Тема

Аксіоматичний метод побудови геометрії. Геометричні побудови на площині

1. Аксіоматичний метод побудови геометрії

1.1. Історичні відомості про виникнення й розвиток геометрії

Виникнення геометрії, як і будь-якої науки, зв'язують з необхідністю задоволення практичних потреб людини, зокрема з необхідністю вимірювати земельні ділянки у долинах рік, які щорічно розливались і змивали межі земельних наділів (у перекладі з грецької слово «геометрія» означає «землемірство»).

У Стародавньому Єгипті, Вавилоні, Китаї, Індії були відомі окремі правила вимірювання довжин, площ, об'ємів фігур. Із Стародавнього Єгипту до наших часів дійшов твір, написаний біля 2000 років до н.е. – папірус Ахмеса, в якому дано зразки розв'язування задач про знаходження площ прямокутника, трикутника, трапеції.

Взагалі, в розвитку геометрії можна виділити кілька періодів.

Перший період (з незапам'ятних часів до VII ст. до н.е.) – це період накопичення окремих геометричних правил, прийомів без будь-якого обгрунтування. Це період зародження математики та будівництва грандіозних пірамід – усипальниць фараонів. Наприкінці першого періоду початкові геометричні відомості з Єгипту, Індії, Вавилону переносяться в Стародавню Грецію (біля VII ст. до н. е.).

Другий період (VII ст. до н.е.– XVII ст. н.е.) – це період становлення математики як науки, період математики сталих величин. З розвитком людського суспільства з'являлись все нові практичні задачі про взаємозв'язок між навколишніми тілами, розв'язання яких сприяло появі нових геометричних правил і фактів, їх ставало все більше, і на певному етапі постала необхідність систематизації відомих фактів та встановлення взаємозв'язків між ними. У зв'язку із загальним розвитком економіки, науки, мистецтва і суспільного життя в Стародавній Греції геометрія теж дістала значний поштовх у своєму розвитку. Завдяки грецьким вченим і філософам геометрія за три століття з вузькоприкладної перетворилася в строго теоретичну науку.

Уже в V ст. до н. е. Гіппократ Хіоський і Демокріт, IV ст. до н. е. Лєоні Февдій Магнезійський робили спроби систематично викласти геометрію, але їхні твори не збереглися. У IV ст. до н. е. Арістотєль (384 – 322 до н.е.) виклав основні закони логіки, за якими слід міркувати так, щоб з правильних посилок дістати правильні висновки. Фактично Арістотель ваклав основи дедуктивного викладу матеріалу певної науки, за якими спочатку треба дати означення об'єктів науки, сформулювати вихідні положення (аксіоми й постулати), а потім – усі твердження доводити за законами логіки.

Завдання систематизації геометричних фактів, створення геометрії як науки розв'язав Євклід у своїх «Початках», написаних біля 300 р. до н.е. «Початки» Евкліда складаються з 13 книг, з них 1 – 4 і 6 присвячені планіметрії, 5, 7 – 9 – арифметиці, 10 – несумірним величинам, 11 – 13 – стереометрії. У цьому творі Евклід виклав матеріал тільки елементарної геометрії, хоч на той час уже були значні відомості про конічні перерізи, про деякі криві третього й четвертого порядків. Це справді були початки геометрії (і арифметики), побудовані за дедуктивною схемою Арістотеля. У першій книзі сформульовано означення геометричних об'єктів, у тому числі й означення точки, прямої, площини. Потім сформульовано аксіоми й постулати, на основі яких доведено геометричні твердження за законами логіки.

Звичайно, не всі твердження «Початків» Евклід сам сформулював і довів. «Початки» вмістили все те з елементів геометрії, що було створено до Евкліда, а Евклід привів цей матеріал у строгу систему, в строго логічну послідовність, коли кожне наступне твердження доводиться на основі попередніх. При цьому доводилось деякі доведення переробляти, а часто – й знаходити нові.

Слід зазначити, що «Початки» Евкліда були перевидані більше 600 разів. Цей твір став основою для складання шкільних підручників з геометрії й у наш час.

Після Евкліда грецькі вчені продовжили розвиток геометрії. Так, Архімед вдосконалив методи знаходження площ і об'ємів. Аполлоній дослідив конічні перерізи.

Гіппарх виклав основи тригонометрії, а Менелай – основи сферичної геометрії. Все це було в III–I ст. до н. е.

Протягом двадцяти століть другого періоду геометрія Евкліда збагачувалася новими фактами, але основні принципи її побудови залишились незмінними.

Третій період (XVII – XIX ст. ст.) – це період математики змінних величин. Початком цього періоду у розвитку геометрії є введення в геометрію в 1637 р. методу координат і змінної величини французьким вченим і філософом Р. Декартом (1596 – 1650). У цей час геометрія швидко й різнобічно розвивається, з'являється аналітична геометрія Р.Декарта, нарисна геометрія Г.Монжа, диференціальна геометрія К.Гаусса, проективна геометрія Б.Паскаля, Ж.Дезарга, Я.Штейнера і інші.

Четвертий період почався з відкриття М.І.Лобачевським (1792 – 1856) нової неевклідової геометрії. Це відкриття стало результатом розв'язання проблеми п'ятого постулату Евкліда, яка виникла з часів Евкліда. Суть цієї проблеми полягав в тому, що багато вчених намагалися довести п'ятий постулат як теорему, користуючись іншими постулатами «Початків» Евкліда. Спроби довести п'ятий постулат Евкліда продовжувалися до середини XIX ст., але марно. М.І.Лобачевський розв'язав проблему п'ятого постулату, довівши, що його довести не можна, що п'ятий постулат не залежить від інших постулатів (аксіом) «Початків» Евкліда. При цьому М.І.Лобачевський замінив аксіому паралельності, еквівалентну п'ятому постулату Евкліда, новим твердженням, суперечливим аксіомі паралельності Евкліда, а саме, що через точку, взяту поза прямою, на площині можна провести не менше двох прямих, які не перетинають дану пряму. При цьому М.І.Лобачевський дістав нову геометричну систему, яку назвали геометрією Лобачевського. У ній всі твердження, які не є наслідками п'ятого постулату, залишалися без зміни, а всі наслідки аксіоми паралельності Евкліда набули іншого змісту в геометрії Лобачевського.

