Тема

Десяткові дроби

1. Поняття десяткового дробу. Властивості десяткових дробів.
2. Алгоритми виконання арифметичних операцій над десятковими дробами.
3. Перетворення звичайних дробів у десяткові.
4. Нескінченні десяткові дроби.
5. Перетворення періодичних дробів у звичайні.
6. Відсотки, основні задачі на відсотки.

1. Поняття десяткового дробу. Властивості десяткових дробів

Алгоритми порівняння додатних раціональних чисел і операції на ними складніші, ніж над натуральними числами, що записані у довільній позиційній системі числення. Тому природно поширити позиційний принцип запису натуральних чисел на додатні раціональні числа, а саме, на окремі види дробів, що є їх зображеннями.

Дріб називається систематичним (системним), якщо його чисельник є натуральним числом, записаним у позиційній системі числення з основою g, а знаменник – натуральним степенем основи g. У практичній діяльності людини особливе місце посідає десяткова система, а тому із системних дробів найчастіше користуються десятковими дробами.

Дріб називається десятковим, якщо його чисельник є натуральним числом, записаним у десятковій системі числення, а знаменник – натуральним степенем 10. За означенням загальний вигляд десяткового дробу є таким:

$$a = \frac{c_m c_{m-1} \ldots c_1 c_0}{10^n} = \frac{c_m 10^m + c_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + c_1 10 + c_0}{10^n}.$$

Не обмежуючи загальності міркувань, приймемо, що $m > n$. Цього завжди можна досягти, приписавши у чисельнику зліва певну кількість нулів. Тоді $m = k + n$, де $k, n \in N$, а тому, змінивши позначення цифр чисельника, довільний десятковий дріб записується:

$$a = \frac{a_k a_{k-1} \ldots a_1 a_0 b_1 b_2 \ldots b_n}{10^n} =$$

$$= \frac{a_k 10^{k+n} + a_{k-1} 10^{k+n-1} + \ldots + a_1 10^{n+1} + a_0 10^n + b_1 10^{n-1} + b_2 10^{n-2} + \ldots + b_n}{10^n} =$$

$$= a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10^{n-1} + a_0 +$$

$$+ b_1 \frac{1}{10} + b_2 \frac{1}{10^2} + \ldots + b_{n-1} \frac{1}{10^{n-1}} + b_n \frac{1}{10^n}.$$

Дроби $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \frac{1}{10^3}, \ldots, \frac{1}{10^n} \ldots$ можна розглядати як дробові розрядні одиниці, між якими існує та ж залежність, що й між розрядними одиницями десяткової системи числення, а саме: кожна наступна розрядна одиниця системи числення у десять разів менша попередньої.

Введення нових розрядних одиниць має можливість поширити на десяткові дроби позиційний принцип запису натуральних чисел.

Як і десятковий запис натурального числа, сума

$$a = a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + a_1 10^1 + a_0 + b_1 \frac{1}{10} + b_2 \frac{1}{10^2} + \ldots + b_n \frac{1}{10^n}$$

однозначно визначається кортежем цифр чисельника даного десяткового дробу, і тому її, а, отже, й десятковий дріб, прийнято записувати $a = a_k a_{k-1} \ldots a_0, b_1 b_2 \ldots b_n$,тобто без запису знаменника. Часто цей запис і називається десятковим дробом. У ньому число $a_k a_{k-1} \ldots a_0$ називається цілою частиною десяткового дробу, а дріб $0, b_1 b_2 \ldots b_n$ – його дробовою частиною, причому цифри $b_1, b_2, \ldots, b_n$, – десятковими знаками, відповідно першим, другим, …, *n*-ним.

Якщо десятковий дріб правильний, то його ціла частина дорівнює нулю. Ціла частина від дробової відділяється комою. Для зручності часто цілу частину десяткового дробу позначають одним знаком, наприклад, b_0. Тоді десятковий дріб запишеться $\overline{b_0, b_1 b_2 \ldots b_n}$.

