Тема

НСД, НСК та його обчислення

1. Найбільший спільний дільник і найменше спільне кратне. Властивості НСД і НСК
2. Обчислення НСД і НСК за канонічним розкладом чисел. Взаємозв'язок між НСД і НСК
3. Узагальнена ознака подільності одного складеного числа на друге складене число
4. Алгоритм Евкліда

1. НСД, НСК. Властивості

В практичній діяльності часто виникає необхідність знати спільні дільники двох і більше натуральних чисел, зокрема при додаванні та відніманні звичайних дробів.

Візьмемо два числа 10 і 36. Дільниками числа 10 є: 1, 2, 5, 10, а числа 36 – 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36. Спільні дільники чисел 10 і 36: 1, 2. Серед них є найбільший дільник – число 2. Його називають *найбільшим спільним дільником* чисел 10 і 36.

Спільним дільником натуральних чисел a і b називається натуральне число, яке є дільником кожного з даних чисел.

Найбільшим спільним дільником натуральних чисел a і b називається найбільше число з усіх спільних дільників даних чисел і позначається НСД (a,b) або Д (a,b).

Аналогічно означується поняття НСД для кількох натуральних чисел. Так, Д (15, 45, 105) = 15.

НСД має такі найпростіші властивості:

1°. Для будь-яких натуральних чисел a і b існує єдиний НСД. Справді, множина спільних дільників чисел a і b непорожня, бо вона має принаймні число 1, крім того, вона скінченна. Тому серед її елементів знайдеться єдине число, яке є НСД (a,b).

2°. НСД(a,b) не перевищує меншого з даних чисел, тобто якщо $a<b$ то НСД$(a,b)\leq a$.

3°. НСД(a,b) ділиться на будь-який їхній спільний дільник. Справді, нехай НСД$(a,b)=d$, а d_1 – будь-який їхній спільний дільник. Тоді $a=dq,\ b=dq_1$, де числа q і q_1 мають спільним дільником тільки 1. Отже, спільний дільник d_1, чисел a і b є дільником їхнього найбільшого спільного дільника d.

4°. Якщо $a \vdots b$, то НСД $(a,b)=b$.

Якщо НСД$(a_1,a_2,...,a_k)=1$, то числа $a_1,a_2,...,a_k$ називаються *взаємно простими*. Якщо, крім того, кожна пара цих чисел взаємно проста, то числа $a_1,a_2,...,a_k$ називаються попарно взаємно простими.

Так, числа 4, 6, 7 – взаємно прості, НСД(4, 6, 7) = 1. Проте вони не є попарно взаємно простими, НСД(4, 6) = 2. Отже, попарно взаємно прості числа є взаємно простими, але обернене твердження, взагалі кажучи, не справджується.

Як відомо, число a є кратним числа b, якщо $a \vdots b$, або $a = bq$. Очевидно, нуль є кратним будь-якого числа, тому далі розглядатимемо лише натуральні числа.

Візьмемо числа 12 і 18. Кратними числа 12 є: 12, 24, 36, ... а кратними числа 18 є: 18, 36, 54, ... Числа 12 і 18 мають спільні кратні: 36, 72, ... Серед них є найменше кратне – число 36. Його називають найменшим спільним кратним чисел 12 і 18.

Спільним кратним натуральних чисел a і b називається натуральне число, кратне кожному з даних чисел.

Найменшим спільним кратним натуральних чисел називається найменше число з усіх спільних кратних даних чисел.

Найменше спільне кратне чисел a і b позначається НСК(a,b) або К(a,b). Так, К (12, 18) = 36.

НСК має такі найпростіші властивості:

1°. Для будь-яких натуральних чисел a і b існує єдине НСК.

Справді, множина спільних кратних даних чисел непорожня, бо вона містить добуток даних чисел. За принципом найменшого числа у множині спільних кратних існує найменше число. Це число і є найменшим спільним кратним даних чисел.

