Тема

Цілі числа (додатні та від’ємні)

1. Від'ємні числа, їх геометрична інтерпретація. Множина цілих чисел. Протилежні числа. Модуль числа.
2. Властивості множини цілих чисел: зчисленність, упорядкованість, дискретність.
3. Дії над цілими числами
   3.1. Додавання та віднімання цілих чисел. Закони додавання
   3.2. Множення та ділення цілих чисел. Закони множення.

1. Від'ємні числа, їх геометрична інтерпретація. Множина цілих чисел. Протилежні числа. Модуль числа.

Ви можете запитати: «для чого ми вивчаємо від’ємні числа, якщо їх в початкових класах взагалі не зачіпають?». Я дам таку відповідь:

– по-перше: від’ємні числа вивчаються дітьми вже менш ніж через два роки після закінчення початкових класів і неможна вам їх не знати;
– по-друге: від’ємні числа можуть інтерпретуватися як борг чи як зниження температури тощо а також як чітке донесення вчителем до молодших школярів того, що сума двох боргів є більший борг.

Розглянемо такі задачі:

● Ірі 10 років, а її бабусі – 54 років. Через скільки років бабуся буде старшою від Ані в 5 разів?

Легко догадатися, що через 1 рік. 11 і 55.

● Ані 12 років, а її бабусі – 52 років. Через скільки років бабуся буде старшою від Ані в 5 разів?

Розв'яжемо цю задачу арифметичним способом, оскільки саме цим способом в початкових класах розв'язують задачі.

Різниця в роках між бабусею і Анею дорівнює: 52 – 12 = 40 років. Зрозуміло, що різниця в віці між бабусею і внучкою Анею була і буде завжди рівною 40 років.

Якщо приймемо роки Ані в той час, коли бабуся буде старшою від неї в 5 разів (різниця в віці між ними залишатиметься рівною 40 років) за 1 частину, то роки бабусі в той час становитимуть таких 5 частин. Таким чином, на різницю числа частин бабусиного і Аниного віку, тобто на 4 (5 – 1 = 4) частини припадає 40 років. А отже, одна така частина віку дорівнює 10 (40 : 4 = 10) років. Тобто, Анин вік в той час рівний 10 рокам. Отже, щоб відповісти на запит задачі, тобто на запит числа років за які бабуся буде старшою від Ані в 5 разів, потрібно від числа Аниних років в той час відняти число Аниних років зараз, тобто від 10 відняти 12, що не можливо зробити на множині цілих невід'ємних чисел. Нам зрозуміло, що це було 2 роки тому. Постає питання, як же чисельно відповісти безпосередньо на запит задачі, тобто як же позначити число рівне кількості років за які бабуся буде старшою від Ані в 5 разів?

Щоб відповісти на це запитання нам не достатньо лише чисел з множини цілих невід'ємних чисел. Потрібно ввести числа які б могли відображати те, що є різницею між меншим і більшим числом.

Якщо ми спробуємо розв'язати цю задачу складаючи рівняння, то воно буде наступним: $52+x=5\cdot(12+x)$. З нього отримаємо: $52=60+4x$, поділивши почленно на 4, отримаємо: $13=15+x$. Звідси: $x=13-15$. Тобто треба від 13 відняти 15, що теж не можливо зробити знаючи тільки з числових множин множину цілих невід'ємних чисел.

Так як ми вже знаємо, що це відбулося два роки тому, то позначимо шукане число через 2 з знаком „–", тобто через -2. А отже, згідно першого і другого розв'язків цієї задачі, отримаємо, що: $10-12=13-15=-2$.

● Розглянемо іншу задачу: Один чоловік міркував: „Я вже заборгував кумові стільки овечих шкірок, що щоб мати своїх 10 овечих шкірок і не мати боргу, мені потрібно виростити 15 овечок". Як же позначити числом наявні в чолові в даний час овечі шкірки?

Арифметично, розв'язком цієї задачі є значення різниці чисел 10 і 15, тобто $10-15$, яке не існує на множині цілих невід'ємних чисел.

Цю задачу логічно міркуючи можна розв'язати так: з 15 дорослих овечок чоловік зніме 15 шкірок, 10 з яких залишить собі а 5 віддасть кумові, позбувшись при цьому боргу. Отже в чоловіка в даний час не тільки не має овечих шкірок, а ще й є борг на 5 овечих шкірок. А отже, згідно першого і другого розв'язків цієї задачі і згідно того, що ми як і в попередній задачі при відніманні від меншого числа більше, ставимо перед натуральним числом знак „мінус” отримаємо, що: $10-15=-5$.

● Розглянемо ще й таку задачу. Лежало на столі 5 яблук. На скільки збільшиться чисельність яблук, якщо: а) Іванко поставив 1 яблуко; б) Іванко з’їв 2 яблука?

