)}$ і отже $\overline{h(a)}$ є істинне висловлення для довільного $a \in M$. А за означенням квантора загальності для предиката $h(x)$ дістаємо, що $(\forall x) : \overline{h(x)}$ є істинне висловлення. Отже, з істинності отримали істинність.

Нехай тепер $\overline{(\exists x) : h(x)}$ є хибне висловлення. Тоді $(\exists x) : h(x)$ є істинне висловлення. За означенням квантора існування це означає, що для довільного $a \in M$ виконуватиметься $h(a)$, а отже $\overline{h(a)}$ є хибне висловлення для довільного $a \in M$. А за означенням квантора загальності для предиката $h(x)$ дістаємо, що $(\forall x) : \overline{h(x)}$ є хибне висловлення. Отже, з хибності отримали хибність.

Отже,

$$\left(\overline{(\exists x) : h(x)} = 1 \Rightarrow (\forall x) : \overline{h(x)} = 1\right) \wedge \left(\overline{(\exists x) : h(x)} = 0 \Rightarrow (\forall x) : \overline{h(x)} = 0\right).$$

Тобто, отримаємо $\overline{(\exists x) : h(x)} = (\forall x) : \overline{h(x)}$ і рівносильність доведено.

Розглянемо також висловлення $\overline{(\forall x) : h(x)}$, тобто “Неправильно, що для кожного x виконується h”. Дане висловлення означає те саме, що й висловлення “Існує таке *x*, для якого виконується $\overline{h}$”, тобто $(\exists x) : \overline{h(x)}$. Аналогічно можна довести і цю рівносильність, тобто:

$$\overline{(\forall x):h(x)}=(\exists x):\overline{h(x)}.$$

Розглянуті рівносильності виконуються й для довільної скінченої кількості кванторів.

2. Величезна кількість теорем в математиці охоплюються порівняно невеликою кількістю їхніх рівносильних, різноманітних за змістом, стандартних формулювань.

Наприклад, можна розглянути таку теорему:

Якщо дріб дорівнює нулю, то величина, що стоїть в чисельнику дорівнює нулю.

Формулювання теореми передбачає, очевидно, що вона справджується для довільних чисел з множини R. Отже, її можемо записати у вигляді формули так:

$$(\forall a)(\forall b)\left(\left(\frac{a}{b}=0\right)\Rightarrow(a=0)\right),\qquad a,b\in R.$$

Запис $\left(\frac{a}{b}=0\right)\Rightarrow(a=0)$ є змістом теореми, а записи $(\forall a),(\forall b)$, $(a,b\in R)$ описують множину об'єктів, для яких теорема справджується (пояснююча частина теореми, необхідний коментарій до неї). Якщо позначити

$A\sim$ «$\frac{a}{b}=0$», $B\sim$ «$a=0$», то скорочено теорему можемо записати так:

$$(\forall a)(\forall b)(A\Rightarrow B),\ a,b\in R,$$

де A – умова теореми, B – наслідок.

Ця теорема легко приводиться до скороченого вигляду. Бувають теореми-властивості: “Центр кола описаного навколо прямокутного трикутника, лежить на середині його гіпотенузи”, як їх приводиться до скороченого вигляду. Цю теорему скорочено можемо записати так:

$(\forall a)(\exists b)(\exists c)A(a,b,c)$, де a – прямокутний трикутник, b – центр кола описаного навколо a, c – середина гіпотенузи a.

$A(a,b,c) \sim$ ”$b = c$”.

Скорочено цю теорему можемо записати і так:

$(\forall a)(\exists b)(\exists c)$ (a – прямокутний трикутник, b – центр кола описаного навколо a, c – середина гіпотенузи $a \Rightarrow b = c$).

Тут частина коментарію стає умовою теореми, а зміст теореми її наслідком.

Розглянемо ще такий поширений в математиці тип теорем. Це є теореми існування, які обґрунтовують існування різноманітних математичних об'єктів: розв'язків рівнянь, геометричних фігур, тощо. Наприклад.

Теорема існування суми в множині Z цілих чисел: $(\forall a)(\forall b)(\exists c)(c = a + b)$, $a, b, c \in Z$.

Теорема існування між будь-якими двома дійсними числами a, b третього числа c (щільність множини дійсних чисел): $(\forall a)(\forall b)(\exists c)(a < c < b)$, $a, b, c \in R$.

Теорема існування точки S рівновіддаленої від усіх вершин Δ ABC: $(\forall \Delta ABC)(\exists S)(d(A,S) = d(B,S) = d(C,S))$, $\Delta ABC \in T$, $S \in (ABS)$, де T – множина трикутників на площині (ABC), d – відстань між відповідними точками.

Кожну з цих теорем можна також подати у вигляді умовного твердження $A \Rightarrow B$ з відповідними коментаріями. Так, теорему про щільність множини дійсних чисел можна записати у вигляді: $(\forall a)(\forall b)(\exists c)(a, b, c \in R) \Rightarrow (a < c < b)$.

Таким чином, практично кожну теорему можна подати у вигляді $A \Rightarrow B$, де A, B – предикати від предметних змінних (однієї чи кількох), з відповідними коментаріями, A – умова теореми, B – наслідок. Таку форму теореми називають **канонічною**.

З шкільного курсу математики нам відомо такі види теорем: *дана теорема*; *теорема, обернена до даної*; *теорема, протилежна даній*; *теорема, обернена до протилежної, або протилежна оберненій*. Дослідимо, як зв'язані між собою ці теореми.

Розглядаючи будь-яку теорему переписану в своїй канонічній формі $A \Rightarrow B$, з її двох предикатів A і B та їхніх одночасних заперечень $\overline{A}$ і $\overline{B}$ можна утворити чотири імплікації (теореми):

1) $A \Rightarrow B$ – ***дана теорема***;

2) $B \Rightarrow A$ – ***теорема, обернена до даної*** (*конверсія імплікації* 1));

3) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$ – ***теорема, протилежна до даної*** (*конверсія контрапозиції* 4));

4) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$ – ***теорема, обернена до протилежної***, або ***протилежна до оберненої*** (*контрапозиція імплікації* 1)).

Ці всі теореми називають спряженими між собою.

Ці чотири теореми утворені так, що в ролі даної теореми можна взяти будь-яку з них, і тоді інші три будуть спряженими з нею. Структура цих теорем така, що вони *попарно рівносильні* між собою, а саме: $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, $B \Rightarrow A = \overline{A} \Rightarrow \overline{B}$. Рівносильність цих пар теорем добре ілюструється за допомогою так званого

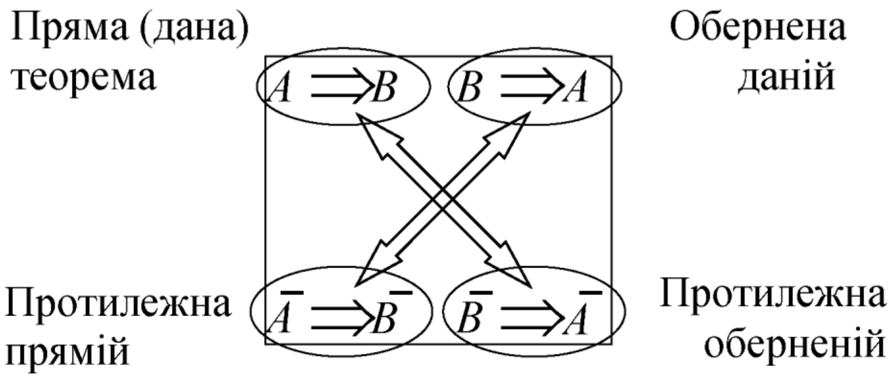


Рис.10

логічного квадрата (рис. 10).

Таким чином, замість доведення безпосередньо даної теореми, можна довести теорему, обернену до протилежної, і цим буде доведена справедливість даної теореми, бо ці теореми одночасно істинні або хибні. Часто так і буває, що довести протилежну теорему простіше, ніж дану.

Наведемо приклад ***спряжених*** теорем.

1. 1) Протилежні сторони паралелограма попарно рівні між собою – *дана теорема.*

Обернене твердження також істинне, тобто є теоремою. Тоді за логічним квадратом будуть істинними всі чотири твердження, тобто матимемо ще три теореми.

2) Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно рівні, є паралелограмом – *обернена теорема*.

3) У чотирикутника не паралелограма, протилежні сторони попарно нерівні – *теорема, протилежна прямій* (*заданій*).

4) Чотирикутник, у якого протилежні сторони попарно не рівні, не є паралелограмом – *теорема, протилежна оберненій.*

Аналогічно можна дістати такі комплекти з чотирьох теорем і тоді, коли компоненти A і B даної теореми $A \Rightarrow B$ мають будь-яку іншу структуру.

Для довільної теореми виду $A \vee B \Rightarrow C$ розглядають іноді, крім $C \Rightarrow A \vee B$, ще дві обернені $C \Rightarrow A, C \Rightarrow B$.

У наведеному прикладі всі чотири спряжені теореми були істинними. Проте це не завжди так: для висловлень a: “Кут $\alpha = 30°$”, b: “$\sin \alpha = \frac{1}{2}$” теореми $a \Rightarrow b$ і $\overline{b} \Rightarrow \overline{a}$ істинними, а теореми $b \Rightarrow a$ і $\overline{a} \Rightarrow \overline{b}$ – хибними.

3. Розглянемо з точки зору алгебри висловлень питання про ***необхідні*** й ***достатні*** умови при формуванні теорем.

З означення імплікації випливає, що коли висловлення $A \Rightarrow B$ – істинне, то для істинності A необхідно, щоб істинним було B (при $B = 0$ і $A \Rightarrow B = 1$ A повинно бути хибним), а істинність A достатня для істинності B (при $A = 1$ і $A \Rightarrow B = 1$ є істинним). Тому говорять, що при $A \Rightarrow B = 1$ істинність висловлення A є достатньою умовою для істинності B, а істинність B – необхідною умовою для істинності A.

Необхідна умова може не бути достатньою, а достатня – не завжди необхідною. Справді, якщо $A \Rightarrow B = 1$, то істинність A не обов'язково буде необхідною умовою для істинності B: B є істинним також при $A = 0$, бо $0 \Rightarrow 1 = 1$. Аналогічно істинність B не обов'язково буде достатньою умовою для істинності A: при $B = 1$ імплікація $A \Rightarrow B$ є істинною також і при $A = 0$.