Пізніше, в середині XIX ст. з'явилась інша неевклідова геометрія – геометрія Рімана, в якій паралельні прямі не існують.

Наприкінці XIX ст. з геометрії відділилась ще одна геометрична наука – топологія, творцем якої вважають французького математика А.Пуанкаре (1854 – 1912). Значний вклад в розвиток топології внесли П.С.Александров (1896 – 1982), О.Д.Алєксандров (нар. 1912 р.) і О.В.Погорєлов (нар. 1919 р.). Топологія вивчала найбільш загальні властивості простору, зв'язані з поняттям неперервності.

Якщо геометрія виникла з практичних потреб, то в топології вимірювання величин не відіграло ніякої ролі. Так геометрія в результаті розвитку перетворилась з науки кількісної в науку якісну.

1.2. Поняття про аксіоматичний метод побудови геометрії

Поняття про аксіоматичний метод побудови теорії було розглянуто на прикладі аксіоматичної побудови множини цілих невід'ємних чисел.

Розглянемо суть аксіоматичного методу в геометрії.

Геометричні поняття вводяться, як відомо, за допомогою означень, в яких використовуються інші, вже відомі поняття. Наприклад, хорду кола означають як відрізок, кінці якого належать колу. У цьому означенні використано поняття “відрізок”, “коло”, які означені раніше. Відрізком *AB* називають множину точок прямої, яка, крім точок *A* і *B,* містить усі точки, що лежать між ними. Колом називають множину всіх точок площини, що знаходяться на однаковій відстані від даної точки цієї площини.

Як бачимо, в означення відрізка, кола входять поняття “множина”, “точка”, “між”, “відстань”. Тому ці поняття повинні бути означені через інші, вже відомі поняття і т.д. Проте дати означення всім поняттям не можна, бо при цьому ланцюг посилань на відомі вже поняття був би нескінченним. Отже, деякі поняття необхідно прийняти без означення.

Геометричні поняття, які приймаються без означення, називаються основними або вихідними.

До основних понять належать основні об'єкти й основні відношення між ними. Основними об'єктами в геометрії є *точка, пряма, площина, відрізок, вектор.* Залежно від вибору основних об'єктів вибираються основні відношення між ними, зокрема, належність; між; міра; відстань; відкладання відрізка, кута, трикутника, вектора; рів-ність; рух; сума векторів та ін.

При вивченні геометрії істинність висловлень про властивості геометричних понять доводять шляхом логічних міркувань, користуючись іншими, вже відомими висловленнями. Так, істинність висловлення "Діагоналі квадрата взаємно перпендикулярні" логічно випливає з істиності таких двох тверджень: "Діагоналі ромба взаємно перпендикулярні" і "Квадрат є ромбом", які доведені раніше. Проте довести істинність усіх висловлень не можна, бо в противному разі цей процес доведень був би нескінченним. Отже, слід певну кількість висловлень у геометрії прийняти без доведення істиності їх.

Висловлення, які приймаються в геометрії без доведення як вихідні, називають аксіомами геометрії. Істинність усіх інших висловлень доводять послідовними міркуваннями без використання інтуїції або дослідних даних.

Геометричну фігуру, геометричне тіло дістають в результаті абстрагування від усіх властивостей реальних об'єктів, крім розмірів і форми. Твердження, які формулюють і доводять в геометрії, стосуються геометричних фігур. Отже, оскільки геометричні поняття й твердження мають абстрактний характер, то всю геометрію можна побудувати логічно, спираючись на невелику кількість основних понять і аксіом.

Логічна побудова геометрії полягає в тому, що:

– перелічуються без означення основні (вихідні) геометричні поняття (об'єкти і відношення між ними);
– за допомогою основних понять означаються всі інші геометричні поняття;
– формулюються аксіоми;
– на основі аксіом і означень доводяться наступні геометричні твердження.

Метод побудови геометрії за такою схемою називається *аксіоматичним* або *дедуктивним,* оскільки в ньому істотну роль для умовиводів відіграють сформульовані аксіоми.

Аксіоми, які розкривають зміст певного поняття, об'єднують в одну групу. Таким чином, аксіоми геометрії утворюють кілька груп. Так, це “аксіоми належності”, “аксіоми порядку”, “аксіоми міри” та інші.

Зазначимо, що для логічної побудови однієї й тієї самої геометрії можна скласти різні сукупності аксіом як за кількістю, так і за змістом, залежно від вибору основних об'єктів геометрії. При цьому необхідно й достатньо, щоб сукупність аксіом утворювала систему аксіом.

Системою аксіом називають таку сукупність аксіом, яка задоволь-няє умови: несуперечності, незалежності, повноти.

Умова несуперечності полягає в тому, щоб:

1) серед аксіом даної сукупності не було тверджень, суперечливих одне одному;

2) серед тверджень, доведених на основі вибраних аксіом, не було суперечливих як між собою, так і суперечливих якій-небудь аксіомі;

3) була впевненість, що й при дальшому розвитку геометрії на основі даної сукупності аксіом не будуть виведені твердження, суперечливі якій-небудь аксіомі або якому-небудь твердженню, доведеному раніше.

Аксіома називається незалежною від усіх інших аксіом даної системи, якщо вона не є логічним наслідком інших аксіом цієї системи. Умова незалежності вимагає, щоб кожна аксіома системи була незалежною від решти її аксіом. Якщо ставиться питання про незалежність деякої системи аксіом, то мають на увазі, що вона несуперечлива. Умову незалежності ще називають умовою мінімальності аксіом у системі.

Умова повноти системи аксіом вимагає, щоб аксіом у вибраній сукупності було достатньо для логічного обгрунтування всіх тверджень геометрії.

Доведення названих умов, яким повинна задовольняти система аксіом, виконується за допомогою побудови інтерпретації цієї системи аксіом на базі іншої науки, несуперечливість якої вже доведено.

1.3. Історичні відомості про розвиток аксіоматичного методу в геометрії

Розвиток аксіоматичного методу в геометрії був довгим і складним. Першою і досить вдалою на той час спробою логічно побудувати геометрію був твір Евкліда “Початки”, який відіграв визначну роль у розвитку геометрії. “Початки” Евкліда починаються з означень геометричних понять (об'єктів). При цьому Євклід не виділяв основні поняття, а намагався означити всі поняття. Так, у нього є такі два означення точки: “Точка є те, що не має частин” і “Межа лінії – суть точки”. Аналогічні й означення лінії: “Лінія є те, що має довжину” і “Межі поверхні – лінії”. Це по суті не означення, а пояснення того, який конкретний зміст вкладається в поняття “точка”, “лінія”, “пряма” та ін. Отже, у Евкліда всі геометричні поняття мають конкретний зміст і ще до формулювання аксіом вважаються відомими деякі властивості цих об'єктів.