Для того, щоб записати десятковий дріб, роблять так: записують чисельник даного дробі і справа наліво відраховують стільки цифр, який показник степеня його знаменника (скільки нулів має знаменник дробу); після цього відділяють відраховані цифри комою; якщо цифр чисельника для підрахунку недостатньо, то зліва приписують нулі. Читається десятковий дріб за таким правилом: спочатку називається число, зображене цифрами до коми, потім вимовляється слово «цілих», далі називається число, записане цифрами після коми, наприкінці називається знаменник дробу. Наприклад: $\frac{354}{100} = 3{,}54$ (три цілих п’ятдесят чотири сотих); $\frac{36}{100}=0{,}36$ (нуль цілих тридцять шість сотих); $\frac{207}{100000}=0{,}00207$ (нуль цілих двісті сім стотисячних).

Навпаки , щоб записати десятковий дріб як звичайний, потрібно відкинути кому і одержане число записати чисельником дробу, знаменником же записати число 10^n, де n – кількість цифр після коми, тобто кількість десяткових знаків.

Наприклад: $0{,}0018=\frac{18}{10^4}=\frac{18}{10000}$; $\frac{215}{10^2}=\frac{215}{100}$.

Натуральні числа також можна зображати десятковими дробами, в яких усі десяткові знаки дорівнюють нулю.

На основі позиційного принципу запису десяткових дробів і властивостей звичайних дробів неважко встановити такі властивості десяткових дробів.

1. Дописування нулів справа до десяткового дробу не змінює його величини.

2. З двох десяткових дробів більший той, у якого більша його ціла частина, або ж, якщо цілі частини рівні, - той, у якого раніше зустрінеться більший відповідний десятковий знак.

3. Щоб звести десяткові дроби до спільного знаменника, треба за допомогою дописування нулів справа зрівняти у них кількість десяткових знаків.

4. Щоб помножити (поділити) десятковий дріб на 10^k, де $k\in N$, треба перенести у ньому кому вправо (вліво) на k цифр.

Наприклад: з двох десяткових дробів $23{,}546$і $23{,}583$ більшим буде другий дріб, бо $23=23$, $5=5$, а$8>4$, отже, $23{,}583>23{,}546$.

2. Алгоритми виконання арифметичних операцій над десятковими дробами

Позиційний принцип запису десяткових дробів полегшує виконання арифметичних операцій над ними, причому сума, різниця (якщо вона існує) і добуток десяткових дробів є також десятковим дробом. Але частка десяткових дробів не завжди буде десятковим дробом.

Розглянемо два довільні десяткові дроби, причому, не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що у них однакова кількість десяткових знаків: $a = a_k a_{k-1} \ldots a_0, b_1 b_2 \ldots b_n$ і $b = c_m c_{m-1} \ldots c_0, d_1 d_2 \ldots d_n$.

Якщо записати десяткові дроби у вигляді звичайних, то матимемо:

$$a + b = \frac{a_k a_{k-1} \ldots a_0 b_1 b_2 \ldots b_n}{10^n} + \frac{c_m c_{m-1} \ldots c_0 d_1 d_2 \ldots d_n}{10^n} =$$
$$= \frac{a_k a_{k-1} \ldots a_0 b_1 b_2 \ldots b_n + c_m c_{m-1} \ldots c_0 d_1 d_2 \ldots d_n}{10^n}.$$

Одержаний у результаті додавання дріб матиме чисельником натуральне число, записане у десятковій системі числення, а знаменник дорівнює натуральному степеню числа 10, тобто є десятковим дробом, що має стільки ж десяткових знаків, що й дроби-доданки. На практиці зрівнювання десяткових знаків зайве, оскільки приписування нулів не відіграє значної ролі при додаванні. Тому потрібно додаючи два або більше десяткових дробів підписати їх один під одним так, щоб цілі частини і відповідні десяткові знаки знаходились один під одним. Потім слід виконати додавання написаних чисел як натуральних і в одержаній сумі відокремити справа стільки десяткових знаків, скільки їх має доданок з найбільшою кількістю десяткових знаків. Наприклад:

$$2{,}347+0{,}4235+15{,}624=18{,}3945$$

$$\begin{array}{r} 2{,}347 \\ +\ 0{,}4235 \\ 15{,}624 \\ \hline 18{,}3945 \end{array}$$

Віднімаючи десяткові дроби, якщо різниця існує, можна робити так, як і при відніманні натуральних чисел, при цьому немає необхідності урівнювати кількість десяткових знаків у дробів-компонент.

