Тема

Дійсні числа

1. Необхідність розширення множини додатних раціональних чисел.
2. Додатні ірраціональні числа. Додатні дійсні числа.
3. Відношення порядку на множині додатних дійсних чисел.
4. Додавання й віднімання додатних дійсних чисел.
5. Множення й ділення додатних дійсних чисел.

1. Необхідність розширення множини додатних раціональних чисел

Як і при введенні додатних раціональних чисел, розглянемо питання вимірювання довжини відрізка. Існування відрізка a, несумірного з даним одиничним відрізком e, випливає з такої теореми.

Теорема. Діагональ квадрата несумірна з його стороною.

Для доведення цієї теореми доведемо таку лему.

Лема. Не існує такого раціонального числа, квадрат якого дорівнює двом.

Доведення. Припустимо супротивне. Нехай існує раціональне число, квадрат якого дорівнює двом. Якщо нескоротний дріб $\frac{p}{n}$

зображує це число, то $\left(\frac{p}{n}\right)^2 = 2$. Тоді $\frac{p^2}{n^2} = 2 \Leftrightarrow p^2 = 2n^2$, тобто p^2 є парним числом а тому й число p – парне. Отже, $p = 2m$, $m \in N$. тому $p^2 = 4m^2$. Тоді $p^2 = 4m^2$ і $p^2 = 2n^2$. Звідси $n^2 = 2m^2$, а отже, n^2 є парним числом а тому й число n – парне. Таким чином, p – парне а також і n – парне, що суперечить тому, що $\frac{p}{n}$ нескоротний дріб. Зайшли у суперечність. Зроблене припущення неправильне.

Лему доведено.

Доведення теореми. Застосуємо метод від супротивного. Нехай діагональ квадрата сумірна з його стороною. Беручи сторону квадрата за одиничний відрізок, маємо, що діагональ квадрата виражається деяким раціональним числом, яке зображується нескоротним дробом $\frac{p}{n}$, і що $\left(\frac{p}{n}\right)^2 = 2$ (за теоремою Піфагора). Остання рівність суперечить лемі. Отже, припущення неправильне. *Теорему доведено*.

Взагалі відрізків, несумірних з даним відрізком, існує безліч.

Нехай дано одиничний відрізок e і відрізок a, несумірний з відрізком e. Тоді результат вимірювання довжини відрізка при заданому одиничному відрізку e не можна виразити ніяким раціональним числом.

Тому виникає необхідність розширити множину Q_+ додатних раціональних чисел, доповнивши її так званими *додатними ірраціональними числами*.

2. Додатні ірраціональні числа. Додатні дійсні числа

Нескінченний десятковий дріб, який не є періодичним, називають нескінченним неперіодичним десятковим дробом.

Наприклад, 0,10100100010000... і 5,252255222555 ...– нескінченні неперіодичні десяткові дроби.

Нехай дано одиничний відрізок e і відрізок a, несумірний з відрізком e. Можна доказати, що результат вимірювання довжини відрізка a можна виразити тільки нескінченним неперіодичним десятковим дробом. Тобто, кожному відрізку, несумірному з одиничним відрізком, можна поставити у відповідність нескінченний неперіодичний десятковий дріб і навпаки, для кожного нескінченного неперіодичного десяткового дробу існує відрізок, довжина якого виражається цим дробом. (Це твердження доводиться в геометрії).

Нескінченний неперіодичний десятковий дріб називають ***ірраціональним*** числом.

Згідно з останнім твердженням, нескінченні неперіодичні десяткові дроби зображують довжини відрізків, несумірних з одиничним відрізком. Оскільки довжина відрізка є число додатне для будь-якого відрізка, то означене вище ірраціональне число називається додатним ірраціональним числом. Множину додатних ірраціональних чисел позначають I_+.

Нескінченність множини I_+ очевидна.

Додатні ірраціональні числа можна дістати також при вимірюванні площ, об'ємів, мас тощо. Із шкільного курсу математики відомі ірраціональні числа π і e.

Означення. Об'єднання множин Q_+ і I_+ називають множиною додатних дійсних чисел і позначають R_+. Таким чином, $R_+ = Q_+ \cup I_+$, причому множини Q_+ і I_+ не перетинаються.