Такий метод побудови геометрії, коли всім геометричним об'єктам надається конкретний зміст і аксіоми з'ясовують їхні основні властивості, називається змістовним аксіоматичним методом. Таким чином, у “Початках” Евкліда геометрію було викладено як змістовну аксіоматичну теорію.

Змістовний аксіоматичний метод домінував у геометрії до середини XIX ст. На початку XIX ст. (1826 р.) великий російський геометр М.І.Лобачевський (1792 – 1856) відкрив нову, неевклідову геометрію. Він замінив аксіому паралельності Евкліда (через точку A, яка не належить прямій a і лежить з нею в одній площині, можна провести не більше як одну пряму, що не перетинає дану пряму *а*) іншою аксіомою, яку називають *аксіомою паралельності Лобачевського* (через точку *А*, яка не належить прямій *а* у площині, що ними визначається, можна провести не менше двох прямих, які не перетинають дану пряму).

Постало питання про те, яка ж геометрія істинна. Виявилося, що засобами змістовного аксіоматичного методу на основі аксіоматики "Початків" Евкліда розв'язати це питання неможливо. У працях німецького математика Д.Гільберта, італійського математика М.Пієрі, російського математика В.Ф.Кагана на межі XIX – XX ст. було створено аксіоматичний метод, який на відміну від змістовного назвали напівформальним. Були створені три різні рівноправні системи аксіом, які можна покласти в основу логічної будови геометрії Евкліда.

Напівформальний аксіоматичний метод характеризується тим, що основним поняттям не надається конкретного змісту, їх приймають без означення. Основним об'єктам можна надати різних тлумачень, тобто за допомогою системи аксіом сукупність основних понять можна означити по-різному. Напівформальний аксіоматичний метод називають ще аксіоматичним методом побудови геометрії.

На початку XX ст. німецький математик Д.Гільберт створив так званий формальний аксіоматичний метод. Він відрізняється від напівформального тим, що в ньому формалізований сам процес доведення, тобто повинні бути вказані точно правила виведення, за якими з аксіом дістають теореми, і всі твердження теорії повинні бути подані в символічній формі.

2. Геометричні побудови на площині

2.1. Найпростіші та основні геометричні побудови циркулем і лінійкою

Задачі на побудову геометричних фігур на площині відіграють велику роль при вивченні математики. У кожній задачі на побудову фігури треба за даними її елементами знайти інші (шукані) елементи, які перебувають один до одного і до даних елементів у певних співвідношеннях і які можна побудувати за допомогою певних креслярських інструментів.

Геометричні побудови привертали увагу математиків з давніх часів. У Стародавній Греції в VI – V ст. до н.е. в період становлення геометрії як науки такі побудови виконували Піфагор і його учні, Гіппократ, Платон, Евклід, Архімед та ін. При розв'язуванні задач на побудову вони віддавали перевагу циркулю та лінійці. Ця традиція зберігається й сьогодні.

Задача на побудову циркулем і лінійкою вважається розв'язаною, якщо вона зведена до виконання скінченного числа елементарних операцій, виконуваних циркулем і лінійкою. Такі елементарні операції ще називають *найпростішими побудовами* (НП). Виходячи з можливостей циркуля і лінійки, можна назвати такі найпростіші побудови.

НП$_1$. Побудувати промінь, якщо дано або побудовано дві його точки – початок і довільна його точка.

НП$_2$. Побудувати відрізок, якщо дано або побудовано його кінцеві точки.

НП$_3$. Побудувати пряму, якщо дано або побудовано дві довільні її точки.

НП$_4$ Побудувати коло, якщо дано або побудовано три точки, одна з яких є центром, а дві інші – кінцями радіуса цього кола.

НП$_5$. Побудувати дугу кола, якщо дано або побудовано три точки, одна з яких є центром кола, а дві інші – кінцями дуги.

НП$_6$. Побудувати точку перетину двох даних або побудованих не-паралельних прямих.

НП$_7$. Побудувати точки перетину даних або побудованих прямої і кола.

НП$_8$. Побудувати точки перетину даних або побудованих двох не-концентричних кіл.

НП$_9$. Побудувати (взяти) точку, належну даній або побудованій фігурі.

НП$_{10}$. Побудувати (взяти) точку, не належну даній або побудованій фігурі.

Зведення складніших задач на побудову до виконання перелічених побудов досить трудомістке, займає багато часу, тому практично задачу на побудову зводять не до елементарних операцій, а до певного числа деяких відомих задач на побудову, які називають основними задачами на побудову циркулем і лінійкою.

Назвемо такі *основні побудови* (ОП).

ОП$_1$. Побудувати відрізок, що дорівнює даному відрізку,

ОП$_2$. Побудувати кут, що дорівнює даному куту.

ОП$_3$. Поділити даний відрізок навпіл.

ОП$_4$. Поділити даний кут навпіл.

ОП$_5$. Провести через дану точку пряму, перпендикулярну до даної прямої, якщо

а) дана точка лежить на даній прямій;

б) дана точка не лежить на даній прямій.

ОП$_6$. Провести через дану точку пряму, паралельну даній прямій.

ОП$_7$. Побудувати трикутник за трьома сторонами.

ОП$_8$. Побудувати трикутник за двома сторонами і кутом між ними.

ОП$_9$. Побудувати трикутник за стороною і прилеглими до неї двома кутами.

ОП$_{10}$. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і катетом.

ОП$_{11}$. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і гострим кутом.

ОП$_{12}$. Побудувати коло, вписане в даний трикутник.

ОП$_{13}$. Побудувати коло, описане навколо даного трикутника.

ОП$_{14}$. Побудувати дотичні, проведені з даної точки до даного кола.

ОП$_{15}$. Побудувати спільні дотичні до двох даних кіл.