Розглянемо спочатку пункт а). Зрозуміло, що яблук в цьому випадку збільшиться на одне і стане 6, тобто відповіддю є число 1 $(6 - 5 = 1)$.

В пункті б), зрозуміло, що яблук зменшиться на два. Як ж записати відповідь? Так, як яблук було 5, а стане 3, то відповіддю в цьому випадку є значення числового виразу $3 - 5$, яке дорівнює від’ємному числу –2.

Отримані в задачах числа називають ***цілими від’ємними числами***.

Отже, знак „мінус” перед натуральним числом вказує на те, що дане число є ціле від’ємне число і його можна інтерпретувати, *згідно попередніх задач,* так*:*

– величиною ***зміни чисельності*** при переході від більшчисельної множини до меншчисельної;

– величиною боргу, а не наявних грошей, число яких потрібно знайти;

– числом років, які потрібно відрахувати в минуле а не в майбутнє про яке запитується в задачі, **тощо**.

Наведемо ще деякі приклади де застосовуються числа, які є цілими від’ємними числами: у зведенні погоди знак мінус перед натуральним числом вказує на те, що температура повітря в градусах Цельсія на відповідне число градусів нижча нуля; від’ємне число -28, що є на фізичній карті поблизу берега Каспійського моря, показує, що це море розташоване на 28 м нижче від рівня океану; від’ємне число -2 кг при підрахунку зекономленого матеріалу, вказує на його перевитрату на 2 кг; від’ємна швидкість -60 км/год вказує на рух в протилежному напрямку з швидкістю 60 км/год; від’ємне прискорення -2 м/с^2 вказує на сповільнення руху з прискоренням 2 м/с^2; від’ємний прибуток -60 грн вказує на втрату 60 грн; збільшення чисельності на від’ємне число -4 штуки говорить про зменшення чисельності на 4 штуки.

Таким чином, ціле від’ємне число можна розглядати як натуральне число зі знаком „–”, при цьому ціле від’ємне число відображає ту саму кількість певних одиниць що і відповідне йому натуральне число з допомогою якого воно записується, але значення якого протилежне значенню, що виражалося б натуральним числом.

Перші відомості про від’ємні числа зафіксовані в Китаї в I ст. до н.е., де ними позначали борг, збиток і зображали їх чорним кольором.

Декілька століть пізніше індійські математики, інтерпретуючи від’ємні числа як борг, а додатні як майно, дали такі правила дій над від’ємними і додатними числами: 1) сума майна і майна є майно”; 2) сума боргу і боргу є борг; 3) сума майна і боргу дорівнює їх різниці і є майном чи боргом в відповідності до того майно чи борг більший; 4) сума майна і рівного йому боргу дорівнює нулю; 5) добуток майна на борг чи боргу на майно є борг; 6) добуток боргу на борг є майно.

Добуток майна на борг чи боргу на майно можна уявити собі як наявність деякої кількості боргів, тобто як борг. Проте з першого погляду важко уявити як з двох перемножених боргів можна отримати майно. А так, якщо добуток двох боргів інтерпретувати як борг боргу, то людина яка має борг боргу, тобто яка комусь щось позичала і ще не боргувала, має можливість і сама в скрутний час в когось щось позичити і мати майно.

Множину всіх цілих від'ємних чисел позначають $\mathbf{Z}_-$.

Зрозуміло, що $\mathbf{Z}_- \sim \mathbf{N}$, тобто ці множини *еквівалентні* між собою.

Числа множини $\mathbf{N}$, як відомо, також є цілими, але додатними. Тому іноді множину $\mathbf{N}$ позначають $\mathbf{Z}_+$.

Розглянемо пряму лінію на якій позначено початок відліку (точку O) і одиничний відрізок (відрізок довжиною в одну одиницю), а також задамо додатній напрям зліва направо (так прийнято) (рис. 1). Така пряма є *числовою віссю* (координатною прямою), бо на ній можна точками відображати додатні і від'ємні числа, а також число нуль, причому існує *взаємно-однозначна*

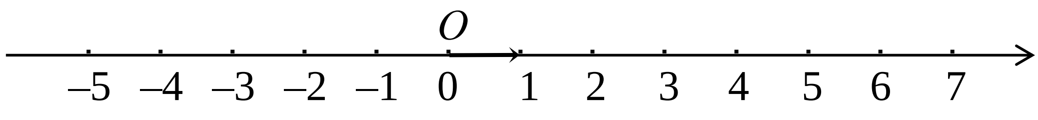

Рис 1.

відповідність між точками цієї вісі і числами (*координатами*). Дамо ***геометричну інтерпретацію*** натуральному і цілому від'ємному числу, а також нулю. Кожному числу n з множини **N** відповідатиме відрізок прямої лінії, лівий (так прийнято) кінець якого лежить в точці *O*, а сам він (відрізок) містить таку кількість ненакладних одиничних відрізків, на яку вказує кількісне натуральне число n, тобто довжина якого в n разів більша за одиничний відрізок. Тут правий кінець такого відрізка – це точка, яка і є точкою, що відповідає натуральному числу n. Аналогічно буде і для будь-якого іншого натурального числа, йому відповідатиме інша точка, що є правим кінцем відрізка, який міститиме відповідно іншу кількість ненакладних одиничних відрізків.