Наприклад. Позначимо: a: “Запис числа закінчується цифрою 5”, b: “Число ділиться на 5”. Тут істинність a достатня для істинності b: якщо число (ціле) закінчується цифрою 5, то цього вже достатньо, щоб воно ділилося на 5. Проте істинність b не є необхідною для істинності a: число може ділитися на 5 і тоді, коли воно закінчується цифрою 0, а не 5.

Нехай істинним є таке висловлення: “Дівчина йде на прогулянку, якщо її хлопець йде на прогулянку”. Як бачимо, воно є імплікацією таких двох простих висловлень: A: “Дівчина йде на прогулянку”, B: “Хлопець дівчини йде на прогулянку”, тобто $A \Rightarrow B$. Тут істинність A достатня для істинності B: якщо дівчина йде на прогулянку, то цього вже достатньо, щоб її хлопець йшов на прогулянку (бо вона йде лише тоді, коли йде хлопець). Проте істинність B не є необхідною для істинності A (хлопець може піти на прогулянку і без дівчини. Це вдалий приклад-жарт, але як говорять деякі філософи нашого часу: “В кожному жарті є лише доля жарту”).

Якщо висловлення $B \Rightarrow A$ також істинне, то, аналогічно, істинність B є достатньою умовою для істинності A, а істинність A – необхідна для істинності B. З істинності висловлень $A \Rightarrow B$ і $B \Rightarrow A$ виходить істинність їхньої кон'юнкції:

$$(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = A \Leftrightarrow B.$$

У цьому випадку A є необхідною й достатньою умовою для B, а B, в свою чергу, є також необхідною й достатньою умовою для A. Як відомо, це передається такими словами: «A є необхідною й достатньою умовою для B”, “A тоді і тільки тоді, коли B”, “Для A необхідно й достатньо, щоб B”.

Розглянемо, як зв'язані терміни “тоді”, “тільки тоді” з термінами “необхідно”, “достатньо”. Вираз “A тоді, коли B” означає “якщо B, то A”, тобто теорему $B \Rightarrow A$, в якій B є достатньою умовою для *A*, якщо $B \Rightarrow A = 1$. Отже, вираз “*A* тоді, коли *B*” означає “*A* необхідно для *B*”, або “*B* достатньо для *A*”.

Аналогічно вираз “*A* тільки тоді, коли *B*” означає: “Якщо не *B*, то не *A*”, тобто теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A} = A \Rightarrow B$, в якій *A* є достатньою умовою для *B*. Звідси вираз “*A* тільки тоді, коли *B*” означає “*A* достатньо для *B*” і “*B* необхідно для *A*”.

Отже, вираз “*A* тоді і тільки тоді, коли *B*” означає “*B* достатньо для *A* і *A* достатньо для *B*”, “*A* необхідно і достатньо для *B*”.

Наприклад. Нехай a : “Даний трикутник – прямокутний”, b : “У даному трикутнику квадрат більшої сторони є сумою квадратів двох інших сторін”. Тоді $a \Leftrightarrow b = 1$ і висловлення a є необхідною й достатньою умовою для b.

4. ***Теореми можна доводити*** *аналітично*, *синтетично* і *аналітико-синтетично*. *Аналітично* – це коли наперед видно кожен крок доведення і виходячи з того, що дане твердження істинне, будуємо ланцюг необхідних умовиводів так, щоб кожне попереднє судження було необхідною умовою для наступного. *Синтетично* доводять, коли невідомо з чого почати. Часто теореми доводять *аналітико-синтетично*.

У математиці існує ряд загальних методів доведення теорем, які використовуються найчастіше. Розглянемо деякі з них.

Дедуктивне доведення або ***розв’язування соритів***. Це основний метод математичних доведень. Все доведення є ланцюжок логічних умовиводів (сорит), кожен крок якого ґрунтується на певному логічному законі, аксіомі або даній теоремі. Розв’язання сориту є наслідок застосувань правила силогізму:

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_3),$$

тобто сорит має таку структуру:

$$(A_1 \Rightarrow A_2) \wedge (A_2 \Rightarrow A_3) \wedge \ldots \wedge (A_{n-1} \Rightarrow A_n) \Rightarrow (A_1 \Rightarrow A_n).$$

Індукцією називається метод дослідження, заснований на спостереженнях і досвіді (induktio – наведення). Не слід змішувати метод математичної індукції (переходу від n до $n+1$) з індуктивними методами. Існує два індуктивних методи: метод неповної індукції і метод повної індукції. ***Метод повної математичної індукції*** відрізняється від ***методу неповної індукції*** тим, що в неповній індукції, розглянувши кілька окремих випадків і помітивши певну закономірність, заключають, що ця закономірність має місце для будь-якого випадку. Через те що не для всіх можливих випадків твердження перевірене, воно може виявитись взагалі і неправильним. Наприклад, при підстановці у квадратний тричлен $x^2 + x + 41$ цілих значень змінної $x = 0$, 1, 2, 3, 4, ..., 39, -1, -2, -3, -4 і т. д. кожен раз дістаємо значення тричлена, що є простим числом. На основі цих окремих випадків можна було б висунути гіпотезу, що значення даного тричлена при всіх цілих значеннях змінної x є прості числа. Проте ця гіпотеза неправильна: уже при $x = 40$ маємо:

$$40^2 + 40 + 41 = 40 \cdot (40+1) + 41 = 40 \cdot 41 + 41 = 41 \cdot (40+1) = 41 \cdot 41$$

– складене число. Ще більш очевидно, що при $x = 41$ значення тричлена ділиться на 41.

Доведення методом ***повної індукції*** полягає в розгляді всіх окремих випадків (чисел, фігур тощо), при яких теорема правильна. Цей метод ще називають ***методом вичерпування***. Кількість таких випадків повинна бути скінченою і невеликою за кількістю. Якщо можна розглянути всі можливі випадки і для кожного випадку твердження доведене, то воно буде істинним взагалі.

Наприклад доведемо теорему:

Теорема. Значення виразу $s = a^2 + b^2$, $a, b \in Z$, є число, що при діленні на 4 не має в остачі 3.

Доведення теореми проведемо, розглядаючи три випадки: 1) обидва числа парні; 2) обидва числа непарні; 3) одне число парне, друге – непарне.

1) Нехай a, b – парні, тобто $a = 2m, b = 2n,\ m, n \in Z$. Дістаємо

$$s = (2m)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4n^2 = 4\left(m^2 + n^2\right),$$

тобто $s \vdots 4$, остача дорівнює 0.

2) Нехай a, b – непарні, тобто $a = 2m+1$, $b = 2n+1$. Маємо

$S = a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n+1)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 + 4n + 1 =$ $= 4(m^2 + n^2 + m + n) + 2$, а це означає, що при діленні s на 4 дістаємо остачу 2, а не 3.

3) Нехай a – непарне, b – парне (навпаки буде той самий випадок, бо ми розглядаємо суму, а від перестановки доданків сума не міняється), тобто $a = 2m+1$, $b = 2n$. Маємо:

$S = a^2 + b^2 = (2m+1)^2 + (2n)^2 = 4m^2 + 4m + 1 + 4n^2 =$ $= 4(m^2 + n^2 + m) + 1$, а це означає, що при діленні s на 4 дістаємо остачу 1, а не 3.

Теорема доведена.

Для доведення, наприклад теореми про вимірювання величини вписаного в коло кута розглядають випадки: центр кола лежить 1) на одній із сторін кута, 2) всередині кута, 3) поза вписаним кутом.

Конкретний зміст теореми підказує, які саме випадки слід розглядати, а термін "повна індукція" вимагає аналіз усіх їх.

Непряме доведення. Розглянуті два попередні методи доведення теорем є прямими: використовуючи умови теореми, аксіоми, раніше доведені теореми, означення, логічні правила виведення, послідовно будується ланцюг умовиводів, останній з яких і завершував процес доведення.

Розглянемо тепер непряме доведення.

Зведення до абсурду, *або* ***метод від супротивного***. Цей метод ґрунтується на наступних рівносильностях: $A \Rightarrow B = A \wedge \overline{B} \Rightarrow 0$, $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Полягає він в тому, що в теоремі $A \Rightarrow B$ (коментарі теореми опускаємо) припускають, що правильним буде $\overline{B}$. Якщо в результаті цього припущення приходять до неправильного висновку, абсурду, тобто $A \wedge \overline{B} \Rightarrow 0$, або $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$то роблять висновок, що наслідок B теореми $A \Rightarrow B$ правильний.

Цим способом доводять, наприклад, такі теореми.

1. Якщо дві різні прямі a і b паралельні третій прямій c, то вони паралельні між собою.

Позначимо S: “$a \parallel c$”, T: “$b \parallel c$”, K: “$a \neq b$”, B: “$a \parallel b$”. Тоді символічно теорема запишеться так:

$S \wedge T \wedge K \Rightarrow B$, або $A \Rightarrow B$, де $A \sim S \wedge T \wedge K$.

Припустимо $\overline{B}$, тобто що a і b не паралельні. Тоді вони перетинаються в якійсь точці P, яка не належить c. Дістаємо, що через точку P поза прямою c можна провести дві прямі a і b, які паралельні c, а це суперечить аксіомі паралельності, тобто є хибним твердженням. Отже, правильним твердженням є B.

2. Довести, що коли ab – непарне число, то обидва множники a і b – непарні цілі числа.

Позначимо A: “Добуток ab – непарне число”, T: “a – непарне число”, S: “a – непарне число”. Тоді теорема скорочено запишеться так: $A \Rightarrow S \wedge T$, або $A \Rightarrow B$, де $B \sim S \wedge T$.

Припустимо, що $\overline{B} = \overline{S \wedge T} = \overline{S} \vee \overline{T}$, тобто один із множників a або b є парним числом. Нехай, наприклад, a – парне, тобто $a = 2m, m \in Z$. Тоді $ab = 2mb$ – парне число, тобто дістали $\overline{A}$. Таким чином, довели теорему $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$, а цим самим і дану теорему $A \Rightarrow B$.

Отже, вивчаючи математичну логіку, та й в широкому розумінні цього слова, логіку, ми повинні запам’ятати логічні засоби за допомогою яких здійснюються логічно правильні форми міркувань. Цим самим логіка допоможе нам робити правильні умовиводи, тобто правильно міркувати і не робити з правильних вихідних даних хибних висновків.