Перш ніж розв'язувати задачі на побудову, необхідно спочатку впевнитися, що даних елементів досить для виконання побудови, тобто встановити, чи задача визначена, невизначена, чи перевизначена. На практиці, як правило, задачі на побудову визначені. Задача на побудову фігури, положення якої на площині визначається її n точками, буде визначеною, якщо в умові маємо $2n - 3$ даних. Це твердження можна пояснити так. З n точок, що визначають положення фігури, візьмемо дві: одну за початок системи координат, а через другу проведемо одну з осей координат. За початок координат можна взяти довільну точку шуканої фігури, а положення другої точки на осі визначається однією умовою – її координатою (числом). Залишається ще $n - 2$ точки фігури, кожна з яких визначається двома умовами (координатами цих точок). Отже, для визначення положення всіх істотних точок фігури треба $2(n - 2) + 1 = 2n - 3$ умови.

Наприклад, трикутник визначається трьома елементами (вершинами; сторонами), тобто $n = 3$. Тому для побудови трикутника треба мати $2 \cdot 3 - 3 = 3$ даних елементи; для чотирикутника $n = 4$, тому для побудови довільного чотирикутника треба мати $2 \cdot 4 - 3 = 5$ даних, для п'ятикутника $2 \cdot 5 - 3 = 7$ даних елементів і т. д.

Існує кілька схем розв'язування задачі на побудову. Найбільш традиційною, виробленою ще в Стародавній Греції, є схема з чотирьох етапів: 1) аналіз; 2) побудова; 3) доведення; 4) дослідження.

В аналізі на основі відомих з теорії теорем і властивостей встановлюються залежності між даними і шуканими елементами фігури з метою відшукання способу розв'язання задачі. Для цього припускають, що задача розв'язана, виконують рисунок шуканої фігури “від руки”. За цим рисунком встановлюють взаємозв'язки між даними і шуканими елементами, з'ясовують послідовність побудов, які приводять до розв'язання задачі.

Побудова полягає в послідовному переліку і виконанні простіших і основних побудов, намічених в аналізі.

Доведення за своїм логічним змістом – це етап, обернений до аналізу: необхідно встановити, що побудована фігура задовольняє всі умови задачі.

Дослідження полягає в з'ясуванні питання чи при будь-якому виборі даних задача має розв'язок, а також про число різних розв'язків задачі.

При визначенні числа розв'язків розрізняють два типи задач на побудову. Якщо в задачі вимагається встановити положення шуканої фігури відносно даних, то побудовані дві фігури, які задовольняють умову задачі, але мають різне розміщення, вважаються різними і тоді, коли вони рівні. Якщо ж положення шуканої фігури відносно даних не відіграє ролі, то побудовані рівні фігури, які задовольняють умови задачі, вважаються одним розв'язком.

Названа схема розв'язування задачі на побудову не єдина. Іноді дослідження доцільно провести після аналізу, в деяких задачах аналіз об'єднують з побудовою.

Наведемо ряд прикладів.

Задача 1. Побудувати дотичну до даного кола (O; R), яка проходить черев дану поза колом точку M.

Розв'язання. *Аналіз.* Припустимо, що задача розв'язана: пряма a проходить через точку M і дотикається до кола (O; R) у точці A (рис. 84). Задача зводиться до побудови точки A. Оскільки

$\angle MAO = 90°$, тобто з шуканої точки A відрізок OM видно під прямим кутом, то точка A належить колу, побудованому на відрізку OM, як на діаметрі, і даному колу.

Побудова:

проводимо пряму MO;

будуємо середину C відрізка MO;

проводимо коло (C; MC) і позначаємо точки A і B його перетину даним колом;

проводимо прямі MA і MB – шукані дотичні (рис. 85).

Доведення. За побудовою $\angle MAO = \angle MBO = 90°$, тому $OA \perp MA$ і $OB \perp MB$, а отже, MA і MB – дотичні до кола (O; R).

Дослідження. Задача має розв'язки лише тоді, коли коло (C, MC) має спільні точки з даним колом. Число розв'язків дорівнює числу спільних точок цих кіл. Можливі такі випадки.

I. $OM > R$ (точка M – зовнішня). Тоді кола (O; R) і (C; MC) перетинаються в двох точках. Отже, можна провести дві дотичні (два розв'язки);

II. $OM = R$ (точка M лежить на колі (рис. 86)). Тоді коло (C; MC) дотикається до кола (O; R). Кола мають одну спільну точку M. Отже, існує одна дотична (один розв'язок).

III. $OM < R$ (точка M – внутрішня). Тоді задача не має розв'язку, бо дане коло і коло, побудоване на відрізку OM як на діаметрі, не можуть мати спільних точок.

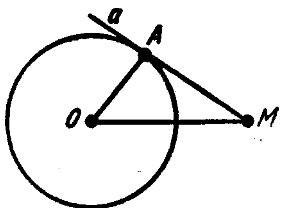

Рис. 84

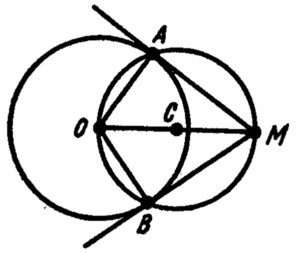

Рис. 85

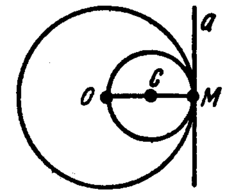

Рис. 86

Задача 2. Побудувати спільні зовнішні дотичні до двох даних неконцентричних кіл.

Розв'язання. *Аналіз.* Припустимо, що задача розв'язана: пряма AB є спільною зовнішньою дотичною двох даних кіл (O_1; R_1) і (O_2; R_2) (рис. 87). При $R_1 > R_2$ проведемо коло (O_1; O_1C), де $O_1C = R_1 - R_2$, і побудуємо дотичні O_2C і O_2C_1 до нього з точки O_2 (задача 1). $AC = BO_2 = R_2$, $AC \parallel BO_2$, тому ABO_2C – прямокутник, а тому й $AB = CO_2$. Маємо $O_1C \perp O_2C$. $O_1A \perp AB$. Отже, A лежить на продовженні O_1C і на колі (O_1; R_1). Побудувавши дотичну O_2C, знайдемо й точку A, а потім – і точку B.

Побудова:

будуємо коло (O_1; O_1C), де $O_1C = R_1 - R_2$ (див. рис. 87);

проводимо дотичну O_2C до побудованого кола з точки O_2;

знаходимо точку A як перетин кола (O_1; R_1) з O_1C;

знаходимо точку B як перетин кола (O_2; R_2) з O_2B, де $O_2B \parallel O_1A$;

проводимо AB – шукану зовнішню дотичну кіл (O_1; R_1) і (O_2; R_2).

