І. П. ВАСИЛЬЧЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА *для економістів*

Підручник

Третє видання

Знання

І. П. ВАСИЛЬЧЕНКО

ВИЩА МАТЕМАТИКА для економістів

ПІДРУЧНИК

3-тє видання, виправлене і доповнене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Київ
"Знання"
2007

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73
В19

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України (лист № 1/11-1906 від 30 квітня 2004 р.)

Рецензенти:

Т.Т. Ковальчук, доктор економічних наук, професор, заслужений діяч науки і техніки України;

В.О. Дубко, доктор фізико-математичних наук, завідувач кафедри вищої математики та інформатики Академії муніципального управління;

А.Ю. Дорошенко, доктор фізико-математичних наук, професор кафедри вищої математики та інформатики Київського інституту "Слов'янський університет"

Васильченко І.П.

В19 Вища математика для економістів: Підручник. — 3-тє вид., випр. і доп. — К.: Знання, 2007. — 454 с.

ISBN 966-346-226-4

Це особливий підручник: він містить не тільки теоретичні відомості з усіх традиційних розділів вищої математики, рекомендованих типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для економічних спеціальностей, а й методичні рекомендації та розв'язки багатьох типових задач, у тому числі й економічного змісту, а також задачі для самостійного розв'язку. Там, де необхідно, розкривається економічний зміст математичних понять, наводяться приклади застосування вищої математики в економіці. Третє видання виправлене і доповнене.

Розраховано насамперед на студентів економічних спеціальностей, економістів-практиків, осіб, які займаються самоосвітою. Книга буде корисною також викладачам вищих навчальних закладів, коледжів, ліцеїв та гімназій.

УДК 51(075.8)
ББК 22.11я73

ISBN 966-346-226-4

***Іван Петрович Васильченко** — професор кафедри загальної математики механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, доктор технічних наук, член Національного комітету України з теоретичної та прикладної механіки і математики, фахівець у галузі математичного моделювання.*

Вищу освіту здобув на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка, де і розпочав свою наукову і педагогічну діяльність, навчаючись спочатку в аспірантурі, а потім незмінно працюючи на кафедрі загальної математики.

У 1986 р. І.П. Васильченко захистив докторську дисертацію. Через два роки йому було присуджено вчене звання професора.

Автор понад 140 наукових праць з питань прикладної математики, у тому числі трьох монографій і п'яти підручників. Серед них "Вища математика" (К., 1992), "Вища математика" (К., 1994), "Вища математика" (К., 1995). Одна із монографій опублікована у видавництві Московського університету ім. М.В. Ломоносова (1990 р.).

Зміст

Передмова

Математика — це могутній засіб забезпечення точності пізнання. Мабуть, саме тому видатний німецький філософ Іммануїл Кант вважав, що наука тим більше заслуговує назви науки, чим більше в ній математики.

Природно, що процес математизації не однаковою мірою торкається різних наук. Гуманітарні науки тривалий час були ізольовані від математики, якщо не враховувати застосування статистичних методів у дослідженні окремих соціальних процесів, зокрема проблем демографії, а також проблем структурної лінгвістики, де застосування математики дало позитивні результати.

Значним науковим досягненням стало впровадження математичних методів у економічну науку і в управління економічними процесами. У наш час наукове управління цими процесами може бути здійснено тільки на основі застосування точних математичних методів у всіх сферах господарювання — від прогнозування розміщення корисних копалин до вивчення попиту на товари широкого вжитку і побутові послуги, від вивчення потреби в робочій силі до планування транспортних артерій тощо. Ось чому сьогодні математика як навчальна дисципліна посідає чільне місце в навчальних планах практично всіх спеціальностей вищих навчальних закладів.

Автор підручника І.П. Васильченко — професор механіко-математичного факультету Київського національного університету імені Тараса Шевченка, відомий в Україні та за її межами фахівець у галузі математичного моделювання — має великий досвід викладання вищої математики студентам різних спеціальностей і різних форм навчання, у тому числі й студентам економічних спеціальностей.

Іван Петрович — досвідчений автор. Його перу належать понад 140 опублікованих наукових праць, декілька монографій і п'ять підручників. Три із них — підручники з вищої математики, і, треба сказати, вони визнані фахівцями і користуються великою популярністю серед студентів.

Перед Вами, шановний читачу, підручник з вищої математики для економістів. Це нова праця професора І.П. Васильченка, яку я із задоволенням рекомендую студентам економічних спеціальностей і економістам-практикам.

Багаторічний досвід педагогічної роботи, участь у роботі над економічними проектами різного рівня, постійне спілкування із фахівцями-економістами, досконале знання проблематики, над якою працюють економісти і математики, дали можливість автору знайти оптимальний варіант підручника як за структурою, тематикою, обсягом матеріалу, так і за формою його подання.

За змістом підручник відповідає програмам з вищої математики для студентів економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Кожний розділ, кожна глава, кожний параграф написані з необхідною повнотою і разом з тим компактно, чітко і ясно, що відповідає його практичній спрямованості. Наводяться велика кількість прикладів і задач, а також методичні рекомендації та розв'язки типових і складних задач. У необхідних випадках розкривається економічний зміст математичних понять.

Все це дає підстави стверджувати, що за своїм потенціалом підручник дає змогу забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичного матеріалу по кожній темі, а також — що, мабуть, більш важливо — допомогти студентам сформувати навички застосування інструментарію вищої математики до розв'язання задач економічної спрямованості, оволодіти сучасними підходами до аналізу економічних проблем, пошуків оптимальних шляхів їх вирішення.

Підручник пройшов апробацію у ряді київських вищих навчальних закладів, зокрема Київському славістичному університеті, Київському інституті інвестиційного менеджменту, Академії муніципального управління.

Вдале поєднання у підручнику належної повноти, обґрунтованості, логічної довершеності і простоти подання матеріалу дає можливість рекомендувати цю книгу як підручник студентам не тільки економічних, а й природничих факультетів вищих навчальних закладів, особам, які займаються самоосвітою за програмами підготовки бакалаврів, спеціалістів та магістрів.

Я переконаний, що ця книга буде корисною всім, хто прагне працювати над економічними проблемами і практичними завданнями економічного спрямування на сучасному рівні.

Доктор економічних наук, професор,
Заслужений діяч науки і техніки України *Т.Т. Ковальчук*

Вступ

Підручник відповідає програмі з вищої математики для економічних спеціальностей вищих навчальних закладів. Мета його — забезпечити ґрунтовне засвоєння теоретичного курсу з вищої математики, сприяти формуванню навичок у застосуванні методів вищої математики з підсиленням її прикладної економічної спрямованості, допомогти студентам при самостійному розв'язанні задач. Відомо, що новий навчальний матеріал засвоюється студентами значно легше, якщо він супроводжується достатньо великою кількістю прикладів, які його ілюструють. А тому в даному підручнику зроблено спробу поєднати теоретичний матеріал з методичними рекомендаціями та розв'язками багатьох типових задач, в тому числі й економічного змісту, включаючи задачі для самостійного розв'язку та відповіді до них. Отже, його можна використовувати і як збірник задач.

Підручник складається з двох частин. У першій частині розглядаються такі розділи вищої математики: лінійна та векторна алгебра, аналітична геометрія, вступ до математичного аналізу, диференціальне числення функції однієї змінної; у другій частині — інтегральне числення функції однієї змінної, функції багатьох змінних, теорія рядів, диференціальні рівняння.

При розкритті основних понять перевага надавалась класичному підходу: наприклад, поняття неперервності функції розглядається після поняття границі, визначений інтеграл формулюється як границя інтегральної суми і т. ін. Скрізь, де це можливо, дається геометричний і економічний зміст математичних понять (наприклад, похідної, інтегралу та ін.), наводяться математичні формулювання деяких економічних законів, розглядаються найпростіші застосування вищої математики в економіці. Такі застосування розраховані на рівень підготовки студентів першого курсу і майже не потребують додаткової економічної інформації.

При написанні підручника автором використано багаторічний досвід викладання вищої математики у Київському національному університеті імені Тараса Шевченка студентам різних спеціальностей та різних форм навчання, який дозволяє автору стверджувати, що підручник повинен містити багато задач та прикладів, в тому числі економічного змісту. Це сприятиме підвищенню інтересу студентів до занять з математики, а також використанню математичних методів фахівцями економіки і менеджменту.

Автор сподівається одержати від студентів та фахівців зауваження, рекомендації та побажання, спрямовані на покращення підручника при його подальшому виданні.

ЧАСТИНА ПЕРША

Розділ I
ЕЛЕМЕНТИ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ ТА АНАЛІТИЧНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Глава 1. Матриці. Визначники матриці. Системи рівнянь першого степеня

§ 1. Основні поняття

Одним з найважливіших завдань математики є дослідження та розв'язання систем рівнянь першого степеня. Нехай така система містить m невідомих x_1, x_2, ..., x_m, зв'язаних n рівняннями першого степеня (число рівнянь може і не збігатися з числом невідомих). У загальному вигляді цю систему можна записати так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n. \end{cases} \tag{1}$$

У системі (1) b_1, b_2, ..., b_n — задані вільні члени, a_{ik} ($i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$) — задані коефіцієнти при невідомих. При цьому перший індекс у a_{ik} означає номер рівняння в системі, а другий — номер невідомого, при якому стоїть цей коефіцієнт. Тобто a_{ik} — коефіцієнт, який стоїть в i-му рівнянні системи при невідомому x_k. Аналогічно b_i означає вільний член в i-му рівнянні системи.

Розв'язком системи (1) називається така сукупність чисел x_1, x_2, ..., x_m, яка, будучи підставлена у всі рівняння системи (1), обертає ці рівняння в числові рівності.

Запишемо таблицю, складену з коефіцієнтів при невідомих у системі (1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Таку таблицю розглядатимемо як єдине ціле — це *основна матриця системи.*

Таблиця

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}, \qquad (3)$$

яка містить і стовпець, складений з вільних членів системи (1), називається *розширеною матрицею системи.*

Очевидно, що і саме існування розв'язку системи (1), і можливі числові значення елементів розв'язку повністю визначаються матрицями (2) і (3). А тому, природно, розглянемо деякі загальні властивості матриць.

Числовою матрицею, або просто матрицею, називається прямокутна таблиця чисел. Окремі числа цієї таблиці називаються елементом матриці. Елементи матриці A позначають символом a_{ik}, де i — номер рядка, k — номер стовпця, в якому стоїть вибраний елемент.

Якщо матриця містить n рядків і m стовпців, тоді говорять, що матриця має розмірність $n \times m$.

Особливо часто доводиться мати справу з матрицями, в яких кількість рядків дорівнює кількості стовпців. Такі матриці називаються *квадратними.*

Кількість рядків, а отже, і кількість стовпців квадратної матриці називається *порядком* матриці.

§ 2. Визначники матриць другого порядку

Для квадратної матриці вводиться нове поняття — визначник матриці. Визначник квадратної матриці позначатимемо символом $\det A$ і визначатимемо його індуктивним методом.

Визначником матриці першого порядку (тобто матриці, яка складається з одного елемента, одного числа) називається саме число, яке утворює задану матрицю.

Визначником матриці другого порядку — $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — називається число, обчислене за таким правилом: $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Діагональ квадратної матриці від лівого верхнього елемента таблиці до правого нижнього називається *головною діагоналлю* матриці. Діагональ від правого верхнього елемента до лівого нижнього називається *побічною діагоналлю* матриці.

Отже, для обчислення визначика матриці другого порядку потрібно від добутку елементів, які знаходяться на головній діагоналі матриці, відняти добуток елементів, які знаходяться на побічній діагоналі.

Для визначника матриці $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ вводиться символ $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

Отже,

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \quad (4)$$

Як видно з означення (4), визначник матриці другого порядку є алгебраїчною сумою двох доданків. Кожний з доданків є добутком двох елементів, причому до нього входить один елемент першого рядка та один елемент другого рядка, один елемент першого стовпця та один елемент другого стовпця заданої матриці. Зі знаком "плюс" береться добуток елементів головної діагоналі і зі знаком "мінус" — добуток елементів побічної діагоналі.

З означення (4) легко дістати ряд властивостей визначників матриць.

Властивість 1. *При перестановці рядків матриці на місце стовпців і навпаки визначник матриці не змінюється.*

Нехай задана матриця $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, а матриця $A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ здобута з A перестановкою рядків на місце стовпців (така матриця A^* часто називається транспонованою по відношенню до матриці A). Тоді

$$\det A^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A.$$

Властивість 2. *При перестановці двох стовпців або рядків абсолютне значення визначника матриці не змінюється, а його знак змінюється на протилежний.*

Нехай задана матриця $A_1 = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{pmatrix}$ здобута з A перестановкою стовпців. Тоді

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\det A.$$

Властивість 3. *Якщо матриця має два однакові стовпці (рядки), тоді визначник матриці дорівнює нулю.*

Властивість 4. *Якщо всі елементи будь-якого стовпця (рядка) матриці помножити на одне і те саме число, тоді визначник матриці виявиться помноженим на те саме число.*

Властивість 5. *Якщо всі елементи будь-якого стовпця (рядка) матриці дорівнюють нулю, тоді визначник матриці дорівнює нулю.*

Властивість 6. *Нехай всі елементи будь-якого стовпця (рядка) матриці A є сумою двох елементів і відповідні стовпці матриць A_1 і A_2 складаються з таких елементів:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & + & a'_{11} & a_{12} \\ a_{21} & + & a'_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} a'_{11} & a_{12} \\ a'_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\det A = \det A_1 + \det A_2.$$

Таке твердження, як і твердження 3, 4, 5, доводиться безпосередньою перевіркою.

Властивість 7. *Визначник матриці не змінюється, якщо до елементів будь-якого стовпця (рядка) матриці додати величини, пропорційні елементам іншого стовпця (рядка).*

Нехай

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} + & ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + & ka_{22} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тоді

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} a_{11} + & ka_{12} & a_{12} \\ a_{21} + & ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ka_{12} & a_{12} \\ ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} =$$

$$= \det A + k \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \det A.$$

§ 3. Визначники матриць третього порядку

Припустимо, що задана будь-яка матриця n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Виберемо довільний елемент a_{ik} цієї матриці і викреслимо із матриці A той рядок і той стовпець, в яких міститься цей елемент (тобто викреслимо i-й рядок та k-й стовпець). Тоді дістанемо матрицю $(n-1)$-го порядку.

Називатимемо її субматрицею матриці A, що відповідає елементу a_{ik}, та позначатимемо її D_{ik}.

Визначник субматриці D_{ik} назвемо мінором матриці A, що відповідає елементу a_{ik}, та позначимо символом M_{ik}.

Звідси

$$M_{ik} = \det D_{ik}. \tag{5}$$

Нехай вихідна матриця A була матрицею третього порядку. Тоді дев'ять її можливих субматриць D_{11}, D_{12}, D_{13}, D_{21}, D_{22}, D_{23}, D_{31}, D_{32}, D_{33}, які відповідають різним елементам матриці A, будуть матрицями другого порядку.

Означення. *Визначником матриці третього порядку*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

називається число, визначене за таким правилом:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + a_{13}M_{13}. \tag{6}$$

Оскільки для матриці A

$$D_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},\ D_{12} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{pmatrix},\ D_{13} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix},$$

тоді

$$M_{11} = \det D_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$
$$M_{12} = \det D_{12} = a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31},$$
$$M_{13} = \det D_{13} = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}.$$

Звідси

$$\det A = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}),$$
$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{7}$$

Як видно з цієї формули, визначник матриці третього порядку представляє собою алгебраїчну суму шести доданків. Кожний доданок є добутком трьох елементів — по одному з кожного рядка і кожного стовпця. Перший з доданків, взятих зі знаком "плюс", є добутком елементів, розміщених на головній діагоналі матриці. Останні два містять елементи, розміщені у вершинах трикутників з основою, паралельною головній діагоналі.

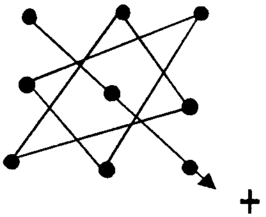

Рис. 1

Добутки зі знаком "мінус" містять елементи, розміщені на побічній діагоналі, та елементи, розміщені у вершинах трикутників з основою, паралельною побічній діагоналі.

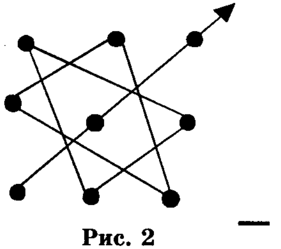

Рис. 2

Безпосередньою перевіркою можна пересвідчитись у тому, що всі властивості, встановлені для визначників матриць другого порядку, притаманні і визначникам третього порядку.

§ 4. Визначники матриць вищих порядків

Визначники матриць четвертого і більш високих порядків вводитимемо аналогічно визначникам матриць третього порядку. Нехай задана матриця

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Означення. *Визначником матриці A n-го порядку називається число, обчислене за таким правилом:*

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}M_{11} - a_{12}M_{12} + \dots + (-1)^{n-1}a_{1n}M_{1n}. \quad (8)$$

Відповідно до сказаного вище, в цій формулі M_{ik} є мінором матриці A, який відповідає елементу a_{ik}, тобто визначником субматриці D_{ik}, здобутим з матриці A викреслюванням i-го рядка і k-го стовпця.

Правило (8) є очевидним узагальненням правила (6). Воно дає можливість звести обчислення визначників матриць четвертого порядку до обчислень визначників третього порядку і т. ін.

Обчислення визначника матриці високого порядку за формулою (8) — операція достатньо трудомістка. А тому важливо, використовуючи властивості визначників матриць, скоротити обчислення.

Оскільки визначники матриць введені на основі принципу індукції, тоді природно сподіватися, що властивості визначників матриць вищих порядків будуть ті самі, що і властивості визначників другого порядку. Приймемо без доведення такі два твердження про властивості визначників матриць n-го порядку (ці властивості були перевірені для визначників матриць другого порядку, а властивість 1 також і для матриць третього порядку).

Властивість 1. *При перестановці рядків матриці на місце стовпців і навпаки визначник матриці не змінюється.*

Властивість 2. *При перестановці двох рядків або стовпців матриці абсолютне значення визначника матриці не змінюється, а знак змінюється на протилежний.*

Перша властивість дає можливість всі положення, встановлені для рядків матриці, переносити на її стовпці. Наприклад, визначник матриці можливо обчислювати і за формулою

$$\det A = a_{11}M_{11} - a_{21}M_{21} + \dots + (-1)^{n-1}a_{n1}M_{n1}, \quad (9)$$

тобто виконувати розклад визначника матриці не тільки за елементами першого рядка, а й за елементами першого стовпця. На основі даних тверджень виведемо основну формулу для розкладу визначника матриці за елементами будь-якого рядка або стовпця:

$$\det A = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in} =$$
$$= (-1)^{1+k}a_{1k}M_{1k} + (-1)^{2+k}a_{2k}M_{2k} + \dots + (-1)^{n+k}a_{nk}M_{nk}. \quad (10)$$

Перша частина формули є розкладом визначника за елементами i-го рядка, друга половина — розкладом за елементами k-го стовпця.

Д о в е д е н н я. Нехай задана матриця n-го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Переставимо i-й і $(i-1)$-й рядок матриці A, потім переставимо новий $(i-1)$-й рядок з $(i-2)$-м рядком і т.д. доти, доки вихідний i-й рядок не стане першим рядком. Тоді дістанемо нову матрицю:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-11} & a_{i-12} & \dots & a_{i-1n} \\ a_{i+11} & a_{i+12} & \dots & a_{i+1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A' здобута з A в результаті $(i-1)$ перестановок рядків. Кожна така перестановка у визначника матриці змінює тільки знак. Отже, $(-1)^{i-1}\det A' = \det A$.

Субматриця D'_{ik} матриці A', яка відповідає елементу a_{ik}, повністю збігається із субматрицею D_{ik}, яка відповідає елементу a_{ik} матриці A. Тому

$$\det D'_{ik} = \det D_{ik} = M_{ik},$$

і на основі означення (8) дістанемо

$$\det A' = a_{i1}M_{i1} - a_{i2}M_{i2} + \dots + (-1)^{n-1}a_{in}M_{in}.$$

Отже,

$$\det A = (-1)^{i-1}\det A' = (-1)^{i+1}\det A' = \\ = (-1)^{i+1}a_{i1}M_{i1} + (-1)^{i+2}a_{i2}M_{i2} + \dots + (-1)^{i+n}a_{in}M_{in},$$

і першу половину формули (10) здобуто.

Другу половину формули дістанемо, використовуючи можливість перестановки рядків і стовпців.

Для спрощення запису формул розкладу зручно ввести поняття "*алгебраїчне доповнення, яке відповідає заданому елементу матриці*".

Означення. *Алгебраїчним доповненням елемента a_{ik} матриці A називається мінор M_{ik} цієї матриці, помножений на $(-1)^{i+k}$.*

Алгебраїчне доповнення елемента a_{ik} матриці A позначається, як правило, символом A_{ik}. Отже,

$$A_{ik} = (-1)^{i+k}M_{ik}. \tag{11}$$

Тепер формулу розкладу (10) можна записати так:

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in} = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \ldots + a_{nk}A_{nk}. \tag{12}$$

Визначник матриці дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця матриці на відповідне алгебраїчне доповнення.

Для скорочення запису часто вводиться спеціальне позначення суми ряду доданків. Суму $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ записуватимемо символом $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$. Знак Σ у такому записі є символом підсумовування, запис $k = 1$ під знаком суми і n над знаком Σ означає, що індекс k в окремих доданках набуває значення від 1 до n. Очевидно, якщо p — будь-яке число, тоді

$$\sum_{k=1}^{n} p\alpha_k = p\sum_{k=1}^{n} \alpha_k,$$

тобто сталий множник можна винести за знак суми. Вкажемо ще, що

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)c_k = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k + \sum_{k=1}^{n} b_k c_k.$$

Дійсно,

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)c_k = (a_1 + b_1)c_1 + (a_2 + b_2)c_2 + \ldots + (a_n + b_n)c_n = (a_1c_1 + b_1c_1 + a_2c_2 + $$
$$+ b_2c_2 + \ldots + a_nc_n + b_nc_n) = (a_1c_1 + a_2c_2 + \ldots + a_nc_n) + (b_1c_1 + b_2c_2 +$$
$$+ \ldots + b_nc_n) = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k + \sum_{k=1}^{n} b_k c_k.$$

Використовуючи символ підсумовування, формулу (12) записують у вигляді

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}A_{ik}. \tag{12'}$$

За допомогою формули розкладу легко встановить інші властивості визначників матриць будь-якого порядку.

Властивість 3. *Якщо матриця має два однакові рядки або стовпці, тоді визначник матриці дорівнює нулю.*

Д о в е д е н н я. Нехай в матриці A збігаються l-й і s-й рядок. Переставимо в цій матриці s-й рядок на місце l-го і навпаки. Оскільки ці рядки однакові, тоді ні сама матриця, ні її визначник не зміняться. Однак разом з тим при перестановці в матриці двох будь-яких рядків визначник матриці змінить свій знак, тобто $\det A = -\det A$, і тому $\det A = 0$.

Властивість 4. *Якщо всі елементи будь-якого рядка або стовпця матриці помножити на одне і те саме число, тоді визначник матриці стане помноженим на те саме число.*

Доведення. Розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ pa_{i1} & pa_{i2} & \dots & pa_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Розкладаючи визначник цих матриць за елементами i-го рядка, дістанемо

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}; \ \det A' = \sum_{k=1}^{n} pa_{ik}A_{ik} = p\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik}.$$

Отже, $\det A' = p \det A$.

Властивість 5. *Якщо всі елементи будь-якого рядка або стовпця матриці дорівнюють нулю, тоді визначник матриці дорівнює нулю.*

Доведення. Розкладаючи визначник матриці за елементами рядка, всі елементи якого дорівнюють нулю, одержимо цю властивість.

Властивість 6. *Нехай всі елементи будь-якого рядка або стовпця матриці A представляють собою суму двох доданків і нехай відповідні рядки матриць A_1 і A_2 складаються з цих доданків:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + \alpha_1 & a_{i2} + \alpha_2 & \dots & a_{in} + \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \ A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тоді $\det A = \det A_1 + \det A_2$.

Д о в е д е н н я. Розкладаючи визначники матриць A_1, A_2, A за елементами i-го рядка, дістанемо

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + \alpha_k) A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k A_{ik} = \det A_1 + \det A_2.$$

Властивість 7. *Визначник матриці не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка (або стовпця) матриці додати величини, пропорційні елементам іншого рядка (або стовпця) тієї самої матриці.*

Д о в е д е н н я. Розглянемо матриці

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} + pa_{l1} & a_{i2} + pa_{l2} & \dots & a_{in} + pa_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

і матрицю B, здобуту заміною в матриці A i-го рядка l-м рядком ($i \neq l$).

Як доведено раніше, $\det A' = \det A + p \det B$. Проте матриця B містить два однакові рядки $a_{l1}, a_{l2}, \dots, a_{ln}$ — на i-му та l-му місцях, тому $\det B = 0$, тобто $\det A' = \det A$.

Встановлені властивості дають практичний метод обчислення визначників матриць високих порядків. Покажемо на кількох прикладах зміст цього методу.

Приклад 1. Задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти $\det A$.

Перетворимо задану матрицю так, щоб в одному рядку або в одному стовпці всі елементи, крім одного, стали рівними нулю. Перетворення при цьому проводимо такі, щоб визначник матриці не змінювався. Для цього до елементів першого і третього рядків додаємо подвоєні елементи другого рядка:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \\ 7 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розкладаючи визначник за елементами другого стовпця за формулою (10), дістанемо

$$\det A = -0\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -15.$$

Приклад 2. Задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайти $\det A$.

Перетворимо матрицю так, щоб всі елементи третього рядка, крім одного, обертались в нуль. Для цього до елементів першого стовпця додамо елементи третього, помножені на -4, а до елементів другого стовпця — елементи третього, помножені на 2. Тоді

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 & 2 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -5 & 6 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 13 & -4 & 1 \\ -5 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Далі до елементів першого рядка додамо елементи другого рядка, помножені на -2, і до елементів третього рядка — елементи другого, помножені на -3. Тоді

$$\det A = \begin{vmatrix} -20 & 9 & 0 \\ 13 & -4 & 1 \\ -44 & 18 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -20 & 9 \\ -44 & 18 \end{vmatrix} = 4\cdot 9\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -36.$$

Доведемо на довершення ще одну суттєву теорему, яку назвемо *теоремою про алгебраїчні доповнення.*

Теорема. *Сума добутків елементів будь-якого рядка або стовпця матриці на алгебраїчні доповнення, відповідні елементам іншого рядка або стовпця цієї самої матриці, дорівнює нулю.*

Д о в е д е н н я. Нехай задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

Розглянемо допоміжну матрицю

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_1 & h_2 & \dots & h_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

здобуту із матриці A заміною елементів l-го рядка числами $h_1, h_2, \dots, h_n$.

Розкладаючи $\det A_1$ за елементами l-го рядка, дістанемо $\det A_1 = \sum_{k=1}^{n} h_k A_{lk}$, де A_{lk} — алгебраїчні доповнення, відповідні елементам l-го рядка як матриці A_1, так і матриці A. Якщо $h_k = a_{ik}$, дістанемо матрицю, у якій два рядки повністю збігаються. Тому при $i \neq l$ визначник цієї матриці, тобто $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{lk}$, має дорівнювати нулю. Теорему доведено.

Об'єднуючи доведену теорему і формулу (12′), можна записати

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{lk} = \begin{cases} \det A & i = l, \\ 0 & i \neq l. \end{cases} \tag{13}$$

Аналогічно, розкладаючи за елементами i-й стовпець, маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} A_{il} = \begin{cases} \det A & k = l, \\ 0 & k \neq l. \end{cases} \tag{14}$$

Контрольні запитання і завдання

1. Що називається матрицею? Які частинні випадки матриць ви знаєте?

2. Сформулюйте, що називається визначником другого, третього та n-го порядку.

3. Сформулюйте властивості визначників.

4. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням елемента визначника? Наведіть приклад.

5. Що означає: розкласти визначник за елементами стовпця (рядка)?

6. Сформулюйте теорему про розклад визначника n-го порядку за елементами будь-якого рядка або стовпця.

7. Чому дорівнює визначник, у якого стовпець або рядок складається з нулів?

8. Як зміниться визначник при транспонуванні матриці і чому?

9. Чому дорівнюватиме визначник, якщо в матриці поміняти місцями два стовпці?

Приклади розв'язування задач

1.1. Обчислити визначник другого порядку

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 5 \cdot 4 - 6 \cdot 3 = 2.$$

1.2. Обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Згідно з правилом трикутника маємо

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 0 =$$

$$= 0 + 6 + 1 - 6 - 2 - 0 = -1.$$

1.3. Обчислити визначник третього порядку

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник за елементами першого рядка, дістанемо

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 0 - 3(-34) + 2(-17) = 68.$$

1.4. Обчислити попередній приклад інакше, використавши властивості визначників.

До елементів першого рядка додамо відповідні елементи другого рядка, помножені на 5, а до елементів третього рядка — відповідні елементи другого рядка, помножені на 7:

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix}.$$

Розклавши визначник за елементами першого стовпця, дістанемо

$$\begin{vmatrix} 0 & 13 & 22 \\ -1 & 2 & 4 \\ 0 & 17 & 34 \end{vmatrix} = 0\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 17 & 34 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 13 & 22 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 13\cdot 34 - 17\cdot 22 = 68.$$

1.5. Обчислити визначник

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -3 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \end{vmatrix}.$$

Виконаємо такі дії: 1) до елементів першого рядка додамо помножені на -3 відповідні елементи другого рядка; 2) до елементів третього рядка додамо подвоєні елементи другого рядка; 3) до елементів четвертого рядка додамо відповідні елементи другого рядка, помножені на -1. Тоді вихідний визначник перетвориться до вигляду

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 & -10 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 9 & 10 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розклавши цей визначник за елементами першого стовпця, маємо

$$D = -\begin{vmatrix} -1 & -2 & -10 \\ 1 & 9 & 10 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Додамо до елементів першого рядка елементи третього рядка і віднімемо від елементів другого рядка елементи третього рядка. Дістанемо

$$D=-\begin{vmatrix}0 & 0 & -10\\ 0 & 7 & 10\\ 1 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами першого стовпця:

$$D=-\begin{vmatrix}0 & -10\\ 7 & 10\end{vmatrix}=-70.$$

1.6. Обчислити визначник п'ятого порядку

$$D=\begin{vmatrix}10 & -2 & -2 & -1 & 3\\ 0 & -1 & -4 & -7 & 2\\ -10 & 3 & 3 & 5 & -5\\ 6 & 2 & -2 & 1 & 2\\ -3 & 0 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Для перетворення в нуль всіх елементів (крім одного) будь-якого рядка чи стовпця вибираємо той рядок або стовпчик, який складається з найменших чисел. У визначнику таким буде другий стовпчик. Залишимо в ньому без змін елемент $a_{22}=-1$, а решту перетворимо в нулі. Для цього виконаємо: 1-й р. + (−2) · 2-й р., 3-й р. + 3 · 2-й р., 4-й р. + 2 · 2-й р.*

Дістанемо

$$D=\begin{vmatrix}10 & 0 & 6 & 13 & -1\\ 0 & -1 & -4 & -7 & 2\\ -1 & 0 & -9 & -16 & 1\\ 6 & 0 & -10 & -13 & 6\\ -3 & 0 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами другого стовпця:

$$D=(-1)\begin{vmatrix}10 & 6 & 13 & -1\\ -1 & -9 & -16 & 1\\ 6 & -10 & -13 & 6\\ -3 & -1 & 2 & 3\end{vmatrix}.$$

В одержаному визначнику вже четвертого порядку з найменших елементів складається четвертий рядок. Перетворимо в нулі всі його елементи, крім $a_{42}=-1$. Для цього виконаємо: 1-й ст. + (−3) 2-й ст., 3-й ст. + 2 · 2-й ст., 4-й ст. + 3 · 2-й ст.** У результаті дістанемо

---

* Тут і далі: р. — рядок.

** Тут і далі: ст. — стовпець.

$$D = -\begin{vmatrix} -8 & 6 & 25 & 17 \\ 26 & -9 & -34 & -26 \\ 36 & -10 & -33 & -24 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкладемо визначник за елементами четвертого рядка:

$$D = -(-1)\begin{vmatrix} -8 & 25 & 17 \\ 26 & -34 & -26 \\ 36 & -33 & -24 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} -8 & 25 & 17 \\ 13 & -17 & -13 \\ 12 & -11 & -8 \end{vmatrix}.$$

(Ми винесли за знак визначника спільний множник з елементів другого рядка і спільний множник з елементів третього рядка).

Для зменшення елементів цього визначника додамо перший стовпець до другого та третього:

$$D = 6\begin{vmatrix} -8 & 17 & 9 \\ 13 & -4 & 0 \\ 12 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6\left\{(-1)^{1+3}\cdot 9\begin{vmatrix} 13 & -4 \\ 12 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 4\begin{vmatrix} -8 & 17 \\ 13 & -4 \end{vmatrix}\right\} = -1122.$$

Останній визначник розкладено за елементами третього стовпця.

1.7. Обчислити визначник n-го порядку

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 5 & 3 & \dots & 3 \\ 3 & 3 & 5 & \dots & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 5 \end{vmatrix},$$

звівши його до трикутного вигляду.

Віднімемо перший рядок від усіх інших:

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 3 & \dots & 3 & 3 \\ -2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

До першого стовпця додамо суму всіх інших:

$$D = \begin{vmatrix} 5+3(n-1) & 3 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{vmatrix} = (3n+2)2^{n-1}.$$

Задачі і вправи для самостійної роботи

Обчислити визначники

1.8. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$.

1.9. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

1.10. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$.

1.11. $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

1.12. $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$.

1.13. $\begin{vmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & -3 \\ \frac{5}{3} & -\frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{7}{3} \\ \frac{4}{3} & -\frac{5}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{vmatrix}$.

1.14. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$.

1.15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

1.16. $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

1.17. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$.

1.18 $\begin{vmatrix} x & x & x & \dots & x & x & 1 \\ x & x & x & \dots & x & 2 & x \\ x & x & x & \dots & 3 & x & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x & n & x & \dots & x & x & x \\ x & x & x & \dots & x & x & x \end{vmatrix}$

1.19. $\begin{vmatrix} -5 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 4 & -1 & 5 \\ -4 & 1 & -8 & -1 \\ 3 & 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}$.

§ 5. Розв'язування систем n рівнянь з n невідомими

Правило Крамера. Встановивши основні властивості і способи обчислення визначників матриць будь-якого порядку, повернемося до основної задачі — розв'язування і дослідження систем рівнянь першого степеня. Почнемо вивчення цього питання з розбору того основного випадку, коли кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих.

Нехай задано систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{15}$$

Приймемо, що система (15) має який-небудь розв'язок і потрібно тільки знайти його. Позначимо через A основну матрицю системи:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Помножимо всі члени першого рівняння системи (15) на A_{11} — алгебраїчне доповнення елемента a_{11} матриці A, всі члени другого рівняння системи (15) на A_{21} — алгебраїчне доповнення елемента a_{21} матриці A, нарешті всі члени n-го рівняння системи (15) на A_{n1} — алгебраїчне доповнення елемента a_{n1} матриці A. Тоді дістанемо систему

$$\begin{cases} a_{11}A_{11}x_1 + a_{12}A_{11}x_2 + \ldots + a_{1n}A_{11}x_n = b_1A_{11}, \\ a_{21}A_{21}x_1 + a_{22}A_{21}x_2 + \ldots + a_{2n}A_{21}x_n = b_2A_{21}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}A_{n1}x_1 + a_{n2}A_{n1}x_2 + \ldots + a_{nn}A_{n1}x_n = b_nA_{n1}. \end{cases} \tag{15′}$$

Додамо почленно всі рівняння системи:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1}\right)x_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1}\right)x_2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1}\right)x_n = \sum_{i=1}^{n} b_iA_{i1}.$$

Відповідно до теореми про алгебраїчні доповнення маємо

$$\sum_{i=1}^{n} a_{i1}A_{i1} = \det A, \ \ \sum_{i=1}^{n} a_{i2}A_{i1} = 0, \ \ldots, \ \sum_{i=1}^{n} a_{in}A_{i1} = 0.$$

Тому одержане рівняння можна переписати у вигляді

$$x_1 \cdot \det A = \sum_{i=1}^{n} b_i A_{i1}.$$

Розглянемо матрицю

$$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

здобуту з матриці A заміною елементів першого стовпця стовпцем вільних членів рівнянь системи. Розкладаючи $\det B_1$ за елементами першого стовпця, дістанемо $\det B_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i A_{i1}$, а тому $x_1 \cdot \det A = \det B_1$.

Аналогічно, помноживши рівняння системи (15) відповідно на A_{i2} $(i = 1, 2, \dots n)$ і додаючи їх, одержимо $x_2 \cdot \det A = \det B_2$, де

$$B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Роблячи так само і в подальшому, дістанемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 \cdot \det A = \det B_1, \\ x_2 \cdot \det A = \det B_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n \cdot \det A = \det B_n, \end{cases} \tag{16}$$

де матрицю B_k одержано з A заміною k-го стовпця стовпцем вільних членів. Очевидно, будь-який розв'язок системи (15) є і розв'язком системи (16).

Покладемо тепер, що визначник основної матриці системи не дорівнює нулю. Тоді система (16) має єдиний розв'язок

$$x_i = \frac{\det B_i}{\det A}, \qquad i = 1,\ 2, \dots,\ n. \tag{17}$$

Нагадаємо, що формулу (17) одержано з припущенням, що система (15) має розв'язок. Безпосередньою підстановкою знайдених значень x_i у систему (15) можна переконатися в тому, що вони є розв'язком системи (15) і, отже, в припущенні, що $\det A \neq 0$, система (15) має розв'язок і при тому єдиний.

Теорема Крамера. *Якщо визначник основної матриці системи n рівнянь першого степеня з n невідомими відмінний від нуля, тоді* *система має єдиний розв'язок. При цьому значення кожного з невідомих дорівнює частці від ділення визначників двох матриць: в знаменнику стоїть визначник основної матриці системи, а в чисельнику — визначник матриці, одержаної з основної матриці системи заміною стовпця, що відповідає вибраному невідомому, стовпцем вільних членів.*

Із цієї теореми виходить, що якщо система рівнянь однорідна, тобто вільні члени у всіх рівняннях системи дорівнюють нулю, і якщо визначник основної матриці системи відмінний від нуля, тоді система має тільки нульовий розв'язок. Дійсно, в такому випадку матриці, визначники яких стоять в чисельнику формули (17), містять стовпець, який включає в себе лише нулі, і, отже, всі числа x_i дорівнюють нулю. Із доведеного випливає така теорема.

Якщо система n однорідних рівнянь першого степеня з n невідомими має хоча б один ненульовий розв'язок, тоді визначник основної матриці системи дорівнює нулю.

Дійсно, якби цей визначник був не рівний нулю, тоді система мала б тільки нульовий розв'язок, що суперечить умові.

У подальшому ми доведемо, що рівність нулю визначника системи є не тільки обов'язковою та необхідною умовою існування ненульового розв'язку, а й умовою, достатньою для існування такого розв'язку. Інакше кажучи, якщо визначник системи однорідних рівнянь дорівнює нулю, тоді система має ненульовий розв'язок (і при цьому нескінченну множину таких розв'язків).

Розв'язування і дослідження систем рівнянь першого степеня методом повного виключення (метод Гаусса). Формули Крамера дають можливість, використовуючи спосіб обчислення визначників, знайти числові значення розв'язку системи рівнянь у випадку, коли визначник основної матриці системи відмінний від нуля. Проте практичне застосування цих формул у багатьох випадках ускладнене. Перш за все потрібно відмітити, що для знаходження розв'язків за формулою (17) треба обчислити $n + 1$ визначник n-го порядку, що являє собою досить трудомістку роботу, навіть при використанні тих способів, про які йшлося в § 4. Однак основним є те, що у випадку, коли коефіцієнти рівняння задані наближено (в реальних задачах це буває майже завжди), похибка розв'язку може бути досить велика. Це пояснюється тим, що доданки, які входять до кожного з визначників, через які визначається розв'язок системи, можуть бути досить великі (нагадаємо, вони є добутком n співмножників — різних коефіцієнтів розширеної матриці системи), а сам визначник — алгебраїчна сума таких доданків — може бути малий. Навіть в тому випадку, коли коефіцієнти в системі вихідних рівнянь відомі точно, але самі обчислення ведуться з урахуванням лише заданого числа значущих цифр, ми з тих самих причин зможемо одержати досить великі похибки в результаті. А тому при практичному розв'язуванні систем рівнянь у більшості випадків використовують не формули Крамера, а інші способи обчислень.

У даному курсі ми розглянемо метод повного виключення стосовно розв'язування систем рівнянь першого степеня також і в тому випадку, коли число рівнянь не збігається з числом невідомих. Проте викладення цього методу почнемо з основного випадку: якщо кількість рівнянь збігається з кількістю невідомих.

Отже, нехай знову задано систему n рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \qquad (18)$$

Оскільки хоча б один з коефіцієнтів a_{i1} відмінний від нуля (інакше до системи взагалі не входило б x_1) і рівняння в системі можливо міняти місцями, тоді без будь-якого обмеження загальності можна покласти, що $a_{11} \neq 0$. Поділимо перше рівняння системи на a_{11} і приведемо його до вигляду $x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}$, де

$$a_{1k}^{(1)} = \frac{a_{1k}}{a_{11}}, \quad b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Умножаючи всі члени одержаного рівняння на a_{i1} і віднімаючи з i-го рівняння системи (18), дістанемо нову систему

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ 0 \cdot x_1 + a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \cdot x_1 + a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)}, \end{cases} \qquad (19)$$

де $a_{ik}^{(1)} = a_{ik} - a_{i1}a_{1k}^{(1)}$; $b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}b_1^{(1)}$; $i = 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, n$.

Оскільки рівняння системи (19) здобуті як лінійні комбінації рівнянь системи (18), то будь-який розв'язок системи (18) є також і розв'язком системи (19). Разом з тим, оскільки

$$a_{1k} = a_{1k}^{(1)}a_{11}, \, b_1 = b_1^{(1)}a_{11}, \, a_{ik} = a_{ik}^{(1)} + a_{i1}a_{1k}^{(1)}, \, b_i = b_i^{(1)} + a_{i1}b_1^{(1)},$$

то рівняння системи (18) можна здобути як лінійну комбінацію рівнянь системи (19). Отже, будь-який розв'язок системи (19) є і розв'язком системи (18). Таким чином, системи (18) і (19) рівнозначні. (Лінійною комбінацією двох рівнянь $c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = d_1$ і

$c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = d_2$ називатимемо рівняння $\lambda_1(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n) + \lambda_2(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n) = \lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2$, де λ_1 та λ_2 — числа.)

Порівняймо тепер визначники D_1 і D_2 основних матриць систем (18) і (19). Перший рядок основної матриці системи (19) одержано з першого рядка основної матриці системи (18) діленням на a_{11}. Така операція відповідає діленню D_1 на a_{11}. Інші рядки здобуті відніманням з відповідних рядків основної матриці системи (18) величин, пропорційних першому рядку. Ця операція не змінює величини визначника. Звідси виходить, що визначник D_2 основної матриці системи (19) дорівнює $\dfrac{D_1}{a_{11}}$. А тому $D_2 \neq 0$, якщо $D_1 \neq 0$, і $D_2 = 0$, якщо $D_1 = 0$. Зазначимо, нарешті, що обчислення ми проводили тільки з коефіцієнтами рівнянь системи (18), тому немає потреби писати самі рівняння. Достатньо написати лише розширену матрицю системи і перетворити тільки елементи цієї матриці.

Будемо позначати перехід від однієї розширеної матриці до іншої, тобто фактично перехід від однієї системи рівнянь до системи, їй рівнозначної, символом $\Leftrightarrow$ або ~. Тоді проведені операції можна записати так:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} & b_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & a_{12}^{(1)} & \ldots & a_{1n}^{(1)} & b_1^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & \ldots & b_{2n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & \ldots & a_{nn}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{pmatrix} = B_2.$$

Приймемо спочатку, що визначник D_1 основної матриці системи (18) відмінний від нуля. Тоді, як сказано вище, $D_2 \neq 0$, а тому в крайньому випадку одне з чисел $a_{i2}^{(1)}$ $(i = 2, \ldots, n)$ відмінне від нуля, оскільки якби всі $a_{i2}^{(1)}$ дорівнювали нулю, дорівнював би нулю і визначник D_2 основної матриці системи (19).

Оскільки рівняння в системі (19) можна поміняти місцями, тому без обмеження можна покласти, що $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Поділимо друге рівняння системи (19) на $a_{22}^{(1)}$, помножимо одержаний рядок на $a_{i2}^{(1)}$ $(i = 1, 3, 4, \ldots, n)$ і віднімемо від i-го рядка.

Тоді матимемо

$$B_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{13}^{(2)} & \ldots & a_{1n}^{(2)} & b_1^{(2)} \\ 0 & 1 & a_{23}^{(2)} & \ldots & a_{2n}^{(2)} & b_2^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} & b_n^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь, що відповідає матриці B_3, рівнозначна системі (19), а тому і вихідній системі (18). Визначник D_3 основної матриці цієї системи відмінний від нуля, оскільки відмінний від нуля визначник D_2. Звідси в крайньому випадку одне з чисел $a_{i3}^{(2)}$ $(i = 3, ..., n)$ відмінне від нуля і можна знову провести ті самі операції, що і раніше. Продовжуючи аналогічні міркування, після n операцій дістанемо матрицю

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_1^{(n)} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & b_2^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & b_n^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Відповідна система рівнянь має вигляд

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_1^{(n)}, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n = b_2^{(n)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n = b_n^{(n)}. \end{cases} \tag{20}$$

Її єдиним розв'язком є

$$x_1 = b_1^{(n)}, x_2 = b_2^{(n)}, \dots, x_n = b_n^{(n)}. \tag{21}$$

Оскільки система (20) рівнозначна системі (18), має єдиний розв'язок, то має єдиний розв'язок, що визначається формулами (21), і вихідна система (18).

Приклад 1. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Проведемо перетворення

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&7&-5&-9\\0&1&-4&3&5\\0&0&-2&4&8\\0&0&-17&12&24\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&7&-5&-9\\0&1&-4&3&5\\0&0&1&-2&-4\\0&0&-17&12&24\end{pmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&9&19\\0&1&0&-5&-11\\0&0&1&-2&-4\\0&0&0&-22&-44\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&0&0&-1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&2\end{pmatrix},$$

$x_1 = 1$; $x_2 = -1$; $x_3 = 0$; $x_4 = 2$.

Зазначимо якщо система однорідна, тобто всі числа b_i ($i = 1, 2, ..., n$) дорівнюють нулю, тоді дорівнюють нулю і всі числа $b_i^{(n)}$. Тому система (18) має в цьому випадку тільки нульовий розв'язок.

Нехай тепер визначник D_1 основної матриці системи (18) дорівнює нулю. Тоді вже не можна стверджувати, що серед чисел $a_{im}^{(m-1)}$ ($i = m, m + 1, ..., n$), одержаних після ($m - 1$)-го етапу перетворень, буде хоча б одне, відмінне від нуля. Більше того, на якомусь етапі всі ці числа обов'язково стануть рівними нулю (інакше ми мали б розглянутий випадок). Отже, нехай дістано матрицю

$$B_{m-1}=\begin{pmatrix}1&0&\dots&a_{1m}^{(m-1)}&a_{1(m+1)}^{(m-1)}&\dots&a_{1n}^{(m-1)}&b_1^{(m-1)}\\0&1&\dots&a_{2m}^{(m-1)}&a_{2(m+1)}^{(m-1)}&\dots&a_{2n}^{(m-1)}&b_2^{(m-1)}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&0&a_{m(m+1)}^{(m-1)}&\dots&a_{mn}^{(m-1)}&b_m^{(m-1)}\\0&0&\dots&0&a_{n(m+1)}^{(m-1)}&\dots&a_{nn}^{(m-1)}&b_n^{(m-1)}\end{pmatrix}.$$

Переставимо m-й стовпець матриці на місце n-го, а всі наступні за m-м стовпцем, крім стовпця вільних членів $b_i^{(m-1)}$, зсунемо на одне місце вліво (така операція, очевидно, означає перестановку невідомих у рівняннях системи або їх перенумерацію, що, звичайно, не змінює розв'язку системи). В результаті одержимо матрицю

$$B_m=\begin{pmatrix}1&0&\dots&a_{1m}^{(m)}&\dots&a_{1n}^{(m)}&b_1^{(m)}\\0&1&\dots&a_{2m}^{(m)}&\dots&a_{2n}^{(m)}&b_2^{(m)}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{mm}^{(m)}&\dots&0&b_m^{(m)}\\\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&a_{nm}^{(m)}&\dots&0&b_n^{(m)}\end{pmatrix},$$

де $a_{in}^{(m)} = a_{im}^{(m-1)}$; $b_i^{(m)} = b_i^{(m-1)}$; $i = 1, 2, ..., n$; $a_{i(k+1)}^{(m-1)} = a_{ik}^{(m)}$; $k = m, m+1, ..., n$.

Продовжуючи ті самі перетворення, що і раніше, дістанемо кінець кінцем матрицю

$$
B_n = \begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(k+1)}^{(n)} & \dots & a_{1n}^{(n)} & b_1^{(n)} \\
0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(k+1)}^{(n)} & \dots & a_{2n}^{(n)} & b_2^{(n)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 1 & a_{k(k+1)}^{(n)} & \dots & a_{kn}^{(n)} & b_k^{n)} \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{k+1}^{(n)} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & b_n^{(n)}
\end{pmatrix}. \tag{22}
$$

Матриці (22) відповідає система рівнянь

$$
\begin{cases}
1\cdot x_1' + 0\cdot x_2' + \ldots + 0\cdot x_k' + a_{1(k+1)}^{(n)}\cdot x_{k+1}' + \ldots + a_{1n}^{(n)}\cdot x_n' = b_1^{(n)}, \\
0\cdot x_1' + 1\cdot x_2' + \ldots + 0\cdot x_k' + a_{2(k+1)}^{(n)}\cdot x_{k+1}' + \ldots + a_{2n}^{(n)}\cdot x_n' = b_2^{(n)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0\cdot x_1' + 0\cdot x_2' + \ldots + 1\cdot x_k' + a_{k(k+1)}^{(n)}\cdot x_{k+1}' + \ldots + a_{kn}^{(n)}\cdot x_n' = b_k^{(n)}, \\
0\cdot x_1' + 0\cdot x_2' + \ldots + 0\cdot x_k' + 0\cdot x_{k+1}' + \ldots + 0\cdot x_n' = b_{k+1}^{(n)}, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
0\cdot x_1' + 0\cdot x_2' + \ldots + 0\cdot x_k' + 0\cdot x_{k+1}' + \ldots + 0\cdot x_n' = b_n^{(n)},
\end{cases} \tag{23}
$$

в якій невідомі x_i' відрізняються від невідомих x_i в системі (18) лише нумерацією. Оскільки система (23) рівнозначна системі (18), то висновок про розв'язність системи (18) рівносильний висновку про розв'язність системи (23).

Очевидно, що якщо хоча б одне з чисел $b_i^{(n)}$ $(i = k + 1, \ldots, n)$ не дорівнює нулю, тоді рівняння системи (23), а тому і рівняння системи (18), несумісні. Якщо всі $b_i^{(n)}$ $(i = k + 1, \ldots, n)$ дорівнюють нулю, тоді рівняння сумісні. При цьому невідомим $x_{k+1}', \ldots x_n'$ можна надати будь-які значення і система матиме такі розв'язки:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= b_1^{(n)} - (a_{1(k+1)}^{(n)} t_1 + \ldots + a_{1n}^{(n)} t_l), \\
x_2' &= b_2^{(n)} - (a_{2(k+1)}^{(n)} t_1 + \ldots + a_{2n}^{(n)} t_l), \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_k' &= b_k^{(n)} - (a_{k(k+1)}^{(n)} t_1 + \ldots + a_{kn}^{(n)} t_l), \\
x_{k+1}' &= t_1, \quad x_{k+2}' = t_2, \ldots, \quad x_n' = t_l,
\end{aligned}
$$

де $t_1, t_2, \ldots, t_l$ $(l = n - k)$ — довільні.

Для того, щоб було зручно повертатися до вихідної системи невідомих, корисно над стовпцями матриць, які одержують при проведенні перетворень, надписувати позначення відповідних невідомих. Вкажемо, крім того, що якщо вихідна система (18) однорідна, тоді всі числа $b_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ дорівнюють нулю. Тому справедливі такі два твердження.

1. ***Система однорідних рівнянь першого степеня завжди сумісна.***

2. ***Якщо визначник системи однорідних рівнянь першого степеня дорівнює нулю, тоді система має нескінченну множину розв'язків.***

Приклад 2.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 7x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Проведемо перетворення

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 & -7 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & -5 & 6 & 5 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 8 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & -20 & 20 \\ 0 & 0 & 3 & -10 & 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 8 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 3 & -10 & 10 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система рівнянь, що відповідає одержаній матриці, має вигляд

$$\begin{cases} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \frac{4}{3} x_4 = -\frac{1}{3}, \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 - 5x_4 = 3, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 - \frac{10}{3} x_4 = \frac{10}{3}, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0. \end{cases}$$

Система сумісна, $x_4 = t$ — довільне число. Система має нескінченну множину розв'язків:

$$x_1 = -\frac{1}{3}(1+4t),$$
$$x_2 = 3+5t,$$
$$x_3 = \frac{10}{3}(1+t),$$
$$x_4 = t$$

причому t — довільне число.

Зазначимо, що якби вільні члени в рівняннях були іншими, ніж задано в умові, система могла б бути несумісною. Нехай, наприклад, $b_4 = 1$. Тоді перетворена матриця системи буде

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

і останнє рівняння системи набуває такого вигляду: $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 1$, що не має смислу.

Приклад 3.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = -4, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - 5x_3 - 6x_4 = 6. \end{cases}$$

Проведемо перетворення

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -5 & -6 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -8 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & -3 & -4 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & -8 & 0 & 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \\ 1 & 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & -22 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & x_3 & x_4 & x_2 & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система сумісна, $x_2 = t$ — довільне число; $x_1 = 1 - t$, $x_2 = t$, $x_3 = -2$, $x_4 = 1$.

Розглянутий метод без будь-яких змін переноситься і на той випадок, якщо кількість невідомих не збігається з кількістю рівнянь.

Контрольні запитання і завдання

1. Запишіть формули Крамера.
2. В якому випадку застосовується правило Крамера? За яких умов система лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок?
3. Що можна сказати про систему рівнянь, якщо її визначник дорівнює нулю?
4. За яких умов однорідна система n лінійних рівнянь з n невідомими має ненульовий розв'язок?
5. У чому полягає метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь?

Приклади розв'язування задач

1.20. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 7, \\ 4x_1 - 5x_2 = 40. \end{cases}$$

Обчислимо визначник системи

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) - 4 \cdot 2 = -15 - 8 = -23.$$

Оскільки визначник системи відмінний від нуля, застосуємо правило Крамера. Для обчислення визначника $\det B_1$ замінимо стовпець $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ визначника системи стовпцем із вільних членів $\begin{pmatrix} 7 \\ 40 \end{pmatrix}$. Маємо

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 40 & -5 \end{vmatrix} = 7(-5) - 40 \cdot 2 = -35 - 80 = -115.$$

Визначник $\det B_2$ дістанемо заміною стовпця $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$ визначника системи стовпцем із вільних членів:

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 40 \end{vmatrix} = 92.$$

Згідно з правилом Крамера знаходимо $x_1 = \dfrac{-115}{-23} = 5$; $x_2 = \dfrac{92}{-23} = -4$.
Сукупність чисел (5; −4) є єдиним розв'язком даної системи.

1.21. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8, \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7. \end{cases}$$

Визначник з коефіцієнтів системи відмінний від нуля:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -8 \\ 4 & 3 & -9 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-5) + 5 \cdot (-9) \cdot 2 + (-8) \cdot 4 \cdot 3 -$$
$$- (-8) \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot (-5) - 2 \cdot 3 \cdot (-9) = -14 \neq 0.$$

Тому можна застосувати правило Крамера:

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 8 & 5 & -8 \\ 9 & 3 & -9 \\ 7 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -42; \quad \det B_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -8 \\ 4 & 9 & -9 \\ 2 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -28;$$

$$\det B_3 = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 8 \\ 4 & 3 & 9 \\ 2 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -14.$$

Звідси знаходимо $x_1 = \dfrac{-42}{-14} = 3$; $x_2 = \dfrac{-28}{-14} = 2$; $x_2 = \dfrac{-14}{-14} = 1$.
Сукупність чисел (3; 2; 1) є єдиним розв'язком системи.

1.22. Розв'язати систему

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 21 & 13 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 7 & 1 \\ 2 & 6 & -3 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 13 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4-й р. + 2-й р. − 1-й р. − 3-й р.)

Неважко побачити, що визначник з коефіцієнтів системи дорівнює нулю, оскільки четвертий рядок його складається з нулів. Останній рядок розширеної матриці свідчить про те, що система несумісна.

1.23. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Випишемо розширену матрицю системи

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & \dots & 1 \\ 1 & -2 & -3 & 1 & \dots & 2 \\ 3 & 1 & -5 & -1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & \dots & 1 \\ 0 & -4 & -6 & 0 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & \dots & -3 \end{pmatrix} \sim$$

(2-й р. − 2 · 1-й р., 3-й р. − 1-й р., 4-й р. − 2-й р. − 3-й р.) (3-й р. : (−2), 4-й р. : (−3))

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -4 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & \dots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -7 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

(2 · 2-й р. + 3-й р.)

У результаті всіх перетворень дана система лінійних рівнянь зводиться до трикутного вигляду:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_3 = 0, \\ \quad - x_2 - 4x_4 - 5x_3 = 1, \\ \qquad - 8x_4 - 7x_3 = 1, \\ \qquad\qquad x_3 = 1. \end{cases}$$

Вона має єдиний розв'язок: $x_3 = 1$, $x_4 = -1$, $x_2 = -2$, $x_1 = 2$.

1.24. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 9x_2 + 8x_3 + 3x_4 = 7, \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 12, \\ 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 20. \end{cases}$$

Проведемо перетворення

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 2 & 12 \\ 5 & 7 & 9 & 2 & 20 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -6 & -3 & 5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 7 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 12 & 6 & -14 \\ 0 & 0 & -12 & -6 & 14 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{31}{6} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{7}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рівняння сумісні, $x_4 = t$ — довільне число, $x_1 = \frac{1}{2}t + \frac{31}{6}$, $x_2 = \frac{2}{3}$, $x_3 = -\frac{1}{2}t - \frac{7}{6}$, $x_4 = t$.

1.25. Роз'вязати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = -4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = -1. \end{cases}$$

Проведемо перетворення

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & -3 & -3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & -9 & 12 & -18 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{4}{3} & 2 \end{pmatrix}.$$

Система сумісна, $x_4 = t$ — довільне число, $x_1 = \frac{1}{3}t + 1$, $x_2 = -\frac{1}{3}t - 1$, $x_3 = \frac{4}{3}t + 2$, $x_4 = t$.

1.26. Розв'язати систему

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 + 9x_4 = 0, \\ x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

Проведемо перетворення

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 9 & 0 \\ 1 & -5 & -2 & -11 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -10 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -14 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 4 & -10 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & -14 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -22 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Система сумісна, $x_4 = t$ — довільне число, $x_1 = t$, $x_2 = -2t$, $x_3 = 0$, $x_4 = t$.

Задачі і вправи для самостійної роботи

Розв'язати системи за правилом Крамера.

1.27. $\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 = 13, \\ 2x_1 + 7x_2 = 81. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 = 17. \end{cases}$

1.29. $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 15, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 15, \\ 10x_1 - 11x_2 + 5x_3 = 36. \end{cases}$

1.30. $\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = 16, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

1.31. $\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - 5x_3 = -10, \\ 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$

1.32. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 4, \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 = 6. \end{cases}$

Розв'язати системи методом Гаусса (метод послідовного виключення невідомих).

1.33. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 1, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$

1.34. $\begin{cases} 12x_1 + 14x_2 - 15x_3 + 23x_4 + 27x_5 = 5, \\ 16x_1 + 18x_2 - 22x_3 + 29x_4 + 37x_5 = 8, \\ 18x_1 + 20x_2 - 21x_3 + 32x_4 + 41x_5 = 9, \\ 10x_1 + 12x_2 - 16x_3 + 20x_4 + 23x_5 = 4. \end{cases}$

1.35. $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 13x_3 + 10x_4 = 0, \\ 5x_1 + 21x_3 + 13x_4 = 3. \end{cases}$

1.36. $\begin{cases} x_1 + 3x_3 - 3x_4 = -6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 5x_4 = 8, \\ 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 17, \\ 12x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -9. \end{cases}$

1.37. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 8x_1 + 12x_2 - 9x_3 + 8x_4 = 3, \\ 4x_1 + 6x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 - 7x_4 = 3. \end{cases}$

1.38. $\begin{cases} x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ x_1 - 7x_3 + 2x_4 = -5, \\ 11x_2 + 20x_3 - 9x_4 = 2. \end{cases}$

§ 6. Ранг матриці, теорема про сумісність систем рівнянь першого степеня

Для дослідження багатьох питань, пов'язаних з розв'язанням систем рівнянь першого степеня, часто вводять поняття *ранг матриці.*

Означення. *Рангом матриці називається найвищий порядок відмінного від нуля визначника квадратної субматриці, отриманої із заданої матриці викреслюванням деяких рядків і стовпців.*

Розглянемо, наприклад, матрицю

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Викресленням будь-якої кількості рядків і стовпців неможливо одержати із заданої матриці квадратну матрицю порядку вище третього. Звідси випливає, що ранг її не може бути більше 3. Однак, викреслюючи один із стовпців, ми одержуватимемо квадратні матриці, які мають два однакових рядки, а тому їх визначники дорівнюватимуть нулю. Отже, ранг вихідної матриці менше 3. Викресливши, наприклад, третій і четвертий стовпці і третій рядок, дістанемо квадратну матрицю $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, визначник якої не дорівнює нулю. Отже, всі визначники субматриці третього порядку дорівнюють нулю, але серед визначників матриць другого порядку є відмінний від нуля. Таким чином, ранг вихідної матриці дорівнює 2.

Доведемо теорему: *ранг матриці не змінюється при лінійних операціях з її рядками.*

Дійсно, лінійні операції з рядками якої-небудь матриці приводять до тих самих лінійних операцій з рядками будь-якої субматриці. Проте, як указано вище, при лінійних операціях з рядками квадратних матриць визначники цих матриць отримують один з одного множенням на число, відмінне від нуля. Звідси нульовий визначник залишається нульовим, а відмінний від нуля — відмінним від нуля, тобто не може змінитися найвищий порядок відмінного від нуля визначника субматриць. Не впливає, очевидно, на ранг матриці і перестановка стовпців, оскільки така перестановка може впливати лише на знак відповідних визначників.

Із доведеної теореми виходить, що розглянуті в § 5 перетворені матриці мають той самий ранг, що і вихідні. Тому ранг основної матриці системи рівнянь першого степеня дорівнює числу одиниць на головній діагоналі перетвореної матриці.

Доведемо тепер теорему про сумісність систем рівнянь першого степеня (теорема Кронекера — Капеллі): *для того щоб система рівнянь першого степеня була сумісна, необхідно і достатньо, щоб ранг розширеної матриці збігався з рангом основної матриці.*

Нехай ранг основної матриці системи дорівнює k. Якщо ранг розширеної матриці системи також дорівнює k, то або система містить тільки k рівнянь, або всі числа $b_i^{(n)}$ ($i = k + 1, \ldots, n$) у перетвореній матриці дорівнюють нулю (в противному випадку ранг розширеної матриці перетвореної, а тому і вихідної системи був би $k + 1$).

Припустимо, що ранг перетвореної (а тому і вихідної) розширеної матриці системи більше k, тобто більше ніж число одиниць на головній діагоналі перетвореної матриці. Тоді існує хоча б одна субматриця ($k + 1$)-го порядку, визначник якої не дорівнює нулю. Така субматриця може бути одержана тільки додаванням до одиничної матриці порядку k (що знаходиться в лівому верхньому куту перетвореної матриці) якого-небудь одного рядка і стовпця, що складається з перших k вільних членів рівнянь перетвореної системи і будь-якого одного вільного члена з наступних $n - k$ рівнянь. Щоб визначник указаної субматриці був відмінний від нуля, відмінним від нуля має бути і цей останній доданий елемент, тобто число $b_i^{(n)}$ ($i = k + 1, \ldots, n$). Однак, як було доведено раніше, в цьому випадку (при $b_i^{(n)} \neq 0$) система несумісна. Отже, система сумісна тоді і тільки тоді, коли ранг основної матриці збігається з рангом розширеної матриці.

Контрольні запитання і завдання

1. Що називається рангом матриці?
2. Що називається розв'язком системи лінійних рівнянь?
3. Які системи називаються сумісними (визначеними, невизначеними), несумісними?
4. Сформулюйте теорему Кронекера — Капеллі.
5. Як змінюється ранг матриці при лінійних операціях з її рядками?
6. Які ви знаєте способи знаходження рангу матриці?

Приклади розв'язування задач

1.39. Обчислити ранг матриці з допомогою елементарних перетворень

$$A=\begin{pmatrix}3&2&1&2\\2&0&-1&1\\0&4&5&1\end{pmatrix}.$$

$$A\Rightarrow\begin{pmatrix}3&2&1&2\\2&0&-1&1\\-6&0&3&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}3&1&1&2\\2&0&-1&1\\-6&0&3&-3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\2&0&-1&1\\-6&0&3&-3\end{pmatrix},$$

(3-й р. – 2 · 1-й р.) (2-й ст. : 2) (1-й ст. – 3 · 2-й ст., 3-й ст. – 2-й, 4-й ст. – 2 · 2-й ст.)

де знак $\Rightarrow$ вказує, що з'єднані ним матриці одержують одну з одної елементарними перетвореннями, а тому вони мають один і той самий ранг.

Далі додамо до 3-го рядка добуток (3 · 2-й рядок), 1-й стовпець поділимо на 2, додаючи його до 3-го стовпця і віднімаючи з 4-го. Переставивши місцями перші два стовпці, матимемо

$$A\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\2&0&-1&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Ранг матриці A дорівнює 2, тобто $r = 2$.

1.40. За допомогою елементарних перетворень обчислити ранг матриці.

$$\begin{pmatrix}25&31&17&43\\75&94&53&132\\75&94&54&134\\25&32&20&48\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\\0&1&3&5\end{pmatrix}\Rightarrow$$

(2-й р. – 3 · 1-й р., 3-й р. – 2-й р., 4-го р. – 1-й р.)

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}25&31&17&43\\0&1&2&3\\0&0&1&2\end{pmatrix}.$$

(4-й р. відкинемо, оскільки 4-й р. = 2-й р. + 3-й р.)

Отримуємо $r = 3$, бо визначник трикутної матриці з перших трьох стовпців не дорівнює нулю.

Обчислення ранга матриці методом обрамлення. Вибираємо в даній матриці мінор другого порядку, відмінний від нуля. Потім обчислюємо мінори третього порядку, які обрамляють (містять в собі) вибраний, поки не знайдемо серед них відмінного від нуля. Далі обчислюємо мінори четвертого порядку, які обрамляють відмінний від нуля мінор третього порядку, поки не знайдемо серед них відмінний від нуля, і т.д. Якщо знайшли відмінний від нуля мінор r-го порядку, а всі мінори $(r+1)$-го порядку, які його обрамляють, дорівнюють нулю або їх уже немає, то ранг матриці дорівнює r.

1.41. Обчислити ранг матриці

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Викреслимо 3-й рядок, оскільки $2 \cdot$ 2-й р. + 1-й р. = 3-й р. Отримуємо

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виберемо, наприклад, $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0.$

Обчислимо мінори третього порядку, які обрамляють його:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -7 & -13 \\ 7 & -14 & -26 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 13 \\ 14 & 26 \end{vmatrix} = 0,$$

(2-й ст. $- 3 \cdot$ 1-й ст., 3-й ст. $- 5 \cdot$ 1-й ст.)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 4 \\ 7 & 7 & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Мінор третього порядку відмінний від нуля. Він міститься у визначнику четвертого порядку заданої матриці, який дорівнює нулю. Отже, $r = 3$.

1.42. Розв'язати системи рівнянь:

а) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2, \\ 3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = -8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 4, \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 - 4x_4 = -4, \\ x_1 + 8x_2 + 7x_3 - 7x_4 = 6. \end{cases}$

а) Тут $r(A) = 3$, $r(B) = 3$; система сумісна, визначена. Оскільки

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 14 \neq 0,$$

тоді з перших трьох рівнянь системи, наприклад, згідно з формулами Крамера знаходимо:

$$x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1.$$

б) Тут $r(A) = 2$, $r(B) = 2$; система сумісна, але не визначена.