Промінь утворений з правої від початку відліку частини числової вісі, початок якого лежить в початку відліку (точці *O*) і з побудованими на ньому точками множини **N**, ілюструє відомі властивості множини **N**: *упорядкованості, нескінченності, зчисленності, дискретності*.

Кожному числу z_- з множини $\mathbf{Z}_-$ відповідатиме відрізок прямої лінії, правий (так прийнято) кінець якого лежить в точці *O*, а сам він (відрізок) містить таку кількість ненакладних одиничних відрізків, на яку вказує кількісне натуральне число n, яке є протилежне числу z_-. Тут лівий кінець такого відрізка – це точка, яка і є точкою, що відповідає цілому від'ємному числу z_-. Аналогічно буде і для будь-якого іншого цілого від'ємного числа, йому відповідатиме інша точка, що є лівим кінцем відрізка, який міститиме відповідно іншу кількість ненакладних одиничних відрізків.

Промінь утворений з лівої від початку відліку частини числової вісі, початок якого лежить в початку відліку (точці O) і з побудованими на ньому точками множини $\mathbf{Z}_-$, ілюструє такі ж як і для множини $\mathbf{N}$, властивості множини $\mathbf{Z}_-$: *упорядкованості, нескінченності, зчисленності, дискретності*.

Числу нуль, яке не є ні додатне ні від'ємне ціле число, відповідатиме на числовій осі відрізок який містить порожню множину ненакладних одиничних відрізків, а отже відрізок довжиною в нуль, тобто початок і кінець якого співпадають. А отже, на числовій осі числу нуль відповідатиме точка початку відліку (точка O).

Об'єднання трьох множин $\mathbf{Z}_-$, $\{0\}$ і $\mathbf{N}$ це множина, яку називають ***множиною цілих чисел*** і позначають $\mathbf{Z}$. Отже $\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_- \cup \{0\} \cup \mathbf{N}$.

Кожне ціле число або від'ємне або нуль, або додатне, тобто $\mathbf{Z}_- \cap \{0\} = \varnothing$, $\mathbf{Z}_- \cap \mathbf{N} = \varnothing$ і $\{0\} \cap \mathbf{N} = \varnothing$ – множини $\mathbf{Z}_-$, $\{0\}$ і $\mathbf{N}$ *попарно не мають спільних елементів*.

Як показує вище розглянута задача про зміну чисельності яблук, ціле додатне число можна інтерпретувати як зміну чисельності при переході від меншчисельної множини до більш-чисельної, а ціле від'ємне число можна інтерпретувати як зміну чисельності при переході від більшчисельної множини до меншчисельної. Число нуль можна інтерпретувати як зміну чисельності при переході від однієї множини до іншої, коли ці множини еквівалентні (рівночисельні). І взагалі, ціле число можна інтерпретувати як зміну чисельності при переході від однієї множини до іншої.

Додатне ціле число a, та від'ємне ціле число $-a$ називають ***протилежними***, причому $-(-a)=a$. Наприклад, $-(-6)=6$.

Число нуль не має протилежного, або протилежне саме собі.

Два цілі числа називають *числами одного і того самого знаку*, якщо вони обидва або додатні, або від'ємні. Наприклад, -6 і -2; 2 і 3.

Два цілі числа називають *числами різних знаків*, якщо котресь одне з них додатне, а інше – від'ємне. Наприклад, -6 і 8; 7 і -2; 2 і -2.

Якщо повернутися до розгляду числової вісі і відобразити на ній точки які відображають два протилежні цілі числа a, та $-a$, то як бачимо відстань від кожної з них до початку відліку є однаковою. Числове значення відстані завжди додатне і є деякою *абсолютною величиною*, яка однаково характеризує обидва протилежні цілі числа a, та $-a$. Згідно цих міркувань, введемо означення.

Модулем (***абсолютною величиною***) цілого числа a називають число $|a|$ (читають модуль a), яке визначається однією з двох рівностей: $|a|=a$, якщо $a\in(\mathbf{N}\cup\{\mathbf{0}\})$ чи $|a|=-a$, якщо $a\in\mathbf{Z}_-$.

Наприклад, $|6| = 6, |12| = 12, |0| = 0, |-6| = 6, |-19| = 19$.

Слово модуль походить від латинського слова modulus, яке означає – міра.

Згідно означення модуля візьмемо модуль деяких протилежних чисел. Отримаємо, що $|-6| = 6 = |6|, |-19| = 19 = |19|$. Тобто два протилежні числа мають той самий модуль, який дорівнює додатному з цих чисел. Отже означення модуля може бути і таким:

$$|a| = a \text{, якщо } a \geq 0,\ |a| = -a \text{, якщо } a < 0.$$

Геометричний зміст модуля: модуль числа дорівнює відстані від початку відліку до точки координатної прямої, яка відповідає даному числу.