Доведення. Справедливість побудови випливає з міркувань, проведених в аналізі.

Дослідження. Можливі різні випадки розміщення кіл і величини їхніх радіусів.

I. Нехай $R_1 > R_2$ і коло меншого радіуса знаходиться поза кола більшого радіуса. Тоді з точки O_2 можна провести дві дотичні до кола (O_1; $R_1 - R_2$), а тому існують дві зовнішні дотичні даних кіл (див. рис. 87).

II. Нехай $R_1 = R_2$. Тоді точками дотику з зовнішніми дотичними будуть точки перетину кіл з перпендикулярами до лінії центрів, проведеними через центри кіл (рис. 88).

III. Нехай кола мають внутрішній дотик. Тоді вони мають одну зовнішню дотичну, яка проходить через їхню точку дотику перпендикулярно до лінії центрів (рис, 89).

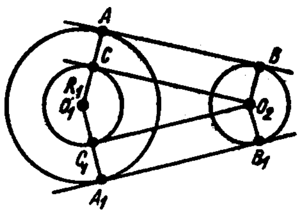

Рис. 85

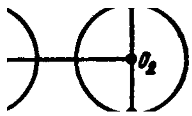

Рис. 88

IV. Нехай кола мають зовнішній дотик. Тоді маємо випадок I або II.

V. Нехай одне коло лежить всередині другого кола. Тоді не можна побудувати спільної дотичної.

Задача 3. Побудувати спільну внутрішню дотичну до двох даних кіл. Розв'язання. *Аналіз.* Припустимо, що спільною внутрішньою дотичною двох даних кіл (O_1; R_1) і (O_2; R_2) є пряма AB (рис. 90). Проведемо коло (O_1; R_3), де $R_3 = O_1C = R_1 + R_2$, і з точки O_2 побудуємо дотичні до нього: O_2C і O_2C_1. Тоді $AC = O_2B = R_2$, $O_1C \perp AB$,. $O_1C \perp CO_2$, тому ACO_2B – прямокутник і $A \in O_1C$, $AC \parallel BO_2$. Отже, побудувавши дотичну O_2C з точки O_2 до кола (O_1;

R_3), знайдемо точки дотику A і B внутрішньої дотичної AB до даних кіл.

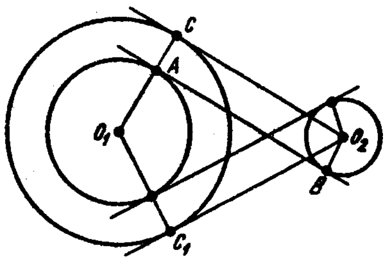

Рис. 89

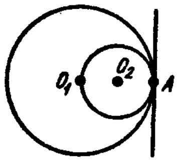

Рис. 90

Побудова:

будуємо коло (O_1; R_3), де $R_3 = O_1C = R_1 + R_2$ (Див. рис. 90);

проводимо дотичну O_2C до нього;

знаходимо точку A як перетин кола (O_1; R_1) з O_1C;

знаходимо точку дотику B як перетин кола (O_2; R_2) з AB, де $AB \parallel CO_2$;

проводимо AB – шукану внутрішню дотичну даних кіл (O_1; R_1) і (O_2; R_2).

Доведення. Справедливість побудови випливає з міркувань, проведених в аналізі.

Дослідження.

I. Задача не має розв'язків, якщо кола перетинаються або одне з них лежить всередині другого.

II. Задача має один розв'язок, якщо дані кола дотикаються зовні; внутрішньою дотичною при цьому буде пряма, проведена через точку дотику кіл перпендикулярно до лінії центрів (рис. 91).

III. У всіх інших випадках розміщення даних кіл задача має два розв'язки, тобто до кіл можна провести дві різні внутрішні дотичні (рис. 90, 92).

Задача 4. У коло вписати трикутник з основою a і медіаною m_b, проведеною до однієї з невідомих сторін.

Розв' язання. *Аналіз.* Припустимо, що трикутник ABC з основою a і медіаною $m_b = AD$ вписано в коло (O; R) (рис. 93). Розв'язання задачі зводиться до знаходження точки D. Маємо $AD = DC$. Тому $OD \perp AC$, тобто з точки D відрізок ОС видно під прямим кутом. Отже, точка D лежить на колі, побудованому на відрізку OC як на діаметрі. Крім того, точка D лежить на колі (B; m_b). Тому точку D можна знайти як точку перетину кіл (B; m_b) і (O_1; $\frac{OC}{2}$), де O_1 – середина відрізка OC.

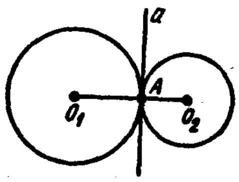

Рис. 91

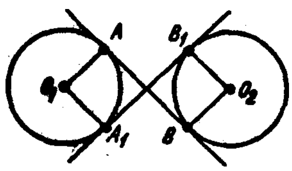

Рис. 92

Побудова:

будуємо хорду $BC = a$ у даному колі (див. рис. 93);

знайдемо середину O_1 відрізка OC; будуємо кола (B; m_b) і (O_1; $\frac{OC}{2}$) і позначаємо через D точку перетину їх;

проведемо пряму CD до перетину з даним колом у точці A. Трикутник ABC – шуканий.

Доведення. $OD = m_b$, $OD \perp AC$ – за побудовою, тому $AD = DC$. Отже, $AD = m_b$, – медіана трикутника ABC; $BC = a$ – за побудовою. Вершини A, B і C лежать на даному колі. Отже, побудований трикутник ABC задовольняє всі умови задачі. $\Delta\, ABC$ – шуканий.

Дослідження

I. При $a > 2R$ задача не має розв'язків незалежно від m_b.

II. Нехай $a = 2R$; а) якщо $R < m_b < 2R$, то розв'язками є два рівні прямокутні трикутники, симетричні відносно основи $a = 2R$ (рис. 94); б) якщо $m_b < R$ або $m_b > 2R$, то задача також не має розв'язків.

