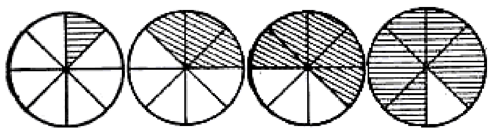
Звичайні дроби

1. Поняття звичайного дробу. Еквівалентні дроби. Основна властивість дробу.
2. Необхідна і достатня умова еквівалентності дробів.
3. Додавання і віднімання додатних раціональних чисел. Закони додавання цих чисел.
4. Множення і ділення додатних раціональних чисел. Закони множення цих чисел.

1. Поняття звичайного дробу. Еквівалентні дроби. Основна властивість дробу

Поділивши одиничний відрізок на n рівних частин і взявши m таких частин, одержимо дріб. Поняття дробу вводять ще у третьому (другому) і четвертому (третьому) класах. Тут **за** одиницю беруть відрізок, круг, прямокутник, зокрема квадрат, смужки і т. ін. Наприклад, круг ділять на 8 рівних частин і виділяють – $\frac{1}{8}$ частину круга, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{8}$ і $\frac{7}{8}$ (рис.).



Вводять поняття чисельника і знаменника дробу: число під рискою означає, на скільки рівних частин розділено круг, його називають ***знаменником дробу***. Число над рискою означає, скільки взято рівних частин круга. Це число називають ***чисельником дробу***.

Якщо якийсь відрізок $e_1 = \frac{e}{n}$ укладається у відрізку a ціле число разів (m), то і відрізок $\frac{e_1}{k} = \frac{e}{nk}$ укладеться у цьому відрізку також ціле число разів (mk разів). Отже, довжина того самого відрізка a при обраній одиниці довжини e може бути виражена дробом $\frac{m}{n}$ і $\frac{mk}{nk}$ –, де k – довільне натуральне число. Такі дроби називають ***еквівалентними*** (або рівними) і записують це так:

$$\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}.$$

Наприклад, якщо відрізок a має $\frac{7}{5}$ певного одиничного відрізка завдовжки e, то вдвоє менших частин цієї одиниці, тобто десятих, він міститиме вдвоє більше – 14, а утроє менших частин – втроє більше – 21 і т. д. Тобто $\frac{7}{5} = \frac{14}{10} = \frac{21}{15}$ і т.д.

Розглянута властивість є ***основною властивістю дробу***: *якщо чисельник і знаменник дробу помножити на те саме натуральне число, то дістанемо дріб, еквівалентний даному:* $\frac{m}{n} = \frac{mk}{nk}$, де k – довільне натуральне число.

Відношення еквівалентності дробів має всі *властивості* відношення типу еквівалентності:

1) *Рефлексивність: кожний дріб еквівалентний самому собі* (k = 1);

2) *Симетричність:* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{c}{d}=\frac{a}{b}$;

3) *Транзитивність:* $\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)\wedge\left(\frac{c}{d}=\frac{e}{f}\right)\Rightarrow\frac{a}{b}=\frac{e}{f}$.

Ці властивості випливають безпосередньо з означення еквівалентних дробів, як таких, що відповідають тому самому відрізку (чи тій самій множині часток одиниці).

Безпосередньо з означення еквівалентності дробів випливають такі наслідки:

а) *якщо у двох еквівалентних дробів знаменники рівні, то і чисельники їх також рівні, тобто* $\frac{a_1}{b}=\frac{a_2}{b}\Rightarrow a_1=a_2$. Справді, рівність знаменників означає, що одиницю треба ділити на те саме число рівних частин. Отже, частини $\frac{1}{b}$ однакові. Різне число однакових частин не може дати еквівалентних дробів (що відповідають тому самому відрізку або множині рівних часток одиниці). Отже, число таких частин також однакове $a_1=a_2$.

б) *якщо у двох еквівалентних дробів чисельники рівні, то і знаменники їх також рівні, тобто* $\frac{a}{b_1}=\frac{a}{b_2}\Rightarrow b_1=b_2$. Рівне число частин не може дати еквівалентних дробів, якщо ці частини не однакові, тому $b_1=b_2$.

2. Необхідна і достатня умова еквівалентності двох дробів

Теорема 1. *Два дроби* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$ *еквівалентні тоді і тільки тоді, коли виконується умова* $ad = bc$, тобто $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$.