Визначник $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, і з перших двох рівнянь системи

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -3x_3 + x_4, \\ x_1 - x_2 = 4 - x_3 - 2x_4 \end{cases}$$

знаходимо

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_3 - x_4, \qquad x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4,$$

де невідомим x_3 і x_4 можна надавати будь-які значення.

в) У цьому випадку $r(A) = 2$, $r(B) = 3$; система несумісна.

1.43. Методом Гаусса (послідовного виключення невідомих) розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 + 9x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 3x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

і знайти її фундаментальну систему розв'язків.

Випишемо розширену матрицю системи (при цьому нульовий стовпець можна не писати). Після зрозумілих перетворень матимемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & -2 & -4 & -11 & -13 \\ 0 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & -3 & -6 & -19 & -17 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 10 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

тобто задана система рівнозначна такій:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ \qquad x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 9x_5 = 0, \\ \qquad\qquad\qquad -x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

Тут $r = 3$, і три невідомих можна виразити через останні так:

$$x_4 = x_5,$$

$$x_2 = -2x_3 - 3x_4 - 9x_5 = -2x_3 - 12x_5,$$

$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4 - 5x_5 = x_3 + 15x_5.$$

Фундаментальну систему можна одержати, якщо вільним невідомим x_3, x_5 надавати значення $x_3 = 1$, $x_5 = 0$ (тоді $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_4 = 0$) і $x_3 = 0$, $x_5 = 1$ (тоді $x_1 = 15$, $x_2 = -12$, $x_4 = 1$). Це дає фундаментальну систему розв'язків:

$$e_1 = (1, -2, 1, 0, 0), \quad e_2 = (15, -12, 0, 1, 1).$$

З використанням фундаментальної системи загальний розв'язок часто записують у вигляді лінійної комбінації розв'язків e_1 та e_2, тобто

$$e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (\alpha_1 + 15\alpha_2, \ -2\alpha_1 - 12\alpha_2, \ \alpha_1, \ \alpha_2, \alpha_2).$$

1.44. Знайти фундаментальну систему розв'язків системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 - 11x_3 + x_4 = 0, \\ 4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 6x_4 = 0 \end{cases}$$

та записати її загальний розв'язок.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 2 & -3 & -3 & 5 \\ 2 & 9 & -11 & 1 \\ 4 & 6 & -14 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 & -7 & 3 \\ 0 & -6 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}.$$

(4-й р. = 2-й р. + 3-й р., 2-й р. – 1-й р., 3-й р. – 1-й р.)

Третій рядок відкинемо. Система звелась до ступінчастої з головними невідомими x_1, x_2 і вільними x_3, x_4:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 7x_3 - 3x_4, \\ \quad -6x_2 = -4x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

З останнього рівняння знаходимо $x_2 = \frac{2}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4$, з першого — $x_1 = \frac{1}{2}(5x_3 - 4x_4) = \frac{5}{2}x_3 - 2x_4$. Вільних невідомих два. Тому беремо визначник другого порядку з одиничними елементами головної діагоналі і нульовими — побічної: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Візьмемо $x_3 = 1$, $x_4 = 0$. Тоді $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{2}{3}$. Дістанемо вектор $e_1 = (\frac{5}{2}, \frac{2}{3}, 1, 0)$. Далі візьмемо $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Одержимо вектор $e_2 = (-2, \frac{1}{3}, 0, 1)$. Вектори e_1 і e_2 є фундаментальною системою розв'язків.

Тепер загальний розв'язок можна записати у вигляді

$$e = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 = (\frac{5}{2}\alpha_1 - 2\alpha_2, \ \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2, \ \alpha_1, \ \alpha_2).$$

Надаючи коефіцієнтам α_1, α_2 будь-які (довільні) числові значення, одержуватимемо різноманітні частинні розв'язки.

1.45.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 - x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -7 & -1 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \sim$$

(від усіх рядків віднімемо 4-й р.)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Другий, третій та п'ятий рядки, які пропорціональні першому, викреслимо. В одержаній матриці переставимо перший і другий стовпці.

Ранг матриці дорівнює 2.

Головні невідомі x_2 і x_1. Вільні — x_3, x_4, x_5. Система тепер має вигляд

$$\begin{cases} x_2 = 2x_3 + x_4 - 2x_5, \\ x_1 = x_3 - 2x_4 + x_5. \end{cases}$$

Надаючи вільним невідомим послідовно значення, рівні елементам стовпців визначника

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

($x_3 = 1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$; $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$), дістанемо: 1) $x_2 = 2$, $x_1 = 1$; 2) $x_2 = 1$, $x_1 = -2$; 3) $x_2 = -2$, $x_1 = 1$, тобто вектори $c_1 = (1, 2, 1, 0, 0)$, $c_2 = (-2, 1, 0, 1, 0)$, $c_3 = (1, -2, 0, 0, 1)$ складають фундаментальну систему розв'язків. Загальний розв'язок системи тепер запишеться:

$$c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + \alpha_3 c_3 = (\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3,\ \ 2\alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3,\ \ \alpha_1,\ \ \alpha_2,\ \ \alpha_3).$$

1.46. $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Матриця коефіцієнтів

$$A = \left(\begin{array}{cc|ccc} 3 & 1 & -8 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & -3 & -7 & 2 \\ \hline 1 & 11 & -12 & 34 & -5 \\ 1 & -5 & 2 & -16 & 3 \end{array}\right)$$

має ранг $r = 2$ (перевірте).

Виберемо за базисний мінор $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \neq 0.$

Тоді скорочена система матиме вигляд

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 8x_3 - 2x_4 - x_5, \\ 2x_1 - 2x_2 = 3x_3 + 7x_4 - 2x_5. \end{cases}$$

Звідси, прийнявши $x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$, $x_5 = c_3$, знаходимо

$$x_1 = \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3,$$
$$x_2 = \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3.$$

Загальний розв'язок системи

$$e = \begin{pmatrix} \frac{19}{8}c_1 + \frac{3}{8}c_2 - \frac{1}{2}c_3 \\ \frac{7}{8}c_1 - \frac{25}{8}c_2 + \frac{1}{2}c_3 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}.$$

Із загального розв'язку знаходимо фундаментальну систему розв'язків

$$e_1(1, 0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{19}{8} \\ \frac{7}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2(0, 1, 0) = \begin{pmatrix} \frac{3}{8} \\ -\frac{25}{8} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3(0, 0, 1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

З використанням фундаментальної системи загальний розв'язок можна записати у вигляді $e = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$.

Задачі і вправи для самостійної роботи

Обчислити ранги матриць з допомогою елементарних перетворень.

1.47. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

1.48. $\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

1.49. $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 3 & -4 \\ 4 & -7 & -2 & 1 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.50. $\begin{pmatrix} 24 & 19 & 36 & 72 & -38 \\ 49 & 40 & 73 & 147 & -80 \\ 73 & 59 & 98 & 219 & -118 \\ 47 & 36 & 71 & 141 & -72 \end{pmatrix}$.

Обчислити ранги матриць методом обрамлення.

1.51. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1.52. $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

1.53. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & -3 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & -3 & -5 & 0 & -7 \\ 7 & -5 & 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

1.54. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

Знайти фундаментальну систему розв'язків і загальний розв'язок.

1.55. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

1.56. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$

1.57. $$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 + 11x_4 = 0. \end{cases}$$

1.58. $$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 7x_5 = 0, \\ 9x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_4 + 8x_5 = 0. \end{cases}$$

1.59. $$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 7x_4 + 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 - 3x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 9x_2 - 3x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

1.60. $$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 0, \\ 7x_1 + 10x_2 + x_3 + 6x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

§ 7. Основні операції з матрицями

У § 6 широко застосовувались лінійні операції з рядками і стовпцями різних матриць. Проте в деяких питаннях лінійної алгебри доводиться розглядати операції з матрицями як з єдиним об'єктом.

В основі вивчення операцій з матрицями лежить поняття рівності матриць. Будемо виходити з такого ***означення***: *дві матриці однієї і тієї самої розмірності називаються рівними, якщо рівні всі їх відповідні елементи.*

Отже, матриці A і B однієї і тієї самої розмірності $n \times m$ рівні тоді і тільки тоді, коли $A_{ik} = B_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2, \ldots, m$. При цьому ще раз наголосимо, що порівнювати можна лише матриці однієї і тієї самої розмірності.

Сумою двох матриць A і B однієї і тієї самої розмірності $n \times m$ називається матриця C тієї самої розмірності така, що

$$(C)_{ik} = (A)_{ik} + (B)_{ik}. \tag{24}$$

Отже, при додаванні матриць (додавати можна тільки матриці однієї і тієї самої розмірності) треба складати всі їх відповідні елементи.

Оскільки додавання матриць зводиться до додавання чисел — елементів цих матриць, очевидно, має місце комутативна й асоціативна властивість:

$$A + B = B + A; \; (A + B) + C = A + (B + C). \qquad (25)$$

Добутком матриці A на число λ (або числа λ на матрицю A) називається матриця B така, що

$$(B)_{ik} = \lambda(A)_{ik}, \qquad (26)$$

тобто при множенні матриці на число (або числа на матрицю) потрібно всі елементи матриці помножити на це число. Нагадаємо, що при множенні на число визначника матриці достатньо було помножити на це число лише елементи будь-якого рядка (або стовпця).

Легко перевірити, що при множенні матриці на число має місце розподільна властивість:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B; \qquad (\lambda + \eta)A = \lambda A + \eta A. \qquad (27)$$

Визначимо тепер добуток двох матриць. Нехай дано матрицю A розмірності $n \times m$ і матрицю B розмірності $m \times p$.

Означення. *Добутком матриці A розмірності $n \times m$ на матрицю B розмірності $m \times p$ називається матриця C розмірності $n \times p$ така, що*

$$(C)_{ik} = \sum_{l=1}^{m} (A)_{il}(B)_{lk}, \qquad (28)$$

інакше кажучи, для одержання елемента, що знаходиться в i-му рядку і в k-му стовпці матриці добутку, потрібно обчислити суму добутків елементів i-го рядка першого множника і відповідних елементів k-го стовпця другого множника. Отже, для того щоб можливо було скласти вказану суму, потрібна рівність кількості стовпців у першій матриці (тобто кількості елементів у кожному рядку) кількості рядків у другій (тобто кількості елементів у кожному стовпці).

Приклад 1.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Знайти $A \cdot B$.

Матриця A має розмірність 3×2, матриця B — 2×2; добуток існує — це матриця розмірності 3×2.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+2(-1) & 1\cdot 1+2\cdot 2 \\ 2\cdot 2+0(-1) & 2\cdot 1+0\cdot 2 \\ -1\cdot 2+1(-1) & (-1)\cdot 1+1\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Добуток матриць не має переставної властивості: $A \cdot B$, взагалі кажучи, не дорівнює $B \cdot A$.

По-перше, з того, що можна обчислити $A \cdot B$, зовсім не виходить, що має смисл $B \cdot A$. Наприклад, у тільки що розглянутому прикладі перестановка множників, тобто множення B на A неможливе, оскільки не можна матрицю розмірності 2×2 помножити на матрицю розмірністю 3×2 — кількість стовпців першої матриці тут не дорівнює кількісті рядків другої. Проте навіть якщо добуток $B \cdot A$ існує, то нерідко $AB \neq BA$. Розглянемо такий приклад.

Нехай $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ і $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Тоді $AB = \begin{pmatrix} 1\cdot 2+3(-1) & 1\cdot 1+3\cdot 0 \\ -1\cdot 2+2(-1) & -1\cdot 1+2\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$;

$$BA = \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1(-1) & 2\cdot 3+1\cdot 2 \\ -1\cdot 1+0(-1) & -1\cdot 3+0\cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Отже, $AB \neq BA$.

Разом з тим можна довести, що

$$\begin{gathered} (A \cdot B)C = A(B \cdot C), \\ A(B + C) = AB + AC \end{gathered} \tag{29}$$

(звичайно, береться до уваги, чи всі ці добутки мають смисл).

Відповідно до визначення добутку матриць завжди можливо множення квадратних матриць одного порядку, при цьому добуток буде матрицею того самого порядку. Зазначимо без доведення одну з властивостей добутку квадратних матриць одного порядку: ***визначник добутку двох матриць одного і того самого порядку дорівнює добутку визначників матриць, що перемножуються.***

Дуже часто доводиться розглядати добуток матриці розмірності $n \times m$ на матрицю розмірності $m \times 1$, тобто на матрицю з одним стовпцем. Очевидно, ми повинні одержати в результаті матрицю розмірності $n \times 1$, тобто також матрицю з одним стовпцем. Нехай, наприклад, потрібно помножити матрицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ на матрицю } X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}.$$

У результаті дістанемо матрицю $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$, елементи якої обчислюються за формулами

$$b_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = \sum_{k=1}^{m} a_{1k}x_k,$$

$$b_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = \sum_{k=1}^{m} a_{2k}x_k,$$

....

$$b_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = \sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k.$$

Проте це означає, що систему рівнянь першого порядку, розглянуту в § 5, можна записати в дуже зручній матричній формі: $AX = B$.

Суттєву роль в різних застосуваннях матричної алгебри відіграє квадратна матриця, у якої всі діагональні елементи (тобто елементи, які знаходяться на головній діагоналі) дорівнюють 1, а всі інші елементи — нулю. Така матриця називається *одиничною матрицею*. Очевидно, що визначник одиничної матриці

$$\det E = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & .. & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Характерні такі властивості одиничної матриці. Нехай задана квадратна матриця A порядку n і E — одинична матриця того самого порядку. Тоді $AE = EA = A$.

Дійсно, $(AE)_{ik} = \sum_{l=1}^{n} (A)_{il}(E)_{lk}$, але $(E)_{lk} = \begin{cases} 0 & l \neq k, \\ 1 & l = k. \end{cases}$

Тому в сумі $\sum_{l=1}^{n}(A)_{il}(E)_{lk}$ відмінні від нуля тільки ті складові, для яких $l = k$. Отже, $(AE)_{ik} = (A)_{ik}$ і звідси $AE = A$. Аналогічно і для добутку EA.

Контрольні запитання і завдання

1. Як визначаються лінійні операції над матрицями та які їх властивості? Наведіть приклади.
2. Що називається добутком двох матриць?
3. Які умови накладаються на розмірності матриць при відповідних операціях над ними?
4. Що таке одинична матриця?
5. Які властивості має операція множення матриць?
6. Чи можна перемножити матрицю з розмірами 2×3 на матрицю з такими самими розмірами?

Приклади розв'язування задач

1.61. Знайти добуток $A{\cdot}B$ та $B{\cdot}A$ двох матриць:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Добуток $A{\cdot}B$ не існує, бо число стовпців матриці A не дорівнює числу рядків матриці B.

Число стовпців матриці B дорівнює числу рядків матриці A. Отже, існує добуток $B{\cdot}A$:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \\ -2 & 5 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 3(-2) & 4(-1) + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 1(-3) + 3 \cdot 0 \\ (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 2 + 2(-2) & (-1)(-1) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 2 \cdot 5 & (-1)2 + 1 \cdot 4 + 0(-3) + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 15 & 13 \\ -2 & 11 & 2 \end{pmatrix}.$$

1.62. Знайти матрицю $2A + 5B$, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проведемо перетворення:

$$2A = \begin{pmatrix} 6 & 10 & 14 \\ 4 & -2 & 0 \\ 8 & 6 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$2A + 5B = \begin{pmatrix} 11 & 20 & 34 \\ 14 & 13 & -10 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Задачі і вправи для самостійної роботи

1.63. Знайти добуток $A{\cdot}B$ і $B{\cdot}A$ двох матриць.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.64. Знайти добуток матриць $A{\cdot}B$.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1.65. Знайти добутки матриць AB і BA, якщо

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.66. Знайти значення матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$ при

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, якщо E — одинична матриця третього порядку.

§ 8. Обернена матриця. Розв'язування матричних рівнянь

При розгляді дій з матрицями не вводиться операція ділення. Однак можна ввести поняття, яке дає змогу дати деякий еквівалент цій дії.

Означення. *Квадратна матриця B називається оберненою квадратній матриці A, якщо добуток $A \cdot B$ є одиничною матрицею.*

Доведемо, що для будь-якої квадратної матриці A, визначник якої відмінний від нуля, існує одна і тільки одна обернена матриця, і наведемо спосіб її обчислення.

Нехай задано матрицю

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

і $\det A \neq 0$.

Припустимо, що

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

є шуканою матрицею і

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

— одиничною матрицею того самого порядку n.

Відповідно до умови $AB = E$, тому для визначення n^2 елементів b_{ik} матриці B маємо n систем рівнянь першого степеня, кожна з яких містить n рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \dots + a_{1n}b_{n1} = 1, \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \dots + a_{2n}b_{n1} = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}b_{11} + a_{n2}b_{21} + \dots + a_{nn}b_{n1} = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \ldots + a_{1n}b_{n2} = 0, \\ a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + \ldots + a_{2n}b_{n2} = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}b_{12} + a_{n2}b_{22} + \ldots + a_{nn}b_{n2} = 0. \end{cases}$$

Такі системи мають одну і ту саму основну матрицю A.

Згідно з припущенням $\det A \neq 0$, тому кожна система має єдиний розв'язок, який можна обчислити за формулами Крамера. Оскільки в правій частині в кожній системі тільки один елемент дорівнює одиниці, а всі інші дорівнюють нулю, то

$$b_{11} = \frac{A_{11}}{\det A}, \quad b_{21} = \frac{A_{12}}{\det A}, \quad \ldots, \quad b_{n1} = \frac{A_{1n}}{\det A},$$

$$b_{12} = \frac{A_{21}}{\det A}, \quad b_{22} = \frac{A_{22}}{\det A}, \quad \ldots, \quad b_{n2} = \frac{A_{2n}}{\det A}$$

і т. д. і взагалі $b_{ik} = \dfrac{A_{ki}}{\det A}$, $i, k = 1, 2, \ldots, n$.

Отже, матриця B, обернена матриці A, яка позначається частіше символом A^{-1}, має вигляд

$$B = A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (30)$$

Раніше було зазначено, що для довільних матриць A і B $A \cdot B \neq B \cdot A$. Проте можна довести, що $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1}$.

Дійсно, $\left(A^{-1} \cdot A\right)_{ik} = \sum\limits_{l=1}^{n}(A^{-1})_{il} \cdot (A)_{lk} = \sum\limits_{l=1}^{n}\dfrac{A_{il}}{\det A}a_{lk} = \dfrac{1}{\det A}\sum\limits_{l=1}^{n}a_{lk}A_{li}$.

Однак сума добутків елементів будь-якого рядка матриці на алгебраїчні доповнення, відповідні елементам другого рядка, дорівнює нулю, а сума добутків елементів будь-якого рядка матриці на відповідні алгебраїчні доповнення елементів того самого рядка дорівнює самому визначнику.

Тому $(A^{-1} \cdot A)_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$

Отже, $A^{-1} \cdot A = E = A \cdot A^{-1}$.

Поняття "обернена матриця" можна використовувати для розв'язання матричних рівнянь.

Нехай задано рівняння $AX = B$, де A і B — задані квадратні матриці порядку n, а X — шукана квадратна матриця того самого порядку.

Нехай $\det A \neq 0$. Тоді обчислюємо матрицю A^{-1} і помножимо ліву і праву частини заданого рівняння зліва на A^{-1}:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X) = A^{-1}\cdot B.$$

Оскільки

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X) = (A^{-1}\cdot A)\cdot X$$

(згідно з асоціативною властивістю множення матриць), то

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X) = E\cdot X = X$$

і дістанемо

$$X = A^{-1}\cdot B.$$

Для обчислення матриці A^{-1}, оберненої матриці A, можна, звичайно, використати формули (30). Проте, як правило, значно вигідніше використовувати для цього метод повного виключення. Це доцільно ще й тому, що всі n систем рівнянь, які служать для визначення стовпців матриці A^{-1}, відрізняються тільки правими частинами. Тому процес перетворення розширених матриць цих систем можна проводити одночасно для всіх матриць.

§ 9. Модель багатогалузевої економіки

У макроекономіці виникає питання, пов'язане з ефективністю ведення багатогалузевого господарства: яким має бути обсяг виробництва кожної з n галузей, щоб задовольнити всі потреби в продукції цієї галузі? При цьому кожна галузь виступає, з одного боку, як виробник деякої продукції, з іншого — як споживач продукції і своєї, і виробленої іншими галузями.

Розглянемо процес виробництва за деякий період часу (наприклад, рік). Введемо такі позначення:

x_i — загальний (валовий) обсяг продукції i-ї галузі ($i = 1, 2, ..., n$);

x_{ij} — обсяг продукції i-ї галузі, що споживається в j-й галузі в процесі виробництва ($i, j = 1, 2, ..., n$);

y_i — обсяг кінцевої продукції i-ї галузі для невиробничого споживання.

Оскільки валовий обсяг продукції будь-якої i-ї галузі дорівнює сумарному обсягу продукції, що споживається n галузями, і кінцевої продукції, то

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{31}$$

Рівняння (31) називається ***співвідношенням балансу***. Розглядатимемо *вартісний міжгалузевий баланс*, коли всі величини, які входять до рівняння (31), мають вартісне вираження.

Введемо *коефіцієнти прямих витрат*

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{32}$$

які відображають витрати продукції i-ї галузі на виробництво одиниці продукції j-ї галузі.

Можна вважати, що на деякому проміжку часу коефіцієнти a_{ij} будуть сталими і залежними від технології виробництва, що склалася. Отже, це визначає лінійну залежність матеріальних витрат від валового випуску, тобто

$$x_{ij} = a_{ij} x_j \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n), \tag{33}$$

внаслідок чого побудована на цій основі модель міжгалузевого балансу одержала назву лінійної.

Позначимо

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \tag{34}$$

де X — вектор валового випуску; A — матриця прямих витрат; Y — вектор кінцевого продукту. Тоді систему можна записати в матричному вигляді

$$X = AX + Y. \tag{35}$$

Основне завдання міжгалузевого балансу полягає у відшуканні такого вектора валового випуску X, який при відомій матриці прямих витрат A забезпечує заданий вектор кінцевого продукту Y.

Перепишемо рівняння (35) у вигляді

$$(E - A)X = Y. \tag{36}$$

Якщо матриця $(E - A)$ невироджена, тобто $|E - A| \neq 0$, то

$$X = (E - A)^{-1} Y. \tag{37}$$

Матриця $S = (E - A)^{-1}$ називається матрицею повних витрат, кожний елемент S_{ij} якої є величиною валового випуску продукції i-ї галузі, необхідного для забезпечення випуску одиниці кінцевого продукту j-ї галузі $y_j = 1$ ($j = 1,2, \ldots, n$).

Відповідно до економічного змісту завдання значення x_i мають бути невід'ємними при невід'ємних значеннях $y_i \geq 0$ та $a_{ij} \geq 0$, де $i, j = 1,2\ldots,n$.

Матриця $A \geq 0$ називається продуктивною, якщо для будь-якого вектора $Y \geq 0$ існує розв'язок $X \geq 0$ рівняння (32). У цьому випадку і модель називають продуктивною.

Існує кілька критеріїв продуктивності матриці A. Один з них полягає у тому, що матриця продуктивна, якщо $a_{ij} \geq 0$ для будь-яких $i, j = 1, 2, ..., n$, і максимум сум елементів її стовпців не перевищує одиниці:

$$\max_{j=1,2,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1,$$

причому хоча б для одного зі стовпців сума елементів строго менше одиниці:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1.$$

Контрольні запитання і завдання

1. Дайте означення оберненої матриці.
2. Як можна відшукати обернену матрицю?
3. Які існують способи знаходження оберненої матриці?
4. Запишіть систему лінійних рівнянь у матричному вигляді.
5. Наведіть приклади застосування оберненої матриці.
6. Як розв'язується система лінійних рівнянь у матричному вигляді з використанням оберненої матриці?

Приклади розв'язування задач

1.67. Методом Гаусса розв'язати у випадку сумісності систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = -3, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 = 5, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Указати вільні змінні, базисні змінні та базисний розв'язок, який їм відповідає. Перевірити цей розв'язок підстановкою.

Розрахунки за цим методом представимо у вигляді таблиці 1, до якої заносимо розширену матрицю системи.

На кожній ітерації вибирають головний рядок та головний стовпчик, на перетині яких знаходиться головний елемент.

За головний елемент для спрощення обчислень зручно вибирати елемент рівний 1, та за головний стовпчик вибирати стовпчик, який містить якомога більше нулів.

Перша ітерація. Вибираємо третій головний стовпчик і другий головний рядок. На їх перетині стоїть головний елемент a_{23}, який ми виділимо рамкою. Тут і надалі через a_{qp} позначимо елемент, який стоїть на перетині рядка з номером q і стовпчика з номером p.

Далі перераховуємо елементи головного рядка за формулою

$$a'_{qk} = \frac{a_{qk}}{a_{qp}}, \tag{38}$$

де $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; q — номер головного рядка; p — номер головного стовпчика; a'_{qk} — елементи нової матриці, яка відповідає першій ітерації.

Таблиця 1

№ ітерації	x_1	x_2	x_3	x_4	a_{ik}
0	1	1	–1	1	2
	1	–2	1	–1	–3
	2	1	0	2	5
	5	–2	1	1	1
1	2	–1	0	0	–1
	1	–2	1	–1	–3
	2	1	0	2	5
	4	0	0	2	4
2	4	0	0	2	4
	5	0	1	3	7
	2	1	0	2	5
	4	0	0	2	4
3	2	0	0	1	2
	–1	0	1	0	1
	–2	1	0	0	1
	0	0	0	0	0
3′	2	0	0	1	2
	–1	0	1	0	1
	–2	1	0	0	1

Оскільки для даного прикладу $a_{qp} = a_{23} = 1$, то згідно з формулою (38) всі елементи головного рядка потрібно поділити на 1, а отже, переписати без зміни.

Елементи інших рядків обчислюються за формулою

$$a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{qk}}{a_{qp}} a_{ip},$$

або

$$a'_{ik} = a_{ik} - a'_{qk} a_{ip}, \tag{39}$$

де $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 0, 1, 2, \ldots, n$; q — номер головного рядка ($q = 2$); p — номер головного стовпчика ($p = 3$).

Оскільки $a_{33} = 0$, то третій рядок згідно з формулою (39) перепишеться без зміни. Для елементів першого рядка маємо

$$
\begin{aligned}
a'_{11} &= a_{11} - a'_{21}a_{13} = 1-1(-1)=2;\\
a'_{12} &= a_{12} - a'_{22}a_{13} = 1-(-2)(-1)= -1;\\
a'_{13} &= a_{13} - a'_{23}a_{13} = 0;\\
a'_{14} &= a_{14} - a'_{24}a_{13} = 1-(-1)(-1)=0;\\
a'_{10} &= a_{10} - a'_{20}a_{13} = 2-(-3)(-1)= -1.
\end{aligned}
$$

Елементи четвертого рядка обчислюють аналогічно: $a'_{41} = 4$, $a'_{42} = 0$, $a'_{43} = 0$, $a'_{44} = 2$, $a'_{40} = 4$.

Після цих обчислень головний стовпчик має перетворитися в одиничний.

Зауважимо, що на наступних ітераціях ні другий рядок, ні третій стовпчик вже не можуть бути вибраними за головні.

Друга ітерація. За головний вибираємо елемент $a'_{32} = 1$ (головний рядок — третій, головний стовпчик — другий). Проводимо обчислення, аналогічні першій ітерації.

Третя ітерація. $a''_{14} = 2$ — головний елемент.

На третій ітерації виник нульовий рядок, який можна відкинути (крок 3′).

Після останньої ітерації жоден рядок не може бути вибраний за головний, отже, розрахунки закінчено.

Через те що ми отримали три лінійно незалежних одиничних стовпчики при чотирьох змінних, то дана система рівнянь невизначена. Змінні, які відповідають лінійно незалежним одиничним стовпчикам, можуть бути вибрані за базисні. Для нашого прикладу x_2, x_3, x_4 — базисні змінні. Усі інші (тобто x_1) — вільні.

Оскільки остання таблиця відповідає системі

$$
\begin{cases}
2x_1 + x_4 = 2,\\
-x_1 + x_3 = 1,\\
-2x_1 + x_2 = 1,
\end{cases}
$$

то загальний розв'язок вихідної системи має вигляд (базисні змінні виражаються через вільні)

$$
\begin{cases}
x_2 = 1 + 2x_1,\\
x_3 = 1 + x_1,\\
x_4 = 2 - 2x_1.
\end{cases}
$$

Прирівнявши всі вільні змінні до нуля (тобто $x_1 = 0$), знайдемо базисний розв'язок: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

Перевіримо цей розв'язок підстановкою у вихідну систему:

$$\begin{cases} 0+1-1+2=2, \\ 0-2\cdot 1+1-2=-3, \\ 2\cdot 0+1+2\cdot 2=5, \\ 5\cdot 0-2\cdot 1+1+2=1. \end{cases}$$

Отже, ці значення є розв'язком.

1.68. Для виробництва продукції створено три фірми, кожна з яких випускає один вид продукції. В таблиці 2 задано:

— коефіцієнти прямих витрат a_{ik}, тобто кількість одиниць продукції i-ї фірми, яка використовується як проміжний продукт для випуску одиниці продукції k-ї фірми;

— кількість одиниць y_i продукції i-ї фірми, розрахованих на реалізацію (кінцевий продукт).

Визначити:

а) коефіцієнт повних витрат;

б) валовий випуск (план) для кожної фірми;

в) коефіцієнти непрямих витрат.

Таблиця 2

Фірми	Прямі витрати a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
	Перша	Друга	Третя	
Перша	0,1	0,2	0	10
Друга	0,1	0	0,2	30
Третя	0	0,2	0	20

Нехай $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ — виробнича програма фірм, де x_i — валовий випуск продукції i-ї фірми (i=1, 2, 3).

Позначимо через $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ план випуску товарної продукції (розрахованої на реалізацію). Матрицю коефіцієнтів прямих витрат позначимо через $A = \| a_{ik} \|$. Вектор Y та матрицю A задано в таблиці 2.

Згідно з умовою задачі i-та фірма віддає рівно $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$ одиниць продукції на внутрішні потреби фірм. Тоді виробничі зв'язки фірм можна представити за допомогою системи трьох рівнянь: $x_i = y_i + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3$, $i = 1, 2, 3$.

Іншими словами, валовий випуск продукції x_i складається з випуску товарної продукції y_i та випуску продукції для внутрішніх потреб.

У матричній формі цю рівність можна переписати:

$$Y + AX = X, \text{ або } X - AX = Y.$$

Якщо E — одинична матриця третього порядку, то останнє рівняння перепишеться у вигляді $(E - A)X = Y$.

Його розв'язок у матричній формі має вигляд

$$X = (E - A)^{-1}Y, \tag{40}$$

де $(E - A)^{-1}$ — обернена матриця.

а) Елементи матриці $(E - A)^{-1}$ є ні що інше, як шукані коефіцієнти повних витрат. Позначимо $S = E - A$, тобто

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}2 & 0 \\ 0{,}1 & 0 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}9 & -0{,}2 & 0 \\ -0{,}1 & 1 & -0{,}2 \\ 0 & -0{,}2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо матрицю S^{-1} методом Гаусса.

Розрахунки представимо у вигляді таблиці 3, в лівій частині якої запишемо вихідну матрицю S, справа — матрицю E.

Відповідні перетворення рядків таблиці проводимо так само, як і при розв'язку системи рівнянь (див. табл.1), намагаючись отримати одиничні стовпчики (ітерації 1—3). Якщо вихідна матриця невироджена, то після проведення n ітерацій (n — порядок системи) дістанемо n одиничних стовпчиків. Якщо вихідна матриця вироджена, то після якоїсь ітерації в лівій частині таблиці з'явиться нульовий рядок. Це буде свідчити про те, що оберненої матриці не існує.

Для нашого прикладу ми отримали три одиничних стовпчики. На останньому кроці (3′) перестановкою рядків утворюємо в лівій частині таблиці одиничну матрицю. Тоді в правій частині таблиці буде записана обернена матриця.

Таблиця 3

№ ітерації	Матриця S			Матриця E		
0	0,9	−0,2	0	1	0	0
	−0,1	1	−0,2	0	1	0
	0	−0,2	1	0	0	1
1	0,9	−0,2	0	1	0	0
	−0,1	0,96	0	0	1	0,2
	0	−0,2	1	0	0	1
2	0	8,44	0	1	9	1,8
	1	−9,6	0	0	−10	−2
	0	−0,2	1	0	0	1
3	0	1	0	0,12	1,07	0,21
	1	0	0	1,15	0,27	0,02
	0	0	1	0,02	0,21	1,04
3′	1	0	0	1,15	0,27	0,02
	0	1	0	0,12	1,07	0,21
	0	0	1	0,02	0,21	1,04

Отже, матриця коефіцієнтів повних витрат має такий вигляд:

$$S^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}15 & 0{,}27 & 0{,}02\\ 0{,}12 & 1{,}07 & 0{,}21\\ 0{,}02 & 0{,}21 & 1{,}04\end{pmatrix}.$$

Наприклад, для випуску одиниці продукції першій, другій та третій фірмам потрібно витратити відповідно 1,15; 0,27 та 0,02 одиниць продукції першої фірми.

б) Для визначення валового випуску продукції використовуємо рівність (40)

$$X=(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}1{,}15 & 0{,}27 & 0{,}02\\ 0{,}12 & 1{,}07 & 0{,}21\\ 0{,}02 & 0{,}21 & 1{,}04\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}10\\ 30\\ 20\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 37{,}5\\ 27{,}3\end{pmatrix}.$$

Отже, $x_1=20$, $x_2=37{,}5$, $x_3=27{,}3$.

в) Коефіцієнти непрямих витрат знайдемо як різницю між повними витратами S^{-1} та прямими витратами A, або в матричній формі

$$S^{-1}-A=\begin{pmatrix}1{,}05 & 0{,}07 & 0{,}02\\ 0{,}02 & 1{,}07 & 0{,}01\\ 0{,}02 & 0{,}01 & 1{,}04\end{pmatrix}.$$

1.69. Знайти матрицю, обернену матриці

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 2 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю

$$B^{*}=\left(\begin{array}{rrr|rrr}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Перші три стовпці цієї матриці — стовпці заданої матриці A, наступні три стовпці, відділені рискою, які складають разом одиничну матрицю, — стовпці вільних членів для систем рівнянь, що визначають елементи оберненої матриці.

Проводимо звичайні операції методом повного виключення:

$$B^* \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -2 & -4 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{array}\right).$$

Матриця, відокремлена рискою, і є шукана, оскільки кожний її стовпець є розв'язком відповідної системи рівнянь, тобто

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.70. Знайти матрицю, обернену матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю

$$B^* = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 5 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 17 & -2 & -1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -11 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 17 & -2 & -1 & -6 \\ -11 & 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Другий спосіб знаходження оберненої матриці

1.71. Знайти обернену A^{-1} матрицю до матриці.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо визначник матриці A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} \underset{(1\text{-й р.} + (3\text{-й р.} - 2\text{-й р.}))}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

Матриця A неособлива, оскільки $\det A = -1 \neq 0$.

Обчислимо алгебраїчні доповнення елементів цього визначника.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = 38; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -27;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = -41; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 29;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 34; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -24.$$

Згідно з формулою (30) записуємо

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}.$$

1.72. Знайти матрицю, обернену до даної

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо обернену матрицю у вигляді

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з правилом множення матриць дістанемо

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 2\alpha_3 & \beta_1 + 2\beta_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 & -\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 - \\ \alpha_2 - \alpha_3 & \beta_2 - \beta_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 + 2\gamma_3 \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 \\ \gamma_2 - \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для знаходження елементів матриці A^{-1} запишемо системи

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = 1, \\ -\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} \beta_1 + 2\beta_3 = 0, \\ -\beta_1 + \beta_2 + 2\beta_3 = 1, \\ \beta_2 - \beta_3 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_1 + 2\gamma_3 = 0, \\ -\gamma_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3 = 0, \\ \gamma_2 - \gamma_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язки цих систем і дають нам елементи оберненої матриці:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

1.73. Знайти матрицю X з рівняння

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Помножимо обидві частини рівняння з лівого боку на матрицю, обернену до матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Згідно з попереднім прикладом $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

У лівій частині рівняння за асоціативним законом маємо

$$A^{-1}(A \cdot X) = (A^{-1} \cdot A)X = EX = X.$$

У правій частині

$$\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{13}{5} & -1 & \frac{13}{5} \\ \frac{21}{5} & 1 & \frac{16}{5} \\ \frac{1}{5} & 0 & \frac{6}{5} \end{pmatrix} = X.$$

З а у в а ж е н н я. Оскільки множення матриць некомутативне — $A \cdot B \neq B \cdot A$, то в задачах такого типу потрібно уважно визначати, з якого боку слід множити обидві частини рівняння на матрицю, обернену до однієї з даних.

1.74. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 5x_2 = -3, \end{cases}$$

представивши її у вигляді матричного рівняння.

Перепишемо систему у вигляді $AX = B$, де

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок матричного рівняння має вигляд $X = A^{-1}B$. Знайдемо A^{-1}. Маємо

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 5 = -2 \neq 0.$$

Обчислимо алгебраїчне доповнення елементів цього визначника.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -5; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 11;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -13;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7.$$

Відповідно до формули (30)

$$A^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}.$$

Отже,

$$X = A^{-1}\cdot B = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -5 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 11 & -13 & -7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -25+30-9 \\ 5-6+3 \\ 55-78+21 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$ тобто $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$.

Задачі і вправи для самостійної роботи

Знайти обернені матриці.

1.75. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$.

1.76. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}$.

1.77. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1.78. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

1.79. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1.80. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

Розв'язати матричні рівняння.

1.81. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}$.

1.82. $X\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.

1.83. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 10 & 2 & 7 \\ 10 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

1.84. $X\begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ -5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 3 & 0 \\ -5 & 9 & 0 \\ -2 & 15 & 0 \end{pmatrix}$.

Розв'язати системи, перетворивши їх у матричні рівняння.

1.85. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

1.86. $\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 5. \end{cases}$

1.87. Для виробництва промислової продукції створено три фірми, кожна з яких випускає один вид продукції. В таблиці задано:

— коефіцієнти прямих витрат a_{ik}, тобто кількість одиниць продукції i-ї фірми, яка використовується як проміжний продукт для випуску одиниці продукції k-ї фірми;

— кількість одиниць y_i продукції фірми, розрахованих на реалізацію (кінцевий продукт).

Визначити:

а) коефіцієнти повних витрат;

б) валовий випуск (план) для кожної фірми;

в) коефіцієнти непрямих витрат.

Таблиця

Варіант	Фірми	Прямі витрати a_{ik}			Кінцевий продукт y_i
		Перша	Друга	Третя	
1	Перша Друга Третя	0,1 0,3 0,1	0 0 0,2	0,1 0,1 0	30 40 50
2	Перша Друга Третя	0,2 0 0,2	0,1 0,3 0,1	0 0,1 0	50 60 20
3	Перша Друга Третя	0 0,3 0,1	0,2 0,1 0,2	0,2 0 0,1	40 50 60
4	Перша Друга Третя	0,1 0,2 0	0,2 0,1 0,1	0 0,3 0	100 120 110
5	Перша Друга Третя	0 0,1 0	0,1 0,1 0,2	0,3 0 0,2	70 100 120
6	Перша Друга Третя	0,2 0,2 0,1	0,1 0 0,1	0 0,1 0	180 200 210
7	Перша Друга Третя	0 0,3 0,1	0,3 0,2 0,2	0,1 0,1 0	30 60 100
8	Перша Друга Третя	0,2 0,2 0,1	0,1 0,1 0,1	0,1 0 0	400 300 200

Відповіді до глави 1

1.8. 18. **1.9.** $4ab$ **1.10.** 0. **1.11.** 0. **1.12.** 900. **1.13.** 1. **1.14.** 160. **1.15.** −98. **1.16.** $(-1)^{n-1}5^n$. **1.17.** $n!$. **1.18.** $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot x(x-1)(x-2)...(x-n)$. **1.19.** −264. **1.27.** $x_1 = 16$, $x_2 = 7$. **1.28.** $x_1 = 3$, $x_2 = 2$. **1.29.** $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$. **1.30.** $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. **1.31.** $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 2$, $x_4 = -2$. **1.32.** $x_1 = 2$, $x_2 = x_3 = x_4 = 0$. **1.33.** $x_1 = 2$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$. **1.34.** $x_1 = \alpha_4 - \frac{53}{18}\alpha_5 + \frac{20}{9}$, $x_2 = -\frac{5}{2}\alpha_4 + \frac{5}{6}\alpha_5 - \frac{5}{3}$, $x_3 = \frac{2}{9}\alpha_5 - \frac{1}{9}$, $x_4 = \alpha_4$, $x_5 = \alpha_5$; α_4, α_5 — довільні числа. **1.35.** Несумісна. **1.36.** $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = -4$, $x_4 = -1$. **1.37.** $x_1 = \alpha_1$, $x_2 = \frac{5 - 8\alpha_1 - \alpha_2}{12}$, $x_3 = \alpha_2$, $x_4 = \frac{5\alpha_2 - 1}{4}$. **1.38.** Несумісна. **1.47.** $r = 2$. **1.48.** $r = 3$. **1.49.** $r = 2$. **1.50.** $r = 3$. **1.51.** $r = 2$. **1.52.** $r = 3$. **1.53.** $r = 3$. **1.54.** $r = 2$. **1.55.** Система має тільки тривіальний розв'язок. **1.56.** $c_1e_1 + c_2e_2$, $e_1 = (8, -6, 1, 0)$, $e_2 = (-7, 5, 0, 1)$. **1.57.** $c_1e_1 + c_2e_2$, $e_1 = (1, 0, -\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, $e_2 = (0, 1, 5, -7)$. **1.58.** $c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3$, $e_1 = (1, 0, 0, -\frac{9}{4}, \frac{3}{4})$, $e_2 = (0, 1, 0, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$, $e_3 = (0, 0, 1, -2, 1)$. **1.59.** $c_1e_1 + c_2e_2$, $e_1 = (0, \frac{1}{3}, 1, 0, 0)$, $e_2 = (0, -\frac{2}{3}, 0, 0, 1)$. **1.60.** $c_1e_1 + c_2e_2$, $e_1 = (-3, 2, 1, 0, 0)$, $e_2 = (-5, 3, 0, 0, 1)$.

1.63.
$$AB = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 8 & 0 \\ 9 & 7 & 9 & -5 \\ 9 & 13 & 13 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 7 & 15 \\ 18 & 12 & 3 & 11 \\ 8 & 8 & -1 & 9 \\ 4 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.64. $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 13 \end{pmatrix}$. **1.65.**
$$AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 7 \\ 16 & 10 & 4 \\ 13 & 5 & 7 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 6 \\ 1 & 7 & 3 \\ 8 & 11 & 14 \end{pmatrix}.$$

1.66. $$2A^2 + 3A + 5E = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

1.75. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$. **1.76.** $\begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

1.77. $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$. **1.78.** $\begin{pmatrix} -\frac{7}{3} & 2 & -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. **1.79.** $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$.

1.80. $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$. **1.81.** $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$. **1.82.** $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$.

1.83. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$. **1.84.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

1.85. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$. **1.86.** $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

Глава 2. Векторна алгебра

§ 1. Основні поняття

Розглядаючи різні процеси та явища, ми зустрічаємося з об'єктами та величинами різної природи. Деякі з фізичних величин — такі як маса, температура, об'єм, потенціал — характеризуються одним числом. Вони називаються *скалярними* величинами або просто *скаляром*. Поряд зі скалярами існують величини, для характеристики яких потрібно вказати також і напрямок. Такі, наприклад, як сила, швидкість, переміщення, напруження та ін. Ці фізичні величини називаються *векторними величинами* або *векторами*.

Геометричною моделлю векторної величини є прямолінійний відрізок з вибраним на ньому напрямком.

У нашому курсі матимемо справу в основному з цією моделлю, а тому прямолінійний відрізок, для якого вказано, яка з обмежних його точок вважається початком, яка кінцем, називатимемо геометричним вектором або просто вектором.

Якщо A — початок вектора, B — його кінець, тоді сам вектор позначатимемо символом $\overline{AB}$. Символ $\overline{BA}$ буде позначати вектор, початок якого знаходиться в точці B, а кінець — в точці A. Під довжиною вектора розумітимемо віддаль між початком і кінцем вектора. Довжину, або, як часто говорять, модуль вектора $\overline{AB}$, позначають символом $\left|\overline{AB}\right|$. Очевидно, вектори $\overline{AB}$ і $\overline{BA}$ мають однакову довжину, тобто $\left|\overline{AB}\right| = \left|\overline{BA}\right|$, і протилежні напрямки.

Вище було зазначено, що вектор повністю визначається своїм початком та кінцем. Він може бути заданий також початком, довжиною та напрямком. Проте для ряду питань точка прикладання (початок вектора) не обов'язкова — має значення лише довжина вектора та його напрямок. Такі вектори називають *вільними*. Оскільки точка прикладання (початок вектора) будь-яка, тоді вектор можна переносити, зберігаючи його довжину і напрямок, у будь-яку точку простору. А тому вектори, які мають рівні довжини та однакові напрямки, називають рівними векторами. Тобто ***вектори рівні, якщо при паралельному переносі векторів і збігі їх початків будуть збігатися і їх кінці.***

Оскільки для вільних векторів можна не вказувати початок, то їх часто позначають одною літерою: вектор $\bar{a}$, вектор $\bar{b}$ і т.д. Довжину вектора $\bar{a}$ позначають символом $|\bar{a}|$.

Введемо ще три терміни, які часто зустрічаються у векторній алгебрі.

Колінеарними називають вектори, які лежать на паралельних прямих. Або вектори колінеарні, якщо при паралельному їх переносі та зіставленні їх початків вони лежать на одній прямій.

Компланарними називають вектори, які лежать на паралельних площинах. Тобто вектори компланарні, якщо при паралельному їх переносі і зіставленні їх початків вони лежать в одній площині. Очевидно, що два вектори завжди компланарні.

Нульовим вектором є вектор, у якого початок збігається з кінцем. Довжина нульового вектора дорівнює нулю, а напрямок довільний, тому нульовий вектор можна вважати колінеарним будь-якому іншому вектору. Позначатимемо нульовий вектор символом $\bar{0}$.

§ 2. Лінійні операції з векторами

Вводячи різні операції з векторами, збережемо прийняті в алгебрі чисел терміни “додавання” та “множення”. Проте слід брати до уваги, що оскільки поняття “вектор” та “число” суттєво різні, то і зміст указаних операцій може не збігатися з відповідними операціями алгебри чисел. А тому потрібно дослідити основні правила цих по суті нових операцій та перевірити виконання встановлених в алгебрі чисел законів: комутативного, асоціативного та дистрибутивного.

Означення. *Сумою двох векторів називається третій вектор, початок якого є початком першого вектора, кінцем – кінець другого, при чому початок другого вектора зіставлений з кінцем першого.*

Із цього означення випливає, що при додаванні векторів має місце комутативна властивість, тобто

$$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}. \tag{1}$$

Дійсно, доповнимо трикутник, складений з векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{a}+\bar{b}$, до паралелограма (рис. 3). Оскільки $\bar{a}=\overline{OA}=\overline{CB}$, $\bar{b}=\overline{AB}=\overline{OC}$ і згідно з означенням сума векторів $\overline{OA}+\overline{AB}=\overline{OB}$ і $\overline{OC}+\overline{CB}=\overline{OB}$, тоді $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$.

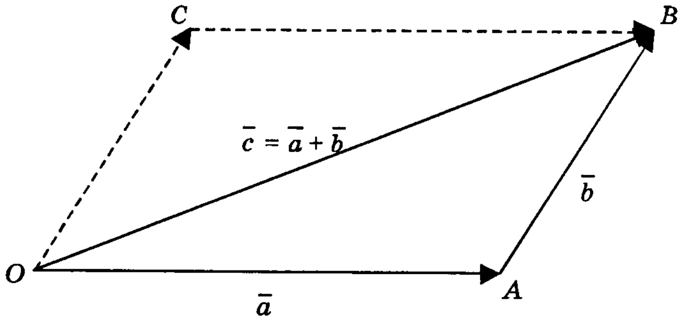

Рис. 3

Із цього випливає, що суму двох векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ можна визначити як діагональ паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, які виходять із загального початку заданих векторів.

Легко перевірити, що при додаванні векторів має місце асоціативна властивість, тобто

$$\left(\bar{a}+\bar{b}\right)+\bar{c}=\bar{a}+\left(\bar{b}+\bar{c}\right), \tag{2}$$

а тому суму трьох векторів можна записати у вигляді $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$. Дійсно, побудуємо із векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ вектор $\bar{a}+\bar{b}$; побудуємо також суму векторів $\bar{a}+\bar{b}$ та вектора $\bar{c}$ (рис. 4).

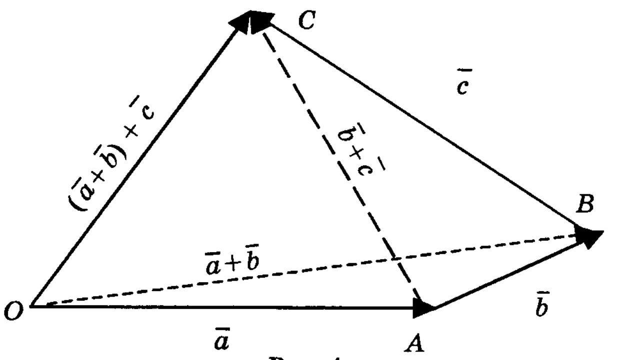

Рис. 4

Позначений пунктиром вектор $\overline{AC}$ згідно з означенням є сумою векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$, $\overline{OC} = \overline{OB} + \overline{BC} = \left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c}$. Разом з тим $\overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right)$, отже $\left(\bar{a} + \bar{b}\right) + \bar{c} = \bar{a} + \left(\bar{b} + \bar{c}\right)$.

Проведені міркування дають прийом додавання будь-якого числа векторів. Нехай задано k векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$ і потрібно знайти їх суму. До кінця вектора $\bar{a}_1$ прикладемо початок вектора $\bar{a}_2$, до кінця побудованого вектора $\bar{a}_2$ прикладемо початок вектора $\bar{a}_3$ і т.д. Нарешті, до кінця вектора $\bar{a}_{k-1}$ прикладемо початок вектора $\bar{a}_k$ (рис. 5).

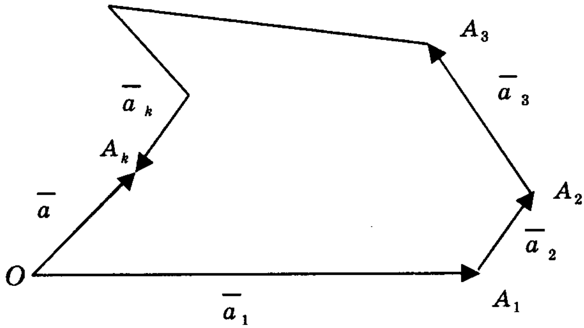

Рис. 5

Тоді вектор $\bar{a}$, початком якого є початок вектора $\bar{a}_1$, а кінцем — кінець вектора $\bar{a}_k$, і буде сумою векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$: $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_k$. При цьому байдуже, в якому порядку нумеруються задані вектори.

Отже, сума кількох векторів представляє собою вектор, який замикає ламану, побудовану на заданих векторах. Може статися, що кінець останнього вектора збігається з початком першого і, отже, у замикального вектора кінець збігається з початком. У цьому випадку сума векторів є нульовим вектором.

Означення. *Добутком вектора $\bar{a}$ на число λ (або числа λ на вектор $\bar{a}$) називається вектор $\bar{b}$, довжина якого в $|\lambda|$ раз більше довжини вектора $\bar{a}$ і напрямок збігається з напрямком вектора $\bar{a}$, якщо $\lambda > 0$, та протилежний напрямку $\bar{a}$, якщо $\lambda < 0$.*

Оскільки ділення на число $k \neq 0$ є множенням на число $\frac{1}{k}$, то можна виконувати і ділення вектора на відмінне від нуля число.

Нехай $\bar{a}$ — ненульовий вектор. Оскільки $\frac{1}{|\bar{a}|}$ — додатне число, то вектор $\bar{e} = \frac{1}{|\bar{a}|} \cdot \bar{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}$ напрямлений так, як і вектор $\bar{a}$. Довжина вектора $\bar{e}$ дорівнює, очевидно, 1. Вектор $\bar{e}$, який має довжину, що дорівнює 1, і напрямлений так, як і вектор $\bar{a}$, називається *ортом вектора* $\bar{a}$.

Добуток вектора $\bar{a}$ на число -1 (або, що те саме, добуток числа -1 на вектор $\bar{a}$), тобто вираз $(-1)\bar{a}$ (або $\bar{a}\cdot(-1)$), записують як $-\bar{a}$. Оскільки вектори $\bar{a}$ та $(-1)\cdot\bar{a}$ мають відповідно до означення однакові довжини та протилежні напрямки, то

$$\bar{a}+\left(-\bar{a}\right)=0. \tag{3}$$

Як і в алгебрі чисел, в алгебрі векторів немає потреби розглядати окремо дію віднімання. Відняти від вектора $\bar{a}$ вектор $\bar{b}$ означає додати до вектора $\bar{a}$ вектор $-\bar{b}$: $\bar{a}-\bar{b}=\bar{a}+\left(-\bar{b}\right)$. А тому у векторних рівностях вектори можна переносити з однієї частини рівності в іншу, змінюючи знак, який стоїть перед вектором, на протилежний. Тобто якщо $\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}$, то $\bar{a}=\bar{c}-\bar{b}$.

Неважко переконатися, що при множенні вектора на число мають місце асоціативна та дистрибутивна властивості. Покажемо, по-перше, що

$$\lambda\left(\mu\bar{a}\right)=(\lambda\mu)\bar{a}, \tag{4}$$

тобто має місце асоціативна властивість щодо числових множників.

Дійсно, оскільки довжина вектора $\mu\bar{a}$ дорівнює $|\mu|\,|\bar{a}|$, довжина вектора $\lambda\left(\mu\bar{a}\right)$ дорівнює $|\lambda|\,|\mu\bar{a}|=|\lambda|\,|\mu|\,|\bar{a}|$ та довжина вектора $(\lambda\mu)\bar{a}$ дорівнює $|\lambda\mu|\,|\bar{a}|=|\lambda|\,|\mu|\,|\bar{a}|$, тоді довжина векторів $\lambda\left(\mu\bar{a}\right)$ та $(\lambda\mu)\bar{a}$ однакова. Далі, якщо, наприклад, числа λ та μ додатні, тоді вектори $\mu\bar{a}$, $\lambda\left(\mu\bar{a}\right)$, $(\lambda\mu)\bar{a}$ напрямлені так, як і вектор $\bar{a}$, а тому всі вони мають однакові напрямки. Якщо $\lambda>0$ і $\mu<0$, тоді вектори $\mu\bar{a}$, $\lambda\left(\mu\bar{a}\right)$, $(\lambda\mu)\bar{a}$ напрямлені протилежно вектору $\bar{a}$, а тому також однаково напрямлені.

Аналогічні міркування проводяться і у всіх інших випадках.

Доведемо тепер, що

$$\lambda\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}. \tag{5}$$

Нехай $\bar{a}=\overline{OA}$, $\bar{b}=\overline{AB}$, $\lambda\bar{a}=\overline{OA_1}$, $\lambda\bar{b}=\overline{A_1B_1}$ (рис. 6 при $\lambda>0$ і рис. 7 при $\lambda<0$).

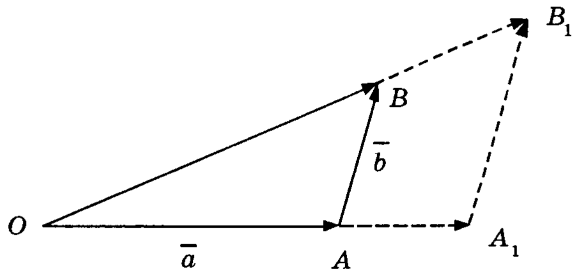

Рис. 6

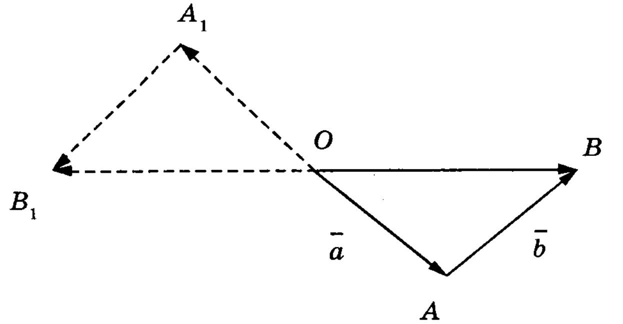

Рис. 7

Оскільки $\overline{AB} \| \overline{A_1B_1}$, то кути OAB та OA_1B_1 рівні. Оскільки $\left|\overline{OA_1}\right| / \left|\overline{OA}\right| = \lambda$, $\left|\overline{A_1B_1}\right| / \left|\overline{AB}\right| = \lambda$, то трикутники OAB та OA_1B_1 подібні. Звідси точки O, B, B_1 лежать на одній прямій і $\left|\overline{OB_1}\right| / \left|\overline{OB}\right| = \lambda$, а тому $\overline{OB_1} = \lambda \cdot \overline{OB}$. Проте $\overline{OB_1} = \lambda \cdot \bar{a} + \lambda \cdot \bar{b}$, $\overline{OB} = \bar{a} + \bar{b}$; твердження доведене.

Очевидно, має місце співвідношення

$$(\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}. \tag{6}$$

Розглянуті операції — додавання векторів та множення вектора на число — називаються *лінійними операціями*, а вектор

$$\lambda_1\overline{a_1} + \lambda_2\overline{a_2} + \ldots + \lambda_k\overline{a_k}, \tag{7}$$

отриманий в результаті проведення кількох лінійних операцій, — лінійною комбінацією векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \ldots, \overline{a_k}$. Числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ називаються коефіцієнтами цієї лінійної комбінації.

§ 3. Лінійна залежність та лінійна незалежність системи векторів

Нехай задано k векторів: $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_k}$. Назвемо таку задану множину векторів *системою векторів.*

Означення. *Система векторів називається лінійно залежною, якщо хоча б один з векторів системи може бути виражений як лінійна комбінація останніх.*

Отже, система векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_k}$ лінійно залежна, якщо, наприклад,

$$\overline{a_k} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_{k-1} \overline{a_{k-1}}, \tag{8}$$

де $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$ — деякі числа.

Якщо в задану систему (множину) векторів включений нульовий вектор, тоді система обов'язково лінійно залежна. Дійсно, завжди можна написати, що $\overline{a_k} = 0 = 0 \cdot \overline{a_1} + 0 \cdot \overline{a_2} + \ldots + 0 \cdot \overline{a_{k-1}}$, тобто виражати нульовий вектор як лінійну комбінацію (з нульовими коефіцієнтами) останніх векторів системи.

Приведене означення лінійної залежності системи векторів виділяє з інших якийсь один вектор системи. Щоб уникнути такого виділення, часто вводять інше означення лінійної залежності.

Означення. *Система векторів $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_k}$ називається лінійно залежною, якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$, із яких хоча б одне відмінне від нуля, такі що*

$$\lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2} + \ldots + \lambda_{k-1} \overline{a_{k-1}} + \lambda_k \overline{a_k} = 0. \tag{9}$$

Таке означення рівнозначне попередньому. Дійсно, якщо маємо рівність

$$\overline{a_k} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots + \alpha_{k-1} \overline{a_{k-1}},$$

тоді, переносячи $\overline{a_k}$ у праву частину, дістанемо $\alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \ldots$ $\ldots + \alpha_{k-1} \overline{a_{k-1}} + (-1)\overline{a_k} = 0$ і, отже, маємо рівність (9) при $\lambda_1 = \alpha_1$, $\lambda_2 = \alpha_2, \ldots, \lambda_{k-1} = \alpha_{k-1}$, $\lambda_k = -1 \neq 0$. Навпаки, якщо виконано умову (9) і, наприклад, $\lambda_k \neq 0$, тоді

$$\overline{a_k} = -\frac{\lambda_1}{\lambda_k} \overline{a_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda_k} \overline{a_2} - \ldots - \frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k} \overline{a_{k-1}},$$

і тим самим виконано умову (8).

У повній відповідності із зазначеним можна ввести і означення лінійної незалежності систем векторів як заперечення лінійної залежності.

Означення. *Система векторів називається лінійно незалежною, якщо вона не є лінійно залежною.*

Приведемо інші рівнозначні ***означення.***

Система векторів називається лінійно незалежною, якщо жоден з векторів системи не може бути виражений як лінійна комбінація останніх.

Система векторів називається лінійно незалежною, якщо рівність нулю їх лінійної комбінації можлива тільки тоді, коли всі коефіцієнти лінійної комбінації дорівнюють нулю.

Найпростішим прикладом лінійно залежних векторів є пара колінеарних векторів. Нехай задано два колінеарні ненульові вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$. Позначимо через α відношення довжин цих векторів, тобто число $|\overline{a_2}|/|\overline{a_1}|$. Очевидно, що вектори $\alpha\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ при зробленому виборі числа α мають однакові довжини. Отже, якщо $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ однаково напрямлені, тоді $\overline{a_2} = \alpha\overline{a_1}$, якщо вони напрямлені в протилежні боки, тоді $\overline{a_2} = -\alpha\overline{a_1}$. Таким чином, два колінеарних вектори завжди лінійно залежні. Ясно, що правильне й обернене твердження: якщо два вектори лінійно залежні, тоді вони колінеарні.

Отже, умова

$$\overline{a_2} = \alpha\overline{a_1}, \tag{10}$$

тобто умова лінійної залежності двох ненульових векторів, є умовою необхідною і достатньою для колінеарності цих векторів.

Доведемо тепер, що лінійна залежність трьох векторів є умовою необхідною і достатньою для їх компланарності.

Нехай задано три компланарні ненульові вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$. Відповідно до означення при зіставленні початків цих векторів вони будуть в одній площині (рис. 8).

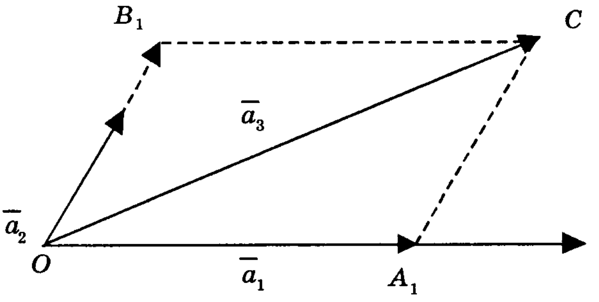

Рис. 8

Візьмемо, що вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ не колінеарні (в противному випадку вони лінійно залежні). Через кінець вектора $\overline{a_3}$ (точку C) проведемо прямі, паралельні векторам $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$. Ці прямі перетнуть прямі, на яких лежать вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$, в точках A_1 і B_1. Вектори $\overline{OA_1}$ і $\overline{a_1}$, очевидно, колінеарні. А тому $\overline{OA_1} = \lambda_1 \overline{a_1}$ і аналогічно $\overline{OB_1} = \lambda_2 \overline{a_2}$. Проте $\overline{OA_1} + \overline{OB_1} = \overline{OC} = \overline{a_3}$. Таким чином, $\overline{a_3} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2}$ і, отже, вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_k}$ лінійно залежні.

Справедливе й обернене твердження: якщо вектори $\overline{a_1}, \overline{a_2}, ..., \overline{a_k}$ лінійно залежні, то вони компланарні. Дійсно, нехай $\overline{a_3} = \lambda_1 \overline{a_1} + \lambda_2 \overline{a_2}$. Якщо вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ не колінеарні, то вони визначають деяку площину. В тій самій площині лежать, очевидно, вектори $\lambda_1 \overline{a_1}$ і $\lambda_2 \overline{a_2}$, а тому і їх сума — вектор $\overline{a_3}$. Якщо вектори $\overline{a_1}$ і $\overline{a_2}$ колінеарні, тоді на тій самій прямій лежить і вектор $\overline{a_3}$ і три заданих вектори не тільки компланарні, а й колінеарні.

Звідси випливає, що якщо на площині задано пару неколінеарних векторів, то будь-який третій вектор, який лежить в тій самій площині, може бути поданий як лінійна комбінація двох заданих.

Означення. *Впорядкована пара (якщо вказано, який вектор пари вважається першим, а який другим) неколінеарних векторів називається базисною системою векторів (базисом) на площині, визначеною заданими векторами.*

Теорема розкладання. *Будь-який вектор на площині може бути поданий як лінійна комбінація базисної системи векторів; це подання (розкладання за базисною системою) єдине.*

Нехай вектори $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$ базисні. Тоді, як показано вище, будь-який вектор $\overline{a}$ може бути поданий у вигляді $\overline{a} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2}$. Залишається довести єдиність розкладання.

Покладемо, що існує ще одне розкладання вектора за тією самою базисною системою:

$$\overline{a} = \beta_1 \overline{e_1} + \beta_2 \overline{e_2},$$

при цьому хоча б одне з чисел β_1 та β_2 відмінне від чисел α_1 та α_2. Тоді отримаємо $(\beta_1 - \alpha_1)\overline{e_1} + (\beta_2 - \alpha_2)\overline{e_2} = 0$. Отже, вектори $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$ лінійно залежні, а тому колінеарні. Проте це суперечить твердженню, що $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$ утворюють базисну систему. Таким чином, розкладання заданого вектора за заданою базисною системою єдине.

Проведені міркування легко перенести і на вектори, задані в просторі.

Означення. *Впорядкована трійка (якщо вказано, який вектор трійки вважати першим, який другим і який третім) некомпланарних векторів називається базисною системою векторів (базисом) у просторі.*

Теорема розкладання. *Будь-який вектор може бути поданий як лінійна комбінація базисної системи векторів; таке подання (розкладання за базисною системою) єдине.*

Д о в е д е н н я. Нехай задана базисна система векторів $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ і $\overline{a}$ — довільний вектор. Нехай O — загальний початок цих векторів. Через точку D — кінець вектора $\overline{a}$ (рис. 9) — проведемо пряму DE, паралельну вектору $\overline{e_3}$, і нехай E — точка перетину цієї прямої з площиною, визначеною векторами $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$.

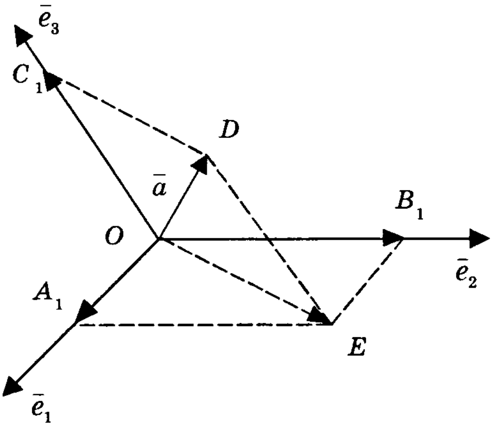

Рис. 9

Через точку E проведемо прямі, паралельні векторам $\overline{e_1}$ і $\overline{e_2}$. Нехай B_1 і A_1 — точки перетину цих прямих з прямими, на яких лежать вказані вектори. Нарешті, через точку D проведемо пряму, паралельну OE, до перетину в точці C_1 з прямою, на якій лежить вектор $\overline{e_3}$.

$$\overline{OE} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1}, \qquad \overline{a} = \overline{OD} = \overline{OE} + \overline{OC_1}.$$

Маємо

$$\overline{OA_1} = \alpha_1 \overline{e_1}, \; \overline{OB_1} = \alpha_2 \overline{e_2}, \; \overline{OC_1} = \alpha_3 \overline{e_3},$$

тому

$$\overline{a} = \alpha_1 \overline{e_1} + \alpha_2 \overline{e_2} + \alpha_3 \overline{e_3}.$$

Одержаний розклад єдиний, оскільки якби існував ще один розклад

$$\overline{a} = \beta_1 \overline{e_1} + \beta_2 \overline{e_2} + \beta_3 \overline{e_3},$$

то виконувалася би рівність

$$(\beta_1 - \alpha_1)\overline{e_1} + (\beta_2 - \alpha_2)\overline{e_2} + (\beta_3 - \alpha_3)\overline{e_3} = 0,$$

при цьому хоча б одне з чисел $\beta_1 - \alpha_1$, $\beta_2 - \alpha_2$, $\beta_3 - \alpha_3$ було б відмінне від нуля. Це означало б, що вектори $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ були б лінійно залежні, а тому і компланарні, що суперечить умові теореми.

Із доведеного випливає також, що будь-які чотири вектори лінійно залежні.

Введемо ще одне суттєво важливе поняття.

Означення. *Координатами вектора в заданому базисі називаються коефіцієнти розкладання вектора за базисною системою векторів.*

Отже, якщо задана базисна система векторів $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ і $\overline{a} = \alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}$, то координатами вектора $\overline{a}$ в заданому базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ називаються числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Записуються координати вектора в заданому базисі у вигляді рядка: $\overline{a} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$.