III. Нехай $a < 2R$; а) якщо кола $(B;\ m_b)$ і $(O_1;\ \frac{OC}{2})$ мають зовнішній дотик або внутрішній ($m_b = BM$ або $m_b = BN$), то матимемо один розв'язок (один трикутник);

б) якщо $BM < m_b < BN$, то кола $(B;\ m_b)$ і $(O_1;\ \frac{OC}{2})$ перетинаються в двох точках D і D_1, а тому є дві точки A і A_1; отже, й два трикутники ABC і A_1BC, тобто задача має два розв'явки (рис. 93); в) якщо $m_b < BM$ або $m_b > BN$, то кола $(B;\ m_b)$ і $(O_1;\ \frac{OC}{2})$ не перетинаються і задача не має розв'язку.

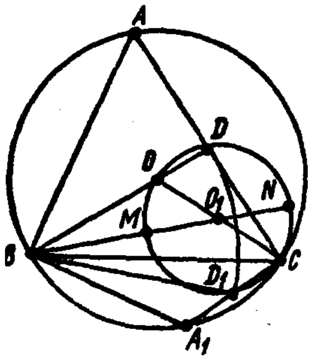

Рис. 93

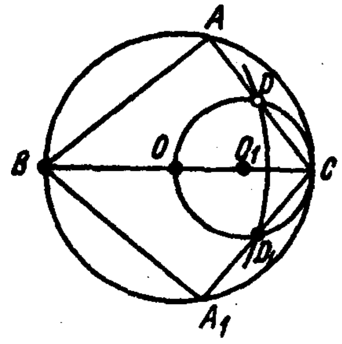

Рис. 94

2.2. Основні методи геометричних побудов

При розв'язуванні задач на побудову циркулем та лінійкою застосовують такі методи:

метод геометричних місць точок (ГМТ);

метод симетрії відносно прямої;

метод повороту навколо точки;

метод симетрії відносно точки;

метод паралельного перенесення;

метод гомотетії і подібності.

2.3. Метод геометричних місць точок

Геометричним місцем точок називають фігуру, яка складається з усіх точок площини, які мають одну й ту саму певну властивість, і тільки з таких точок. Розв'язати задачу на знаходження усіх точок, які мають задану властивість, означає знайти фігуру, всі точки якої мають зазначену властивість, і жодна точка, що не належить цій фігурі, цієї властивості не має.

Для доведення того, що фігура F є шуканим ГМТ, треба довести, що: всі точки знайденої фігури F мають дану характеристичну властивість; кожна точка, яка має цю властивість, належить фігурі F.

Із шкільного курсу математики відомі такі простіші ГМТ:

1) ГМТ площини, які лежать на даній відстані r від даної точки O, що лежить у даній площині, є коло з центром у точці O і радіусом r.

2) ГМТ площини, відстань від кожної з яких до певної точки O цієї площини не більша від даної відстані r, є круг з центром у точці O і радіусом r.

3) ГМТ площини, рівновіддалених від двох даних точок цієї площини, є пряма, яка проходить через середину відрізка, що сполучає дані точки, перпендикулярно до нього.

4) ГМТ площини, відстань від кожної з яких до даної у цій площині прямої однакова і дорівнює даному відрізку h, є пара прямих, паралельних даній і розміщених по різні боки від неї на відстані h.

5) ГМТ площини, рівновіддалених від двох даних у цій площині паралельних прямих, є пряма, яка є їхньою віссю симетрії.

6) ГМТ площини, рівновіддалених від сторін даного у цій площині кута, є бісектриса цього кута.

7) ГМТ площини, рівновіддалених від двох даних у цій площині прямих, що перетинаються, складається з двох взаємно перпендикулярних прямих, які є бісектрисами кутів, утворених даними прямими.

8) ГМТ площини, з яких даний у цій площині відрізок видно під прямим кутом, є коло, що має цей відрізок своїм діаметром.

9) ГМТ площини, з яких даний у цій площині відрізок AB видно під даним кутом, відмінним від нуля і від розгорнутого кута, складається з двох дуг кіл, симетричних відносно прямої AB.

Метод геометричних місць точок зручно застосовувати до розв'язування задач на побудову точок фігури, які є перетином двох ГМТ, що визначаються умовою задачі. Суть цього методу полягає в тому, що спочатку відкидають одну з умов задачі і будують ГМТ, яке задовольняє другу умову; потім відкидають другу умову і будують ГМТ, яке задовольняє першу умову. Перетин двох таких ГМТ є шуканою точкою або іншим елементом шуканої фігури.

При розв'язуванні задач методом ГМТ треба вміти вдало здійснювати наведену вище схему визначення конструктивних ГМТ.

2.4. Метод симетрії відносно прямої

Дві точки M і M' називаються *симетричними відносно прямої* p, якщо p перпендикулярна до відрізка MM' і проходить через його середину. Кожна точка прямої p вважається симетричною сама собі.

Симетрією площини відносно прямої p називається перетворення площини, при якому будь-яка точка площини відображається на точку, симетричну їй відносно p. Пряма p називається *віссю симетрії.*

Осьову симетрію з віссю p позначимо через S_p. Запис $S_p(M) = M'$ означає: точка M' – образ точки M при осьовій симетрії з віссю p. Осьова симетрія повністю визначається завданням або осі симетрії, або однієї пари відповідних точок, або двох різних подвійних точок.

Властивості симетрії відносно прямої

1°. Осьова симетрія є інволютивним перетворенням.

2°. Незмінними точками (точки образу збігаються з точками прообразу) при S_p є всі точки осі p. Це означає, що коли фігура F перетинає вісь p, то її образ F' також перетинає цю вісь у тих самих точках.

3°. Образом будь-якої прямої є пряма.

4°. Незмінними прямими (прямі, що відображаються самі на себе) є вісь симетрії і всі прямі, перпендикулярні до осі симетрії.

5°. Образом відрізка є рівний йому відрізок, а тому осьова симетрія є рух.

6°. Усі симетричні фігури рівні між собою, але мають протилежну орієнтацію.

7°. При осьовій симетрії промінь відображається у промінь, кут – у кут, що дорівнює йому; півплощина – у півплощину, паралельні прямі – в паралельні прямі.

Суть методу осьової симетрії полягає в тому, що разом з даними і шуканими фігурами розглядаються також фігури, симетричні деяким з них або їхнім частинам відносно довільно вибраної осі. При вдалому виборі осі й фігури, яка відображається відносно осі, розв'язання задачі може значно полегшитись: виникає або нова задача (більш проста), розв'язок якої відомий, або виконана симетрія дає безпосередньо шуканий розв'язок.