Доведення. а) Доведемо, що $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = bc$. Замінимо дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ еквівалентними їм дробами так, щоб в одержаних дробах були однакові знаменники. Для цього помножимо чисельник і знаменник дробу $\frac{a}{b}$ на d, а чисельник і знаменник дробу $\frac{c}{d}$ на b. Інакше кажучи, зведемо дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ до спільного знаменника bd на основі основної властивості дробу: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ і $\frac{c}{d} = \frac{cb}{db} = \frac{cb}{bd}$. Звідси, за властивістю транзитивності відношення еквівалентності дробів, матимемо $\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{bd}$. Оскільки знаменники цих еквівалентних дробів рівні, то і чисельники їх будуть рівні: $ad = bc$.

б) Доведемо тепер, навпаки, що $ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Зведемо знову дроби $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ до спільного знаменника: $\frac{a}{b} = \frac{ad}{bd}$ і $\frac{c}{d} = \frac{bc}{bd}$. Замінимо bc на ad за умовою їх рівності. Тоді – $\frac{c}{d} = \frac{ad}{bd}$. Звідси за властивістю транзитивності $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. *Теорему доведено.*

Усі еквівалентні між собою дроби утворюють клас еквівалентних дробів і всі вони зображують те саме число, яке називатимемо ***раціональним*** *додатним числом* (цілим або дробовим). ***Дріб*** *– це лише форма зображення числа.* Еквівалентні дроби зображують рівні числа, а нееквівалентні – різні, нерівні числа.

Дробове число $\frac{3}{4}$ можна зобразити (записати) різними еквівалентними дробами: $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\frac{12}{16}=\frac{120}{160}=\frac{60}{80}=\ldots$. Дроби $\frac{2}{3},\frac{4}{5}$ і т. ін. зображують зовсім інші числа.

Означення 1. *Дріб, чисельник якого менший від знаменника, називається правильним; дріб, чисельник якого більший або дорівнює знаменнику, називається неправильним.* $\frac{2}{3}$–пр.; $\frac{3}{2}$– ні.

Для загальності вважають, що чисельник a може дорівнювати нулю, а знаменник b може дорівнювати одиниці (але $b \neq 0$). Дріб $\frac{0}{b}$ при будь-якому $b \neq 0$ виражає числову характеристику порожньої множини b часток одиниці (елемента), тобто $\frac{0}{b} = 0$. Отже, ціле число нуль можна зобразити дробом, знаменник якого є будь-яке натуральне число, а чисельник дорівнює нулеві. Дробом із знаменником, що дорівнює одиниці, позначають натуральне число, виражене його чисельником, тобто $\frac{a}{1} = a$. Отже, множина раціональних додатних чисел містить у собі дробові числа, натуральні числа і число нуль.

Кожне натуральне число a можна зобразити у вигляді дробу нескінченною множиною способів: $a = \frac{a}{1} = \frac{an}{n}, n \in N$. Наприклад, $3 = \frac{3}{1} = \frac{6}{2} = \frac{9}{3} = \ldots$

На основній властивості дробу, як відомо, ґрунтується не тільки зведення дробів до спільного знаменника, а й ***скорочення*** *дробу*, тобто зведення його до більш простого вигляду діленням чисельника і знаменника на те саме, відмінне від нуля, число, тобто заміна дробу $\frac{am}{bm}$ еквівалентним йому дробом $\frac{a}{b}$ (за властивістю симетричності відношення еквівалентності дробів). Для кожного дробу існує найпростіший вигляд, коли чисельник і знаменник не мають спільного дільника, більшого за одиницю, тобто є числами взаємно-простими.

Означення 2. *Дріб* $\frac{a}{b}$*, чисельник і знаменник якого є числа взаємно-прості, тобто* НСД(a,b)=1, *називається* ***нескоротним*** *дробом.*

Для того щоб одержати дріб у нескоротному вигляді, треба чисельник і знаменник його поділити на їх найбільший спільний дільник. При цьому практично можна йти двома шляхами: а) чисельник і знаменник дробу ділити послідовно на спільні прості дільники. Н-д: $\frac{90}{250} = \frac{90:2}{250:2} = \frac{45}{125} = \frac{45:5}{125:5} = \frac{9}{25}$, НСД(9, 25)=1

б) знайти НСД чисельника і знаменника і поділити чисельник і знаменник відразу на їх НСД. Наприклад: НСД(90, 250) = 10, то

$$\frac{90}{250}=\frac{90:10}{250:10}=\frac{9}{25}.$$

Для спрощення порівняння дробових чисел і виконання дій над ними зручно зводити дроби не до будь-якого, а до найменшого спільного знаменника. Зрозуміло, що він буде найменшим спільним кратним знаменників цих дробів.