2°. Найменше спільне кратне чисел a і b не менше більшого з даних чисел, тобто якщо $a > b$, то НСК$(a,b) \geq a$.

3°. Кожне спільне кратне даних чисел a і b ділиться на найменше спільне кратне цих чисел.

Справді, нехай M – довільне спільне кратне чисел a і b, m=НСК(a,b). За теоремою про ділення з остачею $M = mq + r$, де

$0 \le r < m$. За умовою числа m і M діляться на a і b отже, і число $r = M - mq$ теж ділиться на кожне з них. Проте при $r < m$ це можливо лише тоді, коли $r = 0$. Таким чином, $M = mq$.

4°. Якщо $a \vdots b$, то НСК (a, b) = a.

Теорема. НСД(a, b) є найменшим спільним кратним усіх спільних дільників чисел a і b.

Доведення. Нехай $d_1, d_2, ..., d_k$ – всі спільні дільники чисел a і b, m = НСК $(d_1, d_2, ..., d_k)$. Кожне з чисел a і b є спільним кратним чисел $d_1, d_2, ..., d_k$. Тому, згідно з властивістю 4°, числа a і b діляться на m. Отже, m є спільним дільником чисел a і b. Число m дорівнює деякому d_i. Доведемо, що це d_i – найбільше. Справді, якщо припустити, що $d_j > d_i = m$, то $\overline{m \vdots d_j}$, а це суперечить вибору m.

2. Обчислення НСД і НСК за канонічним розкладом чисел

Розглянемо будь-які два складні числа, наприклад 315 і 1860. Нам вже відомо, що ці числа можна подати в єдиному канонічному вигляді. Проробимо це.

315	5	1860	3
63	3	620	2
21	3	310	2
7	7	155	5
1		31	31
		1	

Отже $315 = 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $1860 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 31$. Знайдемо НСД і НСК цих чисел.

У розклад на прості множники НСД цих чисел повинні ввійти всі спільні прості множники, причому кожний з них треба взяти з найменшим показником, з яким він входить в канонічні розклади даних чисел. Отже, НСД(315,1860) = 3·5 = 15.

У розклад на прості множники НСК цих чисел повинні ввійти всі прості множники, які входять принаймні в один розклад, причому кожний з них треба взяти з найбільшим показником. Отже, НСК(315,1860) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31$ = 39060.

Аналогічно можна знайти НСД і НСК будь-яких двох чисел.

Зберігаючи загальність, можна вважати, що в канонічний розклад розглядуваного числа входять всі прості числа від 2 до найбільшого простого числа на яке ділиться розглядуване число (якщо якесь просте число не є його дільником, то його в розклад можна подати в нульовому степені).

Наприклад: $315 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$; $1860 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^0 \cdot 11^0 \cdot 13^0 \cdot 17^0 \cdot 19^0 \cdot 23^0 \cdot 29^0 \cdot 31$.

Беручи до уваги, що в канонічні розклади чисел входять будь-які прості числа (проте деякі з них, можливо, входять в нульовому степені), то канонічні розклади двох чисел можна подати так, що вони міститимуть одні й ті самі прості числа. Наприклад:

$315 = 2^0 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 31^0$; $1860 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^0 \cdot 31$.

Отже, запис буде таким:

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}, \quad b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}.$$

Тоді $\text{НСД}(a,b) = p_1^{\min(\alpha_1 \beta_1)} p_2^{\min(\alpha_2 \beta_2)} ... p_k^{\min(\alpha_k \beta_k)}$,

а $\text{НСК}(a,b) = p_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} p_2^{\max(\alpha_2, \beta_2)} ... p_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}$.

Беручи до уваги такий запис, можна показати, що для того щоб число a ділилося на число b, необхідно й достатньо, щоб $\alpha_1 \ge \beta_1, \ldots \alpha_k \ge \beta_k$, а також довести теорему про зв'язок між НСД і НСК чисел a і b.