Зустрічається також запис у вигляді стовпця

$$\overline{a} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, якщо задано базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ і в цьому базисі $\overline{a} = \{3, 1, -2\}$, тоді $\overline{a} = 3\overline{e_1} + \overline{e_2} - 2\overline{e_3}$.

Очевидно, якщо задано деякий базис, то задання координат вектора в цьому базисі повністю визначає сам вектор і, отже, два вектори рівні тоді і тільки тоді, коли рівні їх координати в якому-небудь заданому базисі.

Використовуючи правила лінійних операцій, отримаємо такі **теореми**.

При множенні вектора на число всі його координати в заданому базисі перемножаються на це число.

При додаванні векторів складаються відповідні координати цих векторів.

Дійсно, нехай задано базис $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ і в цьому базисі два вектори:

$$\overline{a_1} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},\ \overline{a_2} = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}.$$

Тоді

$$\lambda\overline{a_1} = \lambda\left(\alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}\right) = \lambda\alpha_1\overline{e_1} + \lambda\alpha_2\overline{e_2} + \lambda\alpha_3\overline{e_3} = \{\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3\};$$

$$\overline{a_1} + \overline{a_2} = \left(\alpha_1\overline{e_1} + \alpha_2\overline{e_2} + \alpha_3\overline{e_3}\right) + \left(\beta_1\overline{e_1} + \beta_2\overline{e_2} + \beta_3\overline{e_3}\right) =$$

$$= (\alpha_1 + \beta_1)\overline{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overline{e_3} = \{\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2,\ \alpha_3 + \beta_3\}.$$

Зазначимо, що в просторі можна вибрати нескінченну множину базисних систем векторів і один і той самий вектор у різних базисних системах буде мати різні координати. В багатьох задачах корисно переходити від однієї базисної системи до другої і встановлювати співвідношення між координатами вектора в різних системах.

Контрольні запитання і завдання

1. Що називається вектором, модулем вектора?
2. Які вектори називаються колінеарними, компланарними, рівними?
3. Сформулюйте властивості лінійних операцій над векторами.
4. Що називається лінійною залежністю та лінійною незалежністю системи векторів?
5. Сформулюйте теорему про розкладання довільного вектора за базисними векторами.
6. Наведіть приклади лінійно залежних та лінійно незалежних систем векторів.

Приклади розв'язування задач

2.1. У базисній системі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ задано три вектори

$$\overline{a_1} = \{1,\ 2,\ 0\},\ \overline{a_2} = \{-1,\ 1,\ 1\},\ \overline{a_3} = \{2,\ 0,\ 1\}.$$

У базисній системі $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$ вектор $\overline{a}$ має координати $\{-1,\ 2,\ 1\}$. Знайти координати вектора $\overline{a}$ в базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

$$\overline{a} = -\overline{a_1} + 2\overline{a_2} + \overline{a_3};$$

$$\overline{a_1} = \overline{e_1} + 2\overline{e_2};\quad \overline{a_2} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3};\quad \overline{a_3} = 2\overline{e_1} + \overline{e_3};$$

$$\overline{a} = -\left(\overline{e_1} + 2\overline{e_2}\right) + 2\left(-\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}\right) + \left(2\overline{e_1} + \overline{e_3}\right) = -\overline{e_1} + 0\cdot\overline{e_2} + 3\overline{e_3}.$$

Отже, $\overline{a} = \{-1,\ 0,\ 3\}$ у базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$.

2.2. Встановити, чи є вектори $\overline{a} = \{1,\ -2,\ 0\}$, $\overline{b} = \{1,\ 2,\ -1\}$, $\overline{c} = \{-1,\ -6,\ 2\}$, задані своїми координатами в якій-небудь базисній системі, лінійно залежними, і якщо це так, то виразити один з векторів через інші.

Відповідно до означення лінійної залежності відшукуються такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, щоб $\lambda_1\overline{a} + \lambda_2\overline{b} + \lambda_3\overline{c} = 0$. Оскільки при рівності векторів мають бути рівні їх координати, то

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0, \\ -\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \end{cases}\qquad \begin{aligned} &\lambda_2 = 2\lambda_3, \\ &\lambda_1 = -\lambda_2 + \lambda_3, \\ &\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{aligned}$$

Третє рівняння є наслідком двох інших. Вибираємо $\lambda_3 = 1$. Тоді $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$, $-\overline{a} + 2\overline{b} + \overline{c} = 0$, $\overline{a} = 2\overline{b} + \overline{c}$.

2.3. У базисі $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ задано чотири вектори

$$\bar{a}_1 = \{0, 1, -2\}, \quad \bar{a}_2 = \{2, 1, 1\}, \quad \bar{a}_3 = \{1, 0, 1\}, \quad \bar{a}_4 = \{2, 1, 3\}.$$

Знайти координати вектора $\bar{a}_4$ в базисі $\overline{a_1}, \overline{a_2}, \overline{a_3}$.

Оскільки чотири вектори завжди лінійно залежні, то $\overline{a_4} = \alpha_1 \overline{a_1} + \alpha_2 \overline{a_2} + \alpha_3 \overline{a_3}$. Порівнюючи координати векторів, дістанемо:

$$\begin{cases} 2\alpha_2 + \alpha_3 = 2, \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 3. \end{cases} \qquad \begin{matrix} \alpha_1 = -2, \; \alpha_2 = 3, \; \alpha_3 = -4, \\ \bar{a}_4 = \{-2, 3, -4\}, \end{matrix}$$

2.4. З'ясувати, чи є система векторів $\bar{\alpha}_1 = \{1, -1, 2, 1\}$, $\bar{\alpha}_2 = \{1, -1, 1, 2\}$, $\bar{\alpha}_3 = \{1, -1, 4, -1\}$ лінійно залежною.

Нехай $c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3 = 0$, де c_1, c_2, c_3 — деякі числа.

Підставляємо в цю рівність вирази векторів

$$c_1(1, -1, 2, 1) + c_2(1, -1, 1, 2) + c_3(1, -1, 4, -1) = 0.$$

Після множення векторів на числа c_1, c_2, c_3 і додавання векторів отримаємо, що

$$c_1(1, \ -1, \ 2, \ 1) + c_2(1, \ -1, \ 1, \ 2) + c_3(1, \ -1, \ 4, \ -1) = 0,$$

звідки

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ -c_1 - c_2 - c_3 = 0, \\ 2c_1 + c_2 + 4c_3 = 0, \\ c_1 + 2c_2 - c_3 = 0. \end{cases}$$

Цю систему лінійних однорідних рівнянь розв'язуємо за методом Гаусса:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Дістали трапецеїдальну систему. Отже, задана система є невизначеною, а тому крім нульового розв'язку $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ має і ненульовий розв'язок. Таким чином, розглядувана система векторів

$\overline{\alpha_1}, \overline{\alpha_2}, \overline{\alpha_3}$ лінійно залежна. Можна знайти також коефіцієнти c_1, c_2, c_3 лінійно залежної системи векторів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Для цього розв'язуємо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ \quad c_2 - 2c_3 = 0. \end{cases}$$

Вільними невідомими можливо вважати c_3. Виражаючи головні невідомі c_1 і c_2 через вільне невідоме c_3, знаходимо, що $c_2 = 2\,c_3$, $c_1 = -3\,c_3$.

Надамо c_3 довільне значення, відмінне від нуля, наприклад -1. Отримаємо $c_1 = 3$, $c_2 = -2$, $c_3 = -1$, тобто $3\overline{\alpha_1} - 2\overline{\alpha_2} - \overline{\alpha_3} = 0$.

Задачі і вправи для самостійної роботи

Дослідити на лінійну залежність систему векторів.

2.5. $\bar{a} = \{1,\ 4,\ 6\}$, $\bar{b} = \{1,\ -1,\ 1\}$, $\bar{c} = \{1,\ 1,\ 3\}$.

2.6. $\bar{a} = \{2, -3, 1\}$, $\bar{b} = \{3,\ -1,\ 5\}$, $\bar{c} = \{1,\ -4,\ 3\}$.

2.7. $\bar{a} = \{5,\ 4,\ 3\}$, $\bar{b} = \{3,\ 3,\ 2\}$, $\bar{c} = \{8,\ 1,\ 3\}$.

2.8. $\bar{a} = \{1,\ 1,\ 1\}$, $\bar{b} = \{0, 1,\ 1\}$, $\bar{c} = \{0,\ 0,\ 1\}$.

Знайти координати вектора $\bar{x}$ у базисі $(\overline{e_1'},\ \overline{e_2'},\ \overline{e_3'})$, якщо він заданий у базисі $(\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3})$.

2.9. $$\begin{cases} \overline{e_1'} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{2e_3}, \\ \overline{e_2'} = 2\overline{e_1} - \overline{e_2}, \\ \overline{e_3'} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}. \end{cases} \qquad \bar{x} = \{6,\ -1,\ 3\},$$

2.10. $$\begin{cases} \overline{e_1'} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{3e_3}, \\ \overline{e_2'} = \dfrac{3}{2}\overline{e_1} - \overline{e_2}, \\ \overline{e_3'} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}. \end{cases} \qquad \bar{x} = \{1,\ 2,\ 4\},$$

2.11. $\begin{cases} \overline{e_1'} = \overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{4e_3}, \\ \overline{e_2'} = \dfrac{4}{3}\overline{e_1} - \overline{e_2}, \\ \overline{e_3'} = -\overline{e_1} + \overline{e_2} + \overline{e_3}. \end{cases}$ $\quad \overline{x} = \{1, 3, 6\},$

Розкласти вектор $\overline{x}$ за векторами $\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}$.

2.12. $\overline{x} = \{-2, 4, 7\}$, $\overline{p} = \{0, 1, 2\}$, $\overline{q} = \{1, 0, 1\}$, $\overline{r} = \{-1, 2, 4\}$.

2.13. $\overline{x} = \{1, -4, 4\}$, $\overline{p} = \{2, 1, -1\}$, $\overline{q} = \{0, 3, 2\}$, $\overline{r} = \{1, -1, 1\}$.

2.14. $\overline{x} = \{2, -1, 1\}$, $\overline{p} = \{1, 1, 0\}$, $\overline{q} = \{0, 1, -2\}$, $\overline{r} = \{1, 0, 3\}$.

§ 4. Проекція вектора на вісь

Називатимемо віссю пряму з вибраним на ній напрямком.

Нехай задано вектор $\overline{AB}$ і вісь L. Розглянемо вектор, початок якого є точка A_1 — проекція точки A на вісь L, а кінцем — точка B_1 — проекція точки B на ту саму вісь.

Означення. *Проекцією вектора $\overline{AB}$ на вісь L називається довжина вектора $\overline{A_1B_1}$, взята зі знаком "+", якщо напрямок $\overline{A_1B_1}$ збігається з напрямком осі L, та зі знаком "–", якщо напрямок $\overline{A_1B_1}$ протилежний напрямку осі L.*

Проекція вектора $\overline{AB}$ на вісь L позначається як $\text{пр}_L \overline{AB}$. Будемо називати *ортом осі L вектор* $\overline{L_0}$, напрямок якого збігається з напрямком осі L і довжина дорівнює 1.

Означення. *Кутом між двома векторами (або між вектором та віссю) називається найменший кут, на який потрібно повернути один з векторів, щоб його напрямок збігся з напрямком другого вектора.*

При цьому немає значення, який з двох векторів повертається: вектор $\overline{a}$ до збігу з напрямком вектора $\overline{b}$ або вектор $\overline{b}$ до збігу з напрямком вектора $\overline{a}$. Іншими словами, кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є разом з тим і кутом між векторами $\overline{b}$ і $\overline{a}$. Звідси випливає, що кут між двома векторами не може бути від'ємним і не може бути більше π радіан.

§ 5. Прямокутна декартова система координат у просторі

Виберемо в просторі яку-небудь точку O, проведемо через неї три взаємно перпендикулярні осі і на кожній із них візьмемо одиничний вектор, напрямлений по цій осі (орт осі). Вісь з вибраним на ній початком відліку та одиницею довжини називається *координатною віссю*, а впорядкована система трьох взаємно перпендикулярних координатних осей із загальним початком відліку і загальною одиницею довжини називається *прямокутною декартовою системою координат у просторі*.

У вибраній впорядкованій системі координатних осей першу вісь назвемо *віссю абсцис* (або віссю x), другу — *віссю ординат* (або віссю y), третю — віссю *аплікат* (або віссю z). Оскільки на кожній осі вибраний орт осі, то маємо також базисну трійку векторів. Вектори цієї базисної трійки взаємно перпендикулярні. Таку базисну систему векторів називають *ортогональною*. Крім того, довжини усіх трьох базисних векторів дорівнюють одиниці. Така система векторів називається *нормованою* (в багатьох випадках довжину вектора називають *нормою*).

Отже, вибрана система базисних векторів — координатний базис — є ортогональною і нормованою, або, як часто говорять, *ортонормованою*. Перший вектор базисної трійки, напрямлений по першій осі (по осі абсцис), позначається символом $\bar{i}$, другий вектор, напрямлений по другій осі (по осі ординат), — символом $\bar{j}$, третій вектор, напрямлений по третій осі (по осі аплікат), — символом $\bar{k}$.

Базисні, тобто некомпланарні, трійки векторів у просторі розділяють на два типи. Якщо при спостереженні від кінця третього вектора базисної трійки коротший поворот від першого вектора до другого здійснюється проти годинникової стрілки, базисна система називається *правою*. Якщо при спостереженні від кінця третього вектора найкоротший поворот від першого вектора до другого здійснюється за годинниковою стрілкою, трійка векторів називається *лівою*.

Прямокутна декартова система координат називається відповідно правою, якщо правою є трійка її базисних векторів, і лівою, якщо трійка її базисних векторів ліва. Ми використовуватимемо тільки праву систему координат.

Як було показано раніше, будь-який вектор може бути розкладений, і при тому в єдиний спосіб, за базисною трійкою векторів. А тому будь-який вектор $\bar{a}$ можна записати у вигляді $\bar{a} = \alpha_1\bar{i} + \alpha_2\bar{j} + \alpha_3\bar{k}$. Оскільки початок вектора $\bar{a}$ завжди можна розмістити в початок координат (рис. 10), то числа α_1, α_2, α_3, тобто координати вектора $\bar{a}$ в базисній трійці $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, є одночасно проекціями вектора $\bar{a}$ на ці осі.

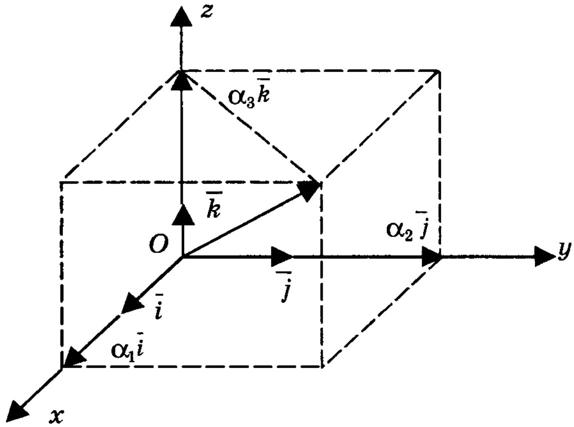

Рис. 10

Для скорочення запису замість $\text{пр}_x\bar{a}$, $\text{пр}_y\bar{a}$, $\text{пр}_z\bar{a}$ застосовують символи a_x, a_y, a_z. А тому вектор $\bar{a}$ можна записати у вигляді

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} = \{a_x,\ a_y,\ a_z\}. \qquad (11)$$

Оскільки вектор $\bar{a}$ внаслідок взаємної перпендикулярності координат осей є діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого на векторах $a_x\bar{i}$, $a_y\bar{j}$, $a_z\bar{k}$, то

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \qquad (12)$$

Кути, утворені вектором $\bar{a}$ з координатними осями, можна обчислити за формулами

$$\cos(\bar{a}, x) = \frac{a_x}{|\bar{a}|},\ \cos(\bar{a}, y) = \frac{a_y}{|\bar{a}|},\ \cos(\bar{a}, z) = \frac{a_z}{|\bar{a}|}. \qquad (13)$$

Візьмемо в просторі із заданою прямокутною системою координат довільну точку M. Радіусом-вектором цієї точки називатимемо вектор $\overline{OM}$ з початком у початку координат і кінцем у заданій точці (рис. 11).

Означення. *Координатами точки в заданій прямокутній декартовій системі координат називаються проекції радіуса-вектора цієї точки на координатні осі.*

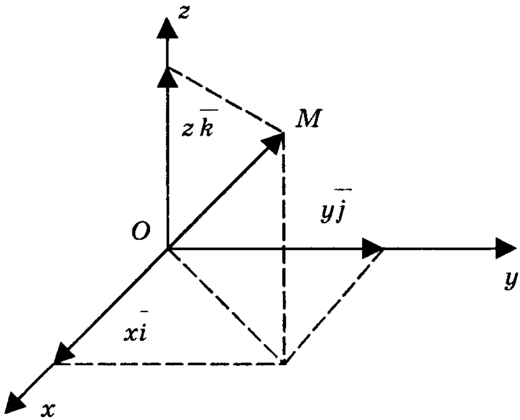

Рис. 11

Координати заданої точки M у заданій прямокутній декартовій системі координат записуються, як правило, у вигляді (x, y, z), де

$$x = \text{пр}_x \overline{OM}, \quad y = \text{пр}_y \overline{OM}, \quad z = \text{пр}_z \overline{OM}, \tag{14}$$

і називаються відповідно абсцисою, ординатою та аплікатою точки M.

Три площини, визначені парами координатних осей, розбивають весь простір на вісім частин — октантів. Площини ці називаються координатними площинами. На площині xy (яка проходить через осі x і y) апліката будь-якої точки дорівнює нулю, на площині xz (яка проходить через осі x і z) ордината будь-якої точки дорівнює нулю, на площині yz (яка проходить через осі y і z) абсциса будь-якої точки дорівнює нулю.

Очевидно, в заданій системі координат координати будь-якої фіксованої точки визначаються єдиним способом і задання координат будь-якої точки (тобто задання впорядкованої трійки дійсних чисел) єдиним способом визначає положення самої точки. Іншими словами, в заданій системі координат має місце взаємнооднозначна відповідність між точками в просторі і впорядкованими трійками дійсних чисел. Оскільки вектор повністю визначається заданням положення початку і кінця, то можна виразити координати в ортонормованому базисі через координати його кінців.

Нехай у заданій прямокутній декартовій системі координат початок вектора знаходиться в точці $M_1(x_1, y_1, z_1)$, а кінець — у точці $M_2(x_2, y_2, z_2)$ (рис. 12). Як відомо, $\overline{OM_1} + \overline{M_1M_2} = \overline{OM_2}$. Однак вектор $\overline{OM_1}$ є радіусом-вектором точки M_1, а $\overline{OM_2}$ — радіусом-вектором точки M_2.

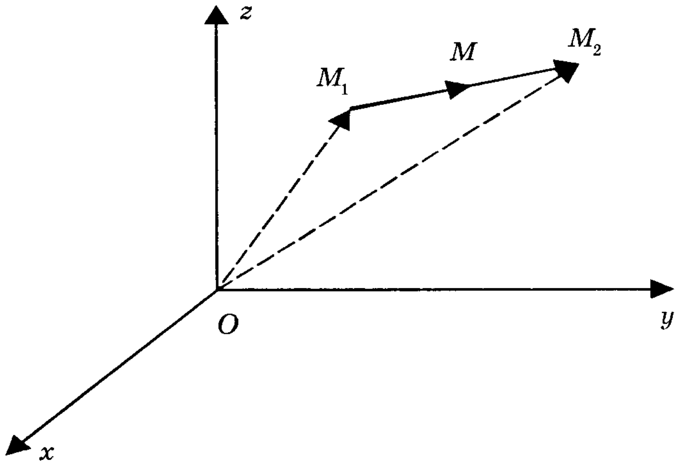

Рис. 12

Тому

$$\overline{OM_1} = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}, \quad \overline{OM_2} = x_2\bar{i} + y_2\bar{j} + z_2\bar{k}.$$

Отже,

$$\overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1)\bar{i} + (y_2 - y_1)\bar{j} + (z_2 - z_1)\bar{k}. \qquad (15)$$

Можна використати й іншу систему запису:

$$\overline{OM_1} = \{x_1,\ y_1,\ z_1\},\ \overline{OM_2} = \{x_2,\ y_2,\ z_2\},$$

$$\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}.$$

Апарат векторної алгебри і метод координат з успіхом використовуються для розв'язання багатьох геометричних задач.

Приклад 1. Знайти віддаль між двома заданими точками $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ і $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$.

Вектор $\overline{M_1M_2}$ має координати $x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1$. Раніше було доведено, що довжина вектора дорівнює кореню квадратному із суми квадратів його координат в ортонормованому базисі. А тому

$$\left|\overline{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \qquad (16)$$

Приклад 2. Задано дві точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Знайти координати точки, яка лежить на відрізку $\overline{M_1M_2}$ і ділить довжину цього відрізка у відношенні $\dfrac{m}{n} = \lambda.$

Нехай точка $M(x, y, z)$ — шукана (рис. 12). Вектори $\overline{M_1M}$ і $\overline{MM_2}$, очевидно, колінеарні й однаково напрямлені, тому вони можуть відрізнятися тільки довжиною. З умови

$$\frac{\left|\overline{M_1M}\right|}{\left|\overline{MM_2}\right|} = \frac{m}{n} = \lambda.$$

Отже,

$$\left|\overline{M_1M}\right| = \lambda\left|\overline{MM_2}\right|.$$

При рівності векторів мають бути рівними їх координати. Оскільки
$\overline{M_1M} = \{x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1\}$, $\overline{MM_2} = \{x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z\}$,
тоді

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z),$$

і

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda};\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda};\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (17)$$

В окремому випадку, якщо $n = m$, $\lambda = 1$, тобто точка M лежить в середині даного відрізка M_1M_2, то

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2};\ y = \frac{y_1 + y_2}{2};\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (18)$$

Отже, координати середини відрізка дорівнюють півсумам відповідних координат його кінців.

Очевидно, що всі здобуті результати можна перенести і на випадок прямокутної системи координат на площині. Векторами, які утворюють ортонормований базис, тут будуть $\bar{i}$ та $\bar{j}$, а тому будь-який вектор на площині xy можна записати у вигляді $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} = \{a_x,\ a_y\}$.

Щоб отримати з виведених формул відповідні формули в прямокутній декартовій системі координат на площині, достатньо покласти рівними нулю всі проекції на вісь z.

§ 6. Скалярний добуток векторів

У фізичних, технічних, економічних застосуваннях математики велике значення має розв'язання задачі про визначення роботи, яку виконує задана стала сила при переміщенні матеріальної точки. Якщо точка переміщується прямолінійно, то, як відомо, робота дорівнює добутку величини сили на величину переміщення і на косинус кута між напрямком сили і напрямком переміщення. Позначимо силу $\overline{F}$, а переміщення — $\overline{AB}$, дістанемо для обчислення роботи вираз

$$W = \left|\overline{F}\right|\left|\overline{AB}\right|\cos\left(\overline{F},\ \overline{AB}\right).$$

Оскільки подібна операція з двома векторами зустрічається досить часто, то для неї введено спеціальну назву, спеціальне позначення і вивчені всі основні властивості.

Означення. *Скалярним добутком двох векторів називається добуток їх довжин і косинуса кута між ними.*

Скалярний добуток двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ позначимо символом $\overline{a} \cdot \overline{b}$. Відповідно до означення

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cos\left(\overline{a},\ \overline{b}\right). \tag{19}$$

Безпосередньо з означення випливає, що скалярний добуток двох векторів є скаляром.

Кут між двома векторами не залежить від того, який вектор вибирається першим і який другим, тому

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}, \tag{20}$$

тобто скалярний добуток має комутативну властивість.

Оскільки $\left|\overline{b}\right|\cos\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)$ є проекцією вектора $\overline{b}$ на вісь, напрямлену так, як і вектор $\overline{a}$, $\left|\overline{a}\right|\cos\left(\overline{a},\ \overline{b}\right)$ є проекцією вектора $\overline{a}$ на вісь, напрямлену по вектору $\overline{b}$, то

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \text{пр}_{a}\overline{b} = \left|\overline{b}\right| \text{пр}_{b}\overline{a}. \tag{21}$$

Тепер легко показати, що скалярний добуток векторів має розподільну властивість, тобто

$$\overline{a} \cdot \left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}. \tag{22}$$

Дійсно,

$$\overline{a}\left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \left|\overline{a}\right| \text{пр}_{a}\left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \left|\overline{a}\right|\left(\text{пр}_{a}\overline{b} + \text{пр}_{a}\overline{c}\right) = \left|\overline{a}\right| \text{пр}_{a}\overline{b} + \left|\overline{a}\right| \text{пр}_{a}\overline{c}.$$

Однак $\left|\overline{a}\right| \text{пр}_{a}\overline{b} = \overline{a} \cdot \overline{b}, \quad \left|\overline{a}\right| \text{пр}_{a}\overline{c} = \overline{a} \cdot \overline{c}.$

Отже,

$$\overline{a}\left(\overline{b} + \overline{c}\right) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}.$$

Неважко перевірити, що скалярний добуток має асоціативну властивість по відношенню до скалярного множника:

$$\lambda\left(\overline{a} \cdot \overline{b}\right) = \left(\lambda\overline{a}\right) \cdot \overline{b} = \overline{a}\left(\lambda\overline{b}\right). \tag{23}$$

З означення скалярного добутку векторів випливає, що

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|\cos\left(\widehat{\bar{a},\ \bar{a}}\right)=\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{a}\right|=\left|\bar{a}\right|^2.$$

Отже, скалярний добуток вектора на самого себе дорівнює квадрату довжини вектора. Зокрема,

$$\bar{i}\cdot\bar{i}=1,\quad \bar{j}\cdot\bar{j}=1,\quad \bar{k}\cdot\bar{k}=1. \tag{24}$$

Якщо два вектори взаємно перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю. Навпаки, якщо скалярний добуток дорівнює нулю, але жоден з векторів не є нулем, то в нуль має перетворюватися косинус кута між векторами, а тому вектори мають бути перпендикулярні.

Отже, для того щоб два вектори були перпендикулярні, необхідно і достатньо, щоб їх скалярний добуток дорівнював нулю.

Оскільки напрямок нульового вектора вважається довільним, то можна вважати нульовий вектор перпендикулярним до будь-якого вектора. Тому в наведеній умові перпендикулярності двох векторів немає потреби особливо вказувати, що жоден з векторів не повинен бути нульовим.

З умови перпендикулярності отримаємо, зокрема, що

$$\bar{i}\cdot\bar{j}=0,\quad \bar{i}\cdot\bar{k}=0,\quad \bar{j}\cdot\bar{k}=0. \tag{25}$$

Якщо вектори задані своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i},\ \bar{j},\ \bar{k}$, то, використовуючи розподільну і сполучну по відношенню до скалярного множника властивості скалярного добутку, дістанемо

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=\left(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k}\right)\left(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k}\right)=a_xb_x\bar{i}\cdot\bar{i}+a_xb_y\bar{i}\cdot\bar{j}+$$

$$+\ a_xb_z\bar{i}\cdot\bar{k}+a_yb_x\bar{j}\cdot\bar{i}+a_yb_y\bar{j}\cdot\bar{j}+a_yb_z\bar{j}\cdot\bar{k}+a_zb_x\bar{k}\cdot\bar{i}+$$

$$+a_zb_y\bar{k}\cdot\bar{j}+a_zb_z\bar{k}\cdot\bar{k}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z,$$

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z, \tag{26}$$

тобто *скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків однойменних координат цих векторів.*

З означення скалярного добутку двох векторів безпосередньо виводять формулу для обчислення косинуса кута між двома векторами

$$\cos\left(\widehat{\bar{a},\ \bar{b}}\right)=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{\left|\bar{a}\right|\cdot\left|\bar{b}\right|}. \tag{27}$$

§ 7. Векторний добуток векторів

Означення. *Векторним добутком двох векторів називається третій вектор, який має довжину, чисельно рівну площі паралелограма, побудованого на заданих векторах, який перпендикулярний до площини цих векторів і утворює з впорядкованою парою заданих векторів праву трійку.*

Позначають векторний добуток заданих векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$ символом $[\bar{a}\times\bar{b}]$.

Оскільки площа паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$, дорівнює добутку довжини цих векторів і синуса кута між ними, то

$$\left|[\bar{a}\times\bar{b}]\right| = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a},\bar{b}). \tag{28}$$

Вкажемо на основі властивості векторного добутку векторів. Зазначимо попередньо, що

$$[\bar{a}\times\bar{b}] = -[\bar{b}\times\bar{a}]. \tag{29}$$

Дійсно, нехай

$$\bar{c} = [\bar{a}\times\bar{b}] \text{ і } \bar{c}' = [\bar{b}\times\bar{a}].$$

Оскільки

$$\bar{c} = |\bar{a}||\bar{b}|\sin(\bar{a},\bar{b}) \text{ і } |\bar{c}'| = |\bar{b}||\bar{a}|\sin(\bar{b},\bar{a}), \quad \text{то} \quad |\bar{c}| = |\bar{c}'|.$$

Вектори $\bar{c}$ і $\bar{c}'$ перпендикулярні до одної і тої самої площини (площина, визначена векторами $\bar{a}$ і $\bar{b}$). Вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку. Праву трійку утворюють і вектори $\bar{b}$, $\bar{a}$, $\bar{c}'$, тому вектори $\bar{c}$ і $\bar{c}'$ мають однакові довжини, перпендикулярні до одної і тої самої площини, і напрямлені в протилежні боки. Це означає, що $\bar{c} = -\bar{c}'$. Отже, при перестановці векторів, що перемножуються, напрямок векторного добутку змінюється на протилежний, а довжина не змінюється.

Можна довести, що векторний добуток двох векторів має сполучну властивість щодо третього — скалярного — співмножника:

$$\lambda\cdot[\bar{a}\times\bar{b}] = [(\lambda\bar{a})\times\bar{b}] = [\bar{a}\times(\lambda\bar{b})] \tag{30}$$

і розподільну властивість:

$$[\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})] = [\bar{a}\times\bar{b}] + [\bar{a}\times\bar{c}]. \tag{31}$$

З означення векторного добутку векторів випливає, що векторний добуток колінеарних векторів є завжди нульовим вектором. Зокрема, завжди

$$[\bar{a}\times\bar{a}]=0.$$

Оскільки вектори $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ взаємно перпендикулярні, мають одиничні довжини і утворюють праву трійку, то

$$\begin{array}{lll} [\bar{i}\times\bar{i}]=0, & [\bar{i}\times\bar{j}]=\bar{k}, & [\bar{i}\times\bar{k}]=-\bar{j}, \\ [\bar{j}\times\bar{i}]=-\bar{k}, & [\bar{j}\times\bar{j}]=0, & [\bar{j}\times\bar{k}]=\bar{i}, \\ [\bar{k}\times\bar{i}]=\bar{j}, & [\bar{k}\times\bar{j}]=-\bar{i}, & [\bar{k}\times\bar{k}]=0. \end{array} \qquad (32)$$

Використовуючи розподільну і сполучну по відношенню до скалярного множника властивості векторного добутку, можна дістати формули для обчислення векторного добутку векторів, заданих розкладом за ортонормованим базисом:

$$\begin{aligned}
[\bar{a}\times\bar{b}]&=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\times(b_x\bar{i}+b_y\bar{j}+b_z\bar{k})=a_xb_x[\bar{i}\times\bar{i}]+a_xb_y[\bar{i}\times\bar{j}]+\\
&+a_xb_z[\bar{i}\times\bar{k}]+a_yb_x[\bar{j}\times\bar{i}]+a_yb_y[\bar{j}\times\bar{j}]+a_yb_z[\bar{j}\times\bar{k}]+a_zb_x[\bar{k}\times\bar{i}]+\\
&+a_zb_y[\bar{k}\times\bar{j}]+a_zb_z[\bar{k}\times\bar{k}]=a_xb_y\bar{k}+a_xb_z(-\bar{j})+a_yb_x(-\bar{k})+\\
&+a_yb_z\bar{i}+a_zb_x\bar{j}+a_zb_y(-\bar{i})=\bar{i}(a_yb_z-a_zb_y)+\\
&+\bar{j}(a_zb_x-a_xb_z)+\bar{k}(a_xb_y-a_yb_x),
\end{aligned}$$

$$[\bar{a}\times\bar{b}]=(a_yb_z-a_zb_y)\bar{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\bar{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\bar{k}. \qquad (33)$$

Важливою геометричною задачею, яка розв'язується за допомогою введеної операції, є обчислення площини трикутника за координатами його вершин.

Нехай задані координати вершин трикутника A, B, C. Знаючи їх, знаходимо $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$. Отже,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overline{AB}\times\overline{AC}]\right|. \qquad (34)$$

Приклад. $A(1;\,-2;\,0)$; $B(2;\,1;\,-1)$; $C(0;\,3;\,1)$. Знайти S_{ABC}.

$$\overline{AB}=\{1,\,3,\,-1\};\quad \overline{AC}=\{-1,\,5,\,1\};$$

$$[\overline{AB}\times\overline{AC}]=[3\cdot1-(-1)\cdot5]\bar{i}+[(-1)\ (-1)-1\cdot1]\bar{j}+[1\cdot5-3(-1)]\bar{k}=8\bar{i}+8\bar{k},$$

$$\left|\left[\overline{AB}\times\overline{AC}\right]\right| = 8\sqrt{2},$$
$$S_{ABC} = 4\sqrt{2}.$$

Нарешті, формулу для обчислення векторного добутку векторів (33) зручніше записувати через визначник

$$\left[\bar{a}\times\bar{b}\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}, \qquad (35)$$

розкладаючи який за елементами першого рядка отримаємо формулу (33).

§ 8. Мішаний добуток векторів

Оскільки векторний добуток векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$ є вектором, то можливо розглядати і скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на $\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]$, і векторний добуток $\bar{a}$ на $\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]$. У нашому курсі ми розглянемо тільки перший із цих добутків.

Означення. *Скалярний добуток вектора $\bar{a}$ на векторний добуток векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$ називається мішаним добутком векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.*

Отже, мішаний добуток векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ — це вираз $\bar{a}\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]$; він є, очевидно, скаляром.

З'ясуємо геометричний зміст введеного поняття. Нехай точка O є загальним початком трьох некомпланарних векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

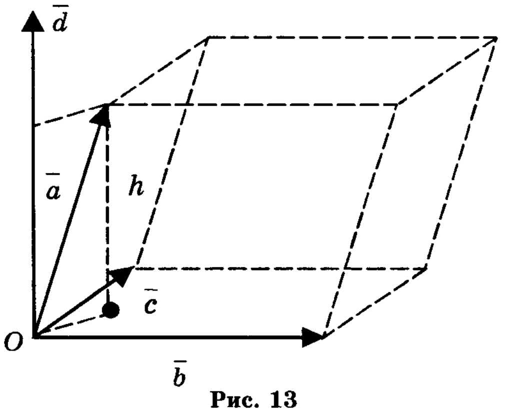

Рис. 13

Побудуємо на заданих векторах паралелепіпед (рис. 13) і знайдемо вектор $\bar{d} = [\bar{b} \times \bar{c}]$. З означення скалярного добутку векторів дістанемо

$$\bar{a}[\bar{b} \times \bar{c}] = \bar{a}\bar{d} = |\bar{d}| \text{пр}_d \bar{a}.$$

Оскільки вектор $\bar{d}$ перпендикулярний до площини векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$, то проекція вектора $\bar{a}$ на вісь, напрямлену по вектору $\bar{d}$, або дорівнює висоті паралелепіпеда, якщо ця проекція додатна (тобто якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ утворюють праву трійку), або дорівнює висоті, взятій зі знаком "мінус", якщо ця проекція від'ємна (тобто якщо три заданих вектори утворюють ліву трійку).

Отже, мішаний добуток трьох векторів дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, якщо вони утворюють праву трійку, і дорівнює об'єму паралелепіпеда, взятому зі знаком "мінус", якщо вектори утворюють ліву трійку.

Якщо у вибраний трійці їх переставити, то паралелепіпед, побудований на цих векторах, очевидно, не зміниться. Зокрема, не зміниться й абсолютна величина мішаного добутку. Зазначимо, що при круговій перестановці векторів права трійка векторів залишається правою, а ліва — лівою. Тому при круговій перестановці векторів мішаний добуток векторів не змінюється.

Отже,

$$\bar{a}[\bar{b} \times \bar{c}] = \bar{c}[\bar{a} \times \bar{b}] = \bar{b}[\bar{c} \times \bar{a}]. \quad (36)$$

Якщо вектори задані своїми координатами в ортонормованому базисі $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, то

$$\bar{a} = \{a_x, a_y, a_z\}, \quad \bar{b} = \{b_x, b_y, b_z\}, \quad \bar{c} = \{c_x, c_y, c_z\},$$

$$\bar{d} = \{b_y c_z - b_z c_y,\ b_z c_x - b_x c_z,\ b_x c_y - b_y c_x\}, \quad (37)$$

$$\bar{a}[\bar{b} \times \bar{c}] = a_x(b_y c_z - b_z c_y) + a_y(b_z c_x - b_x c_z) + a_z(b_x c_y - b_y c_x).$$

Якщо задані три вектори компланарні, то їх мішаний добуток, очевидно, дорівнює нулю. Навпаки, якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то ці вектори обов'язково компланарні. Дійсно, якщо скалярний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{d}$ дорівнює нулю, то вектор $\bar{d}$ перпендикулярний до вектора $\bar{a}$, але $\bar{d}$ перпендикулярний також до площини векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Отже, вектор $\bar{a}$ лежить в площині векторів $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Звідси вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ компланарні.

Отже, рівність нулю мішаного добутку трьох векторів є необхідною і достатньою умовою їх компланарності.

Формулу (37) можна записати, використовуючи визначник третього порядку

$$\bar{a}\left[\bar{b}\times\bar{c}\right]=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \tag{38}$$

розкладаючи який за елементами першого рядка отримаємо формулу (37).

Контрольні запитання і завдання

1. Як визначається положення точки M простору радіусом-вектором? Які координати вектора і точки в просторі?
2. Що називається координатним базисом?
3. Як визначається проекція вектора на вісь? Назвіть властивості проекцій.
4. Як визначити довжину та напрямок вектора за відомими його координатами?
5. Дайте означення скалярного добутку двох векторів, сформулюйте основні його властивості. Як визначається скалярний добуток через координати векторів-співмножників?
6. Сформулюйте необхідні та достатні умови перпендикулярності двох векторів. Запишіть формулу для знаходження кута між векторами та умову паралельності двох векторів.
7. Що називається векторним добутком двох векторів? Які його властивості?
8. Запишіть векторний добуток через координати векторів-співмножників в ортонормованому базисі. Який геометричний зміст модуля векторного добутку?
9. Що називається мішаним добутком трьох векторів? Які властивості має мішаний добуток?
10. Сформулюйте твердження, що розкриває геометричний зміст мішаного добутку.
11. Сформулюйте необхідну і достатню умову компланарності трьох векторів.
12. Як виражається мішаний добуток через координати векторів співмножників?

Приклади розв'язування задач

2.15. У трикутнику ABC сторона AB точками M і N розділена на три рівні частини: $|\overline{AM}| = |\overline{MN}| = |\overline{NB}|$. Знайти вектор $\overline{CM}$, якщо $\overline{CA} = \bar{a}$, $\overline{CB} = \bar{b}$.

Маємо $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$. Звідси $\overline{AM} = \dfrac{\bar{b} - \bar{a}}{3}$.

Отже, $\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM}$, тоді $\overline{CM} = \bar{a} + \dfrac{\bar{b} - \bar{a}}{3} = \dfrac{\bar{b} + 2\bar{a}}{3}$.

2.16. У трикутнику ABC пряма AM є бісектрисою кута BAC, причому точка M лежить на стороні BC. Знайти $\overline{AM}$, якщо $\overline{AB} = \bar{b}$, $\overline{AC} = \bar{c}$.

Маємо $\overline{BC} = \bar{c} - \bar{b}$. Із властивості бісектриси внутрішнього кута трикутника випливає, що $|\overline{BM}| : |\overline{MC}| = |\bar{b}| : |\bar{c}|$, тобто $|\overline{BM}| : |\overline{BC}| =$ $= |\bar{b}| : \left(|\bar{b}| + |\bar{c}|\right)$.

Звідси дістаємо $\overline{BM} = \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{b}| + |\bar{c}|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right)$.

Оскільки $\overline{AM} = \overline{AB} + \overline{BM}$, то $\overline{AM} = \bar{b} + \dfrac{|\bar{b}|}{|\bar{b}| + |\bar{c}|}\left(\bar{c} - \bar{b}\right) = \dfrac{|\bar{b}|\bar{c} + |\bar{c}|\bar{b}}{|\bar{b}| + |\bar{c}|}$.

2.17. Задано точки A (1; 2; 3) і B (3; –4; 6). Знайти довжину, напрямок і норму вектора $\bar{a} = \overline{AB}$.

Проекціями вектора $\overline{AB}$ на осі координат є різниця відповідних координат точок B і A: $a_x = 3 - 1 = 2$, $a_y = -4 - 2 = -6$, $a_z = 6 - 3 = 3$. Звідси $\bar{a} = \overline{AB} = 2\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}$. Знайдемо довжину вектора $\bar{a}$:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + 3^2} = 7;$$

$$\cos\alpha = \cos\left(\widehat{\bar{a}x}\right) = \frac{2}{7};\quad \cos\beta = \cos\left(\widehat{\bar{a}y}\right) = -\frac{6}{7};\quad \cos\gamma = \cos\left(\widehat{\bar{a}z}\right) = \frac{3}{7}.$$

Шуканий одиничний вектор має вигляд

$$\overline{a_0} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{2\bar{i} - 6\bar{j} + 3\bar{k}}{7} = \frac{2}{7}\bar{i} - \frac{6}{7}\bar{j} + \frac{3}{7}\bar{k}.$$

2.18. Задано трикутник: A (1; 1; 1), B (5; 1; −2), C (7; 9; 1). Знайти координати точки D перетину бісектриси кута A зі стороною CB.

Знайдемо довжини сторін трикутника, що утворюють кут A:

$$|AC| = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 + (z_C - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(7-1)^2 + (9-1)^2 + (1-1)^2} = 10;$$

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$

$$= \sqrt{(5-1)^2 + (1-1)^2 + (-2-1)^2} = 5.$$

Звідси $|CD| : |DB| = 10 : 5 = 2$, оскільки бісектриса ділить сторону CB на частини, пропорційні прилеглим сторонам. Отже,

$$x_D = \frac{x_C + \lambda x_B}{1+\lambda} = \frac{7 + 2\cdot 5}{1+2} = \frac{17}{3},\quad y_D = \frac{y_C + \lambda y_B}{1+\lambda} = \frac{9 + 2\cdot 1}{1+2} = \frac{11}{3},$$

$$z_D = \frac{z_C + \lambda z_B}{1+\lambda} = \frac{1 + 2(-2)}{1+2} = -1,$$

шукана точка D (17/3; 11/3; −1).

2.19. На осі Ox знайти точку, рівновіддалену від точок A (2; −4; 5) і B (−3; 2; 7).

Нехай M — шукана точка. Тоді $|AM| = |MB|$. Оскільки точка M лежить на осі x, то її координати (x; 0; 0).

Отже, $|AM| = \sqrt{(x-2)^2 + 4^2 + 5^2}$, $|MB| = \sqrt{(x+3)^2 + 2^2 + 7^2}$; $(x-2)^2 + 41 = (x+3)^2 + 53$, або $10x = -17$, тобто $x = -1,7$.

Звідси $M(-1,7; 0; 0)$.

2.20. Задано вектори $\bar{a} = 4\bar{i} - 2\bar{j} - 4\bar{k}$, $\bar{b} = 6\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$.

Обчислити скалярні добутки:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b}$; 2) $\sqrt{\bar{a}^2}$; 3) $\sqrt{\bar{b}^2}$; 4) $(2\bar{a} - 3\bar{b})(\bar{a} + 2\bar{b})$; 5) $(\bar{a} + \bar{b})^2$.

Знаходимо:

1) $\bar{a}\cdot\bar{b} = 4\cdot 6 + (-2)(-3) + (-4)(2) = 24 + 6 - 8 = 22;$

2) $\overline{a}^{\,2}=\overline{a}\cdot\overline{a}=4\cdot 4+(-2)(-2)+(-4)(-4)=16+4+16=36;\quad \sqrt{\overline{a}^{2}}=6;$

3) $\overline{b}^{\,2}=\overline{b}\cdot\overline{b}=6\cdot 6+(-3)(-3)+2\cdot 2=36+9+4=49;\quad \sqrt{\overline{b}^{2}}=7;$

4) $\left(2\overline{a}-3\overline{b}\right)\left(\overline{a}+2\overline{b}\right)=2\overline{a}^{2}+4\overline{a}\overline{b}-3\overline{a}\overline{b}-6\overline{b}^{2}=2\overline{a}^{2}+\overline{a}\overline{b}-6\overline{b}^{2}=$

$=2\cdot 36+22-6\cdot 49=2\left(36+11-147\right)=-200;$

5) $\left(\overline{a}+\overline{b}\right)^{2}=\overline{a}^{2}+2\overline{a}\overline{b}+\overline{b}^{2}=36+2\cdot 22+49=129.$

2.21. Обчислити, при якому значенні α вектори $\overline{a}=\alpha\overline{i}-3\overline{j}+2\overline{k}$ і $\overline{b}=\overline{i}+2\overline{j}-\alpha\overline{k}$ взаємно перпендикулярні.

Знаходимо скалярний добуток цих векторів: $\overline{a}\cdot\overline{b}=\alpha-6-2\alpha$. Оскільки $\overline{a}\perp\overline{b}$, то $\overline{a}\cdot\overline{b}=0$.

Звідси $-\alpha-6=0;\ \ \alpha=-6.$

2.22. Обчислити кут між векторами $\overline{a}=2\overline{i}-4\overline{j}+4\overline{k}$ і $\overline{b}=-3\overline{i}+2\overline{j}+6\overline{k}.$

Оскільки $\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|\cos\varphi$, тоді $\cos\varphi=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{b}\right|}$.

Маємо $\overline{a}\cdot\overline{b}=2(-3)+(-4)2+4\cdot 6=10;\quad \left|\overline{a}\right|=\sqrt{4+16+16}=6;$

$\left|\overline{b}\right|=\sqrt{9+4+36}=7$. Отже, $\cos\varphi=\dfrac{10}{6\cdot 7}=\dfrac{5}{21}$ і $\varphi=\arccos\dfrac{5}{21}$.

2.23. Знайти вектор $\overline{x}$, який перпендикулярний до векторів $\overline{a}=2\overline{i}+3\overline{j}-\overline{k}$ і $\overline{b}=\overline{i}-2\overline{j}+3\overline{k}$ та задовольняє умову $\overline{x}\left(2\overline{i}-\overline{j}+\overline{k}\right)=-6$

Оскільки $\overline{x}\perp\overline{a}$ і $\overline{x}\perp\overline{b}$, тоді $\overline{x}\cdot\overline{a}=0$ *і* $\overline{x}\cdot\overline{b}=0$. Шуканий вектор $\overline{x}$ має координати $\overline{x}=x_1\overline{i}+x_2\overline{j}+x_3\overline{k}$.

Отже,

$$\begin{cases}2x_1+3x_2-x_3=0,\\ x_1-2x_2+3x_3=0,\\ 2x_1-x_2+x_3=-6.\end{cases}$$

Розв'язуючи одержану систему, маємо

$$\overline{x}=\{-3,\ 3,\ 3\},\ \text{тобто}\ \overline{x}=-3\overline{i}+3\overline{j}+3\overline{k}.$$

2.24. Задано вектори $\bar{a} = 3\bar{i} - \bar{j} - 2\bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \bar{k}$. Знайти координати векторних добутків:

1) $[\bar{a} \cdot \bar{b}]$; 2) $[(2\bar{a} + \bar{b})\bar{b}]$; 3) $[(2\bar{a} - \bar{b})(2\bar{a} + \bar{b})]$.

Знаходимо:

$$1)\ [\bar{a} \cdot \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 5\bar{i} + \bar{j} + 7\bar{k};$$

$$2)\ [(2\bar{a} + \bar{b})\bar{b}] = [2\bar{a} \cdot \bar{b}] + [\bar{b} \cdot \bar{b}] = 2[\bar{a} \cdot \bar{b}] = 10\bar{i} + 2\bar{j} + 14\bar{k};$$

$$3)\ [(2\bar{a} - \bar{b})(2\bar{a} + \bar{b})] = 4[\bar{a} \cdot \bar{a}] + 2[\bar{a} \cdot \bar{b}] - 2[\bar{b} \cdot \bar{a}] - [\bar{b} \cdot \bar{b}] = 4[\bar{a} \cdot \bar{b}] =$$

$$= 20\bar{i} + 4\bar{j} + 28\bar{k};$$

2.25. Задано вершини трикутника $A\,(1;\,2;\,0)$, $B\,(3;\,0;\,-3)$ і $C\,(5;\,2;\,6)$. Обчислити його площу.

Знаходимо вектори $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

$$\overline{AB} = (3-1)\bar{i} + (0-2)\bar{j} + (-3-0)\bar{k} = 2\bar{i} - 2\bar{j} - 3\bar{k};$$

$$\overline{AC} = (5-1)\bar{i} + (2-2)\bar{j} + (6-0)\bar{k} = 4\bar{i} + 6\bar{k}.$$

Площа трикутника ABC дорівнює половині площі паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$, а тому знаходимо векторний добуток цих векторів

$$[\overline{AB} \cdot \overline{AC}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= -12\bar{i} - 24\bar{j} + 8\bar{k}.$$

Звідси

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|[\overline{AB} \cdot \overline{AC}]\right| = \frac{1}{2}\sqrt{144 + 576 + 64} = \frac{1}{2}\sqrt{784} = 14 \text{ кв.од.}$$

2.26. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}+3\bar{b}$ і $3\bar{a}+\bar{b}$, якщо $|\bar{a}|=|\bar{b}|=1$, $(\bar{a}\,\hat{}\,\bar{b})=30^\circ$.

Маємо

$$\left[\left(\bar{a}+3\bar{b}\right)\left(3\bar{a}+\bar{b}\right)\right]=3\left[\bar{a}\bar{a}\right]+\left[\bar{a}\bar{b}\right]+9\left[\bar{b}\bar{a}\right]+3\left[\bar{b}\bar{b}\right]=3\cdot 0+\left[\bar{a}\bar{b}\right]-9\left[\bar{a}\bar{b}\right]+$$
$$+3\cdot 0=-8\left[\bar{a}\bar{b}\right],$$

оскільки $\left[\bar{a}\bar{a}\right]=\left[\bar{b}\bar{b}\right]=0$, $\left[\bar{b}\bar{a}\right]=-\left[\bar{a}\bar{b}\right]$.

Звідси $S=8\left|\left[\bar{a}\bar{b}\right]\right|=8\cdot 1\cdot 1\cdot \sin 30^\circ=4$ кв.од.

2.27. Знайти мішаний добуток векторів

$\bar{a}=\{1;\,-1;\,-3\}$, $\bar{b}=\{-2;\,2;\,1\}$, $\bar{c}=\{3;\,-2;\,5\}$.

$$\overline{abc}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -3\\ -2 & 2 & 1\\ 3 & -2 & 5\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & 5\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix}-2 & 2\\ 3 & -2\end{vmatrix}=$$
$$=12-13+6=5.$$

2.28. Знайти об'єм трикутної піраміди з вершинами $A\,(-1;\,0;\,2)$, $B\,(2;\,1;\,1)$, $C\,(3;\,0;\,-1)$, $D\,(3;\,2;\,2)$.

Знайдемо вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, які збігаються з ребрами піраміди у вершині A: $\overline{AB}=3\bar{i}+\bar{j}-\bar{k}$, $\overline{AC}=4\bar{i}-3\bar{k}$, $\overline{AD}=4\bar{i}+2\bar{j}$. Знаходимо мішаний добуток цих векторів:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix}3 & 1 & -1\\ 4 & 0 & -3\\ 4 & 2 & 0\end{vmatrix}=4\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & -3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-12+10=-2;$$

$V_{\text{парал}}=2.$

Оскільки об'єм піраміди дорівнює $\frac{1}{6}$ паралелепіпеда (рис. 14), побудованого на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ і $\overline{AD}$, то $V_{\text{пірам}}=\frac{1}{3}$.

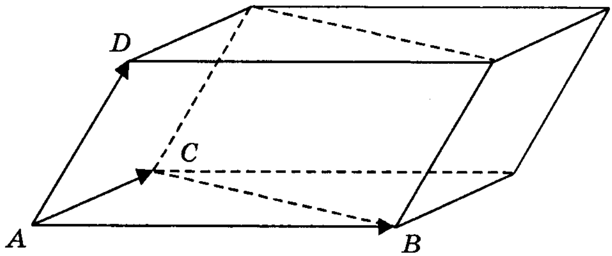

Рис. 14

2.28. Показати, що вектори $\bar{a} = 2\bar{i} + 3\bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$, $\bar{c} = \bar{i} + 9\bar{j} - 11\bar{k}$ компланарні.

Знаходимо мішаний добуток векторів.

$$\overline{abc} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -32 + 42 - 10 = 0.$$

Оскільки $\overline{abc} = 0$, то задані вектори компланарні.

Задачі і вправи для самостійної роботи

Чи колінеарні вектори $\overline{c_1}$ і $\overline{c_2}$, побудовані на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$?

2.30. $\bar{a} = \{1;\ -2;\ 3\}$, $\bar{b} = \{3;\ 0;\ -1\}$, $\overline{c_1} = 2\bar{a} + 4\bar{b}$, $\overline{c_2} = 3\bar{b} - \bar{a}$.

2.31. $\bar{a} = \{1;\ 0;\ 1\}$, $\bar{b} = \{-2;\ 3;\ 5\}$, $\overline{c_1} = \bar{a} + 2\bar{b}$, $\overline{c_2} = 3\bar{a} - \bar{b}$.

2.32. $\bar{a} = \{-2;\ 4;\ 1\}$, $\bar{b} = \{1;\ -2;\ 7\}$, $\overline{c_1} = 5\bar{a} + 2\bar{b}$, $\overline{c_2} = 2\bar{a} - \bar{b}$.

Знайти косинус кута між векторами $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

2.33. $A\ (1;\ -2;\ 3)$, $B\ (0;\ -1;\ 2)$, $C\ (3;\ -4;\ 5)$.

2.34. $A\ (0;\ -3;\ 6)$, $B\ (-12;\ -3;\ -3)$, $C\ (-9;\ -3;\ -6)$.

2.35. $A\ (-1;\ 2;\ -3)$, $B\ (3;\ 4;\ -6)$, $C\ (1;\ 1;\ -1)$.

Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

2.36. $\bar{a} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $\bar{b} = 3\bar{p} - \bar{q}$, $|\bar{p}| = 1$; $|\bar{q}| = 2$, $\left(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q}\right) = \dfrac{\pi}{6}$.

2.37. $\bar{a} = 3\bar{p} + \bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = 4$; $|\bar{q}| = 1$, $\left(\bar{p}\,\hat{}\,\bar{q}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

2.38. $\bar{a} = \bar{p} - 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} + 2\bar{q}$, $|\bar{p}| = \frac{1}{5}$; $|\bar{q}| = 1$, $\left(\widehat{\bar{p}\,\bar{q}}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Перевірити на компланарність вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$.

2.39. $\bar{a} = \{2;\ 3;\ 1\}$, $\bar{b} = \{-1;\ 0;\ -1\}$, $\bar{c} = \{2;\ 2;\ 2\}$.

2.40. $\bar{a} = \{3;\ 2;\ 1\}$, $\bar{b} = \{2;\ 3;\ 4\}$, $\bar{c} = \{3;\ 1;\ -1\}$

2.41. $\bar{a} = \{1;\ 5;\ 2\}$, $\bar{b} = \{-1;\ 1;\ -1\}$, $\bar{c} = \{1;\ 1;\ 1\}$.

Обчислити об'єм тетраедра з вершинами в точках A_1, A_2, A_3, A_4 та його висоту, опущену з вершини A_4 на грань $A_1A_2A_3$.

2.42. $A_1(1;\ 3;\ 6)$, $A_2(2;\ 2;\ 1)$, $A_3(-1;\ 0;\ 1)$, $A_4(-4;\ 6;\ -3)$.

2.43. $A_1(-4;\ 2;\ 6)$, $A_2(2;\ -3;\ 0)$, $A_3(-10;\ 5;\ 8)$, $A_4(-5;\ 2;\ -4)$.

2.44. $A_1(7;\ 2;\ 4)$, $A_2(7;\ -1;\ -2)$, $A_3(3;\ 3;\ 1)$, $A_4(-4;\ 2;\ 1)$.

Відповіді до глави 2

2.5. Лінійно залежні. **2.6.** Лінійно незалежні. **2.7.** Лінійно залежні. **2.8.** Лінійно незалежні. **2.9.** $\bar{x} = \left\{\frac{9}{13}, \frac{38}{13}, \frac{7}{13}\right\}$.
2.10. $\bar{x} = \{2, -2, -2\}$. **2.11.** $\bar{x} = \{3, -6, -6\}$. **2.12.** $\bar{x} = \{2, -1, 3\}$. **2.13.** $\bar{x} = \{-1, 0, 3\}$. **2.14.** $\bar{x} = \{7, -8, -5\}$. **2.30.** Не колінеарні. **2.31.** Не колінеарні. **2.32.** Не колінеарні. **2.33.** -1. **2.34.** $\frac{24}{25}$. **2.35.** 0. **2.36.** 7. **2.37.** $14\sqrt{2}$. **2.38.** 1. **2.39.** Не компланарні. **2.40.** Компланарні. **2.41.** Не компланарні. **2.42.** $V = \frac{70}{3}$. **2.43.** $V = \frac{56}{3}$. **2.44.** $V = \frac{43}{2}$.

Глава 3. Аналітична геометрія

§ 1. Відповідність між геометричними образами та рівняннями

Як вже відомо з елементарного курсу математики, метод координат дає можливість встановити відповідність між деякими геометричними образами та рівняннями або їх нерівностями. В шкільних курсах розглядалась прямокутна декартова система координат на площині xy (тобто на площині, для всіх точок якої $z = 0$) і говорилося про рівняння прямої, про рівняння параболи, про графік $y = \frac{1}{x}$ і т.д. Тепер, після введення прямокутної декартової системи координат у просторі, розглянемо це питання з більш загальних позицій.

Нехай у просторі задана прямокутна декартова система координат і потрібно встановити залежність між координатами будь-якої точки, що знаходиться на заданій відстані R від загальної точки $C(a, b, c)$.

Припустимо, що Q є множиною таких точок, тобто множиною точок сфери S з центром у C і радіусом R; $M(x, y, z)$ — довільна точка множини Q. Тоді $\left|\overline{CM}\right| = R, \quad \overline{CM} = \{x-a, y-b, z-c\}$, тому

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2} = R,$$

або

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2. \tag{1}$$

Кожна точка множини Q, тобто кожна точка сфери, має координати, які задовольняють рівнянню (1). Якщо точка N лежить не на сфері, а всередині неї, то $\left|\overline{CN}\right| < R$; якщо точка N лежить зовні сфери, то $\left|\overline{CN}\right| > R$. Рівняння (1) називається рівнянням, що відповідає заданій сфері, або просто рівнянням заданої сфери.

***Означення.** Рівняння, що відповідає заданій множині точок, називається рівнянням, якому задовольняють координати всіх точок множини і не задовольняють координати точок, що не належать заданій множині.*

***Означення.** Множина точок, що відповідає заданому рівнянню, називається множиною тих і тільки тих точок, координати яких задовольняють заданому рівнянню.*

Розглянемо множину точок, які знаходяться на рівних відстанях від точки $A(1;\ 3;\ -2)$ і від точки $B(-1;\ 1;\ 0)$ (ця множина точок є площиною, яка проходить через середину відрізку AB і перпендикулярна до вектора $\overline{AB}$). Нехай $M(x,\ y,\ z)$ — довільна точка заданої множини. Згідно з умовою $\left|\overline{AM}\right| = \left|\overline{BM}\right|$, тому $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2}$. Піднесемо обидві частини в квадрат і приведемо подібні члени, дістанемо $x + y - z - 3 = 0$.

Якщо точка N не належить заданій множині точок $\left|\overline{AN}\right| \neq \left|\overline{BN}\right|$, тоді

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2} \neq \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2 + (z-0)^2}$$

і

$$x + y - z - 3 \neq 0.$$

Отже, рівняння, що відповідає заданій множині, є рівнянням $x + y - z - 3 = 0$.

Розглянемо множину Q точок, що знаходяться на заданій відстані R від осі Z. Задана множина точок є нескінченною циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі Z і знаходяться від неї на відстані R (рис. 15).

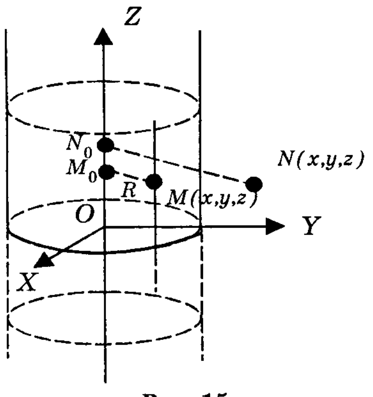

Рис. 15

Складемо рівняння цієї поверхні. Нехай точка $M(x, y, z)$ — довільна точка множини Q; точка M_0 — проекція точки M на вісь Z — має координати (0; 0; Z). Згідно з умовою

$$\left|\overline{M_0M}\right| = R, \text{ тому } \sqrt{x^2 + y^2} = R,$$

або

$$x^2 + y^2 = R^2. \tag{2}$$

Отже, координати будь-якої точки множини Q відповідають рівнянню (2). Нехай тепер точка N — яка-небудь точка, що не належить множині Q, і N_0 — її проекція на вісь Z. Тоді $\left|\overline{N_0N}\right| \neq R$ і тому $x^2 + y^2 \neq R^2$. Ми довели тим самим, що рівняння (2) є рівнянням, що відповідає множині Q, тобто є рівнянням нескінченної циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі Z і знаходяться від неї на відстані R.

Розглянемо множину Q точок площини, перпендикулярної до осі Z, що проходить через точку $M_0(0; 0; 2)$. Оскільки ця площина паралельна площині XY, то всі її точки мають одну і ту саму аплікату $Z = 2$. Якщо візьмемо яку-небудь точку $N(x, y, z)$, що не лежить на заданій площині, то для неї $Z \neq 2$. Отже, рівняння $Z = 2$ є рівнянням заданої площини.

З наведених прикладів видно, що рівнянням, до яких входять три, дві і навіть одна невідома, в просторі відповідає деяка поверхня. Винятком є випадки, коли поверхня вироджується в окремі точки, в лінію або взагалі є пустою множиною точок. Так, рівнянню $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ відповідає одна точка — початок координат, рівнянню $x^2 + y^2 = 0$ відповідає вісь Z, рівнянню $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ — пуста множина точок.

Оскільки будь-яка лінія може бути зображена як перетин двох поверхонь, то лінія в просторі може бути задана системою двох рівнянь. Так, системі рівнянь

$$\begin{cases} Z = 0, \\ x^2 + y^2 = R^2 \end{cases}$$

відповідає множина точок, що належить як площині $Z = 0$, так і нескінченній циліндричній поверхні $x^2 + y^2 = R^2$, тобто коло радіусом R, яке має центр на початку координат і лежить у площині $Z = 0$.

У багатьох задачах, особливо в задачах, пов'язаних з рухом, лінії задаються дещо інакше. Припустимо, що матеріальна точка рухається по якійсь лінії. Кожному моменту часу t у процесі руху відповідає деяке визначене положення точки M, що рухається. Нехай у просторі задано прямокутну декартову систему координат. Тоді кожному значенню t у процесі руху відповідає деякий радіус — вектор $\overline{OM} = \bar{\varphi}(t)$. Тим самим заданою є векторна функція $\bar{\varphi}(t)$. Векторне рівняння $\bar{r} = \bar{\varphi}(t)$ називають параметричним векторним рівнянням траєкторії.

Нехай $\bar{r} = \{x, y, z\}$ і $\bar{\varphi}(t) = \{\varphi_1(t), \varphi_2(t), \varphi_3(t)\}$. Тоді для координат точки $M(x, y, z)$, що рухається, маємо параметричне скалярне рівняння

$$x = \varphi_1(t), \; y = \varphi_2(t), \; z = \varphi_3(t). \tag{3}$$

Виключаючи t з перших двох та з останніх двох рівнянь системи (3), дістанемо два рівняння, які зв'язують координати x, y, z довільної точки траєкторії, тобто рівняння двох поверхонь, що перетинаються по цій траєкторії.

У нашому прикладі параметром (допоміжною змінною), через який виражався радіус-вектор будь-якої точки лінії, був час. Проте параметром може бути не тільки час, а й довжина пройденої матеріальною точкою дуги, кут повороту та інші фізичні чи геометричні змінні. Важливе тільки те, щоб по кожному (в деякому проміжку, що розглядається) значенню параметра повністю визначалось положення змінної точки.

У ряді задач поряд із завданням поверхонь і ліній слід розглядати і області, обмежені цими поверхнями або лініями. Як правило, ці області можуть бути задані з допомогою одної або кількох нерівностей.

Нехай розглядається множина точок, які їй належать, у середині сфери радіусом R з центром в $M_0(a, b, c)$ і $M(x, y, z)$ — довільна точка цієї множини. Очевидно,

$$\left|\overline{M_0M}\right| < R,$$

тому

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 < R^2.$$

Усі точки заданої множини і тільки точки, які їй належать, мають координати, що відповідають одержаній нерівності. Тому воно може бути назване нерівністю, яка відповідає заданій множині точок.

Множині точок, які знаходяться між двома площинами, перпендикулярними до осі x і перетинають цю вісь у точках $A(1; 0; 0)$ і $B(3; 0; 0)$, відповідає система нерівностей $1<x<3$. Множині точок, які знаходяться між концентричними колами з центром на початку координат, радіусами $R_1 = 2$ і $R_2 = 3$ і лежать у площині xy, відповідає система умов $z = 0, \; 4 < x^2 + y^2 < 9$ і т.д.

§ 2. Лінійні образи — площина і пряма

Вивчення геометричних образів за допомогою методу координат природно почати з найпростіших об'єктів — площин і прямих. Покажемо насамперед, що цим об'єктам відповідає рівняння першого степеня.

Теорема. *Будь-якій площині в просторі із заданою прямокутною декартовою системою координат відповідає рівняння першого степеня і будь-якому рівнянню першого степеня в просторі відповідає деяка площина.*

Д о в е д е н н я. Нехай у просторі із заданою прямокутною декартовою системою координат вибрана деяка площина Q. Візьмемо на цій площині будь-які три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій. Як відомо, такі точки повністю визначають розглядувану площину. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка площини Q. Розглянемо три вектори $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$. Оскільки вони лежать в одній площині Q, то їх мішаний добуток має дорівнювати нулю для всіх точок M, що належать площині Q (і тільки для цих точок).

Отже, рівняння

$$\overline{M_1M} \cdot [\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M_3}] = 0 \tag{4}$$

є рівнянням площини Q, що розглядається. Оскільки точки M_1, M_2, M_3 не лежать на одній прямій, то вектори $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ неколінеарні і векторний добуток не може бути нульовим вектором. Позначимо цей векторний добуток через $\overline{N} = \{A, B, C\}$. Як було зазначено вище, хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля. Разом з тим вектор $\overline{N}$ перпендикулярний до площини векторів і, отже, є вектором, перпендикулярним до площини Q (вектор нормалі до заданої поверхні). Оскільки $\overline{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$, рівняння (4) можна переписати у вигляді

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \tag{5}$$

Перша половина теореми вже доведена: будь-якій площині відповідає рівняння першого степеня. Ще раз зазначимо, що в цьому рівнянні (x_1, y_1, z_1) — координати заданої точки площини, (x, y, z) — координати довільної (змінної) точки площини, A, B, C — коефіцієнти при змінних координатах — координати вектора, перпендикулярного до площини.

Рівняння (5) можна переписати у вигляді

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{6}$$

Це рівняння називається *загальним рівнянням площини.*

Доведемо тепер, що будь-якому рівнянню першого степеня з трьома невідомими в просторі із заданою прямокутною декартовою системою координат відповідає деяка площина.

Нехай задане загальне рівняння першого степеня з трьома невідомими $Ax + By + Cz + D = 0$, причому хоча б одне з чисел A, B, C відмінне від нуля. Припустимо, що $C \neq 0$, задамо довільно два числа x_0 і y_0 і знайдемо z_0 таке, щоб виконувалася рівність

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0.$$

Тоді $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Підставляючи у початкове рівняння обчислене значення D, дістанемо рівність

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Побудуємо вектор $\overline{N} = \{A, B, C\}$ і через точку $M(x_0, y_0, z_0)$ проведемо площину, перпендикулярну до вектора $\overline{N}$. Нехай $M(x, y, z)$ — довільна точка цієї площини. Оскільки вектор $\overline{M_0M}$ для будь-якої точки M, що лежить на побудованій площині (і тільки для точок цієї площини), перпендикулярний до $\overline{N}$, тоді $\overline{M_0M} \cdot \overline{N} = 0$ і, отже, рівняння

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0,$$

а тому і рівнозначне йому рівняння

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

є рівнянням площини.