Завдання, які студент повинен вміти виконати на відповідному практичному занятті

В даному розділі методичних рекомендацій є перелік практичних завдань до кожного з семи практичних занять відведених даному курсу згідно відповідної робочої програми.

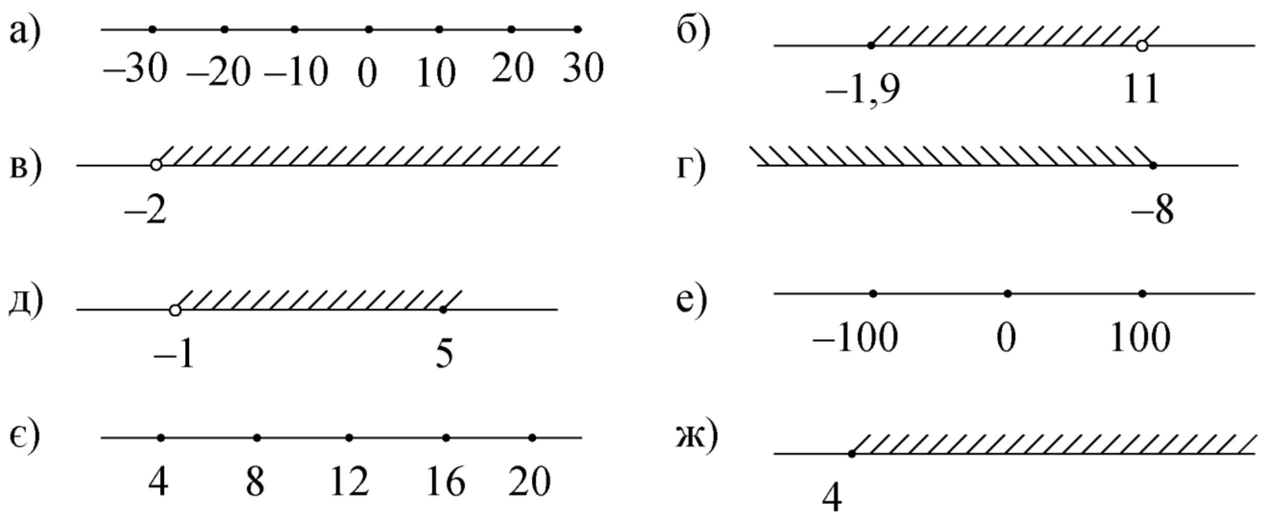
Практичне заняття 1.

Множини. Відношення між множинами. Операції над множинами

1. Наведіть приклади множин, елементами яких є: а) цілі числа; б) люди; в) предмети; г) геометричні фігури.

2. Яким з наступних числових множин – **N** – множині натуральних чисел; **R** – множині дійсних чисел; **Z** – множині цілих чисел; $\mathbf{N_0}$ – множині цілих невід'ємних чисел; **Q** – множині раціональних чисел; множині простих чисел; множині складених чисел – належать наступні числа: $4; -5; 1/2; 8{,}1; \sqrt{3}; 81; 0; -1; 21/45; 8{,}(12); 0{,}1234; \pi; -8; 25; 2^3; 11; 100; 107; 99; 0{,}0001; 23; 34; 45; 56; 67$.

3. Записати зображені на графіку числові множини за допомогою характеристичної властивості:



4. Задайте переліком елементів, якщо це можливо, і зобразіть на числовій вісі наступні множини:

а) $\{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 4\}$; б) $\{x \mid x \in \mathbf{Z}, -3 \leq x < 3\}$; в) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, -1{,}2 \leq x \leq 2\}$; г) $\{x \mid x \in \mathbf{R}, x > 4{,}6\}$; д) $\{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 5\}$; е) $\{x \mid x \in \mathbf{Z_0}, -3{,}7 \leq x < 5{,}4\}$.

5. Виясніть, в якому відношенні знаходяться множини A і B, і зобразіть їх на кругах Ейлера-Венна, якщо множини A і B відповідно рівні:

а) $\{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 4\}$ і $\{x \mid x \in \mathbf{N}, 1 \leq x < 30\}$;

б) $\{x \mid x \in \mathbf{N}, 1 \leq x \leq 2\}$ і $\{x \mid x \in \mathbf{N}, x > 46\}$;

в) $\{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 5\}$ і $\{x \mid x \in \mathbf{N}, 3 \leq x < 54\}$.

6. Виясніть, в якому відношенні перебувають множини розв'язків наступних рівнянь?

а) $-x^2 + 12x - 27 = 0$;

б) $(3 - x)(x - 9)x = 0$;

в) $(x - 3)(27 - x) = 0$.

7. Виясніть, в якому відношенні перебувають множини A, B і C, якщо вони є множинами розв'язків наступних рівнянь відповідно?

а) $x = 0$; б) $x(x - 1) = 0$; в) $x(x - 1)(x - 3) = 0$.

Зобразіть їх на кругах Ейлера-Венна.

8. Запишіть всі підмножини множини $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Скільки серед них власних підмножин? Скільки серед них одноелементних множин?

9. Дано множини: $A = \{a, b, c, d\}$; $B = \{a, b, 4\}$; $C = \{4, 2, c\}$; $D = \{a, b, 3\}$; $E = \{1, b\}$. Знайти: $a, в, c, d$, знаючи, що $B \subset A$, $C \subset A$, $D \subset A$, $E \subset B$.

10. Відомо, що A – множина всіх натуральних дільників числа 33, B – множина всіх натуральних дільників числа 275. Назвіть елементи множини $A \cap B$ і проілюструйте розв'язок на діаграмі Ейлера-Венна. Скільки підмножин має множина $A \cap B$?

11. Перечисліть і запишіть натуральні числа, що належать перерізу $A \cap B$, якщо відомо, що множини A і B є множинами розв'язків наступних нерівностей відповідно: $x > 3$, $-x - 5 < 0$.

12. Які фігури належать множинам: а) $A \cap C$; б) $B \cap C$; в) $A \cap B$; г) $A \cap B \cap C$, якщо: A – множина чотирикутників, діагоналі яких взаємно перпендикулярні, B – множина чотирикутників, довжини

діагоналей яких рівні; C – множина чотирикутників діагоналі яких в точці перетину діляться пополам.?

13. Відомо, що $A = \{x \mid x \in \mathrm{N}, x < 50, x \text{ кратне } 7\}$; $B = \{x \mid x \in \mathrm{N}\}$; $C = \{x \mid x \in \mathrm{N};\ x \geq 49\}$. Зобразити множини A, B і C на кругах Ейлера-Венна. Знайдіть і заштрихуйте на кругах Ейлера-Венна області, що відповідають наступним множинам: $A \cup B \cap C$; $A \cap B \cup C \cap B$; $(A \cap B) \cup (C \cap A)$; $(A \cup B) \cap (C \cup A)$.

14. Дано множини: $A = \{3, 4, 5\}$; $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$; $C = \{-3, 0, 3\}$; $D = \{-3, 3, -5, 5\}$. Перечисліть елементи, що входять у множини: $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} \cup \mathrm{C} \cup \mathrm{D}$; $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \cap \mathrm{C} \cap \mathrm{D}$; $(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) \cup (\mathrm{C} \cap \mathrm{D})$; $(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \cap (\mathrm{C} \cup \mathrm{D})$.

15. Позначте на числовій прямій елементи перерізу і об’єднання наступних множин:

а) $A_1 = \{ x \mid x \in R, -5 < x < 20\}$, $A_2 = \{ x \mid x \in R, -2 < x < 5\}$;

б) $A_1 = \{ x \mid x \in R, -1{,}7 \leq x < 10\}$, $A_2 = \{ x \mid x \in R, 0 \leq x \leq 5\}$;

в) $A_1 = \{ x \mid x \in R, 5{,}1 > x \geq 3\}$, $A_2 = \{ x \mid x \in R, -3{,}7 < x \leq 1{,}7\}$;

г) $A_1 = \{ x \mid x \in R, 2 \leq x \leq 2{,}8\}$, $A_2 = \{ x \mid x \in R, 1{,}1 \leq x \leq 2{,}1\}$.

16. Виясніть на основі яких законів операцій над множинами виконано наступні перетворення:

а) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap (C \cap B)$;

б) $(A \cup B) \cap C = A \cap C \cup B \cap C = C \cap A \cup C \cap B$.

17. Накресліть два трикутники так, щоб їх перерізом:

а) була точка; б) був трикутник; в) був відрізок; г) був чотирикутник.

18. Знайти об’єднання, переріз і різницю множин B і C, якщо:

а) $B = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 4\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -3 \leq x < 3\}$;

б) $B = \{x \mid x \in \mathbf{R}, -1{,}2 \leq x \leq 2\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > 4{,}6\}$;

с) $B = \{x \mid x \in \mathbf{R}, x > 4{,}6\}$, $C = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 5\}$.

19. Три множини A, B і C такі, що $A \cap B \cap C \neq \varnothing$. Зобразіть ці множини на кругах Ейлера-Венна. Позначте на рисунку штриховою області, що зображають наступні множини (для кожного випадку зробіть окреме креслення): а) $B \cap C$; б) $C \setminus B$; в) $A \cup B$; г) $A \setminus B \cap C$; д) $A \setminus B \cup B \cap C$.

20. Відомо, що $A \cap B \neq \varnothing$, $A \setminus B \neq \varnothing$, $A \setminus B \neq \varnothing$. Зобразіть множини A і B на кругах Ейлера-Венна. В якому відношенні перебувають наступні дві множини: а) A і $A \cap B$; б) A і $A \cup B$; б) A і $A \setminus B$; б) $A \setminus B$ і $A \cup B$; б) $A \setminus B$ і $A \cap B$.

21. Відомо, що множини: $A = \{x \mid x \in \mathrm{R}, -1{,}5 \leq x \leq 0{,}3\}$; $B = \{x \mid x \in \mathrm{R}, 0 \leq x \leq 14\}$; $C = \{x \mid x \in \mathrm{R}, -2 \leq x \leq 0\}$ є множинами точок відповідного відрізка числової прямої. Зобразіть на числовій прямій ці відрізки, а також множини: $(A \setminus C) \cap B$; $A \cup B \setminus C$; $A \setminus B \cap C$.

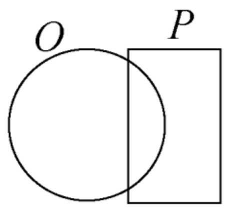
22. Дано множини E і F. Зобразіть ці множини за допомогою діаграм Ейлера-Венна і заштрихуйте множину $E \cap F \setminus F \cup E \setminus F$, якщо: а) $E \subset F$; б) $F \subset E$; в) $E \cap F = \varnothing$; г) $E = F$.