Щоб знайти різницю двох десяткових дробів, підписують їх один під одним так, щоб цілі частини і відповідні десяткові знаки знаходились один під одним. Потім потрібно виконати віднімання записаних чисел як натуральних і в одержаній різниці відділити справа стільки десяткових знаків, скільки їх у дробі-компоненті з найбільшою кількістю десяткових знаків. Наприклад:

$$5{,}243-2{,}5678=2{,}6752$$

$$\begin{array}{r} 5{,}243 \\ -\ 2{,}5678 \\ \hline 2{,}6752 \end{array}$$

Знайдемо тепер добуток десяткових дробів

$a=\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0,b_1 b_2\ldots b_n}$ і $b=\overline{c_s c_{s-1}\ldots c_0,d_1 d_2\ldots d_n}$

$$a\cdot b=\frac{\overline{a_k a_{k-1}\ldots a_0 b_1 b_2\ldots b_n}}{10^n}\cdot\frac{\overline{c_s c_{s-1}\ldots c_0 d_1 d_2\ldots d_n}}{10^n}=$$

$$= \frac{\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0 b_1 b_2 \ldots b_n} \cdot \overline{c_s c_{s-1} \ldots c_0 d_1 d_2 \ldots d_n}}{10^{n+n}}$$

У результаті отримали десятковий дріб з n + n десятковими знаками.

Щоб знайти добуток двох десяткових дробів, потрібно перемножити їх як натуральні числа, не звертаючи увагу на коми, а потім у добутку відділити комою справа стільки десяткових знаків, скільки їх є в обох множниках разом. Наприклад:

$$3{,}524 \cdot 0{,}23 = 0{,}81052, \quad \begin{array}{r} \times\, 3{,}524 \\ 0{,}23 \\ \hline 10572 \\ +\,7048 \\ \hline 0{,}81052 \end{array}$$

Знайдемо частку двох десяткових дробів:

$$a = \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0, b_1 b_2 \ldots b_n} \text{ і } b = \overline{c_s c_{s-1} \ldots c_0, d_1 d_2 \ldots d_n}$$

$$a : b = \frac{\overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0 b_1 b_2 \ldots b_n}}{10^n} : \frac{\overline{c_s c_{s-1} \ldots c_0 d_1 d_2 \ldots d_n}}{10^n}$$

$$= \overline{a_k a_{k-1} \ldots a_0 b_1 b_2 \ldots b_n} \ : \ \overline{c_s c_{s-1} \ldots c_0 d_1 d_2 \ldots d_n}$$

Цим самим частка двох десяткових дробів виражається за допомогою звичайного дробу. Цей факт часто трактується так: ділення десяткових дробів зводиться до ділення натуральних чисел.

На практиці ділення десяткових дробів виконується за таким правилом: ділення двох десяткових дробів зводиться до ділення десяткового дробу на натуральне число шляхом множення діленого і дільника на знаменник дільника, тобто на 10^n, $n-$ кількість десяткових знаків дільника.

Наприклад: $0{,}3424 : 0{,}08 = 4{,}28$.

Помножимо ділене і дільник на $10^2 = 100$ і поділимо одержані числа: $0{,}3424 : 0{,}08 = 34{,}24 : 8 = 4{,}28$.

3. Перетворення звичайних дробів у десяткові

Ділення десяткових дробів потребує відповіді на питання про те, чи завжди частка від ділення двох десяткових дробів буде десятковим дробом, інакше кажучи, чи завжди у класі рівних дробів знайдеться десятковий дріб.