Отже, ми не тільки довели, що початковому рівнянню відповідає площина, а й встановили, що це за площина: це площина перпендикулярна до вектора $\overline{N} = \{A, B, C\}$ і проходить через точку (x_0, y_0, z_0) таку, що $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Зазначимо деякі окремі випадки загального рівняння площини. Якщо $C = 0$, тобто загальне рівняння площини має вигляд $Ax + By + D = 0$, тоді проекція вектора $\overline{N}$ на вісь Z дорівнює нулю і, отже, вектор $\overline{N}$ перпендикулярний до осі Z. Проте $\overline{N}$ перпендикулярний до заданої площини Q. Звідси випливає, що задана площина паралельна осі Z. Аналогічно рівнянню $Ax + Cz + D = 0$ відповідає площина, паралельна осі y, рівнянню $By + Cz + D = 0$ — площина, паралельна осі x.

Якщо $D = 0$, тобто рівняння має вигляд $Ax + By + Cz = 0$, тоді задана площина проходить через початок координат.

Якщо $A = B = 0$, тобто рівняння має вигляд $Cz + D = 0$, тоді площина, як зазначено вище, паралельна осі x та осі y, а тому паралельна площині xy (і, отже, перпендикулярна до осі z).

Якщо в загальному рівнянні площини коефіцієнт $D \neq 0$, то, розділивши всі члени рівняння на $-D$, рівняння площини можна привести до вигляду

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{6'}$$

де $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$. Це рівняння називається рівнянням площини у відрізках: у ньому a, b, c — відповідно абсциса, ордината й апліката точок перетину площини з осями Ox, Oy, Oz.

Так само можна розглянути і всі останні можливі окремі випадки.

Тепер розглянемо задачу про обчислення кута між двома площинами. Кут між двома площинами, точніше один із суміжних кутів між двома площинами, можна обчислити як кут між нормалями до цих площин. Якщо площини задані своїми загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

тоді їх нормальні вектори мають вигляд $\overline{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\overline{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ і тому кут θ між площинами

$$\cos\theta = \frac{\overline{N_1} \cdot \overline{N_2}}{|\overline{N_1}| \cdot |\overline{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Площини паралельні тоді і тільки тоді, коли $\overline{N_2} = \lambda\overline{N_1}$ і, отже, $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, або

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Площини перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли $\overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0$ і, отже,

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Пряму лінію в просторі можна визначити як перетин двох площин, тобто як множину точок за системою двох рівнянь першого степеня

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases} \tag{7}$$

Виділимо окремо той випадок, коли одна з цих площин є площиною xy і, отже, пряма, що розглядається, лежить у площині xy. В цьому випадку систему (7) можна записати у вигляді

$$\begin{cases} z = 0, \\ Ax + By + D = 0, \end{cases} \tag{8}$$

що є перетином площини xy з площиною $Ax + By + D = 0$, паралельною осі z.

Розглянемо вектор $\overline{N} = \{A, B, 0\}$, що лежить у площині xy і перпендикулярний до площини $Ax + By + D = 0$. Цей вектор перпендикулярний до прямої, що визначається системою (8), і називається нормальним вектором цієї прямої.

Тепер розглядатимемо тільки точки площини xy і розв'язуватимемо задачі, що відносяться тільки до геометричних образів, які лежать на цій площині. Тоді можна треті координати точок і векторів навіть і не записувати, беручи до уваги, що вони мають дорівнювати нулю.

Як уже зазначалося вище, рівнянню $Ax + By + D = 0$ у площині $z = 0$ відповідає пряма. А тому в аналітичній геометрії на площині рівняння

$$Ax + By + D = 0 \tag{9}$$

називають загальним рівнянням прямої. Нормальний вектор цієї прямої запишемо тепер у формі $\overline{N} = \{A, B\}$.

Якщо $A = 0$, тоді пряма паралельна осі абсцис, якщо $B = 0$ — осі ординат.

Нехай $B \neq 0$. Тоді загальне рівняння прямої приводиться до вигляду $y = -\frac{A}{B}x - \frac{D}{B}$. Позначимо $-\frac{A}{B} = k$; $-\frac{D}{B} = b$, дістанемо рівняння прямої у вигляді

$$y = kx + b. \tag{10}$$

З'ясуємо геометричний зміст коефіцієнтів k і b. Розглянемо вектор $\bar{s} = \{-B, A\}$. Оскільки $\bar{s} \cdot \overline{N} = (-B) \cdot A + AB = 0$, то вектор $\bar{s}$ напрямлений вздовж прямої $Ax + By + D = 0$. Він називається напрямним вектором прямої. Позначимо через φ кут між вектором $\bar{s}$ і віссю x (рис. 16). Тоді

$$\text{пр}_x \bar{s} = |\bar{s}| \cos\varphi = -B, \quad \text{пр}_y \bar{s} = |\bar{s}| \cos(\varphi - \frac{\pi}{2}) = |\bar{s}| \sin\varphi = A,$$

звідси

$$\text{tg}\varphi = -\frac{A}{B} \quad \text{і} \quad k = -\frac{A}{B} = \text{tg}\varphi.$$

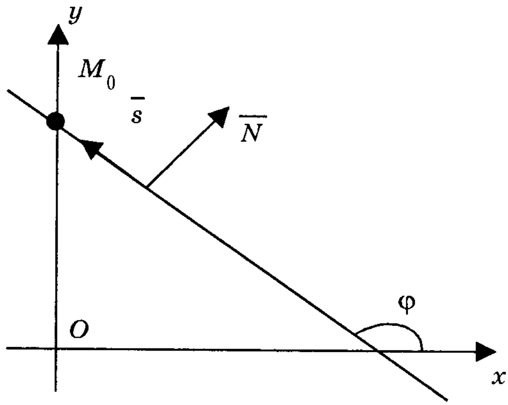

Рис. 16

Знайдемо точку M_0 перетину прямої з віссю ординат. Оскільки абсциса точки M_0 дорівнює нулю, то її ордината дорівнює b.

Отже, в рівнянні (10) коефіцієнт k є тангенсом кута між заданою прямою і віссю абсцис (вибирається кут у верхній півплощині), а вільний член b — ордината точки перетину прямої з віссю ординат. Число k називається *кутовим коефіцієнтом* прямої, а b — *початковою ординатою*. Саме рівняння (10) називається рівнянням прямої (яка лежить в площині xy) з кутовим коефіцієнтом.

Оскільки при виведенні рівняння (10) ми прийняли тільки, що $B \neq 0$, то в такому вигляді можна записати рівняння будь-якої прямої (у площині xy), крім прямих, паралельних осі ординат.

Найпростішими і разом з тим основними задачами, пов'язаними з прямими лініями на площині, є визначення точки перетину двох прямих та обчислення кута між прямими. Оскільки будь-якій прямій на площині xy відповідає рівняння першого степеня з двома невідомими і точка перетину двох прямих має належати кожній з цих прямих, то для визначення точки перетину двох прямих потрібно, очевидно, розв'язати відповідну систему рівнянь.

Для обчислення кута між двома прямими, що лежать в площині xy, можна використати методи обчислення кута між двома векторами.

Нехай прямі задані своїми загальними рівняннями

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0, \qquad A_2x + B_2y + D_2 = 0.$$

Як було зазначено вище, напрямними векторами цих прямих є вектори

$$\overline{s_1} = \{-B_1, A_1\} \quad \text{і} \quad \overline{s_2} = \{-B_2, A_2\}.$$

А тому косинус кута між прямими (точніше, косинус одного з кутів між прямими) обчислюємо за формулою

$$\cos\theta = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \qquad (11)$$

Зокрема, якщо дві прямі взаємно перпендикулярні, то $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = 0$, або в скалярній формі

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0.$$

Правильно, звичайно, й обернене твердження: якщо $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$, то $\cos\theta = 0$ і прямі перпендикулярні.

Отже, рівність $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$ є умовою, необхідною і достатньою для перпендикулярності двох прямих. Якщо прямі паралельні, то $\bar{s}_2 = \lambda\bar{s}_1$ і тоді $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, тобто коефіцієнти при змінних координатах у рівняннях паралельних прямих відповідно пропорційні:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Якщо прямі задані своїми рівняннями з кутовими коефіцієнтами

$$y = k_1x + b_1,\ y = k_2x + b_2,$$

то

$$A_1 = k_1,\ B_1 = -1,\ A_2 = k_2,\ B_2 = -1,$$

і умова перпендикулярності двох прямих має вигляд

$$k_1k_2 = -1, \text{ або } k_2 = -\frac{1}{k_1}. \qquad (12)$$

Отже, для перпендикулярності двох прямих (не паралельних осям координат) необхідно і достатньо, щоб їх кутові коефіцієнти були обернені за величиною і протилежні за знаком.

Повернемося до питань геометрії у просторі.

Пряму можна задати не тільки як перетин двох площин, а й двома лежачими на ній точками, або, що фактично те саме, точкою, що лежить на прямій, і вектором, колінеарним прямій.

Нехай задано точку M_0, що лежить на прямій L, і вектор $\bar{s}$, колінеарний прямій L; O — початок координат і M — довільна (змінна) точка заданої прямої (рис. 17).

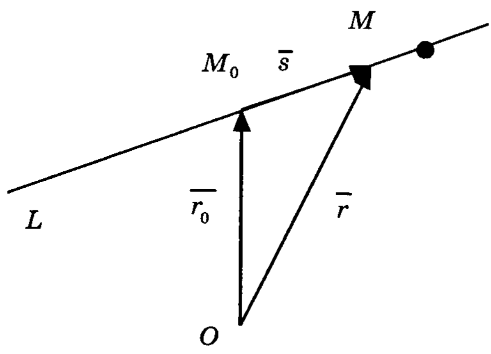

Рис. 17

Позначимо через $\overline{r_0}$ радіус-вектор $\overline{OM_0}$ і через $\bar{r}$ — радіус-вектор $\overline{OM}$. Оскільки вектор $\overline{M_0M}$ колінеарний вектору $\bar{s}$, то для будь-якого положення точки M на L існує таке дійсне число t, що $\overline{M_0M} = t\bar{s}$. Змінюючи параметр t від $-\infty$ до $+\infty$, дістанемо будь-яку точку прямої L і тільки прямої L. А тому, замінивши $\overline{M_0M}$ на $\bar{r} - \overline{r_0}$, одержимо, що рівняння

$$\bar{r} - \overline{r_0} = t\bar{s} \tag{13}$$

є векторним рівнянням прямої, що розглядається.

Природно назвати це рівняння *параметричним рівнянням прямої у векторній формі.*

Нехай точка M_0 має координати x_0, y_0, z_0, а вектор $\bar{s}$ — координати l, m, n. Позначимо через x, y, z координати довільної (змінної) точки M прямої. Тоді параметричне векторне рівняння (13) запишеться в скалярній формі

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = z_0 + nt. \tag{14}$$

У випадку, якщо задана пряма лежить у площині xy, z і n дорівнюють нулю, рівняння (14) набуває вигляду

$$x = x_0 + lt,\ y = y_0 + mt,\ z = 0.$$

Якщо $m \neq 0$, тобто пряма не перпендикулярна до осі x, тоді, виключивши параметр t, дістанемо рівняння $z = 0$, $y - y_0 = k(x - x_0)$, де $k = \dfrac{m}{l} = \operatorname{tg}\varphi$; φ — кут між напрямним вектором $\bar{s}$ і віссю абсцис.

Отже, в площині $z = 0$ рівняння

$$y - y_0 = k(x - x_0) \tag{15}$$

є рівнянням прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має кутовий коефіцієнт k.

Якщо пряма не перпендикулярна ні до однієї з координатних осей, тобто числа l, m, n відмінні від нуля, тоді, виключаючи із системи (14) параметр t, одержимо рівняння

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}, \tag{16}$$

яке називається *канонічним рівнянням прямої*.

Розглянемо окремо кожне з рівнянь системи (16). Рівняння $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ відповідає площині, паралельній осі аплікат. Разом з тим усі точки прямої мають лежати в цій площині або площина містить в собі задану пряму. Оскільки площина перпендикулярна до площини xy, то вона проектує задану пряму на цю площину. Аналогічно рівняння $\frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$ відповідає площині, яка проектує задану пряму на площину yz, а рівняння $\frac{x - x_0}{l} = \frac{z - z_0}{n}$, яке є наслідком двох перших, визначає площину, яка проектує задану пряму на площину xz.

Важливою задачею, пов'язаною зі взаємним положенням прямої і площини в просторі, є задача про обчислення кута між прямою і площиною.

Нехай L — задана пряма, рівняння якої

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

і Q — задана площина, рівняння якої

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Кутом між прямою і площиною називається кут між прямою та її проекцією на площину. А тому кут φ між прямою і площиною не більше ніж $\frac{\pi}{2}$. Нехай $\bar{s}$ — напрямний вектор прямої, а $\overline{N}$ — вектор нормалі до площини (рис. 18).

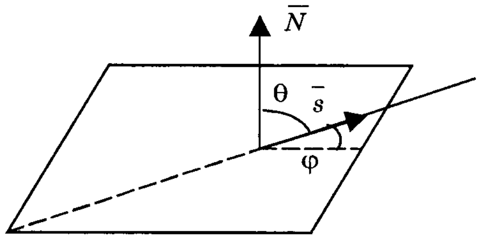

Рис. 18

Отримуємо

$$\sin\varphi = |\cos(\overline{N}, \overline{s})| = \frac{\overline{N}\cdot\overline{s}}{|\overline{N}|\cdot|\overline{s}|}. \tag{17}$$

Оскільки $\overline{s} = \{l, m, n\}$ і $\overline{N} = \{A, B, C\}$, то

$$\sin\varphi = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Очевидно, пряма L і площина Q перпендикулярні тоді і тільки тоді, коли вектори $\overline{s}$ і $\overline{N}$ колінеарні.

Отже, для перпендикулярності прямої і площини необхідно і достатньо, щоби $\overline{N} = \lambda\overline{s}$, або

$$A = \lambda l, \quad B = \lambda m, \quad C = \lambda n. \tag{18}$$

Зрозуміло також, що пряма L і площина Q паралельні тоді і тільки тоді, коли перпендикулярні вектори $\overline{s}$ і $\overline{N}$, тобто для паралельності прямої і площини необхідно і достатньо, щоби $\overline{N}\cdot\overline{s} = 0$, або

$$Al + Bm + Cn = 0. \tag{19}$$

Контрольні запитання і завдання

1. Довести, що рівняння площини завжди виражається рівнянням першого степеня і, навпаки, всяке рівняння першого степеня є рівнянням площини.

2. Який вигляд має загальне рівняння площини? Який зв'язок існує між нормальним вектором $\overline{N}$ до площини та коефіцієнтами загального рівняння площини?

3. Запишіть рівняння площини у векторній та координатній формі.

4. Як визначається гострий кут між двома площинами, що пере-

тинаються? Запишіть умови паралельності та перпендикулярності площин.

5. Запишіть рівняння площини, що проходить через три задані точки.

6. Який вигляд має канонічне рівняння прямої, що проходить через задану точку $A(x_0, y_0, z_0)$ і паралельна напрямленому вектору $\bar{s}\{l, m, n\}$?

7. Запишіть параметричні рівняння прямої. Який зв'язок їх з канонічним рівнянням?

8. Як записується рівняння прямої, що проходить через дві задані точки?

9. Як визначається кут між двома прямими, що задані канонічними рівняннями? Запишіть умови паралельності та перпендикулярності цих прямих.

10. Як визначити кут між прямою та площиною? Запишіть умову паралельності і перпендикулярності прямої та площини.

11. Як визначити координати точки перетину прямої та площини?

12. Запишіть умову належності двох прямих площині.

13. Виведіть загальне рівняння прямої на площині.

14. Виведіть рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом. Який геометричний зміст параметрів k і b?

15. Сформулюйте умови паралельності і перпендикулярності двох прямих на площині.

16. Дослідіть загальне рівняння прямої $Ax + By + C = 0$ при $A = 0$, при $B = 0$, при $C = 0$.

17. Запишіть рівняння прямої, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має кутовий коефіцієнт k.

18. Як виражаються рівняння прямих, паралельних осям Ox і Oy, а також рівняння самих цих осей?

19. Як привести рівняння з кутовим коефіцієнтом до загального рівняння прямої на площині?

20. Як знайти точку перетину двох прямих?

21. Як записати рівняння прямої у векторній формулі?

Приклади розв'язування задач

3.1. Задано рівняння прямої $14x - 5y - 45 = 0$. Написати:
1) рівняння з кутовим коефіцієнтом;
2) рівняння у відрізках.

1. Розв'яжемо рівняння відносно y, одержимо рівняння з кутовим коефіцієнтом:

$$y = (14 : 5)x - 9. \text{ Тут } k = 14 : 5,\ b = -9.$$

2. Перенесемо вільний член загального рівняння в праву частину і розділимо обидві частини на 45; отримаємо $(14 : 45)x - (5 : 45)y = 1$. Переписуючи останнє рівняння у вигляді

$$\frac{x}{45:14}+\frac{y}{-45:5}=1,$$

дістанемо рівняння даної прямої у відрізках. Тут $a = 45 : 14$; $b = -45 : 5 = -9$.

3.2. Задано вершини трикутника ABC: $A(3; 0)$, $B(5; 10)$, $C(13; 6)$. Знайти:

а) рівняння сторони AB;

б) рівняння висоти CD, опущеної з вершини C на сторону AC;

в) рівняння медіани AE.

а) Рівняння прямої, що проходить через точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, має вигляд

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Щоб знайти рівняння сторони AB, підставимо координати точок A і B:

$$\frac{x-3}{5-3}=\frac{y-0}{10-0};\quad \frac{x-3}{2}=\frac{y}{10};\quad y = 5x - 15.$$

б) Висота CD перпендикулярна до сторони AB, тому їх кутові коефіцієнти k_1 і k_2 відповідають умові $k_1 = -\frac{1}{k_2}$. З рівняння прямої AB видно, що $k_2 = 5$, тоді $k_1 = -\frac{1}{5}$. Запишемо рівняння прямої, що проходить через дану точку $M_1(x_1, y_1)$ в заданому напрямку: $y - y_1 = k(x - x_1)$.

Підставимо в нього координати точки C і кутовий коефіцієнт k_1, одержимо шукане рівняння висоти CD:

$$y - 6 = -\frac{1}{5}(x - 13);\quad 5y - 30 = -x + 13;\quad x + 5y - 43 = 0.$$

в) Визначити координати точки E. Застосуємо формулу поділу відрізка у заданому відношенні

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Використовуючи координати вершини B та C, дістанемо: $x = 9$, $y = 8$; $E(9;\ 8)$.

Підставимо координати точки A і E в рівняння $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$, одержимо рівняння медіани AE

$$4x - 3y - 12 = 0.$$

3.3. Вершини трикутника знаходяться в точках $A(3;\ -5)$, $B(-3;\ 3)$, $C(-1;\ -2)$. Знайти довжину та рівняння бісектриси його внутрішнього кута, проведеної з вершини A.

Відомо, що бісектриса внутрішнього кута трикутника ділить протилежну сторону на частини, пропорційні довжинам прилеглих сторін. Знайдемо довжини цих сторін:

$$|AB| = \sqrt{(-3-3)^2+(3+5)^2} = 10;\ |AC| = \sqrt{(-1-3)^2+(-2+5)^2} = 5.$$

Якщо точка $D\ (x,\ y)$ — точка перетину бісектриси і сторони BC, то вона ділить цю сторону у відношенні λ:

$$\lambda = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{|AB|}{|AC|} = \frac{10}{5} = 2.$$

Тепер знаходимо координати точки D за формулою поділу відрізка у заданому відношенні:

$$x = \frac{-3+2(-1)}{1+2} = -\frac{5}{3} \ \text{ і } \ y = \frac{3+2(-2)}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

Отже, шукана довжина бісектриси

$$|AD| = \sqrt{\left(-\frac{5}{3}-3\right)^2+\left(-\frac{1}{3}+5\right)^2} = \frac{14\sqrt{2}}{3}.$$

Рівняння бісектриси запишемо як рівняння прямої, що проходить через дві відомі точки $A(3;\ -5)$, $D\left(-\frac{5}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$:

$$\frac{x-3}{-\frac{5}{3}-3} = \frac{y+5}{-\frac{1}{3}+5};\quad \frac{x-3}{-14} = \frac{y+5}{14};$$

$$(x - 3) = -(y + 5);$$
$$x + y + 2 = 0.$$

3.4. Знайти рівняння площини, що проходить через точку $M_0(2;\ 1;\ -1)$ перпендикулярно до вектора $\bar{N} = \bar{i} - 2\bar{j} + 3\bar{k}$.

Достатньо використати рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно до заданого вектора: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$.

Отже, $1(x - 2) - 2(y - 1) + 3(z + 1) = 0$, тобто $x - 2y + 3z + 3 = 0$.

3.5. Записати рівняння площини, яка проходить через точки $M_1(2; -1; 3)$ і $M_2(3; 1; 2)$ паралельно вектору $\bar{a} = \{3; -1; 4\}$.

Використаємо умову компланарності трьох векторів $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\bar{a}$, де

$$\overline{M_1M} = \{x-2; y+1; z-3\},$$

$$\overline{M_1M_2} = \{1; 2; -1\}.$$

Звідси $\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0$, або $x - y - z = 0$.

3.6. Знайти рівняння площини, яка проходить через дві точки $M_1(1; -1; -2)$ і $M_2(3; 1; 1)$ перпендикулярно до площини $x - 2y + 3z - 5 = 0$.

За нормальний вектор $\overline{N}$ шуканої площини можна вибрати вектор, перпендикулярний до вектора $\overline{M_1M_2} = \{2; 2; 3\}$ і нормального вектора $\overline{N}_1 = \{1; -2; 3\}$ даної площини. А тому за $\overline{N}$ приймемо векторний добуток $\overline{M_1M_2}$ і $\overline{N}_1$:

$$\overline{N} = \left[\overline{M_1M_2}\ \ \overline{N}_1\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 12\bar{i} - 3\bar{j} - 6\bar{k}.$$

Залишається використати рівняння площини, яка проходить через задану точку (наприклад, M_1) перпендикулярно до заданого вектора $\overline{N} = \{12; -3; -6\}$:

$$12(x - 1) - 3(y + 1) - 6(z + 2) = 0, \text{ або } 4x - y - 2z - 9 = 0.$$

3.7. Записати рівняння площини, яка проходить через точку $M_1(3; -1; -5)$ перпендикулярно до двох площин $3x - 2y + 2z + 7 = 0$ і $5x - 4y + 3z + 1 = 0$.

На відміну від попередньої задачі, використаємо умову компланарності трьох векторів: $\overline{M_1M} = \{x - 3; y + 1; z + 5\}$, $\overline{N}_1 = \{3; -2; 2\}$ і $\overline{N}_2 = \{5; -4; 3\}$, тобто

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z+5 \\ 3 & -2 & 2 \\ 5 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

$2(x - 3) + 1(y + 1) - 2(z + 5) = 0$, або $2x + y - 2z - 15 = 0$.

3.8. Рівняння прямої привести до канонічного вигляду:

$$\begin{cases} x - 2y + 3z - 4 = 0, \\ 3x + 2y - 5z - 4 = 0. \end{cases}$$

Візьмемо, наприклад, $z_0 = 0$, знаходимо з даної системи $x_0 = 2$, $y_0 = -1$; отже, ми вже знаємо одну точку прямої: $M_0(2; -1; 0)$. Тепер знайдемо напрямний вектор. Оскільки він має бути перпендикулярний до нормальних векторів $\overline{N}_1 = \{1; -2; 3\}$, $\overline{N}_2 = \{3; 2; -5\}$ заданих площин, то за $\bar{s}$ можна взяти векторний добуток векторів $\overline{N}_1$ і $\overline{N}_2$:

$$\bar{s} = \left[\overline{N}_1 \cdot \overline{N}_2\right] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 4\bar{i} + 14\bar{j} + 8\bar{k},$$

тобто $l = 4$; $m = 14$; $n = 8$.

Підставляючи знайдені значення x_0, y_0, z_0 і l, m, n у рівність $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$, дістанемо канонічне рівняння даної прямої

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{14} = \frac{z}{8}, \text{ або } \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{7} = \frac{z}{4}.$$

3.9. Знайти точку Q, симетричну точці $P(1; 3; -4)$ відносно площини $3x + y - 2z = 0$.

Запишемо рівняння прямої, яка проходить через точку P перпендикулярно до заданої площини, що має нормальний вектор $\overline{N} = \{3; 1; -2\}$, у вигляді

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-2}.$$

Знайдемо проекцію точки P на задану площину, розв'язавши сумісно систему рівнянь

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = 0, \\ \frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+4}{-2}. \end{cases}$$

Перепишемо рівняння прямої у вигляді $x = 3t + 1$; $y = t + 3$; $z = -2t - 4$. Підставимо ці вирази для x, y, z у рівняння площини, знайдемо $t = -1$, звідки $x = -2$; $y = 2$; $z = -2$.

Координати симетричної точки знайдемо з формул

$$x = \frac{x_p + x_Q}{2};\ y = \frac{y_p + y_Q}{2};\ z = \frac{z_p + z_Q}{2},$$

тобто $-2 = \dfrac{1 + x_Q}{2}$; $\quad 2 = \dfrac{3 + y_Q}{2}$; $\quad -2 = \dfrac{-4 + z_Q}{2}$.

Звідси $x_Q = -5$; $y_Q = 1$; $z_Q = 0$.

Отже, $Q(-5; 1; 0)$.

3.10. Знайти точку Q, симетричну точці $P\ (2; -5; 7)$ відносно прямої, яка проходить через точки $M_1(5; 4; 6)$ і $M_2(-2; -17; -8)$.

Рівняння прямої, яка проходить через точки M_1 і M_2, має вигляд

$$\frac{x-5}{-7} = \frac{y-4}{-21} = \frac{z-6}{-14}.$$

Рівняння площини, яка проектує точку P на пряму, має вигляд

$$-7(x - 2) - 21(y + 5) - 14(z - 7) = 0,\ \text{або}\ x + 3y + 2z - 1 = 0.$$

Знаходимо проекцію точки Q на пряму, для чого сумісно розв'яжемо систему рівнянь

$$\begin{cases} x + 3y + 2z - 1 = 0, \\ \dfrac{x-5}{-7} = \dfrac{y-4}{-21} = \dfrac{z-6}{-14}. \end{cases}$$

Параметричне рівняння даної прямої має вигляд $x = -7t + 5$; $y = -21t + 4$; $z = -14t + 6$.

Підставляючи x, y, z у рівняння площини, знайдемо $t = \dfrac{2}{7}$. Звідси $x = 3$; $y = -2$; $z = 2$.

Тоді координати симетричної точки можна знайти, використовуючи формулу для координат середини відрізка:

$$3 = \frac{2 + x_Q}{2};\ -2 = \frac{-5 + y_Q}{2};\ 2 = \frac{7 + z_Q}{2},$$

звідки $x_Q = 4$; $y_Q = 1$; $z_Q = -3$.

Отже, $Q(4; 1; -3)$.

Задачі і вправи для самостійної роботи

3.11. Визначити площу S та периметр трикутника, утвореного прямою $3x - 4y - 12 = 0$ і осями координат.

3.12. Записати рівняння прямої, що проходить через початок координат і точку $(-1; 8)$.

3.13. Дано вершини трикутника $A(1; -2)$, $B(5; 4)$ і $C(-2; 0)$. Записати рівняння бісектриси його внутрішнього кута при вершині A.

3.14. Записати рівняння прямих, на яких лежать катети рівнобедреного прямокутного трикутника, знаючи рівняння прямої, на якій лежить гіпотенуза $3x - y + 5 = 0$, і вершину кута $C(4; -1)$.

3.15. Встановити, які з пар прямих паралельні, збігаються або перетинаються (в останньому випадку знайти їх точку перетину):

1) $x + y - 3 = 0$ і $2x + 3y - 4 = 0$;
2) $y = x + 5$ і $2x - 2y + 3 = 0$;
3) $y = \dfrac{1}{2}x + 2$ і $-\dfrac{1}{4}x + \dfrac{1}{2}y = 1$.

3.16. Визначити точку, симетричну точці $M(8; -9)$ відносно прямої, яка проходить через точки $A(3; -4)$ і $B(-1; -2)$.

3.17. Основа рівнобедреного трикутника лежить на прямій $x - 2y = 0$, а одна з бічних сторін на прямій $x + y - 3 = 0$. Записати рівняння промої, на якій лежить друга бічна сторона, знаючи, що вона проходить через точку $(1; -1)$.

3.18. Обчислити величину кута між прямими:

1) $y = 3x$ і $y = -2x + 5$;
2) $y = 4x - 7$ і $y = -\dfrac{x}{4} + 2$;
3) $y = 5x - 3$ і $y = 5x + 8$.

3.19. Записати рівняння прямої, паралельної і рівновіддаленої від двох паралельних прямих $x + y - 1 = 0$ і $x + y + 13 = 0$.

3.20. Записати рівняння прямої, на якій лежить перпендикуляр, встановлений у точці перетину прямих $4x + 3y - 5 = 0$ і $8x - 5y + 23 = 0$ до першої прямої.

3.21. Записати рівняння прямої, на якій лежать бісектриси кутів між прямими $3x - 4y + 7 = 0$ і $5x + 12y - 1 = 0$.

3.22. При яких значеннях параметра a пряма $(a + 2)x + (a^2 + 9)y + 3a^2 - 8a + 5 = 0$:

1) паралельна осі Ox;
2) паралельна осі Oy;
3) проходить через початок координат?

3.23. Записати рівняння прямих, на яких розміщені сторони трикутника ABC, знаючи координати вершини $A(1; 3)$ та рівняння двох його медіан: $y - 1 = 0$ і $x - 2y + 1 = 0$.

3.24. Записати рівняння сторін трикутника ABC, якщо задано координати однієї з його вершин $B(-4; -5)$ і рівняння прямих, на яких лежать дві його висоти: $5x + 3y - 4 = 0$ і $3x + 8y + 13 = 0$.

3.25. Дві сторони квадрата лежать на прямих $5x - 12y - 65 = 0$, $5x - 12y + 26 = 0$. Обчислити площу квадрата.

3.26. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $M(2; 3; -1)$ паралельно площині $5x - 3y + 2z - 10 = 0$.

3.27. Знайти довжину перпендикуляра, який опущено з точки $M_0(2; 3; -5)$ на площину $4x - 2y + 5z - 12 = 0$.

3.28. Знайти рівняння площини, яка проходить через точку $P(2; 0; -1)$ і $Q(1; -1; 3)$ перпендикулярно до площини $3x + 2y - z + 5 = 0$.

3.29. Знайти рівняння площини, яка проходить через початок координат і через точки $P(4; -2; 1)$ і $Q(2; 4; -3)$.

3.30. Знайти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $x + 5y + 9z - 13 = 0$, $3x - y - 5z + 1 = 0$ і через точку $M(0; 2; 1)$.

3.31. Скласти рівняння площини, яка проходить через лінію перетину площин $2x - y - 12z - 3 = 0$ і $3x + y - 7z - 2 = 0$ перпендикулярно до площини $x + 2y + 5z - 1 = 0$.

3.32. Скласти рівняння площини, яка проходить через точку $M(0; 2; 1)$ паралельно векторам $\bar{a} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$ і $\bar{b} = \bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$.

3.33. Знайти рівняння прямої, яка проходить через точку $N(5; -1; -3)$ паралельно прямій

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 6 = 0, \\ 4x - 5y - z + 2 = 0. \end{cases}$$

3.34. Обчислити відстань між паралельними прямими

$$\frac{x}{1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{1}\ ;\ \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{1}.$$

3.35. Задано точки $A(-1; 2; 3)$ і $B(2; -3; 1)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку $M(3; -1; 2)$ паралельно вектору $\overline{AB}$.

3.36. Знайти кут між прямими

$$\begin{cases} 4x - y - z + 12 = 0, \\ y - z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} 3x - 2y + 16 = 0, \\ 3x - z = 0. \end{cases}$$

3.37. Задано точки $A(1; 1; 1)$, $B(2; 3; 3)$ і $C(3; 3; 2)$. Скласти рівняння прямої, яка проходить через точку A перпендикулярно до векторів $\overline{AB}$ і $\overline{AC}$.

3.38. Знайти рівняння площини, яка проходить через пряму $\frac{x+1}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{4}$ перпендикулярно до площини: $3x + y - z + 2 = 0$.

3.39. Знайти рівняння проекції прямої $\frac{x}{2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z-2}{-2}$ на площину $2x + 3y - z - 5 = 0$.

§ 3. Лінії другого порядку

Розглянувши геометричні образи, визначені рівняннями першого степеня, природно перейти до вивчення образів, яким відповідають рівняння другого степеня. Почнемо з розгляду різних об'єктів на координатній площині xy і розглядатимемо рівняння з двома невідомими, покладаючи, що третя координата z завжди дорівнює нулю.

Загальне рівняння другого степеня з двома невідомими має вигляд

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{20}$$

при цьому хоча б один із коефіцієнтів A, B, C не дорівнює нулю.

Лінії, що відповідають цьому рівнянню, називаються кривими другого порядку.

Найпростішою такою кривою є коло. Нехай центр кола знаходиться в точці $M_0(a, b)$ і радіус кола дорівнює R. Оскільки коло є множиною точок, що знаходяться на заданій відстані від центра M_0, тоді $\left|\overline{M_0M}\right| = R$,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{21}$$

Зазначимо, що в рівнянні відсутній член з добутком змінних координат і коефіцієнти при квадратних змінних координат рівні між собою (в рівнянні (21) ці коефіцієнти дорівнюють 1), але звичайно можна всі частини рівняння (21) помножити на будь-яку константу.

Кривими другого порядку є криві — еліпс, гіпербола і парабола. Більш того, далі доведемо, що будь-яка лінія другого порядку являє собою або еліпс, або гіперболу, або параболу, або будь-який випадок їх "виродження". Однак насамперед дамо визначення цих трьох основних кривих, виведемо їх найпростіші рівняння і дослідимо їх форми.

Означення. *Еліпсом називається множина точок (на площині), сума відстаней від яких до двох даних точок стала.*

Виберемо систему прямокутних декартових координат так, щоб вісь абсцис проходила через обидві задані точки F_1 і F_2, а початок координат знаходився на середині відрізка F_1F_2 (рис. 19).

Нехай $M(x, y)$ — одна з точок множини, що розглядається. Позначимо через $2c$ відстань між заданими точками F_1 і F_2 та через $2a$ — задану суму відстаней F_1M і F_2M. Очевидно, що точка F_1 має координати $(-c; 0)$, а точка F_2 — координати $(c; 0)$.

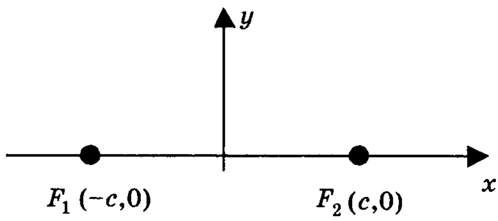

Рис. 19

Згідно з означенням

$$|\overline{F_1M}|+|\overline{F_2M}|=2a, \tag{22}$$

звідси дістанемо рівняння

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a. \tag{23}$$

Насправді рівняння (23) уже і є рівнянням множини, що розглядається. Проте воно має незручний для дослідження вигляд; перетворимо його до більш простої форми:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$x^2+2cx+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+x^2-2cx+c^2+y^2,$$

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$a^4-2a^2cx+c^2x^2=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

Оскільки $2a>2c$ (сума двох сторін трикутника більше третьої сторони), то $a^2-c^2>0$. Приймемо

$$a^2-c^2=b^2. \tag{24}$$

У кінцевому підсумку одержимо (при вибраній системі координат) рівняння

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{25}$$

Очевидно, кожна точка розглядуваної множини має задовольняти одержане рівняння (25). Проте оскільки в процесі перетворень двічі підносилися до квадрату обидві частини рівняння, потрібно перевірити, чи не отримані при цьому “зайві” точки. Інакше кажучи, треба перевірити, що кожна точка, координати якої задовольняють одержаному рівнянню, належить розглядуваній множині точок.

Попередньо зробимо деякі зауваження про форму лінії, що відповідає одержаному рівнянню.

Оскільки

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \qquad \text{і} \qquad x = \pm\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y^2},$$

то крива симетрична відносно осей координат, а тому і відносно початку координат. Із зростанням $|x|$ від 0 до a $|y|$ спадає від b до 0. Точки кривої існують лише в прямокутнику $|x| \le a$, $|y| \le b$ (рис. 20).

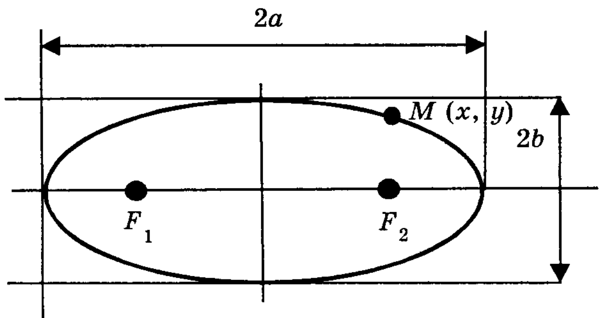

Рис. 20

Перевіримо тепер, що будь-яка точка лінії, визначена одержаним рівнянням, належить заданій множині. Для цього потрібно показати, що якщо координати довільної точки $M_0(x_0, y_0)$ задовольняють рівнянню $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, де $b^2 = a^2 - c^2$, то $|\overline{F_1M_0}| + |\overline{F_2M_0}| = 2a$.

Оскільки $y_0 = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$, то

$$|\overline{F_1M_0}| + |\overline{F_2M_0}| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} + \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} =$$

$$= \sqrt{(x_0 + c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)} + \sqrt{(x_0 - c)^2 + \frac{b^2}{a^2}(a^2 - x_0^2)} =$$

$$= \frac{1}{a}\Big[\sqrt{(a^2 - b^2)x_0^2 + 2a^2cx_0 + a^2(c^2 + b^2)} +$$

$$+ \sqrt{(a^2 - b^2)x_0^2 - 2a^2cx_0 + a^2(c^2 + b^2)}\Big] = \frac{1}{a}\Big[\sqrt{c^2x_0^2 + 2a^2cx_0 + a^4} +$$

$$+ \sqrt{c^2x_0^2 - 2a^2cx_0 + a^4}\Big] = \frac{1}{a}\Big[\sqrt{(cx_0 + a^2)^2} + \sqrt{(cx_0 - a^2)^2}\Big].$$

Оскільки $|x_0| \le a$ і $c < a$, то $cx_0 + a^2 > 0$ і $cx_0 - a^2 < 0$.
Тому

$$\sqrt{(cx_0 + a^2)^2} = cx_0 + a^2, \qquad \sqrt{(cx_0 - a^2)^2} = a^2 - cx_0,$$

$$|\overline{F_1M_0}| + |\overline{F_2M_0}| = \frac{1}{a}(cx_0 + a^2 + a^2 - cx_0) = 2a.$$

Отже, всі точки лінії $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ є точками заданої множини точок.

Точки F_1 і F_2 називаються *фокусами* еліпса, числа a і b — *півосями* еліпса, точки перетину еліпса з його осями симетрії — *вершинами* еліпса.

Зі зміною c змінюється форма еліпса. Якщо c прямує до нуля, тобто фокуси еліпса зливаються, тоді b прямує до a і еліпс стає колом з рівнянням $x^2 + y^2 = a^2$, тобто коло є окремим випадком еліпса, коли півосі еліпса рівні між собою.

Якщо c прямує до a, тоді $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ прямує до нуля і еліпс стискується вздовж осі ординат. Отже, відношення $\frac{c}{a}$ може бути мірою стиску еліпса, мірою його відхилення від кола. Число $E = \frac{c}{a}$ $(0 < E < 1)$ називається *ексцентриситетом* еліпса.

У багатьох задачах буває потрібно використовувати параметричні рівняння еліпса.

Побудуємо два кола з центрами на початку координат і радіусами b і a. Проведемо з початку координат промінь під кутом t до осі абсцис $(0 \le t < 2\pi)$.

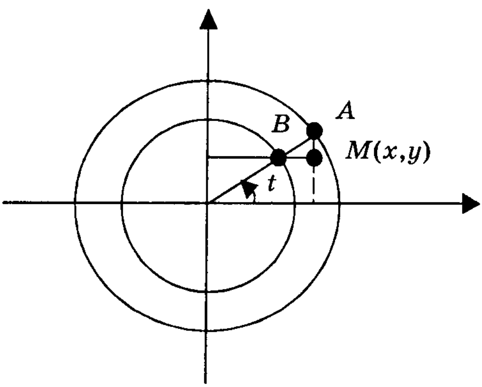

Рис. 21

Нехай B і A — його точки перетину з побудованими колами (рис. 21) і $M(x, y)$ — точка перетину прямих, проведених з B паралельно осі абсцис і з A — паралельно осі ординат. Визначимо геометричне місце точок M.

Маємо $x = |\overline{OA}| \cos t = a\cos t, \qquad y = |\overline{OB}| \sin t = b\sin t.$

Оскільки $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 t + \sin^2 t = 1,$ то точки M є точками еліпса з півосями a і b. Змінюючи t від 0 до 2π, дістанемо всі точки цього еліпса. Отже, рівняння

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t \tag{26}$$

є параметричним рівнянням еліпса з півосями a і b, розміщеного симетрично відносно осей координат. Зокрема, при $a = b$ дістанемо параметричне рівняння кола.

Означення. *Гіперболою називається множина точок (на площині), абсолютне значення різниці відстаней від яких до двох даних точок стале (і відмінне від нуля).*

Систему координат виберемо так, як і при виведенні рівняння еліпса (рис. 22).

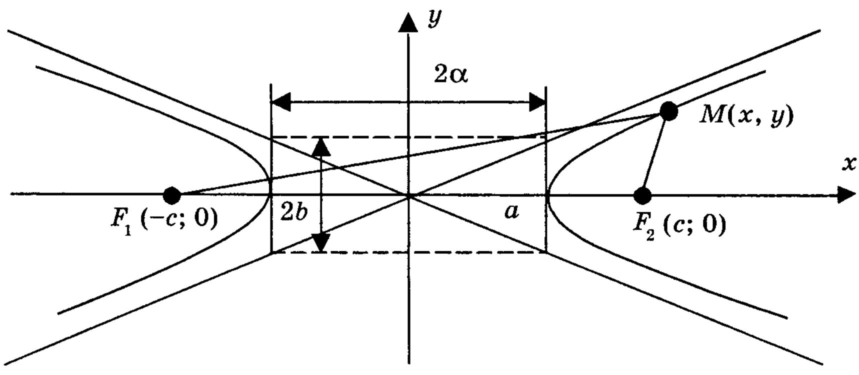

Рис. 22

Із визначення маємо

$$\left| |\overline{F_1M}| - |\overline{F_2M}| \right| = 2a, \tag{27}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a,$$

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

$$cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

Оскільки різниця двох сторін трикутника менше третьої його сторони, то $2a < 2c$.

Покладемо

$$c^2 - a^2 = b^2. \tag{28}$$

Тоді одержимо $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ і, нарешті,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{29}$$

Як і у випадку еліпса, потрібно перевірити, що, незважаючи на двократне піднесення до квадрата, ми не одержали "зайвих" точок, і здобуте рівняння (29) є рівнянням гіперболи.

Попередньо зазначимо деякі властивості лінії, визначеної рівнянням (29). Ця лінія симетрична відносно осей координат і відносно початку координат.

Оскільки $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, то для всіх точок кривої $x \geq a$, немає точок кривої у смузі $-a < x < a$. Крива складається з двох окремих частин — *віток гіперболи*, одна з яких лежить в області $x \geq a$, а друга — в області $x \leq -a$ (права і ліва вітки гіперболи).

Повернемося до доведення того, що рівняння (29) є рівнянням гіперболи.

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — довільна точка, координати якої задовольняють рівняння (29). Потрібно довести, що $\left| |\overline{F_1M_0}| - |\overline{F_2M_0}| \right| = 2a$.

$$|\overline{F_1M_0}| - |\overline{F_2M_0}| = \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2} - \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0{}^2} =$$

$$= \sqrt{x_0^2 + 2cx_0 + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - a^2)} - \sqrt{x_0^2 - 2cx_0 + c^2 + \frac{b^2}{a^2}(x_0^2 - a^2)} =$$

$$= \frac{1}{a}\left[\sqrt{(cx_0 + a^2)^2} - \sqrt{(cx_0 - a^2)^2}\right].$$

При $x_0 > a$ (тобто для точок правої вітки гіперболи) $cx_0 + a^2 > 0$ і $cx_0 - a^2 > 0$. Тому у випадку $x_0 > a$

$$|\overline{F_1M_0}| - |\overline{F_2M_0}| = \frac{1}{a}\left[(cx_0 + a^2) - (cx_0 - a^2)\right] = 2a.$$

При $x_0 < -a$ (тобто для точок лівої вітки гіперболи) $cx_0 + a^2 < 0$ і $cx_0 - a^2 < 0$. Тому у випадку $x_0 \le -a$

$$|\overline{F_1M_0}| - |\overline{F_2M_0}| = \frac{1}{a}\left[-(cx_0 + a^2) + (cx_0 - a^2)\right] = -2a.$$

Отже, в обох випадках $\left\| \overline{F_1M_0} | - | \overline{F_2M_0} \right\| = 2a$ і крива (29) є гіперболою.

Число a називається *дійсною піввіссю*, число b — *уявною піввіссю*. Точки перетину гіперболи з її віссю симетрії називаються *вершинами* гіперболи, точки F_1 і F_2 — її *фокусами*.

Зазначимо ще одну особливість форми цієї лінії. Розглянемо разом з гіперболою дві прямі: $y = \pm\frac{b}{a}x$. Неважко помітити (внаслідок симетрії лінії достатньо розглянути першу чверть), що при одній і тій самій абсцисі ординати точок гіперболи менше ординат відповідних точок прямої $y = \frac{b}{a}x$.

Дійсно, $y_{\text{пр}} - y_{\text{гіп}} = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} > 0.$

Разом з тим, оскільки

$$x - \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{x^2 - (x^2 - a^2)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

тоді різниця $y_{\text{пр}} - y_{\text{гіп}}$ прямує до нуля при необмеженому зростанні x, і тому точки гіперболи при необмеженому збільшенні абсциси як завгодно близько наближаються до відповідних точок прямої $y = \frac{b}{a}x$.

Прямі

$$y = \pm\frac{b}{a}x, \tag{30}$$

до яких як завгодно близько при $|x| \to \infty$ наближаються точки віток гіперболи, називаються *асимптотами* гіперболи. Неважко помітити, що асимптоти гіперболи напрямлені за діагоналями прямокутника зі сторонами $2a$ і $2b$, симетричного відносно осей симетрії гіперболи.

Якщо $a = b$, тоді гіпербола набуває вигляду

$$x^2 - y^2 = a^2. \tag{31}$$

Асимптоти гіперболи в цьому випадку взаємно перпендикулярні. Така гіпербола називається *рівнобічною*.

Третьою основною кривою другого порядку є парабола.

Означення. *Параболою називається множина точок (на площині), рівновіддалених від заданої точки і заданої прямої.*

Виберемо вісь абсцис прямокутної декартової системи координат так, щоб вона проходила через задану точку F перпендикулярно до заданої прямої L, початок координат нехай знаходиться на середині відрізка FK (рис. 23). Напрямок осі абсцис вказаний на рисунку.

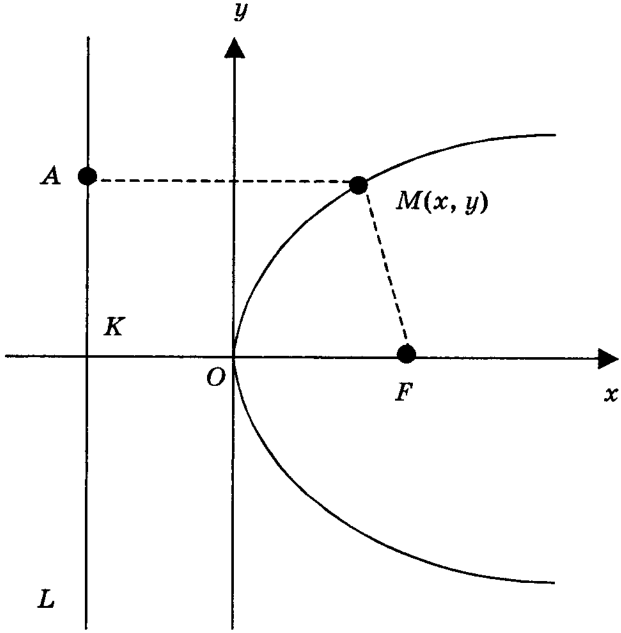

Рис. 23

Відстань від точки F до прямої L позначимо через p. Тоді точка F матиме координати $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$, а рівняння прямої L — $x = -\frac{p}{2}$.

Нехай $M(x, y)$ — довільна точка розглядуваної множини і A — основа перпендикуляра, опущеного з M на L.

Оскільки точка A має координати $\left(-\frac{p}{2}; y\right)$ і згідно з означенням $|\overline{AM}| = |\overline{FM}|$, тоді

$$\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+(y-y)^2}=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2},\ \left(x+\frac{p}{2}\right)^2=\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2$$

і

$$y^2 = 2px. \tag{32}$$

Легко перевірити, що при піднесенні до квадрата ми не ввели "зайві" точки. Дійсно, підставляючи $2px$ замість y^2 у вираз $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$ дістанемо $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+2px}=\sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2}$. Отже, $|\overline{FM}|=|\overline{AM}|$.

Оскільки $y^2 \geq 0$, то x не може бути від'ємним і всі точки кривої лежать в правій півплощині. При зростанні x від 0 до $+\infty$ необмежено зростає $|y|$. Ясно також, що крива симетрична відносно осі абсцис.

Задана точка F називається *фокусом* параболи, точка перетину параболи з її віссю симетрії — *вершиною* параболи.

Рівняння $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (еліпс), $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (гіпербола), $y^2 = 2px$ (парабола) були одержані при спеціальному, найзручнішому розміщенні координатних осей. Тому ці рівняння називаються найпростішими, або канонічними, рівняннями кривих другого порядку.

Для того щоб ознайомитися з методами приведення рівнянь кривих другого порядку, заданих в іншій координатній системі, до такого найпростішого вигляду, потрібно дістати формули перетворення координатних систем.

Контрольні запитання і завдання

1. Яка множина на площині називається колом? Запишіть рівняння кола з центром у точці $C(a, b)$ і радіусом R.
2. Дайте означення еліпса і запишіть канонічне рівняння еліпса.
3. Побудуйте криву еліпса і поясніть геометричний зміст параметрів, що входять до рівняння.
4. Що таке ексцентриситет еліпса та який його геометричний зміст?
5. Дайте означення гіперболи та виведіть її канонічне рівняння.
6. Дослідіть форму гіперболи за її канонічним рівнянням. Поясніть геометричний зміст параметрів, що входять до рівняння.

7. Які гіперболи називаються рівносторонніми, спряженими?

8. Що таке ексцентриситет гіперболи та який його геометричний зміст?

9. Наведіть означення параболи і виведіть її канонічне рівняння.

10. Дослідити форму параболи за її канонічним рівнянням.

11. Чому дорівнює ексцентриситет параболи? Який геометричний зміст параметра p у рівнянні параболи?

Приклади розв'язування задач

3.40. Записати рівняння кола, що має центр у точці (5; –7) і проходить через точку (2; –3).

Знайдемо радіус кола як відстань від центра до даної його точки:

$$r = \sqrt{(2-5)^2 + (-3-(-7))^2} = 5.$$

Тепер у рівняння кола (21) підставимо координати центра і знайдену величину радіуса:

$$(x-5)^2 + (y+7)^2 = 25.$$

3.41. Знайти координати центра та радіус кола

$$x^2 + y^2 - 4x - 14y + 17 = 0.$$

Перепишемо дане рівняння так:

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 14y + 49 + 17 - 4 - 49 = 0,$$

або

$$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 36.$$

Порівнюючи це рівняння з рівнянням кола (21), дістанемо $a = 2$, $b = 7$, $R = 6$. Отже, центр кола знаходиться в точці (2; 7), радіус його дорівнює 6.

3.42. Знайти рівняння еліпса, фокусами якого є точки $F_1(0; 0)$ та $F_2(0; 8)$, а велика піввісь $a = 5$.

Відстані від точки $M(x, y)$ еліпса до фокусів дорівнюють відповідно $\sqrt{x^2 + y^2}$ та $\sqrt{x^2 + (y-8)^2}$. Згідно з означенням еліпса маємо

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + (y-8)^2} = 10.$$

Спрощуючи це рівняння, одержимо

$$\sqrt{x^2 + y^2 - 16y + 64} = 10 - \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 - 16y + 64 = 100 - 20\sqrt{x^2 + y^2} + x^2 + y^2,$$

$$16y + 36 = 20\sqrt{x^2 + y^2},$$

$4y + 9 = 5\sqrt{x^2 + y^2}$,

$16y^2 + 72y + 81 = 25x^2 + 25y^2$,

$25x^2 + 9y^2 - 72y - 81 = 0$.

Виділимо повний квадрат відносно y:

$$25x^2 + 9(y^2 - 8y + 16) = 225.$$

Поділимо на 225 і дістанемо канонічне рівняння еліпса

$$\frac{x^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1.$$

Осями симетрії такого еліпса будуть лінії $x = 0$ та $y = 4$, велика піввісь $a = 5$, мала піввісь $b = 3$.

3.43. Обчислити півосі гіперболи, якщо директриси задані рівняннями $x = \pm 3\sqrt{2}$ і кут між асимптотами прямий.

Директриси пов'язані з півосями гіперболи формулами

$$x = \frac{a}{E};\ \ x = -\frac{a}{E};\ \ E = \frac{c}{a};\ \ c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

a, b — півосі гіперболи. Рівняння асимптот $y = \frac{b}{a}x$ та $y = -\frac{b}{a}x$.

Згідно з умовою задачі одержимо систему двох рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 3\sqrt{2}, \\ \dfrac{b^2}{a^2} = 1 \ \ \text{(умова перпендикулярності асимптот).} \end{cases}$$

Звідси $b^2 = a^2$, $\dfrac{a^2}{a\sqrt{2}} = 3\sqrt{2}$ $\Rightarrow a = 3 \cdot 2 = 6$, отже $b = 6$.

3.44. Написати рівняння параболи, що проходить через точку (0; 0) та (1; −2) симетрично відносно осі Ox.

Рівняння параболи, що проходить через точку (0; 0) симетрично відносно осі Ox, має вигляд $y^2 = 2px$.

Згідно з умовою, що парабола проходить через точку (1; −2), дістанемо $(-2)^2 = 2p$.

Звідси $p = \frac{4}{2} = 2$.

Тобто шукане рівняння параболи матиме вигляд $y^2 = 4x$.

Задачі і вправи для самостійної роботи

3.45. Записати рівняння кола з центром у точці $\left(\frac{1}{2}; -\frac{3}{4}\right)$ і з радіусом, що дорівнює 2. Побудувати це коло.

3.46. Записати рівняння кола, яке проходить через точки $A(5;\ 7)$ і $B(-2;\ 4)$, якщо центр його лежить на прямій $4x + 3y - 18 = 0$.

3.47. Записати канонічне рівняння еліпса, що проходить через точку $M(5;\ 0)$, якщо фокальна відстань дорівнює 6.

3.48. Довести, що рівняння $36x^2 + 100y^2 - 3600 = 0$ є рівнянням еліпса. Знайти координати фокусів та фокальну відстань.

3.49. Записати рівняння еліпса, фокусами якого є точки $(0; -\sqrt{5})$ і $(0; \sqrt{5})$, а велика вісь дорівнює 6.

3.50. Записати рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо відстань між фокусами дорівнює 12, а ексцентриситет $E = 0{,}6$.

3.51. Записати рівняння еліпса з фокусами на осі Ox, якщо він проходить через точки $A(\sqrt{3}; \sqrt{6})$ і $B(3; \sqrt{2})$.

3.52. Побудувати еліпси $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ і $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Для кожного еліпса обчислити ексцентриситет.

3.53. Знайти координати точок перетину еліпса $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ з прямою $x + 2y - 14 = 0$.

3.54. Яку лінію визначає рівняння $7x^2 - 9y^2 = 63$?

3.55. Знайти півосі, координати фокусів та ексцентриситет гіперболи, що задані рівнянням $4x^2 - 5y^2 = 20$. Обчислити довжини фокальних радіусів точки $M(-5;\ 4)$.

3.56. Записати рівняння асимптот та директрис гіперболи $9x^2 - 25y^2 = 225$.

3.57. Гіпербола проходить через точки $M\left(3; \frac{2\sqrt{15}}{5}\right)$ та $N(-2\sqrt{5}; 3)$. Знайти її канонічне рівняння.

3.58. Написати рівняння дотичних до гіперболи $x^2 - 4y^2 = 16$, проведених з точки $A(0;\ -2)$.

3.59. Знайти відстань від фокуса гіперболи $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ до її асимптот та кут між асимптотами.

3.60. Написати рівняння параболи:

1) що проходить через точки $(0;\ 0)$ та $(-1;\ 2)$ симетрично відносно осі Ox;

2) що проходить через точки (0; 0) та (2; 4) симетрично відносно осі Oy.

3.61. Знайти координати фокуса та рівняння директриси параболи $y^2 = 20x$. Обчислити відстань точки $M(10; -10\sqrt{2})$ до фокуса.

3.62. Скласти рівняння параболи, що симетрична відносно осі Ox, яка проходить через точки $M(4; -5)$ та $N(6; 15)$.

3.63. На параболі $y^2 = 6x$ знайти точку M, фокальний радіус якої рівний 4,5.

3.64. Написати рівняння дотичних до параболи $y^2 = 8x$, проведених з точки $A(0; -2)$.

3.65. Скласти параметричне рівняння кола, якщо точка $M(x, y)$ описує коло радіуса r з центром на початку координат.

3.66. Дано рівняння еліпса $9x^2 + 16y^2 = 144$. Записати його параметричне рівняння.

3.67. Дано параметричні рівняння еліпса $x = 5\cos t$, $y = 3\sin t$, $t \in [0; 2\pi)$. Записати його канонічне рівняння.

§ 4. Перетворення координат на площині. Застосування перетворення координат до спрощення рівнянь кривих другого порядку

Розглянемо насамперед, як змінюються координати точок площини xy при перетворенні паралельного перенесення, тобто таких перетворень, при яких зберігається напрямок осей (розглядається прямокутна декартова система координат), але змінюється положення початку координат.

Припустимо, що на площині вибрано деяку точку M, нехай (x, y) — її координати в системі осей x, y з початком O і (x', y') — координати тієї самої точки M у системі осей x', y' з початком O' (рис. 24). Нехай (a, b) — координати точки O' в системі осей x, y. Очевидно, $OO' + O'M = OM$.

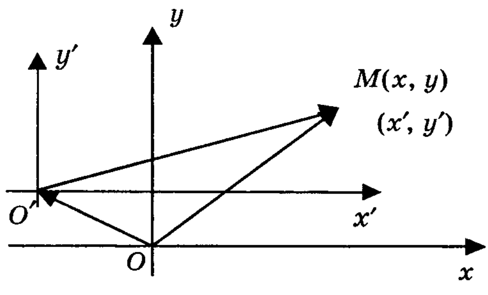

Рис. 24

Оскільки при паралельному перенесенні осей координатний базис не змінюється, то при додаванні векторів можна складати їх відповідні координати. А тому

$$x = x' + a; \quad y = y' + b. \tag{33}$$

Ми одержали формули для переходу від старих координат точки M до нових її координат. Із формули (33) випливають формули

$$x' = x - a; \quad y' = y - b, \tag{34}$$

що виражають нові координати через старі.

Приклад 1. Встановити, як змінюється рівняння $x^2 - 4x + 2y^2 + 8y - 10 = 0$ при паралельному перенесенні осей координат, якщо початок координат перенесено в точку O' (2; −2).

Згідно з формулою (33) маємо $x = x' + 2$, $y = y' - 2$. Підставляючи ці вирази в задане рівняння, дістанемо

$$(x' + 2)^2 - 4(x' + 2) + 2(y' - 2)^2 + 8(y' - 2) - 10 = 0,$$

$$x'^2 + 2y'^2 = 22, \quad \frac{x'^2}{22} + \frac{y'^2}{11} = 1.$$

Отже, вихідному рівнянню відповідає еліпс з півосями $\sqrt{22}$ і $\sqrt{11}$, з центром симетрії у точці (2; −2) і осями симетрії, паралельними осям координат.

Приклад 2. За допомогою паралельного переносу осей координат привести до найпростішого вигляду рівняння $x^2 - 6x - 3y^2 - 6y + 2 = 0$.

Перепишемо задане рівняння у вигляді

$$(x - 3)^2 - 9 - 3(y + 1)^2 + 3 + 2 = 0.$$

Візьмемо $x - 3 = x'$, $y + 1 = y'$.

Тоді

$$x'^2 - 3y'^2 = 4, \text{ або } \frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{\frac{4}{3}} = 1.$$

Отже, вихідне рівняння визначає гіперболу з дійсною віссю 2, уявною $\frac{2}{\sqrt{3}}$ і центром симетрії у точці (3; −1). Осі симетрії гіперболи паралельні осям координат.

Раніше зазначалося, що рівняння $y^2 = 2px$ ($p > 0$) визначає параболу, в якій вісь симетрії збігається з віссю абсцис і вершина знаходиться на початку координат. Рівнянню $x^2 = 2py$, або, що те саме, рівнянню

$y = ax^2 \left(a = \dfrac{1}{2p} \right)$, відповідає, очевидно, парабола, в якої вісь симетрії збігається з віссю ординат, а вершина, як і раніше, знаходиться на початку координат. Покажемо, що рівняння $y = ax^2 + bx + c$ можна привести до вигляду $y = ax^2$ з допомогою паралельного перенесення осей.

Нехай (a_1, b_1) — координати нового початку в старій системі координат. Тоді $x = x' + a_1$, $y = y' + b_1$ і рівняння $y = ax^2 + bx + c$ набуває вигляду

$$y' + b_1 = a(x' + a_1)^2 + b(x' + a_1) + c,$$

або

$$y' = ax'^2 + (2aa_1 + b)x' + aa_1^2 + ba_1 + c - b_1.$$

Числа a_1 і b_1 були поки що довільні. Виберемо їх так, щоб виконувалася рівність

$$2aa_1 + b = 0, \quad aa_1^2 + ba_1 + c - b_1 = 0.$$

Розв'язуючи цю систему, дістанемо $a_1 = -\dfrac{b}{2a}$; $b_1 = c - \dfrac{b^2}{4a}$. Отже, якщо перенести початок координат (при збереженні напрямку осей координат) у точку $O'\left(-\dfrac{b}{2a}; c - \dfrac{b^2}{4a} \right)$, тоді вихідне рівняння $y = ax^2 + bx + c$ набуває вигляду $y' = ax'^2$. Проте це означає, що вихідне рівняння є рівнянням параболи з вершиною в точці O' і віссю симетрії, паралельною осі ординат.

Розглянемо тепер перетворення, що включає в себе поворот координатних осей при збереженні положення початку координат. Нехай x, y — старі осі координат, x', y' — нові осі (рис. 25) і α — кут повороту, тобто кут між новою і однойменною старою віссю координат (оскільки ми розглядаємо задачу на площині, то можна фіксувати напрямок відліку кутів; кут вираховується від додатнього напрямку старої осі проти годинникової стрілки).

У випадку, що розглядається, координатний базис, очевидно, змінюється: замість базиса $\bar{i}$, $\bar{j}$ — маємо новий базис $\bar{i}'$, $\bar{j}'$, причому кут між $\bar{i}$ і $\bar{i}'$ дорівнює α, кут між $\bar{i}'$, $\bar{j}$ дорівнює $\dfrac{\pi}{2} - \alpha$ (або $\alpha - \dfrac{\pi}{2}$), кут між $\bar{j}'$ і $\bar{j}$ дорівнює α, кут між $\bar{j}'$ і $\bar{i}$ дорівнює $\alpha + \dfrac{\pi}{2}$. А тому в ортонормованому базисі $\bar{i}$, $\bar{j}$

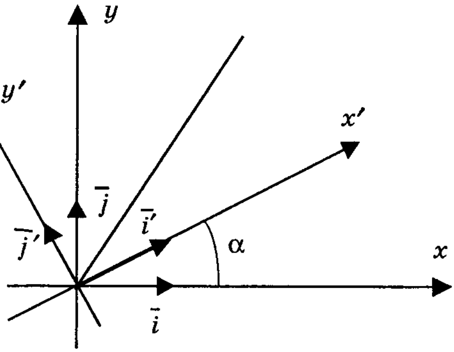

Рис. 25

$$\bar{i}' = \left\{\cos\alpha; \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)\right\} = \{\cos\alpha; \sin\alpha\},$$

$$\bar{j}' = \left\{\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}); \cos\alpha\right\} = \{-\sin\alpha; \cos\alpha\}.$$

Нехай M — довільна точка площини, (x, y) — її старі, а (x', y') — нові координати. Тоді

$$\overline{OM} = x\bar{i} + y\bar{j} = x'\bar{i}' + y'\bar{j}' = x'(\cos\alpha\bar{i} + \sin\alpha\bar{j}) + y'(-\sin\alpha\bar{i} + \cos\alpha\bar{j}) =$$
$$= (x'\cos\alpha - y'\sin\alpha)\bar{i} + (x'\sin\alpha + y'\cos\alpha)\bar{j},$$

тобто маємо формули

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned} \tag{35}$$

що виражають старі координати через нові.

Розв'язуючи систему рівнянь (35) відносно x' і y', дістанемо

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{aligned} \tag{36}$$

Формули (35) і (36) і є формулами перетворення повороту координатних осей.

Приклад 3. Перетворити рівняння $xy = c$ $(c > 0)$ (графік оберненої пропорційної залежності), вибравши за нові осі бісектриси координатних осей.

Кут повороту α в цьому випадку дорівнює $\dfrac{\pi}{4}$. А тому

$$x = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y'), \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y'),$$

$$xy = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' - y') \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') = \frac{1}{2}(x'^2 - y'^2) = c,$$

$$\frac{x'^2}{2c} - \frac{y'^2}{2c} = 1.$$

Отже, крива $xy = c$ ($c > 0$) є рівнобічною гіперболою, дійсна вісь якої напрямлена за бісектрисою третього і першого координатних кутів, центр симетрії знаходиться на початку координат і півосі дорівнюють $\sqrt{2c}$.

Ми розглядали окремо перетворення паралельного перенесення і перетворення повороту координатних осей. Можна послідовно провести ці два перетворення: здійснити і поворот, і перенесення координатних осей. Вкажемо, не роблячи конкретних обчислень, як можна з допомогою розглянутих методів привести загальне рівняння кривої другого порядку

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (37)$$

до канонічних рівнянь еліпса, параболи і гіперболи або до випадків їх виродження.

Зазначимо насамперед, що при перетвореннях рівняння (37) за допомогою формул (33) і (35) не може змінитися порядок рівняння. Він, природно, не зможе підвищитися (тобто стати більше ніж 2), оскільки у формулах (33) і (35) x і y виражаються лінійно через x' і y', але не може і понизитися. Дійсно, якщо ми з рівнянь (37) з допомогою формул (33) і (35) одержали б рівняння вигляду $A_1x' + B_1y' + C_1 = 0$, то, повертаючись за допомогою рівностей (34) і (36) до вихідних змінних x і y, ми не дістали б рівняння другого степеня — вихідне рівняння (37). Отже, степінь (порядок) рівняння при наших перетвореннях зберігається.

З допомогою повороту осей завжди можна позбутися члена з добутком координат.

Дійсно, підставляючи в рівняння (37) замість x і y їх вирази, згідно з формулою (35) одержимо нове рівняння

$$A_1x'^2 + B_1x'y' + C_1y'^2 + D_1x' + E_1y' + F = 0, \qquad (38)$$

коефіцієнти якого, і зокрема коефіцієнт B_1, містять тригонометричні функції кута α. Прирівнюючи коефіцієнт B_1 нулю, дістанемо тригонометричне рівняння. Розв'язуючи його, знайдемо значення кута повороту α, при якому до рівняння вже не буде входити добуток координат і яке матиме вигляд

$$A_1x'^2 + C_1y'^2 + D_1x' + E_1y' + F = 0.$$

Якщо коефіцієнти A_1 і C_1 відмінні від нуля, тоді завжди можна за допомогою перенесення осей координат [див. формули (33)] позбутися членів з першими степенями змінних координат і привести рівняння (38) до вигляду

$$A_1x''^2 + C_1y''^2 + F_1 = 0. \quad (39)$$

Проте звідси видно, що ми маємо або еліпс (якщо A_1 і C_1 мають один знак, а F_1 — протилежний), або уявне місце точок (якщо A_1, C_1 і F_1 мають один і той самий знак; у такому випадку говорять, що має місце випадок виродження еліпса в уявне місце точок), або одну точку (якщо A_1 і C_1 одного знаку і $F_1 = 0$ — виродження еліпса в точку), або гіперболу (якщо A_1 і C_1 різних знаків і $F_1 \neq 0$), або дві прямі, що перетинаються (якщо A_1 і C_1 різних знаків і $F_1 = 0$ — виродження гіперболи у дві прямі, що перетинаються).