При зведенні дробів до найменшого спільного знаменника можливі, зокрема, такі два випадки: а) Знаменники даних дробів взаємно-прості попарно, тобто жодна пара знаменників не містить спільних множників, відмінних від одиниці. Тоді найменше спільне кратне цих чисел дорівнює їх добутку. Наприклад $\frac{2}{3},\frac{4}{5},\frac{7}{11}$ і $\frac{4}{29}$. Маємо знаменники цих дробів взаємно-прості попарно. Тому найменший спільний знаменник цих дробів дорівнює їх добутку $3\cdot 5\cdot 11\cdot 29$.

б) Найбільший із знаменників нескоротних дробів ділиться на кожний із інших знаменників. В цьому випадку найбільший із знаменників нескоротних дробів і є найменшим спільним знаменником цих дробів. Наприклад $\frac{2}{3},\frac{5}{66},\frac{7}{11}$, то найменший спільний знаменник цих дробів дорівнює 66.

Якщо маємо скоротні дроби, то перед зведенням їх до спільного знаменника потрібно ці дроби скоротити.

Теорема 2. Якщо два нескоротних дроби еквівалентні, то їх чисельники і знаменники відповідно рівні між собою:

$$\left(\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\right)\wedge \text{НСД}(a,b)=1\wedge \text{НСД}(c,d)=1 \Rightarrow (a=c)\wedge(b=d).$$

Доведення. З умови $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ маємо $ad=bc$. Так, як $ad \vdots a$, то, і $bc \vdots a$, але НСД(a,b)=1, тому $c \vdots a$. Аналогічно $bc \vdots c$, отже, і $ad \vdots c$, але НСД(c,d)=1, тому $a \vdots c$. Але за властивістю відношення подільності, якщо $a \vdots c$ і $c \vdots a$, то $a = c$. (Тут $\vdots$ – кратність, або подільність націло).

Тоді $\frac{a}{b}=\frac{a}{d}$, звідки $b=d$. Слід пам'ятати, що ця теорема стосується лише нескоротних дробів.

3. Додавання і віднімання додатних раціональних чисел. Закони додавання цих чисел

Розглянемо спочатку додавання додатних раціональних чисел. Нехай маємо два раціональних числа r_1 і r_2, виражені дробами з різними чисельниками і однаковими знаменниками: $r_1=\frac{a_1}{n}$ і $r_2=\frac{a_2}{n}$. Їх можна розглядати як міри довжин двох відрізків b і c при одній одиниці вимірювання або як числові характеристики множини A_1, що містить a_1 n-х часток деякого одиничного елемента, і множини A_2, що містить a_2 таких самих n-х часток.

Додаючи ці два відрізки або об'єднуючи ці дві множини, дістаємо відрізок $b+c$ або нову множину n-х часток деякого одиничного елемента. Ця нова множина буде містити a_1+a_2 елементів, тобто n-х часток, отже, вона характеризуватиметься дробовим числом $\frac{a_1 + a_2}{n}$, яке природно назвати сумою чисел r_1 і r_2, тобто $\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} = \frac{a_1 + a_2}{n}$.

Аналогічні міркування можна провести і на випадок кількох доданків.

Означення 1. *Сумою двох* (або кількох) *дробових чисел з однаковими знаменниками є дробове число, чисельником якого є сума їх чисельників, а знаменником – їх спільний знаменник:* $\frac{a_1}{n} + \frac{a_2}{n} + \ldots + \frac{a_k}{n} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{n}$.

Якщо дано дробові числа з різними знаменниками, то їх слід спочатку звести до спільного знаменника, а тоді додавати як дроби з рівними знаменниками.

Означення 2. *Сумою додатних раціональних чисел* $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$ – *називається число* $\frac{ad + bc}{bd}$, тобто $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.

Властивості дії додавання.

1) *Закон існування і єдиності суми.* З означення дробу і означення дії додавання додатних раціональних чисел та закону існування суми і добутку натуральних чисел випливає, що дія додавання дробових чисел завжди здійсненна, тобто що сума додатних раціональних чисел завжди існує і є число додатне раціональне.