Метод осьової симетрії застосовують до розв'язуваяня задач, зв'язаних з визначенням положення фігур, встановленням форми фігури, із знаходженням найбільших і найменших значень величин тощо. Доцільність застосування методу осьової симетрії залежить від вда- лого вибору осі симетрії. Оскільки прямі, що містять бісектрису кута, діагоналі ромба, квадрата, є осями симетрії відповідних фігур, то за методом осьової симетрії розв'язуються задачі на побудову трикутників, ромбів, квадратів за даними, що містять положення бісектриси або діагоналей.

Задача. Побудувати трикутник за двома сторонами a і b та різницею кутів що лежать проти, цих сторін.

Розв'язання. *Аналіз.* Припустимо, що побудовано трикутник ABC, в якого $AC = b$, $BC = a$, $\angle A - \angle B = \varphi$, де a і b – дані відрізки, φ – даний кут (рис.). За умовою $\angle A - \angle B = \varphi$, тому $\angle A > \angle B$. Проведемо вісь симетрії точок A і B і побудуємо образ C_1 точки C:

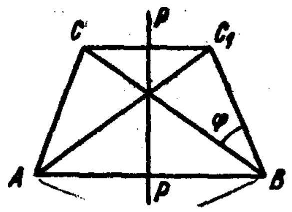

Рис. 98

$C_1 = S_p(C)$. $BC_1 = S_p(AC) \Rightarrow$

2.5. Метод повороту навколо точки

Поворотом площини навколо даної точки O на орієнтований кут α називається таке перетворення, при якому кожній точці A площини відповідає така точка A' цієї самої площини, що:

1) відрізок AO' дорівнює відрізку OA; 2) кут AOA' дорівнює куту α і однаково орієнтований з α. Точка O називається *центром повороту*, а кут α – *кутом повороту.*

Кут α вважається додатним, якщо кут AOA' орієнтований проти руху стрілки годинника, і від'ємним – у противному разі. Поворот з центром O на кут α позначають символічно R_O^α (від латинського слова Rotation).

Якщо точка A' є образом точки A при повороті навколо точки O на кут α, то це записують так: $A' = R_O^\alpha(A)$. Аналогічно із запису

$A'B' = R_O^{\alpha}(AB)$ маємо, що пряма (відрізок) $A'B'$ є образом прямої (відрізка) AB при повороті навколо точки O на кут α.

Поворот повністю визначається завданням центра повороту і орієнтованого кута повороту. Поворот може бути заданий центром повороту і однією парою відповідних точок або двома парами відповідних точок (однією парою відповідних рівних відрізків). Кут повороту є орієнтованою фігурою, тому градусна міра кута повороту може бути як додатною, так і від'ємною. Додатним вважається напрямок поворогу проти руху стрілки годинника. Кут повороту а лежить у межах $-180° < \alpha < 180°$.

Властивості повороту

1°. Поворот не є інволютивним перетворенням (виняток при $\alpha = 180^0$).

2°. Незмінними точками при R_O^{α} є всі точки площини, якщо $\alpha = 0°$. Центр повороту, відмінного від тотожного ($\alpha \neq 0°$), є єдиною його незмінною точкою.

3°. Образом будь-якої прямої є пряма, що утворює з даною прямою кут α (кут повороту).

4°. Не існує незмінних прямих при повороті на кут, відмінний від нуля або 180°.

5°. Образ відрізка є відрізок, що дорівнює даному. Тому поворот є рух.

6°. Відповідні фігури при повороті рівні між собою і мають однакову орієнтацію.

7°. При повороті промінь відображується в промінь, кут– у кут, що дорівнює даному, півплощина – в півплощину; паралельні прямі –в паралельні прямі.

Суть методу повороту полягає в тому, що, повернувши дану або шукану фігуру, або її елементи на деякий доцільно вибраний кут навколо вибраного центра, зводять розв'язання даної задачі до побудови допоміжної, простішої фігури, а потім виконують обернений поворот і дістають шукану фігуру. Центр і кут повороту вибирають так, щоб рівні елементи сумістились або утворили простішу фігуру. При розв'язуванні деяких задач доцільно застосувати не один, а кілька поворотів навколо різних центрів, щоб дістати нову фігуру, яку легко побудувати за даними задачі.

Метод повороту застосовують до розв'язування задач на побудову таких фігур, в яких відомо кут з вершиною і є хоча б два рівні відрізки, зокрема, на побудову правильних і рівнобедрених трикутників, квадратів, правильних многокутників.

2.6. Метод симетрії відносно точки (метод центральної симетрії)

Симетрією відносно точки O називають поворот навколо точки на 180°. Точка *O* називається *центром симетрії.* Симетрію з центром *O* позначатимемо Z_0.

Отже, за означенням $Z_0 = R_0^{180^\circ} = R_0^{-180^\circ}$. Якщо $Z_0(M) = M'$. то точка *O* є серединою відрізка MM', *і* навпаки, якщо О – середина відрізка MM', то $Z_0(M) = M'$ і $Z_0(M') = M$. Точки M і M' взаємно симетричні відносно точки *O*, тобто $Z_0^{-1} = Z_0$ (центральна симетрія є інволюційний поворот).

Можна ввести поняття центральної симетрії площини незалежно від повороту:

1) точки M і M' площини називаються *симетричними відносно точки O,* якщо O – середина відрізка MM'; точка O вважається симетричною самій собі;

2) *центральною симетрією* площини відносно точки O (центр симетрії) називається перетворення площини, при якому будь-яка її точка M відображається на симетричну їй точку M' відносно центра O.

Центральна симетрія повністю визначається завданням центра симетрії (точки O) або пари відповідних точок.

Якщо яка-небудь фігура при центральній симетрії відносно **точки** O відображається сама на себе, то точка O називається *центром симетрії* цієї фігури, а фігура називається *центрально-симетричною.*

До фігур, які мають центр симетрії, належать паралелограм (центр симетрії – точка перетину діагоналей), правильний шестикутник (центр симетрії – центр шестикутника), коло (центр симетрії – центр кола) тощо.

Властивості центральної симетрії

1°. Центральна симетрія є інволюційним перетворенням.

2°. Незмінною точкою при центральній симетрії є лише одна точка – її центр.