Якщо в рівнянні (38) один з коефіцієнтів A_1 і C_1, наприклад C_1, обертається в нуль, тоді, як показано на початку параграфа, можна таке рівняння з допомогою перенесення осей привести до вигляду $y'' = ax''^2$ при $E_1 \neq 0$ або до вигляду $ax''^2 + d = 0$ при $E_1 = 0$.

У першому випадку одержуємо параболу, в другому — виродження параболи (дві паралельні прямі, або одна пряма, або уявне місце точок).

Звідси випливає, що, як уже зазначалося вище, будь-яка крива другого порядку є або еліпсом, або гіперболою, або параболою, або їх виродженням.

§ 5. Циліндричні поверхні з твірними, паралельними координатним осям. Поверхні другого порядку

Перш ніж почати вивчення просторових геометричних образів, відповідних рівнянням другого степеня, розглянемо один спеціальний клас поверхонь, які називаються циліндричними поверхнями.

Означення. *Циліндричною поверхнею називається поверхня, утворена рухом прямої, що перетинає задану лінію і паралельна заданому напрямку.*

Задана лінія, через точки якої проходить пряма, що переміщується, називається *напрямною*, а кожне положення такої прямої називається *твірною* розглядуваної циліндричної поверхні.

Виберемо координатну систему так, щоб одна з осей, наприклад z, була паралельною заданому напрямку, і розглядатимемо той, хоча і окремий, але дуже важливий випадок, коли напрямна лінія лежить в площині, перпендикулярній до заданого напрямку. Тоді без всякого обмеження загальності дослідження можна вважати, що напрямна лежить в площині xy.

Нехай в площині $z = 0$ рівняння напрямної має вигляд $F(x, y) = 0$ і, отже, така лінія задана двома рівняннями

$$Z = 0,\ \ F(x; y) = 0. \qquad (40)$$

Доведемо, що розглядуваній циліндричній поверхні відповідає рівняння

$$F(x; y) = 0, \qquad (41)$$

тобто що координати будь-якої точки поверхні задовольняють рівняння (41), а координати будь-якої точки, що не лежить на цій поверхні, не задовольняють.

Нехай $M_0(x_0; y_0; 0)$ — будь-яка точка напрямної (рис. 26).

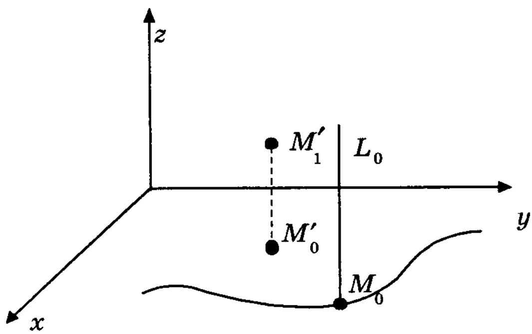

Рис. 26

Проведемо через M_0 пряму L, паралельну осі z, і виберемо на ній довільну точку M_1. Координати цієї точки (x_0, y_0, z_1). Згідно з припущенням, координати точки M_0 задовольняють системі $Z = 0$, $F(x; y) = 0$. Отже, $F(x_0, y_0) = 0$ і координати точки M_1 (при будь-якому z_1) задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$. Таким чином, координати будь-якої точки M_1 прямої L задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$. Проте M_0 — довільна точка напрямної. Отже, координати будь-якої точки будь-якої твірної, тобто координати будь-якої точки розглядуваної циліндричної поверхні, задовольняють рівняння $F(x, y) = 0$.

Нехай тепер вибрано будь-яку точку M_1' (x_1', y_1', z_1'), що не лежить на розглядуваній циліндричній поверхні. Розглянемо точку M_0' $(x_1', y_1', 0)$, що є проекцією точки M_1' на площину xy. Точка M_0' не лежить на заданій напрямній лінії (інакше кажучи, точка M_1' лежала б на заданій поверхні). А тому координати точки M_0' не можуть задовольняти систему рівнянь $Z = 0$, $F(x, y) = 0$. Однак перше рівняння напевно виконано. Отже, $F(x_1', y_1') \neq 0$. Проте це означає, що координати точки $M_1'(x_1', y_1', z_1')$ не можуть задовольняти рівняння $F(x, y) = 0$; тим самим наше твердження доведено.

Очевидно, якщо твірні циліндричної поверхні паралельні осі y, а рівняння напрямної має вигляд

$$y = 0, F(x, z) = 0,$$

то рівняння циліндричної поверхні $F(x, z) = 0$.

Аналогічно для циліндричної поверхні, твірні якої паралельні осі x, маємо рівняння $F(y, z) = 0$.

Якщо напрямна є колом, яке лежить у площині xy, з центром у точці $(a; b; 0)$ і радіусом R, а твірні паралельні осі z, тоді рівняння циліндричної поверхні має вигляд

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2. \tag{42}$$

Така поверхня називається *круговим циліндром*.

Поверхня

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{43}$$

є циліндричною поверхнею, твірні якої паралельні осі z, а напрямними є еліпс з півосями a і b та центром на початку координат, розміщений у площині xy. Така поверхня називається *еліптичним циліндром*.

Круговий циліндр можна, звичайно, розглядати як окремий випадок еліптичного циліндра.

Поверхня, визначена рівнянням

$$y^2 = 2px, \tag{44}$$

називається *параболічним циліндром* (рис. 27).

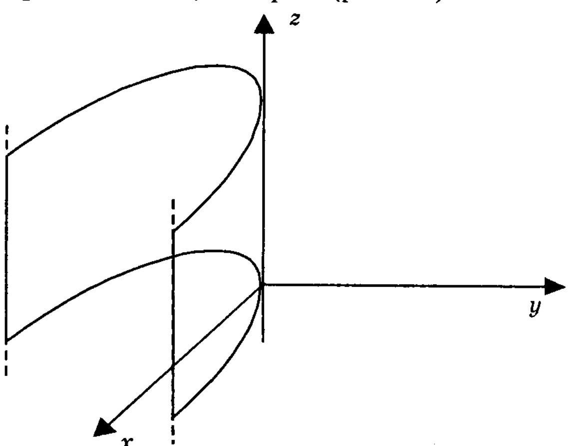

Рис. 27

Поверхня, визначена рівнянням

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{45}$$

називається *гіперболічним циліндром* (рис. 28).

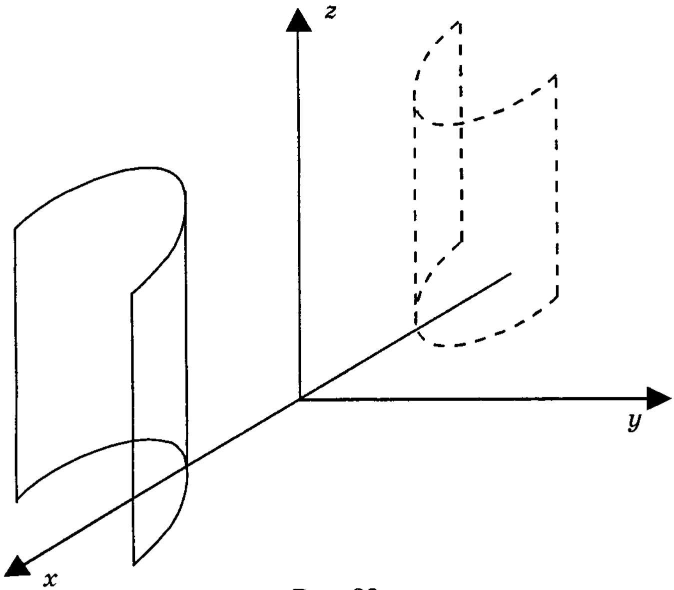

Рис. 28

Крім уже приведених, існують ще шість типів поверхонь другого порядку. Їх найпростіші, або як прийнято говорити, канонічні рівняння, одержані при найбільш зручному для вивчення поверхонь розміщенні осей координат, мають вигляд:

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ — еліпсоїд;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ — однопорожнинний гіперболоїд;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ — двопорожнинний гіперболоїд;

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ — еліптичний параболоїд;

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$ — гіперболічний параболоїд;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$$ — конус 2-го порядку.

Проведемо дослідження форми цих поверхонь, використовуючи метод паралельних перерізів.

Дослідження форми еліпсоїда. Знайдемо насамперед переріз еліпсоїда площиною $x = 0$.

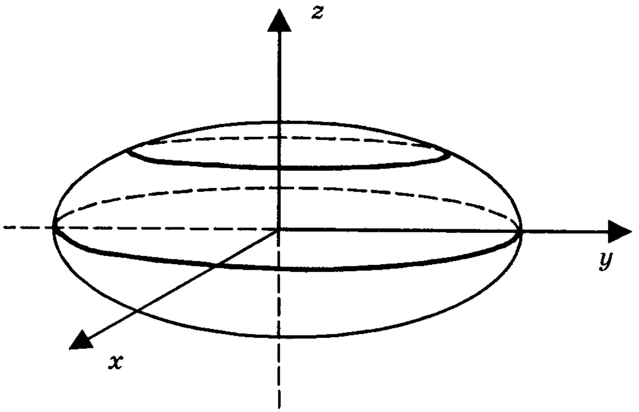

Рис. 29

У перерізі (рис. 29) одержимо лінію, визначену системою

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Отже, в площині yz маємо еліпс з півосями b і c. Розглянемо тепер переріз поверхні площинами, паралельними площині xy, тобто площинами $z = h$. У перерізі дістанемо лінії, визначені системою

$$z = h, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$

Очевидно, якщо $|h| > c$, тоді в перерізі одержимо уявне місце точок, при $|h| = c$ — точки $(0; 0; c)$, якщо $h > 0$, і $(0; 0; -c)$, якщо $h < 0$. Якщо $|h| < c$, у площині $z = h$ дістанемо еліпс

$$z = h,\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1,$$

тобто еліпс з півосями

$$a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}} \quad \text{і} \quad b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}.$$

При $h = 0$ півосі еліпса дорівнюють a і b, зі збільшенням h півосі зменшуються до нуля (при $h = c$). Вигляд поверхні зображений на рис. 29.

Очевидно, що поверхня, яка розглядається, симетрична відносно координатних площин, осей і початку координат. Уся поверхня не виходить із прямокутного паралелепіпеда зі сторонами $2a$, $2b$, $2c$, симетричного відносно координатних площин.

Якщо дві осі еліпсоїда дорівнюють одна одній, тоді еліпсоїд можна одержати обертанням еліпса навколо одної з осей, і сама поверхня називається тоді еліпсоїдом обертання.

Наприклад, якщо $b = c$, тоді поверхня має рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$$

і може бути одержана обертанням еліпса

$$z = 0,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

навколо осі x.

Якщо $a = b = c$, тоді рівняння еліпсоїда набуває вигляду

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

і поверхня є сферою з центром на початку координат і радіусом a.

Отже, сфера є окремим випадком еліпсоїда, якщо всі його півосі дорівнюють одна одній.

Дослідження форми однопорожнинного гіперболоїда. Знайдемо переріз однопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

площиною рисунка, тобто площиною $x = 0$ (рис. 30).

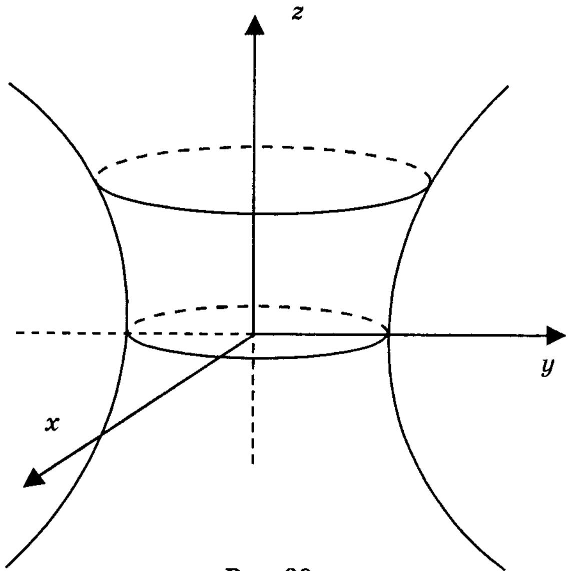

Рис. 30

Лінія перетину визначається системою рівнянь

$$x = 0,\ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

У перерізі маємо гіперболу з півосями b і c, причому дійсна вісь гіперболи збігається з віссю y.

Розглянемо переріз поверхні площиною $z = h$, паралельною площині xy. В перерізі одержуємо лінію, визначену системою рівнянь

$$z = h,\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{h^2}{c^2}$$

або системою

$$z = h,\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{1 + \frac{h^2}{c^2}}\right)^2} = 1.$$

Отже, у вибраних паралельних перерізах маємо еліпси, півосі яких зростають зі збільшенням $|h|$. Найменший еліпс (він називається *горловим еліпсом*) одержуємо при $h = 0$. Очевидно, однопорожнинний гіперболоїд симетричний відносно координатних площин, осей і початку координат.

Якщо $a = b$, тоді поверхня може бути утворена обертанням гіперболи

$$x = 0, \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

навколо осі z.

Дослідження формули двопорожнинного гіперболоїда. В перетині двопорожнинного гіперболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

площиною рисунка (тобто площиною $x = 0$) одержуємо гіперболу $x = 0, \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (рис. 31).

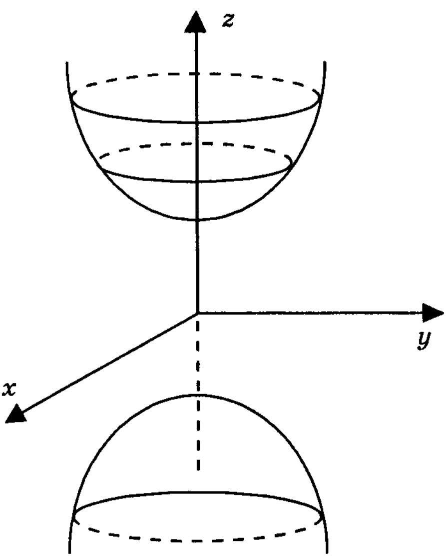

Рис. 31

Перетинаючи поверхню площинами $z = h$, одержимо при $|h| < c$ уявне місце точок, при $h = \pm c$ — точки $(0; 0; c)$ і $(0; 0; -c)$, при $|h| > c$ еліпси

$$z = h, \ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\sqrt{\frac{h^2}{c^2} - 1}\right)^2} = 1.$$

Поверхня, очевидно, симетрична відносно площин, осей і початку координат.

Дослідження формули еліптичного параболоїда. В перерізі еліптичного параболоїда

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$$

площиною рисунка (тобто площиною $x = 0$) одержуємо параболу $x = 0$, $y^2 = 2b^2z$ (рис. 32).

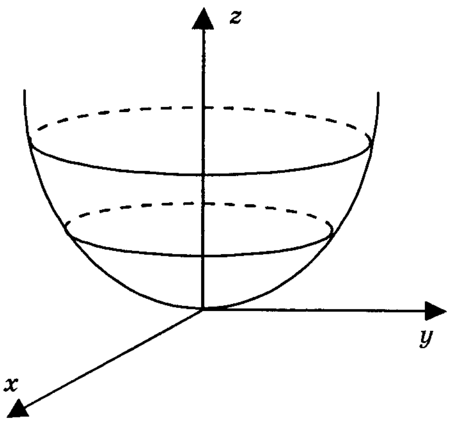

Рис. 32

Перетинаючи поверхню площинами $z = h$ $(h > 0)$, дістанемо еліпси

$$z=h,\ \frac{x^2}{\left(a\sqrt{2h}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\sqrt{2h}\right)^2}=1.$$

Вся поверхня лежить над площиною xy, симетрична відносно площин xz і yz і відносно осі z.

Якщо $a = b$, маємо параболоїд обертання

$$x^2+y^2=2a^2z,$$

який можна дістати обертанням параболи

$$x=0,\ y^2=2a^2z$$

навколо осі z.

Зазначимо, що всі параболи, що одержуються в перерізі параболоїда обертання площинами, які проходять через вісь z, мають загальний фокус.

Дослідження форми гіперболічного параболоїда. Для більшої ясності рисунка змінимо розміщення осей. Виберемо за площину рисунка площину $y = 0$ (рис. 33).

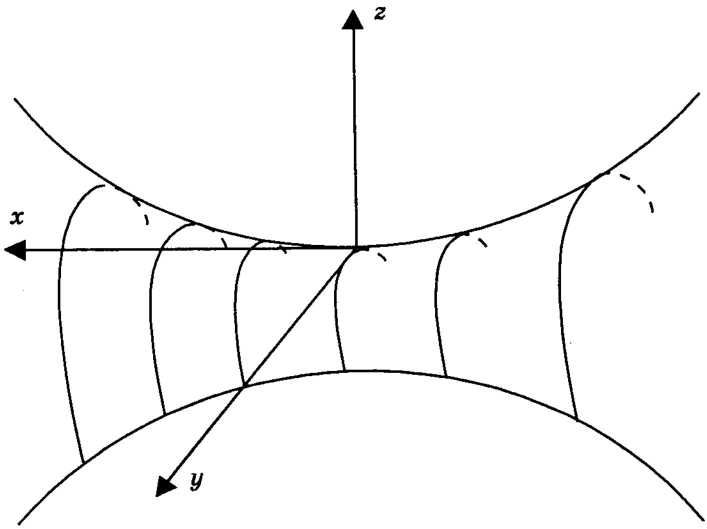

Рис. 33

У перерізі гіперболічного параболоїда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$$

площиною рисунка маємо параболу

$$y = 0,\ x^2 = 2a^2 z.$$

У перерізі площинами $x = d$ одержуємо параболи

$$x = d,\ y^2 = -2b^2 z + \frac{b^2 d^2}{a^2}.$$

У перерізі площинами $z = -|h|$ маємо гіперболи

$$z = -|h|,\ \frac{y^2}{\left(b\sqrt{2|h|}\right)^2} - \frac{x^2}{\left(a\sqrt{2|h|}\right)^2} = 1.$$

Вся поверхня має сідлоподібну форму.

Дослідження форми конуса другого порядку. В перерізі конуса другого порядку

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$$

площиною $x = 0$ одержуємо дві прямі, що перетинаються на початку координат (рис. 34).

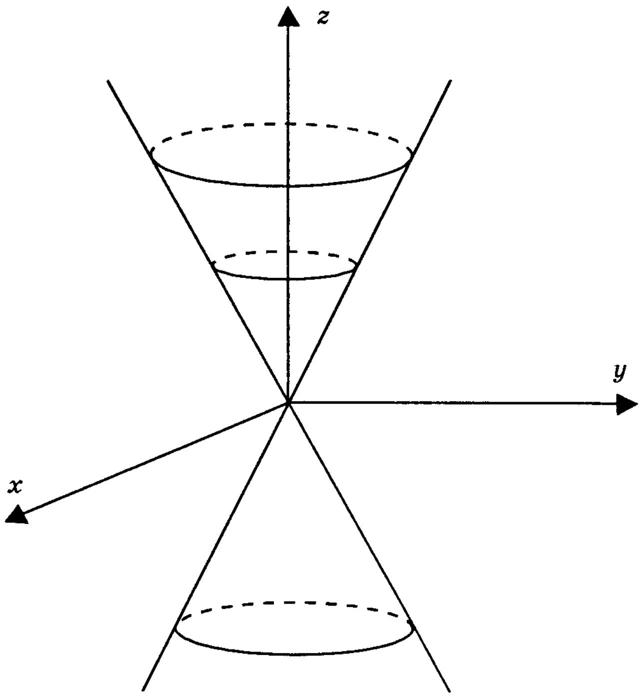

Рис. 34

$$x=0,\ y=\pm\frac{b}{c}z.$$

Перетинаючи поверхню площинами $z = h$, одержуємо еліпси

$$z=h,\ \frac{x^2}{\left(a\frac{h}{c}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(b\frac{h}{c}\right)^2}=1.$$

Перетинаючи поверхню площинами, які проходять через вісь z, тобто площинами $y = kx$, дістаємо дві прямі, що перетинаються:

$$y = kx, \frac{x^2}{\left(\frac{ab}{\sqrt{b^2+k^2a^2}}\right)^2} = \frac{z^2}{c^2},$$

або

$$y = kx, \ z = \pm\frac{c\sqrt{b^2+k^2a^2}}{ab}x.$$

Використовуючи вже вказаний при вивченні кривих другого порядку метод перетворення координат, можна довести, що будь-яка поверхня другого порядку являє собою або один з дев'яти розглянутих типів поверхонь, або випадок їх виродження (дві площини, що перетинаються або паралельні, одна площина, одна пряма, одна точка, пуста множина точок).

Контрольні запитання і завдання

1. Які поверхні належать до поверхонь другого порядку? Як можна дістати поверхню другого порядку?

2. Дайте означення циліндричної поверхні. Запишіть канонічне рівняння циліндрів другого порядку (кругового, еліптичного, гіперболічного, параболічного).

3. Запишіть канонічні рівняння поверхні обертання другого порядку (еліпсоїда, гіперболоїда — однопорожнинного та двопорожнинного, еліптичного та гіперболічного параболоїда).

4. Запишіть рівняння конуса другого порядку.

5. Яка множина точок простору називається сферою? Запишіть рівняння сфери з центром у точці $C(a, b, c)$ і радіусом R.

6. Яка ідея дослідження форми наведених поверхонь другого порядку та їх побудови?

Приклади розв'язування задач

3.68. Яку поверхню визначає в просторі рівняння:

1) $x^2 = 4y$; 2) $z^2 = xz$?

1. Рівняння $x^2 = 4y$ визначає параболічний циліндр з твірними, паралельними осі Oz.

Напрямною циліндричної поверхні є парабола $x^2 = 4y$, $z = 0$.

2. Рівняння $z^2 = xz$ можна представити у вигляді $z(z - x) = 0$; воно розкладається на два рівняння: $z = 0$ і $z = x$, тобто визначає дві площини — площину xOy і бісектральну площину $z = x$, яка проходить через вісь Oy.

3.69. Скласти рівняння конічної поверхні, вершиною якої є точка $M(0;\ 0;\ 1)$, а напрямною — еліпс $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1,\ z=3.$

Запишемо рівняння твірної AM, де $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ — точка, яка лежить на еліпсі:

$$\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1}.$$

Оскільки точка A лежить на еліпсі, то її координати задовольняють рівняння еліпса, тобто $\dfrac{x_0^2}{25}+\dfrac{y_0^2}{9}=1,\ z_0=3$. Виключивши тепер x_0, y_0 і z_0 із системи

$$\frac{x}{x_0}=\frac{z-1}{z_0-1};\quad \frac{y}{y_0}=\frac{z-1}{z_0-1};\quad \frac{x_0^2}{25}+\frac{y_0^2}{9}=1;\quad z_0=3,$$

дістанемо рівняння конуса: $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{(z-1)^2}{4}=0.$

3.70. Привести до канонічного вигляду рівняння

$$4x^2+9y^2+36z^2-8x-18y-72z+13=0.$$

Згрупуємо члени з однаковими координатами

$$4(x^2-2x)+9(y^2-2y)+36(z^2-2z)=-13.$$

Доповнимо до повних квадратів вирази в дужках:

$$4(x^2-2x+1)+9(y^2-2y+1)+36(z^2-2z+1)=-13+4+9+36,$$

або

$$4(x-1)^2+9(y-1)^2+36(z-1)^2=36.$$

Зробимо паралельне перенесення осей координат, де за новий початок координат виберемо точку $O'\ (1;\ 1;\ 1)$. Формули перетворення координат мають вигляд $x=x'+1$; $y=y'+1$; $z=z'+1$. Тоді рівняння поверхні набуває вигляду

$$4x'^2+9y'^2+36z'^2=36,\ \text{або}\ \ \frac{x'^2}{9}+\frac{y'^2}{4}+\frac{z'^2}{1}=1.$$

Це рівняння визначає еліпсоїд; його центр знаходиться в новому початку координат, а півосі відповідно дорівнюють 3; 2 і 1.

Задачі і вправи для самостійної роботи

3.71. Знайти координати центра і радіус сфери, заданої рівнянням

$$x^2+y^2+z^2-x+2y+1=0.$$

3.72. Скласти рівняння сфери, яка проходить через точки $A(1;\ 2;\ -4)$, $B(1;\ -3;\ 1)$ і $C(2;\ 2;\ 3)$, якщо центр знаходиться в площині xOy.

3.73. По якій лінії перетинається конус $x^2+y^2-2z^2=0$ з площиною $y=2$?

3.74. Привести до канонічного вигляду рівняння

$$x^2-y^2-4x+8y-2z=0.$$

3.75. Яка поверхня визначається рівнянням

$$4x^2-y^2+4z^2-8x+4y+8z+4=0?$$

3.76. Який геометричний зміст рівняння $x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy=0$?

§ 6. Полярна система координат на площині. Циліндрична і сферична системи координат у просторі

Ми розглядали до цього часу тільки прямокутні декартові системи координат. Поряд з ними використовуються й інші координатні системи. В задачах на площині це частіше за все полярна система координат, у просторових задачах — циліндрична і сферична координатні системи.

Полярна система координат на площині. Виберемо на площині деяку фіксовану точку O — початок координатної системи або полюс. Фіксований промінь (півпряма) з вибраним на ньому одиничним вектором із початком у полюсі назвемо *полярною віссю.*

Положення будь-якої точки M на площині визначатимемо впорядкованою парою чисел: довжиною ρ радіуса-вектора $\overline{OM}$ (рис. 35)

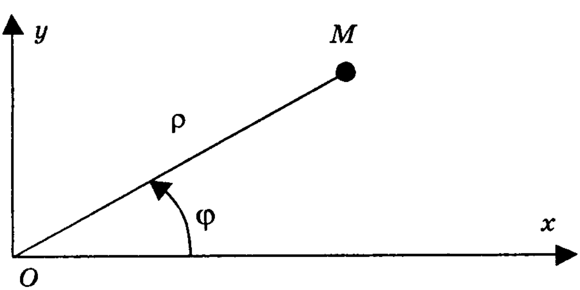

Рис. 35

та вираженим у радіанах кутом φ між полярною віссю і вектором $\overline{OM}$. Оскільки така система координат розглядається тільки на площині, то можна враховувати і напрямок відліку кута; кут вважається додатним, якщо напрямок обертання від полярної осі до радіуса-вектора береться проти годинникової стрілки.

Запис $M_0(\rho_0, \varphi_0)$ показує, що в деякій фіксованій полярній системі координат довжина радіуса-вектора $\overline{OM_0}$ дорівнює ρ_0, а кут між полярною віссю і $\overline{OM_0}$ (полярний кут) дорівнює φ_0. Числа ρ_0 і φ_0 називаються полярними координатами точки M_0. Координати ρ_0 і φ_0 повністю визначають положення точки M_0. Задання точки M_0 однозначно визначає лише число ρ_0 — довжина радіуса-вектора. Полярний кут визначається тільки з точністю до доданка, кратного 2π. Для полюса полярний кут взагалі не визначений. Довжина радіуса-вектора ρ для різних точок площини може змінюватися від 0 до $+\infty$, полярний кут φ — від $-\infty$ до $+\infty$.

Неважко встановити правила переходу від полярної системи координат до декартової і навпаки.

Розмістимо початок декартової системи координат у полюсі полярної системи і спрямуємо вісь абсцис уздовж полярної осі. Тоді

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \quad y = \rho \cdot \sin\varphi. \tag{46}$$

Із формул (46) знаходимо

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \tag{47}$$

Полярний кут визначається двома формулами. Виберемо одну з них, дістанемо два значення φ, які лежать між 0 і 2π. Щоб вибрати єдине (з точністю до доданку, кратного 2π) потрібне значення, враховують знак другої тригонометричної функції кута φ.

Як і в декартовій системі координат, кожній лінії на площині відповідає рівняння, яке зв'язує ρ і φ, і навпаки — кожному рівнянню, яке зв'язує ρ і φ, відповідає, як правило, деяка лінія на площині із заданою полярною системою координат.

Для побудови лінії, заданої рівнянням у полярній системі координат, частіше використовують метод побудови за точками — обчислюють координати ряду точок лінії і сполучають ці точки плавною кривої.

Приклад 1. Побудувати лінію $\rho = 2(1 + \cos\varphi)$.

Складаємо таблицю.

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π
ρ	4	$2+\sqrt{3}$	3	2	1	$2-\sqrt{3}$	0

Оскільки $\cos\varphi = \cos(2\pi - \varphi)$, то обчислення значення ρ при $\pi < \varphi < 2\pi$ не потрібно. Крива має бути симетричною відносно полярної осі. Наносячи відповідні точки на рисунок і з'єднуючи їх плавною лінією, одержимо таку криву (рис. 36).

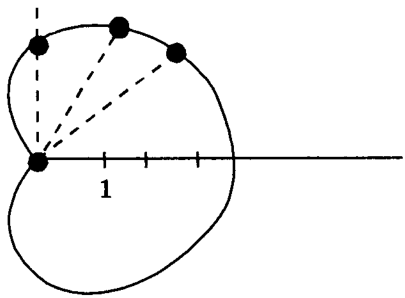

Рис. 36

Ця лінія називається кардіоїдою.

Приклад 2. Побудувати лінію $\rho = \frac{1}{2}\varphi$.

Складаємо таблицю, починаючи з $\varphi = 0$ (при $\varphi < 0$ дістанемо $\rho < 0$, що неможливо).

φ	0	$\frac{\pi}{2}$	π	2π	3π
ρ	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$

Ця лінія називається *спіраллю Архімеда* (рис. 37).

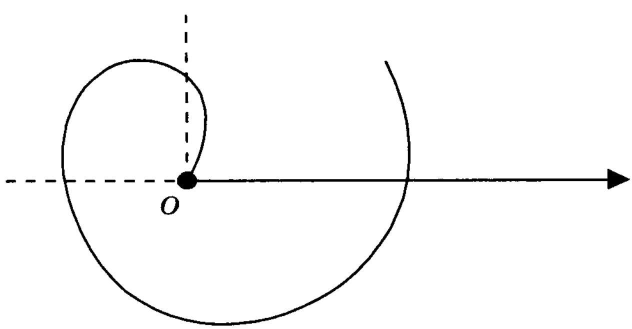

Рис. 37

Циліндрична система координат. Зафіксуємо в просторі яку-небудь точку O (початок координат), проведемо через неї деяку пряму L_1 і на ній виберемо одиничний вектор $\bar{k}$ (орт). Проведемо через O площину Q, перпендикулярну до вже вибраної осі, і в цій площині виберемо промінь L_2, що виходить з O та орт $\bar{i}$ на цьому промені (рис. 38).

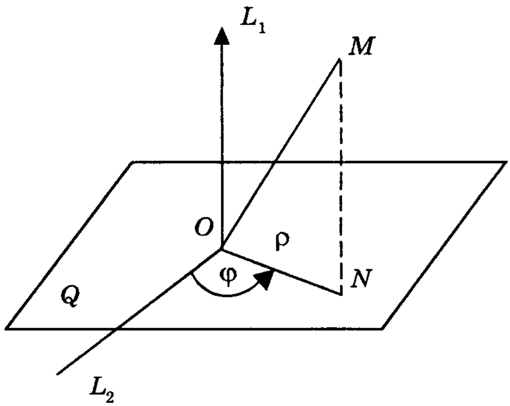

Рис. 38

Нехай M — довільна точка простору, а N — її проекція на площину Q. Положення точки M у просторі тепер можна описувати трьома числами:

1) довжиною відрізка ON;

2) кутом φ між променем L_2 і вектором $\overline{ON}$ (кут відраховується від променя L_2 і вважається додатним, якщо, дивлячись від додатного напрямку осі L_1, поворот від L_2 до $\overline{ON}$ відбувається проти годинникової стрілки);

3) проекцією z радіуса-вектора $\overline{OM}$ на вісь L_1.

Отже, положення точки M у просторі визначається полярними координатами її проекції на площину Q та аплікатою самої точки M.

Координатними поверхнями, тобто поверхнями, на яких одна з координат зберігає стале значення, в даній системі є:

1) $\rho = \text{const}$ — кругові циліндричні поверхні з твірними, паралельними осі L_1 (вісь z);

2) $\varphi = \text{const}$ — півплощини, краєм яких є вісь z;

3) $z = \text{const}$ — площини, перпендикулярні до осі z.

Виберемо прямокутну декартову систему координат так, щоб її початок був у точці O, вісь абсцис була напрямлена по осі L_2 (полярній осі), а вісь z — по осі L_1. Тоді одержимо такі формули, які зв'язують декартові і циліндричні координати точки M:

$$x = \rho \cdot \cos\varphi, \qquad \rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$y = \rho \cdot \sin\varphi, \qquad \mathrm{tg}\varphi = \frac{y}{x},$$

$$z = z, \qquad z = z.$$

Сферична система координат. Зафіксуємо в просторі будь-яку точку O (початок координат), проведемо через неї деяку вісь L (полярну вісь) і площину Q, перпендикулярну до осі L (екваторіальна площина). Проведемо, крім того, півплощину P, краєм якої є полярна вісь L (півплощина головного меридіана). Виберемо також у просторі одиницю довжини.

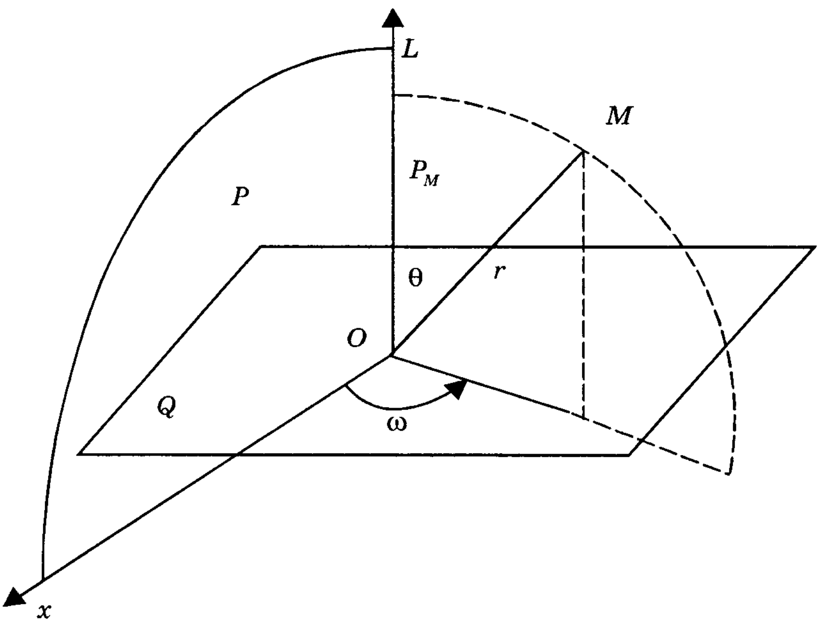

Рис. 39

Положення довільної точки M у просторі визначатимемо тепер такою впорядкованою трійкою чисел:

1) довжиною r радіуса-вектора точки M;

2) кутом θ між полярною віссю L і радіусом-вектором $\overline{OM}$ (напрямок відліку не фіксуємо; кут θ може змінюватися від 0 до π);

3) двогранним кутом ω між півплощиною головного меридіана і півплощиною P_M, що проходить через точку M і має своїм краєм вісь L (кут вимірюється лінійним кутом між півпрямими перетину півплощин P і P_M з площиною Q; відлік ведеться від лінії перетину

P і Q, напрямок відліку такий, як і в циліндричній системі координат).

Координатними поверхнями є:

1) $r = \text{const}$ — сфери радіуса r з центром в O;

2) $\theta = \text{const}$ — півконічні поверхні з вершиною в точці O, віссю L у ролі осі симетрії і кутом при вершині 2θ;

3) $\omega = \text{const}$ — півплощина, краєм якої є вісь L (рис. 39).

Виберемо декартову систему координат з початком у точці O, віссю x, напрямленій по прямій перетину площин P і Q, і віссю z, напрямленій по полярній осі. Формули, які зв'язують декартові координати точки M з її сферичними координатами, набувають вигляду:

$$x = r \cdot \sin\theta \cdot \cos\omega, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2};$$

$$y = r \cdot \sin\theta \cdot \sin\omega, \quad \operatorname{tg}\omega = \frac{y}{x};$$

$$z = r \cdot \cos\theta, \quad \cos\theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Відповіді до глави 3

3.11. $S = 6$ кв.од., $P = 12$ од. **3.12.** $y = -8x$. **3.13.** $5x + y - 3 = 0$. **3.14.** $x - 2y - 6 = 0$ і $2x + y - 7 = 0$. **3.15.** 1) точка перетину $(5; -2)$; 2) прямі паралельні; 3) прямі збігаються. **3.16.** $M_1(10; -5)$. **3.17.** $7x + y - 6 = 0$. **3.18.** 1) $\frac{\pi}{4}$; 2) $\varphi = \frac{\pi}{2}$; 3) $\varphi = 0$. **3.19.** $y = = -x - 6$. **3.20.** $3x - 4y + 15 = 0$. **3.21.** $7x - 56y + 48 = 0$ і $32x + 4y + + 43 = 0$. **3.22.** 1) $a = -2$; 2) $a = 3$ і $a = -3$; 3) $a = \frac{5}{3}$ і $a = 1$. **3.23.** $x + 2y - 7 = 0$; $x - 4y - 1 = 0$; $x - y + 2 = 0$. **3.24.** BC: $3x - 5y - 13 = 0$; AB: $8x - 3y + 17 = 0$; AC: $5x + 2y - 1 = 0$. **3.25.** $S = 49$ кв.од. **3.26.** $5x - 3y + 2z + 1 = 0$. **3.27.** $d = \frac{7\sqrt{5}}{3}$. **3.28.** $7x - 11y - z - 15 = 0$. **3.29.** $x + 7y + 10z = 0$. **3.30.** $x + y + z - 3 = 0$. **3.31.** $4x + 3y - 2z - 1 = 0$. **3.32.** $x - y + 2 = 0$. **3.33.** $\frac{x-5}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+3}{-11}$. **3.34.** $\frac{5\sqrt{30}}{6}$. **3.35.** $\frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-5} = \frac{z-2}{-2}$. **3.36.** $\cos\varphi = \frac{20}{21}$. **3.37.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-1}{2}$. **3.38.** $x - 5y - 2z + 11 = 0$.

3.39. $\frac{x}{-10}=\frac{y-3{,}4}{13}=\frac{z-5{,}2}{19}$. **3.45.** $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{3}{4}\right)^2=4$. **3.46.** $(x-3)^2+(y-2)^2=29$. **3.47.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$. **3.48.** $F_1(-8;\ 0)$, $F_2(8;\ 0)$; $|F_1F_2|=16$. **3.49.** $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$. **3.50.** $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1$. **3.51.** $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$. **3.53.** (8; 3) та (6; 4). **3.54.** Гіперболу $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$. **3.55.** $a=\sqrt{5}$; $b=2$; $F_1(-3;\ 0)$, $F_2(3;\ 0)$; $E=\frac{3}{\sqrt{5}}$; $r_1=2\sqrt{5},\ r_2=4\sqrt{5}$. **3.56.** $y=\frac{3}{5}x$; $y=-\frac{3}{5}x$; $x=-\frac{25}{\sqrt{34}}$; $x=\frac{25}{\sqrt{34}}$. **3.57.** $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{3}=1$. **3.58.** $y+2=\frac{1}{\sqrt{2}}x$ та $y+2=-\frac{1}{\sqrt{2}}x$. **3.59.** $d=3$; $\varphi=\mathrm{arctg}\,\frac{24}{7}$. **3.60.** $y^2=-4x$; $x^2=y$. **3.61.** $F(5;\ 0)$; $x=-5$; $r=15$. **3.62.** $y^2=100\left(x-\frac{15}{4}\right)$. **3.63.** $M_1(3;\ 3\sqrt{2})$, $M_2(3;\ -3\sqrt{2})$. **3.64.** $y+2=-x$; $x=0$. **3.65.** $x=r\cos\alpha$, $y=r\sin\alpha$, $0\le\alpha<2\pi$. **3.66.** $x=4\cos\varphi$, $y=3\sin\varphi$, $\varphi\in[0;\ 2\pi)$. **3.67.** $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$. **3.71.** $C\left(\frac{1}{2};\ -1;\ 0\right)$; $r=\frac{1}{2}$. **3.72.** $(x+2)^2+(y-1)^2+z^2=26$. **3.73.** Гіпербола. **3.74.** $x'^2-y'^2=2z'$ — гіперболічний параболоїд. **3.75.** $x'^2-\frac{y'^2}{4}+z'^2=0$ — конічна поверхня. **3.76.** $x=y$; $y=z$; $x=z$. Пряма: $x=y=z$.

Розділ II
ВСТУП ДО МАТЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ

Глава 4. Функції

§ 1. Поняття множини

Основним первинним поняттям математики, її фундаментом є поняття множини. Слова *сукупність, клас, система, набір* та інші дуже часто є синонімами слова *множина*. Проте навіть у цій загальній ситуації ми б хотіли наголосити, що множина — деякі об'єкти (елементи множини), які виділені за певною ознакою або ознаками з інших об'єктів і розглядаються як єдине ціле.

Прикладами множини є множина учнів у класі, сім'я зірок Великої Ведмедиці, множина сторінок цієї книги, множина всіх раціональних чисел і т.д.

Належність елемента a до множини A позначається $a \in A$ (a належить до множини A). Якщо a не є елементом множини A, це позначається $a \notin A$ (a не належить A).

Якщо вдається перерахувати всі елементи множини A, це позначається як $A = \{a, b, \ldots, c\}$, де у фігурних дужках указують всі елементи A.

Навіть якщо множина має безліч елементів, інколи можна зробити так:

$N = \{1, 2, 3, \ldots\}$ — множина всіх натуральних чисел;

$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ — множина всіх цілих чисел.

Загальне правило полягає в тому, щоб, виписавши досить багато елементів множини, зробити очевидним правило їх подальшого виписування.

Найчастіше множина задається виразом $A = \{a \mid P(a)\}$. Такий запис означає, що A — множина всіх елементів певної множини, які задовольняють умову P. Якщо умова P не виконується для жодного елемента множини, тобто вказана множина A не має жодного елемента, вона називається *порожньою* і позначається $\varnothing$.

Приклад 1. Множина $\{x \mid x^2 - 3x + 2 = 0\}$ є сукупністю коренів рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, тобто ця множина складається з двох елементів: 1 і 2.

Множина $\{x \mid 3 < x < 7\}$ є сукупністю всіх чисел, які задовольняють нерівність $3 < x < 7$.

Множина $\{x \mid x > 7 \ \ i \ \ x < 3\} = \varnothing$, тобто це порожня множина.

Якщо кожен елемент множини A є також елементом множини B, то A — підмножина множини B. Це будемо позначати $A \subset B$, або, що те саме, $B \supset A$. Якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто множини A і B мають одні й ті самі елементи, тоді $A = B$. Вважають, що порожня множина є підмножиною будь-якої іншої.

Нехай A — множина, тоді через $\overline{A}$ позначатимемо множину всіх елементів множини, які не належать A. Ця множина $\overline{A}$ називається *доповненням* A.

Нехай A, B — множини. *Перерізом (перетином)* A і B називається множина $A \cap B$ усіх елементів, які належать як множині A, так і множині B:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \ \text{і} \ \ x \in B\}.$$

Об'єднанням A і B називається множина $A \cup B$ усіх елементів, які належать хоча б одній з цих множин:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \ \text{або} \ \ x \in B\}.$$

Різницею A і B називається множина $A \backslash B$ усіх елементів, які належать множині A і не належать множині B:

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \ \ \text{і} \ x \notin B\}.$$

Легко зрозуміти, що останнє означення рівнозначне тому, що

$$A \setminus B = A \cap \overline{B}.$$

Приклад 2. Нехай $A = \{1;\ 3;\ 6;\ 8\}$, $B = \{2;\ 4;\ 6;\ 8\}$. Знайти переріз, об'єднання і різницю множин A і B.

Очевидно, що переріз двох даних множин — $A \cap B = \{6; 8\}$; їх об'єднання — $A \cup B = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6;\ 8\}$, а різниця — $A \setminus B = \{1;\ 3\}$.

Множини, елементами яких є дійсні числа, називаються *числовими*. Із шкільного курсу алгебри відомі множини: R — дійсні числа, Q — раціональні, I — ірраціональні, Z — цілі, N — натуральні числа. Очевидно, що $N \subset Z \subset Q \subset R$, $I \subset R$ і $R = Q \cup I$.

Геометрично множина дійсних чисел R зображується точками *числової прямої* (або числової осі), тобто прямої, на якій вибраний початок відліку, додатний напрямок і одиниця масштабу.

Між множиною дійсних чисел і точками числової прямої існує взаємно однозначна відповідність, тобто кожному дійсному числу відповідає певна точка числової прямої і навпаки. Тому часто замість “число x” кажуть “точка x”.

Множина X, елементи якої задовольняють нерівність $a \le x \le b$, називають *відрізком* (або сегментом) $[a,\ b]$; нерівність $a < x < b$ — *інтервалом* $(a,\ b)$; нерівності $a \le x < b$ або $a < x \le b$ називаються *півінтервалами* відповідно $[a, b)$ і $(a, b]$. Поряд з цим розглядаються нескінченні інтервали і півінтервали $(-\infty; a)$, $(b; \infty)$, $(-\infty; \infty)$, $(-\infty; a]$ і $[b;\ \infty)$.

Інтервал $(a,\ b)$ відрізняється від відрізка $[a,\ b]$ лише тим, що йому не належать кінці a і b.

Така відмінність відіграє суттєву роль в багатьох питаннях математичного аналізу. Крім того, інтервал $(a,\ b)$ не містить ні найбільшого, ні найменшого числа, тоді як у відрізку $[a,\ b]$ такими числами є відповідно b і a. В подальшому всі вказані множини об’єднаємо терміном *проміжок* X.

§ 2. Абсолютна величина дійсного числа

Поняття абсолютної величини числа і нерівності, пов’язані з абсолютними величинами, широко використовуються в математиці.

Означення. *Абсолютною величиною (або модулем) числа x називається саме число x, якщо $x \ge 0$, або число $-x$, якщо $x < 0$.*

Абсолютна величина x позначається символом $|x|$. Отже,

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{якщо } x \ge 0, \\ -x, & \text{якщо } x < 0. \end{cases}$$

Очевидно, згідно з означенням $|x| \ge 0$. Наприклад, $|+5| = 5$; $|-5| = -(-5) = 5$; $|0| = 0$.

Приклад 1. Знайти $\big|x - |x|\big|$.

Якщо $x \ge 0$, то $|x| = x$ і $\big|x - |x|\big| = |x - x| = |0| = 0$.

Якщо $x < 0$, то $|x| = -x$ і $\big|x - |x|\big| = |x - (-x)| = |2x| = -2x$.

Укажемо на важливі властивості абсолютних величин:

$$|x + y| \le |x| + |y|; \quad |x - y| \ge |x| - |y|; \quad |xy| = |x| \cdot |y|; \quad \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

Абсолютна величина різниці двох чисел $|x-a|$ означає відстань між точками x і a числової прямої як для випадку $x < a$, так і $x > a$ (рис. 40).

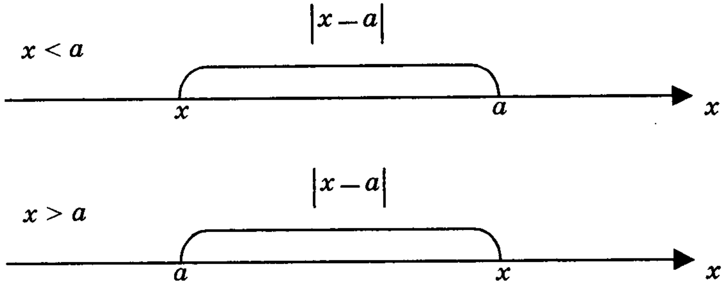

Рис. 40

А тому, наприклад, розв'язком нерівності $|x-a| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, будуть точки x інтервалу $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ (рис. 41), які задовольняють нерівність $a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$. Будь який інтервал, який містить точку a, називається *околом точки a*.

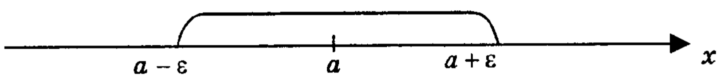

Рис. 41

Інтервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, тобто множина точок x таких, що $|x-a| < \varepsilon$, де $\varepsilon > 0$, називається *ε-околом точки a*.

§ 3. Поняття функції

Поняття функції є основним не тільки в математичному аналізі, де вона вивчається спеціально, а й у всій математиці в цілому.

Означення. *Якщо кожному елементу x множини X ($x \in X$) за деяким законом ставиться у відповідність певний елемент y множини Y ($y \in Y$), тоді говорять, що на множині X задано функцію* $y = f(x)$.

Змінну величину x називають незалежною змінною або аргументом, y — залежною змінною, а літера f позначає закон відповідності.

Множина X називається *областю визначення функції*, а множина Y — *областю значень функції*.

Якщо множина X спеціально не вказана, то під областю визначення функції вважатимемо множину таких значень x, при яких функція $y = f(x)$ взагалі має зміст.

Наприклад, областю визначення функції $y = x^2 + \sqrt{5-x}$ є півінтервал $(-\infty; 5]$, оскільки $5 - x \geq 0$.

Існує кілька способів задання функції. Найпоширеніші серед них такі.

1. *Аналітичний спосіб*, якщо функцію задано формулою вигляду $y = f(x)$. Так, функцію $y = x^2 + \sqrt{5-x}$ задано аналітично.

Не слід плутати функцію з її аналітичним виразом. Наприклад, одна функція

$$y = \begin{cases} x^3, & \text{якщо } x < 0, \\ x + 5, & \text{якщо } x \geq 0, \end{cases}$$

має два аналітичних вирази: x^3 (при $x < 0$) і $x + 5$ (при $x \geq 0$).

2. *Табличний спосіб* полягає в тому, що функція задається таблицею, яка містить значення аргументу x і відповідні значення функції $f(x)$, наприклад таблиця синусів або косинусів.

3. *Графічний спосіб* полягає в зображенні графіка функції — множини точок (x, y) площини, абсциси яких є значенням аргументу x, а ординати — відповідні їм значення функції $y = f(x)$. При цьому способі функціональна залежність зображується лінією, яку називають графіком функції.

Якщо рівняння, що зв'язує аргумент x з функцією y, не розв'язано відносно y, а задано у вигляді $F(x, y) = 0$, тоді змінну y називають неявною функцією x (наприклад, $3x - 7y = 6$).

Розглянемо основні властивості функцій.

1. ***Парність і непарність.*** Функція $y = f(x)$ називається парною, якщо для будь-яких значень x із області визначення $f(-x) = f(x)$, і непарною, якщо $f(-x) = -f(x)$. В іншому випадку функція $y = f(x)$ називається функцією загального вигляду.

Наприклад, функція $y = x^2$ є парною, оскільки $f(-x) = (-x)^2 = x^2$ і $f(-x) = f(x)$, а функція $y = x^3$ — непарною, оскільки $f(-x) = (-x)^3 = -x^3$ і $f(-x) = -f(x)$.

Крім того, наприклад, функція $y = x^2 + x^3$ є функцією загального вигляду, оскільки $f(-x) = (-x)^2 + (-x)^3 = x^2 - x^3$, $f(-x) \neq f(x)$ і $f(-x) \neq -f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат, а графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

2. ***Монотонність.*** Функція $y = f(x)$ називається зростаючою (спадною) на проміжку X, якщо більшому значенню аргументу з цього проміжку відповідає більше (менше) значення функції.

Нехай $x_1, x_2 \in X$ і $x_2 > x_1$. Тоді функція зростає на проміжку X, якщо $f(x_2) > f(x_1)$, і спадає, якщо $f(x_2) < f(x_1)$.

Зростаючі і спадні функції називають монотонними. Так, функція $y = x^2$ при $x \in (-\infty, 0]$ спадає і при $x \in [0, +\infty)$ зростає.

3. ***Обмеженість.*** Функція $f(x)$ називається обмеженою на проміжку X, якщо існує таке додатне число $M > 0$, що $|f(x)| \le M$ для будь-якого $x \in X$. Наприклад, функція $y = \sin x$ обмежена на всій числовій осі, оскільки $|\sin x| \le 1$ для будь-якого $x \in X$.

4. ***Періодичність.*** Функція $y = f(x)$ називається періодичною з періодом $T \ne 0$, якщо для будь-яких x із області визначення функції $f(x + T) = f(x)$.

Наприклад, функція $y = \sin x$ має період $T = 2\pi$, оскільки для будь-яких x $\sin(x + 2\pi) = \sin x$. Найменше додатне число T, що задовольняє цю рівність, називається періодом функції.

Класифікація функцій. Елементарні функції. Функція y аргументу x називається неявною, якщо її задано рівнянням $F(xy) = 0$, не вираженим відносно залежної змінної. Наприклад, функцію $y\ (y \ge 0)$ задано рівнянням $x^4 + y^2 - x = 0$. (Зауважимо, що таке рівняння задає дві функції $y = \sqrt{x - x^4}$, якщо $y \ge 0$, і $y = -\sqrt{x - x^4}$, якщо $y < 0$.)

Нехай $y = f(x)$ є функцією від незалежної змінної x, визначеної на проміжку X з областю значень Y. Поставимо у відповідність кожному $y \in Y$ єдине значення $x \in X$, при якому $f(x) = y$. Тоді функція $x = \varphi(y)$, визначена на проміжку Y з областю значень X, називається оберненою.

Оскільки традиційно незалежну змінну позначають через x, а функцію — через y, то функція, обернена до функції $y = f(x)$, набуває вигляду $y = \varphi(x)$. Наприклад, для функції $y = a^x$ оберненою буде функція $x = \log_a y$, або (в звичайних позначеннях залежної і незалежної змінної) $y = \log_a x$.

Можна довести, що для будь-якої строго монотонної функції існує обернена. Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно бісектрис першого і третього координатних кутів.

Основні елементарні функції такі:

1. Степенева функція вигляду $y = x^n$, де n — дійсне число.
2. Показникова функція вигляду $y = a^x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.
3. Логарифмічна функція $y = \log_a x$, де $a > 0$, $a \neq 1$.
4. Тригонометричні функції: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \mathrm{tg} x$; $y = \mathrm{ctg} x$.
5. Обернені тригонометричні функції: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \mathrm{arctg} x$; $y = \mathrm{arcctg} x$.

З а у в а ж е н н я. Автор навмисне випускає з розгляду ці функції, оскільки основні елементарні функції та їх графіки детально вивчають у середній школі. Вони відіграють важливу роль в математичному аналізі, тому ці функції, їх області визначення та графіки треба добре знати.

Якщо змінна y залежить від другої змінної величини U, яка у свою чергу є функцією x, то y називають функцією від функції або складною функцією. Математично це можна записати так:

$$\text{якщо } y = f(U), \quad U = \varphi(x), \text{ то } y = f[\varphi(x)].$$

Кажуть: y — складна функція x, U — проміжний аргумент, x — аргумент (незалежна змінна).

Наприклад, $y = \cos^3 x$, або $y = U^3$, де $U = \cos x$.

Функції, побудовані з основних елементарних функцій з допомогою скінченного числа алгебраїчних дій і скінченного числа операцій утворення складної функції, називаються елементарними.

Наприклад, функція

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}\cos^2 x}{\sqrt{x} + 5^{2x}} + \sqrt{\ln^3 x - 2}$$

є елементарною, оскільки тут число операцій додавання, віднімання, множення, ділення й утворення складної функції ($\cos^2 x$, 5^{2x}, $\ln^3 x$, $\sqrt{\ln^3 x - 1}$) скінченне.

Елементарні функції розподіляються на алгебраїчні і неалгебраїчні (трансцендентні).

Алгебраїчною називається функція, в якій над аргументом проводиться скінченне число алгебраїчних дій. До алгебраїчних функцій належать:

— ціла раціональна функція (многочлен, або поліном)

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n;$$

— дробово-раціональна функція — відношення двох многочленів;

— ірраціональна функція — якщо в складі операцій над аргументом є здобуття кореня.

Будь-яка *неалгебраїчна* функція називається трансцендентною. До неалгебраїчних функцій належать: показникова, логарифмічна, тригонометрична, обернені тригонометричні.

§ 4. Застосування функцій в економіці

Спектр використання функцій в економіці досить широкий. Найчастіше використовуються в економіці такі функції.

1. *Функція корисності* — залежність корисності, тобто результату, ефекту деякої дії, від рівня (інтенсивності) цієї дії.

2. *Виробнича функція* — залежність результату виробничої діяльності від факторів, які його зумовлюють.

3. *Функція випуску* (частковий вид виробничої функції) — залежність обсягу виробництва від наявності або споживання ресурсів.

4. *Функція витрат* (частковий вид виробничої функції) — залежність витрат виробництва від обсягу продукції.

5. *Функція попиту, споживання і пропозиції* — залежність обсягу попиту, споживання або пропозиції щодо окремих товарів або послуг від різних факторів (наприклад, ціни, доходу і т.д.).

Враховуючи, що економічні явища і процеси обумовлені впливом різних факторів, для їх дослідження широко використовують функції багатьох змінних.

Якщо впливом побічних факторів можна знехтувати або вдається зафіксувати ці фактори на певних рівнях, то залежність одного основного фактора вивчається з допомогою функції одної змінної.

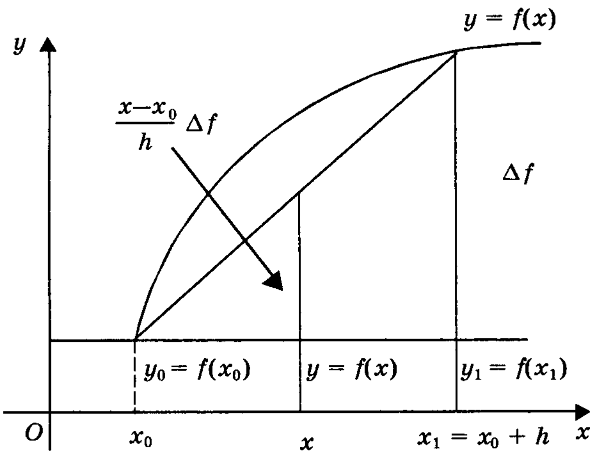

Рис. 42

Зупинимося на одному важливому прикладі застосування функції в економіці — *використання таблиць функцій*, які дають змогу провести різні розрахунки, виключити або спростити громіздкі обчислення.

При обчисленні з допомогою таблиць доводиться стикатися із ситуацією, коли аргумент функції заданий з більшою точністю, ніж дозволяє таблиця. В такому випадку бажано вдатися до *інтерполяції* — наближеного знаходження невідомих значень функцій за відомими її значеннями у заданих точках.

Найпростішим є *лінійне інтерполювання*, при якому допускається, що приріст функції пропорційний приросту аргументу. Якщо задане значення x лежить між приведеними в таблиці значеннями x_0 і $x_1 = x_0 + h$, яким відповідають значення функції $y_0 = f(x_0)$ і $y_1 = f(x_0) + \Delta f$, то вважають, що $f(x) \approx f(x_0) + \dfrac{x - x_0}{h}\Delta f$ (рис. 42).

Величини $\dfrac{x - x_0}{h}\Delta f$ називаються *інтерполяційними поправками*. Ці величини обчислюються за допомогою таблиці або наводяться в додатку до таблиці.

Якщо згідно із заданим значенням функції потрібно знайти наближене значення аргументу, то треба здійснити *обернене інтерполювання*.

Приклад 1. Функція $y = f(x)$ задана таблицею.

x	2	2,04	2,08
y	2,42	2,88	3,38

1. Використовуючи лінійне інтерполювання, знайти $f(2{,}008)$.
2. Чому дорівнює x, якщо $f(x) = 3{,}1$?

1. Маємо $x_0 = 2$; $f(x_0) = 2{,}42$; $x_1 = 2{,}04$; $f(x_1) = 2{,}88$; $h = x_1 - x_0 = 2{,}04 - 2{,}0 = 0{,}04$; $\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = 2{,}88 - 2{,}42 = 0{,}46$.

Згідно з інтерполяційною формулою дістанемо

$$y = f(2{,}008) \approx 2{,}42 + \frac{2{,}008 - 2{,}0}{0{,}04} \cdot 0{,}46 = 2{,}512.$$

2. Обернене інтерполювання можна здійснити за тією самою формулою, але потрібно поміняти місцями змінні x і y:

$$\varphi(y) = \varphi(y_0) + \frac{y - y_0}{h}\Delta\varphi,$$

де $x = \varphi(y)$ — невідоме значення оберненої функції.

Маємо $y_0 = 2{,}88$; $\varphi(y_0) = 2{,}04$; $y_1 = 3{,}38$; $\varphi(y_1) = 2{,}08$; $h = y_1 - y_0 = 3{,}38 - 2{,}88 = 0{,}50$; $\Delta\varphi = \varphi(y_1) - \varphi(y_0) = 2{,}08 - 2{,}04 = 0{,}04$.

Згідно з інтерполяційною формулою дістанемо

$$x = \varphi(3{,}1) \approx 2{,}04 + \frac{3{,}1 - 2{,}8}{0{,}5} \cdot 0{,}04 = 2{,}0576 \approx 2{,}058.$$

Точність знаходження невідомих значень з допомогою лінійного інтерполювання не завжди є достатньою, а тому використовують ще й інші методи інтерполювання, наприклад квадратичне інтерполювання.

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте означення функції одного аргументу. Що таке область визначення функції, область значень?

2. Які основні способи задання функції?

3. Яка функція називається зростаючою, спадною, монотонною, парною, непарною, періодичною? Наведіть приклади.

4. Побудуйте графіки основних елементарних функцій.

5. Що таке ціла раціональна функція (многочлен), раціональна функція, трансцендентна функція?

6. Як за графіком функції $y = \cos x$ побудувати графік функцій $y = \cos 3x, y = \cos\dfrac{x}{3}, y = \cos 3x + 1$?

Приклади розв'язування задач

4.1. Знайти область визначення функцій:

а) $f(x) = \dfrac{x-3}{4x-1}$; б) $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x-1}$; в) $f(x) = \sqrt{1-2x} + 3\arcsin\dfrac{3x-1}{2}$;
г) $y = \sqrt{x} - \lg(2x-3)$.

а) Функція визначена, якщо $4x - 1 \neq 0$, тобто якщо $x \neq \dfrac{1}{4}$.

$$D(f) = \left(-\infty, \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4}, +\infty\right).$$

б) Функція визначена, якщо $x - 1 \neq 0$ і $1 + x > 0$, тобто якщо $x \neq 1$ і $x > -1$. Отже, об'єднуючи два інтервали, маємо $D(f) = (-1,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$.

в) Перший доданок дійсний при $1 - 2x \geq 0$, а другий — при $-1 \leq \dfrac{3x-1}{2} \leq 1$. Отже, потрібно розв'язати систему нерівностей

$$\begin{cases} 1 - 2x \geq 0, \\ \dfrac{3x-1}{2} \leq 1, \end{cases} \qquad \frac{3x-1}{2} \geq -1.$$

У результаті дістанемо: $x \le \frac{1}{2}$; $x \le 1$; $x \ge -\frac{1}{3}$.

Отже, областю визначення функції є відрізок $\left[-\frac{1}{3};\ \frac{1}{2}\right]$.

г) Область визначення функції знайдемо із системи нерівностей

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ 2x - 3 > 0, \end{cases} \quad \text{звідси } x > \frac{3}{2}, \text{ або } x \in \left(\frac{3}{2};\ \infty\right).$$

4.2. Знайти множину значень функцій:

а) $f(x) = x^2 - 6x + 5$; б) $f(x) = 4 + 5\sin x$.

а) Виділимо повний квадрат, дістанемо $f(x) = x^2 - 6x + 9 - 4 = (x-3)^2 - 4$. Перший доданок є невід'ємним, а тому функція набуває значення не менше –4. Отже, множиною значень функції є проміжок [–4; +∞).

б) $|\sin x| \le 1$, або $-1 \le \sin x \le 1$. Помножимо нерівність на 5 і додамо до всіх частин цієї подвійної нерівності 4; маємо $-5 \le \sin x \le 5$; $-1 \le 4 + 5\sin x \le 9$. Отже, множиною значень функції є проміжок $[-1;\ 9]$.

4.3. З'ясувати парність (непарність) функцій:

а) $f(x) = x^2\sqrt[3]{x} + 4\sin x$; б) $f(x) = 2^x + 2^{-x}$; в) $f(x) = x^2 + 6x^3$.

а) Замінюючи x на $-x$, одержимо

$$f(-x) = (-x)^2\sqrt[3]{(-x)} + 4\sin(-x) = -x^2\sqrt[3]{x} - 4\sin x = -\left(x^2\sqrt[3]{x} + 4\sin x\right),$$

тобто $f(-x) = -f(x)$. Отже, функція непарна.

б) Маємо $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^{-x} + 2^x$, тобто $f(-x) = f(x)$. Отже, $f(x)$ парна.

в) Маємо $f(-x) = (-x)^2 + 6(-x)^3 = x^2 - 6x^3$. Таким чином, $f(-x) \ne f(x)$ і $f(-x) = -f(x)$. Отже, функція не є ні парною, ні не парною.

4.4. Знайти основні періоди функцій:

а) $f(x) = \cos 6x$; б) $f(x) = \sin 6x + \mathrm{tg}\,4x$.

а) Оскільки основний період функції $\cos x$ є 2π, то для функції $f(x) = \cos 6x$ він дорівнює $\frac{2\pi}{6}$, тобто $\frac{\pi}{3}$.

б) Тут перший доданок має період $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, а другий — $\frac{\pi}{4}$. Очевидно, що основним періодом даної функції є найменше загальне кратне чисел $\frac{\pi}{3}$ і $\frac{\pi}{4}$, тобто π.

Задачі і вправи для самостійної роботи

4.5. Знайти область визначення функцій.

1. $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$.

2. $y = \sqrt{4-x} + \dfrac{1}{x}$.

3. $y = \dfrac{2x^2+3}{x-\sqrt{x^2-4}}$.

4. $y = \lg(3x-1) + 2\lg(x+1)$.

4.6. Знайти множину значень функцій.

1. $f(x) = \sqrt{16-x^2}$.

2. $f(x) = -x^2 + 8x - 13$.

3. $f(x) = \dfrac{6x}{1+x^2}$.

4.7. З'ясувати парність (непарність) функцій.

1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + x$.

2. $f(x) = x - \mathrm{ctg}^3 x$.

3. $f(x) = |x| + 2$.

4.8. Знайти основні періоди функцій.

1. $f(x) = \sin 5x$.

2. $f(x) = \mathrm{tg} 3x + \cos 4x$.

Відповіді до глави 4

4.5. 1. $(-\infty;\ \infty)$. 2. $[-2;0)\cup(0;2]$. 3. $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. 4. $\left(\dfrac{1}{3};\ +\infty\right)$.

4.6. 1. $[-4;\ 4]$. 2. $(-\infty;\ 3)$. 3. $[-3;\ 3]$.

4.7. 1. Ні парна, ні непарна. 2. Непарна. 3. Парна.

4.8. 1. $\dfrac{2\pi}{5}$. 2. π.

Глава 5. Границя і неперервність

§ 1. Поняття границі послідовності

Збіжні послідовності. Поняття *границі функції* — одне з найважливіших у вищій математиці. Викладення теорії границь почнемо з розгляду границі функції натурального аргументу — послідовності.

Означення 1. *Нехай кожному натуральному числу $n \in N$ поставлено у відповідність деяке дійсне число x_n. Тоді кажуть, що задана послідовність чисел $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$, або, коротко, послідовність $\{x_n\}$.*

Отже, *послідовністю* називається функція $f(n) = x_n$, $n \in N$, визначена на множині натуральних чисел. Числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ є членами (елементами) послідовності, x_n — загальним її членом (елементом), а n — номером члена.

Означення 2. *Послідовність $\{x_n\}$ називається збіжною, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при всіх $n > N$ виконується нерівність*

$$|x_n - a| < \varepsilon. \tag{1}$$

Число a при цьому називається границею послідовності $\{x_n\}$. Для позначення збіжності послідовності $\{x_n\}$ до числа a вживається запис:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a, \quad \text{або} \quad x_n \to a \ \text{при} \ n \to \infty.$$

Довільний інтервал вигляду $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$, де $\varepsilon > 0$, називається ε-околом точки a. Якщо число a — границя послідовності $\{x_n\}$, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такий номер $N = N(\varepsilon)$, що при $n > N$ усі члени послідовності потрапляють в ε-окіл точки a, адже при вказаних n згідно з нерівністю (1) виконуються нерівності

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon.$$

Якщо послідовність $\{x_n\}$ не збігається, то кажуть, що вона розбігається.