Оскільки множини Q_+ і I_+ – нескінченні, то множина R_+ також нескінченна.

Тепер, використовуючи викладені вище результати і означення, можна стверджувати, що множину R_+ додатних дійсних чисел можна розглядати як множину нескінченних десяткових дробів, відмінних від 0,00 ... 0... і тих, що є періодичними з періодом 9.

Справедливість цього твердження можна довести і самостійно, що і пропонуємо вам зробити.

3. Відношення порядку на множині додатних дійсних чисел

Означення. Нехай задано два додатні дійсні числа α і β:

$\alpha = a_0,\overline{a_1 a_2 ... a_k ...}$ і $\beta = b_0,\overline{b_1 b_2 ... b_k ...}$.

Говорять, що число α дорівнює числу β, і пишуть $\alpha = \beta$, якщо $a_j = b_j$ для всіх $j \in N_0$.

Говорять, що число α менше від числа β, або число β більше за число α, і записують відповідно $\alpha < \beta$, або $\beta > \alpha$, якщо $a_0 < b_0$ або знайдеться таке натуральне число k, що $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_{k-1} = b_{k-1}$ але $a_k < b_k$.

Це означення є перенесенням на додатні дійсні числа відповідного означення для додатних раціональних чисел.

Приклад. Порівняти два додатні дійсні числа α = 12,348447... і β = 12,348502...

Розв'язання. У цих числах однакові цілі частини, однакові й перші три десяткові знаки. Четвертий десятковий знак числа α менший від четвертого десяткового знака числа β, бо 4 < 5. Тому $\alpha < \beta$ або $\beta > \alpha$.

Можна показати, що система (R_+, <) лінійно впорядкована множина, у множині (R_+, <) немає ні найменшого, ні найбільшого числа і між будь-якими двома різними додатними дійсними числами міститься безліч додатних раціональних чисел.

Довести ці твердження пропонуємо самостійно.

Відношення «менше» на множині R_+ дає змогу ввести так звані десяткові наближення додатних дійсних чисел відомі нам ще із середньої школи.

Розглянемо без доведення одну з найважливіших властивостей множини R_+, яку не має множина Q_+. Ця властивість називається властивістю неперервності.

Якщо X і Y – непорожні підмножини R_+ такі, що для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$ виконується нерівність $x \le y$, то існує таке $c \in R_+$, що $x \le c \le y$ для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$. При цьому говорять, що число c відокремлює множини X і Y.

Зміст властивості неперервності множини R_+ стане зрозумілим, якщо вилучити з множини R_+ хоча б одне число, наприклад, число 1. Позначимо $X = \{ x \mid x \in R_+ \ \wedge \ 0 < x < 1 \}$ і $X = \{ y \mid y \in R_+ \ \wedge \ y > 1 \}$. Хоча $x < y$ для будь-яких $x \in X$ і $y \in Y$, однак після вилучення числа 1 немає жодного числа, яке відокремлює множини X і Y. Отже, зміст властивості неперервності полягає в тому, що у множині R_+ немає не тільки таких «стрибків», як, наприклад, у множині N натуральних чисел, але і таких «дірок», як у множині Q_+ додатних раціональних чисел.

4. Додавання й віднімання додатних дійсних чисел

Нехай задано два додатні дійсні числа α і β:

$$\alpha = a_0,\overline{a_1 a_2 ... a_k ...} \text{ і } \beta = b_0,\overline{b_1 b_2 ... b_k ...}.$$

Для десяткових наближень цих чисел з недостачею і надлишком справедливі нерівності:

$$\alpha_k \le \alpha \le \alpha_k^{/} \text{ і } \beta_k \le \beta \le \beta_k^{/},\ k = 1, 2, ...$$

Якби числа α і β були раціональними, то з останніх нерівностей випливали б такі нерівності:

$$\alpha_k + \beta_k \le \alpha + \beta \le \alpha_k^{/} + \beta_k^{/},\ k = 1, 2, ...$$

Сумою додатних дійсних чисел α і β називають число $\alpha + \beta$, що відокремлює множини $\{\alpha_k + \beta_k\}$ і $\{\alpha_k^{/} + \beta_k^{/}\}$, де α_k і β_k – десяткові наближення цих чисел з недостачею, а $\alpha_k^{/}$ і $\beta_k^{/}$ – з надлишком.