2) *Переставний закон:* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

Доведення. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ і $\frac{c}{d} + \frac{a}{b} = \frac{bc+ad}{db}$, беручи до уваги переставний закон додавання і множення натуральних чисел, легко зробити висновок про тотожність цих виразів, отже $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$.

3) *Сполучний закон:* $\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$.

Доведення.

$$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \left(\frac{cf+ed}{df}\right) = \left(\frac{ad+cb}{bd}\right) + \frac{e}{f} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{b} + \left(\frac{cf+ed}{df}\right) = \left(\frac{ad+cb}{bd}\right) + \frac{e}{f} \Leftrightarrow \frac{adf+bcf+bed}{bdf} = \frac{adf+bcf+bed}{bdf}.$$

Ці вирази тотожно рівні. Всі перетворення еквівалентні, то і вихідна рівність є тотожністю.

4) *Закон монотонності для рівності та нерівності*:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{c}{d} + \frac{m}{n}, \qquad \frac{a}{b} > \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{m}{n} > \frac{c}{d} + \frac{m}{n}.$$

Як наслідок із закону монотонності додавання для рівностей та нерівностей випливає властивість адитивності рівностей та нерівностей:

$$\left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{c_1}{d_1}\right) \wedge \left(\frac{a_2}{b_2} = \frac{c_2}{d_2}\right) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2};$$

$$\left(\frac{a_1}{b_1} > \frac{c_1}{d_1}\right) \wedge \left(\frac{a_2}{b_2} > \frac{c_2}{d_2}\right) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} > \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2};$$

$$\left(\frac{a_1}{b_1} < \frac{c_1}{d_1}\right) \wedge \left(\frac{a_2}{b_2} < \frac{c_2}{d_2}\right) \Leftrightarrow \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2} < \frac{c_1}{d_1} + \frac{c_2}{d_2}.$$

Ця властивість використовується при розв'язуванні рівнянь і нерівностей та їх систем. Комутативна й асоціативна властивості широко використовуються в практиці усних і письмових обчислень для їх спрощення.

Мішані числа.

Сума натурального і дробового чисел, записаних поряд без знака додавання, називається ***мішаним*** *числом.*

Кожний неправильний дріб $\frac{m}{n}$, де $m > n$ і m не кратне n, можна подати у вигляді мішаного числа, причому єдиним способом, і, навпаки, кожне мішане число можна подати єдиним способом у вигляді неправильного дробу. Якщо $m > n$ і m не кратне n, то $m = an + r$, де $r < n$. Тоді $\frac{m}{n} = \frac{an+r}{n} = \frac{an}{n} + \frac{r}{n} = a + \frac{r}{n}$, де a – натуральне число і $r < n$. Єдиність такого подання випливає з єдиності частки і остачі при діленні цілих чисел.

Для того щоб подати неправильний дріб, більший від одиниці, у вигляді мішаного числа, треба чисельник дробу поділити на знаменник; в частці дістанемо число цілих одиниць, а в остачі – число відповідних часток одиниці.

Навпаки, *щоб подати мішане число у вигляді неправильного дробу, треба цілу частину помножити на знаменник дробової частини і додати чисельник, одержаний результат взяти* *чисельником і підписати знаменник дробової частини.*

Розглянемо ***віднімання додатних раціональних чисел.***

Як і для натуральних чисел, віднімання додатних раціональних чисел – дія, обернена додаванню. Тобто *віднятти від раціонального числа* $\frac{a}{b}$ *число* $\frac{c}{d}$, *або знайти різницю* $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$, *означає знайти таке число* $\frac{x}{y}$, *щоб задовольнялася умова:*

$$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} + \frac{c}{d}.$$

Теорема 1. *Різниця двох додатних раціональних чисел існує завжди при умові, що зменшуване більше від від'ємника.*

Отже, треба довести, що різниця $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$ є додатне раціональне число, якщо тільки $\frac{a}{b} \geq \frac{c}{d}$.

Доведення. Згідно з означенням $\frac{a}{b} = \frac{x}{y} + \frac{c}{d}$, де $\frac{x}{y}$ – шукана різниця. Виконавши у правій частині рівності додавання, маємо

$$\frac{a}{b} = \frac{xd + cy}{yd} \Leftrightarrow ayd = b(xd + cy) \Leftrightarrow ayd = bxd + bcy \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow ayd - bcy = bxd \Leftrightarrow y(ad - bc) = bxd$ (за розподільним законом множення відносно суми та різниці для цілих додатних чисел та наслідком із закону монотонності додавання).