Знаходження десяткового дробу, що дорівнює заданому звичайному дробу, називається перетворенням звичайного дробу в десятковий.

Має місце теорема.

Теорема 1. Нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ перетворюється у десятковий дріб тоді і тільки тоді, коли канонічний розклад знаменника дробу містить лише прості множники 2 або 5.

Необхідність. Нехай нескоротний дріб $\frac{m}{n}$ перетворюється у десятковий, тобто $\frac{m}{n}=\frac{c}{10^{\alpha}}$. Виходячи з рівності дробів,$10^{a}m=n\cdot c$. Звідси, за означенням подільності, $10^{a}m \vdots n$. З того, що m і n взаємно прості, випливає, що $10^{a} \vdots n$. Тому простими дільниками числа n можуть бути лише 2 або 5.

Достатність. Нехай канонічний розклад знаменника дробу має вигляд $n=2^{a}5^{\beta}$.Тоді за основною властивістю дробів

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}}=\frac{2^{\beta}\cdot 5^{\alpha}m}{2^{a+\beta}\cdot 5^{a+\beta}}=\frac{2^{\beta}\cdot 5^{\alpha}m}{(2\cdot 5)^{a+\beta}}=\frac{2^{\beta}\cdot 5^{\alpha}m}{10^{\alpha+\beta}}.$$

Отже, $\frac{m}{n}=\frac{2^{\beta}\cdot 5^{a}}{10^{a+\beta}}$,тобто даний звичайний дріб перетворюється у десятковий.

Доведення достатності теореми може бути покладене в основу методу перетворення звичайного дробу в десятковий. Наприклад: $\frac{3}{20}=\frac{3}{2^{2}\cdot 5}=\frac{3\cdot 5}{2^{2}\cdot 5^{2}}=\frac{15}{100}=0{,}15$.

Перетворення звичайного дробу в десятковий можна здійснити і по іншому. Нехай дріб $\frac{m}{n}$ перетворюється у десятковий, тобто $\frac{m}{n}=\frac{c}{10^{a}}$.Тоді за основною властивістю дробів $10^{a}\cdot m=c\cdot n$. Отже, число c є часткою від ділення $10^{a}\cdot m$ на n. Таким чином, для перетворення дробу $\frac{m}{n}$ у десятковий слід до числа m дописати a нулів справа, одержане число поділити на n і у частці відокремити комою справа a десяткових знаків. На практиці виконують ділення чисельника на знаменник, дописуючи до чисельника нулі по одному, доки ділення не завершиться. Наприклад, дріб $\frac{7}{40}$ перетвориться у десятковий, бо він нескоротний і $40 = 2^3 \cdot 5$.

Маємо:

```
   7  | 40
      |------
      |0,175
_ 70
  40
_300
 280
  _200
   200
     0
```

$$7=40\cdot 0+7$$
$$70=40\cdot 1+30$$
$$300=40\cdot 7+20$$
$$200=40\cdot 5+0$$

Отже, $\frac{7}{40} = 0{,}175$.

Розглянутий метод перетворення звичайних дробів у десяткові називається *методом ділення.*

4. Нескінченні десяткові дроби

Розглянемо більш детально перетворення звичайного дробу в десятковий методом ділення. При цьому будемо вважати, що використовуються тільки правильні дроби. Справді, якщо дріб $\frac{s}{n}$ неправильний, то, поділивши s на n з остачею, матимемо:

$s = n \cdot q + m$, 0<m< n.

Тоді $\frac{s}{n} = q\frac{m}{n}$, де $\frac{m}{n}$ – правильний дріб.

