Тема

Площа. Поняття про об’ємні фігури

1. Площа фігури, її властивості. Способи вимірювання площ основних геометричних фігур площини. Одиниці площі.
2. Загальні відомості про многогранники
3. Загальні відомості про тіла обертання

1. Площа фігури, її властивості. Способи вимірювання площ основних геометричних фігур площини. Одиниці площі.

Однією із найосновніших і найдавніших викликаних практикою задач математики, точніше геометрії (колись геометрія виникла як наука про вимірювання землі) є задача вимірювання площі.

Під площею фігури розуміють скалярну додатну величину, що характеризує розміри фігури і має такі властивості:

1) будь-яка плоска фігура має площу;

2) площі конгруентних фігур рівні (нагадаємо, що фігури називаються конгруентними, якщо ці фігури можна сумістити), тобто величина площі фігури не залежить від її розміщення на площині;

3) якщо фігуру певним способом розділено на частини, що не перекриваються, то площа фігури дорівнює сумі площ її частин (властивість адитивності).

Дві плоскі фігури називаються рівноскладеними, якщо їх можна розбити на скінченне число попарно конгруентних частин.

Отже, як наслідок з властивостей площі випливає, що рівноскладені фігури мають рівні площі.

За одиницю площі приймають площу квадрата, довжина сторони якого дорівнює одній лінійній одиниці.

1 м^2 або 1 кв.м. – площа квадрата із стороною в 1 м;

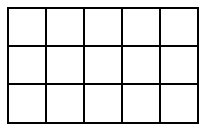
1 см^2 або 1 кв.см. – площа квадрата із стороною в 1 см;

1 мм^2 або 1 кв.мм. – площа квадрата із стороною в 1 мм і т.д.

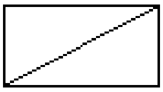
При виведенні формул для обчислення площ многокутників користуються поняттям рівноскладеності фігур.

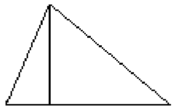
Фігури, які мають однакові площі, називаються рівновеликими.

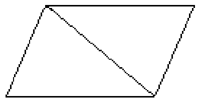
Якщо прийняти за аксіому, що рівноскладені фігури є рівновеликі, то легко вивести формули для обчислення площі прямокутника, трикутника, паралелограма, трапеції тощо. Найпростіше це зробити в такій послідовності:

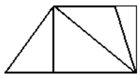
1. Площа прямокутника при будь-яких вимірах його сторін дорівнює добутку їх довжин: $S_{\square}=ab$ (прямокутник з сторонами a і b рівноскладений з ab квадратами одиничної площі (рис.);  – площа дорівнює $5 \cdot 3 = 15$ одиниць площі.

2. Два конгруентних між собою прямокутних трикутники з катетами a і b рівноскладені з прямокутником (рис.) зі сторонами a і b, тому площа прямокутного трикутника дорівнює половині площі

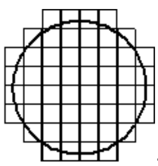
прямокутника, тобто половині добутку довжин своїх катетів: $S_{\triangle}= \frac{1}{2}ab$; 

3. Довільний трикутник можна розбити на два прямокутних трикутники (рис.), тоді маємо $S_{\Delta} = S_{\Delta_1} + S_{\Delta_2} = \frac{1}{2}a_1h + \frac{1}{2}a_2h = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)h = \frac{1}{2}ah$; 

4. Паралелограм своєю діагоналлю ділиться на два конгруентні між собою трикутники . Отже $S_{▱}= 2 \cdot \frac{1}{2}ah = ah$;

5. Діагональ трапеції ділить її на два трикутники . Отже $S_{⏢}= \frac{1}{2}ah + \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(a+b)h$;

6. Будь-який многокутник можна розбити діагоналями або променями, що йдуть від центра, на трикутники, і обчислити його площу як суму площ цих трикутників.

7. За допомогою палетки (сітки квадратиків одиничної площі) можна знайти площу будь-якої криволінійної фігури, в тому числі кола: .

Для вимірювання площ земельних ділянок використовують також: 1 а (ар) = 100 кв.м.; 1 га (гектар) = 100 а = 10000 кв.м.; 1 а (сота) = 0,01 га.

2. Загальні відомості про многогранники

Многогранником називається тіло, поверхня якого складається із скінченного числа плоских многокутників (рис. 1). Плоскі многокутники, які утворюють поверхню многогранника, називаються його гранями, сторони граней називаються ребрами, а вершини граней – вершинами многогранника.