Щоб остання рівність виконувалась, досить покласти: $x = ad - bc$, $y = bd$.

Отже, $\frac{x}{y}=\frac{ad-bc}{bd}$, тобто $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$. Ця різниця існує завжди, якщо $ad \geq bc$, тобто $\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d}$. *Теорему доведено*.

Теорема 2. *Якщо різниця двох додатних раціональних чисел існує, то вона єдина.*

Отже, треба довести, що коли $\frac{a}{b}\geq\frac{c}{d}$, то є єдине число $\frac{x}{y}$.

Доведення. Припустимо, що існують дві різниці: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{x}{y}$, $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{p}{q}$, причому $\frac{p}{q}\neq\frac{x}{y}$. Тоді, відповідно до означення різниці: $\frac{a}{b}=\frac{x}{y}+\frac{c}{d}$, $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}+\frac{c}{d}$, звідси $\frac{x}{y}+\frac{c}{d}=\frac{p}{q}+\frac{c}{d}$, звідси $\frac{x}{y}=\frac{p}{q}$. Проте це суперечить умові $\frac{p}{q}\neq\frac{x}{y}$. Отже, наше припущення неправильне. *Теорему доведено*.

Оскільки сума і різниця додатних раціональних чисел означаються аналогічно до суми і різниці додатних цілих чисел, то для дробових чисел мають місце твердження, аналогічні твердженням для додавання і віднімання натуральних чисел.

1. $\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}-\frac{e}{f}$.

2. $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)-\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}-\frac{e}{f}\right)+\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)$.

3. $\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)-\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}-\frac{e}{f}\right)+\frac{c}{d}$.

4. $\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{e}{f}\right)=\left(\frac{a}{b}-\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\left(\frac{a}{b}+\frac{e}{f}\right)-\frac{c}{d}$.

Звичайно, в усіх цих випадках віднімання має бути можливе.

4. Множення і ділення додатних раціональних чисел. Закони множення цих чисел

Розглянемо спочатку множення додатних раціональних чисел. Як відомо, множення цілого невід'ємного числа на натуральне число, більше за 1, зводиться, за означенням, до додавання рівних доданків: $a \cdot n = a + a + ... + a$ (n доданків), при $n = 1$, $a \cdot 1 = a$**;** при $n = 0$, $a \cdot 0 = 0$ – за додатковим означенням. Ці означення поширюють і на випадок множення дробового числа на натуральне число n.

Означення 1. *Добутком дробового числа* $\frac{a}{b}$ *на натуральне число* $n > 1$ *називається сума* n *доданків, кожний з яких є* $\frac{a}{b}$:

$\frac{a}{b}\cdot n=\frac{a}{b}+\frac{a}{b}+...+\frac{a}{b}=\frac{na}{b}$.

Отже, $\frac{a}{b}\cdot n=\frac{na}{b}$, $\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}\cdot 0=0$. Наприклад, $\frac{5}{7}\cdot 8=\frac{40}{7}$.

Це означення дії множення дробу на натуральне число і нуль не можна застосувати до випадку множення на дріб. Адже не можна, наприклад, взяти $\frac{5}{7}$ доданком $\frac{2}{5}$ рази: $\frac{5}{7}\cdot\frac{2}{5}$.

Тому дія множення на дріб потребує нового означення. У формально-логічному викладі теорії дробів таке означення вводиться без будь-яких обґрунтувань: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$.

У шкільному курсі математики означення множення на дріб вводиться після розгляду задач, на яких з'ясовується практична необхідність застосування цієї дії.

Означення 2. *Добутком додатних раціональних чисел, поданих у вигляді дробів* $\frac{a}{b}$ *і* $\frac{c}{d}$, *називається число, зображене дробом, чисельником якого є добуток чисельників даних дробів, а знаменником добуток знаменників:* $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$. Це означення поширюється і на випадок, коли один чи обидва співмножники є цілі числа, зокрема нуль або 1.

Тоді: $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b} \cdot 0 = \frac{a}{b} \cdot \frac{0}{1} = \frac{0}{b} = 0$, $\frac{a}{b} \cdot n = \frac{a}{b} \cdot \frac{n}{1} = \frac{an}{b}$.

Крім того, це означення можна узагальнити і для кількох співмножників.