Розіб'ємо метод ділення на кроки:

1) Помножимо 10 на m і поділимо 10m на n з остачею:

$$10m = n \cdot q_1 + r_1, r_1 < n.$$

2) Помножимо 10 на r_1 і поділимо 10r_1 на n з остачею:

$$10r_1 = nq_2 + r_2, r_2 \langle n.$$

3) Помножимо 10 на r_2 і поділимо 10r_2 на n з остачею:

$$10r_2 = n \cdot q_3 + r_3, r_3 \langle n.$$

В результаті одержимо систему рівностей:

$$10m = n \cdot q_1 + r,$$

$$10r_1 = n \cdot q_2 + r_2,$$

$$10r_2 = n \cdot q_3 + r_3,$$

....

$$10r_{k-1} = n \cdot q_k + r_k,$$

$$10r_k = n \cdot q_{k+1} + r_{k+1}.$$

У системі рівностей (1) всі числа $r_1, r_2, \ldots r_{k+1}$ менші за n, а тому усі числа $q_1, q_2, \ldots, q_{k+1}$ є одноцифровими числами, тобто є цифрами десяткової системи числення.

З рівностей (1) послідовно дістанемо, що при довільному натуральному числі k

$$10^k m = 10^{k-1}(10m) = 10^{k-1}(nq_1 + r_1) = n\cdot(10^{k-1}q_1) + 10^{k-1}r_1 =$$
$$= n(10^{k-1}q_1) + 10^{k-2}(10r_1) = n(10^{k-1}q_1) + 10^{k-2}(nq_2 + r_2) =$$
$$= n(10^{k-1}q_1 + 10^{k-2}q_2) + 10^{k-2}r_2 = ... = n(10^{k-1}q_1 + 10^{k-2}q_2 +$$
$$+ ... + 10q_{k-1} + q_k) + r_k.$$

Отже, остаточно одержуємо

$$10^k m = n(10^{k-1}q_1 + 10^{k-2}q_2 + ... + 10q_{k-1} + q_k) + q_k,$$

тобто $10^k m = nq_1q_2...q_{k-1}q_k + r_k$.

Звідси матимемо рівність

$$\frac{m}{n} = \overline{0,q_1q_2...q_{k-1}q_k + \frac{r_k}{10^k n}} \qquad (2)$$

Якщо $r_k \rangle 0$, то, враховуючи, що $r_k \langle n,$ дістанемо $0 \langle \frac{r_k}{n} \langle 1.$

Тоді з рівності (2) одержуємо

$$\overline{0,q_1q_2,...q_{k-1}q_k \langle \frac{m}{n} \langle 0,q_1q_2...q_{k-1}q_k + \frac{1}{10}.} \qquad (3)$$

Очевидно, що коли $\frac{m}{n}$ є неправильним дробом, то у (3) додається ще ціла частина q_0. З цього випливає така теорема.

Теорема 2. Якщо до звичайного дробу $\frac{m}{n}$ застосувати метод ділення для перетворення його у звичайний дріб і на *k*-ому кроці остача буде відмінною від нуля, то

$$\overline{\phantom{q_0,q_1q_2,\ldots q_{k-1}q_k\langle\frac{m}{n}\langle q_0,q_1q_2\ldots q_{k-1}q_k+\frac{1}{10^k}}}$$
$$q_0,q_1q_2,\ldots q_{k-1}q_k\langle\frac{m}{n}\langle q_0,q_1q_2\ldots q_{k-1}q_k+\frac{1}{10^k}.$$

Якщо при застосуванні методу ділення на певному кроці виявиться, що $r_k = 0,$ тоді і решта остач будуть рівні 0, а тому дріб перетворюється у десятковий дріб. Методом ділення можна користуватись у разі довільного звичайного дробу. Розглянемо два приклади застосування методу ділення до звичайних дробів, які не перетворюються у десяткові дроби. Наприклад, для дробів $\frac{9}{37}$ і $\frac{13}{22}$ матимемо:

$$\begin{array}{r|l} 9 & 37 \\ \cline{2-2} -90 & 0{,}243243\ldots \\ \underline{74} & \\ -160 & \\ \underline{148} & \\ -120 & \\ \underline{111} & \\ 9 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 22 \\ \cline{2-2} -130 & 0{,}59090909\ldots \\ \underline{110} & \\ -200 & \\ \underline{198} & \\ -200 & \\ \underline{198} & \\ 200 & \\ \ldots\ldots & \end{array}$$