Теорема про взаємозв'язок між НСД і НСК:

$$\text{НСД}(a,b) \cdot \text{НСК}(a,b) = a \cdot b.$$

Доведення. Нехай $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_k^{\beta_k}$. Тоді $ab = p_1^{\alpha_1+\beta_1} p_2^{\alpha_2+\beta_2} \ldots p_k^{\alpha_k+\beta_k}$.

Оскільки один з показників α_i і β_i, і = 1, 2, ..., k, є найменшим, а другий – найбільшим, то один з них входить до $\text{НСД}(a,b)$, а другий – до $\text{НСК}(a,b)$. Тому $\text{НСД}(a,b) \cdot \text{НСК}(a,b) = ab$. Теорему доведено.

Наслідок. Якщо НСД $(a,b) = 1$, то $\text{НСК}(a,b) = ab$.

Таким чином, НСК двох чисел дорівнює добутку цих чисел тоді і тільки тоді, коли ці числа взаємно прості.

Основна властивість взаємно простих чисел.

Якщо $\text{НСД}(a,b) = 1$ і $ac \vdots b$, то $c \vdots b$.

Доведення. Оскільки $\text{НСД}(a,b) = 1$, то $\text{НСК}(a,b) = ab$. Крім того, $ac \vdots a$ і за умовою $ac \vdots b$, тому ac – спільне кратне a і b. Оскільки кожне спільне кратне двох чисел ділиться на НСК цих чисел, то $ac \vdots ab$. Звідси $c \vdots b$. Доведено.

Наслідок. Якщо добуток чисел a і b ділиться на просте число p, то принаймні одне з цих чисел ділиться на число p.

Теорема. Якщо натуральне число a не ділиться на просте число p, то НСД(a, p) = 1.

Доведення. Оскільки p – просте число, то воно має лише два дільники 1 і p, тому НСД(a, p) дорівнює або 1, або p. Якщо НСД(a, p) = p, то $a \vdots p$, що суперечить умові. Отже, НСД(a, p) = 1.

3. Узагальнена ознака подільності одного складеного числа на друге складене число

Якщо відомі канонічні розклади натуральних чисел, то, використовуючи основну теорему арифметики, можна довести необхідну й достатню ознаку подільності одного натурального числа на друге.

Теорема. Якщо $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$, $b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k}$ – канонічні розклади, де $\alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0,\ i = 1,2,...,k$, то для того щоб a ділилося на b, необхідно й достатньо, щоб $\alpha_i \geq \beta_i,\ i = 1,\ 2,\ ...,\ k$.

Доведення. Необхідність. Нехай $a \vdots b$ тобто $a = bq$. Тоді

$$p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} = (p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_k^{\beta_k})(p_1^{\gamma_1} p_2^{\gamma_2} ... p_k^{\gamma_k}).$$

Перемножуючи степені одного й того самого простого числа, дістаємо: $p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k} = p_1^{\beta_1+\gamma_1} p_2^{\beta_2+\gamma_2} ... p_k^{\beta_k+\gamma_k}$. З основної теореми арифметики випливає, що $\alpha_i = \beta_i + \gamma_i,\ \ i = 1,\ 2,\ ...,\ k$. Оскільки всі γ_i – невід'ємні цілі числа, то дістанемо: $\alpha_i \geq \beta_i$, $i = 1,\ 2,\ ...,\ k$.

Достатність. Нехай $\alpha_i \ge \beta_i$ при $1 \le i \le k$. Позначимо через $\sigma_i = \alpha_i - \beta_i$, $d = p_1^{\sigma_1} p_2^{\sigma_2} ... p_k^{\sigma_k}$. Тоді db має той самий канонічний вигляд, що й число a. Отже, $bd = a$. Теорему доведено.