Для порівняння цілих чисел за величиною зручно використовувати числову вісь. Справа від початку відліку на числовій прямій розташовані додатні цілі числа, інакше кажучи,

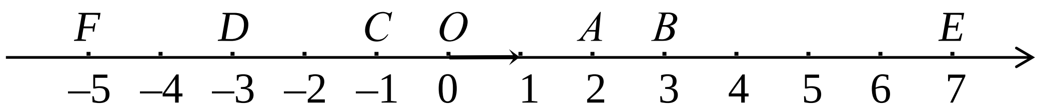

Рис 2.

натуральні числа, порівнювати які ми вже вміємо. Так число 2 менше від числа 3, а точка з координатою 2 розміщена ліворуч від точки з координатою 3. Те саме можна сказати і про числа 3 і 4 чи 14 і 39, чи 43 і 134.... Взагалі, з двох додатних цілих чисел те менше, яке є координатою точки, що лежить ліворуч. Аналогічна ознака поширюється і на всі цілі числа. Прийнято з двох чисел меншим вважати те, яке є координатою точки, розміщеної на числовій вісі ліворуч. Так, наприклад (рис. 2):

$A(2)$ ліворуч від $B(3)$, тому $2 < 3$;

$B(3)$ ліворуч від $E(7)$, тому $3 < 7$;

$A(2)$ ліворуч від $E(7)$, тому $2 < 7$;

$O(0)$ ліворуч від $A(2)$, тому $0 < 2$;

$F(-5)$ ліворуч від $D(-3)$, тому $-5 < -3$;

$D(-3)$ ліворуч від $C(-1)$, тому $-3 < -1$;

$F(-5)$ ліворуч від $O(0)$, тому $-5 < 0$;

$D(-3)$ ліворуч від $O(0)$, тому $-3 < 0$;

$C(-1)$ ліворуч від $A(2)$, тому $-1 < 2$.

Отже, робимо висновок: всяке від'ємне число менше від нуля і від всякого додатного числа; з двох від'ємних чисел те менше, в якого більший модуль.

Так, аналогічно на показах термометра: температура 6^{o} менша (нижча) від 20^{o}, -2^{o} менша від 0^{o}, а -7^{o} менша за -4^{o}.

Людина, яка має борг в 20 грн., тобто наявних грошей -20 грн., за однакових інших умов (доходу коштів, моралі, відповідальності) є такою яка має більше грошей ніж та, яка має борг в 600 грн., тобто наявних грошей -600 грн. і такою яка має менше грошей ніж та, яка не має боргу.

3. Властивості множини цілих чисел

Повернутися до розгляду числової вісі і відобразимо на ній точки що геометрично відображають цілі числа, модулі яких дорівнюють відповідно 0 1, 2, 3, ..., $n, \ldots$, тобто числа 0, –1, 1, –2, 2, –3, 3, ..., $-n, n, \ldots$, відповідно. Множина цих точок є геометричним зображенням множини цілих чисел.

Множина цілих чисел має властивість зчисленності, бо кожному з цілих чисел 0, –1, 1, –2, 2, –3, 3, ..., $-n, n, \ldots$ можна поставити у взаємно-однозначну відповідність певне натуральне число: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ..., $2n, 2n+1, \ldots$ за такою схемою (графом):

$$\begin{array}{cccccccccc}
0, & -1, & 1, & -2, & 2, & -3, & 3, & \ldots, & -n, & n, \ \ldots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\
1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & \ldots, & 2n, & 2n+1, \ldots
\end{array}$$

Отже, множина цілих чисел має ту саму потужність, що і множина натурального ряду чисел, а отже вона *зчисленна* і крім цього вона так як і множина натуральних чисел – *нескінченна*.

Множина цілих чисел є *упорядкованою*, бо відносно будь-яких двох різних її елементів x і y встановлено, який з них слідує за іншим (або, навпаки, який передує іншому).

Для відношення „>” (або „<”) на множині $\mathbf{Z}$, задовольнятимуться умови: антирефлексивності $\forall x \in \mathbf{Z} : \left(\overline{x > x}\right) \wedge \left(\overline{x < x}\right)$, асиметричності $\forall x, y \in \mathbf{Z} : (x > y) \Rightarrow \left(\overline{y > x}\right)$, транзитивності $\forall x, y, z \in \mathbf{Z} : ((x > y) \wedge (y > z)) \Rightarrow (x > z)$ і зв’язності $\forall x, y \in \mathbf{Z} : (x \neq y) \Rightarrow (x > y) \vee (y > x)$ (аналогічно для „<”). Тобто, множина $\mathbf{Z}$ відношенням „>” (або „<”) лінійно (цілковито) впорядковується.