23. Сформулюйте властивості елементів множини $P \cap Q \cap S$ і перечисліть її елементи, якщо: $P = \{x \mid x \in \mathrm{N}, x < 20\}$; $\mathrm{Q} = \{x \mid x \in \mathrm{N}, x < 20; x$ – парне$\}$; $S = \{x \mid x \in \mathrm{N}; x < 20; x$ кратне $3\}$.

24. Сформулюйте характеристичну властивість елементів множини $K = F \cup E$, якщо F – множина парних натуральних чисел, а E – множина двозначних натуральних чисел. Вкажіть, які з наступних висловлень істинні, а які хибні: $12 \in K$, $8 \notin K$, $13 \in K$, $10 \notin K$, $-24 \in K$.

25. P – множина всіх прямокутників; Q – множина всіх ромбів. Які фігури належать множинам $P \cap Q$; $P \cup Q$.

26. На малюнку справа зображено дві геометричні фігури. Множину точок кола позначимо через O, а множину точок прямокутника – через P. Зробіть чотири малюнки і позначте штриховою наступні множини: $O \cup P$, $O \cap P$, $O \setminus P$, $P \setminus O$.



27. Вкажіть характеристичну властивість елементів множини $(I \cup L) \setminus J$, якщо $I = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 4\}$; $L = \{x \mid x \in \mathbf{Z_0}, -3{,}7 \leq x < 5{,}4\}$; $J = \{x \mid x \in \mathbf{N}, x \leq 5\}$. Скільки підмножин має множина $(I \cup L) \setminus J$?

28. Позначимо через N^1 доповнення до множини N у множині всіх цілих чисел. Чи вірно, що: $(-1) \in \mathrm{N}^1$; $0 \in \mathrm{N}^1$; $-100 \in \mathrm{N}^1$; $8{,}0 \in \mathrm{N}^1$; $5{,}3 \notin \mathrm{N}^1$; $1 \notin \mathrm{N}^1$.

29. Зобразіть за допомогою діаграм Ейлера-Венна наступні множини і вкажіть серед них рівні: $\overline{A\cap B}$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A}\cap\overline{B}$, $\overline{A\cup B}$, $\overline{A}\cup\overline{B}$, $\overline{A}\cup B$, якщо $A\subset U$, $B\subset U$, $A\cap B\neq\varnothing$, $A\setminus B\neq\varnothing$, $B\setminus A\neq\varnothing$.

30. Вкажіть порядок виконання операцій: $X\cap Y\cup Z\cap Q$; $(X\setminus Y)\cap Z$; $\overline{X}\cup Y\setminus Z\cap Q$; $X\cap\overline{Y\setminus Z}\cap Q$; $\overline{X}\cup\overline{Y\setminus Z}\cap Q$.

31. Відомо, що $A=\{x\mid x\in N,\ x\leq 11\}$, $B=\{x\mid x\in N,\ x<7\}$. Знайти доповнення до множини B у множині A. Скільки всього підмножин має доповнення до множини B у множині A?

32. Дано: множина A – множина розв'язків рівняння $x-3=1$, множина B – множина розв'язків рівняння $7x-7=7$, множина C – множина розв'язків сукупності $\left[\begin{array}{l}x-3=1\\7x-7=7\end{array}\right.$. Задати переліком елементів множини $D=A\cup B$, $F=A\cap B$. В якому відношенні перебувають множини а) D і C; б) F і C?

33. Відомо, що множини A і B є множинами пар, що є розв'язками наступних рівнянь відповідно: $2x+5y=15$, $7x+2y=6$. Задати переліком елементів множину $C=A\cap B$. Чи можливо задати переліком елементів множину $D=A\cup B$?

34. Відомо, що множини A і B є множинами розв'язків наступних рівнянь відповідно: $x^2-36=0$, $(6-x)(-x-7)x=0$. Розв'яжіть систему складену з цих рівнянь і порівняйте множину розв'язків цієї системи з множиною, яка є перерізом множин A і B.

35. Відомо, що множини A і B є множинами пар, що є розв'язками наступних рівнянь відповідно: $x-y=3$, $6y-x-5=0$. Розв'яжіть систему складену з цих рівнянь і порівняйте множину розв'язків цієї системи з множиною, яка є перерізом множин A і B.

36. В якому відношенні перебувають множини розв'язків наступних рівнянь: $x^2-1=0$, $x^2-3x-4=0$. Складіть три рівняння, множини розв'язків яких належали б відповідно об'єднанню, перерізу і різниці множин розв'язків першого і другого рівнянь.

Практичне заняття 2.

Кортеж. Декартів добуток

1. Скільки цифр у записі числа 200432? Скільки різних цифр у записі цього ж числа? Яка довжина кортежу (2, 0, 0, 4, 3, 2)? Вкажіть першу і п'яту компоненти цього кортежу.

2. Задайте переліком елементів множини $A\times B$ і $B\times A$, якщо: а) $A = \{1, 2\}$; $B = \{1, 2, 3\}$; б) $A = \{1\}$; $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; в) $A = \varnothing$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$; г) $A = \{x \mid x\in \mathbf{N}, x \le 1\}$; $B = \{x \mid x\in \mathbf{N}, x \le 9\}$.

3. Задайте переліком елементів множину $A\times A$, якщо $A = \{a, b, c\}$. Скільки елементів містить цей декартів добуток?

4. Розв'яжіть задачу і встановіть, яким чином її розв'язок пов'язаний з поняттям декартового добутку. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 скласти всі двозначні числа, які: а) починаються цифрою 4; б) закінчуються цифрою 2; в) містять однакові цифри; г) починаються і закінчуються цифрою 5; д) починаються цифрою 2 або 3.

5. Утворіть множину всіх тризначних чисел, в яких число десятків належить множині $A = \{3, 2, 1\}$, число одиниць – множині $B = \{5, 4, 6\}$, а число сотень – множині $A = \{9, 7, 8\}$. З поняттям декартового добутку яких трьох множин пов'язаний розв'язок даної задачі?

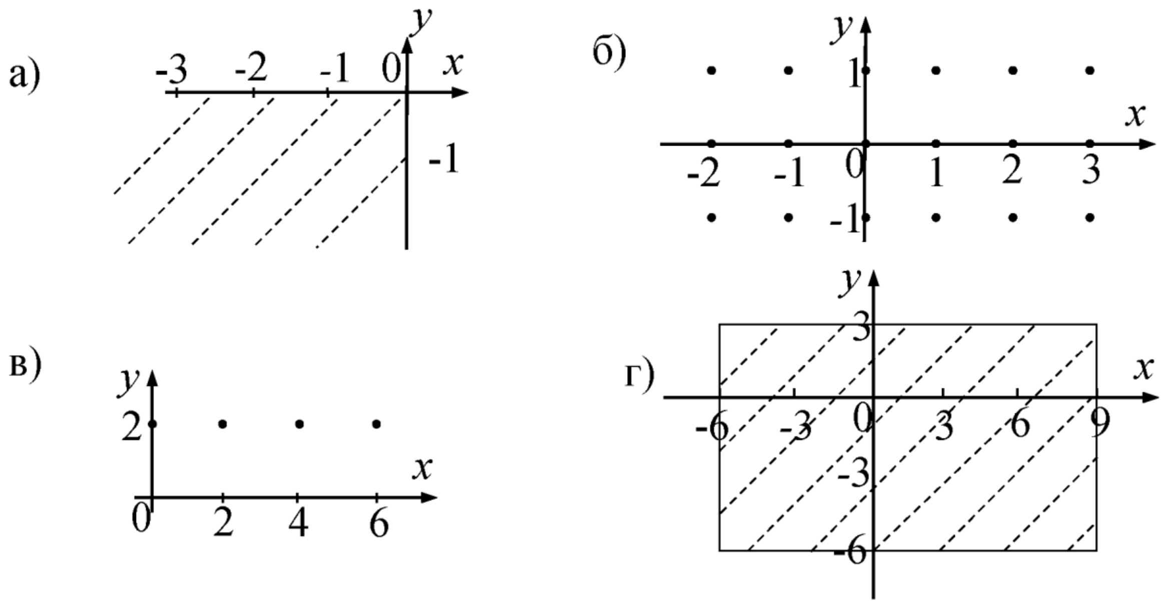
6. Знайти декартів добуток $M\times M$, якщо $M = \{3, 5, 7\}$. Записати підмножину A пар, в яких перша компонента не більша за другу. Записати підмножину B пар, в яких перша компонента не менша за другу. Вказати всі пари, які належать кожній з множин: $A\cup B$, $A\cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$.

7. Зобразіть в прямокутній системі координат множину $X\times Y$, якщо $X = \{x \mid x \in \mathbf{N}, -3 \le x < 5\}$, $Y = \{y \mid y \in \mathbf{R}, -1 < y \le 2\}$.

8. Дано множини $X = \{1, 2, 3\}$ та $Y = \{а, б, в\}$. Вкажіть серед наступних множин підмножини декартового добутку $X\times Y$:
а) $\{(1, а, б), (2, б, б), (3, в, б)\}$; б) $\{(1, а), (1, б), (2, а), (б, 2)\}$
в) $\{(2, б), (3, а), (4, а)\}$; г) $\{(1, а), (2, б), (2, в), (3, а), (3, б), (3, в)\}$. Скільки всього підмножин має множина $X\times Y$?

9. Зобразіть в прямокутній системі координат множину X^2, якщо $X = \{x \mid x \in R, -2 < x < 7\}$. Чи належать цій множині пари: (-3,5); $(2\frac{1}{2},-\frac{1}{2})$; (0, 0); (0, -4); (6, 6)?

10. Всі елементи декартового добутку множин X і Y зображені на координатній площині:



Задайте для кожного випадку множини X і Y.

11. Зобразіть елементи декартового добутку множин A і B на координатній площині, якщо: а) $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{0, 1\}$; б) $A = B = \{-1, 0, 1\}$; в) $A = \{x \mid x \in N, 3 \le x \le 7\}$; $B = \{y \mid y \in N; 4 \le y \le 9\}$; г) $A = \{x \mid x \in R; 3 \le x \le 7\}$; $B = \{y \mid y \in R; 4 \le y \le 9\}$.