3°. Образом будь-якої прямої є паралельна їй пряма.

4°. Незмінними прямими є всі прямі, що проходять через центр симетрії.

5°. Образом відрізка є відрізок, який дорівнює даному і паралельний йому. Тому центральна симетрія є рух.

6°. Усі центрально-симетричні фігури рівні між собою і не змінюють своєї орієнтації.

7°. При центральній симетрії промінь відображається в промінь, кут – у кут, що дорівнює даному; півплощина – в півплощину; паралельні прямі – в паралельні прямі, крива – в криву.

Суть методу центральної симетрії полягає в тому, що поряд з даними і шуканими розглядають фігури, симетричні даним або шуканим, або їхнім елементам відносно доцільно вибраного центра. Внаслідок цих перетворень встановлюються зв'язки між даними елементами і шуканими, що зводять задачу до відомої.

Цей метод ефективний здебільшого тоді, коли серед даних або шуканих елементів є відрізок, середина якого відома.

Центральну симетрію використовують також для побудови паралелограмів або інших фігур, що мають центр симетрії, і до побудови фігур на основі вроблених припущень.

2.7. Метод паралельного перенесення

Паралельним перенесенням або *перенесенням на вектор* **u** називають таке перетворення площини, при якому будь-яка точка A відображається на таку точку A', що $AA' = \mathbf{u}$, позначають $T_{\mathbf{u}}$ (від лат. Translation – перенесення).

Точка A' називається *образом* точки A при паралельному перенесенні $T_{\mathbf{u}}$. Це записують так: $A' = T_{\mathbf{u}}(A)$ або $A' = \mathbf{u}(A)$. Запис $A'B' = T_{\mathbf{u}}(AB)$ означає, що відрізок (пряма) $A'B'$ є образом відрізка (прямої) AB при паралельному перенесенні $T_{\mathbf{u}}$.

Для завдання паралельного перенесення досить задати вектор або одну пару відповідних точок.

Властивості паралельного перенесення

1°. Не існує незмінних точок площини, якщо $\mathbf{u} \neq 0$.

2°. Образом будь-якої прямої є паралельна їй пряма.

3°. Незмінними прямими є всі прямі, паралельні вектору **u**.
4°. Образом відрізка є відрізок, який дорівнює даному і паралельний йому. Тому паралельне перенесення є рух.
5°. Відповідні фігури рівні і мають однакову орієнтацію.
6°. При паралельному перенесенні промінь відображується в промінь, кут – у рівний йому кут, півплощина – у півплощину, паралельні прямі – в паралельні прямі.
7°. Сукупність усіх паралельних перенесень площини утворює групу.

Суть методу паралельного перенесення полягає в тому, що разом з даними та шуканими фігурами розглядаються їхні образи при доцільно вибраному паралельному перенесенні. При цьому перенесення може стосуватись або всієї фігури, або окремих її частин. Тому можна задачу звести до допоміжної задачі, розв'язання якої відоме.

Метод паралельного перенесення здебільшого застосовують для об'єднання розрізаних частин шуканої фігури та при розв'язуванні вадач на многокутники загального виду. Вибір частини фігури, яку треба перенести, і пари відповідних точок, що характеризують здійснюване перенесення, спирається на конкретну умову задачі і виділяє допоміжну фігуру, яку можна побудувати. Потім для знаходження шуканої фігури виконують обернене паралельне перенесення,

При розв'язуванні задач цим методом іноді доводиться здійснювати не одне, а кілька паралельних перенесень.

2.8. Метод гомотетії

Гомотетією з центром О і коефіцієнтом $k \neq 0$ називають таке перетворення площини, при якому образом довільної точки A є така точка A', що **OA′**= k·**O A**. Точки A і A' називаються *гомотетичними.*

Гомотетія визначається завданням центра O і коефіцієнта гомотетії k. Позначають гомотетію символом H_0^k.

Якщо точка A' є образом точки A в гомотетії з центром O і коефіцієнтом k, то записують: $A' = H_0^k(A)$.

Перетворенням, при якому зберігається форма фігури, хоча і змінюються її розміри, називається пертворенням подібності.

Більш точніше це поняття визначається настпним чином.

Перетворення площини α, яке змінює всі відстані між точками площини в k разів, де $k > 0$, називається перетворенням подібності з коефіцієнтом k.

Властивості гомотетії

1°. Центр гомотетії відображається сам на себе – єдина незмінна точка площини при гомотетії, якщо $H_0^k \neq E$, $k \neq 1$, $E = H_0^1$.

2°. Якщо $k > 0$, то точки A і $A' = H_0^k(A)$ лежать на прямій OA по один бік від центра гомотетії, а якщо $k < 0$, то по різні боки від нього.

3°. Незмінними прямими в гомотетії є всі прямі, що проходять через центр гомотетії.

4°. Гомотетія зберігає колінеарність точок. Пряма відображається на паралельну пряму.

5°. Гомотетичні відрізки, прямі, промені – паралельні.

6°. Якщо гомотетія H_0^k відображає точки A, B відповідно в точки A', B', то $A'B' = k \cdot AB$. Отже, гомотетія є перетворенням подібності.

7°. Гомотетичні фігури подібні.

З визначення подібності, зрозуміло, що композиція перетворень площини (декілька почергових перетворень площини), таких як гомотетія, паралельне перенесення, поворот навколо точки, або і інших (симетрія відносно прямої, симетрія відносно точки) є перетворенням подібності.

Метод подібності полягає в тому, що, крім даних фігур і шуканої фігури, розглядають ще допоміжні фігури, які утворюються з цих фігур або їхніх елементів за допомогою доцільно вибраної подібності. Внаслідок подібних перетворень встановлюються зв'язки між даними і шуканими елементами, які приводять або до безпосереднього розв'язанння задачі, або до допоміжної відомої задачі.

Суть методу подібності при розв'язуванні задач на побудову полягає в тому, що відкидають одну з умов, яка характеризує розміри шуканої фігури, і будують фігуру, подібну до шуканої. Побудована допоміжна фігура перетворюється на подібну до неї так, щоб після перетворення використовувалась і раніше відкинута умова. В результаті матимемо шукану фігуру.

Якщо треба побудувати фігуру, вписану в задану фігуру, то будують спочатку фігуру заданої форми, але не вписану в дану. Використовуючи властивості гомотетії, переходять від побудованої фігури до шуканої.