Для відношення „≥” (або „≤”) на множині $\mathbf{Z}$, задовольнятимуться умови: – рефлексивності $\forall x \in \mathbf{Z} : (x \geq x)$,

– антисиметричності $\forall x, y \in \mathbf{Z} : ((x \geq y) \wedge (x \neq y)) \Rightarrow \left(\overline{y \geq x}\right)$,

– транзитивності $\forall x, y, z \in \mathbf{Z} : ((x \geq y) \wedge (y \geq z)) \Rightarrow (x \geq z)$

і – зв’язності $\forall x, y \in \mathbf{Z} : (x \neq y) \Rightarrow (x \geq y) \vee (y \geq x)$ (аналогічно для „<”).

Тобто, множина **Z** відношенням „≥” (або „≤”) лінійно (цілковито) впорядковується.

Лінійно упорядкована деяким з відношень множина цілих чисел має властивість *дискретності*, бо між будь-якими двома її елементами лежить лише скінченне число її елементів. Наприклад, між цілими числами 5 і 7 лежить тільки одне ціле число 6; між цілими числами 2 і 3 не лежить ні одне ціле число; між цілими числами –5 і 7 лежить наступна кількість цілих чисел, яка визначається різницею $7-(-5)-1$ і $= 11$, а саме $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$; між цілими числами –9 і –7 лежить тільки одне ціле число –8.

Як наслідок з цієї властивості випливає таке твердження: якщо між будь-якими двома елементами множини **Z** не лежить інших її елементів, то ці елементи є *найближчими сусідами*. Відповідні точки числової осі цілих чисел які є найближчими сусідами будуть кінцями одного і того ж одиничного відрізка.

3. Дії над цілими числами

Отже, цілі додатні, від’ємні числа можна інтерпретувати (розглядати) як зміну чисельності при переході від однієї множини до іншої – від меншчисельної до більшчисельної, від більшчисельної до меншчисельної відповідно, або ж як майно, борг відповідно. Абсолютна величина числа в цьому випадку – величина зміни чисельності (на скільки чисельність змінилася), інакше – величина майна чи боргу відповідно з тим додатне воно чи від’ємне.

3.1. Додавання та віднімання цілих чисел. Закони додавання

Насамперед розглянемо приклад, який підведе нас до правильного розуміння наступних теоретичних положень.

Перед початком походу в гори туристи щоранку, для того щоб визначати на якій вони будуть висоті відносно ранкового початкового положення, навели свої датчики висоти на нульовий рівень.

В перший день. Піднявшись за першу половину дня на 30 метрів, а до кінця дня – ще на 10, за перший день туристи виявилися на висоті на 40 метрів (30+10=40) вище від ранкового початкового положення.

В другий день. Змінивши своє положення за першу половину дня на –12 метрів, а до кінця дня – ще на –5, за другий день туристи виявилися на висоті на –17 метрів (–12 + (–5) = –17) вище від ранкового початкового положення, тобто на 17 метрів нижче.

Отже за два дні туристи змінили висоту свого розташування на 23 метри (40+(–17) = 23) вище від вихідного початкового положення.

Аналізуючи даний приклад, сформулюємо відповідні правила:

1. Сума двох цілих додатних чисел – ціле додатне число, за абсолютною величиною рівне сумі абсолютних величин (модулів) двох доданків;
2. Сума двох цілих від'ємних чисел – ціле від'ємне число, за абсолютною величиною рівне сумі абсолютних величин (модулів) двох доданків;

3. Сума двох цілих чисел із різними знаками є ціле число, яке має той самий знак, що й доданок із більшою абсолютною величиною (модулем), а за абсолютною величиною така сума рівна різниці між доданком з більшою і доданком з меншою абсолютною величиною.

Підтвердженням даних правил є й такі приклади. Нехай температура за день двічі різко змінювалася. Нехай: а) спочатку на 5ºC, а потім на 7ºC, отже за день температура змінилася на 12ºC; б) спочатку на –5ºC, а потім на –7ºC, отже за день температура змінилася на –12ºC; в) спочатку на 5ºC, а потім на –7ºC, отже за день температура змінилася на –2ºC.

Суму цілих чисел також легко можна зобразити за допомогою числової вісі.

Нехай потрібно визначити суму чисел 3 і 5. Знаходимо на числовій вісі точку з координатою 3. Переміщуючись на 5 одиничних відрізків вправо, потрапляємо в точку з координатою 8. Отже, 3 + 5 = 8.

Нехай потрібно визначити суму чисел 8 і –5. Знаходимо на числовій вісі точку з координатою 8. Переміщуючись на 5 одиничних відрізків вліво, потрапляємо в точку з координатою 3. Отже, 8 + (–5) = 3.

Нехай потрібно визначити суму чисел –3 і –5. Знаходимо на числовій вісі точку з координатою –3. Переміщуючись на 5 одиничних відрізків вліво, потрапляємо в точку з координатою –8. Отже, –3 + (–5) = –8.