12. Розглянути всі можливі випадки – які і скільки елементів може містити множина D, якщо кожен її елемент є двоцифрове число, і, якщо відомо, що цифри кількості десяток всіх чисел даної множини D утворюють множину {1, 2, 3}, а цифри кількості одиниць – множину {5, 6, 7, 8, 9}. Вказати, в якому випадку множина D буде містити мінімальну кількість елементів, а в якому максимальну.

13. Знайдіть декартовий квадрат множини розв'язків рівняння $x^2 - 1 = 0$ на множину розв'язків рівняння $x^2 - 3x - 4 = 0$.

14. Дано множини $A = \{а, б, в\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{в\}$, $D = \{1, 3\}$, $E = \{а\}$, $F = \{1, 0, 4\}$, $G = \{г\}$, $H = \{0\}$. Задати переліком пар і

вказати в якому відношенні знаходяться наступні множини: а) $A\times B$, $C\times D$; б) $A\times F$, $G\times H$; в) $A\times F$, $E\times D$; г) $A\times C$, $E\times A$; д) $B\times H$, $D\times F$.

15. Дано множини $A = \{a, б\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{в\}$, $D = \{8, 3\}$, $E = \{c\}$, $F = \{0\}$, $G = \{г\}$, $H = \{7, 9\}$. Задати переліком пар наступну множину: $A\times B\times C\times D\times E\times F\times G\times H$.

16. Дано множини $A = \{a, б, в\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{в\}$, $D = \{1, 3\}$, $E = \{a\}$, $F = \{1, 0, 4\}$, $G = \{г\}$, $H = \{0\}$. Задати переліком пар наступні множини: а) $(A\times B)\setminus(C\times D)$; б) $A\times(F\setminus G)\times(H\cap A)\times B$; в) $A\times(F\setminus E)\times((D\cap G)\setminus H\cap A)\times B$; г) $(A\times B)\setminus((E\times F)\setminus(A\times H))$.

17. Відомо, що множини A і B є множинами пар, що є розв'язками наступних рівнянь відповідно: $x+5y=15$, $17x+2y=6$. Задати переліком елементів множину $C=A\cap B$. Чи є множина C підмножиною декартового добутку $A\times B$?

18. Вкажіть характеристичну властивість елементів множини A, якщо $A^2=I$ і якщо $I = \{(x, y) \mid (x, y)\in \mathbf{N}^2, xy \le 4\}$.

19. Дано множини $K = \{a, б, в\}$, $L = \{1, 2\}$, $M = \{c\}$. Скільки підмножин має множина $K\times L\times M$? Записати булеан множини $K\times L\times M$.

20. Відомо, що множини A і B є множинами розв'язків наступних рівнянь відповідно: $x^2 - 36 = 0$, $(6 - x)(-x - 7)x = 0$. Чи належить пара $(-6, -7)$ декартовому добутку $A\times B$?

21. Відомо, що множини A, B і C є множинами розв'язків наступних рівнянь відповідно: $(x^2 - 1)(x^2 - 9)(x^2 - 16)(1 - x^2)\ x = 0$, $(6 - x)(-x - 7)x = 0$ і $6 - x = 8$. Задайте переліком елементів множину $C\times A\times B$.

22. Множина A є множиною розв'язків рівняння $\dfrac{x-1}{x}=0$. Задайте переліком елементів множину A^3.

23. Задайте переліком елементів доповнення до множини $A\times B$ у множині C, якщо $A = \{x \mid x\in \mathbf{N}, x \le 1\}$, $B = \{y \mid y\in \mathbf{N}, 2 \le y \le 3\}$, $C = \{(x, y) \mid (x, y)\in \mathbf{N}^2, xy \le 3\}$.

24. Вкажіть характеристичну властивість елементів доповнення до множини N^2 у декартовому квадраті множини всіх цілих чисел.

25. Відомо, що $A = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{N}^2, x + y \leq 5\}$, $B = \{(x, y) \mid (x, y) \in \mathbf{N}^2, xy \leq 3\}$. Знайти доповнення до множини B у множині A. Скільки всього підмножин має доповнення до множини B у множині A?

26. Відомо, що множина $A = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{N}^3, x + y + z \leq 4\}$, $B = \{(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbf{N}^3, xyz \leq 3\}$. Знайти доповнення до множини B у множині A. Декартовим квадратом яких трьох множин є доповнення до множини B у множині A?

27. Дано: множина A – декартовий квадрат множини розв'язків рівняння $2x - 5 = 1$, множина B – декартовий квадрат множини розв'язків рівняння $3x - 5 = 7$, множина C – декартовий квадрат множини розв'язків сукупності $\left[\begin{array}{l} 2x - 5 = 1 \\ 3x - 5 = 7 \end{array}\right.$. Задати переліком елементів множину $F = A \cup B$. В якому відношенні перебувають множини F і C?

28. Дано: множина A – декартовий квадрат множини розв'язків рівняння $7x - 6 = 1$, множина B – декартовий квадрат множини розв'язків рівняння $5x = 15$, множина C – декартовий квадрат множини розв'язків системи $\begin{cases} 7x - 6 = 1 \\ 5x = 15 \end{cases}$. Задати переліком елементів множину $F = A \cap B$. В якому відношенні перебувають множини F і C?

29. Дано рівняння: $2x - 3y = 7$, $6y - x - 1 = 0$. Розв'яжіть систему складену з цих рівнянь і запишіть декартовим квадратом яких двох множин є множина розв'язків системи.

30. Відомо, що $A \times B \times C = \{(1, 1, 1), (2, 1, 1), (1, 1, 3), (2, 1, 3)\}$. Задати переліком елементів множини A, B і C.

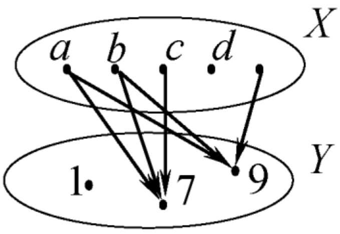
31. Задати переліком елементів множини A, B, C і D, якщо, відомо що $A \times B \times C \times D = \{(1, 1, 1, a), (2, 1, 1, a), (1, 1, 3, a), (2, 1, 3, a)\}$.

32. Декартовим квадратом яких трьох множин є множина точок рівняння $x^2 + y^2 + z^2 = 0$?

Практичне заняття 3.

Бінарні відповідності і відношення

1. Елементи множини $A = \{2, 3, 4, 9\}$ і множини $B = \{12, 17, 19, 10, 21\}$ знаходяться у відповідності K: "число a є дільником числа b", $a \in A, b \in B$. Побудуйте граф відповідності K. Перечисліть всі пари чисел, які знаходяться у відповідності K. Вкажіть область визначення і область значень відповідності K.



2. Відома відповідності K: "число x є кратним до числа y", $x \in X$, $y \in Y$. Побудуйте граф відповідності K між елементами множин X і Y, граф якої заданий на малюнку зліва. Перечисліть всі пари чисел, які знаходяться у відповідності K. Вкажіть область визначення і область значень відповідності K.

3. Дано множини $X = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -5 \le x \le 1\}$, $Y = \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$ – множина цілих чисел). Між елементами цих множин задано відповідність M: "число x менше числа y на 5". Побудуйте граф і графік відповідності M.

4. Відповідність P між елементами множин $X = \{1, 2, 3\}$ і $Y = \{4, 5, 6\}$ задана множиною пар $\{(2; 5), (2; 6), (3; 4), (3; 5)\}$. Задайте відповідність: а) протилежну даній; б) обернену даній; в) протилежну оберненій.

5. Навести приклади двох будь-яких відповідностей між числовими множинами таких, щоб в одному прикладі область визначення відповідності збігалася з областю її відправлення, тобто щоб відповідність була всюди визначена, а у другому прикладі щоб область визначення була правильною підмножиною області відправлення.

6. Відповідність між елементами множин P і K задана рівнянням $y = 5x + 2$. Побудуйте графік цієї відповідності, якщо: а) $P = \{0, 4, 2, 5\}$, $K = \mathbf{Z}$; б) $P = K = \mathbf{N}$; в) $P = K = \mathbf{Z}$; г) $P = K = \mathbf{R}$.

7. Дано множини $X = \{x \mid x \in \mathbf{N}, -5 \le x \le 7\}$, $Y = \mathbf{N}$. Відповідність між елементами множин X і Y задана рівнянням $5x - 2y = 2$. Задайте граф і графік цієї відповідності.

8. Відповідність між елементами множин P і K задана рівнянням $y = x^2 + 3$. Побудуйте графік цієї відповідності, якщо: а) $P = \{0, 3, 1, 4, 2, -1\}$, $K = \mathbf{Z}$; б) $P = K = \mathbf{Z}$; в) $P = K = \mathbf{R}$.

9. Знайти область визначення і множину значень для відповідності $x \geq 3y - 5$, якщо числа x і y – натуральні і $0 \leq x \leq 5$, $2 \leq y < 11$.

10. Побудувати таблицю і граф відповідності між множиною днів тижня і множиною навчальних предметів, які ви вивчаєте в цьому семестрі. Виписати всі пари в яких: а) на першому місці стоїть вівторок; б) на другому місці стоїть математика.

11. Дано множини $A = \{$помаранчевий, зелений, білий, жовтий$\}$, $B = \{$сніг, апельсин, молоко, ялинка$\}$. За певною ознакою знайти і зобразити відповідність між цими множинами. Побудувати граф оберненої відповідності і задати її переліком пар.

12. Дано множину $A = \{3, 6, 9, 12\}$. а) перечисліть елементи множини $A \times A$. б) виділіть з множини $A \times A$ підмножину тих пар, в яких перша компонента більша за другу. Яке відношення задає ця підмножина? Побудуйте граф цього відношення; в) виділіть з множини $A \times A$ підмножину пар, в яких перша компонента не менша за другу. Яке відношення задає ця підмножина? Побудуйте граф.

13. Відношення P задано на множині $X = \{a, b, c, d, e\}$. Множина пар, які знаходяться у відношенні P, є $\{(a; a), (a; b), (a; c), (b; a), (d; e), (e; c), (c; c)\}$. Побудуйте граф відношення P. Вкажіть область визначення і область значень відношення P.

14. Множина пар елементів з множини $A = \{3, 4, 5\}$, які знаходяться у відношенні H, є $\{(5, 5), (3, 5), (3, 3), (4, 5), (4, 4), (3, 4)\}$. Виясніть, які із наступних висловлень істинні: а) H – відношення “менше”; б) H – відношення “не більше”; в) H – відношення “не менше”; г) H – відношення “менше або дорівнює”.