У цих прикладах одержуємо нескінченні десяткові дроби. Якщо ділення припинити на *k*-ому кроці, то отримаємо десятковий дріб, який є наближенням з недостачею даного дробу з точністю $\frac{1}{10^k}$, а тому можемо припустити, що $\frac{9}{37} = 0{,}243243243\ldots$ і $\frac{13}{22} = 0{,}5909090\ldots$

Розгляд цих прикладів показує, що через скінченну кількість кроків одержуємо остачу, яка дорівнює або чисельнику дробу (9), або одній з попередніх остач (20), а тому на основі теореми про єдиність частки і остачі при діленні з остачею нескінченний десятковий дріб утворюється, починаючи з певного десяткового знаку, кортежем цифр, що повторюється. У першому прикладі це кортеж 243, а у другому – 90.

Нескінченний десятковий дріб називається *періодичним,* якщо він утворюється повторенням кортежу цифр, починаючи з певного десяткового знаку.

Якщо повторюється кортеж цифр довжиною k, то повторюватимуться і кортежі цифр з довжиною $2k$ $3k$ $4k$,....

Число, десятковий запис якого є кортежем найменшої довжини, що за допомогою нього утворюється періодичний дріб, називається *періодом*, а довжина кортежу-*довжиною періоду* періодичного дробу.

Періодичний дріб називається:

1) ***чистим***, якщо період починається зразу після коми;

2) ***мішаним***, якщо між комою і періодом є десяткові знаки.

Десяткові знаки між комою і періодом утворюють до періодичну частину.

За символічного запису періодичних дробів замість десяткових знаків, що повторюються, вказується лише період, який береться у дужки. Так, періодичний дріб 0,243243243... запишеться 0,(243) (читається „нуль цілих двісті сорок три у періоді”), а дріб 0,590909090... є мішаним періодичним дробом і запишеться 0,5(90) (читається „нуль цілих п’ять десятих до періоду і дев’яносто у періоді”).

Теорема 3. Кожний нескоротний звичайний дріб перетворюється у періодичний дріб, якщо канонічний розклад знаменника містить хоча б один простий множник, відмінний від 2 і 5.

Нехай $\frac{m}{n}$ – довільний нескоротний звичайний дріб, канонічний розклад знаменника якого містить хоча б один простий множник, відмінний від двох і п’яти. Можна вважати, що дріб $\frac{m}{n}$ правильний, тобто $m\langle n$. Якщо це не так, то замість дробу $\frac{m}{n}$ слід розглядати дріб $\frac{r}{n}$, де $\frac{m}{n} = q\frac{r}{n}$.Як відомо, процес ділення m на n буде нескінченним. Запишемо його у вигляді нескінченної системи рівностей:

$$
\begin{aligned}
&10m = n \cdot q_1 + r,\\
&10r_1 = n \cdot q_2 + r_2,\\
&10r_2 = n \cdot q_3 + r_3,\\
&\qquad ....\\
&10r_{k-1} = n \cdot q_k + r_k,\\
&10r_k = n \cdot q_{k+1} + r_{k+1}.\\
&\qquad ....
\end{aligned}
$$

де $0\langle r_1\langle n$, $q_1\langle 10$, $i = 1,2,...,k,...$.

Єдиність частки і остачі при діленні з остачею для фіксованих діленого і дільника приводить до того, що при $r_i = r_k$ маємо

$q_{i+1} = q_{k+1}$ і $r_{i+1} = r_{k+1}$. Це, в свою чергу, дає рівності $q_{i+2} = q_{k+2}, r_{i+2} = r_{k+2}$ і т.д. Таким чином, якщо у системі рівностей (1) будь-які дві остачі збігаються, то десяткові знаки мають повторюватися, а тому нескінченний десятковий дріб стає періодичним. У рівностях (1) остачі мають повторюватися, бо нерівність $0\langle r\langle n$ задовольняється тільки (n-1) натуральними числами 1,2,3,..., n-1. Оскільки процес отримання остач нескінченний, тому не більше як через (n-1) кроків остача має повторитися. Отже, звичайний дріб $\frac{m}{n}$ перетворюється у періодичний.