Можна довести, що

1) для будь-яких додатних дійсних чисел α і β їхня сума $\alpha + \beta$ існує і єдина;

2) операція додавання (відшукання суми) у множині R_+ комутативна й асоціативна;

3) операція додавання у множині R_+ має властивість монотонності.

Розглянемо тепер віднімання додатних дійсних чисел. Операція віднімання вводиться як обернена до операції додавання.

Різницею додатних дійсних чисел α і β називають таке додатне дійсне число $\gamma = \alpha - \beta$, що $\gamma + \beta = \alpha$. Операцію знаходження різниці називають відніманням.

Можна довести, що різниця $\alpha - \beta$, де $\alpha, \beta \in R_+$, існує тоді і тільки тоді, коли $\alpha > \beta$ і якщо різниця існує, то вона єдина.

5. Множення й ділення додатних дійсних чисел

Нехай α і β – дійсні додатні числа, що визначаються рівностями $\alpha = a_0,\overline{a_1 a_2 ... a_k ...}$ і $\beta = b_0,\overline{b_1 b_2 ... b_k ...}$. Тоді мають місце нерівності $\alpha_k \le \alpha \le \alpha_k^/$ і $\beta_k \le \beta \le \beta_k^/$, $k = 1, 2, ...$. Якби числа α і β були раціональними, то з цих нерівностей випливали б нерівності

$$\alpha_k \cdot \beta_k \le \alpha \cdot \beta \le \alpha_k^/ \cdot \beta_k^/, \; k = 1, 2, ...$$

Добутком додатних дійсних чисел α і β називають число $\alpha\beta$, що відокремлює множини $\{\alpha_k \beta_k\}$ і $\{\alpha_k^/ \beta_k^/\}$, де α_k і β_k – десяткові наближення цих чисел з недостачею, а $\alpha_k^/$ і $\beta_k^/$ – з надлишком.

Можна довести, що

1) для будь-яких додатних дійсних чисел α і β їхній добуток $\alpha\beta$ існує і єдиний;

2) операція множення (знаходження добутку) у множині R_{+} комутативна, асоціативна й дистрибутивна відносно додавання, а також має властивість монотонності.

Ділення додатних дійсних чисел вводиться як операція, обернена до операції множення.

Часткою додатних дійсних чисел α і β називають таке додатне дійсне число $\gamma = \alpha : \beta$, що $\gamma \cdot \beta = \alpha$. Операцію знаходження частки називають діленням.

Можна довести, що для будь-яких додатних дійсних чисел α і β їхня частка $\alpha : \beta$ існує і єдина.

Отже: в результаті вивчення теми «**Дійсні числа**» студент повинен

з н а т и: необхідність розширення множини додатних раціональних чисел; поняття додатного ірраціонального числа, додатного дійсного числа; про відношення порядку на множині додатних дійсних чисел; визначення дій над додатними дійсними числами: додавання, віднімання, множення і ділення.

у м і т и: знаходити десяткові наближення додатних ірраціональних чисел; порівнювати додатні ірраціональні числа; виконувати дії над додатними дійсними числами: додавання, віднімання, множення і ділення.

Орієнтовні завдання, які повинен вміти виконати студент на практичному занятті в результаті вивчення теми

«**Дійсні числа**»

1. Довести, що не існує раціонального числа, квадрат якого дорівнює 3.

2. Між даними числами поставити один із трьох знаків: <, =, >:

а) 3,27689… і 3,27701…;

б) 12,54321… і 12,54322…;

в) 152,0110… і 152,00111…;

г) 0,666… і $\frac{2}{3}$.

3. Розмістити в порядку зростання такі числа: 1,73128…; 1,7314…; 1,7313298…; 1,7311495… .

4. Довести, що в множині R_+ немає ні найменшого, ні найбільшого числа.

5. Довести, що між будь-якими двома різними додатними дійсними числами міститься безліч раціональних чисел.

6. Знаючи, що $\sqrt{2} = 1{,}41421...$ і $\sqrt{3} = 1{,}73205...$, знайти з точністю до 0,001: а) $\frac{1}{3} + \sqrt{3}$; б) $\frac{5}{3} - \sqrt{2}$; в) $\frac{2}{3} + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}$.