15. На множині X відношення T задано при допомозі нерівності $y \leq 2x$. Побудуйте графік відношення T, якщо:

а) $X = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

б) $X = \{x \mid x \in R,\ -2 \leq x \leq 4\}$

в) $X = \mathrm{R}$.

16. Відношення між елементами множини P задане рівнянням $y = x^2$. Побудуйте граф і графік цього відношення, якщо: а) $P = \{1, 4, 2, 9, 3, -1, -2, -3, 0\}$; б) $P = \mathbf{N}$; в) $P = \mathbf{Z}$; г) $P = \mathbf{R}$.

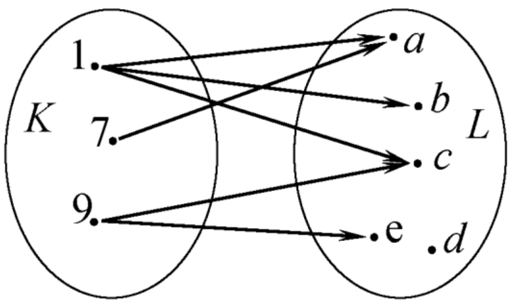
17. Відомо, що $X = \{x \mid x \in \mathbf{Z}, -5 \le x \le 7\}$. Відношення між елементами множини X задане рівнянням $4x^2 - 2y = 2$. Задайте граф і графік цього відношення.

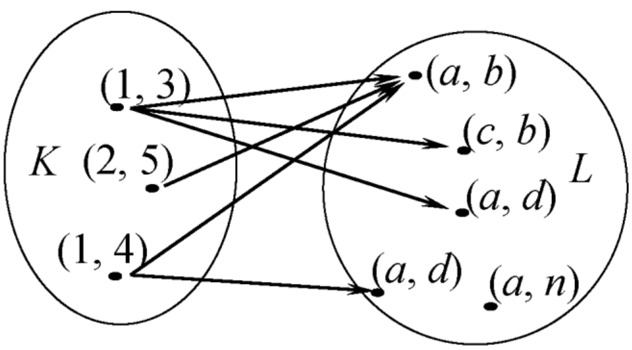
18. Побудувати графіки відношень заданих на множині R: а) $2x = 2y$; б) $x = y + 6$; в) $y = x + 2$; г) $3x < 3y$; д) $x > y - 4$; е) $xy = -2$.

19. Задайте відношення протилежне і обернене даному: “число x менше числа y в 3 рази”, де $(x, y) \in \mathbf{N}^2$.

20. Множина пар задана за своїми характеристичними властивостями $\{(x, y) | (x, y) \in R^2, y \le x + 1\}$ задає відношення P. Побудуйте граф і графік цього відношення.

21. Перечисліть елементи області визначення і області значень відповідності між елементами множин K і L, граф якої заданий на малюнку справа. Перечисліть всі пари елементів, що знаходяться в даній відповідності. Побудуйте графік відповідності.





22. Перечисліть елементи області визначення і області значень відповідності між елементами множин K і L, граф якої заданий на малюнку зліва. Перечисліть всі елементи, що знаходяться в даній відповідності. Вкажіть підмножиною декартового добутку яких чотирьох множин є дана відповідність?

23. Підмножиною прямого добутку множини дійсних чисел є відношення $\{(x, y) | \ x^2 + y^2 = 4\}$. Побудуйте графік цього відношення в прямокутній системі координат.

Практичне заняття 4.

Властивості бінарних відношень.
Упорядковані множини

1. На рисунках знизу зображено графи різних відношень, які задані на множині $D = \{а,\ б,\ в,\ г,\ д\}$. Вкажіть серед них графи: транзитивного відношення; антисиметричного відношення; рефлексивного відношення; відношення еквівалентності; відношення порядку.

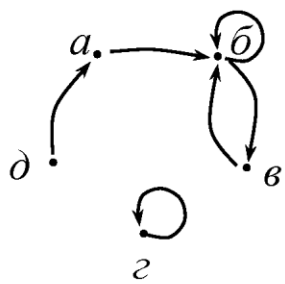


Рис. а)

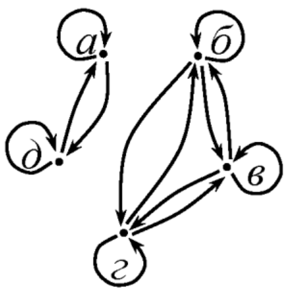


Рис. б)

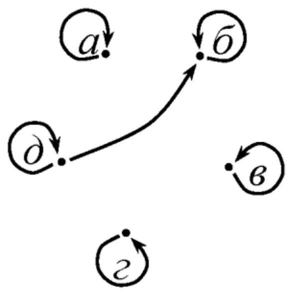


Рис. в)

2. На множині $X = \{3,\ 5,\ 11,\ 9,\ 7\}$ задано відношення $x > y$. Побудувати граф і графік цього відношення. Показати, що це відношення є відношенням строгого порядку.

3. Показати, що відношення рівності за віком (в роках) на будь-якій скінченній підмножині множини студентів Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника є відношення еквівалентності. Чи є це відношення відношенням еквівалентності на на будь-якій скінченній множині людей?

4. Довести, що множина всіх цілих чисел **N** лінійно упорядкована відношенням “$x > y$”.

5. Накреслити граф і графік відношення “менше або дорівнює” на множині $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Якого порядку є це відношення? Чому?

6. В сім'ї п’ять дітей і всіхлопчики. Чи є відношення “бути братом” на множині дітей цієї сім'ї відношенням еквівалентності?

7. Дано множину $X = \{11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22\}$. Накреслити граф відношення “мати одну і ту саму остачу при

діленні з остачею на 5” на множині X. Чи є це відношення відношенням еквівалентності? Знайти розбиття множини за цим відношенням.

8. Побудувати граф відношення $x = 2y - 1$ між елементами множини $\{14, 15, 16, 17, 18, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

9. Побудувати графи відношень “бути сестрою”, “бути братом” на множині членів вашої сім’ї. Визначити властивості цих відношень.

10. Розбити всі натуральні числа від 189 до 300 на класи так, щоб до одного класу ввійшли числа, які мають одну і ту саму остачу при діленні на 57. Скільки дістали класів? За яким відношенням еквівалентності зроблено це розбиття?

11. Дано множини: X – множина букв латинського алфавіту, $A = \{a, b, c, d, e, f\}$, $B = \{c, f\}$, $C = \{a, b, d\}$, $D = \{d, k, l, m, n\}$, $E = \{k, l, m, n\}$. Розгляньте відношення “бути підмножиною” на множині $L = \{X, A, B, C, D, E\}$. Покажіть, що дане відношення є відношенням нестрогого порядку. Перевірте чи воно лінійне.

12. Серед 39 плавців – 27 плили брасом, а 12 – повільно. Скільки плавців могли плисти брасом не повільно?

13. На горі посеред поляни росли хвойні і листяні дерева. Хвойних не великих серед них не було. Всього листяних там було 5. Великих дерев там було 15. Скільки великих листяних дерев росло на поляні, якщо всього дерев було 18?

14. З 45 учнів класу 23 отримали підручник з математики, 33 – з української мови, а 22 – обидва підручники. Скільки учнів класу поки що не отримали ні того, ні того підручника?

15. З ящика повибирали всі гриби, крім пригнивши, мокрих і поламаних. В ньому залишилося 24 поламаних, 18 мокрих і 36 пригнивших. Мокрих поламаних було 2, мокрих пригнивши – 9, а пригнивши поламаних – 18. Один гриб був поламаний, мокрий і пригнивший. Скільки грибів було в кошику? Скільки було мокрих цілих пригнивши грибів?

16. Скількома способами можна вибрати голосний звук із слова “математика”?

17. Скількома способами можуть бути виставлені оцінки вісьмом студентам, які здали екзамени, якщо відомо, що лише два з них отримали п’ятірки, і лише два з них отримали незадовільні оцінки?

18. Скількома способами можна утворити групу з трьох солдатів і одного офіцера, якщо є двадцять солдатів і п'ять офіцерів?

19. Скількома способами можна скласти наряд з одного сержанта і 3 солдат, якщо у військовому підрозділі всього 7 сержантів і 80 солдат?

20. Скількома способами можна розсадити 19 учнів на 80 місць?

21. Скількома способами можна розподілити премії по чотири книжки для преміювання трьох учнів, якщо купили 12 різних книжок?

22. Скількома способами можна вибрати п'ять осіб на п'ять посад з восьми кандидатів на ці посади?

23. Скількома способами з восьми різних квіток можна скласти букет так, щоб він містив непарну їх кількість і не менше трьох?

24. Скільки трицифрових чисел, кратних 5, можна зобразити цифрами 0, 3, 5, 7, 9?

25. Скільки тризначних чисел можна утворити з множини цифр {2, 4, 5, 6, 8}? Скільки двозначних? чотиризначних?

26. Скільки різних площин можна провести через n точок у просторі, якщо ніякі чотири точки не лежать в одній площині?

27. Скільки потрібно різних предметів, щоб можна було утворити 110 розміщень по два предмети в кожному?

28. Скільки непарних чотирицифрових чисел можна утворити з цифр: 4, 2, 5, 6, 8, якщо кожна цифра може бути використана тільки один раз у кожному числі?

29. Скільки існує ін'єктивних відображень триелементної множини в чотириелементну?

Практичне заняття 5.

Висловлення.
Алгебра висловлень. Таблиці істинності

1. Вважатимемо істинними прості висловлення: A –“Сьогодні перший день нового навчального року”; B –“В усіх дітей гарний настрій”; C – “В школі багато квітів”. Побудувати заперечення кожного з них і подвійні заперечення та зробити висновок про їх істинність. Сформулювати складені висловлення, що відповідають виразам $A \vee B$, $A \vee C$, $B \vee C$, $A \wedge B$, $\overline{A} \wedge B$, $A \vee B \wedge C$, $A \wedge B \vee C$, $A \vee \overline{B} \wedge \overline{C}$ і зробити висновок про їх істинність.

2. Придумати будь-які три висловлення A,B і C. Сформулювати складені висловлення, що відповідають виразам $A \vee B$, $A \vee C$, $B \vee C$, $A \wedge B$, $\overline{A} \wedge B$, $A \vee B \wedge C$, $A \wedge B \vee C$, $A \vee \overline{B} \wedge \overline{C}$ і зробити висновок про їх істинність.