Зауваження. Виберемо у системі рівностей (1) номер i та k найменшими й такими, що $r_i = r_k$, тобто r_i- найперша остача, що повторюється, а r_k- найперша остача після r_i при якій $r_i = r_k$. Тоді із системи рівностей (1) випливає, що цифри $q_1, q_2, ..., q_n$ утворюють до періодичну частину, а цифри $q_{i+1}, q_{i+2}, q_{i+3}, ..., q_k$- період, тобто кількість цифр у періоді дорівнює k-i.

5. Перетворення періодичних дробів у звичайні

Теорема 3 дає відповідь лише на питання про те, які нескоротні звичайні дроби перетворюються у періодичні. Вигляд же самого періодичного дробу та довжина його періоду залишаються нез'ясованими. Теореми, наведені нижче, встановлюють структуру звичайного нескоротного дробу залежно від його знаменника.

Оскільки остача при кожному елементарному діленню менша за дільник, який є скінченим числом, то продовжуючи ділення на якомусь кроці ми отримаємо знову ту саму остачу, тобто ту саму цифру частки, і всі інші цифри частки теж будуть такими, які вже в частці є і в тій самій послідовності.

Розгляд цього показує, що через скінчену кількість кроків ділення одержуємо остачу, яка або дорівнює чисельнику або одній із попередніх остач, а тому на основі теореми про єдиність частки і остачі при діленні з остачею нескінчений десятковий дріб утворюється починаючи з певного десяткового знаку кортежем цифри, що повторюється.

Нескінчений десятковий дріб називається ***періодичним***, якщо він утворюється повторенням кортежу цифр, поч.. з певного десяткового знаку (можливо відразу після коми).

Число, десятковий запис якого є кортежем найменшої довжини, що за допомогою нього утворився періодичний дріб, називається *періодом*, а довжина кортежу – *довжиною періоду*.

Періодичний дріб називається:

- чистим , якщо період починається відразу після коми;
- мішаним , якщо між комою і періодом є хоча б один десятковий знак, тобто якщо є доперіодична частка.

Для спрощення запису періодичних десяткових дробів період беруть у дужки.

Розглянемо як слід перетворювати періодичні дроби у звичайні. Для цього слід отримати два різних чистих періодичних дробів з однаковими періодами. При цьому не втратити залежність з тим дробом, який слід перетворити. Наприклад маємо дріб:

2,(36) = x;

100 x = 236,(36);

99 x = 236,(36) – 2,(36);

99 x = 234;

$x = 234/99 = 2\frac{36}{99} = 2\frac{4}{11}$.

Розглянемо як перетворювати мішаний періодичний дріб у звичайний. Наприклад: 0,3(2),

x = 0,3(2)

10 x = 3,(2)

100 x = 32,(2)

90 x = 29

x = 129/90.

6. Відсотки, основні задачі на відсотки

Є три задачі на відсотки:

1) Знаходження величини, якщо задано, що вона складає n % від величини a.

Оскільки 1 % це є одна сота частина заданої величини від якої береться, у даному випадку величина а, то щоб знайти 1% потрібно задану величину поділити на 100. Тобто a/100 – величина, яка припадає на 1%, а щоб знайти n % потрібно величину, що припадає на 1 % помножити на n. Тобто $(а /100)\times n$ – це є n % величини a.

Наприклад:

Ціна товару знижена на 15%. Яка стала ціна телевізора, якщо до цього він коштував 1500 грн.

(1500 : 100) × 15 = 225 (грн.)

1500 – 225 = 1275 (грн.)

2) Знаходження певної величини, якщо відомо, що n % цієї величини дорівнює b. По-перше, знаходимо, яка величина припадає на 1%. По-друге, знаходимо шукану величину помноживши величину, яка припадає на 1% на 100%. $b/n \times 100$ – шукана величина.