При практичному виконанні вправ у ряді випадків чисельники і знаменники заданих дробів недоцільно відразу перемножувати; спочатку для спрощення слід виконати можливі скорочення. Наприклад, $\frac{7}{12} \cdot \frac{3}{49} \cdot \frac{14}{11} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{14}{11} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{2}{11} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{11} = \frac{1}{22}$.

Дія множення в множині додатних раціональних чисел має ті самі властивості, що й множення натуральних чисел:

1) *Існування і єдиність добутку:* які б не були додатні

раціональні числа $\frac{a}{b}$ і $\frac{c}{d}$, завжди існує додатне раціональне число $\frac{ac}{bd}$, що є їх добутком, і до того ж єдине.

2) *Властивість комутативності* (переставна): від зміни місць співмножників значення добутку не змінюється: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$.

Доведення. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b} = \frac{ca}{db} = \frac{ac}{bd}$, тобто $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$.

3) *Властивість асоціативності* (сполучна): окремі співмножники можна сполучати в будь-які групи, а потім перемножати. Від цього значення добутку не зміниться:

$$\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}\right) \cdot \frac{c}{d} = \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right) \cdot \frac{a}{b} = \frac{e}{f} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}.$$

Доведення. Слід застосувати означення добутку додатних раціональних чисел, поданих у вигляді дробів і властивість асоціативності та комутативності дії множення цілих додатних чисел.

4) *Властивість монотонності*: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} < \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$.

Доведення. За умовою нерівності дробових чисел $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$.

Помножимо ліву і праву частину останньої нерівності на добуток mn; матимемо $ad(mn) < bc(mn)$ (за властивістю монотонності множення натуральних чисел). За комутативним і асоціативним законами множення натуральних чисел і на основі критерію порівняння дробових чисел матимемо:

$$(am)(dn) < (cm)(bn) \Leftrightarrow \frac{am}{bn} < \frac{cm}{dn} \text{ і, отже, } \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} < \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}.$$

5) *Властивість дистрибутивності* (розподільності) відносно додавання і віднімання:

а) $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right)\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} + \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$; б) $\left(\frac{a}{b} - \frac{c}{d}\right)\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} - \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}$.

Доведення: $\left(\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d}\right)\frac{m}{n} = \frac{ad \pm bc}{bd} \cdot \frac{m}{n} = \frac{(ad \pm bc)m}{bdn} =$

$$= \frac{adm}{bdn} \pm \frac{bcm}{bdn} = \frac{am}{bn} \pm \frac{cm}{dn} = \frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n} \pm \frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}.$$

Інколи виникає сумнів, чи можливо, щоб в результаті множення добуток був менший від множеного? Можна на основі закону монотонності множення довести, що при множенні числа на неправильний дріб, більший від одиниці, дістаємо добуток, більший від множеного, а при множенні на правильний дріб – добуток, менший від множеного, тобто:

$$\frac{c}{d} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} > \frac{a}{b}; \quad \frac{c}{d} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} < \frac{a}{b}.$$

О*значення 3. Два числа, добуток яких дорівнює 1, називаються взаємно-оберненими.*

Число 1 обернене самому собі, бо $1 \cdot 1 = 1$. Натуральне число n має обернене число $\frac{1}{n}$, бо $n \cdot \frac{1}{n} = 1$. Отже, n і $\frac{1}{n}$ – пара взаємно-обернених чисел. Число $\frac{a}{b}$ має обернене $\frac{b}{a}$, бо $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Отже, $\frac{a}{b}$ і $\frac{b}{a}$ – пара взаємно-обернених чисел. Нуль не має оберненого числа, бо не існує такого числа, яке б при множенні на нуль дало 1.

Розглянемо ***ділення додатних раціональних чисел.*** Як і для натуральних чисел, ділення розглядають як дію, обернену множенню.

Поділити раціональне число $\frac{a}{b}$ *на число* $\frac{c}{d}$*, або знайти частку від ділення* $\frac{a}{b}$ *на* $\frac{c}{d}$*, це означає знайти таке число* $\frac{x}{y}$*, щоб задовольнялась умова:* $\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d}$; $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$.