4. Алгоритм Евкліда

Розклад великих чисел на прості множники – складна задача. Відомий більш ефективний спосіб знаходження НСД, який оснований на діленні з остачею і називається *алгоритмом Евкліда*.

Лема. Якщо $a = bq + r$, де $a, b, r \in N$, то НСД(a,b) = НСД(b,r).

Доведення. Покажемо, що сукупність спільних дільників a і b збігається з множиною спільних дільників b і r. Справді, якщо d – спільний дільник b і r, то d буде спільним дільником $a = bq + r$ і , b. Справедливе й обернене, якщо d – спільний дільник a і b, то d є дільником і числа $r = a - bq$, а отже, спільним дільником чисел b і r. Таким чином, множина спільних дільників чисел a і b збігається з множиною спільних дільників b і r. Тому вони мають один і той самий найбільший дільник. Отже, НСД(a,b) = НСД (b,r). Доведено.

Розглянемо алгоритм Евкліда для знаходження НСД довільних натуральних чисел a і b. Нехай $a \ge b$. Якщо $a \vdots b$, то НСД(a,b) = b. Якщо $a = bq + r$, де $r \ne 0$, то за лемою задача знаходження НСД зводиться до обчислення НСД чисел b і r, де $r < b$. Якщо $b \vdots r$, то НСД(b,r) = r, а отже, і НСД(a,b) = r. Якщо при діленні b на r матимемо остачу $0 < r_1 < r$, то $b = rq_1 + r_1$ і тому НСД(a, b) = = НСД(b, r) = НСД(r, r_1). Продовжуючи описаний процес, діставатимемо все менші і менші остачі: r, r_1, ..., r_m. Зрештою дістанемо остачу, яка ділить попередню остачу. Згідно з лемою, ця, відмінна від нуля, остача і є НСД(a, b).

Отже: НСД двох натуральних чисел дорівнює останній, відмінній від нуля остачі в алгоритмі Евкліда для цих чисел. Алгоритм Евкліда як спосіб послідовного ділення зручно записувати у вигляді многократного ділення кутом. *Приклад.* НСД(90, 35) = 5.

Позначимо 90 через a, 35 – через b. Рівність 20 = 15·1+5 запишемо так: 5 = 20 – 15·1. З попередньої рівності знайдемо: 15 = b – 20·1. Підставимо це значення 15 у вираз 5 = 20 – 15·1. Дістанемо: 5 = 20 – (b – 20·1)·1. З рівності 90 = 35·2 + 20 запишемо 20 = α – b·2. Підставимо це значення у попередній вираз. Тоді:

5 = a – b·2 – (b – (a – b·2)·1). Після виконання обчислень матимемо: 5 = a·2 + b·(–5). Отже, $d = ax – by$.

З алгоритма Евкліда випливає таке твердження: для будь-яких двох натуральних чисел a і b знайдуться такі натуральні числа x і y, що НСД(a, b) = $ax – by$. На основі цього твердження можна дійти висновку про те, що коли d = НСД(a, b), то рівняння виду $d = ax – by$ завжди розв'язне у множині цілих чисел.

Рівність НСД$(a, b) = ax - by$ має велике значення для доведення багатьох властивостей про натуральні числа. Для прикладу доведемо таке твердження: якщо добуток натуральних чисел ділиться на просте число, то принаймні один із множників ділиться на це просте число.

Справді, нехай добуток ab натуральних чисел α і b ділиться на просте число p. Припустимо, що $a \vdots p$. Тоді НСД$(a, p) = 1$. Отже, знайдуться такі цілі числа x і y, що $1 = ax + py$. Помножимо дану рівність на число b. Дістанемо: $b = abx + pby$. Як бачимо, кожний з доданків суми ділиться на p, тому й $b \vdots p$. Використовуючи доведену властивість, можна тепер простіше довести однозначність розкладу будь-якого натурального числа в добуток простих чисел. Після обчислення за допомогою алгоритма Евкліда НСД двох чисел, можна знайти їхнє НСК, використовуючи залежність між НСД і НСК. Так, НСК (90, 35) = 90 · 35 : 5 = 630. Алгоритм Евкліда є тим загальним методом, за яким через скінченне число кроків можна обчислити НСД і НСК будь-яких двох і більше натуральних чисел.