Отже, природно домовитися, щоб отримати точку відповідну числу, яке є значенням суми деякого цілого числа a з додатним (від’ємним) цілим числом, потрібно від точки з координатою a відкласти вправо (вліво) число одиничних відрізків рівне модулю другого доданка.

Якщо згадати, що ціле число можна розглядати як зміну чисельності при переході від однієї множини до іншої, то можна побудувати наступну теорію додавання цілих чисел. Спершу розглянемо будь-які два цілі числа a і b. З теорії множин нам відомо, що існують множини з як завгодно великим числом елементів. Нехай ми маємо множину, число елементів якої більше за суму абсолютних величин (модулів) чисел a і b. Позначимо її A. Тобто нехай: $n(A) > |a| + |b|$. Виберемо якусь іншу множину для якої число елементів на число a менше від числа елементів множини A. Позначимо її B. Тоді, $n(A) - n(B) = a$. Виберемо ще якусь іншу, третю множину для якої число елементів на число b менше від числа елементів множини B. Позначимо її C. Тоді, $n(B) - n(C) = b$.

Введемо означення. ***Сумою цілих чисел*** $a = n(A) - n(B)$ і $b = n(B) - n(C)$ називають ціле число c, яке є різницею двох чисел кількостей елементів множин A і C відповідно, тобто $c = n(A) - n(C)$. Записують: $a + b = c$. Числа a і b – доданки, операція знаходження суми – додавання.

Цілі числа a і b можуть бути обидва додатні, обидва від’ємні, а також якесь з них додатне а інше від’ємне, або котресь з них 0 а інше будь-яке, або ж обоє нулі. В залежності від цього можливі такі випадки теоретичного опису суми.

1. Якщо обидва цілі числа a і b додатні (тобто, a і b –

натуральні числа), то при переході від множини *A* до множини *B*, чисельність (кількість елементів) зростає і стає рівною $n(A)+a=n(B)$, а при переході від множини *B* до множини *C*, чисельність зростає і стає рівною $n(B)+b=n(C)$. Отже, при переході від множини *A* до множини *C*, чисельність зростає і стає рівною $\left(n(A)+a\right)+b=n(A)+a+b=n(A)+(a+b)=n(C)$. Отже, $\Delta_{A\to C}=a+b=c$, тобто сума двох цілих додатних чисел дорівнює третьому цілому додатному числу і визначається відповідними правилами знайомих нам з теорії цілих невід'ємних чисел підходів: кількісного (теоретико-множинного) або аксіомного (порядкового).

2. Якщо обидва цілі числа a і b від'ємні, то при переході від множини *A* до множини *B*, чисельність змінюється і стає рівною $n(A)-|a|=n(B)$, а при переході від множини *B* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $n(B)-|b|=n(C)$. Отже, при переході від множини *A* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $\left(n(A)-|a|\right)-|b|=n(A)-|a|-|b|=n(A)-\left(|a|+|b|\right)=n(C)$. Отже, $\Delta_{A\to C}=-\left(|a|+|b|\right)=c$, тобто сума двох цілих від'ємних чисел дорівнює третьому цілому від'ємному числу, абсолютна величина якого дорівнює сумі абсолютних величин доданків.

3. Якщо ціле число a від'ємне, а ціле число b додатне, то при переході від множини *A* до множини *B*, чисельність змінюється і стає рівною $n(A)-|a|=n(B)$, а при переході від множини *B* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $n(B)+|b|=n(C)$. Отже, при переході від множини *A* до множини *C*, чисельність

змінюється і стає рівною $\left(n(A)-|a|\right)+|b|=n(A)-|a|+|b|=n(C)$. Так, як, $-|a|+|b|=|b|-|a|$, якщо $|b|>|a|$, або $-|a|+|b|=-(|a|-|b|)$, якщо $|a|>|b|$, то $\Delta_{A\to C}=|b|-|a|$, якщо $|b|>|a|$, $\Delta_{A\to C}=-(|a|-|b|)$, якщо $|a|>|b|$, або $\Delta_{A\to C}=0$, якщо $|b|=|a|$.

Отже, якщо $a,b\in\mathbf{Z}$ і $a<0$, $b>0$, то:

$$a+b \begin{cases} |b|-|a|, \text{ якщо } |b|>|a| \\ 0, \text{ якщо } |b|=|a| \\ -(|a|-|b|), \text{ якщо } |a|>|b| \end{cases}$$

4. Якщо ціле число a додатне, а ціле число b від'ємне, то при переході від множини *A* до множини *B*, чисельність змінюється і стає рівною $n(A)+|a|=n(B)$, а при переході від множини *B* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $n(B)-|b|=n(C)$. Отже, при переході від множини *A* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $\left(n(A)+|a|\right)-|b|=n(A)+|a|-|b|=n(C)$. Отже, $\Delta_{A\to C}=|a|-|b|$, якщо $|a|>|b|$, $\Delta_{A\to C}=-(|b|-|a|)$, якщо $|b|>|a|$, або $\Delta_{A\to C}=0$, якщо $|a|=|b|$.