Наприклад: При виготовленні деталей масою 3 кг 15% металу йде на стружку. Скільки виготовлять всього деталей, якщо маса стружки 225 кг.

225/15 х 100 = 1500 (кг)

1500 – 225 = 1275 (кг) – маса всіх деталей.

1275 / 3 = 425 (деталей)

Відповідь: 425 деталей виготовили всього.

3) Знаходження відсоткового відношення певних заданих величин.

Нехай відомо 2 величини a і b і стоїть задача знайти скільки відсотків величини a складає величина b.

Оскільки величина а у даній задачі приймається за 100%, то знайдемо величину , яка припадає на 1%.

a / 100 – величина, яка припадає на 1%.

Щоб знайти скільки % складає величина b від величини a потрібно знайти скільки разів величина, яка припадає на 1% міститься у величині b, тобто потрібно величину b поділити на величину, яка припадає на 1%.

b : (a / 100) – число %, які складає величина b від величини a.

Наприклад: Скільки % складає маса висушеного зерна від маси свіжого, якщо всього зібрали 1 т зерна, а після висушування його стало 980 кг.

1000 6 100 = 10 (кг) – маса зерна, що припадає на 1%.

980 : 10 = 98 (%) – маса висушеного зерна відносно до щойно зібраного.

Відповідь: 98% маса висушеного відносно свіжого.

Приклад: Весною маса бичка складала 300 кг, а восени 600 кг. На скільки відсотків збільшилася маса бичка?

300 : 100 = 3 (кг) – припадає на 1%

600 : 3 = 200 (%) – складає маса бичка восени відносно ваги весняної

200 – 100 = 100 (%)

Відповідь: на 100% збільшилася маса бичка.

2 спосіб розв'язування:

600 : 300 = 2 (рази) – в скільки разів збільшилася маса бичка

100 × 2 = 200 (%) – складає маса бичка восени відносно маси весняної.

200 – 100 = 100(%)

Відповідь: на 100 % збільшилася маса бичка.

Отже: в результаті вивчення теми «**Десяткові дроби**» студент повинен

з н а т и: поняття десяткового дробу та його властивості; поняття правильного і неправильного десяткового дробу; поняття про нескінченні десяткові дроби; правила виконання дій над десятковими дробами та їх закони; алгоритм перетворення звичайних дробів у десяткові; алгоритм перетворення періодичних дробів у звичайні; поняття про відсотки та основні задачі на відсотки;

у м і т и: порівнювати десяткові дроби за величиною, виділяти цілу частину в десяткових дробах; виконувати дії над десятковими дробами: додавання, віднімання, множення і ділення; перетворювати звичайні дроби у десяткові та періодичні десяткові дроби у звичайні; розв'язувати основні задачі на відсотки.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент на практичному занятті в результаті вивчення теми

«**Десяткові дроби**»

1. Перетворити звичайні дроби $\frac{1}{3}, \frac{6}{7}, \frac{14}{75}, \frac{16}{27}, \frac{114}{23}, \frac{1605}{217}$ у десяткові.

2. Виконати дії: а) $\dfrac{114{,}8\cdot\left(84{,}6-75\dfrac{1}{10}\right)}{50\dfrac{10}{11}\cdot 61{,}6-29{,}16\cdot 100}$;

б) $\dfrac{50\dfrac{10}{11}-61{,}6\cdot\dfrac{2}{3}+29{,}16\cdot 10}{0{,}8\cdot\left(84{,}26-75\dfrac{3}{14}\right)}$.

3. Перетворити нескінченний періодичний десятковий дріб у звичайний: а) 2,0(17); б) 3,14(6); в) 125,174(623).

4. Знайти 41 % від числа 458.

5. Відомо, що 37 % деякого числа *A* складає 16909. Знайти число *A*.

6. Скільки відсотків числа 1575 складає число 75?

7. Знайти 141 % від числа 321.

8. Відомо, що 0,37 % деякого числа *A* складає число 9. Знайти число *A*.

9. Скільки відсотків числа 700 складає число 12300?