Отже: в результаті вивчення теми «**НСД, НСК та його обчислення**» студент повинен

з н а т и: поняття НСД і НСК, властивості НСД і НСК, поняття взаємно простих чисел, взаємозв'язок між НСД і НСК, узагальнену ознаку подільності одного складеного числа на друге складене число, алгоритм Евкліда;

у м і т и: знаходити НСД і НСК згідно визначення (перебором), обчислювати НСД і НСК за канонічним розкладом чисел та за допомогою алгоритму Евкліда.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент на практичному занятті в результаті вивчення теми

«НСД, НСК та його обчислення»

1. Знайти декілька спільних кратних для чисел: а) 15 і 40; б) 28, 35, 60. Вказати в кожному випадку НСК цих чисел.

2. Знайти за допомогою розкладу на прості множники НСК і НСД чисел: а) 6160 і 1560; б) 1980, 702, 936; в) 9960, 660, 1320.

3. Якщо число $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{a_k}$, де $p_1, p_{2,} \ldots p_к$- прості числа, то число всіх дільників числа a дорівнює $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 2)\ldots(\alpha_k + 1)$, причому в число дільників включається одиниця і саме число a. Перевірити цю формулу для чисел: 48, 60, 216.

4. Відношення двох чисел дорівнює НСД чисел 210 і 77, а їх сума дорівнює НСК чисел 168 і 224. Знайти ці числа.

5. Відношення двох чисел дорівнює НСД чисел 913 і 781, а різниця цих чисел дорівнює НСК чисел 175 і 125. Знайти ці числа.

6. Є 1224 цукерок, 204 мандарини і 306 вафель. Яке найбільше число однакових подарунків можна скласти з цих ласощів.

7. Туристи проїхали на велосипедах в перший день 56км, а в другий 72км, причому кожний день вони були в дорозі ціле число годин. Швидкість їх була однаковою і виражалась цілим числом км/год. Знайти швидкість їх руху, якщо вона була найбільшою із можливих?

8. Знайти два числа, якщо їх добуток 12600, а НСК дорівнює 6300.

9. Знайти за допомогою алгоритму Евкліда НСД чисел: а) 1995 і 1260; б) 2263 і 8249; в) 45469 і 41033; г) 17595 і 9660.

10. Щоб знайти послідовним ділення НСД (17595, 9660) задані числа замінені для скорочення дій числами 1173 і 644, для яких НСД знайдене і дорівнює 23. Чому дорівнює НСД заданих чисел?

11. Скільки разів НСД двох чисел вмішається в кожному з них, якщо при послідовному діленні одержуються по порядку частки 1, 1, 2, 2 і відповідні їм остачі 729, 288, 144, 0?

12. У скільки разів НСД (8855; 10005) більше від НСД (1679; 2231)?

13. Застосовуючи алгоритм Евкліда для знаходження НСД знайти НСК чисел: а) 2911 і 1763; б) 7429 і 9367; в) 8881 і 1577.

14. Знайти шляхом розкладу на множники НСД і НСК чисел:

а) 150, 120, 144; б) 180, 810, 1500; в) 60, 360, 72.

15. Зведіть дроби $\frac{111}{21120}$ і $\frac{1237}{30720}$ до спільного знаменника.

16. В три шкільні кіоски відправили однакову кількість зошитів. Для однієї школи відправили зошити пачками по 150 шт. в кожній, для другої – по 100 шт., а для третьої – по 200 шт. в кожній пачці. Скільки зошитів відправили кожній школі, якщо число відправлених зошитів менше 2000.