3. Чи можна визначити значення істинності висловлення A, якщо: а) $A \wedge B$ –“і”; б) $A \wedge B$ –“х”, B – “і”; в) $A \vee B$ – “і”; г) $A \vee B$ – “х”.

4. Чи можна визначити значення істинності висловлення $A \vee B$, якщо: а) A – істинне, б) B – істинне, в) A – хибне, г) B – хибне?

5. Відомо, що A – «1», B – «1», C – «0», D – «0». Знайдіть значення істинності висловлень: а) A або $\overline{C}$; б) $\overline{A}$ і B; в) D або B; г) $\overline{D}$ і $\overline{A}$; д) $\overline{\overline{C} \text{ і } A}$; ж) A і B або C; з) C і D або A; е) $\overline{B}$ або D; і) $\overline{C}$ і A і $\overline{D}$.

6. Записати інакше складені висловлення і зробити висновок про їх істинність: а) $5 \geq 3$; б) $(x-1)^2 \geq 0$; в) $4\text{-}5 \geq \text{-}1$; г) $(\text{-}4)^2 \leq 0$; $-3 < -5 < 2$.

7. Розв’яжіть логічну задачу: чотири студентки педфаку – Оля, Ніна, Світлана, Алла зайняли у змаганні перші чотири місця. На запитання, хто яке місце посів, було дано три різні відповіді: “Оля – перше, а Ніна – друге”, “Оля – друге, а Алла – третє”, “Світлана – друге, а Алла – третє”. Яке місце посіла кожна студентка, якщо у кожній відповіді одна частина правильна, а друга хибна?

8. Перед чемпіонатом з футболу троє учнів засперечалися, яке місце займе кожна з чотирьох команд. Висловлено такі прогнози:

Сергій: “Динамо” – перше, а “Спартак” – друге”,

Микола: “Торпедо” – друге, а “Локомотив” – четверте,

Павло: “Спартак” – перше, а “Локомотив” – третє.

Виявилось, що в кожному випадку висловлені одна частина істинна, а друга – хибна. Яке місце посіла кожна команда, коли жодні дві команди не посіли те саме місце і всі чотири місця було розподілено між цими командами?

9. Вкажіть порядок виконання операцій над висловленнями:

а) $A \wedge (B \vee C)$; б)$A \wedge B \vee C$; в)$A \vee B \wedge C \vee D$; г) $\overline{A} \wedge B$; д) $\overline{A \vee B}$

10. За допомогою таблиці істинності довести рівності:

а) $(\overline{A} \vee B) \wedge (\overline{A} \vee \overline{B}) = A \wedge B \vee A \wedge \overline{B}$; б) $A \wedge \overline{A} \vee B \wedge \overline{\overline{B}} \vee C = B \vee C$;

в) $\left(A \vee B\right) \wedge \left(\overline{A} \vee B\right) = \left(A \wedge \overline{A}\right) \vee B$.

11. Обчислити значення істинності таких формул:

а) $F = \overline{A \wedge \overline{B} \vee C} \vee \left(\overline{A} \wedge \overline{B}\right) \wedge \overline{C}$ при A = ”і”, B = ”х”, C = ”і”;

б) F = $A \wedge \overline{B} \vee \overline{\overline{C \wedge D} \vee B \wedge \overline{D}}$ при $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = 0$.

12. Вважатимемо істинними висловлення “Якщо іде дощ (A), квітка закриває пелюстки (B)”. Побудувати висловлення, що відповідають формулам: $\overline{A} \Rightarrow B$; $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$; $A \Rightarrow \overline{B}$; $A \Leftrightarrow B$; $\overline{A} \Leftrightarrow \overline{B}$; $\overline{A} \vee B$. Що можна сказати про істинність кожного з них, виходячи з означення імплікації і еквіваленції?

13. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі:

$\overline{A} \vee (C \Rightarrow A \wedge B) \Leftrightarrow (A \vee B \wedge \overline{C} \Rightarrow \overline{A} \wedge B) \wedge A$.

14. Скласти таблицю істинності для формул:

а) $(\overline{A \vee B}) \wedge C$; б) $\overline{A \wedge B \vee \overline{A \wedge B}}$; в) $(A \vee B) \wedge (\overline{A} \vee C)$.

15. Задано висловлення: p – “m і n – невід’ємні цілі числа”, q – “$m + n = m \cdot n$”, r – “$m = 0$”, s – “$n = 0$”, t – “$m = 2$”, u – “$n = 2$”.

Сформулювати висловлення: $p \Rightarrow [q \Leftrightarrow (r \wedge s \vee t \wedge u)]$.

16. Записати логічною формулою твердження: ”Якщо ціле число n ділиться на 30, то воно ділиться на 3 і на 10, а також на 5 і на 6”.

17. Дано висловлення:

а) якщо сьогодні температура нижче – $20^\circ C$, то сьогодні ясно;

б) якщо я навчався на першому курсі педінституту, то я закінчив середню школу;

в) якщо 1 – 4 = 3, то $K = 1$ є коренем рівняння $x - 4 = 3$;

г) якщо у мене температура 38°, то я хвора.

В кожній імплікації виділіть умову і висновок. Сформулюйте імплікації, обернені заданим.

18. Чи є серед даних формул тавтології: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$; $A \vee \overline{B} \Rightarrow C$; $\overline{A} \wedge B \Leftrightarrow \overline{A}$?

19. Істинне чи хибне твердження: а) $A \wedge B \wedge C \Rightarrow \overline{A} \vee B = B \wedge \overline{C}$; б) $A \wedge B \wedge C \Rightarrow \left(\overline{\overline{A} \wedge \overline{\overline{B}}} = B \wedge \overline{C} \Leftrightarrow A\right)$; в) $A \wedge B \wedge C \Rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{B \wedge \overline{C} \vee A}$?

20. Знайти значення істинності висловлень: а) $\sqrt{9} = 3$ і $\sqrt{9} = -3$; б) $13 \leq 5$; в) $-5 < 4 \leq 4$; г) $-11 < 12 \leq 11$; д) $-12 < 11 \neq 11$; е) $\sqrt{13} \geq 5$.

21. Побудувати заперечення до висловлень і вказати, що істинне – дане висловлення чи його заперечення: а) $27 \vdots 7$; б) $9 \geq 9$; в) $2 + 5 = 7$; г) $52 > 61$; д) $2 + 5 < 7 - 1$; е) $2 + (2 + 5) \cdot 2 - 17 < 7 - 1/2$.

22. Відомо, що якщо висловлення B істинне, то висловлення D хибне. Чи можна на основі цього стверджувати, що якщо B хибне, то D істинне? Наведіть приклад, який підтверджує вашу відповідь.

23. Занумерувати послідовність виконання операцій у формулі:

$(\overline{A} \vee (D \Rightarrow A \wedge B)) \Leftrightarrow A \vee B \wedge \overline{C} \Rightarrow \overline{A} \wedge D \wedge A$.

24. Скласти таблицю істинності для формул:

а) $(\overline{A \vee B}) \Leftrightarrow A \vee D \wedge C \Leftrightarrow A \vee D$;

б) $\overline{A \wedge B \vee \overline{A \wedge B}} \Leftrightarrow (D \wedge C \vee B) \wedge (\overline{A} \vee D)$.

25. Побудувати заперечення до висловлень і вказати, що істинне – дане висловлення чи його заперечення:

а) Число кратне 3 і 9, якщо сума його цифр кратна відповідно числам 3 і 9;

б) Якщо кожний з доданків не кратний деякому натуральному числу, то сума може бути як кратна, так і не кратна цьому натуральному числу.

Практичне заняття 6.

Предикати та операції над ними. Квантори

1. Серед нижче наведених записів виділити висловлення, числові вирази, вирази зі змінною, предикати: а) $(22+43)\cdot 2$; б) $7z+2y-11$; в) $x+1=0$; г) $z \le x+y$; д) $\frac{2}{3}-\frac{4}{5}x>0$; е) $x<y$.

2. На множині N – натуральних чисел заданий предикат $h(x)$: „$\frac{17}{18}-\frac{4}{9}x^2=\frac{1}{2}$" і предикат $p(x)$: "$0<x\le 2\frac{1}{2}$".

а) Знайдіть множини істинності T_h і T_p відповідно предикатів $h(x)$ і $p(x)$;

б) В якому відношенні знаходяться попарно всі три множини T_h, T_p і N ?

3. На множині N – натуральних чисел задано предикати $h(x)$: "$2-x^2=1$" і $p(x)$: "$2\frac{1}{4}<x\le\frac{7}{2}$". Знайти характеристичні множини цих предикатів.

4. Подати предикат $E(x)$: "$x^2-1=0$" у вигляді диз'юнкції двох простих предикатів і знайти його множину істинності.

5. Подати предикат $F(x)$: "$\frac{x+1}{3x-5}>0$" у вигляді диз'юнкції двох кон'юнкцій елементарних предикатів. Знайти множину істинності цього предиката.

6. На числовій множині $M=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ заданий предикат $F(x)$: "Число x є коренем рівняння $x^2-3x=0$". Знайти множину істинності цього предиката; утворити заперечення і визначити множину істинності заперечення.

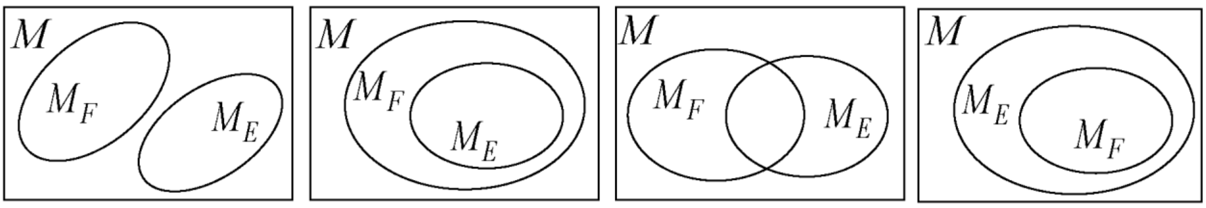
7. На множині геометричних фігур задані предикати: $C(x)$: "Фігура x – трикутник" і $D(x)$: "Фігура x – многокутник". Утворіть кон'юнкцію і диз'юнкцію цих предикатів, знайдіть їх множину істинності і дайте графічну ілюстрацію.