Теорема 1. *Частка від ділення двох дробових чисел завжди існує, тобто* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$ *є раціональне число.*

Доведення. Відповідно до означення $\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d}$, $\Rightarrow$ $\frac{a}{b} = \frac{xc}{yd} \Leftrightarrow a \cdot yd = b \cdot xc$ (за умовою рівності двох дробів). Щоб остання рівність виконувалась, досить взяти $x = ad$, $y = bc$. Отже, $\frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}$. Добутки ad і bc існують завжди на основі властивості існування добутку натуральних чисел**,** тому завжди існує дріб $\frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}$. Отже, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$ існує і є раціональне число. *Теорему доведено.*

Теорема *2. Частка від ділення двох дробових чисел – єдина.*

Доведення. Припустимо, що існують дві частки: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{x}{y}$ і $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{p}{q}$, де $\frac{x}{y} \neq \frac{p}{q}$. Тоді, відповідно до означення частки,

$\frac{a}{b} = \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d}$ і $\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d} = \frac{p}{q} \cdot \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{p}{q}$ (за властивістю монотонності множення дробових чисел). А це суперечить умові $\frac{x}{y} \neq \frac{p}{q}$. Отже, припущення про існування поряд з часткою $\frac{x}{y}$ іншої частки $\frac{p}{q}$ неправильне. Теорему доведено.

Правило. *Щоб поділити одне число, виражене дробом, на друге, треба чисельник першого дробу помножити на знаменник другого дробу і добутий результат взяти чисельником, а знаменник першого дробу помножити на чисельник другого дробу і одержаний результат взяти знаменником частки, або інакше, треба помножити на число, обернене дільнику:* $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$. Наприклад, $\frac{4}{7} : \frac{23}{28} = \frac{4}{7} \cdot \frac{28}{23} = \frac{4}{1} \cdot \frac{4}{23} = \frac{16}{23}$.

Це правило поширюється і на випадок ділення на натуральне число: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{a}{bc}$.

Можна довести, що при діленні частка буде більша від діленого, якщо дільник правильний дріб; частка менша від діленого, якщо дільник більший від одиниці; частка дорівнює діленому, якщо дільник дорівнює одиниці. Тобто

$$\frac{c}{d} < 1 \Rightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} > \frac{a}{b}; \quad \frac{c}{d} > 1 \Rightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} < \frac{a}{b}; \quad \frac{c}{d} = 1 \Rightarrow \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b}.$$

Основна властивість частки. *Якщо ділене і дільник помножити або поділити на те саме, відмінне від нуля і виражене дробом число, то значення частки не зміниться.* Отже, треба довести, що $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{n}\right) : \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{m}{n}\right)$, де $\frac{m}{n} \neq 0$.

Доведення.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}; \ \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\right):\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right) = \frac{am}{bn}:\frac{cm}{dn} = \frac{am}{bn}\cdot\frac{dn}{cm} = \frac{amdn}{bncm} = \frac{ad}{bc},$$

отже $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{m}{n}\right):\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right)$. *Теорему доведено.*

На основі означень множення і ділення дробів, спираючись на відповідні властивості та властивості дії множення натуральних чисел, доводять твердження, аналогічні твердженням для множення і ділення натуральних чисел.

1) *Щоб поділити суму* (різницю) *двох дробових чисел на третє дробове число, досить поділити на це число кожний доданок* (зменшуване і від'ємник) *і знайдені частки додати,* тобто $\left(\frac{a}{b}\pm\frac{c}{d}\right):\frac{m}{n} = \frac{a}{b}:\frac{m}{n}\pm\frac{c}{d}:\frac{m}{n}$.

2) *Щоб поділити на дробове число добуток двох дробових чисел, досить поділити на це число один із співмножників і частку помножити на другий співмножник:*

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right):\frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b}:\frac{m}{n}\right)\cdot\frac{c}{d} = \frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}:\frac{m}{n}\right)$$

3) *Щоб поділити дробове число на добуток двох дробових чисел, досить поділити його послідовно на кожний із співмножників,* тобто $\frac{a}{b}:\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right):\frac{m}{n} = \left(\frac{a}{b}:\frac{m}{n}\right):\frac{c}{d}$.

4) Щоб поділити дробове число на частку від ділення двох дробових чисел, досить поділити це число на ділене і помножити на дільник, тобто $\frac{a}{b}:\left(\frac{c}{d}:\frac{m}{n}\right) = \left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{m}{n}$.