Теорема 1. *Збіжна послідовність має тільки одну границю.*

Д о в е д е н н я. Припустимо супротивне: нехай збіжна послідовність $\{x_n\}$ має принаймні дві різні границі a і b. Тоді для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти такі номери N_1 і N_2, що, по-перше, $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N_1$ і, по-друге, $|x_n - b| < \varepsilon$ при всіх $n > N_2$.

Покладемо $\varepsilon = \dfrac{|a-b|}{2}$, тоді при всіх $n > \max\{N_1; N_2\}$ одночасно виконуються нерівності

$$|x_n - a| < \frac{|a-b|}{2}, \ |x_n - b| < \frac{|a-b|}{2},$$

звідки випливає, що

$$|a-b| = |(x_n - b) + (a - x_n)| \le |x_n - b| + |x_n - a| < \frac{|a-b|}{2} + \frac{|a-b|}{2} =$$

$$= |a-b|, \text{ тобто } |a-b| < |a-b|.$$

Одержана суперечність доводить теорему.

Нескінченно малі і нескінченно великі послідовності. Серед збіжних послідовностей виділимо один важливий клас.

Означення 3. *Збіжна до нуля послідовність $\{x_n\}$ називається нескінченно малою.*

Роль, яку відіграють нескінченно малі в теорії границь, з'ясовує така теорема.

Теорема 2. *Для того щоби послідовність $\{x_n\}$ збігалася до числа a, необхідно й достатньо, щоб послідовність $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ була нескінченно малою.*

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Тоді згідно з означенням 2 для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність

$$|x_n - a| = |(x_n - a) - 0| < \varepsilon.$$

А це й доводить, що $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ — нескінченно мала.

Достатність. Нехай $\{\alpha_n\} = \{x_n - a\}$ — нескінченно мала. Згідно з означенням 3 для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$, або $|(x_n - a) - 0| = |x_n - a| < \varepsilon$.

Отже, за означенням 2 маємо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Докладно вивчимо властивості нескінченно малих.

Лема 1. Алгебраїчна сума двох нескінченно малих є нескінченно малою.

Доведення. Нехай $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ — нескінченно малі. Доведемо, що послідовність $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ нескінченно мала. Задамо будь-яке число $\varepsilon > 0$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ — нескінченно малі, то знайдуться такі номери N_1 і N_2, що, по-перше, $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всіх $n > N_1$ і, по-друге, $|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ при всіх $n > N_2$.

Візьмемо $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при всіх $n > N$ вказані вище нерівності виконуються одночасно, а тому $|\alpha_n \pm \beta_n| \leq |\alpha_n| + |\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

Це й означає, що $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — нескінченно мала.

Наслідок. Алгебраїчна сума будь-якого скінченного числа нескінченно малих є нескінченно малою.

Лема 2. Добуток двох (або будь-якого скінченного числа) нескінченно малих є нескінченно малою.

Пропонуємо читачеві довести цю лему самостійно.

Означення 4. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається обмеженою, якщо існує таке число* $K > 0$, *що при всіх* $n \in N$ *виконується нерівність* $|x_n| \leq K$.

У противному випадку послідовність називається *необмеженою.*

Лема 3. Добуток нескінченно малої на обмежену — нескінченно мала.

Доведення. Нехай $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала, а $\{x_n\}$ — обмежена послідовність. Доведемо, що послідовність $\{a_n x_n\}$ нескінченно мала. Оскільки $\{x_n\}$ — обмежена, то існує таке число $K > 0$, що при всіх $n \in N$ виконується нерівність $|x_n| \leq K$. Оскільки $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала, то для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер N, що $|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ при всіх $n > N$. Проте тоді при таких n

$$|\alpha_n \cdot x_n| = |\alpha_n||x_n| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Це й означає, що $\{a_n x_n\}$ — нескінченно мала.

Наслідок. Добуток нескінченно малої на стале число — нескінченно мала.

Іноді зручно використовувати поняття нескінченно великої послідовності.

Означення 5. *Послідовність* $\{x_n\}$ *називається нескінченно великою, якщо для будь-якого числа* $E > 0$ *можна знайти такий номер* N, *що при всіх* $n > N$ *виконується нерівність* $|x_n| > E$.

Позначення: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$, або $x_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Якщо починаючи з деякого номера N члени послідовності $\{x_n\}$ набувають тільки додатних (від'ємних) значень, то

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty)$, або $x_n \to +\infty$ при $n \to \infty$ ($x_n \to -\infty$ при $n \to \infty$).

Встановимо зв'язок між нескінченно малими й нескінченно великими.

Теорема 3. Для того щоб $\{\alpha_n\}$ $(\alpha_n \neq 0)$ була нескінченно малою, необхідно й достатньо, щоб $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ була нескінченно великою.

Доведення. *Необхідність.* Нехай $\{\alpha_n\}$ — нескінченно мала. Візьмемо будь-яке $\varepsilon > 0$ і знайдемо такий номер N, щоб при всіх $n > N$ виконувалася нерівність $|\alpha_n| < \varepsilon$.

Позначимо $\dfrac{1}{\varepsilon} = E$, тоді при вказаних вище n виконується нерівність

$$\left|\frac{1}{\alpha_n}\right| = \frac{1}{|\alpha_n|} > \frac{1}{\varepsilon} = E,$$

звідки й випливає, що $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ — нескінченно велика.

Достатність. Нехай $\left\{\dfrac{1}{\alpha_n}\right\}$ — нескінченно велика. Для будь-якого $\varepsilon > 0$ існує такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $\left|\dfrac{1}{\alpha_n}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$.

Тоді для послідовності $\{a_n\}$ при вказаних вище n маємо $|\alpha_n| < \varepsilon$, тобто $\alpha_n \to 0$ для $n \to \infty$ і $\{a_n\}$ — нескінченно мала.

Приклад 1. Використовуючи визначення границі, довести, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Виберемо будь-яке число $\varepsilon > 0$. Оскільки $|x_n - 1| = \left|\dfrac{n}{n+1} - 1\right| = \dfrac{1}{n+1}$, то для знаходження значень n, які задовольняють нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$, достатньо розв'язати нерівність $\dfrac{1}{n+1} < \varepsilon$, звідки отримаємо $n > \dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$. Отже, за N можна взяти цілу частину числа $\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}$, тобто $N = \left[\dfrac{1-\varepsilon}{\varepsilon}\right]$. Тоді нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon$ виконуватиметься для всіх $n > N$. Оскільки ε — будь-яке число, то доведено, що $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$. Згідно з означенням, a в даному прикладі дорівнює 1.

Якщо, наприклад, $\varepsilon = 0{,}01$, тоді $N = \left[\dfrac{1-0{,}01}{0{,}01}\right] = 99$ і при $n > N = 99$ маємо $|x_n - 1| < 0{,}01$. Зауважимо, що, наприклад, при $n < N$ $(n = 97, n = 98)$ нерівність $|x_n - 1| < \varepsilon = 0{,}01$ не виконується.

Дійсно, нехай $n = 98$. Тоді

$$|x_{98} - 1| = \left|\frac{98}{99} - 1\right| = \left|-\frac{1}{99}\right| = \frac{1}{99} > \frac{1}{100}.$$

А якщо взяти, наприклад, $n = 100$, тобто $n > 99$, то

$$|x_{100} - 1| = \left|\frac{100}{101} - 1\right| = \left|-\frac{1}{101}\right| = \frac{1}{101} < \frac{1}{100}.$$

Отже, нерівність $|x_n - 1| < 0{,}01$ виконується лише для номерів n, більших за 99.

Якщо, наприклад, $\varepsilon = 0{,}0001$, тоді значення номера N збільшиться. Дійсно, $N = \left[\dfrac{1-0{,}0001}{0{,}0001}\right] = 9999$, і при $n > N = 9999$ одержимо $|x_n - 1| < 0{,}0001$.

Приклад 2. Використовуючи означення, довести, що послідовність $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ є нескінченно малою.

Візьмемо будь-яке число ε. З нерівності $|\alpha_n| = \left|\dfrac{1}{n}\right| < \varepsilon$ дістанемо $n > \dfrac{1}{\varepsilon}$. Якщо взяти $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$, то для всіх $n > N$ буде виконуватися $|\alpha_n| < \varepsilon$. (Якщо $\varepsilon = \dfrac{1}{10}$, одержимо $N = [10] = 10$, при $\varepsilon = \dfrac{4}{15}$ маємо $N = \left[\dfrac{15}{4}\right] = 3$ і т.д.) Отже, згідно з означенням послідовність $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ нескінченно мала.

§ 2. Основні властивості збіжних послідовностей

Теорема 1. *Збіжна послідовність обмежена.*

Д о в е д е н н я. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Покладаючи в означенні 2 (§ 1) $\varepsilon = 1$, знайдемо такий номер N, що при всіх $n > N$ виконується нерівність $|x_n - a| < 1$. Звідки при вказаних n

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < 1 + |a|.$$

Візьмемо $K = \max\{1+|a|, |x_1|, |x_2|, \ldots, |x_N|\}$. Тоді, очевидно, що $|x_n| < K$ при всіх $n \in N$, тобто збіжна послідовність $\{x_n\}$ дійсно обмежена.

На практиці при знаходженні границь числових послідовностей часто використовується така теорема про арифметичні дії над границями.

Теорема 2. *Нехай послідовності $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ — збіжні, при цьому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Тоді збіжні й послідовності $\{x_n \pm y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}$, $\{c \cdot x_n\}$, де c — стала, $\left\{\dfrac{x_n}{y_n}\right\}$ — остання при $y_n \ne 0, n \in N, b \ne 0$, причому:*

1) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot a$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{a}{b}$.

Д о в е д е н н я. 1. Оскільки a і b — границі послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$, то за теоремою 2 (§ 1) маємо

$$x_n = a + \alpha_n, \quad y_n = b + \beta_n,$$

де $\{\alpha_n\}$ і $\{\beta_n\}$ — нескінченно малі.

Додаючи ці рівності, дістанемо

$$x_n \pm y_n = a \pm b + (\alpha_n \pm \beta_n).$$

За лемою 1 (§ 1) $\{\alpha_n \pm \beta_n\}$ — нескінченно мала, а тому за теоремою 2 (§ 1) послідовність $\{x_n \pm y_n\}$ збігається до $a \pm b$, так що існує $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$.

2. Як і в попередньому пункті, $x_n = a + \alpha_n, y_n = b + \beta_n$. Далі маємо

$$x_n \cdot y_n = ab + \alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n \cdot \beta_n.$$

За лемами 1—3 (§ 1) та їх наслідками $\{\alpha_n \cdot b + \beta_n \cdot a + \alpha_n \cdot \beta_n\}$ — нескінченно мала, а тому за теоремою 2 (§ 1) послідовність $\{x_n \cdot y_n\}$ збігається до $a \cdot b$, так що існує

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

3. *Наслідок.* Якщо послідовність $\{x_n\}$ збіжна, причому $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ і c — стала, то збіжна й послідовність $\{cx_n\}$, причому $\lim\limits_{n\to\infty} (c \cdot x_n) = c \cdot a$, тобто сталий множник можна виносити за знак границі.

Властивість четверту рекомендуємо довести самостійно.

Теорема 3 (про три послідовності). *Нехай задано послідовності* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$; *при цьому для всіх* $n \in N$ *виконуються нерівності* $x_n \le y_n \le z_n$.

Тоді, якщо послідовності $\{z_n\}$ і $\{x_n\}$ збіжні до однієї і тієї самої границі, то і послідовність $\{y_n\}$ також збіжна, причому

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тоді для довільного $\varepsilon > 0$ можна знайти такі номери N_1 і N_2, що $|x_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N_1$; $|z_n - a| < \varepsilon$ при всіх $n > N_2$.

Припустимо, що $N = \max\{N_1; N_2\}$. Тоді при $n > N$ виконано одночасно обидві нерівності і, зокрема, при вказаних n

$$a - \varepsilon < x_n, \quad z_n < a + \varepsilon.$$

Однак тоді з умов теореми виконуються нерівності

$$a - \varepsilon < x_n \le y_n \le z_n < a + \varepsilon$$

при всіх $n > N$, тобто

$$|y_n - a| < \varepsilon$$

при всіх $n > N$, а отже,

$$\lim_{n\to\infty} y_n = a,$$

що й потрібно довести.

Теорема 4 (про перехід до границі у нерівностях). *Нехай задано збіжні послідовності* $\{x_n\}, \{y_n\}$; *при цьому для всіх* $n \in N$ *виконуються нерівності* $x_n \le y_n$. *Тоді і*

$$\lim_{n\to\infty} x_n \le \lim_{n\to\infty} y_n.$$

Д о в е д е н н я. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a, \lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$. Припустимо супротивне: $a > b$. Візьмемо $\varepsilon = \frac{a-b}{2}$, тоді можна знайти такі номери N_1 і N_2, що $|x_n - a| < \frac{a-b}{2}$ при всіх $n > N_1$ і $|y_n - b| < \frac{a-b}{2}$ при всіх $n > N_2$.

Припустимо, що $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тоді при $n > N$ виконуються обидві нерівності і, зокрема, при вказаних n

$$x_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2};$$

$$y_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

Отже, при $n > N$ маємо $y_n < \frac{a+b}{2} < x_n$, тобто $y_n < x_n$. Одержана суперечність доводить теорему.

Зауважимо, що у випадку виконання для членів збіжних послідовностей $\{x_n\}$ і $\{y_n\}$ при всіх $n \in N$ строгої нерівності $x_n < y_n$ після переходу до границі строга нерівність, взагалі кажучи, не зберігається.

Наприклад, $x_n = -\frac{1}{n}, y_n = +\frac{1}{n}$. При всіх $n \in N$, очевидно, $x_n < y_n$, але

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0.$$

Змінна x_n, чи послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$, зветься *зростаючою*, якщо

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n < x_{n+1} < \ldots .$$

Якщо

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots,$$

то ця послідовність *неспадна*. Змінна x_n, чи послідовність $x_1, x_2, x_3, \ldots$, *спадна*, якщо

$$x_1 > x_2 > x_3 > \ldots > x_n > x_{n+1} > \ldots;$$

якщо

$$x_1 \ge x_2 \ge x_3 \ge \ldots \ge x_n \ge x_{n+1} \ge \ldots,$$

то змінна x_n зветься *незростаючою*.

Всі ці чотири типи змінних, для яких характерним є змінювання в одному напрямку при зростанні n, називають *монотонними*.

Теорема 5. *Будь-яка монотонна обмежена змінна має границю.*

Дамо геометричне пояснення цієї теореми (строге доведення виходить за межі цього підручника).

Нехай маємо, наприклад, неспадну обмежену послідовність

$$x_1 \le x_2 \le x_3 \le \ldots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots,$$

причому $|x_n| < M$ для всіх n. Візьмемо числову вісь і нанесемо на неї члени даної послідовності та число M. Зі збільшенням номера n точка, що зображує відповідний член послідовності x_n, пересуватиметься тільки вправо, але вона не може опинитися правіше точки M, бо послідовність обмежена. Теорема й твердить, що послідовність має границю (яка не перевищує M). Так само можна пояснити й інші випадки монотонних змінних (спадної, незростаючої).

Приклад 1. Послідовність $x_1 = 0{,}7$, $x_2 = 0{,}77$, $x_3 = 0{,}777$, ... , $x_n = 0{,}77...7...$ є монотонно зростаючою, бо $x_n < x_{n+1}$. Крім того, очевидно, що вона обмежена, тому що кожний її член більший за нуль, але менший за $7/9$.

$$x_n = \frac{7}{10} + \frac{7}{10^2} + \ldots + \frac{7}{10^n} = \frac{\frac{7}{10} - \frac{7}{10^{n+1}}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{9} - \frac{7}{9 \cdot 10^n},$$

яке б не було n. Отже, послідовність має границю; її легко знайти:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7}{10} - \frac{7}{9 \cdot 10^n}\right) = \frac{7}{9}.$$

Приклад 2. Послідовність $x_1 = 2$, $x_2 = 3/2$, $x_3 = 4/3$, ..., $x_n = \frac{n+1}{n}$, ... монотонно спадна, бо $x_n > x_{n+1}$, і обмежена ($1 < x_n \le 2$ для будь-якого n). Отже, вона має границю. Просте обчислення дає

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

§ 3. Поняття границі функції

Означення границі функції. Нехай функція $y = f(x)$ визначена на деякій підмножині X множини дійсних чисел R і x_0 — гранична точка множини X. Нагадаємо, що у будь-якому ε-околі $(x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon)$ граничної точки x_0 міститься нескінченне число точок множини X, проте сама точка x_0 може й не належати X.

Означення 1 (Гейне). *Число А називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X, x_n \neq x_0$ $(n \in N)$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна до А.*

Якщо число A — границя функції у точці x_0, то пишуть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, або $f(x) \to A$, при $x \to x_0$.

Нехай функція $f(x)$ має границю $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, тоді вона, очевидно, єдина. Це випливає з того, що збіжна послідовність $\{f(x_n)\}$ може мати лише одну границю (§ 1).

Означення 2 (Коші). *Число А називається границею функції $f(x)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх $x \in X$, які задовольняють нерівність*

$$0 < | x - x_0 | < \delta,$$

виконується нерівність

$$| f(x) - A | < \varepsilon.$$

Означення границі функції у точці за Гейне і за Коші еквівалентні.

Зазначимо геометричний зміст означення 2, скориставшись графіком функції $y = f(x)$ (рис. 43). Який би малий ε-окіл точки A не взяти, має існувати такий δ-окіл точки x_0, що коли x змінюється між $x_0 - \delta$ і $x_0 + \delta$, графік функції $y = f(x)$ знаходиться у смузі шириною 2ε між прямими $y = A - \varepsilon$ і $y = A + \varepsilon$. Підкреслимо, що в точці x_0 функція $y = f(x)$ може набувати значення, яке не дорівнює A, або навіть бути невизначеною. Тому в означенні 2 йдеться саме про нерівність $0 < | x - x_0 | < \delta$.

Односторонні границі. При дослідженні функції корисними є поняття односторонніх границь.

Означення 3 (Гейне). *Число А називається правою (лівою) границею функції $f(x)$ у точці x_0, якщо для довільної послідовності $\{x_n\} \subset X$, $x_n > x_0$ $(x_n < x_0$, $n \in N)$, збіжної до x_0, відповідна послідовність значень функції $\{f(x_n)\}$ збіжна до А. При цьому вживають відповідно позначення*

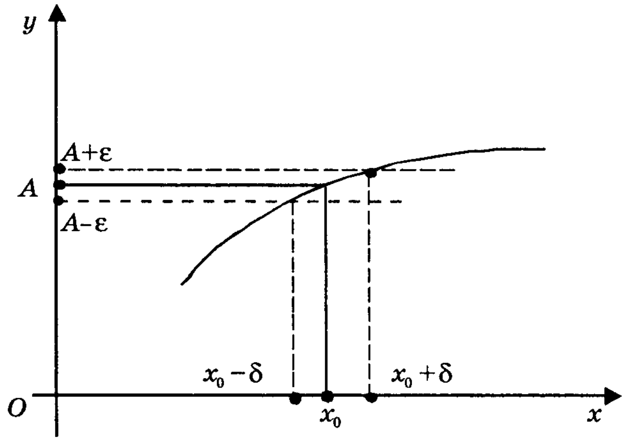

Рис. 43

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A \quad \left(\lim_{x \to x_0-0} f(x) = A\right),$$

або

$$f(x_0 + 0) = A \qquad (f(x_0 - 0) = A).$$

В окремому випадку, коли $x_0 = 0$, пишуть $\lim\limits_{x \to +0} f(x) = A$ $\left(\lim\limits_{x \to -0} f(x) = A\right)$.

Означення 4 (Коші). *Число A називається правою (лівою) границею функції $f(x)$ у точці x_0, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівності*

$$0 < x - x_0 < \delta \qquad (0 < x_0 - x < \delta),$$

виконується нерівність

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Означення 3 і 4, звичайно, еквівалентні.

Зв'язок між односторонніми границями і границею функції встановлює така теорема.

Теорема. *Функція $f(x)$ має границю в точці x_0 тоді й тільки тоді, коли існують її права і ліва границі в цій точці, які збігаються між собою, при цьому*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0).$$

Границя функції на нескінченності і нескінченні границі. Нехай функція $f(x)$ визначена при $x > x_0$ $(x < x_0)$.

Означення 5. *Число А називається границею функції $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, якщо для будь-якого $\varepsilon > 0$ можна знайти таке $\Delta > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівності $x > x_0$, $x > \Delta$ $(x < x_0, x < -\Delta)$, виконується нерівність*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

При цьому вживають відповідні позначення

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \qquad (\lim_{x \to -\infty} f(x) = A),$$

або

$$f(x) \to A,\ x \to +\infty \quad (f(x) \to A,\ x \to -\infty).$$

У разі, якщо існують границі функції $f(x)$ як при $x \to +\infty$, так і при $x \to -\infty$, причому $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$, то вживають позначення

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A, \text{ або } f(x) \to A,\ x \to \infty.$$

Вище малося на увазі, що A — певне число. Іноді зручно розглядати нескінченні границі функції.

Означення 6. *Кажуть, що функція $f(x)$ має своєю границею $+\infty$ $(-\infty)$ при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо для будь-якого $E > 0$ можна знайти таке число $\delta > 0$, що при всіх x, які задовольняють нерівності $0 < |x - x_0| < \delta$, виконується нерівність $f(x) > E$ $(f(x) < -E)$.*

При цьому вживають відповідно позначення

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty),$$

або

$$f(x) \to +\infty \text{ при } x \to x_0 \qquad (f(x) \to -\infty,\ x \to x_0).$$

Аналогічно тому, як це зроблено вище, нескладно визначити також односторонні нескінченні границі

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \pm\infty; \qquad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \pm\infty.$$

Приклад 1. Використовуючи означення, довести, що $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 2) = 1$.

Візьмемо будь-яке число $\varepsilon > 0$. Задача полягає в тому, щоб по цьому ε знайти таке $\delta > 0$, при якому з нерівності $|x - 1| < \delta$ випливала б нерівність $|f(x) - 1| = |(3x - 2) - 1| < \varepsilon$. Перетворюючи останню нерівність, дістанемо $|3(x - 1)| < \varepsilon$, або $|x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{3}$.

Отже, якщо взяти $\delta \le \dfrac{\varepsilon}{3}$, то для всіх x, які задовольняють нерівність $|x - 1| < \delta$, виконується нерівність $|f(x) - 1| < \varepsilon$. Це й означає, що $\lim\limits_{x \to 1}(3x - 2) = 1$.

Якщо, наприклад, $\varepsilon = 1$, то $\delta \le \frac{1}{3}$, якщо $\varepsilon = \frac{1}{2}$, то $\delta \le \frac{1}{6}$, якщо $\varepsilon = 0{,}01$, то $\delta \le 0{,}003$ і т.д.; отже, δ залежить від ε. Тому в означенні границі іноді пишуть $\delta = \delta(\varepsilon)$.

§ 4. Властивості границь

Теорема. *Нехай функції $f(x)$ і $g(x)$ мають границі в точці x_0:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \quad \lim_{x\to x_0} g(x) = B.$$

Тоді функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x)\cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (при $B \neq 0$) також мають границі в точці x_0, причому:

1) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Д о в е д е н н я. Нехай $\{x_n\} \subset X$, $x_n = x_0\,(x \in N)$ — довільна послідовність, збіжна до x_0. За означенням 1 (§ 3), збіжними є послідовності $\{f(x_n)\}$, $\{g(x_n)\}$, причому їхні границі — відповідно A і B. Однак тоді за теоремою 2 (§ 2) послідовності $\{f(x_n) \pm g(x_n)\}$, $\{fx_n) \cdot g(x_n)\}$, $\left\{\dfrac{f(x_n)}{g(x_n)}\right\}$ (при $B \neq 0$) мають границі, що дорівнюють відповідно $A \pm B$, $A \cdot B$, $\dfrac{A}{B}$. Згідно з означенням 1 (§ 3)

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B; \quad \lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B; \quad \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Наслідок 1. Для довільного числа C

$$\lim_{x\to x_0} [C\, f(x)] = \mathrm{C} \lim_{x\to x_0} f(x).$$

Наслідок 2. Для довільного $m \in N$

$$\lim_{x\to x_0} [f(x)]^m = [\lim_{x\to x_0} f(x)]^m.$$

Отже, якщо говорити про границю функції від довільної змінної, то оскільки для змінних, залежних від номера (показника) n теореми доведені, вони справедливі і для функції в загальному випадку. Зауважимо, що приведені властивості повністю зберігаються у випадку односторонніх границь і границь функції на нескінченності.

§ 5. Перша і друга важливі границі

Перша важлива границя. Доведемо, що $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

Зазначимо спочатку, що функція $\dfrac{\sin x}{x}$ визначена при всіх $x \neq 0$.

Припустимо, що $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$. Доведемо, що при таких x виконуються нерівності $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Розглянемо коло одиничного радіуса з центром в точці O (рис. 44) і побудуємо рівні кути AOB і BOC з радіанною мірою x. Нехай EA і EC — дотичні до цього кола. Очевидно, що хорда AC, яка стягує дугу кола AC, менша за цю дугу, котра у свою чергу менша за довжину ламаної $EA + EC$. $AC = 2 \sin x$, $EA + EC = 2 \operatorname{tg} x$, а довжина дуги $AC = 2x$, тобто $\sin x < x < \operatorname{tg} x$.

Беручи до уваги, що при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$ $\sin x > 0$ і $\operatorname{tg} x > 0$, маємо

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x},$$

або

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1,$$

звідки

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x.$$

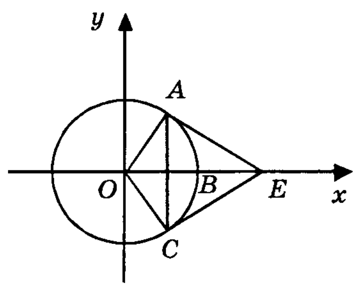

Рис. 44

Оскільки $1 - \cos x = 2\sin^2 \dfrac{x}{2} < \dfrac{x^2}{2}$ (тут використано, що $\sin \dfrac{x}{2} < \dfrac{x}{2}$), то при $x \in \left(0; \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$0 < 1-\frac{\sin x}{x} < \frac{x^2}{2}.$$

Зазначимо, що обидві частини цієї нерівності не змінюються, якщо замінити x на $-x$. Тому вона виконується не тільки при $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, а й при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, тобто при всіх $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, $x \neq 0$.

Отже, можна зробити висновок, що $\lim\limits_{x \to 0}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0$, тобто

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \qquad (1)$$

Друга важлива границя. У вищій математиці зустрічається введене ще в XVII ст. число, яке позначається літерою e. Число це можна визначити як границю функції $f(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$ при прямуванні x до нуля:

$$e = \lim_{x \to 0}(1 + x)^{\frac{1}{x}}. \qquad (2)$$

Вважається, що $x \neq 0$ і $x \neq -1$, оскільки функція не визначена при цих аргументах; факт існування цієї границі приймемо без доведення.

Якщо в рівності взяти $x = \frac{1}{y}$, а потім повернутися до попереднього позначення незалежної змінної, то дістанемо

$$e = \lim_{x \to \infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x. \qquad (3)$$

Якщо функція $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ розглядається тільки на множині натуральних чисел, то з формули (3) випливає, що

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n. \qquad (4)$$

Стале число e ірраціональне і приблизно дорівнює 2,71828...

Якщо число e беруть за основу логарифмів, тоді їх називають *натуральними*. Натуральний логарифм x позначається символом $\ln x$. Встановимо зв'язок між натуральними і десятковими логарифмами. Для цього, логарифмуючи за основою e тотожність $x = a^{\log_a x}$, одержимо рівність $\ln x = \ln a \cdot \log_a x$. При $x = e$ ця рівність приводить до

$$\log_a e = \frac{1}{\ln a}. \qquad (5)$$

При $a = 10$ та сама рівність дає $\ln x = \ln 10 \cdot \lg x$ і $\lg x = M \ln x$, де

$$M = \frac{1}{\ln 10} = \lg e. \tag{6}$$

Формула (6) зв'язує натуральні і десяткові логарифми і показує, що ці логарифми прямо пропорційні один одному. Число M називається *модулем переходу* від натуральних логарифмів до десяткових:

$$M = \lg e \approx 0{,}43429, \ \frac{1}{M} = \ln 10 \approx 2{,}30258.$$

Наприклад, $\ln 2 = \frac{1}{M} \lg 2 = 2{,}30258 \cdot 0{,}30103 \approx 0{,}69315.$

До числа e приводять розв'язки багатьох прикладних задач. Приведемо одну з них, яка зустрічається в економіці.

Задача про неперервне нарахування процентів. На яку величину зросте капітал K_0 через n років при p % річних, якщо нарахування процентів здійснюють декурсивним методом: процентний платіж нараховується і додається до капіталу в кінці кожного розрахункового періоду. Декурсивне нарахування проценту найбільш поширене в світовій практиці.

Очевидно, що при p % річних розмір вкладу щорічно збільшуватиметься в $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ разів, тобто наприкінці n-го року

$$K_n = K_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Отже, капітал K_0 при річному нарахуванні складних процентів згідно зі ставкою p % через n років зросте до величини K_n.

Тут $\frac{p}{100}$ — процентна ставка, виражена в десяткових дробах; $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ — складний декурсивний коефіцієнт.

Якщо нараховують проценти не один раз на рік, а m раз при тому самому щорічному прирості p %, процент нарахування за $\frac{1}{m}$ частину року становитиме $\frac{p}{m}$ %, а розмір вкладу за n років при mn нарахуваннях

$$K_{mn} = K_0 \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{mn}. \tag{7}$$

Покладемо, що проценти нараховуються кожні півроку ($m = 2$), кожний квартал ($m = 4$), щомісячно ($m = 12$), кожний день ($m = 365$), кожний час ($m = 8760$) і т.д. неперервно ($m \to \infty$).

Якщо число розрахункових періодів прямує до нескінченності, то можна стверджувати, що період розрахунку прямує до нуля.

Знайдемо границю величини K_{mn} при $m \to \infty$ (n — число років, m — число розрахункових періодів у році):

$$K_{mn} = K_0 \lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{p}{100 \cdot m}\right)^{mn} = K_0 \lim_{m\to\infty}\left[\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{m}\right]^{n} =$$

$$= K_0 \lim_{m\to\infty}\left[\left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right]^{\frac{p}{100}\cdot n} = K_0 e^{\frac{pn}{100}}. \qquad (8)$$

Отже, ми вивели формулу для кінцевої величини капіталу при неперервному нарахуванні складних процентів. Вона є неперервною функцією і дає змогу обчислити величину капіталу в будь-який період часу.

Приведемо таблицю розмірів вкладів K_{mn} (якщо $K_0 = 1$ — грошова одиниця, $p = 5\ \%$, $n = 20$ років) згідно з формулою складних процентів (7) і формулою неперервного нарахування процентів (8):

	Формула складних процентів (7)					Формула неперервного нарахування процентів (8)
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$	$m = 365$	
Розмір вкладу, гр. од.	2,6335	2,6851	2,7015	2,7126	2,7181	2,7182

Різниця між щорічним ($m = 1$) і неперервним нарахуванням незначна (близько 2,5 %).

З а у в а ж е н н я. В реальних фінансово-кредитних операціях неперервне перерахування процентів застосовується рідко. Воно є досить ефективним при аналізі складних фінансових проблем, наприклад при обгрунтуванні і виборі інвестиційних рішень.

§ 6. Нескінченно малі і нескінченно великі функції

Означення 1. *Функція $f(x)$ називається нескінченно малою при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Нескінченно малу в точці функцію часто називають просто *нескінченно малою.*

Означення 2. *Функція $f(x)$ називається нескінченно великою при $x \to x_0$ (або в точці x_0), якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \infty$.

Нескінченно велику в точці функцію часто називають просто *нескінченно великою.*

Властивості нескінченно малих та нескінченно великих, що виконуються для будь-яких послідовностей (див. § 1), справедливі і для функцій загального випадку, при доведенні яких повторюється процедура, аналогічна тій, якою скористалися при доведенні теореми § 4. Пропонуємо зробити це самостійно.

Зазначимо нарешті, що означення 1 і 2 мають місце, звичайно, і для випадків $x \to x_0 \pm 0$, $x \to \pm\infty$, $x \to \infty$.

При дослідженні функцій часто доводиться мати справу не з однією, а з кількома нескінченно малими функціями в даній точці. Для їх порівняння вивчають частку цих функцій. Детально зупинимося на правилах порівняння нескінченно малих.

Означення 3. *Нехай функції* $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ *нескінченно малі в точці* x_0. Тоді

1) *якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ $(A \in R)$, *то* $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ *називаються нескінченно малими одного порядку при* $x \to x_0$;

2) *якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, *то* $\alpha(x)$ *і* $\beta(x)$ *називаються еквівалентними нескінченно малими при* $x \to x_0$; *записується*: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$.

3) *якщо* $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, *то* $\alpha(x)$ *називається нескінченно малою вищого порядку порівняно з* $\beta(x)$ *при* $x \to x_0$. *Цей факт записується так:* $\alpha = o(\beta)$.

Словом, $o(\beta)$ є загальним позначенням для нескінченно малої вищого порядку, ніж β.

Наприклад, можна писати: $1 - \cos x = o(x)$, $\operatorname{tg} x - \sin x = o(x)$ і т.д.

§ 7. Неперервність функції

З поняттям границі функції тісно пов'язане друге важливе поняття — неперервність функції. Це поняття функції математично відображає характерну рису багатьох явищ, які ми щоденно спостерігаємо в природі і говоримо про них, що вони відбуваються неперервно: неперервність течії рідини, неперервність зміни температури, неперервність зростання живої істоти, неперервність плину часу і т.д.

Геометричне зображення функції у вигляді її графіка допомагає нам до певної міри скласти собі уявлення про цю властивість. Якщо графік функції неперервний (суцільна лінія), тобто його можна накреслити, не відриваючи олівця від паперу, то й функція $f(x)$ є неперервною.

Так, функція $y = x^2$, графіком якої є парабола, неперервна, а функція $y = \dfrac{1}{x}$ на будь-якому проміжку, що містить точку $x = 0$, не є неперервною — графік її розривається в точці $x = 0$.

Переходячи до строгого означення поняття неперервності функції, нагадаємо, що в означенні границі функції при $x \to x_0$ було байдуже, визначена $f(x)$ у точці $x = x_0$ чи ні. Проте якраз цей випадок, коли функція визначена в точці $x = x_0$ і $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, є особливо важливим.

Означення. *Функція $f(x)$ називається неперервною в точці x_0 (чи при $x = x_0$), якщо для будь-якої послідовності*

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots,$$

збіжної до x_0, відповідна послідовність

$$f(x_1), f(x_2), \ldots, f(x_n), \ldots$$

значень функції збігається до $f(x_0)$.

Коротко це записується так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \tag{9}$$

Неперервність функції $f(x)$ у точці $x = x_0$ означають ще й так.

Функція неперервна в точці $x = x_0$, якщо при будь-якому $\varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що нерівність $|x - x_0| < \delta$ тягне за собою нерівність $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Отже, для неперервності функції в точці $x = x_0$ необхідне виконання трьох умов:

1) визначення функції у точці $x = x_0$ та в деякому околі цієї точки;
2) існування границі функції у цій точці;
3) рівність цієї границі значенню функції у точці x_0.

Якщо не виконується хоча б одна з умов, точка $x = x_0$ зветься *точкою розриву функції*.

Сформульоване означення неперервності функції випливає з поняття границі функції. Можна дати інше означення неперервності функції, еквівалентне попередньому, але засноване на понятті нескінченно малої величини. Щоб його сформулювати, потрібно ввести деякі нові поняття.

Якщо змінна x набуває спочатку значення x_0 (це *початкова величина*), а потім значення x_1 (це *нова величина* x), то різницю $x_1 - x_0$ позначають символом Δx (читається "дельта ікс") і звуть *приростом змінної* x.

Припустимо, що y — деяка функція від x:

$$y = f(x).$$

Надаючи приріст Δx аргументові x, дістанемо відповідний приріст Δy функції:

$$\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0),$$

або

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \quad (10)$$

Отже, приріст функції — це різниця між новою та початковою величиною функції.

Приріст аргументу чи функції може бути і додатним, і від'ємним. Нехай, наприклад, $y = x^2$ і початкова величина аргументу $x_0 = 5$, а нова — $x_1 = 8$. Тоді приріст аргументу буде $\Delta x = 8 - 5 = 3$, а приріст функції $\Delta y = 64 - 25 = 39$. Якщо $x_0 = 5$, а $x_1 = 3$, то приріст x буде: $\Delta x = 3 - 5 = -2$, а приріст функції $\Delta y = 9 - 25 = -16$.

Повернемося тепер до рівності (9), що визначає неперервність функції у точці x_0. Якщо взяти $x - x_0 = \Delta x$, $x = x_0 + \Delta x$, то рівність (9) запишеться

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

бо якщо $x \to x_0$, то $\Delta x \to 0$. Останню рівність можна подати у вигляді

$$\lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0.$$

Вираз у квадратних дужках є приростом функції Δy, отже

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0_0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

і маємо в іншій формі означення неперервності функції.

Функція $f(x)$ називається неперервною в точці $x = x_0$, якщо в цій точці нескінченно малому приросту аргументу Δx відповідає нескінченно малий приріст функції Δy.

Функція, неперервна в кожній точці проміжку (a, b), називається неперервною на цьому проміжку.

Зауважимо, нарешті, що рівність (9), яка виражає неперервність функції в точці, можна переписати ще й так:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = f(\lim_{x \to x_0} x),$$

бо $x_0 = \lim\limits_{x \to x_0} x$. Тобто *якщо функція неперервна, то знак границі і знак функції можна переставляти.*

Розглянемо тепер кілька прикладів.

Приклад 1. $y = x$. Тут приріст функції Δy дорівнює приросту аргументу Δx. Неперервність очевидна.

Приклад 2. Дослідити на неперервність функцію $y = x^2$. Нехай $x = x_0$ — якась початкова величина x. Надаючи аргументу x_0 приріст Δx, дістанемо

$$y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 = x_0{}^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

Віднімаючи початкове значення функції $y_0 = x_0^2$, матимемо величину приросту функції

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0{}^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2.$$

З цієї рівності видно, що яка б ні була фіксована величина x, якщо тільки приріст Δx нескінченно малий, то Δy також буде нескінченно малим.

Отже, $y = x^2$ є неперервною функцією на нескінченному проміжку $(-\infty, \infty)$.

Так само доводиться і неперервність функції $y = x^n$, де n — натуральне число.

Приклад 3. Довести неперервність функції $y = \sin x$. При будь-якому $x = x_0$ маємо

$$\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0.$$

Звідси, користуючись формулою $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, отримуємо

$$\Delta y = 2\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Через те, що $\left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \le 1$ і для будь-якого α, $\alpha > 0$, $|\sin\alpha| < |\alpha|$ (зважаючи на нерівність $\sin\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$ і на те, що $|\sin\alpha| \le 1$), матимемо

$$|\Delta y| = 2\left|\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \cdot \left|\sin\frac{\Delta x}{2}\right| < 2 \cdot 1 \cdot \frac{|\Delta x|}{2},$$

тобто

$$|\Delta y| < |\Delta x|, \ \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0.$$

Неперервність функції $y = \sin x$ на проміжку $(-\infty, \infty)$ доведено. Так само доводиться неперервність $y = \cos x$. Власне кажучи, у цьому доведенні немає потреби, бо $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$.

Слід визначити такі майже очевидні твердження про неперервні функції:

Якщо $f_1(x)$ та $f_2(x)$ неперервні в точці $x = x_0$, то сума $f_1(x) + f_2(x)$ та добуток $f_1(x) \cdot f_2(x)$ неперервні в цій точці; частка $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ також неперервна в точці $x = x_0$ за умови, що $f_2(x_0) \neq 0$, тобто $x = x_0$ не є коренем знаменника.

Справді,

$$\lim_{x \to x_0}[f_1(x) + f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) + \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) + f_2(x_0);$$

$$\lim_{x \to x_0}[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \lim_{x \to x_0} f_1(x) \cdot \lim_{x \to x_0} f_2(x) = f_1(x_0) \cdot f_2(x_0);$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} f_2(x)} = \frac{f_1(x_0)}{f_2(x_0)},$$

якщо $f_2(x_0) \neq 0$.

Спираючись на ці твердження, приходимо до таких висновків.

1. Ціла раціональна функція або многочлен

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$$

є неперервною функцією в будь-якій точці проміжку $(-\infty, \infty)$.

2. Дробово-раціональна функція

$$y = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_{m-1}x + b_m}$$

(припускається, що дріб нескоротний) є неперервною скрізь, за винятком тих вартостей x, які перетворюють знаменник на нуль.

3. Функція $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ неперервна скрізь, за винятком точок $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, які перетворюють на нуль $\cos x$.

4. Функція $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$ неперервна скрізь, за винятком точок $x = k\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, що є коренями $\sin x$.

Неперервними є також функції: $y = a^x$ для всіх x з проміжку $(-\infty, \infty)$ та $y = x^a$ (a — дійсне число) для $x > 0$. Доведення цих фактів грунтується на теорії дійсних чисел (читач може його знайти в повних курсах математичного аналізу).

Що стосується обернених функцій, зокрема $y = \sqrt[n]{x}$, $y = \log_a x$, $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, то їх неперервність прямо випливає з такої теореми (подаємо її без доведення).

Теорема. *Якщо* $y = f(x)$ *— неперервна зростаюча (або спадна) функція на замкненому проміжку* $[a, b]$, *причому* $f(a) = A$, $f(b) = B$, *то для неї існує однозначна обернена функція* $x = \varphi(y)$, *теж зростаюча (або спадна) і неперервна на* $[A, B]$.

Отже, з неперервності $\sin x$ випливає неперервність функції $\arcsin x$; з неперервності $y=a^x$ випливає неперервність $y = \log_a x$ і т.д.

Нагадаємо, що елементарними функціями називаються функції, які можна дістати з основних елементарних функцій за допомогою скінченного числа арифметичних операцій і суперпозицій.

На підставі неперервності показникової і логарифмічної функцій і другої важливої границі $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ доведемо кілька важливих рівностей. Їх можна розглядати як продовження списку важливих границь і успішно використовувати, зокрема, при обчисленні похідних від елементарних функцій.

Отже, виконуються такі рівності.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e$, $a > 0$, $a \neq 1$, зокрема при $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$, $a > 0$, зокрема при $a = e$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha$, $\alpha\in R$.

Послідовно доведемо ці співвідношення.

1. Оскільки $\dfrac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$ і логарифмічна функція неперервна в точці e, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}[\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\log_a[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}]=\log_a e.$$

2. Нехай $a\neq 1$. Покладемо $y=a^x-1$, тоді $a^x=1+y$, $x=\log_a(1+y)$, причому внаслідок неперервності показникової функції $y\to 0$ при $x\to 0$. Отже,

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

3. Нехай $\alpha\neq 0$. Врахуємо, що

$$\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}\cdot\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}$$

і візьмемо $y=\alpha\ln(1+x)$. Внаслідок неперервності логарифмічної функції в точці 1 $y\to 0$ при $x\to 0$. Отже, з урахуванням попередніх границь

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\alpha\ln(1+x)}-1}{\alpha\ln(1+x)}=\lim_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}=1;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\alpha\ln(1+x)}{x}=\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\alpha.$$

Остаточно

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha.$$

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте означення границі послідовності.
2. Яка змінна величина називається нескінченно малою, нескінченно великою? Який зв'язок між ними?
3. Сформулюйте та доведіть основні теореми про нескінченно малі.
4. Сформулюйте та доведіть основні теореми про границі.
5. Що означають записи:

$$A=f(a-o)=\lim_{x\to a-o}f(x),\quad B=f(a+o)=\lim_{x\to a+o}f(x)?$$

6. Чому дорівнює границя відношення синуса до його аргументу при прямуванні аргументу до 0 ?
7. Як визначається число e ?
8. Сформулюйте основні властивості функції $f(x)$, яка має границю.

9. Сформулюйте означення границі функції $f(x)$ при $x \to a$, де a — гранична точка множини $D(f)$.

10. Які нескінченно малі називаються еквівалентними?

11. Які логарифми називаються натуральними?

12. Яка функція називається неперервною в точці, на інтервалі?

13. Які основні властивості неперервних на відрізку функцій?

Приклади розв'язування задач

Попередні вказівки. Для засвоєння поняття границі функції доцільно використати геометричну інтерпретацію: при цьому змінна $x \to a$ зображається "рухомою" точкою на осі Ox, а відповідні значення функції $f(x)$ наближаються і залишаються як завгодно близькими до точки A на осі Oy. Якщо мова йде про однобічні границі, то в такому випадку змінна x наближається до точки a по осі Ox зліва ($x \to a - o$, тобто $x \to a$, $x < a$) або справа ($x \to a - o$, тобто $x \to a$, $x > a$). Слід звернути увагу на те, що в означенні границі функції не враховується значення функції в граничній точці, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не залежить від величини $f(x_0)$, яка може й не існувати. Звідси випливає, що під знаком границі можна робити тотожні перетворення аналітичного виразу, не зважаючи на поведінку функції в граничній точці (тобто можна скорочувати дроби на множник, що перетворюється в нуль в граничній точці).

Якщо $\lim\limits_{x \to a} U(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} V(x) = 0$, то кажуть, що вираз $\dfrac{U(x)}{V(x)}$ при $x \to a$ є невизначеністю типу $\dfrac{0}{0}$. У цьому випадку для знаходження $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{U(x)}{V(x)}$ застосовують спеціальні прийоми, а сам процес знаходження границі називають розкриттям *невизначеності*.

Зустрічаються невизначеності типу $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0.

При цьому невизначеності типу $0 \cdot \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, ∞^0, 1^∞ зводяться до невизначеності типу $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

5.1. Знайти:

а) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{4x^2 + 11x - 3}{3x^2 + 10x + 3}$; б) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 3x} - x\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-5x+1}{2x^2+3x+7}$; г) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x}{\mathrm{arctg}5x}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5}$; е) $\lim\limits_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$.

а) Підстановка граничного значення аргументу $x = -3$ призводить до невизначеного виразу типу 0/0.

Для усунення цієї невизначеності розкладемо чисельник і знаменник дробу на множники і скоротимо дріб на множник $(x + 3)$. Таке скорочення тут можливе, оскільки множник $(x + 3)$ відмінний від нуля при $x \to -3$:

$$\lim_{x\to-3}\frac{4x^2+11x-3}{3x^2+10x+3}=\lim_{x\to-3}\frac{4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+3)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)(x+3)}=\lim_{x\to-3}\frac{4\left(x-\frac{1}{4}\right)}{3\left(x+\frac{1}{3}\right)}=\frac{4\left(-3-\frac{1}{4}\right)}{3\left(-3+\frac{1}{3}\right)}=\frac{13}{8}.$$

б) Якщо $x\to\infty$, вираз $\sqrt{x^2+3x}-x$ дає невизначеність типу $(\infty-\infty)$. Для її усунення помножимо і розділимо цей вираз на $(\sqrt{x^2+3x}+x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+x\right)}{\sqrt{x^2+3x}+x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-x^2}{\sqrt{x^2+3x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{3}{\sqrt{1+\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}.$$

в) У цьому випадку ні чисельник, ні знаменник не мають границі, тому що обидва необмежено зростають.

Перетворимо попередньо вираз під знаком границі, поділивши чисельник та знаменник на x^2. Тоді дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+1}{2x^2+3x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(2+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{3}{x}+\frac{7}{x^2}}=\frac{1}{2}.$$

З а у в а ж е н н я. Якщо нам треба знайти границю відношення двох многочленів при $x\to\infty$, то треба попередньо поділити чисельник та знаменник на максимальні степені, що входять в них. Тоді

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\begin{cases}0, m<n,\\ \dfrac{a_n}{b_n}, m=n,\\ \infty, m>n.\end{cases}$$

г) Позначимо $\operatorname{arctg} 5x = y$. Тоді $5x = \operatorname{tg} y$ і $y \to 0$ при $x \to 0$. Застосовуючи властивості границь і формулу першої важливої границі $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$, маємо

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\operatorname{arctg}5x} = \frac{2}{5}\lim_{y\to 0}\frac{\operatorname{tg}y}{y} = \frac{2}{5}\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y} = \frac{2}{5}\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{5}.$$

д) Перетворимо вираз

$$\left(\frac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5} = \left(\frac{2x+1-4}{2x+1}\right)^{4x+5} = \left(1+\frac{-4}{2x+1}\right)^{4x+5}.$$

При $x \to \infty$ такий вираз дає невизначеність типу 1^{∞}.
Для усунення її застосуємо формулу другої важливої границі

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e.$$

Тоді маємо: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-3}{2x+1}\right)^{4x+5} = \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-4}{2x+1}\right) = \lim\limits_{y\to-\infty}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^{-8y+3}$,

де $2x+1=-4y$, $4x+5=-8y+3$ і $y\to-\infty$ при $x\to\infty$.
Переходячи до змінної y, дістанемо

$$\left[\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-8}\cdot\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{3} = e^{-8}\cdot 1^{3} = \frac{1}{e^{8}}.$$

е) $$\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x] = \lim_{x\to+\infty} x\ln\frac{x+1}{x} = \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} =$$

$$= \ln\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{x} = \ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = \ln e = 1.$$

При обчисленні границі ми скористалися теоремою про граничний перехід під знаком логарифма, оскільки для неперервної функції справедливо $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(\lim\limits_{x\to a} x)$.

5.2. Знайти:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\cos\dfrac{1}{x}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$;

в) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^{x}+3^{x}}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{\sin x}{x^{2}}}$.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x\cdot\cos\frac{1}{x}\right)=0$, оскільки добуток нескінченно малої величини x (при $x\to 0$) на обмежену функцію $\cos\frac{1}{x}$ $\left(\left|\cos\frac{1}{x}\right|\le 1\right)$ є величиною нескінченно малою.

Зазначимо, що ця границя не може бути обчислена за допомогою теореми про границі добутку, оскільки $\lim\limits_{x\to 0}\cos\frac{1}{x}$ не існує (при $x\to 0$ аргумент $\cos\frac{1}{x}$ змінюється неперервно вздовж числової осі до нескінченності, при цьому значення $\cos\frac{1}{x}$ коливається від -1 до 1 і від 1 до -1, не прямуючи ні до якого числа (границі)).

б) $\lim\limits_{x\to\infty}x\cdot\sin\frac{1}{x}=[\infty\cdot 0]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$. (Тут виконано заміну $y=\frac{1}{x}$ при $x\to\infty, y\to 0$.)

в) Розглянемо два випадки:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^x+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^x+1}=\frac{0+3}{0+1}=3,$$

оскільки $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$.

При $x\to-\infty$ маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$, при цьому розділимо чисельник і знаменник на 2 і використаємо теорему про границі:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2^{x+1}+3^{x+1}}{2^x+3^x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2+3\left(\frac{3}{2}\right)^x}{1+\left(\frac{3}{2}\right)^x}=\frac{2+0}{1+0}=2.$$

г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{\sin x}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\left[(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{\frac{2\sin x}{x}}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{2\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e^2.$

5.3. Довести неперервність функції $y = f(x)$ у точці $x = 0$ і встановити характер точки розриву функції у цій точці:

а) $y = \dfrac{\sin x}{x}$; б) $y = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & \text{якщо } x \neq 0, \\ 1, & x = 0; \end{cases}$ в) $y = \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}}$.

а) При $x = 0$ функція $f(x)$ невизначена, отже, вона не неперервна в цій точці. Оскільки $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ і відповідно границі функції зліва і справа від точки $x = 0$ скінченні і рівні, тобто $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, то $x = 0$ — точка усунутого розриву першого роду.

б) Порівняно з попереднім прикладом тут функція довизначена в точці $x = 0$ так, що $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 1$, отже така функція неперервна в цій точці.

в) При $x = 0$ функція $f(x)$ невизначена. Оскільки границі функції зліва і справа від точки $x = 0$ скінченні, тобто $\lim\limits_{x \to -0} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = \dfrac{1}{1 + 0} = 1$;

$\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} = 0$; ($2^{\frac{1}{x}} \to \infty$ при $x \to +0$), то в точці $x = 0$ функція $f(x)$ має розрив першого роду.

Задачі і вправи для самостійної роботи

5.4. Довести, що при $n \to \infty$ послідовність $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ має границю — число 1. Починаючи з якого n абсолютна величина різниці між x_n і 1 не перевищує 10^{-4}?

5.5. Довести, що при $n \to \infty$ послідовність $x_n = \dfrac{3n+4}{2n+1}$ має границю — число $\dfrac{3}{2}$.

5.6. Довести, що при $n \to \infty$ послідовність $\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{5}{3}$; $\dfrac{9}{4}$; ...; $\dfrac{4n-3}{n+1}$ .... має границю — число 4.

5.7. Довести, що при $n \to \infty$ послідовність 1; $\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{1}{5}$; ...; $\dfrac{1}{2n-1}$; ... є нескінченно малою.

5.8. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 8x + 12}$. **5.9.** $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-6x^2+11x-6}{x^2-3x+2}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-5x}{x^2-3x+1}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+3x^2+5x-6}{x^3+3x^2+7x-1}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$.

5.16. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x-1}-2}{x-5}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4+x+x^2}-2}{x+1}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}}{x^2-x}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+a}-\sqrt{x}\right)$.

5.21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}\right)$.

5.22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,mx}{\sin nx}$.

5.23. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}\,x-\sin x}{x^3}$.

5.24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\arcsin x}{3x}$.

5.25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos^3 x}{x\sin 2x}$.

5.26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos\alpha x-\cos\beta x}{x^2}$.

5.27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

5.28. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

5.29. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

5.30. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$.

5.31. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$.

5.32. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$.

5.33. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{3x}$.

5.34. $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

5.35. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x-\sin x}}$.

5.36. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^x - e}{x-1}$. **5.37.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$.

5.38. Показати, що при $x = 4$ функція $y=\dfrac{x}{x-4}$ має розрив.

5.39. Показати, що при $x = 5$ функція $y=\dfrac{x^2-25}{x-5}$ має розрив.

5.40. Знайти точки розриву функції $\dfrac{1}{(x-1)(x-5)}$.

Які з функцій, наведених нижче, є неперервними в точці $x = 1$? Якщо є порушення неперервності, встановити характер точки розриву.

5.41. $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$. **5.42.** $y = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1}, & \text{якщо} \quad x \neq 1; \\ 2, & \text{якщо} \quad x = 1. \end{cases}$

5.43. $y = \dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}$. **5.44.** $y = \dfrac{1}{x-1}$.

Відповіді до глави 5

5.8. $\frac{1}{2}$. **5.9.** $-\frac{2}{5}$. **5.10.** $\frac{1}{6}$. **5.11.** -2. **5.12.** ∞. **5.13.** ∞. **5.14.** ∞. **5.15.** $\frac{1}{4}$. **5.16.** $\frac{1}{4}$. **5.17.** 4. **5.18.** $-\frac{1}{4}$; **5.19.** -1. **5.20.** 0. **5.21.** 0. **5.22.** $\frac{m}{n}$. **5.23.** $\frac{1}{2}$. **5.24.** $\frac{2}{3}$. **5.25.** $\frac{3}{4}$. **5.26.** $\frac{\beta^2-\alpha^2}{2}$. **5.27.** $\frac{\sqrt{2}}{8}$. **5.28.** $\frac{1}{e}$. **5.29.** e^6. **5.30.** $e^{-\frac{2}{3}}$. **5.31.** $\frac{1}{a}$. **5.32.** $\ln a$. **5.33.** $\frac{2}{3}$. **5.34.** 1. **5.35.** $\frac{1}{e}$. **5.36.** e. **5.37.** 2.

Розділ III
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Глава 6. Похідні та диференціали

§ 1. Поняття похідної

Нехай функція $y = f(x)$ визначена на проміжку $X = (a, b)$ (можливо, нескінченному). Візьмемо довільну точку $x_0 \in X$ і надамо їй довільного приросту $\Delta x \neq 0$ такого, щоб $x_0 + \Delta x \in X$. Функція дістане в точці x_0 відповідний приріст

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Означення 1. *Похідною функції $y = f(x)$ у точці x_0 називається границя відношення приросту цієї функції до приросту аргументу Δx, якщо приріст аргументу прямує до нуля.*

Похідна позначається одним із символів: $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$, $\dfrac{dy}{dx}$, D_y, $Df(x_0)$. Надалі, як правило, надаватимемо перевагу першому символу, який ввів Лагранж.

Отож, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1}$$

Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{2}$$

називається *диференціальним відношенням.*

У випадку, коли границя відношення (2) при $\Delta x \to 0$ не існує, вважатимемо, що функція в точці x_0 не має похідної.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то позначатимемо цю похідну y' або $f'(x)$.

Отже, якщо x_0 — фіксована точка проміжку X, то похідна $f'(x_0)$ у разі її існування — деяке число. Якщо похідна існує в кожній точці $x \in X$, то $f'(x)$ уже функція від x.

Зауваження 1. Якщо проміжок X — замкнений, наприклад, $X = [a, b]$ і $x_0 = a$, то у формулі (1) границя правостороння:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

Аналогічно, якщо $x_0 = b$, то

$$f'(b) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(b + \Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$

(границя лівостороння).

Зауваження 2. Зрозуміло, що границя (1) існує не для будь-якої функції і не для всякої точки x_0. Наприклад, для функції $y = |x|$ у точці $x_0 = 0$ границя (1) не існує, оскільки диференціальне відношення (2)

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \Delta x > 0; \\ -1, \text{ якщо } \Delta x < 0. \end{cases}$$

Зауваження 3. Якщо існують границі

$$\lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{і} \quad \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то їх називають відповідно *лівою і правою похідними функції* $f(x)$ *у точці* x_0 і позначають $f'_-(x_0)$ і $f'_+(x_0)$. Це так звані односторонні похідні. Наприклад, ці похідні в точці $x_0 = 0$ має функція $f(x) = |x|$, причому $f'_-(0) = -1$ і $f'_+(0) = 1$.

Якщо існують ліва й права похідні і $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$, то, очевидно, існує похідна $f'(x_0)$, причому $f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Оскільки для функції $f(x) = |x|$ $f'_-(0) \neq f_+(0)$, то $f'(0)$ не існує.

Зауваження 4. Якщо для деякого значення x виконана одна з умов

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad \text{або} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\infty,$$

то кажуть, що в точці x_0 функція має нескінченну похідну певного знака.

Аналогічно встановлюється поняття односторонніх нескінченних похідних. Наприклад, функція $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ у точці $x_0 = 0$ має нескінченну похідну, що дорівнює $+\infty$. Дійсно,

$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{1}{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}=+\infty.$$

У подальшому, якщо не обумовлюється окремо, під словами "функція має похідну" розумітимемо лише наявність скінченної похідної.

Означення 2. *Функція $y=f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називається диференційовною в точці x_0.*

Операція відшукання похідної називається *диференціюванням.*

Теорема (про зв'язок між поняттями диференційовності і неперервності). *Якщо функція $y=f(x)$ диференційовна в точці x_0, то вона в цій точці неперервна.*

Д о в е д е н н я. Оскільки функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то існує границя

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Запишемо тотожність

$$\Delta y=\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\Delta x$$

і перейдемо в ній до границі, якщо $\Delta x\to 0$. Дістанемо

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x=f'(x_0)\cdot 0=0.$$

А це й означає, що функція $y=f(x)$ неперервна в точці x_0.

Наголосимо, що функція $f(x)$, неперервна в точці x_0, не обов'язково диференційовна в цій точці. Так, функція $y=|x|$, про яку йшлося вище, очевидно, неперервна в точці $x_0=0$, проте похідної в цій точці не має.

Відомі приклади функцій, які неперервні на всьому проміжку X, проте в жодній точці не мають похідної.

§ 2. Зміст похідної

До поняття *похідної* приводять різноманітні задачі геометрії, механіки, хімії, економіки, біології та інших наук. Розглянемо деякі з них.

Задача про дотичну до кривої. Нехай функція $y=f(x)$ диференційовна в точці x_0, тобто існує похідна $f'(x_0)$. Рівняння січної M_0M, яка проходить через точки $M_0(x_0;\ f(x_0))$ і $M(x_0+\Delta x;\ f(x_0+\Delta x))$ графіка функції $y=f(x)$ (рис. 45), має вигляд

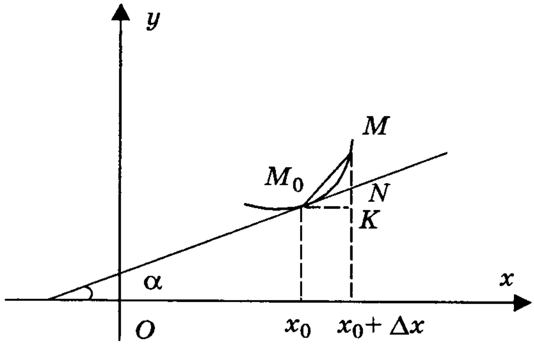

Рис. 45

$$Y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot (X - x_0)$$

де X і Y — змінні координати точки січної. Кутовий коефіцієнт січної $\dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ прямує до $f'(x_0)$. А тому граничне положення січної визначається рівнянням

$$Y = f(x_0) + f'(x_0)(X - x_0).$$

Пряма, яка задається цим рівнянням, називається *дотичною до графіка функції* $y = f(x)$ у точці x_0. Кутовий коефіцієнт дотичної $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$.

Остання формула приводить до геометричного змісту похідної: похідна $f'(x_0)$ функції $y = f(x)$ у точці x_0 дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної до графіка функції $y = f(x)$, проведеної в точці $(x_0;\ f(x_0))$.

Геометричне тлумачення похідної як кутового коефіцієнта дотичної до графіка функції поширюється і на випадок нескінченної похідної. У цьому разі дотична паралельна осі Oy.

Задача про миттєву швидкість. Розглянемо нерівномірний прямолінійний рух тіла, що розпочинається в момент часу $t = 0$. Вважатимемо, що шлях, подоланий тілом за час t, дорівнює $S = S(t)$. Функція $S(t)$ називається *законом руху тіла.*

Шлях ΔS, який подолає тіло за відрізок часу $[t_0;\ t_0 + \Delta t]$, знаходиться як

$$\Delta S = S(t_0 + \Delta t) - S(t_0).$$

Середньою швидкістю руху за проміжок часу Δt називається відношення

$$v_c = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t},$$

в якому легко впізнати диференціальне відношення.

Миттєвою швидкістю руху $v(t_0)$ у момент t_0 називається *границя цього відношення* при $\Delta t \to 0$, тобто

$$v(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = S'(t_0).$$

Отже, похідна від шляху за часом дорівнює миттєвій швидкості прямолінійного руху тіла.

Задача про витрати виробництва та виручку. Нехай $K = K(x)$ — витрати виробництва однорідної продукції — деяка функція кількості продукції x. Зазначимо, що кількості продукції $x + \Delta x$ відповідають витрати виробництва продукції $K(x + \Delta x)$. Отже, диференціальне відношення, що характеризує середній приріст витрат виробництва,

$$\frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = \frac{K(x + \Delta x) - K(x)}{\Delta x}.$$

Воно відбиває приріст витрат виробництва на одиницю приросту кількості продукції.

Границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K(x)}{\Delta x} = K'(x)$$

називається *граничними витратами виробництва.*

Нехай $U(x)$ — виручка від продажу x одиниць товару. Міркування, аналогічні попереднім, приводять до границі

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{U(x + \Delta x) - U(x)}{\Delta x} = U'(x),$$

яку називають *граничною виручкою.*

§ 3. Правила диференціювання

Диференціювання суми, добутку й частки. Теорема 1. *Якщо функції $U = U(x)$ і $V = V(x)$ диференційовні в точці x, то функції $U(x) \pm V(x)$, $U(x) \cdot V(x)$, $\dfrac{U(x)}{V(x)}$ (в останньому випадку припускається, що $V(x) \neq 0$) також диференційовні в цій точці і мають місце формули:*

а) $(U \pm V)' = U' \pm V'$;

б) $(U \cdot V)' = U'V + UV'$;

в) $\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$.

Д о в е д е н н я. а) Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції U і V матимуть прирости ΔU і ΔV, а функція $y = U \pm V$ — приріст $\Delta y = \Delta U \pm \Delta V$. Отже,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U \pm \Delta V}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} = U'(x) \pm V'(x),$$

тобто функції $U(x) \pm V(x)$ дійсно диференційовні в точці x і має місце формула а).

б) Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції U і V матимуть прирости ΔU і ΔV, а функція $y = U \cdot V$ — приріст

$$\Delta y = U(x + \Delta x) \cdot V(x + \Delta x) - U(x) \cdot V(x) = [U(x + \Delta x) - U(x)]V(x + \Delta x) +$$
$$+ U(x)\,[V(x + \Delta x) - V(x)] = \Delta U \cdot V(x + \Delta x) + U(x) \cdot \Delta V.$$

Отже,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta U}{\Delta x} \cdot V(x + \Delta x) + U(x) \cdot \frac{\Delta V}{\Delta x}.$$

Зазначимо, що функція $V(x)$ неперервна в точці x, оскільки вона диференційовна в цій точці, а тому $V(x + \Delta x) \to V(x)$ при $\Delta x \to 0$. Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$ в останній рівності, дістанемо $y' = U'V + UV'$, тобто функція $U \cdot V$ дійсно диференційовна в точці x і має місце формула б).

в) Надамо x деякого приросту Δx. Тоді функції U і V матимуть прирости ΔU і ΔV, а функція $y = \frac{U}{V}$ — приріст

$$\Delta y = \frac{U(x + \Delta x)}{V(x + \Delta x)} - \frac{U(x)}{V(x)}.$$

Переходячи до границі при $\Delta x \to 0$ в останній рівності, дістанемо $y' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$, тобто функція $\frac{U}{V}$ дійсно диференційовна в точці x і має місце формула в).

Наслідок. Покладемо у формулі б) $V(x) = c$, тоді $V'(x) = 0$ і $(CU)' = CU'$, тобто сталий співмножник можна виносити за знак похідної.

Диференціювання складної функції. Теорема 2. Нехай $y = f[\varphi(x)]$ — складна функція, де $y = f(U)$ і $U = \varphi(x)$ — диференційовні функції своїх аргументів. Точніше, зовнішня функція $y = f(U)$ у точці $U = \varphi(x)$ має похідну (по U) $y'_U = f'_U(U)$, а внутрішня функція $U = \varphi(x)$ у точці x має похідну (по x) $U'_x = \varphi'(x)$. Тоді складна функція $y = f[\varphi(x)]$ диференційовна в точці x, причому її похідна обчислюється за формулою

$$f'_x[\varphi(x)] = f'_U(U)\cdot\varphi'(x),$$

або коротко

$$y'_x = y'_U \cdot U'_x \quad \text{чи} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dU}\cdot\frac{dU}{dx}.$$

Доведення. Надамо x деякого приросту $\Delta x \neq 0$. Тоді функція $U = \varphi(x)$ дістане приріст ΔU, а функція $y = f(U)$ — приріст Δy.

За умови $\Delta U \neq 0$ маємо

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta U}\cdot\frac{\Delta U}{\Delta x}.$$

Переходячи в цій рівності до границі при $\Delta x \to 0$, дістанемо

$$y'_x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta U\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta U}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta U}{\Delta x} = y'_U U'_x,$$

що й потрібно довести.

При доведенні враховано, що функція $U = \varphi(x)$ неперервна в точці x, оскільки вона диференційовна в цій точці і, отже, $\Delta U \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Зауваження. Припущення, що досить малому $\Delta x \neq 0$ відповідає $\Delta U \neq 0$, звичайно, суттєве. Проте якщо $\Delta U = 0$ (до речі, цей випадок зустрічається рідко), то формулу диференціювання складної функції неважко встановити трохи інакше.

Наслідок (диференціювання оберненої функції). Нехай функція $x = g(y)$ обернена по відношенню до функції $y = f(x)$, причому функції $f(x)$ і $g(y)$ мають похідні відповідно в точках x і $y = f(x)$. Встановимо зв'язок між похідними $y'_x = f'(x) \neq 0$ і $x'_y = g'(y)$.

Оскільки $x = g[f(x)]$ при всіх x, то за правилом диференціювання складної функції $1 = g'(y)\cdot f'(x)$,

звідки $g'(y) = \dfrac{1}{f'(x)}$, або коротко $x'_y = \dfrac{1}{y'_x}$ чи $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{\dfrac{dy}{dx}}$.

Останні формули мають простий геометричний зміст. Кутовий коефіцієнт дотичної до графіка функції $y = f(x)$ у точці $(x;\ y) \in f'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, а кутовий коефіцієнт до графіка функції $x = g(y)$ в точці $(y;\ x) - g'(y) = \operatorname{tg}\beta$ (рис. 46).