Отже, якщо $a,b\in\mathbf{Z}$ і $a>0$, $b<0$, то:

$$a+b \begin{cases} |a|-|b|, \text{ якщо } |a|>|b| \\ 0, \text{ якщо } |a|=|b| \\ -(|b|-|a|), \text{ якщо } |b|>|a| \end{cases}$$

Отже з третього і четвертого пунктів робимо висновки. Сума двох цілих чисел з різними знаками дорівнює: – цілому додатному числу, якщо модуль додатного числа більший за модуль від'ємного; – нулю, якщо модулі рівні; – цілому від'ємному числу, якщо модуль від'ємного числа більший за модуль додатного.

Тобто, сума двох цілих чисел з різними знаками є ціле число, яке має той самий знак, що й доданок з більшим модулем. Щоб знайти модуль цієї суми, потрібно від більшого модуля відняти менший.

5. Якщо $a \neq 0,\ b = 0$, то при переході від множини *A* до множини *B*, чисельність змінюється і стає рівною $n(A) + a = n(A) = n(B)$, а при переході від множини *B* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $n(B) + 0 = n(C)$. Отже, при переході від множини *A* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $\left(n(A) + a\right) + 0 = n(A) + a + 0 = n(A) + a = n(C)$. Отже, $\Delta_{A \to C} = a$, тобто $a + 0 = a$.

6. Якщо $a = 0,\ b \neq 0$, то при переході від множини *A* до множини *B*, чисельність змінюється і стає рівною $n(A) + 0 = n(A) = n(B)$, а при переході від множини *B* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $n(B) + b = n(C)$. Отже, при переході від множини *A* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $\left(n(A) + 0\right) + b = n(A) + 0 + b = n(A) + b = n(C)$. Отже, $\Delta_{A \to C} = b$, тобто $0 + b = b$.

І робимо висновок, якщо до цілого числа a додати 0, то отримаємо те саме ціле число a; якщо до 0 додати ціле число b, то отримаємо ціле число b. Тобто, якщо ми сумуємо два цілих числа і одне з них 0, то результат отримуємо рівний іншому.

7. Якщо $a = b = 0$, то при переході від множини *A* до множини *B*, чисельність змінюється і стає рівною $n(A) + 0 = n(A) = n(B)$,

а при переході від множини *B* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $n(B)+0=n(B)=n(C)$. Отже, при переході від множини *A* до множини *C*, чисельність змінюється і стає рівною $\big(n(A)+0\big)+0=n(A)+0+0=n(A)+0=n(C)$. Отже, $\Delta_{A\to C}=0$, тобто $0+0=0$.

Тобто, якщо ми сумуємо два цілих числа рівних 0, то результат отримуємо рівний 0.

Доведемо *теорему про існування і єдиність суми* будь-яких двох цілих чисел, тобто що $\forall a,b\in\mathbf{Z}:\exists!(a+b)$.

Доведення існування і єдиності суми безпосередньо слідує з означення суми двох цілих чисел, а також з існування і єдиності різниці двох чисел-кількостей елементів двох множин (існування і єдиності різниці між більшим з двох цілих невід’ємних чисел і меншим з них).

Розглянемо *властивості операції додавання* двох цілих чисел.

– $\forall a,b\in\mathbf{Z}: a+b=b+a$ – комутативна (переставна) властивість;

– $\forall a,b,c\in\mathbf{Z}:(a+b)+c=a+(b+c)$ – асоціативна (сполучна) властивість.

Розглянемо ***віднімання*** цілих чисел.

Введемо операцію ***віднімання*** цілих чисел як обернену до операції додавання.

Введемо означення. ***Різницею цілих чисел*** a і b називають таке ціле число $c=a-b$, що $c+b=a$.Число a – *зменшуване*, b – *від’ємник* і c – різниця; операція знаходження різниці – *віднімання*.

Тобто, відняти від одного цілого числа друге ціле число – це означає знайти таке третє ціле число, яке в сумі з другим дає перше.

В зв’язку з тим що будь-яке ціле число має протилежне собі ціле число, операцію віднімання від цілого числа a цілого числа b можна звести до операції додавання до цілого числа a цілого числа протилежного числу b, тобто цілого числа $-b$. Запишемо це символічно: $\forall a, b \in \mathbf{Z}: a-b=a+(-b)$.

При введенні цілих від'ємних чисел ми розглядали задачі результатом яких було знаходження значення різниці, якої на множині цілих невід'ємних чисел не існує, бо віднімання на множині цілих невід'ємних чисел існує не завжди.