Отже: в результаті вивчення теми «**Звичайні дроби**» студент повинен

знати: поняття раціонального числа, поняття звичайного дробу, поняття про еквівалентні дроби, основну властивість дробу, необхідну і достатню умову еквівалентності дробів, поняття про нескоротний дріб, способи скорочення дробів до нескоротного вигляду, поняття правильного і неправильного дробу, правила виконання дій над звичайними дробами та їх закони;

уміти: скорочувати дроби до нескоротного вигляду, порівнювати дроби за величиною, виконувати дії над звичайними дробами: додавання, віднімання, множення і ділення.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент на практичному занятті в результаті вивчення теми

«**Звичайні дроби**»

1. Зведіть дроби $\frac{111}{21120}$ і $\frac{1237}{30720}$ до спільного знаменника.

2. Виконати обчислення найбільш раціональним способом:

а) $3 \div \left(4 \cdot \frac{5}{6}\right) + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} + \frac{3}{70} \cdot \left(\frac{140}{3} \div \frac{13}{17}\right)$;

б) $\frac{17}{125} \div \frac{1}{8} + \frac{36}{29} \cdot \frac{29}{72} \cdot \frac{41}{68}$.

3. Розв'язати рівняння найбільш раціональним способом:

а) $x + \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{3}\right) = \frac{34}{35}$;

б) $\frac{4}{17} - (x - \frac{5}{51}) = \frac{1}{6}$.

4. Розв'язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами дій:

а) $\frac{4}{9} \div 3\frac{2}{3} - 5x = \frac{1}{6}$;

б) $x + 3\frac{2}{3} \cdot 3\frac{1}{4} - 2\frac{1}{4} = 7$.

5. Записати розв'язок задачі за допомогою числового виразу: За перший рік було побудовано 4/9 дороги від колгоспу до шосе, за наступний – 8/27 дороги, а за третій рік – останні $5\frac{1}{4}$ км. Яка довжина дороги?

6. Розв'язати задачу за допомогою складання рівняння. Хлібозавод одержав три партії муки. Перша партія на 6т більша від другої. Скільки всього муки одержав завод?

7. Вихід масла із вершків складає 2/9 ваги вершків, а вихід

вершків із молока складає 4/25 ваги молока. Скільки потрібно молока, щоб одержати 1 ц масла?

8. У колгоспі засіяно 200 га зернових культур, з них 3/4 площі – пшеницею. Скільки гектарів пшениці засіяно. Розв’язання зобразити наочно за допомогою прямокутників.

9. В перший день продали 2/5 всієї тканини, яка є в магазині, в другий день 7/12 того, що продали в перший день, а в третій день решту тканини. Скільки всього метрів тканини продали, якщо в третій день було продано на 192 м більше, ніж в другий день.

10. Розмістити дроби $\frac{7}{8}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{8}{8}; \frac{3}{8}; \frac{5}{8}$ в порядку їх зростання:

а) за допомогою якого відношення упорядковується дана множина дробів?

б) Сформулюйте властивості цього відношення і побудуйте його граф.

11. Розв’язати рівняння на основі залежності між компонентами і результатами дій:

$$\left(2\frac{1}{18}0\left(1\frac{1}{27}-\left(x-\frac{1}{9}\right)\right)\right)+3\frac{5}{34}=5.$$

12. Виконати дії: а) $1\frac{3}{5}+\left(2\frac{1}{12}-\left(\frac{3}{4}-x\right)+1\right)=2\frac{14}{15};$

б) $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{3}\right)^3\right)\cdot 1\frac{8}{19}+\left(\left(\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{8}\right)^2\right)\cdot 21\frac{1}{3}$.

13. Розв'язати задачу, склавши числовий вираз: Дві машиністки повинні передрукувати рукописну роботу. Перша машиністка може виконати цю роботу за $3\frac{1}{3}$ дня, а друга – за $2\frac{2}{9}$. За скільки днів виконають роботу машиністки, якщо вони будуть працювати одночасно?

14. Два хлопчики зібрали 96 грибів. 2/3 числа грибів, зібраних першим хлопчиком, чисельно рівна 2/5 числа грибів, зібраних другим хлопчиком. Скільки грибів зібрав кожен хлопчик?

15. Виконати дії: а) $\frac{1}{4}+\frac{3}{7}+\frac{2}{5}$;

б) $2\frac{1}{2}+3\frac{1}{3}+4\frac{1}{4}$;

в) $\frac{1}{2}-1\frac{2}{3}-\frac{3}{5}$.