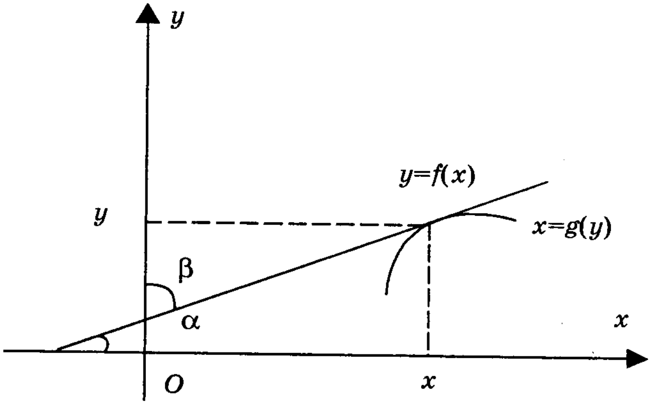

Рис. 46

Очевидно, що $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, а тому $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}\beta=1$, або $f'(x)\cdot g'(y)=1$.

§ 4. Диференційовність елементарних функцій

У § 3 було розглянуто правила обчислення похідних для функцій однієї змінної. Вони дають змогу знаходити похідні будь-яких елементарних функцій.

Доведемо, що всі основні елементарні функції (за винятком $\arcsin x$ і $\arccos x$) диференційовні на своїх областях визначення, причому виконуються формули, які запишемо в окрему так звану таблицю похідних.

1. $(C)'=0$.

2. $(x^{\alpha})'=\alpha x^{\alpha-1}$.

3. $(a^x)'=a^x\ln a$, $(e^x)'=e^x$.

4. $(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$, $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$.

5. $(\sin x)'=\cos x$.

6. $(\cos x)'=-\sin x$.

7. $(\mathrm{tg}x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$.

8. $(\operatorname{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (|x|<1)$.

10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (|x|<1)$.

11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12. $(\operatorname{arcctg}x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Д о в е д е н н я. 1. Нехай на деякому проміжку X задано сталу функцію $y=C$. Тоді для довільних точок $x \in X$ і $x+\Delta x \in X$ $(\Delta x \neq 0)$ маємо $y=f(x)=C$ і $y+\Delta y = f(x+\Delta x) = C$. Отже, $\Delta y = 0$, а тому $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ і $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ і $y' = 0$.

Для скорочення доведення наступних формул подаємо їх у конспективному вигляді.

2. $y = x^\alpha$; $y+\Delta y = (x+\Delta x)^\alpha$; $\Delta y = (x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}; \quad (x^a)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

(враховано формулу з § 7 гл. 5).

3. $y = a^x$; $y+\Delta y = a^{x+\Delta x}$; $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x$;

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x\,\frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x};$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \ln a; \quad (a^x)' = a^x \ln a$$

(враховано формулу з § 7 гл. 5). Зокрема, при $a = e$ дістанемо $(e^x)' = e^x$.

4. $y = \log_a x;\ \ y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x);$

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{\log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}};$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x\ln a};\ \ (\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

(враховано формулу з § 7 гл. 5). Зокрема, при $a = e$ дістанемо $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

5. $y = \sin x;$

$$y + \Delta x = \sin(x + \Delta x);$$

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right);$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} = \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\ \cos\left(x + \frac{\Delta x}{x}\right);$$

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1\cdot\cos x = \cos x;$$

$$(\sin x)' = \cos x$$

(враховано першу важливу границю (гл. 5) і неперервність функції $\cos x$).

6. Для знаходження похідної функції $y = \cos x$ подамо її у вигляді $y = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$ і розглянемо як складну функцію: $y = \sin U$, $U = \dfrac{\pi}{2} - x$.

Тоді $y'_U = \cos U$ і $U'_x = -1$. Отже, $y'_x = \cos U(-1) = -\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$, так що $(\cos x)' = -\sin x$.

7. За правилом диференціювання частки маємо

$$(\mathrm{tg}x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

8. Аналогічно доводиться, що $(\mathrm{ctg}x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

9. Функція $y = \arcsin x \ (|x| < 1)$ є оберненою до функції $x = \sin y \left(|y| < \dfrac{\pi}{2}\right)$, причому похідна $x'_y = (\sin y)' = \cos y$ при $|y| < \dfrac{\pi}{2}$ не дорівнює нулю. А тому за правилом диференціювання оберненої функції

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$

(перед коренем обрано знак “+”, оскільки $\cos y > 0$ при $|y| < \dfrac{\pi}{2}$).

Отже,

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

10. Аналогічно доводиться, що

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1).$$

11. Функція $y = \mathrm{arctg}x \ (x \in R)$ є оберненою до функції $x = \mathrm{tg}y \left(|y| < \dfrac{\pi}{2}\right)$, причому похідна $x'_y = (\mathrm{tg}y)' = \dfrac{1}{\cos^2 y}$ при $|y| < \dfrac{\pi}{2}$ не дорівнює нулю. А тому за правилом диференціювання оберненої функції

$$y'_x = (\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{(\mathrm{tg}y)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Отже, $(\mathrm{arctg}x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

12. Аналогічно доводиться, що

$$(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

На закінчення наведемо формулу диференціювання показниково-степеневої функції $y = [U(x)]^{V(x)}$, де $U = U(x) > 0$ і $V = V(x)$ — диференційовні функції.

За правилом диференціювання складної функції маємо

$$\left(U^V\right)' = \left(e^{V\ln U}\right)' = e^{V\ln U}\left(V'\ln U + V\frac{U'}{U}\right),$$

так що $\left(U^V\right)' = U^V\left(V'\ln U + V\dfrac{U'}{U}\right)$.

Підкреслимо ще раз, що таблиця похідних разом з правилами диференціювання складають основу диференціального числення. Користуючись ними, можна знайти похідні від функцій, які утворені за допомогою арифметичних операцій та суперпозицій над основними елементарними функціями, тобто перейти від будь-яких елементарних функцій знову до елементарних. Отже, операція диференціювання не виводить з класу елементарних функцій.

§ 5. Похідні вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ має похідну на проміжку X. Якщо в точці $x_0 \in X$ похідна $f'(x)$, у свою чергу, диференційовна, то її похідну називають *похідною другого порядку* або *другою похідною функції* $y = f(x)$ у точці $x_0 \in X$ і позначають одним із символів: $f''(x_0)$, $y''(x_0)$, $\dfrac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$, $\dfrac{d^2 y}{dx^2}$, $D^2 y$, $D^2 y(x_0)$.

Означення 1. *Нехай функція $y = f(x)$ має на проміжку X похідні $f'(x)$, $f''(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$. Якщо в точці $x_0 \in X$ існує похідна функції $f^{(n-1)}(x)$, то її називають похідною n-го порядку функції $f(x)$ у точці x_0 і позначають одним із символів $f^{(n)}(x_0)$ $y^{(n)}(x_0)$, $\dfrac{d^n f(x_0)}{dx^n}$, $\dfrac{d^n y}{dx^n}$, $D^n y$, $D^n f(x_0)$.*

Отже, якщо функція $y = f(x)$ має в точці x похідні до n-го порядку включно, то $f^{(n)}(x) = (f^{n-1}(x))'$.

Означення 2. *Функція $y = f(x)$, яка має на деякому проміжку X похідні до n-го порядку включно, називається n разів диференційовною на X. Функція, яка має на X похідні всіх порядків, називається нескінченно диференційовною на X.*

З означення 1 безпосередньо випливає, що

$$\left[c_1 U(x) + c_2 V(x)\right]^{(n)} = c_1 U^{(n)}(x) + c_2 V^{(n)}(x),$$

де c_1 і c_2 — довільні сталі; $U(x)$ і $V(x)$ — n разів диференційовні функції.

У загальному випадку для обчислення похідної вищого порядку потрібно попередньо знайти похідні всіх нижчих порядків. В окремих випадках вдається встановити загальний вираз для похідної n-го порядку.

Приклад 1. Знайти похідну n-го порядку функції $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$, $x > 0$.

Маємо послідовно

$$y' = \alpha x^{\alpha-1},\ y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}, \dots;$$
$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2), \dots, (\alpha-n+1)x^{\alpha-n}.$$

Зокрема, при $\alpha = -1$ маємо $\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$, а при $\alpha = -\frac{1}{2}$ $\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2x)^n \sqrt{x}}$, де символом $(n)!!$ позначено добуток натуральних чисел, які не перевищують n і мають з n однакову парність (наприклад, $7!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $10!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10$).

Для виразу $y = (a + bx)^{\alpha}$ $(a, b \in R)$ має місце формула $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n+1)\, b^n (a+bx)^{\alpha-n}$. Зокрема, при $\alpha = -1$ маємо

$$\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!\, b^n}{(a+bx)^{n+1}},$$

а при $\alpha = -\frac{1}{2}$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+bx}}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n (2n-1)!!\, b^n}{2^n (a+bx)^n \sqrt{a+bx}}.$$

Приклад 2. Знайти похідну n-го порядку функції $y = \ln x$.
Враховуючи, що $y^{(n)} = (y')^{n-1}$, матимемо

$$(\ln x)^{(n)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{n-1} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Приклад 3. Знайти похідну n-го порядку функції $y = a^x$.
Маємо послідовно

$$y' = a^x \ln a,\ y'' = a^x (\ln a)^2, \dots;$$
$$y^{(n)} = a^x (\ln a)^n.$$

Зокрема, якщо $y = e^x$, то $y^{(n)} = e^x$.

Приклад 4. Знайти похідну n-го порядку функції $y = \sin x$.
Маємо послідовно

$$y' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),\ y'' = -\sin x = \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y''' = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

У загальному випадку

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Цілком аналогічно

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

§ 6. Диференціал функції

Нехай функція $y = f(x)$ диференційовна в точці x, тобто існує границя

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Згідно з теоремою 2 (гл. 5, § 1) для всіх значень з досить малого околу точки x маємо рівність

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x),$$

де $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Звідси

$$\Delta y = f'(x)\Delta x + o(\Delta x),\ \forall\, \Delta x \to 0,$$

де $o(\Delta x)$ — нескінченно мала вищого порядку порівняно з Δx.

З а у в а ж е н н я. Якщо, навпаки, в точці x для приросту функції має місце рівність

$$\Delta y = A\Delta x + o(\Delta x),\ \forall\, \Delta x \to 0,$$

де A — стала, то функція $f(x)$ диференційовна в точці x і $A = f'(x)$.

Дійсно, з останньої формули випливає

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x},\ \forall\, \Delta x \to 0;$$

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=A.$$

Означення. *Диференціалом функції $y=f(x)$ у точці x називається головна, лінійна відносно Δx частина приросту функції в цій точці:*

$$dy=df(x)=f'(x)\Delta x.$$

Диференціалом незалежної змінної x вважатимемо його приріст Δx, тобто $dx=\Delta x$. Отже, $dy=f'(x)dx$.

З а у в а ж е н н я. З останньої формули випливає, що $y'=f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$. Саме тому похідну часто позначають $\dfrac{dy}{dx}$ або $\dfrac{df}{dx}$ і розуміють її як відношення двох диференціалів: диференціала функції до диференціала аргументу.

Оскільки $dx=\Delta x=x-x_0$, то

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=df(x_0)+o(\Delta x)$$

і при досить малих Δx має місце формула

$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x,$$

якою часто користуються при наближених обчисленнях.

Для з'ясування геометричного змісту диференціала знову звернемося до рис. 45. У трикутнику M_0NK

$$NK=M_0K\cdot \operatorname{tg}\alpha=f'(x_0)\cdot\Delta x=dy.$$

Отже, диференціал функції дорівнює приросту ординати дотичної до графіка функції $y=f(x)$ у точці x_0.

З правил диференціювання випливають правила обчислень диференціалів функцій:

а) $d(U\pm V)=dU\pm dV$;

б) $d(U\cdot V)=VdU+UdV$;

в) $d\left(\dfrac{U}{V}\right)=\dfrac{VdU-UdV}{V^2}\ \ (V(x)\neq 0)$.

Для ілюстрації доведемо останнє правило.

Нехай $y=\dfrac{U}{V}\ \ (V(x)\neq 0)$. Тоді

$$dy=d\left(\frac{U}{V}\right)=\left(\frac{U}{V}\right)'dx=\frac{U'V-UV'}{V^2}dx=\frac{VU'dx-UV'dx}{V^2}=\frac{VdU-UdV}{V^2}.$$

Встановимо формулу для диференціала складної функції $y = f(\varphi(x))$, де $y = f(U)$ і $U = \varphi(x)$ — диференційовні функції своїх аргументів. Отже, вимоги теореми 2 (§ 3) виконано.

З одного боку, $dy = f'(U)dU$, де U — незалежна змінна, а з іншого — за вищезгаданою теоремою

$$dy = f'_x[\varphi(x)]dx = f'_U(U)\varphi'(x)dx = f'(U)dU,$$

де $U = \varphi(x)$.

Отже, зовнішній вигляд диференціала функції $f(U)$ зберігається і у випадку, коли U є функцією, а не незалежною змінною.

Цю важливу властивість диференціала називають *інваріантністю його форми*. Її зручно використовувати для обчислення похідної функції, заданої параметрично.

Коротко зупинимося на такому способі задання функції $y = f(x)$ за допомогою двох функцій: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Припустимо, що функція $x = \varphi(t)$ має обернену $t = \Phi(x)$. Тоді, очевидно, y є деякою функцією від $x: y = \psi\ [\Phi(x)] = f(x)$. Отже, пара функцій $x = \varphi(t)$ і $y = \psi(t)$ визначають деяку функцію $y = f(x)$, задану параметрично. Допоміжна змінна t при цьому називається *параметром*.

Припустимо, що функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ — диференційовні в кожній точці t проміжку T, причому $\psi'(t) \neq 0$ при всіх $t \in T$. Враховуючи, що $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$, а $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$, матимемо похідну від функції, заданої параметрично, у вигляді

$$y'_x = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

§ 7. Диференціали вищих порядків

Нехай функція $y = f(x)$ n разів диференційовна на проміжку X. Тоді у кожній точці $x \in X$ існує, зокрема, її диференціал $dy = f'(x)dx$, який надалі називатимемо також *диференціалом першого порядку функції* $f(x)$. Оскільки приріст аргументу dx — величина стала, то dy є функцією однієї змінної x. Диференціал цієї функції називатимемо *диференціалом другого порядку функції* $f(x)$ і позначатимемо d^2y або $d^2f(x)$. Отже, за означенням, $d^2y = d(dy)$.

Далі маємо

$$d^2y = d(f'(x)\,dx) = d(f'(x))\,dx = f''(x)\,dx^2.$$

І, нарешті, якщо для функції $y = f(x)$ відомий диференціал $(n-1)$-го порядку $d^{n-1}y$, то диференціалом n-го порядку $d^n y$ функції $y = f(x)$ називається *диференціал першого порядку* від диференціала $(n-1)$-го порядку, тобто

$$d^n y = d\left(d^{n-1}y\right).$$

За індукцією ясно, що

$$d^n y = d\left(f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}\right)dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

З останньої формули випливає, що при довільному n

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n},$$

тобто похідну n-го порядку функції $y = f(x)$ можна подати як відношення її диференціала n-го порядку до n-го степеня диференціала аргументу.

З а у в а ж е н н я. Диференціали n-го порядку $(n \geq 2)$ вже не мають властивості інваріантності форми. Дійсно, вже при $n = 2$, з одного боку, якщо U — незалежна змінна, маємо $d^2y = f''(U)dU^2$. З іншого, для складної функції $y = f(U)$, де $U = \varphi(x)$, маємо

$$d^2y = d(f'(U)dU) = d(f'(U))dU + f'(U)d(dU) = f''(U)dU^2 + f'(U)d^2U,$$

де $d^2U = \varphi''(x)dx^2$.

Оперуючи з диференціалами, зручно обчислювати похідні вищих порядків від функції, заданої параметрично за допомогою двох функцій: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$.

Для конкретності зупинимося на випадку знаходження другої похідної $y'' = f''(x)$, вважаючи, що функції $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ двічі диференційовні і $\varphi'(t) \neq 0$.

Маємо послідовно $dx = \varphi'(t)dt$, $dy = \psi'(t)dt$ і

$$d^2x = \varphi''(t)dt^2 + \varphi'(t)d^2t;$$

$$d^2y = \psi''(t)dt^2 + \psi'(t)d^2t.$$

Оскільки x — незалежна змінна, то $d^2x = 0$ і тому

$$d^2t = -\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}dt^2.$$

Отже, остаточно

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\psi''(t)dt^2 + \psi'(t)d^2t}{(\varphi'(t))^2 dt^2} = \frac{\psi''(t)dt^2 - \psi'(t)\frac{\varphi''(t)}{\varphi'(t)}dt^2}{(\varphi'(t))^2 dt^2} =$$

$$= \frac{\varphi'(t)\psi''(t) - \varphi''(t)\psi'(t)}{(\varphi'(t))^3}.$$

§ 8. Економічний зміст похідної. Використання поняття похідної в економіці

Раніше (§ 2) було встановлено, що продуктивність праці є похідною обсягу виробленої продукції за часом, яка дорівнює $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta K(x)}{\Delta x}$, виражає граничні витрати виробництва і характеризує наближено додаткові витрати на виробництво одиниці додаткової продукції.

Граничні витрати залежать від рівня виробництва x (кількість продукції, що виробляється) і визначаються не сталими виробничими витратами, а лише змінними (на сировину, паливо і т.д.). Аналогічно можна визначити граничну виручку (§ 2), граничний дохід, граничний продукт, граничну корисність та інші граничні величини.

Граничні величини характеризують не стан (як сумарна або середня величини), а процес, зміни економічного об'єкта. Отже, похідна виступає як швидкість зміни деякого економічного об'єкта (процесу) за часом або відносно іншого досліджуваного фактора. Потрібно врахувати також, що економіка не завжди дає змогу використовувати граничні величини через неподільність багатьох об'єктів за економічними розрахунками і дискретність економічних показників за часом (наприклад, річних, квартальних, місячних і т.д.). Разом з тим у ряді випадків можна не звертати уваги на дискретність показників і ефективно використати граничні величини.

Для дослідження економічних процесів і розв'язування інших прикладних задач часто використовують поняття еластичності функції.

Еластичністю функції $E_x(y)$ називається границя відношення відносного приросту функції y до відносного приросту змінної x при $\Delta x \to 0$:

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y}\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x}{y}y'. \qquad (3)$$

Еластичність функції показує наближено, на скільки процентів зміниться функція $y = f(x)$ при зміні незалежної змінної x на 1 %.

Зазначимо властивості еластичності функції.

1. Еластичність функції дорівнює добутку незалежної x на темп зміни функції:

$$T_y = (\ln y)' = \frac{y'}{y},$$

тобто

$$E_x(y) = xT_y. \tag{4}$$

2. Еластичність добутку (частки) двох функцій дорівнює сумі (різниці) еластичностей цих функцій:

$$E_x(u \cdot v) = E_x(u) + E_x(v), \tag{5}$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = E_x(u) - E_x(v). \tag{6}$$

Еластичність функцій застосовується при аналізі попиту і споживання. Наприклад, еластичність попиту y відносно ціни x (або доходу x) — коефіцієнт, що визначається за формулою (3), який показує наближено, на скільки процентів зміниться попит (обсяг споживання) при зміні ціни (або доходу) на 1%.

Якщо еластичність попиту (за абсолютною величиною) $|E_x(y)| > 1$, тоді попит рахують еластичним, якщо $|E_x(y)| = 1$ — нейтральним, якщо $|E_x(y)| < 1$ — нееластичним відносно ціни (або доходу).

Приклад 1. Залежність між витратами виробництва k і обсягом продукції x можна виразити функцією $k = 50x - 0{,}05x^3$ (гр. од.). Треба визначити середні і граничні витрати при обсязі продукції 10 одиниць.

Функцію середніх витрат (на одиницю продукції) можна виразити відношенням $k_1 = \dfrac{k}{x} = 50 - 0{,}05x^2$ при $x = 10$. Середні витрати (на одиницю продукції)

$$k_1(10) = 50 - 0{,}05 \cdot 10^2 = 45 \text{ (гр. од.)}.$$

Функцію граничних витрат можна виразити похідною $k'(x) = 50 - 0{,}15x^2$; при $x = 10$ граничні витрати становлять: $k'(x) = 50 - 0{,}15 \cdot 10^2 = 35$ (гр. од).

Отже, якщо середні витрати на виробництво одиниці продукції становлять 45 гр. од., тоді граничні витрати, тобто додаткові затрати на виробництво додаткової одиниці продукції при даному рівні виробництва (обсязі виробленої продукції 10 од.), становлять 35 гр. од.

Приклад 2. Залежність між собівартістю одиниці продукції y (тис. грн) і випуском продукції x (тис. грн) виражається функцією $y = -0{,}5x + 80$.

Знайти еластичність собівартості при випуску продукції на 60 тис. грн.

Згідно з формулою (3) еластичність собівартості

$$E_x(y) = \frac{-0{,}5x}{-0{,}5x + 80} = \frac{x}{x - 160}.$$

При $x = 60$ $E_{x=60}(y) = -0{,}6$, тобто при випуску продукції на 60 тис. грн збільшення його на 1% призведе до зниження собівартості на $0{,}6\%$.

Приклад 3. Обсяг продукції u, вироблений бригадою робітників, можна описати рівнянням

$$u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50\,(\text{од.}),\ 1 \le t \le 8,$$

де t — робочий час, год. Обчислити продуктивність праці, швидкість і темпи її зміни через годину після початку роботи і за годину до її закінчення.

Продуктивність праці виражається похідною

$$z(t) = u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100\,(\text{од./год.}),$$

а швидкість і темп зміни продуктивності — відповідно похідною $z'(t)$ і логарифмічною похідною $T_z(t) = [\ln z(t)]$:

$$T_z(t) = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40}\,(\text{од./год.}),$$

де $z'(t) = -5t + 15\,(\text{од./год.}^2)$,

У задані моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 8 - 1 = 7$ відповідно маємо:

$$z(1) = 112{,}5\ (\text{од./год.}),\ z'(1) = 10\ (\text{од./год.}^2), T_z(1) = 0{,}09\ (\text{од./год.}),$$

і

$$z(7) = 82{,}5\ (\text{од./год.}),\ z'(7) = -20\ (\text{од./год.}^2),\ T_z(7) = -0{,}24\ (\text{од./год.}).$$

Отже, на кінець роботи продуктивність праці суттєво знижується; при цьому зміна знаку $z'(t)$ і $T_z(t)$ із "плюса" на "мінус" свідчить про те, що підвищення продуктивності праці в перші години робочого дня змінюється її зниженням в останні години.

Приклад 4. Дослідно встановлено функції попиту $g = \dfrac{p+8}{p+2}$ і пропозиції $s = p + 0{,}5$, де g і s — кількість товару відповідно купленого і пропонованого на продаж в одиницю часу; p — ціна товару.

Знайти:

а) рівноважну ціну, тобто ціну, при якій попит і пропозиції врівноважуються;

б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни;

в) зміну доходу при підвищенні ціни на 5% від рівноважної.

а) Рівноважна ціна визначається з умови $g = s$; $\dfrac{p+8}{p+2} = p + 0{,}5$, звідки $p = 2$, тобто рівноважна ціна дорівнює 2 гр. од.

б) Знайдемо еластичність з попиту і пропозиції за формулою (3):

$$E_p(g) = -\frac{6p}{(p+2)(p+8)}; \quad E_p(s) = \frac{2p}{2p+1}.$$

Для рівноважної ціни $p = 2$ маємо

$$E_{p=2}(g) = -0{,}3; \quad E_{p=2}(s) = 0{,}8.$$

Оскільки здобуті значення еластичності за абсолютною величиною менші за 1, тоді і попит, і пропозиції даного товару при рівноважній (ринковій) ціні нееластичні відносно ціни. Це означає, що зміна ціни не призведе до різкої зміни попиту і пропозиції. Так, при підвищенні ціни p на 1% попит зменшиться на $0{,}3\%$, а пропозиція підвищиться на $0{,}8\%$.

в) При підвищенні ціни p на 5% від рівноважної попит зменшиться на $5 \cdot 0{,}3 = 1{,}5\%$, отже дохід зросте на $3{,}5\%$.

Приклад 5. Як пов'язані граничні і середні повні витрати підприємства, якщо еластичність повних витрат дорівнює 1?

Нехай повні витрати підприємства y виражаються функцією $y = f(x)$, де x — обсяг продукції, що випускається. Тоді середні витрати y_1 на виробництво одиниці продукції $y_1 = \dfrac{y}{x}$. Згідно з формулою (6) еластичність частки двох функцій дорівнює різниці їх еластичностей, тобто

$$E_x(y_1) = E_x\left(\frac{y}{x}\right) = E_x(y) - E_x(x) = E_x(y) - 1.$$

З умови $E_x(y) = 1$, отже $E_x(y_1) = 1 - 1 = 0$.

Це означає, що зі зміною обсягу продукції x середні витрати на одиницю продукції не змінюються, тобто $y_1 = \dfrac{y}{x} = c$, звідки $y = cx$. Граничні витрати підприємства визначаються похідною $y' = c$. Отже,

$y' = y_1$, тобто граничні витрати дорівнюють середнім витратам (зауважимо, що це твердження справедливе лише для лінійних функцій витрат).

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте означення похідної функції $y = f(x)$ у точці x_0.
2. У чому полягає геометричний, механічний та економічний зміст похідної?
3. Запишіть рівняння дотичної до графіка функції $y = f(x)$, яка має похідну в точці з абсцисою x_0.
4. Що можна сказати про неперервність функції, яка має похідну в точці x_0?
5. Сформулюйте означення лівої та правої похідних. Дайте геометричну інтерпретацію.
6. Що таке похідна другого, третього, n-го порядку функції?
7. Дайте означення диференційовності функції в точці.
8. Що таке диференціал функції $y = f(x)$ у точці x_0, диференціал незалежної змінної x?
9. У чому полягає геометричний зміст диференціала?
10. Для якої функції диференціал збігається з її приростом?
11. Як застосовують диференціал до наближених обчислень?
12. Що ми розуміємо під інваріантністю форми першого диференціала?

Приклади розв'язування задач

6.1. Не користуючись формулами диференціювання, знайти похідні функцій:

а) $y = 2x^3 + 5x^2 - 7x - 4$; б) $y = \sqrt{x}$.

а) Надамо аргументу x приріст $\Delta x \neq 0$. Тоді y отримає приріст Δy:

$$y + \Delta y = 2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4.$$

Знайдемо приріст функції:

$$\Delta y = \left[2(x + \Delta x)^3 + 5(x + \Delta x)^2 - 7(x + \Delta x) - 4\right] - \left[2x^3 + 5x^2 - 7x - 4\right] =$$
$$= 6x^2\Delta x + 6x\Delta x^2 + 2\Delta x^3 + 10x\Delta x + 5\Delta x^2 - 7\Delta x.$$

Складаємо відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7.$$

Знаходимо границю цього відношення при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (6x^2 + 6x\Delta x + 2\Delta x^2 + 10x + 5\Delta x - 7) = 6x^2 + 10x - 7.$$

б) Знаходимо приріст функції:

$$\Delta y = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}.$$

Звідси

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}$$

і

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x}.$$

Отже,

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x + \Delta x - x}{(\Delta x)(\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x})} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + \Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

6.2. Знайти похідні функцій:

а) $y = \sqrt{\ln x + 1} + \ln(\sqrt{x} + 1)$;

б) $y = \cos^5 x$;

в) $y = \ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$;

г) $y = \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{\cos 2x}}$;

д) $y = x^{\cos^2 x}$;

е) $x^3 + \ln y - x^2 e^y = 0$;

є) $\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1, \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1. \end{cases}$

а) При диференціюванні потрібно врахувати, що перший доданок є степеневою функцією $(y = \sqrt{u})$, її аргумент — сума логарифмічної функції і сталої $(u = \ln x + 1)$, а другий доданок — логарифмічна функція $(y = \ln u$, де $u = \sqrt{x} + 1)$:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}(\ln x+1)' + \frac{1}{\sqrt{x}+1}(\sqrt{x}+1)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\ln x+1}}\frac{1}{x} + \frac{1}{(\sqrt{x}+1)2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\left(\frac{1}{\sqrt{x(\ln x+1)}} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right).$$

б) Це складна функція виду $y = u^5$, де $u = \cos x$ (u називається проміжним аргументом). Використовуючи формулу диференціювання складної функції, дістанемо

$$y'_x = (u^5)'_u(\cos x)'_x = 5u^4(-\sin x) = -5\cos^4 x\sin x;$$

в) Тут також складна функція $y = \ln u$, де $u = \mathrm{tg}v, v = \frac{x}{2}$. Тоді

$$y'_x = (\ln u)'_u(\mathrm{tg}v)'_v\left(\frac{x}{2}\right)'_x = \frac{1}{u}\frac{1}{\cos^2 v}\frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sin x}.$$

г) Згідно з правилом диференціювання частки двох функцій

$$y' = \frac{(\sin^2 x)'\sqrt{\cos 2x} - \sin^2 x(\sqrt{\cos 2x})'}{\cos 2x}.$$

Враховуючи, що

$$(\sin^2 x)' = 2\sin x(\sin x)' = 2\sin x\cos x = \sin 2x,$$

$$(\sqrt{\cos 2x})' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(\cos 2x)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos 2x}}(-\sin 2x)(2x)' = -\frac{\sin 2x}{\sqrt{\cos 2x}},$$

отримаємо

$$y' = \frac{\sin 2x\cos^2 x}{\sqrt{\cos^3 2x}}.$$

д) За правилом диференціювання степенево-показникової функції

$$y' = \cos^2 x \cdot x^{\cos^2 x - 1} + x^{\cos^2 x} \cdot \ln x(\cos^2 x)'.$$

Враховуючи, що $(\cos^2 x)' = -2\cos x\sin x = -\sin 2x$, дістанемо після перетворень

$$y' = x^{\cos^2 x}\left(\frac{\cos^2 x}{x} - \ln x\sin 2x\right).$$

Можна було б попередньо прологарифмувати заданий вираз за основою e:

$$\ln y = \cos^2 x \ln x,$$

а потім продиференціювати обидві частини останньої рівності по x. Оскільки y є функцією від x, то $\ln y$ є складною функцією x і $(\ln y)' = \frac{1}{y} y'$. Отже,

$$\frac{y'}{y} = -2\cos x \sin x \ln x + \cos^2 x \frac{1}{x}.$$

Тобто

$$y' = y\left(\frac{\cos^2 x}{x} - 2\cos x \sin x \ln x\right) =$$

$$= x^{\cos^2 x}\left(\frac{\cos^2 x}{x} - \sin 2x \ln x\right).$$

е) При диференціюванні неявної функції враховуємо, що y — функція від x.

Отже, $(\ln y)' = \frac{1}{y} y'$; $(x^2 e^y)' = x^2 e^y y' + 2xe^y$.

Диференціюємо по x обидві частини рівності:

$$3x^2 + \frac{y'}{y} - x^2 e^y y' - 2xe^y = 0,$$

тобто

$$y' = \frac{(2xe^y - 3x^2)y}{1 - x^2 y e^y}.$$

є) За правилом диференціювання функції, заданої параметрично,

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t},$$

а тому знайдемо

$$y'_t = 15t^4 + 15t^2;$$

$$x'_t = 3t^2 + 3.$$

Отже,

$$y'_x = \frac{15t^4 + 15t^2}{3t^2 + 3} = 5t^2.$$

6.3. Обчислити значення похідної функції $y = f(x)$ при $x = \dfrac{\pi}{4}$:

а) $y = e^x \sin x$; б) $y = \ln\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}$.

а) Попередньо знайдемо похідну заданої функції: $y' = (e^x \sin x)' = = e^x \sin x + e^x \cos x$, а потім обчислюємо її значення в точці $x = \dfrac{\pi}{4}$:

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}\left(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}.$$

б) Попередньо зазначимо, що $y = \dfrac{1}{2}\ln(1 + \operatorname{ctg}^2 x)$. Тепер

$$y' = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}(1 + \operatorname{ctg}^2 x)' = \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x}2\operatorname{ctg}x\left(-\frac{1}{\sin^2 x)}\right) = -\operatorname{ctg}x;$$

Отже, $y'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{4} = -1.$

6.4. Задано криву $y = \dfrac{1}{4}x^2 - x$. Скласти рівняння дотичних: в точках перетину її з прямою $3x + 2y - 4 = 0$; паралельно і перпендикулярно до цієї прямої.

Знайдемо точки перетину двох ліній, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} - x, \\ 3x + 2y - 4 = 0, \end{cases}$$

звідки

$$\begin{cases} x_1 = 2, \\ y_1 = -1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_2 = -4, \\ y_2 = 8. \end{cases}$$

Знайдемо похідну функції $y' = \dfrac{1}{2}x - 1$. Значення похідної в знайдених точках $y'(2) = 0$; $y'(-4) = -3$.

Рівняння дотичних згідно з формулою (15) (гл. 3) $y + 1 = 0$ і $y - 8 = = -3(x + 4)$ або $3x + y + 4 = 0$.

Кутовий коефіцієнт заданої прямої $k = -\frac{3}{2}$, а дотичної, паралельної заданій прямій і перпендикулярної до неї, — відповідно $k_3 = k = -\frac{3}{2}$ і $k_4 = -\frac{1}{k} = \frac{2}{3}$. Тому точки, в яких дотична до кривої паралельна заданій прямій і перпендикулярна до заданої прямої, знаходяться з рівнянь

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 = -\frac{3}{2}, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x - 1 = \frac{2}{3},$$

звідки відповідно $x_1 = -1$ і $x_2 = \frac{10}{3}$. Знайдемо ординати кривої в одержаних точках $f(-1) = \frac{5}{4}$ і $f\left(\frac{10}{3}\right) = -\frac{5}{9}$. Рівняння дотичних

$$y - \frac{5}{4} = -\frac{3}{2}(x + 1),$$

або $6x + 4y + 1 = 0$ і $y + \frac{5}{9} = \frac{2}{3}(x - \frac{10}{3})$, або $6x - 9y - 25 = 0$.

6.5. Знайти приріст і диференціал функції $y = 2x^2 - 3x$ при $x = 10$ і $\Delta x = 0{,}1$.

Приріст функції

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \left[2(x + \Delta x)^2 - 3(x + \Delta x)\right] - \left[2x^2 - 3x\right] =$$

$$= \Delta x(4x + 2\Delta x - 3).$$

Диференціал функції

$$dy = f'(x)\Delta x = (4x - 3)\Delta x.$$

При $x = 10$ і $\Delta x = 0{,}1$ маємо $\Delta y = 3{,}72$ і $dy = 3{,}70$. Різниця між Δy і dy становить лише $0{,}02$, або $0{,}5\%$.

6.6. Знайти диференціал функції

$$y = \frac{x}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{49}{2}\arcsin\frac{x}{7}.$$

$$dy = f'(x) \cdot dx = \left[\frac{1}{2}\sqrt{49 - x^2} + \frac{x}{2}\frac{1}{2\sqrt{49 - x^2}}(-2x) + \frac{49}{2} \cdot \frac{1}{7}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{49}}}\right]dx =$$

$$= \sqrt{49 - x^2}\,dx.$$

6.7. Обчислити наближено: а) $\sin 46^\circ$; б) $\sqrt[4]{16{,}64}$.

а) Прийнявши $f(x) = \sin x$, знайдемо $f'(x) = \cos x$ і відповідно до формули про наближені обчислення

$$\sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x .$$

Враховуючи, що $\sin 46^\circ = \sin(45^\circ + 1^\circ) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180^\circ}\right)$, візьмемо $x = \frac{\pi}{4}$ і $\Delta x = \frac{\pi}{180^\circ}$.

Тоді

$$\sin 46^\circ = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180^\circ}\right) \approx \sin\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180^\circ} \cdot \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + \frac{\pi}{180^\circ}\right).$$

б) Отримаємо спочатку наближену формулу для обчислення коренів будь-якого n-го степеня. Покладаючи $f(x) = \sqrt[n]{x}$, дістанемо

$$f'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{\sqrt[n]{x}}{nx}$$

і відповідно до § 6

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x} + \frac{\sqrt[n]{x}}{nx} \Delta x,$$

або

$$\sqrt[n]{x + \Delta x} \approx \sqrt[n]{x}\left(1 + \frac{\Delta x}{nx}\right).$$

У заданому прикладі

$$\sqrt[4]{x + \Delta x} \approx \sqrt[4]{x} \cdot \left(1 + \frac{\Delta x}{4x}\right).$$

За x візьмемо число, найбільш близьке до 16,64, але щоб було відоме $\sqrt{x}$, при цьому Δx має бути достатньо малим. Очевидно, треба взяти $x = 16$, $\Delta x = 0{,}64$ (проте, наприклад, не $x = 9$, $\Delta x = 7{,}64$). Отже,

$$\sqrt[4]{16{,}64} \approx \sqrt[4]{16}\left(1 + \frac{0{,}64}{4 \cdot 16}\right) = 2 \cdot 1{,}01 = 2{,}02.$$

З допомогою диференціала можна розв'язати задачу визначення абсолютної та відносної похибок функції за заданою похибкою знаходження аргументу. Нехай потрібно обчислити значення заданої функції $y = f(x)$ при деякому значенні аргументу x_1, дійсна величина якого невідома, а відоме лише його наближене значення x з абсолютною похибкою $|\Delta x| = |x - x_1|$. Якщо замість дійсного значення $f(x_1)$ візьмемо величину $f(x)$, то ми припустимося похибки:

$$|f(x) - f(x_1)| = |\Delta y| \approx dy = f'(x)\Delta x.$$

При цьому відносну похибку функції $\delta y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right|$ можна обчислити (при достатньо малих Δx) за формулою

$$\delta y = \left|\frac{\Delta y}{y}\right| \approx \left|\frac{dy}{y}\right| = \left|\frac{f'(x)\Delta x}{f(x)}\right| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| \cdot \left|\frac{\Delta x}{x}\right|, \qquad (7)$$

або

$$\delta y = |E_x(y)|\delta x,$$

де $|E_x(y)|$ — еластичність функції (за абсолютною величиною); $\delta_x = \left|\frac{\Delta x}{x}\right|$ — відносна похибка знаходження аргументу x.

6.8. Витрати бензину y (л) автомобіля на 100 км шляху залежно від швидкості x (км/год.) описуються функцією $y = 18 - 0{,}3x + 0{,}003x^2$.

Оцінити відносну похибку обчислення витрат бензину при швидкості $x = 90$ км/год з точністю до 5 %.

Знайдемо еластичність функції (за абсолютною величиною)

$$|E_x(y)| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \left|\frac{x(-0{,}3 + 0{,}006x)}{18 - 0{,}3x + 0{,}003x^2}\right|.$$

При $x = 90$ $|E_{x=90}(y)| = 1{,}41$, і за формулою (7) відносна похибка $\delta y = 1{,}41 \cdot 5 \approx 7{,}1\%$.

6.9. З якою точністю можна обчислити об'єм кулі, якщо її радіус виміряний з точністю до 2 %?

Об'єм кулі радіуса x $f(x) = \frac{4}{3}\pi x^3$. Знайдемо $f'(x) = 4\pi x^2$:

$$|E_x(f)| = \left|\frac{xf'(x)}{f(x)}\right| = \frac{x4\pi x^2}{\frac{4}{3}\pi x^3} = 3,$$

і за формулою (7)

$$\delta y \approx 3\delta x = 3 \cdot 2 = 6\ \%.$$

Значним недоліком застосування диференціала в наближених розрахунках є неможливість обчислення значень функцій з наперед заданою точністю. Цього недоліку немає при використанні рядів.

Задачі і вправи для самостійної роботи

Знайти похідні функцій.

6.10. $y = \left(\dfrac{1+x^2}{1+x}\right)^5$. **6.11.** $y = x^4(8\ln^2 x - 4\ln x + 1)$.

6.12. $y = 3x^3 \ln x - x^3$. **6.13.** $y = \sqrt[4]{2+e^{4x}} + \sqrt{3}$.

6.14. $y = \ln \dfrac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. **6.15.** $y = \sqrt[4]{(1+3x^2)^3}$.

6.16. $y = x^3 \ln^2 x$. **6.17.** $y = \ln \dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{x+1}$.

6.18. $y = e^{\sqrt{2x}}(\sqrt{2x} - 1)$. **6.19.** $y = \ln(3x^2 + \sqrt{9x^4+1})$.

6.20. $y = \sin(x^3 + 2^x)$. **6.21.** $y = \ln \operatorname{tg} \dfrac{2x+1}{4}$.

6.22. $y = \ln \sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$. **6.23.** $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$.

6.24. $y = 10^{x\operatorname{tg}x}$. **6.25.** $y = \dfrac{1}{2}\ln \operatorname{tg} \dfrac{x}{2} - \dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

6.26. $y = 2\arcsin \dfrac{x-2}{\sqrt{6}} - \sqrt{2+4x-x^2}$.

6.27. $y = \cos x\sqrt{1+\sin^2 x}$. **6.28.** $y = \sqrt{1-x^2}\arccos x$.

6.29. $y = \operatorname{arc\,tg}\sqrt{4x^2-1}$. **6.30.** $y = \log_2 \sin^2 x$.

6.31. $y = -\operatorname{ctg}^2 \dfrac{x}{2} - 2\ln\sin\dfrac{x}{2}$.

Знайти похідні функцій і обчислити їх значення при $x = x_0$.

6.32. $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$, $x_0 = 1$.

6.33. $y = \dfrac{2x^3 - 3x + \sqrt{x} - 1}{x}$, $x_0 = \dfrac{1}{4}$.

6.34. $y = \sin x e^{\cos x}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$. **6.35.** $y = \ln \sqrt[4]{\frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}}$, $x_0 = 0$.

6.36. Скласти рівняння дотичної до кривої $y = x^2 - 2x$:
а) в точках перетину її з прямою $3x + y - 2 = 0$;
б) паралельної цій прямій і перпендикулярної до неї.
6.37. Знайти кут між кривими $y = x - x^3$ і прямою $y = 5x$.

6.38. Тіло рухається прямолінійно за законом $s(t) = \frac{4t+3}{t+3}$, де s вимірюється в метрах, а t — у секундах. Знайти швидкість і прискорення тіла в момент $t = 6$.

Знайти похідні від неявних функцій.

6.39. $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

6.40. $\sin(y - x^2) - \ln(y - x^2) + 2\sqrt{y - x^2} - 3 = 0$.

6.41. $x^{y^2} + y^2 \ln x - 4 = 0$. **6.42.** $x \sin y + y \sin x = 0$.

Знайти похідні від функцій, заданих параметрично.

6.43. $\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t. \end{cases}$ **6.44.** $\begin{cases} x = e^{-t}\sin t, \\ y = e^{t}\cos t. \end{cases}$

6.45. Знайти приріст і диференціал функції $y = x^2 + 2x + 3$ у точці $x = 1$ при $\Delta x = 0{,}2$.

6.46. Обчислити приріст і диференціал функції $y = x^3 - x$ у точці $x = 2$ при

а) $\Delta x = 0{,}01$; б) $\Delta x = 0{,}1$.

6.47. Знайти абсолютну похибку $|\Delta y - dy|$ і відносну похибку $\left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right|$, які допускаються при заміні приросту функції її диференціалом в задачі 6.46.

6.48. Знайти диференціали заданих функцій:

а) $y = \sqrt{\arcsin x} + (\mathrm{arctg}x)^2$;

б) $y = 2^{-\frac{1}{\cos x}}$; в) $y = \frac{\cos x}{1 - x^2}$.

6.49. Використовуючи поняття диференціала, обчислити:

а) $\arcsin 0{,}51$; б) $\cos 61^\circ$; в) $\sqrt[5]{33}$; г) $e^{1{,}03}$.

6.50. Використовуючи поняття диференціала, з'ясувати, з якою точністю необхідно виміряти радіус круга, щоб його площу можна було визначити з точністю до 10 %?

Використовуючи поняття диференціала, визначити, на скільки процентів зміниться величина степеня $2{,}1^{3{,}1}$ при зміні основи степеня на 5 %.

6.51. Обсяг продукції U (ум. од.) цеху протягом робочого дня є функцією

$$U = -t^3 - 5t^2 + 75t + 425,$$

де t — час, год. Знайти продуктивність праці через 2 год. після початку роботи.

6.52. Залежність між витратами виробництва y (гр. од.) і обсягом продукції, що виробляється, x (од.) виражається функцією

$$y = 10x - 0{,}04x^3.$$

Визначити середні і граничні витрати при обсязі продукції, що дорівнює 5 од.

6.53. Функції попиту g і пропозиції s від ціни p виражаються відповідно рівняннями

$$g = 7 - p \text{ і } s = p + 1.$$

Знайти:

а) рівноважну ціну;

б) еластичність попиту і пропозиції для цієї ціни;

в) зміну доходу (в процентах) при підвищенні ціни на 5 % від рівноважної.

Відповіді до глави 6

6.10. $\dfrac{5(x^2+2x-1)(1+x^2)^4}{(1+x)^6}$. **6.11.** $32x^3 \ln^2 x$.

6.12. $9x^2 \ln x$. **6.13.** $\dfrac{e^{4x}}{\sqrt[4]{(2+e^{4x})^3}}$. **6.14.** $\dfrac{2x^4-3x^2-1}{x(x^4-1)}$.

6.15. $\dfrac{9x}{2\sqrt[4]{1+3x^2}}$. **6.16.** $x^2 \ln x(3\ln x + 2)$. **6.17.** $\dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

6.18. $e^{\sqrt{2x}}$. **6.19.** $\dfrac{6x}{\sqrt{9x^4+1}}$. **6.20.** $(3x^2 + 2^x \ln 2)\cos(x^3 + 2^x)$.

6.21. $\cos\,ec\dfrac{2x+1}{2}$. **6.22.** $\dfrac{1}{\cos x}$. **6.23.** $2^{\frac{x}{\ln x}}\cdot\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}\cdot\ln 2$.

6.24. $10^{x\mathrm{tg}x}\cdot\ln 10\left(\mathrm{tg}x+\dfrac{x}{\cos^2 x}\right)$. **6.25.** $\dfrac{1}{\sin^3 x}$.

6.26. $\dfrac{x}{\sqrt{2+4x-x^2}}$. **6.27.** $-\dfrac{2\sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$.

6.28. $-\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\arccos x\right)$. **6.29.** $\dfrac{1}{x\sqrt{4x^2-1}}$.

6.30. $\dfrac{2}{\ln 2}\cdot\mathrm{ctg}x$. **6.31.** $\mathrm{ctg}^3\dfrac{x}{2}$. **6.32.** 0. **6.33.** 13.

6.34. $e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$; -1. **6.35.** $\dfrac{1}{2\cos 2x}$; 0,5.

6.36. а) $y+1=0$; $6x+y+4=0$; б) $12x+4y+1=0$;

$12x-36y-49=0$. **6.37.** $\mathrm{tg}\varphi=\dfrac{2}{3}$. **6.38.** 0,13 м/с; $-0{,}026$ м/с^2.

6.39. $y'=(x^2-yx-y^2)$. **6.40.** $y'=2x$. **6.41.** $y'=-\dfrac{y}{2x\ln x}$.

6.42. $y'=-\dfrac{y\cos x+\sin y}{x\cos y+\sin x}$. **6.43.** $-\mathrm{ctg}t$. **6.44.** e^{2t}.

6.45. $\Delta y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,2}}=0{,}84$. $dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0,2}}=0{,}8$;

6.46. $\Delta y=(3x^2-1)\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$; $dy=(3x^2-1)dx$;

а) $\Delta y=0{,}110601$, $dy=0{,}11$; б) $\Delta y=1{,}161$, $dy=1{,}1$.

6.47. а) $|\Delta y-dy|=0{,}000601$; $\left|\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=0{,}0055$;

б) $|\Delta y-dy|=0{,}061$; $\left|\dfrac{\Delta y-dy}{\Delta y}\right|=0{,}0526$.

6.48. а) $\left(\frac{1}{2\sqrt{\arcsin x(1-x^2)}}+\frac{2\mathrm{arctg}x}{1+x^2}\right)dx;$

б) $-2^{-\frac{1}{\cos x}}\cdot\ln 2\cdot\frac{\sin x}{\cos^2 x}dx;$ в) $\frac{(x^2-1)\sin x+2x\cos x}{(1-x^2)^2}dx.$

6.49. а) 0,513; б) 0,485; в) 2,0125; г) $1{,}03e\approx 2{,}8$.

6.50. 5%; 15,5%. **6.51.** 43 од./год. **6.52.** 9 гр. од.; 7 гр. од.

6.53. а) 3 гр. од.; б) $E_p(g)=-0{,}75$; $E_p(s)=1$; в) +1,25 %.

Глава 7. Застосування похідних до дослідження функцій

§ 1. Загальні властивості функцій, неперервних на замкненому проміжку

Наводимо без доведення дві теореми, які виражають істотні властивості, притаманні неперервним функціям. У подальшому при доведенні теорем спиратимемося на ці теореми як на очевидні факти.

Теорема 1 (про найбільше й найменше значення функції). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$, то вона набуває на цьому проміжку принаймні один раз своєї найбільшої і своєї найменшої величини.*

Строге доведення цієї теореми (як і наступної) грунтується на теорії дійсних чисел. Ми обмежимося поясненням її змісту, використавши при цьому геометричне зображення функцій.

Теорема твердить, що коли функція $f(x)$ неперервна на проміжку $[a, b]$, то існує на ньому принаймні одна така точка x_1 (рис. 47), що для всіх значень x з проміжку $a \le x \le b$ виконуватиметься нерівність

$$f(x) \le f(x_1).$$

Значення $f(x_1)$ — це найбільша величина функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$; її позначають літерою M:

$$f(x_1) = M.$$

За тих самих умов теорема твердить про існування принаймні однієї такої точки x_2 на проміжку $[a, b]$, що для всіх значень x з розглянутого проміжку виконуватиметься нерівність

$$f(x_2) \le f(x).$$

Значення $f(x_2)$ — це найменша величина функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$; її позначають літерою m.

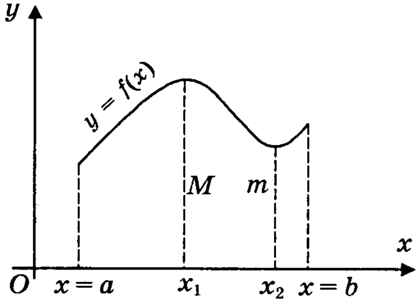

Рис. 47

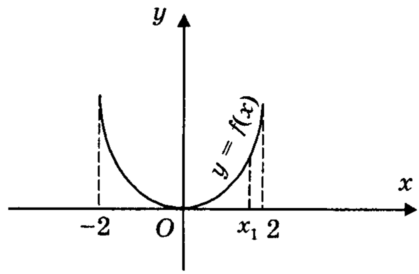

Рис. 48

Може здатися, що твердження теореми зовсім очевидне і тривіальне. Однак досить взяти відкритий проміжок (a, b) — і ми переконаємося, що теорема стає неправильною. Розглянемо, наприклад, неперервну функцію $f(x) = x^2$ (рис. 48) на відкритому проміжку $(-2, 2)$. Вона набуває найменшої величини (нуль) у точці $x = 0$, але не можна вказати таку точку, для якої функція має найбільшу величину. Справді, яку б не взяли ми точку x_1 лівіше правого кінця $x = 2$ (або праворуч лівого кінця $x = -2$), завжди знайдеться інша точка, наприклад $x_2 = \dfrac{x_1 + 2}{2}$ (посередині між $x = x_1$ та $x = 2$), в якій функція $y = x^2$ має більшу величину, аніж у точці $x = x_1$. Якщо б точки $x = -2$ та $x = 2$ не були виключені, тобто якщо б ми розглядали функцію $y = x^2$ на замкненому проміжку $[-2, 2]$, існувала б найбільша величина функції 4 ($f(x) = 4$) аж у двох точках: $x = -2$ та $x = 2$.

Якщо взяти, наприклад, функцію $y = x$, яка є неперервною в будь-якому відкритому проміжку, то неважко переконатися, що вона не досягає в ньому ні найбільшого, ні найменшого значення.

Теорема 2. *Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$ і має на його кінцях протилежні знаки, тобто $f(a) \cdot f(b) < 0$, то вона принаймні один раз стає нулем всередині цього проміжку.*

Припустимо, що $f(x)$ — неперервна функція на проміжку $[a, b]$ і що $f(a) > 0$, а $f(b) < 0$ (рис. 49).

Теорема твердить, що існує принаймні одна точка ξ всередині проміжку $[a, b]$ така, що $f(\xi) = 0$. З рис. 49 видно, що перехід функції від додатного значення $f(a)$ до значення $f(b)$, зважаючи на неперервність кривої — графіка неперервної функції, відбудеться з обов'язковим перетином осі Ox принаймні в одній точці ξ. Розривні функції (рисунок 50), взагалі кажучи, не мають цієї властивості. З теореми 2 як наслідок випливає третя важлива теорема про неперервність функції.

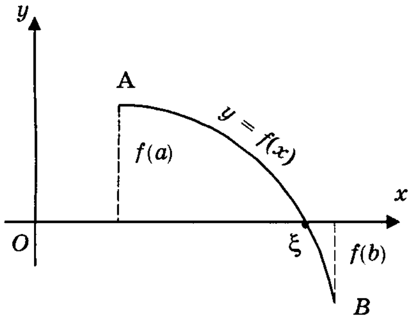

Рис. 49

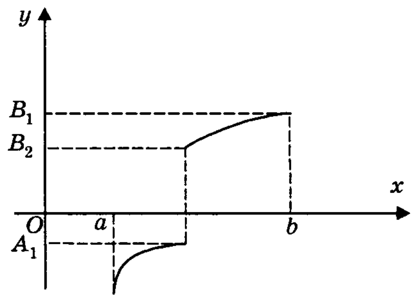

Рис. 50

Теорема 3 (про проміжні значення функції). *Якщо функція $f(x)$ неперервна на замкненому проміжку $[a, b]$ і має на його кінцях нерівні між собою значення $f(a) = A$ і $f(b) = B$, то всередині проміжку вона набуває принаймні один раз будь-якого числа C, що міститься між A та B.*

Доведення. Нехай $A < B$ (припущення $B < A$ не змінює суті міркувань). Тоді $A < C < B$.

Запровадимо допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - C.$$

На проміжку $[a, b]$ ця функція неперервна, бо неперервна на ньому, за припущенням, $f(x)$. Однак $F(a) = f(a) - C = A - C < 0$ і $F(b) = f(b) - C = B - C > 0$. Отже, за теоремою 2 функція $F(x)$ стає нулем при деякому $x = \xi$. Тому

$$F(\xi) = f(\xi) - C = 0,$$

тобто $f(\xi) = C$. Це й треба було довести.

Геометричний зміст цієї теореми такий: будь-яка пряма $y = C$, паралельна осі Ox, перетне графік функції $f(x)$ принаймні в одній точці, якщо тільки C міститься між $A = f(a)$ та $B = f(b)$. На рис. 51 маємо три таких точки: ξ_1, ξ_2 та ξ_3.

Теорему 3 часто формулюють так: *неперервна функція, переходячи від одного значення до іншого, набуває усіх проміжних значень.*

Звичайно, розривна функція не має такої властивості. Між значеннями A_1 та B_2 (рис. 50) немає значення функції (вона їх не набуває), зображеної на цьому рисунку.

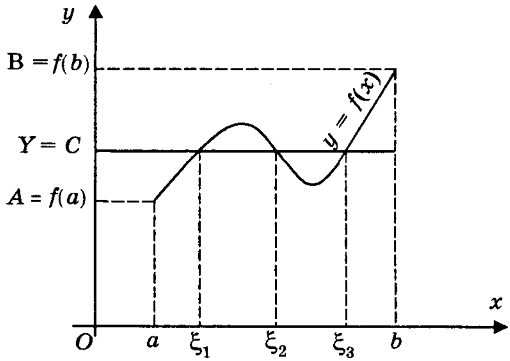

Рис. 51

Теорему 2 можна застосувати до наближеного обчислення коренів рівняння. Значення $x = x_0$, при якій функція $f(x)$ стає нулем, зветься коренем функції або коренем рівняння $f(x) = 0$.

§ 2. Теореми про середнє значення

Дослідження функцій за допомогою похідних грунтуються на деяких основних теоремах диференціального числення.

Теорема Ролля. *Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$, диференційовна на інтервалі (a,b) і $f(a) = f(b)$. Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a,b)$ така, що $f'(c) = 0$.*

Д о в е д е н н я. За теоремою 1 неперервна на $[a,b]$ функція $f(x)$ набуває на ньому найбільшого значення M і найменшого значення m.

Якщо $m = M$, то $f(x)$ — стала для всіх $x \in (a,b)$ і за точку $c \in (a,b)$ можна взяти будь-яку точку інтервалу (a,b).

Якщо $m < M$, то принаймні одне із значень m або M досягається у внутрішній точці c відрізку $[a, b]$, тобто в точці, яка належить інтервалу (a,b). Нехай, наприклад, у точці c функція $f(x)$ набуває найменшого значення. Доведемо, що $f'(c) = 0$. Дійсно, для досить малих $\Delta x \neq 0$ точка $c + \Delta x \in (a,b)$, причому

$$\Delta f(c) = f(c + \Delta x) - f(c) \geq 0.$$

Тому при $\Delta x > 0$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0 \text{ і } f'_{+}(c) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \geq 0,$$

а при $\Delta x < 0$

$$\frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \le 0 \text{ і } f'_-(c) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta f(c)}{\Delta x} \le 0.$$

Оскільки функція $f(x)$ диференційовна в точці c, то $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c) = 0$. Теорему доведено.

Геометрично теорема Ролля означає, що серед усіх дотичних до графіка функції $y = f(x)$ знайдеться принаймні одна, паралельна осі Ox.

У точці c функція $f(x)$ набуває найменшого значення (рис. 52).

Теорема Лагранжа. *Нехай функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a,b]$ і диференційовна на інтервалі (a, b). Тоді існує принаймні одна точка $c \in (a,b)$ така, що*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c).$$

Доведення. Розглянемо на $[a,b]$ допоміжну функцію

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Очевидно, $F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля. Вона неперервна на $[a,b]$ як різниця двох неперервних на $[a,b]$ функцій $f(x)$ і $f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$; диференційовна на (a,b), причому $F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ і $F(a) = F(b) = 0$.

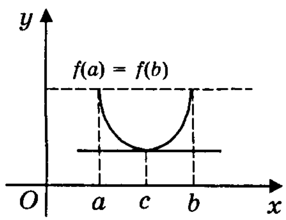

Рис. 52

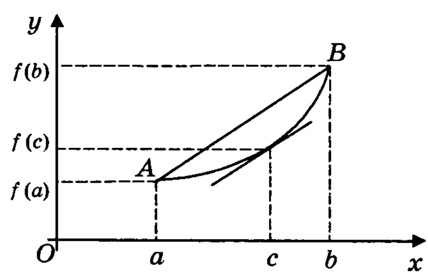

Рис. 53

Отже, за теоремою Ролля існує принаймні одна точка $c \in (a,b)$ така, що $F'(c) = 0$, тобто

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Звідси $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$, що й потрібно було довести.

Геометрично теорема Лагранжа означає, що серед усіх дотичних до графіка функцій $y=f(x)$ знайдеться принаймні одна, паралельна січній AB, яка сполучає точки $A(a,f(a))$ і $B(b,f(b))$. Справді (рис. 53), відношення $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ є кутовим коефіцієнтом січної AB, а $f'(c)$ — кутовим коефіцієнтом дотичної до графіка, проведеної в точці $(c,f(c))$. Ці коефіцієнти рівні, отже, дотична і січна AB дійсно паралельні.

З а у в а ж е н н я 1. Теорема Ролля є окремим випадком теореми Лагранжа, якщо $f(a)=f(b)$.

З а у в а ж е н н я 2. Рівність $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a), c\in(a,b)$ називається *формулою Лагранжа*. Її можна записати й трохи інакше. Очевидно, що $c=a+\theta(b-a)$, де $0<\theta<1$. Отже, $f(b)-f(a)=$ $=f'(a+\theta(b-a))(b-a)$, де $0<\theta<1$.

Прийнявши $a=x, b=x+\Delta x$, матимемо

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\Delta x)\Delta x,$$

де $0<\theta<1$.

Наслідок. Нехай функція $f(x)$ диференційовна на проміжку X і $f'(c)=0$ при будь-якому $x\in X$, тоді $f(x)$ на X — стала. Дійсно, нехай x_0 — фіксована точка X, а x — його довільна точка. За теоремою Лагранжа $f(x)-f(x_0)=f'(c)\cdot(x-x_0)$, де c — деяка точка, яка знаходиться між x_0 і x. Оскільки $f'(x)$ при будь-якому $x\in X$, то $f'(c)=0$, а тому $f(x)=f(x_0)=C$ при всіх $x\in X$.

Теорема Коші. *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *неперервні на відрізку* $[a, b]$ *і диференційовні на інтервалі* (a,b), *причому* $g'(x)\neq 0$ *в усіх точках* $x\in(a,b)$. *Тоді існує принаймні одна точка* $c\in(a,b)$ *така, що*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Д о в е д е н н я. Спочатку зауважимо, що $g(b)-g(a)\neq 0$, оскільки у протилежному випадку $(g(b)=g(a))$. Згідно з теоремою Ролля, для функції $g(x)$ знайдеться принаймні одна точка $c\in(a,b)$ така, що $g'(c)=0$. А це суперечить тому, що $g'(c)\neq 0$ в усіх точках (a,b). Далі розглянемо на $[a,b]$ допоміжну функцію

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Очевидно, $F(x)$ задовольняє всі вимоги теореми Ролля. Вона неперервна на $[a, b]$ як різниця двох неперервних на $[a, b]$ функцій $f(x)$

і $f(a)+\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$; диференційовна на (a, b), причому

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)$$

і $F(a)=F(b)=0$.

Отже, за теоремою Ролля, існує принаймні одна точка $c\in(a,b)$ така, що $F'(c)=0$, тобто

$$f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0.$$

Звідси, оскільки $g'(c)\neq 0$, дістанемо формулу Коші

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\quad c\in(a,b),$$

що й потрібно довести.

З а у в а ж е н н я. Теорема Лагранжа є окремим випадком теореми Коші, якщо $g(x)=x$.

§ 3. Правила Лопіталя

При дослідженні функцій часто виникає потреба знаходити границі дробу $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, чисельник і знаменник якого при $x\to a$ прямують до нуля або до нескінченності. Знаходження таких границь називають *розкриттям невизначеностей*. Найбільш простими й ефективними методами розкриття невизначеностей є правила Лопіталя.

Теорема 1 (перше правило Лопіталя). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *диференційовні на інтервалі* (a, b); $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\lim\limits_{x\to a+0}g(x)=0$ *і* $g'(x)\neq 0$ *на* (a, b). *Тоді якщо існує (скінченна або нескінченна) границя*

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

то границя $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ також існує і $\lim\limits_{x\to a+0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=K$.

Д о в е д е н н я. Нехай $x\in(a,b)$ і $-\infty<K<+\infty$. Довизначимо функції $f(x)$ і $g(x)$ у точці a, поклавши $f(a)=g(a)=0$. Тоді вони, очевидно, стануть неперервними на відрізку $[a,x]$ і задовольнятимуть на ньому всі вимоги теореми Коші (див. § 2). А тому знайдеться така точка $c\in(a,x)$, що

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Якщо $x \to a+0$, то й $c \to a+0$. Переходячи до границі в останній рівності, маємо

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c\to a+0} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K,$$

що й потрібно довести.

З а у в а ж е н н я 1. Теорема 1 доведена для правих границь. Вона лишається істинною й для лівих і до границі взагалі.

З а у в а ж е н н я 2. Твердження теореми 1 залишається в силі, якщо $a = \infty(\pm\infty)$. Дійсно, візьмемо, наприклад, $a = \infty$. Нехай $t = \frac{1}{x}$ і $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$, $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$, тоді

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0} \frac{F(t)}{G(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{F'(t)}{G'(t)} = \lim_{t\to 0} \frac{-\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right)}{-\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

При розкритті невизначеностей іншого типу діє теорема, яка наводиться без доведення.

Теорема 2 (друге правило Лопіталя). *Нехай функції* $f(x)$ *і* $g(x)$ *диференційовні на інтервалі* (a, b); $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} g(x) = \infty$ *і* $g'(x) \neq 0$ *на* (a, b). *Тоді, якщо існує (нескінченна або скінченна) границя* $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = K$, *то границя* $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *також існує і* $\lim\limits_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = K$.

Зауваження до теореми 1 залишаються в силі і для теореми 2.

Трапляється, що для похідних $f'(x)$ і $g'(x)$ виконуються умови однієї з теорем; тоді правила Лопіталя можна застосовувати повторно:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}.$$

Взагалі при виконанні відповідних умов цю процедуру можна застосовувати кілька разів.

Теореми 1 і 2 застосовуються до випадків, коли обидві функції $f(x)$ і $g(x)$ при $x \to a$ прямують одночасно до нуля або до нескінченності.

Відповідно знаходження $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ називають *розкриттям невизначеностей* типу $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$.

За допомогою тотожних перетворень до основних випадків $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ можна звести й невизначеності інших типів: $0\cdot\infty, \infty-\infty, 0^0, 1^\infty$.

Невизначеність $0\cdot\infty$, тобто добуток $f(x)g(x)$, де $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, зводиться до вигляду $\dfrac{0}{0}$ або $\dfrac{\infty}{\infty}$ за формулами

$$f(x)g(x)=f(x):\frac{1}{g(x)},\ \text{або}\ f(x)g(x)=g(x):\frac{1}{f(x)}.$$

Невизначеність $\infty-\infty$ зводиться до вигляду $\dfrac{0}{0}$ за допомогою перетворення

$$f(x)-g(x)=\left[\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\right]:\frac{1}{f(x)g(x)}.$$

Невизначеності $0^0, 1^\infty, \infty^0$ мають місце при розгляді функцій $[f(x)]^{g(x)}$, якщо функція $f(x)$ прямує відповідно до 0, 1 і $+\infty$, а $g(x)$ — відповідно до $0, \infty$ і 0, якщо $x\to a$. Як правило, використовується рівність

$$[f(x)]^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$$

і справа зводиться до розкриття невизначеності вигляду $0\cdot\infty$ у показнику.

Приклад 1. Знайти такі границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg}5x}$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}$.

а) Чисельник і знаменник прямують до нуля, якщо $x\to 0$, а тому маємо невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$. Використаємо правило Лопіталя, тобто розглянемо границю відношення похідних заданих функцій:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\operatorname{arctg}5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{\frac{1}{1+25x^2}\cdot 5}=\frac{2}{5},$$

оскільки $e^{2x}\to 1$ і $\dfrac{1}{1+25x^2}\to 1$, якщо $x\to 0$.

б) Невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$. Застосовуючи двічі формулу Лопіталя, дістанемо

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln^2 x}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2\ln x}{x}}{3x^2}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^3}=\frac{2}{3}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{3x^2}=0.$$

На кожному етапі застосування правила Лопіталя слід користуватися тотожними перетвореннями, які спрощують відношення, а також комбінують це правило з будь-якими іншими способами обчислення границь.

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos^2 x}-\cos x}{3x^2}=\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x^2\cos^2 x}.$

Звільнимо знаменник дробу від множника $\cos^2 x$, оскільки він має границю 1 при $x\to 0$. Розкладемо чисельник як різницю кубів

$$1-\cos^3 x=(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)$$

і звільнимо чисельник від множника $(1+\cos x+\cos^2 x)$, який має границю 3 при $x\to 0$. Після таких спрощень дістанемо

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\frac{1}{2}.$$

Використовуючи першу важливу границю, отримаємо остаточну відповідь $\dfrac{1}{2}$ вже без правила Лопіталя.

Приклад 2. Знайти границі:

а) $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^2\ln x)$;

б) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)$;

в) $\displaystyle\lim_{x\to 0}x^{\sin x}$;

г) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\operatorname{tg}x)^{2x-\pi}$;

д) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2x}$.

а) Тут ми маємо невизначеність типу $0\cdot\infty$. Представимо добуток у вигляді частки, а потім, здобувши невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to0}(x^2\ln x)=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to0}x^2=0.$$

б) Це невизначеність типу $\infty-\infty$. Для того щоб знайти границю функції, приведемо дроби до загального знаменника, а потім, отримавши невизначеність типу $\dfrac{0}{0}$, застосуємо правило Лопіталя:

$$\lim_{x\to0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\lim_{x\to0}\frac{e^x}{e^x(2+x)}=\frac{1}{2}.$$

в) Це невизначеність типу 0^0. Позначимо дану функцію через y, тобто $y=x^{\sin x}$, і прологарифмуємо її:

$$\ln y=\sin x\ln x=\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}.$$

Обчислимо границю логарифма даної функції, застосовуючи правило Лопіталя (тут маємо невизначеність типу $\dfrac{\infty}{\infty}$):

$$\lim_{x\to0}\ln y=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}\cdot\cos x}=-\lim_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}=$$

$$=-\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\sin x\cdot\frac{1}{\cos x}\right)=0.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to0}y=e^0=1$.