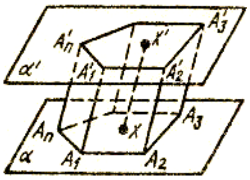
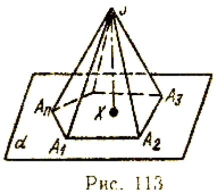
Рис. 1. 

Рис. 2. 

Дві грані, які мають спільне ребро, утворюють двогранний кут многогранника. Число двогранних кутів многогранника дорівнює числу його ребер. Усі грані, що мають спільну вершину, утворюють в ній многогранний кут многогранника. Число многогранних кутів многогранника дорівнює числу його вершин.

Многогранник називається опуклим, якщо він розміщений по один бік від площини кожної його грані. Прикладами опуклих многогранників є куб, призма, піраміда. Щоб многогранник був опуклим, необхідно й достатньо, щоб усі його многогранні кути були опуклими. Грані опуклого многогранника є опуклими многокутниками. В опуклому многограннику відрізок, який сполучає дві внутрішні його точки, не перетинає поверхні многогранника.

Відрізок, який сполучає дві вершини многогранника, що не належать одній грані, називається діагоналлю многогранника.

Площина, що проходить через три вершини многогранника, які не лежать в одній грані, називають діагональною площиною, а переріз її з поверхнею многогранника – діагональним перерізом. Будь-який плоский переріз опуклого многогранника є опуклий многокутник.

Многогранники розрізняють за формою і числом граней. За числом граней є чотиригранник (тетраедр), п'ятигранник і т. д.

Многогранник обмежує частину простору і тому не може мати менше ніж чотири грані.

Розглянемо деякі види многогранників.

Призмою називається многогранник, що складається з двох плоских многокутників, які лежать у різних площинах і суміщаються паралельним перенесенням, та всіх відрізків, що сполучають відповідні точки цих многокутників (див. рис. 1). Многокутники називаються основами призми, а відрізки, що сполучають відповідні вершини, – бічними ребрами призми. Основи призми – рівні многокутники, бічні ребра – паралельні і рівні між собою. Разом зі сторонами основ вони утворюють чотирикутники, які називаються бічними гранями призми. Висотою призми називається відстань між площинами її основ.

Призма, всі грані якої є паралелограми, називається паралелепіпедом. Призма, бічні грані якої є прямокутники, називається прямою. Якщо всі грані призми є прямокутники, то маємо прямокутний паралелепіпед.

Пірамідою називається многогранник, який складається з плоского многокутника (основи піраміди), точки, що не лежить у площині основи (вершини піраміди), та всіх відрізків, що сполучають вершину піраміди з точками основи (рис. 2). Відрізки, що сполучають вершину піраміди з вершинами основи, називаються бічними ребрами. Відстань від вершини піраміди до площини основи називається висотою піраміди.

3. Загальні відомості про тіла обертання

Простішими тілами обертання є циліндр, конус і куля. Пригадаємо загальні відомості про прямий круговий циліндр, прямий круговий конус і сферу (кулю).

Прямим круговим циліндром (або просто циліндром) називають тіло, що утворюється при обертанні прямокутника навколо прямої, яка проходить через одну з його сторін. Ця пряма називається віссю обертання і віссю циліндра.

Два круги, які утворюються обертанням сторін прямокутника, перпендикулярних до осі обертання, називаються основами циліндра, а самі ці сторони – радіусами основ циліндра.

Поверхня, яку описує сторона прямокутника, паралельна осі обертання, називається бічною поверхнею циліндра, а сама ця сторона і паралельні їй відрізки бічної поверхні називаються твірними циліндра.

Висота циліндра – це відстань між площинами його основ. Вона паралельна твірній і осі прямого циліндра. Переріз циліндра площиною, яка проходить через його вісь, називається осьовим перерізом циліндра, він має форму прямокутника. Площина, перпендикулярна до осі циліндра, перетинає його бічну поверхню по колу, яке дорівнює колу основи циліндра. На рис. 1 ОО1 – вісь циліндра, точки O і O1 – центри основ, AA1 = BB1 – твірні або висоти, OA = OB – радіуси основ, ABB1A1 – осьовий переріз.

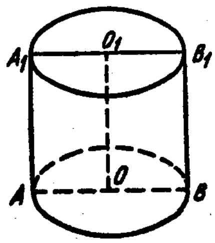


Рис. 1

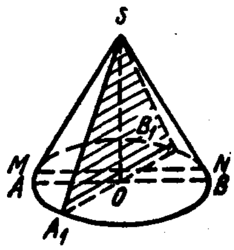


Рис. 2

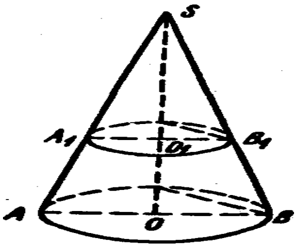


Рис. 3

Прямим круговим конусом (або просто конусом} називається тіло, утворене при обертанні прямокутного трикутника навколо прямої (осі обертання), що містить його катет. Катет, який лежить на осі обертання, називається висотою (і віссю) конуса. Другий катет, перпендикулярний до осі обертання, називається радіусом основи, а гіпотенуза – твірною конуса. Кінець осі конуса, який не належить основі, називається його вершиною.