Доведемо *теорему про існування і єдиність різниці* будь-яких двох цілих чисел, тобто що $\forall a, b \in \mathbf{Z}: \exists!(a-b)$.

Доведення існування і єдиності різниці безпосередньо слідує з можливості зведення різниці до суми ($a-b=a+(-b)$) і з існування і єдиності суми двох цілих чисел.

Отже, віднімання на множині цілих чисел завжди можливе.

3.2. Множення та ділення цілих чисел. Закони множення.

Підкреслимо, що подібну теорію можна побудувати, якщо розглядати ціле число як зміну чисельності при поетапному переході між декількома множинами (зміна чисельності при одному етапі повинна дорівнювати числу a, а етапів повинно бути таке число, яке рівне числу $|b|$; зрозуміло, що множин при цьому має бути число, яке рівне числу $|b|+1$ і вихідна множина A_1 повинна містити число елементів більше за число, яке рівне числу $|a||b|$, тобто $n(A_1)>|a||b|$.

Перш за все пригадаємо як ми вводили добуток цілих невід'ємних чисел. Так, ми дію знаходження суми рівних між собою доданків називали дією множення, а результат множення — добутком і вводили таке означення: суму $n,\ n>1$, доданків, кожний з яких є ціле невід'ємне число m, називають добутком m на натуральне число n і позначають mn. Оскільки доданків не може бути менше ніж два, то для множення на 1 і 0 ми вводили додаткові означення: $m \cdot 1 = m$ і $m \cdot 0 = 0$.

З від'ємними цілими числами не так все просто як з цілими невід'ємними. Ще в давнину через незрозумілість того як в результаті множення двох від'ємних чисел (боргів) можна отримати додатне число (майно) людьми довго не сприймалася теорія існування цілих від'ємних чисел. Якщо цілі додатні, від'ємні числа розглядати як майно, борг відповідно, а їх абсолютну величину – як величину майна чи боргу відповідно, то можливо побудувати таку наступну теорію до пояснення дій другого ступеня (множення і ділення) над цілими числами.

Розглянемо добуток двох цілих чисел a і b. Тут числа a і b – множники, операція знаходження добутку – множення.

При цьому вважатимемо:

по-перше – якщо $a > 0$, то $|a|$ – величина майна, якщо $a < 0$, то $|a|$ – величина боргу, а якщо $a = 0$, то немає нічого, ні майна ні боргу (ні доброго ні поганого, майно і борг – речі протилежні так як і, добро і зло, чи додатні і від'ємні числа, але не завжди в прямій відповідності, бо може бути майно нечистих грошей, чи майно злості – це все зло).

по-друге – якщо $b > 0$, то $|b|$ – це число наявних (майна) величин $|a|$ (майна чи боргу в відповідності до того від'ємне чи додатне число a), якщо $b < 0$, то $|b|$ – величина не наявних (заборгованих) величин $|a|$ (майна чи боргу в відповідності до того від'ємне чи додатне число a), а якщо $b = 0$, то немає жодної величини $|a|$.

Цілі числа a і b можуть бути обидва додатні, обидва від'ємні, а також якесь з них додатне а інше від'ємне, або котресь з них 0 а інше будь-яке, або ж обоє нулі. В залежності від цього можливі різні випадки теоретичного опису добутку цілих чисел згідно їх інтерпретації через майно і борг.

Отже: в результаті вивчення теми «**Цілі числа**» студент повинен

з н а т и: задачі, які привели до введення від'ємних чисел, геометричну інтерпретацію від'ємних чисел, визначення модуля числа, визначення протилежного числа; властивості множини цілих чисел: зчисленність, упорядкованість, дискретність; визначення дій над цілими числами, властивості дій над цілими числами;

у м і т и: знаходити модуль числа, знаходити протилежне число, виконувати дії над цілими числами: додавання, віднімання, множення і ділення.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент на практичному занятті в результаті вивчення теми

«Цілі числа»

1. Ірі 10 років, а її бабусі – 54 років. Через скільки років бабуся буде старшою від Ані в 5 разів?

2. Ані 12 років, а її бабусі – 52 років. Через скільки років бабуся буде старшою від Ані в 5 разів?

3. Один чоловік міркував: „ Я вже заборгував кумові стільки овечих шкірок, що щоб мати своїх 10 овечих шкірок і не мати боргу, мені потрібно виростити 15 овечок ”. Як же позначити числом наявні в чолові в даний час овечі шкірки?

4. Лежало на столі 5 яблук. На скільки збільшиться чисельність яблук, якщо: а) Іванко поставив 1 яблуко; б) Іванко з’їв 2 яблука?

5. Скласти такі текстові задачі, розв'язками яких є цілі від’ємні числа. Розв’язати їх.

6. Скласти такі рівняння, розв'язками яких є цілі від’ємні числа. Розв’язати їх.

7. Скласти такі системи двох рівнянь, розв'язками яких є цілі від’ємні числа. Розв’язати їх.