8. На множині студентів групи задані предикати $F(t)$: “Студент t грає в шахи” і $E(t)$: ”Студент t вміє плавати”. Користуючись звичайною мовою прочитайте предикати: а) $F(t)\wedge E(t)$; б) $F(t)\vee E(t)$; в) $\overline{F(t)}\wedge\overline{E(t)}$; г) $\overline{F(t)\vee E(t)}$; д) $\overline{F(t)\wedge E(t)}$; е) $F(t)\vee\overline{E(t)}$.

9. Предикати $F(x)$, $E(x)$, $R(x)$ задані на деякій множині M. Відомо, що переріз множин істинності предикатів $F(x)$, $E(x)$, $R(x)$ дорівнює порожній множині. Зобразити при допомозі діаграм Ейлера-Венна множини істинності наступних предикатів: а) $F(x)\wedge E(x)\wedge R(x)$; б) $F(x)\vee E(x)\vee R(x)$; в) $\overline{F(x)}\wedge\overline{E(x)}\wedge\overline{R(x)}$; г) $\overline{F(x)\vee E(x)\vee R(x)}$; д) $\overline{F(x)\wedge E(x)\wedge R(x)}$; е) $F(x)\vee\overline{E(x)}\vee\overline{R(x)}$; є) $F(x)\vee\overline{E(x)}\vee R(x)$; ж) $\overline{F(x)}\wedge\overline{E(x)}\wedge R(x)$; з) $\overline{F(x)\wedge\overline{E(x)}\wedge R(x)}$; к) $\overline{F(x)\vee\overline{E(x)}\wedge\overline{R(x)}}$.

10. На множині M – натуральних двозначних чисел задані предикати: $F(m)$: ”$m \geq 87$”, $E(m)$: “$m < 90$”, $R(m)$: “$m > 90$”. Знайдіть множину істинності таких імплікацій: а) $F(m) \Rightarrow E(m)$; б) $E(m) \Rightarrow R(m)$; в) $R(m) \Rightarrow F(m)$.

11. Предикати $F(m)$, $E(m)$ задані на деякій множині M. Відношення між їхніми характеристичними множинами, відповідно M_F і M_E, показано на рисунку нижче. Вкажіть серед цих чотирьох рисунків ті, для яких істинні висловлення: а) предикат $E(m)$ слідує із предиката $F(m)$; б) предикат $F(m)$ слідує із предиката $E(m)$; в) предикат $F(m)$ не слідує із предиката $E(m)$ і предикат $E(m)$ не слідує із предиката $F(m)$.



12. На множині $M = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$ задані предикати $F(m)$: ”число m кратне 3” і $E(m)$: ”$m - 1 < 0$”. Визначте множину істинності предикатів: а) $F(m)\Rightarrow E(m)$; б) $\overline{F(m)}\Rightarrow\overline{E(m)}$.

13. Нехай предикати $h(x)$: “$x + 4 < 0$”, $p(x)$: “$3x + 2 > 0$” визначені на множині R. Знайти характеристичні множини для предикатів $h(x)\vee p(x)$, $h(x)\wedge\overline{p(x)}$, $\overline{h(x)}$, $\overline{p(x)}$, $h(x)\Rightarrow p(x)$.

14. Записати характеристичну множину предикатів $h(x, y)$: “$x + y = 8$”, $p(x, y)$: “$x + y < 8$”, визначених на множині $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

15. Запишіть істинні значення і заперечення поданих висловлень, записавши їх попередньо в символічній формі:

а) існують такі числа, які не діляться самі на себе;

б) існує ціле число, на яке не ділиться жодне ціле число;

в) існує ціле число, на яке не ділиться жодне інше число;

г) існує найменше ціле число, яке націль ділиться на два задані цілі числа.

16. Прочитайте такий символічний запис:

а) $(\forall x)\ [(x \in \mathrm{Z}) \Rightarrow (x > 0) \vee (x < 0) \vee (x = 0)]$;

б) $(\exists x)\ [(x \in \mathrm{R}) \wedge (x^2 = 2)]$; в) $(\forall x)\ (\forall y)\ [x \neq 0) \wedge (y \neq 0) \Rightarrow (xy \neq 0)]$.

17. Застосовуючи символіку логіки предикатів, записати означення: а) об’єднання двох множин A і B; б) перерізу двох множин A і B; в) різниці двох множин A і B; г) декартового добутку двох множин A і B.

18. Записати символікою логіки предикатів речення:

а) існує таке непарне число, яке буде взаємно простим з числом 15;

б) якщо будь-яке число ділиться на парне число, то воно також буде парним;

в) для будь-яких двох чисел існує третє число, яке є їхньою сумою;

г) всі ті, хто люблять математику – люблять мислити, а всі ті, хто не люблять математики – не люблять мислити.

19. Яке з висловлень на множині дійсних чисел істинне:

$(\forall x)(x^2 + 1 = 0)$; $(\exists x)(x^2 + 1 = 0)$; $(\exists x)(x^2 + 1 > 0)$; $(\forall x)(x^2 + 1 > 0)$; $(\forall x)(x^2 \geq 0)$; $(\forall x)(x^2 > 0)$; $(\exists y)(\forall x)(x - y = 0)$; $(\forall y)(\exists x)(x - y = 0)$; $(\forall x)(\forall y)(\forall z)(x < y \Rightarrow x + z < y + z)$?

20. На множині N – натуральних чисел задано предикати $h(m)$: “$2 - m = 1$” і $p(m)$: “$m + 1 = 0$”. Утворити хоча б три предикати, кожен з яких є логічним наслідком кожного з даних двох предикатів $h(m)$ і $p(m)$.

Практичне заняття 7.

Будова і види теорем. Необхідні і достатні умови. Способи доведення теорем

1. Записати подані нижче теореми у вигляді формул логіки предикатів, виділити коментарії (пояснюючі частики) умови і наслідок, записати спряжені до них теореми, виділити необхідні й достатні умови:

а) якщо даний чотирикутник ромб, то його діагоналі взаємно перпендикулярні;

б) деякі дійсні числа – раціональні;

в) якщо кожне з двох чисел ділиться на третє число, то й сума їх ділиться на це число;

г) діагоналі ромба точкою перетину діляться навпіл;

д) діагоналі рівнобічної трапеції рівні;

е) у рівнобедреному трикутнику дві медіани рівні;

є) опуклий многокутник не може мати більше трьох гострих кутів;

ж) якщо запис числа закінчується нулем, то це число ділиться на 5;

з) якщо вільний член квадратичного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ дорівнює нулю, то один з коренів цього рівняння дорівнює нулю;

й) якщо в трикутнику один кут тупий або прямий, то два Інші – гострі;

і) у паралелограмі його діагоналі в точці перетину діляться навпіл.

2. Довести методом від супротивного такі твердження:

а) опуклий многокутник не може мати більше трьох гострих кутів;

б) якщо $\dfrac{a-b}{a+b}$ – нескоротний дріб, то дріб $\dfrac{a}{b}$ – також нескоротний;

в) якщо $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – відмінні від нуля вектори, то з рівності $\left|\vec{a}+\vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right| + \left|\vec{b}\right|$ випливає, що $\vec{a} \parallel \vec{b}$;

г) якщо формула $A \wedge B \Rightarrow C$ тотожно істинна, то $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ – також тотожно істинна;

д) якщо в деякій площині α дві прямі a і b перпендикулярні до прямої c, то вони паралельні між собою;

е) ні при жодному цілому n частки $\dfrac{n-6}{15}$ і $\dfrac{n-5}{24}$ не можуть бути одночасно цілими числами;

е) якщо в чотирикутнику сума протилежних кутів дорівнює 180°, то через вершини цього чотирикутника можна провести коло;

ж) сума й різниця раціонального числа r та ірраціонального числа q – ірраціональні;

з) добуток rq і частка $\dfrac{r}{q}$, $r \neq 0, q \neq 0$, раціонального числа r та ірраціонального q є числа ірраціональні;

й) число $\sqrt{6}$ – ірраціональне;

і) число $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ є ірраціональним.

Список рекомендованої літератури

1. Кужель О.В. Елементи теорії множини і математичної логіки. К.: Радянська школа, 1977.
2. Пышкало А.М. и др. Теоретические основы начального курса математики. М.: Просвещение, 1974.
3. Архипов Б.М. Математика. – Минск, Выш.шк., 1976, с.51-75.
4. Виленкин Н.Я., Пишкало А.М., Рождественская В.Б. Математика. – М.: Просвещение, 1977, с.96-106.
5. Столяр А.А, Лельчук М.П. Математика. Минск, Высшая школа, 1975.
6. Виленкин Н. Я., Лаврова Н, Н., Рождественская В. Б. и др. Задачник-практикум по математике: М. Просвещение, 1977.
7. Кухар В, М., Білий Б. М. Теоретичні основи початкового курсу математики. 2-е вид. К. : Вища шк. Головне вид-во, 1987.
8. Боровик В. Н. та ін. Математика К.; Вища шк. Головне вид-во, 1980.
9. Пышкало А. М., Стойлова Л, М., Лаврова Н. Н.и др. Сборник задач по математике М.: Просвещение. 1979.
10. Курс математики: Навч.-метод. посібник для студентів спеціальності ”Початкове навчання” / Довгий О.Я., Межиловська Л.Й., Ткачук О.М., Файчак З.Є. – Івано-Франківськ: Плай, 2005. – 107 с.

З м і с т

стр.

Навчальне видання

Довгий Олег Ярославович, **Файчак** Зоя Євгенівна

МЕТОДИЧНІ РЕКОМЕНДАЦІЇ

ДО ВИВЧЕННЯ КУРСУ МАТЕМАТИКИ В І СЕМЕСТРІ ДЛЯ СТУДЕНТІВ І КУРСУ СПЕЦІАЛЬНОСТІ ”ПОЧАТКОВЕ НАВЧАННЯ”

Комп’ютерна верстка і редакція *О.Я. Довгого*

Навчально-методичний посібник

Здано до набору 20.12.05.
Підписано до друку 15.06.06

Ум. друк. арк. 3,8. Вид. арк. 3,6
Тираж 300

Видавничо-дизайнерський відділ ЦІТ Прикарпатського національного університету імені Василя Стефаника
76000, м. Івано-Франківськ, вул.. Шевченка 57, тел. 59-60-50.
E-mail: Vdvcit@pu.if.ua.