Гіпотенуза трикутника утворює при обертанні поверхню, яка називається бічною поверхнею конуса. Повна поверхня конуса складається з бічної поверхні та основи конуса. Переріз конуса площиною, що проходить через його вісь, називається осьовим перерізом, він має форму рівнобедреного трикутника. Площина, перпендикулярна до осі конуса, перетинає його бічну поверхню по колу, а площина, яка утворює з віссю кут $0° < \alpha < 90°$, перетинає його по еліпсу.

На рис. 2 S – вершина, OS – вісь і висота конуса; OA = 0B = OA1 – радіуси основи, SM = SN = SA1 – твірні конуса.

Зрізаним конусом називається частина конуса, обмежена його основою та перерізом, паралельним площині основи. Зрізаний конус можна дістати обертанням рівнобедреної трапеції навколо її осі симетрії. Бічна сторона трапеції називається твірною зрізаного конуса, а круги, утворені при обертанні основ трапеції – основами зрізаного конуса. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють половинам основ трапеції. Осьовим перерізом зрізаного конуса є рівнобедрена трапеція. На рис. 3 АА1 = ВВ1 – твірні, ОА і О1А1 – радіуси основ, ОО1 – висота.

Кулею називається тіло, утворене обертанням півкруга навколо прямої, яка проходить через діаметр півкруга. Кулю можна також визначити як тіло, що складається з усіх точок простору, відстань яких від даної точки не перевищує даної відстані. Ця точка називається центром кулі, а відстань – її радіусом.

Поверхня кулі утворюється обертанням півкола навколо його діаметра, вона називається сферичною поверхнею або просто сферою. Отже, сфера складається з усіх точок простору, рівновіддалених від даної точки. Дана точка називається центром, а відстань – радіусом сфери.

Можна довести, що кожний переріз кулі площиною є круг, а сфери – коло. Площина, яка проходить через центр кулі, називається діаметральною. Переріз кулі діаметральною площиною називається великим кругом, а переріз сфери діаметральною площиною – великим колом. Тілами обертання є також частини кулі: сегмент, сектор, шар і пояс.

Кульовий сегмент утворюється обертанням кругового сегмента навколо діаметра, перпендикулярного до хорди сегмента. При цьому обертання дуги сегмента утворює сегментну поверхню, а обертання хорди – основу сегмента. Відрізок діаметра, навколо якого обертається круговий сегмент, що міститься між сегментною поверхнею та основою, називається висотою кульового сегмента. На рис. 4. O1 – центр, AO1 = O1B – радіуси, O1C – висота.

Кульовий сектор утворюється при обертанні кругового сектора навколо осі, що проходить через один з його радіусів. Дуга кругового сектора утворює при цьому обертанні сегментну поверхню (рис.5).

Кульовий шар дістаємо при обертанні частини круга, що міститься між двома паралельними хордами, навколо осі, що проходить через діаметр, перпендикулярний до хорд. Круги, які утворюються при обертанні хорд, називаються основами кульового шару, а радіуси цих кругів – радіусами кульового шару. Висота кульового шару – це відрізок діаметра, який належить одночасно осі обертання і кульовому шару (рис. 6).

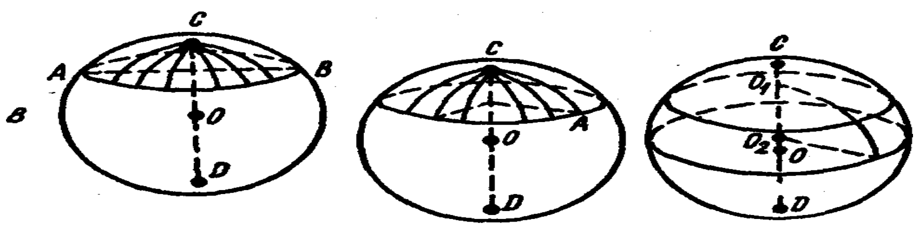


Рис. 4, 5, 6.

Кульовий пояс – це бічна поверхня кульового шару, вона утворюється при обертанні дуги кола, що лежить між двома паралельними хордами, навколо осі, яка проходить через діаметр, перпендикулярний до хорд. Висотою кульового пояса є висота відповідного кульового шару.