г) Це невизначеність типу ∞^0. Візьмемо $(\mathrm{tg}x)^{2x-\pi}=y$ і прологарифмуємо:

$$\ln y=(2x-\pi)\ln\mathrm{tg}x=\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\frac{1}{2x-\pi}}.$$

Застосувавши правило Лопіталя, дістанемо:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln y=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln\mathrm{tg}x}{\frac{1}{2x-\pi}}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{\mathrm{tg}x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}}{-\frac{1}{(2x-\pi)^2}\cdot2}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^2}{2\sin x\cos x}.$$

Звільнимо знаменник від множника $\sin x$, оскільки він прямує до 1, якщо $x \to \frac{\pi}{2}$:

$$-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)^2}{2\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] = -\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2(2x-\pi)\cdot 2}{-2\sin x} = 0,$$

тобто $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} y = e^0 = 1.$

д) Це невизначеність типу 1^∞. Введемо позначення

$$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}.$$

Тоді $\ln y = 2x \cdot \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ є невизначеністю типу $\infty \cdot 0$. Перетворимо вираз $\ln y$ до вигляду

$$\ln y = 2\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Згідно з правилом Лопіталя отримаємо

$$\lim_{x\to+\infty} \ln y = 2\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = 2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 2.$$

Отже, $\lim\limits_{x\to+\infty} y = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x} = e^2.$

§ 4. Дослідження функцій

Умови монотонності функцій

Означення 1. *Функція $f(x)$ називається зростаючою (спадною) на деякому проміжку X, якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$ $(x_1 < x_2)$ виконано нерівність $f(x_1) < f(x_2)$ (відповідно $f(x_1) > f(x_2)$).*

Теорема 1 (достатні умови монотонності). *Якщо функція $f(x)$ диференційовна на проміжку X і $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ на X, то функція $f(x)$ зростаюча (спадна) на цьому проміжку.*

Доведення. Нехай для конкретності $f'(x) > 0$ на X і x_1, x_2 — будь-які точки з X, причому $x_1 < x_2$. За формулою Лагранжа $f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\cdot(x_2 - x_1)$, де $c \in (x_1, x_2)$.

Оскільки $f'(c) > 0$ і $x_2 - x_1 > 0$, то $f(x_2) - f(x_1) > 0$, або $f(x_1) < f(x_2)$, тобто функція $f(x)$ зростає на X.

Випадок, якщо $f'(x) < 0$ на X, досліджується аналогічно.

Умови локального екстремуму

Означення 2. *Точка x_0 називається точкою строгого локального мінімуму (максимуму) функції $f(x)$, якщо при всіх $x \neq x_0$ з деякого δ-околу точки x_0 виконується нерівність*

$$f(x) > f(x_0) \qquad (f(x) < f(x_0)).$$

Аналогічно, якщо в деякому δ-околі точки x_0 виконується нерівність

$$f(x) \geq f(x_0) \qquad (f(x) \leq f(x_0)),$$

то точка x_0 називається *точкою локального мінімуму (максимуму)*. Часто для скорочення слово локальний не вживають.

Точки мінімуму й максимуму функції називають точками екстремуму, а значення функції в цих точках — її екстремумами.

Теорема 2 (необхідні умови екстремуму). *Якщо точка x_0 є точкою екстремуму функції $f(x)$ і в цій точці функція диференційовна, то $f'(x_0) = 0$.*

Доведення. Нехай для конкретності x_0 — точка максимуму; тоді при досить малих Δx ($|\Delta x| < \delta$) $f(x_0) \geq f(x_0 + \Delta x)$ і $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$, а отже,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0,$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0.$$

Оскільки функція $f(x)$ диференційовна в точці x_0, то

$$f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = 0.$$

Випадок, коли x_0 — точка мінімуму, досліджується аналогічно.

Теорема 2 має простий геометричний зміст: дотична до графіка диференційовної функції у відповідній точці паралельна осі Ox.

Зауваження 1. Якщо $f'(x) = 0$, то звідси ще не випливає, що x_0 — точка екстремуму. Наприклад, для функції $f(x) = x^3$ похідна $f'(x) = 3x^2$ і $f'(0) = 0$. Проте $x_0 = 0$, очевидно, не є точкою екстремуму.

Зауваження 2. Точка x_0, в якій функція $f(x)$ недиференційовна, також може бути точкою екстремуму. Наприклад, функція $f(x) = |x|$ не має похідної в точці $x_0 = 0$, але ця точка є для неї точкою мінімуму.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю, називаються *стаціонарними*. Стаціонарні точки, а також точки, де функція визначена, але її похідна не існує, називаються *критичними*. Саме серед них слід шукати точки екстремуму.

Теорема 3 (достатні умови строгого екстремуму першого типу). *Нехай функція* $f(x)$ *неперервна в деякому* δ*-околі точки* x_0: $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, *диференційовна у ньому, крім, можливо, самої точки* x_0. *Тоді, якщо* $f'(x) < 0$ $(f'(x) > 0)$ *при* $x_0 - \delta < x < x_0$ *і* $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ *при* $x_0 < x < x_0 + \delta$, *то точка* x_0 *є точкою строгого мінімуму (максимуму).*

Коротко цю теорему формулюють так: якщо в точці x_0 похідна змінює знак з "мінуса" на "плюс" (з "плюса" на "мінус"), то x_0 — точка строгого мінімуму (максимуму).

Доведення. Нехай для конкретності $f'(x) < 0$ при $x_0 - \delta < x < x_0$ і $f'(x) > 0$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Спочатку розглянемо $x \in (x_0 - \delta; x_0)$. Застосуємо формулу Лагранжа до функції $f(x)$ на відрізку $[x, x_0]$. Маємо

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0),$$

де $c \in (x_0 - \delta; x_0)$. Оскільки $f'(c) < 0$ і $x - x_0 < 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$, або $f(x) > f(x_0)$ при $x_0 - \delta < x < x_0$.

Якщо $x \in (x_0; x_0 + \delta)$, то, застосовуючи формулу Лагранжа до функції $f(x)$ на відрізку $[x_0; x]$, матимемо

$$f(x) - f(x_0) = f'(d)(x - x_0),$$

де $d \in (x_0; x_0 + \delta)$. Оскільки $f'(d) > 0$ і $x - x_0 > 0$, то $f(x) - f(x_0) > 0$ або $f(x) > f(x_0)$ при $x_0 < x < x_0 + \delta$.

Отже, для будь-якого $x \neq x_0$ з δ-околу точки x_0 $f(x) > f(x_0)$, а це й означає, що точка x_0 є точкою строгого мінімуму.

Випадок зміни знаку похідної з "плюса" на "мінус" досліджується аналогічно.

Зауваження 3. Якщо $f'(x)$ має однакові знаки на інтервалах $(x_0 - \delta; x_0)$ і $(x_0; x_0 + \delta)$, то x_0 не є точкою строгого екстремуму.

Теорема 4 (друга достатня ознака екстремуму). *Якщо в околі точки* $x = x_0$ *друга похідна неперервна, причому* $f'(x_0) = 0$, *а* $f''(x_0) \neq 0$, *то функція* $f(x)$ *має в точці* $x = x_0$ *максимум, якщо* $f''(x_0) < 0$, *і мінімум, якщо* $f''(x_0) > 0$.

Доведення. Нехай $f''(x_0) < 0$. Зважаючи на неперервність $f''(x)$, існує деякий окіл точки x_0, в якому $f''(x_0) < 0$. Тому в цьому околі функція $f'(x)$ буде спадною, бо її похідна — $f''(x)$ — від'ємна. Проте при $x = x_0$ $f'(x_0) = 0$, отже при переході (зліва направо) через точку x_0 функція $f'(x)$ змінює знак з "плюса" на "мінус". А це означає, що в точці x_0 функція має максимум.

Аналогічно доводиться що коли $f'(x_0) = 0$ і $f''(x_0) > 0$, то $f(x_0)$ — мінімум функції $f(x)$.

Якщо в деякій критичній точці $x = x_1$ $f''(x_1) = 0$, то друге правило не застосовне і дослідження слід проводити за допомогою першої похідної (спираючись на теорему 3).

Приклад 1. Дослідити на максимуми та мінімуми

$$f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 + 2.$$

1. Знаходимо похідну $f'(x) = 5x^4 - 20x^3 + 15x^2$.

2. Прирівнюємо похідну до нуля і знаходимо її корені, тобто критичні точки:

$$x^4 - 4x^3 + 3x^2 = 0,\ x^2(x^2 - 4x + 3) = 0,\ x_{1,2} = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = 3.$$

3. Обчислюємо другу похідну

$$f''(x) = 20x^3 - 60x^2 + 30x.$$

4. Підставляючи у вираз другої похідної знайдені корені першої похідної, дістанемо

$f''(0) = 0$ (правило не застосовне), $f''(1) = -10 < 0$ (максимум), $f''(3) = 90 > 0$ (мінімум).

Через те що при $x_0 = 0$ $f''(x_0) = 0$, вдаємося до першого правила. Маємо при $x < 0$ $f'(x) = 5x^2(x-1)(x-3) > 0$, при $x > 0$ (але $x < 1$) $f'(x) = 5x^2(x-1)(x-3) > 0$.

Похідна не змінює знака, екстремуму в точці $x = 0$ немає.

За допомогою теорії максимумів та мінімумів функції розв'язуються численні задачі з геометрії, економіки, механіки тощо.

Знаходження найменшого й найбільшого значень. Зупинимося на питанні про відшукання найменшого й найбільшого значень функції $f(x)$, неперервної на відрізку $[a, b]$. За теоремою 1 (див. § 1), така функція обов'язково набуде цих значень у деяких точках $[a, b]$. Це можуть бути як внутрішні точки відрізка, так і його кінці.

Отже, для відшукання найменшого (найбільшого) значення неперервної на $[a, b]$ функції $f(x)$ потрібно знайти її локальні екстремуми на (a, b) і порівняти їх із значеннями $f(a)$, $f(b)$. Найменше (найбільше) із цих значень і буде найменшим (найбільшим) значенням функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Може статися, що функція $f(x)$ на (a, b) зовсім не має точок екстремуму. В цьому випадку її найменше (найбільше) значення буде серед значень $f(a)$ і $f(b)$.

При практичній роботі слід мати на увазі, що оскільки найменше (найбільше) значення досягається в критичних точках або на кінцях відрізку, то не потрібно перевіряти достатні умови наявності екстремуму функції у критичних точках. Досить лише знайти значення функції в усіх критичних точках і порівняти їх із значеннями $f(a)$, $f(b)$. Найменше (найбільше) з них і буде найменшим (найбільшим) значенням функції $f(x)$ на $[a, b]$.

Приклад 2. З пункту A, який лежить на лінії прямолінійної залізниці, в пункт B, що знаходиться від цієї лінії на відстані l, потрібно перевозити вантажі. Вартості перевозу одиниці вантажу на одиницю відстані залізницею і шосе дорівнюють відповідно m і n $(m < n)$. До якої точки M лінії залізниці слід прокласти шосе, щоб транспортування вантажу з A до B було найбільш економічним?

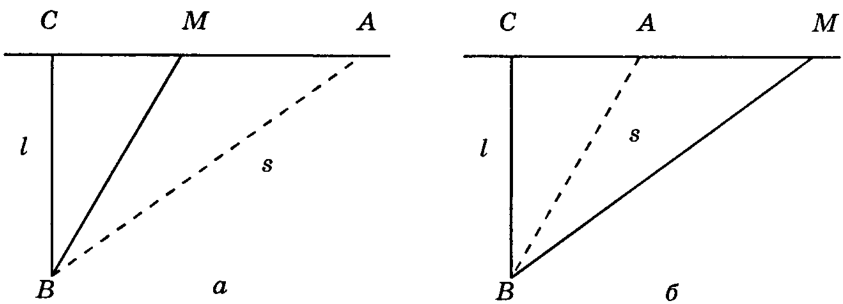

Рис. 54

Нехай $AB = s$, $BC = l$, а $CM = x$, тоді $CA = \sqrt{s^2 - l^2}$, $MA = \sqrt{s^2 - l^2} - x$ і $BM = \sqrt{l^2 + x^2}$ (рис. 54, a). Вартість перевезення k одиниць вантажу по шосе BM становить $kn\sqrt{l^2 + x^2}$, залізницею MA — відповідно $km(\sqrt{s^2 - l^2} - x)$. Загальна вартість $Q(x)$ транспортування вантажу

$$Q(x) = kn\sqrt{l^2 + x^2} + km(\sqrt{s^2 - l^2} - x).$$

Знайдемо найменше значення цієї функції при $x \in (0; \sqrt{s^2 - l^2})$. Беручи похідну

$$Q'(x) = \frac{knx}{\sqrt{l^2 + x^2}} - km = \frac{k\left(nx - m\sqrt{l^2 + x^2}\right)}{\sqrt{l^2 + x^2}}$$

і прирівнюючи її нулю, дістанемо рівняння $nx - m\sqrt{l^2 + x^2} = 0$, розв'язок якого визначає єдину критичну точку $x_0 = \dfrac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$. Легко перевірити, що похідна в цій точці змінює знак з "мінуса" на "плюс". Отже, якщо $\dfrac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}} < \sqrt{s^2 - l^2}$, тобто $CM < CA$, то при $x = x_0 = \dfrac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}}$ вартість транспортування вантажу з A в B найменша.

Якщо при $\frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}} \geq \sqrt{s^2 - l^2}$, тобто $CM \geq CA$ (рис. 54, *б*), то шосе слід, очевидно, прокласти вздовж прямої BA.

Опуклість, угнутість та точки перегину кривої. Відносно функції $f(x)$, графік якої подано на рис. 55, припускається, що вона має неперервну другу похідну.

Означення 3. *Крива зветься опуклою (угнутою) в деякій точці M, якщо в околі цієї точки лежить під (над) дотичною, проведеною в точці M* (на рис. 55 у точці M_1 крива опукла, M_2 — угнута).

Крива зветься опуклою (угнутою) на деякому проміжку, якщо вона опукла (угнута) в усіх точках цього проміжку.

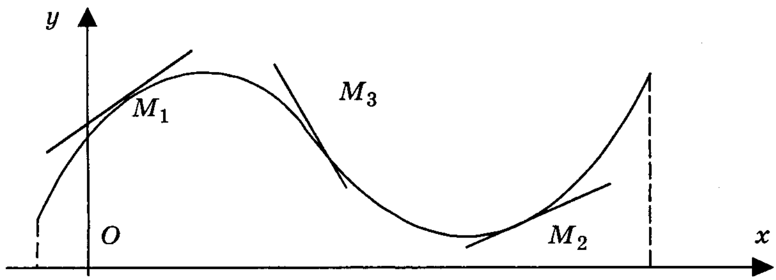

Рис. 55

При побудові графіка дуже важливо знати, на яких проміжках графік функції $f(x)$ опуклий і на яких він угнутий.

Теорема 5. *Якщо на проміжку (a, b) друга похідна функції від'ємна, то крива $y = f(x)$ опукла на цьому проміжку; якщо $f''(x)$ додатна на (a, b), то крива угнута.*

Подамо лише деякі міркування геометричного характеру. Якщо скрізь на проміжку (a, b) $f''(x) < 0$, то це означає, що сама функція $f'(x)$ спадна. Отже, спадає на розглядуваному проміжку кутовий коефіцієнт дотичної ($\operatorname{tg}\alpha$) до кривої і, звичайно, спадає й кут α, утворюваний дотичною з віссю OX (рис. 56).

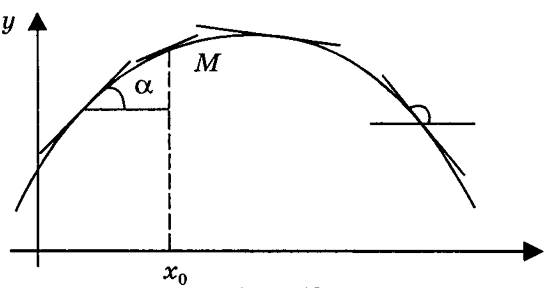

Рис. 56

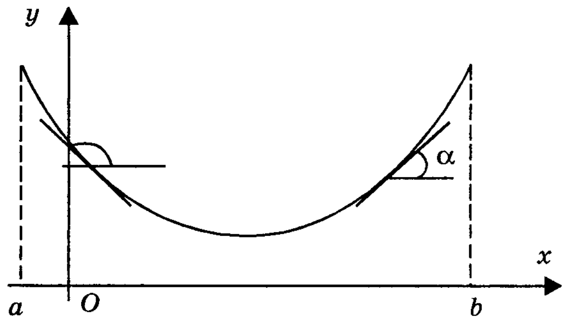

Рис. 57

Очевидно, крива в усіх точках проміжку (a, b) розташована під дотичною, тобто вона опукла.

Якщо $f''(x) > 0$, то такі самі геометричні міркування доводять, що крива буде угнутою (рис. 57).

Означення 4. *Точка, яка відокремлює опуклу частину неперервної кривої від угнутої чи навпаки, зветься точкою перегину кривої.*

На рис. 55 точка M_3 є точкою перегину. У точках перегину дотична перетинає криву, бо з одного боку від цієї точки крива лежить під дотичною, а з другого боку — над нею.

Теорема 6. *Якщо $f''(x_0) = 0$ у деякій точці $x = x_0$, а при переході через цю точку ця похідна змінює знак, то точка кривої з абсцисою x_0 є точкою перегину.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що в точці M з абсцисою $x = x_0$ $f''(x_0) = 0$ і змінює знак, наприклад з "плюса" на "мінус". Тоді ліворуч від M крива угнута $\left(f''(x) > 0\right)$, а праворуч — опукла $\left(f''(x) < 0\right)$. Отже, в точці M крива змінює угнутість на опуклість, а точка M є точкою перегину.

Приклад 3. Знайти точки перегину та визначити проміжки опуклості та угнутості кривої $y = x^3$.

Маємо $y' = 3x^2$, $\quad y'' = 6x$.

Друга похідна стає нулем при $x = 0$. Якщо $x < 0$, то $y'' < 0$; якщо $x > 0$, $y'' > 0$.

Отже, на проміжку $(-\infty; 0)$ графік опуклий, а на проміжку $(0; \infty)$ — угнутий. Точка кривої з абсцисою $x = 0$ є точкою перегину.

Приклад 4. Дослідити на точки перегину криву $y = x^4$.

Маємо $y' = 4x^3$, $\quad y'' = 12x^2$. При $x = 0$ $\quad y'' = 0$. Досліджуємо зміну знака. При $x < 0$ $\quad y'' > 0$ (крива угнута), при $x < 0$ $\quad y'' > 0$ (крива теж угнута). Друга похідна не змінює знака, крива не має точок перегину.

Асимптоти. Дослідження графіка функції в цілому. При вивченні поведінки функції, якщо $x \to +\infty(-\infty)$ або поблизу точок розриву другого роду, часто трапляється, що графік функції як завгодно близько наближається до тієї чи іншої прямої. Ці прямі називаються *асимптотами*.

Означення 5. *Пряма* $x = a$ *називається вертикальною асимптотою графіка функції* $y = f(x)$, *якщо хоча б одна з границь* $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ *або* $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ *нескінченна.*

Наприклад, пряма $x = 3$ — вертикальна асимптота графіка функції $y = \dfrac{1}{x-3}$, оскільки $\lim\limits_{x \to 3+0} \dfrac{1}{x-3} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 3-0} \dfrac{1}{x-3} = -\infty$.

Означення 6. *Пряма* $y = kx + b$ *називається похилою асимптотою графіка функції* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty(-\infty)$, *якщо*

$$\lim_{x \to +\infty}[f(x) - kx - b] = 0 \qquad \left(\lim_{x \to -\infty}[f(x) - kx - b] = 0\right).$$

Теорема 7. *Для того щоб пряма* $Y = kx + b$ *була похилою асимптотою графіка функції* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty(-\infty)$, *необхідно й достатньо, щоб існували границі*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \ \lim_{x \to +\infty}[f(x) - kx] = b,$$

$$\left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \ \lim_{x \to -\infty}[f(x) - kx] = b\right).$$

Д о в е д е н н я. *Необхідність.* Для конкретності розглядатимемо випадок, якщо $x \to +\infty$. Нехай $Y = kx + b$ — похила асимптота графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$. Оскільки

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(x) - kx - b}{x} + k + \frac{b}{x}; \qquad f(x) - kx = [f(x) - kx - b] + b,$$

то за означенням

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k; \ \lim_{x \to +\infty}[f(x) - kx] = b.$$

Достатність. Нехай існують границі, вказані в теоремі. Тоді з другої границі випливає, що $\lim\limits_{x \to +\infty}[f(x) - kx - b] = 0$, а тому пряма $Y = kx + b$ дійсно є похилою асимптотою графіка функції $y = f(x)$ при $x \to +\infty$.

При дослідженні графіка функції в цілому рекомендується, наприклад, схема, за якою слід знайти:

1) область визначення функції, її точки розриву й проміжки неперервності;

2) асимптоти графіка функції;

3) точки локального екстремуму функції;

4) проміжки монотонності функції;

5) точки перегину, проміжки опуклості й угнутості.

Враховуючи дослідження, побудувати графік функції.

Порядок дослідження доцільно обирати відповідно до особливостей функції. При розв'язанні конкретної задачі окремі пункти можна дещо розширити, а деякі можуть виявитися зайвими.

§ 5. Застосування похідної в економічній теорії

Розглянемо деякі приклади застосування похідної в економічній теорії. Звернемо увагу на те, що базові закони теорії виробництва і споживання, попиту і пропозиції є прямим наслідком математичних теорем, сформульованих у цій главі.

Спочатку розглянемо економічну інтерпретацію теореми Ролля.

Один з базових законів теорії виробництва є таким: ***оптимальний для виробника рівень випуску товару визначається рівністю граничних витрат і граничного доходу.***

Тобто рівень випуску x_0 є оптимальним для виробника, якщо $MS(x_0) = MD(x_0)$, де MS — граничні витрати; MD — граничний дохід. Функцію прибутку позначимо $C(x)$. Тоді $C(x) = D(x) - S(x)$. Очевидно, що оптимальним рівнем виробництва є той, при якому прибуток максимальний, тобто таке значення випуску x_0, при якому функція $C(x)$ має екстремум (максимум). За теоремою Ролля в цій точці $C'(x) = 0$. Оскільки $C'(x) = D'(x) - S'(x)$, тоді $D'(x_0) = S'(x_0)$, тобто $MD(x_0) = MS(x_0)$.

Друге важливе поняття теорії виробництва — це рівень найбільш економічного виробництва, при якому середні витрати з виробництва товару мінімальні. Відповідний економічний закон твердить: ***рівень найбільш економічного виробництва визначається рівністю середніх і граничних витрат.***

Отримаємо цю умову як наслідок теореми Ролля. Середні витрати $AS(x)$ визначаються як $\dfrac{S(x)}{x}$, тобто витрати з виробництва товару поділені на вироблену його кількість. Мінімум цієї величини досягається в критичній точці функції $y = AS(x)$, тобто за умови

$$AS'(x) = \frac{S'x - S}{x^2} = 0,$$

звідки $S'x - S = 0$, або $S' = \dfrac{S}{x}$, тобто $MS(x) = AS(x)$.

Поняття опуклості функції також знаходить свою інтерпретацію в економічній теорії.

Один з найвідоміших економічних законів — закон спадаючої дохідності — формулюється так: ***із збільшенням виробництва додаткова продукція, отримана на кожну нову одиницю ресурсу (трудового, технологічного і т. ін.), з деякого моменту спадає.***

Іншими словами, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, де Δx — приріст ресурсу; Δy — приріст випуску продукції, зменшується при зростанні x. Отже, закон спадаючої дохідності формулюється так: ***функція*** $y = f(x)$***, яка виражає залежність випуску продукції від вкладеного ресурсу, є функцією, опуклою вгору.***

Другим базисним поняттям економічної теорії є функція корисності $U = U(x)$, де x — товар; U — корисність. Ця величина дуже суб'єктивна для кожного окремого споживача, але достатньо об'єктивна для суспільства в цілому. Закон спадаючої корисності такий: ***зі зростанням кількості товару додаткова корисність від кожної нової його одиниці з деякого моменту спадає.*** Очевидно, цей закон можна сформулювати так: ***функція корисності є функцією, опуклою вгору.*** У такій постановці закон спадаючої корисності є відправною точкою для математичного дослідження теорії попиту і пропозиції.

Приклад 1. Виробник реалізує свою продукцію по ціні p за одиницю, а витрати при цьому задаються кубічною залежністю

$$S(x) = ax + \lambda x^3 \; (a < p, \; \lambda > 0).$$

Знайти оптимальний для виробника обсяг випуску продукції і відповідний йому прибуток.

Позначимо обсяг продукції, що випускається, через x. Складемо функцію прибутку $C(x) = px - (ax + \lambda x^3)$, де px — дохід від продукції, що реалізується.

1. Знаходимо $C'(x) = (p - a) - 3\lambda x^2$.

2. Знаходимо критичні точки: $C'(x) = (p - a) - 3\lambda x^2 = 0$, звідки $x_1 = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ (другу критичну точку $x_2 = -\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ не розглядаємо за змістом задачі).

3. Знаходимо $c''(x) = -6\lambda x$ і визначаємо знак другої похідної при $x_1 = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$; $C''\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) < 0$ (у даному випадку $C''(x) < 0$ при будь-якому $x > 0$). Отже, при $x = \sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}$ прибуток $C(x)$ максимальний.

4. Знаходимо максимум функції (тобто максимальний розмір прибутку) $C_{\max}\left(\sqrt{\frac{p-a}{3\lambda}}\right) = \frac{(p-a)\sqrt{p-a}}{3\sqrt{3\lambda}}$.

Приклад 2. Капітал в 1 млрд грн. можна розмістити в банку під 50 % річних або інвестувати у виробництво, причому ефективність вкладу очікується в розмірі 100 %, а витрати задаються квадратичною залежністю. Прибуток обкладається податком у p %. При яких значеннях p вклад у виробництво є більш ефективним, ніж чисте розміщення капіталу в банку?

Нехай x (млрд грн.) інвестується у виробництво, а $(1-x)$ — розміщується під проценти. Тоді розміщений капітал через рік стане

$$(1-x)\left(1+\frac{50}{100}\right)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x,$$

а капітал, вкладений у виробництво, — $x\left(1+\frac{100}{100}\right)=2x$. Витрати становлять ax^2, тобто прибуток від вкладу у виробництво $C=(2x-ax^2)$.

Податки становлять $(2x-ax^2)\frac{p}{100}$, тобто чистий прибуток стане

$$\left(1-\frac{p}{100}\right)(2x-ax^2).$$

Загальна сума через рік

$$A(x)=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}x+\left(1-\frac{p}{100}\right)(2x-ax^2)=$$

$$=\frac{3}{2}+\left[2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}\right]x-a\left(1-\frac{p}{100}\right)x^2.$$

Потрібно знайти максимальне значення цієї функції на відрізку [0; 1].

Маємо

$$A'(x)=2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}-2a\left(1-\frac{p}{100}\right)x;$$

і

$$A'(x)=0 \text{ при } x_0=\frac{2\left(1-\frac{p}{100}\right)-\frac{3}{2}}{2a\left(1-\frac{p}{100}\right)};$$

$$A''(x)=-2a\left(1-\frac{p}{100}\right)<0,$$

тобто згідно з другою достатньою умовою екстремуму x_0 — точка максимуму.

Щоб x_0 належало відрізку [0; 1], необхідно виконання умови

$$0 < 2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2} < 1, \text{ або } p < 25.$$

Отже, якщо $p > 25$, то вигідніше нічого не вкладати у виробництво і розмістити весь капітал у банку. Якщо $p < 25$, тоді можна показати, що при $x = x_0$

$$A(x_0) = \frac{3}{2} + \frac{\left[2\left(1 - \frac{p}{100}\right) - \frac{3}{2}\right]^2}{4a\left(1 - \frac{p}{100}\right)} > \frac{3}{2} = A(0),$$

тобто вклад у виробництво є більш вигідним, ніж розміщення всієї суми під проценти.

Контрольні запитання і завдання

1. Яка функція називається спадною (незростаючою), зростаючою (неспадною) на проміжку $[a, b]$?
2. Що таке проміжки монотонності функції?
3. Сформулюйте необхідну та достатню ознаки зростання (спадання) функції на проміжку (a, b).
4. Сформулюйте означення максимуму (мінімуму) функції.
5. Яка необхідна умова екстремуму диференційовної функції $f(x)$?
6. Назвіть достатні умови екстремуму функції.
7. Коли графік диференційовної функції $f(x)$ називається опуклим (угнутим) на проміжку (a, b)?
8. Сформулюйте достатні умови опуклості (угнутості) графіка функції.
9. Випишіть план дослідження функції $f(x)$.

Приклади розв'язування задач

7.1. Визначити проміжки монотонності функції

$$f(x) = -\frac{x^3}{6} + 8x + 1.$$

Область визначення $(-\infty, \infty)$.

Знаходимо похідну $f'(x) = -\frac{x^2}{2} + 8$ і розв'язуємо нерівності $-\frac{x^2}{2} + 8 > 0$ та $-\frac{x^2}{2} + 8 < 0$. При $|x| < 4$ похідна $f'(x) > 0$, а при $|x| > 4$ похідна $f'(x) < 0$.

Отже, в інтервалі $(-4;\ 4)$ функція зростає, а в інтервалах $(-\infty;\ 4)$ і $(4;\ \infty)$ — спадає.

7.2. Дослідити на екстремум функцію

$$\text{а) } f(x) = \frac{x}{1+x^2}; \quad \text{б) } y = (x-5)e^x.$$

а) Область визначення $(-\infty, \infty)$. Знаходимо $f'(x)$ і визначаємо критичні точки

$$f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2};$$

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0;$$

$$1 - x^2 = 0;$$

$$x^2 = 1.$$

Отже, $x_1 = 1; \quad x_2 = -1$.

Застосовуючи перше правило дослідження на екстремум, будуємо таблицю.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;\ 1)$	1	$(1;+\infty)$
y'	$-$	0	$+$	$+$	$-$
y	$\searrow$	min $y = -\frac{1}{2}$	$\nearrow$	max $y = \frac{1}{2}$	$\searrow$

б) Область визначення $(-\infty; \infty)$. Знаходимо похідну $y' = (x-4)e^x$. Прирівнюємо її до нуля і знаходимо стаціонарну точку:

$$e^x(x-4) = 0; \quad x = 4.$$

Застосовуючи друге правило, знайдемо другу похідну і дістанемо

$$f''(x) = (x-3)e^x.$$

Обчислимо значення другої похідної в стаціонарній точці. При $x = 4$ маємо

$$y''(4) = (4-3)e^4 > 0,$$

отже, згідно з достатньою умовою другого типу, в точці $x = 4$ функція має мінімум

$$y_{\min} = (4-5)e^4 = -e^4.$$

7.3. Знайти найбільше і найменше значення функції $f(x) = 3x - x^3$ на відрізку $[-2; 3]$.

$D(f) = R$. Знаходимо похідну

$$f'(x) = 3 - 3x^2;$$
$$3 - 3x^2 = 0,$$

тобто $x = \pm 1$ — стаціонарні точки.

Визначаємо значення функції в цих точках: $f(1) = 2$; $f(-1) = -2$.

Обчислюємо значення даної функції на границях проміжку: $f(-2) = 2$; $f(3) = -18$.

З отриманих чотирьох значень вибираємо найбільше і найменше. Отже, найбільше значення функції на заданому відрізку дорівнює 2, а найменше -18.

7.4. Знайти точку перегину та інтервали опуклості функції $f(x) = \mathrm{arctg}\, x$.

Знаходимо похідну $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ та другу похідну $f''(x) = -\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$ і будуємо таблицю, враховуючи, що $f''(x) = 0$ при $x = 0$.

x	$(-\infty; 0)$	0	$(0; +\infty)$
y''	+	0	−
y	$\cup$	~	$\cap$

Отже, на проміжку $(-\infty; 0)$ графік функції угнутий, а на проміжку $(0; +\infty)$ — опуклий. Точка $x = 0$, в якій друга похідна змінює знак з “плюс” на “мінус”, — точка перегину графіка.

7.5. Знайти асимптоти кривих: а) $y = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x+2}$; б) $y = x^2 e^{-x}$.

а) Досліджувана функція має вертикальну асимптоту $x = -2$. Очевидно,

$$\lim_{x \to -2+0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2} = \infty; \quad \lim_{x \to -2-0} \frac{x^2 - 2x + 3}{x+2} = -\infty,$$

функція має розрив другого роду.

Знаходимо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x(x+2)} = 1;$$

$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2} - x \right] = -4.$$

Отже, $y = x - 4$ є похилою асимптотою кривої

$$y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}.$$

б) Очевидно, вертикальних асимптот крива $y = x^2 e^{-x}$ не має. Якщо $x \to \infty$, то $y \to 0$. Отже, вісь Ox є горизонтальною асимптотою даної кривої. Дослідимо наявність похилої асимптоти:

$$k = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 e^{-x}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0.$$

Отже, є тільки горизонтальна асимптота $y = 0$.

7.6. Дослідити функцію $y = x^2 e^{-x^2}$ і побудувати її графік.

1. Область визначення $(-\infty; \infty)$. Функція парна, оскільки $f(-x) = f(x)$ і графік її симетричний відносно осі ординат.

2. Вертикальних асимптот немає, оскільки функція визначена при всіх дійсних значеннях x.

Поведінка функції на нескінченності:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^{x^2}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^{x^2})'} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

Через парність функції $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$, тобто пряма $y = 0$ (вісь абсцис) — горизонтальна асимптота.

3. Екстремуми й інтервали монотонності:

$$y' = 2xe^{-x^2} + x^2 e^{-x^2}(-2x) = 2e^{-x^2}(x - x^3);$$

$$y' = 0 \text{ при } x - x^3 = 0;$$

$$x(1 - x^2) = 0$$

$$x = \pm 1, x = 0,$$

тобто критичні точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$.

Знаки похідної зображено на рис. 58.

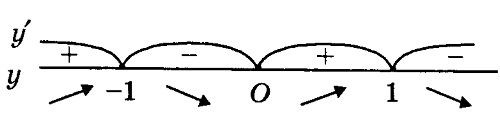

Рис. 58

Отже, $x = -1$ є точкою максимуму, $x = 0$ — точкою мінімуму, $x = 1$ — точкою максимуму:

$$f_{\max} = f(-1) = \frac{1}{e},$$

$$f_{\min} = f(0) = 0,$$

$$f_{\max} = f(1) = \frac{1}{e}.$$

Функція зростає на інтервалах $(-\infty; -1)$ і $(0; 1)$ і спадає на $(-1; 0)$ і $(1; +\infty)$.

4. Інтервали опуклості та угнутості і точки перегину:

$$y'' = 2e^{-x^2}(-2x)(x - x^3) + 2e^{-x^2}(1 - 3x^2) = 2e^{-x^2}(2x^4 - 5x^2 + 1);$$

$$y'' = 0 \text{ при } x = \pm\frac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2}.$$

Знаки другої похідної зображено на рис. 59.

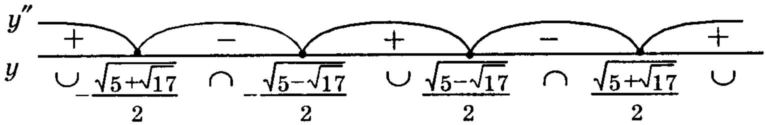

Рис. 59

Отже, функція опукла на інтервалах

$$\left(-\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}, \quad -\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\right) \text{ і } \left(\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}, \quad \frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right)$$

і угнута на інтервалах

$$\left(-\infty, \quad -\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\right) \cup \left(-\frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}, \quad \frac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}, \quad +\infty\right),$$

$x = \pm\dfrac{\sqrt{5 \pm \sqrt{17}}}{2}$ — точки перегину.

5. $f(0) = 0$. Рівняння $f(x) = 0$ має єдиний розв'язок $x = 0$, тобто графік функції проходить через початок координат.

Графік функції наведено на рис. 60.

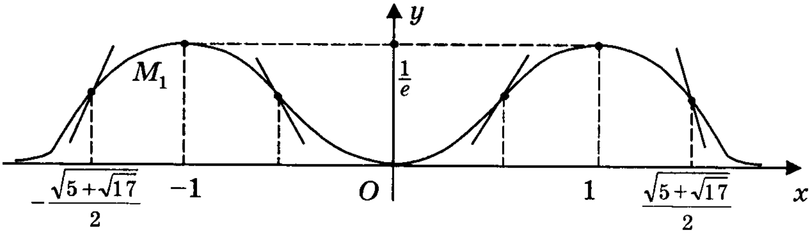

Рис. 60

7.7. Дослідити функцію $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$ і побудувати її графік.

1. Область визначення $(-\infty; 3)\cup(3; +\infty)$. Дана функція не є ні парною, ні непарною.

2. Досліджувана функція має вертикальну асимптоту $x = 3$. Очевидно,

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{x^2-5}{x-3} = +\infty, \quad \lim_{x\to 3-0}\frac{x^2-5}{x-3} = -\infty.$$

Отже, в точці $x = 3$ функція має розрив другого роду. Далі

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^2-5}{x-3} = +\infty, \quad \lim_{x\to -\infty}\frac{x^2-5}{x-3} = -\infty.$$

Знаходимо похилу асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-5}{x(x-3)} = 1;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^2-5}{x-3} - x\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x-5}{x-3} = 3.$$

Отже, $y = x + 3$ є похилою асимптотою кривої $y = \dfrac{x^2-5}{x-3}$.

3. Обчислимо похідну функції $y' = \dfrac{(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$ і розв'яжемо рівняння $y' = 0$: $x = 5$, $x = 1$.

Досліджуючи знак похідної, складаємо таблицю.

x	$(-\infty; 1)$	1	$(1; 3)$	$(3; 5)$	5	$(5; +\infty)$
y'	+	0	−	−	0	+
y	↗	max $y = 2$	↘	↘	min $y = 10$	↗

4. Знаходимо другу похідну $y'' = \dfrac{8}{(x-3)^3}$.

Бачимо, що рівняння $y'' = 0$ коренів не має, отже точок перегину не існує. Будуємо таблицю.

x	$(-\infty, 3)$	$(3, +\infty)$
y''	$-$	$+$
y	$\cap$	$\cup$

5. Рівняння $f(x) = 0$, тобто $\dfrac{x^2-5}{x-3} = 0$, має два корені $x = \pm\sqrt{5}$.

Отже, графік перетинає вісь абсцис у точках $x_1 = -\sqrt{5}$, $x_2 = \sqrt{5}$.

На підставі добутих даних будуємо графік функції (рис. 61).

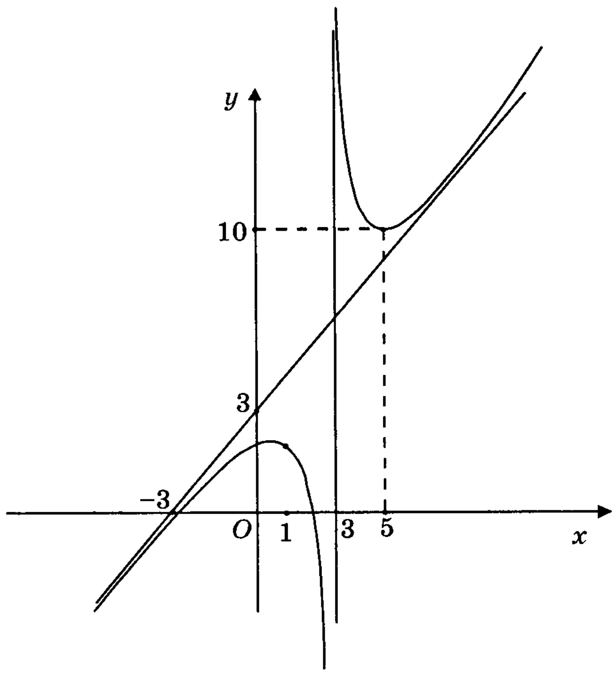

Рис. 61

Задачі і вправи для самостійної роботи

Обчислити границі, використавши правило Лопіталя.

7.8. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-4x^2+5x-2}{x^3-5x^2+7x-3}$.

7.9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x-\operatorname{tg}x}$.

7.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi-2\operatorname{arctg}x}{e^{\frac{3}{x}}-1}$.

7.11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln(x-1)}{\operatorname{ctg}\pi x}$.

Застосовуючи правило Лопіталя, обчислити границі (попередньо приводячи їх до невизначеностей типу $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ або $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$).

7.12. $\lim\limits_{x\to 1}\sin(x-1)\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}x$.

7.13. $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

7.14. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$.

7.15. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\operatorname{ctg}x-\dfrac{1}{x}\right)$.

7.16. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\pi-2x)^{\cos x}$.

7.17. $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{\ln(e^x-1)}}$.

7.18. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$.

7.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$.

Дослідити на екстремум функції.

7.20. $y=2x^3-6x^2-18x+7$.

7.21. $y=\dfrac{3x^2+4x+4}{x^2+x+1}$.

7.22. $y=xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

7.23. $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

7.24. $y=2x^3-3x^2$.

Знайти найбільше і найменше значення функцій на відрізках.

7.25. $y=x^4-2x^2+5,\quad [-2;2]$.

7.26. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1-x}{1+x},\quad [0;1]$.

7.27. $y=\dfrac{1-x+x^2}{1+x-x^2},\quad 0\le x\le 1$.

7.28. Потрібно виділити прямокутну площу землі в 512 м^2, обгородити її огорожею і розділити огорожею на три рівні частини паралельно одній із сторін площі. Які мають бути розміри площадки, щоб на побудову огорожі пішла найменша кількість матеріалів?

7.29. Вікно має форму прямокутника, завершеного півкругом. Задано периметр p цієї фігури. При яких розмірах x і y сторін прямокутника вікно пропускатиме найбільшу кількість світла?

Знайти точки перегину й інтервали випуклості функцій.

7.30. $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 8$.

7.31. $y = xe^{2x} + 1$.

7.32. $y = 2x^2 + \ln x$.

7.33. $y = \sqrt[3]{(x-2)^5} + 3$.

Знайти асимптоти графіків функцій.

7.34. $y = \dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$.

7.35. $y = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$.

7.36. $y = \dfrac{2x^3 \ln x}{x^2 + 1}$.

7.37. $y = xe^x$.

Провести повне дослідження заданих функцій і побудувати їх графіки.

7.38. $y = \dfrac{1}{x} + 4x^2$.

7.39. $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$.

7.40. $y = x^3 - 12x^2 + 36x$.

7.41. $y = \dfrac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$.

7.42. $y = xe^{-\frac{x^2}{2}}$.

7.43. $y = \dfrac{e^x}{x}$.

7.44. $y = \dfrac{2x-1}{(x-1)^2}$.

7.45. $y = \dfrac{\ln x}{x}$.

Відповіді до глави 7

7.8. $\frac{1}{2}$. **7.9.** $-\frac{1}{2}$. **7.10.** $\frac{2}{3}$. **7.11.** 0. **7.12.** $-\frac{2}{\pi}$. **7.13.** 1. **7.14.** $-\frac{1}{2}$. **7.15.** 0. **7.16.** 1. **7.17.** e. **7.18.** 1. **7.19.** 1. **7.20.** $y_{\max} = 17$ при $x = -1$; $y_{\min} = -47$ при $x = 3$. **7.21.** $y_{\max} = 4$ при $x = 0$; $y_{\min} = \frac{8}{3}$ при $x = -2$. **7.22.** $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x = 1$; $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x = -1$. **7.23.** $y_{\min} = e$ при $x = e$; **7.24.** $y_{\max} = 0$ при $x = 0$; $y_{\min} = -1$ при $x = 1$. **7.25.** 13 і 4. **7.26.** $M = \frac{\pi}{4}$; $m = 0$. **7.27.** 1 і $\frac{3}{5}$. **7.28.** 16 м і 32 м. **7.29.** $x = \frac{2p}{4+\pi}$; $y = \frac{1}{2}(p - x - \frac{\pi x}{2})$. **7.30.** Точки перегину $(\frac{5}{3}; -\frac{250}{27})$; інтервали: опуклий — $(-\infty; \frac{5}{3})$, угнутий — $(-\frac{5}{3}; \infty)$. **7.31.** На $(-\infty; -1)$ — опуклий, на $(-1; +\infty)$ — угнутий; $M(-1; 1 - \frac{1}{e^2})$ — точка перегину. **7.32.** Точка перегину $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \ln 2)$; крива опукла на інтервалі $(0; \frac{1}{2})$, угнута на $(\frac{1}{2}; \infty)$. **7.33.** На інтервалі $(-\infty; 2)$ — опуклість, на $(2; +\infty)$ — угнутість, $M(2; 0)$ — точка перегину. **7.34.** $x = -1$; $y = \frac{1}{2}x - 1$. **7.35.** $x = 1$; $x = -1$. **7.36.** Асимптот немає. **7.37.** $y = 0$; $y = x$. **7.38.** Визначена скрізь, крім $x = 0$; $y_{\min} = 3$ при $x = \frac{1}{2}$. Максимумів немає. Точка перегину графіка $(-\frac{\sqrt{2}}{2}; 0)$. Асимптота $x = 0$. **7.39.** Визначена скрізь, крім $x = \pm\sqrt{3}$. Графік симетричний відносно початку координат. $y_{\max} = -4{,}5$ при $x = 3$, $y_{\min} = 4{,}5$ при $x = -3$. Точка перегину графіка (0; 0). Асимптоти $x = \pm\sqrt{3}$ і $x + y = 0$; **7.40.** $y_{\max} = 32$ при $x = 2$; $y_{\min} = 0$ при $x = 6$. Функція зростає на інтервалі $(-\infty; 2)$ і на $(6; \infty)$, спадає — на (2; 6) Опукла на інтервалі $(-\infty; 4)$, угнута — на $(4; \infty)$. Точка перегину (4; 16). **7.41.** Визначена скрізь, крім $x = -1$; $y_{\max} = \frac{2}{27}$ при $x = 5$, $y_{\min} = 0$ при $x = 1$. Абсциси точок перегину графіка $5 \pm 2\sqrt{3}$. Асимптоти $x = -1$ і $y = 0$. **7.42.** Визначена скрізь. Графік симетричний відносно початку координат; $y_{\max} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x = 1$; $y_{\min} = -\frac{1}{\sqrt{e}}$ при $x = -1$. Точки перегину графіка $(0; 0)$, $(\sqrt{3}; \sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$ і $(-\sqrt{3}; -\sqrt{3}e^{-\frac{3}{2}})$. Асимптота $y = 0$. **7.43.** Визначена скрізь, крім $x = 0$; $y_{\min} = e$ при $x = 1$. Максимумів немає. Графік не має точок перегину. Асимптоти $x = 0$; $y = 0$. **7.44.** Визначена скрізь, крім $x = 1$; $y_{\min} = -1$ при $x = 0$. Максимумів немає. Точки перегину графіка $(-\frac{1}{2}; -\frac{8}{9})$. Асимптоти $x = 1; y = 0$. **7.45.** $y_{\max} = \frac{1}{e}$ при $x = e$; $(e\sqrt{e}; \frac{3}{2e\sqrt{e}})$ — точка перегину; $x = 1$; $y = 0$. — асимптоти (праві).

ЧАСТИНА ДРУГА

Розділ IV
ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ

Глава 8. Невизначений інтеграл

§ 1. Первісна та її властивості

Основною задачею диференціального числення є знаходження похідної від заданої функції. Різноманітні питання вищої математики та її застосування у фізиці, математиці, біології, економіці приводять до оберненої задачі, яка полягає у відшуканні функції за її похідною. З математичної точки зору для заданої функції $f(x)$ слід знайти таку функцію $F(x)$, похідна якої дорівнювала б $f(x)$.

Означення. *Функція $F(x)$, визначена на проміжку $X = (a, b)$ (можливо, нескінченному), називається первісною функції $f(x)$ на цьому проміжку, якщо для кожного $x \in X$ похідна $F'(x)$ існує й справджується рівність $F'(x) = f(x)$.*

Операція відшукання первісної для заданої функції називається *інтегруванням*. (Нагадаємо, що операція відшукання похідної називається *диференціюванням*). Отже, операція інтегрування є оберненою до диференціювання. Способи інтегрування функцій вивчаються у розділі вищої математики — інтегральному численні. Наприклад, функція $F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ — первісна функції $f(x) = x^3$ на R, оскільки $\left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = x^3$ для всіх $x \in R$; функція $F(x) = \cos^2 x$ — первісна функції $f(x) = -\sin 2x$ на R, оскільки $(\cos^2 x)' = -2\cos x \sin x = -\sin 2x$ для всіх $x \in R$.

Вкажемо основні властивості первісної.

1. Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку X, то $F(x)$ неперервна на проміжку X функція. Справді, функція $F(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, а тому й є неперервною в кожній точці $x \in X$.

2. Якщо $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на проміжку X, то функція $\Phi(x) = F(x) + C$, де C — довільна стала, також первісна функції $f(x)$ на проміжку X.

Справді, $\Phi'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) = f(x)$.

З цієї властивості випливає, що операція інтегрування не є однозначною. Наступна теорема встановлює, що собою являє набір усіх первісних заданої функції.

Теорема. *Якщо $F(x)$ — первісна функція $f(x)$ на проміжку X, то довільну іншу первісну $\Phi(x)$ функції $f(x)$ на проміжку X можна подати у вигляді $\Phi(x) = F(x) + C$, де C — довільна стала.*

Доведення. За означенням первісної $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = f(x)$. Знайдемо похідну функції $\Phi(x) - F(x)$:

$$[\Phi(x) - F(x)]' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

для всіх $x \in X$. За наслідком до теореми Лагранжа, ця функція стала на проміжку X, тобто $\Phi(x) - F(x) = C$. Отже, $\Phi(x) = F(x) + C$, де C — довільна стала, що й потрібно було довести.

З теореми випливає, що множина функцій $F(x) + C$, де $F(x)$ — одна з первісних функцій $f(x)$, а C — довільна стала, повністю вичерпує весь набір первісних функцій $f(x)$.

Однак навіть досить прості функції можуть не мати первісної. У главі 9 буде доведено, що будь-яка неперервна на проміжку функція має на ньому первісну.

§ 2. Невизначений інтеграл та його властивості

Означення. *Невизначеним інтегралом функції $f(x)$ називається множина всіх її первісних.*

Для невизначеного інтеграла вживають позначення $\int f(x)dx$. Отже, маємо $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $F(x)$ — будь-яка первісна функції $f(x)$; C — довільна стала.

Знак $\int$ називається знаком невизначеного інтеграла; функція $f(x)$ — підінтегральною функцією; вираз $f(x)dx$ — підінтегральним виразом.

Сформулюємо найважливіші властивості невизначеного інтеграла.

1. Похідна невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральній функції; диференціал від невизначеного інтеграла дорівнює підінтегральному виразу, тобто $(\int f(x)dx)' = f(x)$, $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

Справді,

$$(\int f(x)dx)' = (F(x)+C)' = F'(x) = f(x);$$

$$d\int f(x)dx = (\int f(x)dx)'dx = f(x)dx.$$

2. Невизначений інтеграл від диференціала деякої функції дорівнює сумі цієї функції і довільної сталої, тобто $\int dF(x) = F(x)+C$.

Справді, оскільки $dF(x) = F'(x)dx$, то $\int dF(x) = \int F'(x)dx = F(x)+C$.

3. Сталий множник можна виносити з-під знака інтеграла, тобто якщо $k = \text{const} \neq 0$, то $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

Дійсно, нехай $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$. Тоді $kF(x)$ буде первісною функції $kf(x)$: $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$. Звідси випливає, що $k\int f(x)dx = k[F(x)+C] = kF(x) + C_1 = \int kf(x)dx$, де $C_1 = kC$.

4. Невизначений інтеграл алгебраїчної суми двох функцій дорівнює алгебраїчній сумі інтегралів кожної з цих функцій окремо, тобто

$$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Справді, нехай $F(x)$ і $G(x)$ — первісні функцій $f(x)$ і $g(x)$: $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, тоді функції $F(x) \pm G(x)$ є первісними функцій $f(x) \pm g(x)$.

Отже,

$$\int f(x)dx \pm \int g(x)dx = [F(x)+C_1] \pm [G(x)+C_2] = [F(x) \pm G(x)] + [C_1 \pm C_2] =$$

$$= [F(x) \pm G(x)] + C = \int [f(x) \pm g(x)]\, dx.$$

§ 3. Таблиця основних невизначених інтегралів

Із означення невизначеного інтеграла випливають такі формули, які надалі називатимемо *табличними інтегралами:*

1. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$. 2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

3. $\int a^{x}dx = \dfrac{a^{x}}{\ln a} + C \quad (0 < a \neq 1)$ 4. $\int e^{x}dx = e^{x} + C$.

5. $\int \cos x dx = \sin x + C$. 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}x + C.$

8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}x + C.$

9. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \mathrm{arctg}x + C.$

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

11. $\int \frac{dx}{x^2-1} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C.$

12. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right| + C.$

Зауважимо, що всі формули справедливі на тих проміжках, де визначені відповідні функції. Наприклад, формула 2 справедлива для довільного проміжку, що не містить точку $x = 0$; формула 8 справедлива на кожному з інтервалів вигляду $(k\pi; (k+1)\pi)$, де $k \in Z$, тощо.

Метод безпосереднього інтегрування базується саме на застосуванні табличних інтегралів і основних властивостей невизначеного інтеграла.

Приклад. Обчислити:

а) $\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx$; б) $\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx$; в) $\int \mathrm{tg}^2 x dx$; г) $\int e^x \left(2 - \frac{e^{-x}}{x^3}\right) dx$.

а) Зауважимо спочатку, що $\frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{6}} - x^{-\frac{1}{4}}$. Звідси на підставі властивості 4 та табличного інтеграла 1 маємо

$$\int \frac{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[4]{x}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{\frac{1}{6}} dx - \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} - \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + C = \frac{6}{7} x\sqrt[6]{x} - \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} + C.$$

б) Враховуючи, що $\frac{x^2-1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-2}{x^2+1} = 1 - \frac{2}{x^2+1}$, на підставі властивостей 3, 4 та табличних інтегралів 1 і 9 маємо

$$\int \frac{x^2-1}{x^2+1} dx = \int dx - 2\int \frac{dx}{x^2+1} = x - 2\mathrm{arctg}x + C.$$

в) Зауважимо, що $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, звідси на підставі властивості 4 та табличних інтегралів 1 і 7 маємо

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}x - x + C.$$

г) Враховуючи, що $e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)=2e^x-x^{-3}$, на підставі властивостей 3, 4 та табличних інтегралів 1 і 4 маємо

$$\int e^x\left(2-\frac{e^{-x}}{x^3}\right)dx=2\int e^x dx-\int x^{-3}dx=2e^x-\frac{x^{-2}}{-2}+C=2e^x+\frac{1}{2x^2}+C.$$

Як бачимо, мистецтво інтегрування полягає в умінні за допомогою властивостей невизначеного інтеграла перетворити підінтегральний вираз до табличного. Потрібно домогтися, щоб він став таким, як в одному з табличних інтегралів, або спочатку хоча б спростився. Для цього застосовуються різні методи інтегрування.

§ 4. Метод заміни змінної

У багатьох випадках введення нової змінної інтегрування дає змогу звести знаходження даного інтеграла до знаходження табличного інтеграла. Цей спосіб називається *методом заміни змінної* або *методом підстановки*. Він базується на такій теоремі.

Теорема. *Нехай функція $x=\varphi(t)$ визначена і диференційовна на проміжку T, а проміжок X — множина її значень. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на проміжку X і має на ньому первісну $F(x)$. Тоді на проміжку T складна функція $F(\varphi(t))$ є первісною функції $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$, тобто*

$$\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt=F(\varphi(t))+C. \tag{1}$$

Д о в е д е н н я. Згідно з правилом диференціювання складної функції, враховуючи, що $F'(x)=f(x)$, дістанемо

$$(F(\varphi(t)))'=(F(\varphi(t)))_x'\ \varphi'(t)dt=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t),\quad t\in T.$$

Отже, функція $f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$ дійсно на проміжку T має однією зі своїх первісних функцію $F(\varphi(t))$, тобто виконане співвідношення (1). Оскільки

$$F(\varphi(t))+C=(F(x)+C)\big|_{x=\varphi(t)}=\int f(x)dx\big|_{x=\varphi(t)},$$

то рівність (1) можна подати у вигляді

$$\int f(x)dx\big|_{x=\varphi(t)}=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt. \tag{2}$$

Формула (2) називається *формулою заміни змінної* у невизначеному інтегралі. Зауважимо, що у випадку лінійної підстановки за умовою, що $F(x)$ — первісна функції $f(x)$, маємо

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \qquad (3)$$

Справді, покладаючи $x = \frac{t}{a}$ (тоді $dx = \frac{1}{a}dt$), згідно з формулою (2) дістанемо

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + C = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$; б) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$.

Маємо, враховуючи формулу (3):

а) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1 + \left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0;$$

б) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 - 1} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{\frac{x}{a} - 1}{\frac{x}{a} + 1}\right| + C = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x - a}{x + a}\right| + C,\ a \neq 0;$$

в) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}} = \ln\left|\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 \pm 1}\right| + C = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C,$$

$a \neq 0$.

Аналогічно $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C,\ a \neq 0$.

Поширений також спосіб тотожного перетворення підінтегрального виразу з виділенням диференціала нової змінної інтегрування.

Приклад 2. Обчислити інтеграли:

а) $\int x^2 \sqrt[5]{x^3 + 2}\,dx$; б) $\int \operatorname{tg}x\,dx$; в) $\int \frac{x^2 dx}{x^3 + 1}$.

$$а)\ \int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx=\frac{1}{3}\int\left(x^3+2\right)^{\frac{1}{5}}d\left(x^3+2\right)=\frac{1}{3}\frac{\left(x^3+2\right)^{\frac{6}{5}}}{\frac{6}{5}}+C=$$

$$=\frac{5}{18}\sqrt[5]{\left(x^3+2\right)^6}+C.$$

Існує ще один нескладний, але досить ефективний прийом обчислення інтегралів, який базується на очевидній формулі:

$$\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C,\ \text{або}\ \int\frac{d(f(x))}{f(x)}=\ln|f(x)|+C. \qquad (4)$$

б) Оскільки $\operatorname{tg}x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ і $(\cos x)'=-\sin x$, за формулою (4) дістанемо, враховуючи, що $d(\cos x)=-\sin x dx$,

$$\int\operatorname{tg}x dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

в) Зауважимо, що $d(x^3+1)=3x^2dx$, а тому за формулою (4)

$$\int\frac{x^2dx}{x^3+1}=\frac{1}{3}\int\frac{d(x^3+1)}{x^3+1}=\frac{1}{3}\ln\left|x^3+1\right|+C.$$

Розглянемо ще кілька прикладів, пов'язаних з різними типами підстановок. Розв'язування прикладів надалі наведено у конспективному вигляді — після умови вказано підстановку та зроблено необхідні інші викладки.

Приклад 3. Обчислити інтеграли:

$$а)\ \int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}};\ б)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}};\ в)\ \int\sqrt{a^2-x^2}dx.$$

$$а)\ \int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}=\left|\begin{aligned}\sqrt{x+1}&=t\\ x&=t^2-1\\ dx&=2tdt\end{aligned}\right|=\int\frac{2tdt}{1+t}=2\int\frac{t+1-1}{t+1}dt=$$

$$=2\int dt-2\int\frac{dt}{t+1}=2t-2\ln|t+1|+C=2\sqrt{x+1}-2\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)+C;$$

$$б)\ \int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}=\left|\begin{aligned}&\sqrt{1+e^x}=t;x=\ln\left(t^2-1\right)\\ &e^x=t^2-1;dx=\frac{2t}{t^2-1}dt\end{aligned}\right|=\int\frac{2t}{(t^2-1)t}dt=$$

$$= 2\int \frac{dt}{t^2-1} = \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C;$$

в) $$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t;\ |x| \le a \\ dx = a\cos t dt;\ |t| \le \dfrac{\pi}{2} \end{array} \right| = a^2 \int \cos^2 t dt =$$

$$= \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C =$$

$$= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{|a|} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$$

§ 5. Метод інтегрування частинами

Одним з ефективних методів інтегрування є інтегрування частинами. Він базується на такій теоремі.

Теорема. *Нехай функції $U(x)$ і $V(x)$ визначені й диференційовні на проміжку X; крім того, на цьому проміжку існує первісна функції $V(x)\cdot U'(x)$. Тоді на проміжку X існує первісна і функції $U(x)\cdot V'(x)$, причому виконана формула*

$$\int U(x)\cdot V'(x)\,dx = U(x)\cdot V(x) - \int V(x)\cdot U'(x)\,dx. \tag{5}$$

Доведення. Функція $U(x)\cdot V(x)$ є, очевидно, однією з первісних функції $U'(x)\cdot V(x) + U(x)\cdot V'(x)$ на проміжку X, а тому

$$\int (U'(x)V(x) + U(x)V'(x))dx = U(x)V(x) + C.$$

З урахуванням припущення про існування первісної функції $V(x)\cdot U'(x)$ і властивостей 3, 4 невизначеного інтеграла матимемо потрібну формулу (5).

Оскільки $U'(x)\,dx = dU$, $V'(x)\,dx = dV$, то формулу (5) можна звести до вигляду

$$\int UdV = U\cdot V - \int VdU. \tag{6}$$

Саме формула (6) називається *формулою інтегрування частинами*, а інтегрування з її використанням — *інтегруванням частинами*. За допомогою цієї формули інтегрування виконується не одразу. Знаходження даного інтеграла зводиться до знаходження іншого. Основний зміст формули (6) полягає в тому, щоб у результаті її застосування цей новий інший інтеграл виявився або табличним, або став хоча б простіше даного.

На практиці для застосування формули (6) підінтегральний вираз розбивають на два множники. Один з них позначають через U, а інший — через dV. Потім диференціюванням знаходять dU, а інтегруванням — функцію V. Звичайно, при аналізі підінтегрального виразу за U слід брати таку частину підінтегральної функції, яка при диференціюванні не дуже ускладнюється, а за dV — таку частину підінтегрального виразу, яка легко інтегрується. Зауважимо, нарешті, що при знаходженні функції V довільну сталу вводити не слід. Надалі розв'язування прикладів наведено у конспективному вигляді — після умови вказано вирази U, dV і dU, V.

Приклад. Обчислити інтеграли:

а) $\int x\sin 2x dx$; б) $\int \ln(x^2+1)dx$; в) $\int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx$; г) $\int x^2 a^x dx$.

а) $$\int x\sin 2x dx = \left| \begin{matrix} U = x; dV = \sin 2x dx \\ dU = dx; V = -\frac{1}{2}\cos 2x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{2}x\cos 2x +$$

$$+\frac{1}{2}\int \cos 2x dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\sin 2x + C;$$

б) $$\int \ln(x^2+1)dx = \left| \begin{matrix} U = \ln(x^2+1); dV = dx \\ dU = \dfrac{2x}{1+x^2}dx; V = x \end{matrix} \right| = x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2\int \frac{x^2+1-1}{1+x^2}dx = x\ln(x^2+1) - 2\int dx + 2\int \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$= x\ln(x^2+1) - 2x + 2\operatorname{arctg} x + C;$$

в) $$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}dx = \left| \begin{matrix} U = \sqrt{x^2 \pm a^2}; dV = dx \\ dU = \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}; V = x \end{matrix} \right| = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx =$$

$$= x\sqrt{x^2 \pm a^2} - \int \frac{(x^2 \pm a^2) \mp a^2}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}dx = x\sqrt{x^2 \pm a^2} - I \pm a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}.$$

Звідси $2I = x\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm a^2 \int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$. Беручи до уваги результат прикладу § 4 (приклад 1в), дістанемо

$$I = \int \sqrt{x^2 \pm a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$$

Іноді метод інтегрування частинами доводиться застосовувати кілька разів.

г) $$\int x^2 a^x dx = \left| \begin{matrix} U = x^2; dV = a^x dx \\ dU = 2xdx; V = \dfrac{a^x}{\ln a} \end{matrix} \right| = \frac{1}{\ln a} x^2 a^x - \frac{2}{\ln a}\int x a^x dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} U = x; dV = a^x dx \\ dU = dx; V = \dfrac{1}{\ln a} a^x \end{matrix} \right| = \frac{1}{\ln a} x^2 a^x - \frac{2}{\ln a}\left(\frac{1}{\ln a} x a^x - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{\ln a}\int a^x dx \right) = \left(\frac{x^2}{\ln a} - \frac{2x}{\ln^2 a} + \frac{2}{\ln^3 a} \right) \cdot a^x + C.$$

Зауважимо, що загальні методи інтегрування застосовують не шаблонно. Вони не вказують абсолютно точного шляху, яким слід йти, щоб обчислити інтеграл. Як бачимо, часто потрібні попередні алгебраїчні перетворення підінтегральної функції. В принципі кожний інтеграл вимагає свого власного підходу, потрібні певні навички в інтегруванні.

Проте існують досить широкі класи функцій, для яких використовують стандартні прийоми їх перетворень і зведення до табличних інтегралів або для подальшого застосування загальних методів інтегрування. Розглянемо деякі типи таких функцій.

§ 6. Інтегрування раціональних та ірраціональних дробів із квадратним тричленом у знаменнику

Нехай слід знайти $\int R(x)dx$, де $R(x) = \dfrac{P(x)}{ax^2 + bx + c}$, причому $P(x)$ — многочлен n-го степеня $(a \neq 0)$, тобто

$$R(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n}{ax^2 + bx + c}.$$

Проводячи ділення многочленів з остачею, дістанемо

$$R(x) = Q(x) + \frac{px + q}{ax^2 + bx + c},$$

де $Q(x)$ — многочлен, що має степінь менший, ніж степінь многочлена $P(x)$.

Інтегрування $Q(x)$ не викликає труднощів. Отже, лишається знайти

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,dx.$$

Будь-який інтеграл такого вигляду зводиться до знаходження одного чи двох вказаних нижче стандартних інтегралів:

$$\int \frac{dx}{x \pm a}; \quad \int \frac{dx}{x^2 \pm a^2}; \quad \int \frac{dx}{(x \pm a)^2}; \quad \int \frac{xdx}{x^2 \pm a^2};$$

(див. § 4, приклад 1). Для цього в знаменнику підінтегральної функції слід виділити повний квадрат і виконати очевидну заміну змінної.

Приклад 1. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3}$; б) $\int \frac{dx}{x^2-7x+10}$; в) $\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx$.

а) $$\int \frac{dx}{x^2+2x+3} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+2} = \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C;$$

б) $$\int \frac{dx}{x^2-7x+10} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^2-\frac{9}{4}} = \left| \begin{array}{l} x-\frac{7}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|\frac{t-\frac{3}{2}}{t+\frac{3}{2}}\right| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-5}{x-2}\right| + C;$$

в) $$\int \frac{x+2}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2} + \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|x^2+2x+2\right| + \operatorname{arctg}(x+1) + C.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}}$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$; в) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}\,dx$.

а) $$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2+4x-3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-2)^2}} = \int \frac{d(x-2)}{\sqrt{1-(x-2)^2}} =$$

$$= \arcsin(x-2) + C;$$

б) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2+4}} = \ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+5}\right| + C.$

До розглянутих вище типів інтегралів зводяться також загальніші інтеграли: $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ $(a \neq 0, p \neq 0)$, окремий їх випадок розглянуто в § 4 (приклад 1);

в) $\int \frac{5x-3}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \int \frac{\frac{5}{4}(4x+8)-13}{\sqrt{2x^2+8x+1}}dx = \frac{5}{4}\int \frac{d(2x^2+8x+1)}{\sqrt{2x^2+8x+1}} -$

$$-\frac{13}{\sqrt{2}}\int \frac{d(x+2)}{\sqrt{(x+2)^2-\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}\right)^2}} = \frac{5}{2}\sqrt{2x^2+8x+1} - \frac{13}{\sqrt{2}}\ln\left|x+2+\right.$$

$$\left.+\sqrt{x^2+4x+\frac{1}{2}}\right| + C.$$

У більш складних випадках для знаходження інтеграла типу $\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ використовуються підстановки Ейлера, де R — раціональна функція від x і $\sqrt{ax^2+bx+c}$.

Якщо квадратний тричлен ax^2+bx+c не розкладається на прості множники, і оскільки $ax^2+bx+c>0$, то $a>0$, доцільно покласти $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - \sqrt{a}x$, після чого під знаком інтеграла залишиться раціональний дріб.

Якщо тричлен ax^2+bx+c має дійсні і різні корені x_1 і x_2, доцільно покласти $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$ (у разі, якщо $x_1 = x_2$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = |x-x_1|\cdot\sqrt{a}$, а отже, під знаком інтеграла знаходиться раціональна функція від x). Вказані підстановки мають назву відповідно першої та другої підстановки Ейлера.

На закінчення зауважимо, що обчислення інтегралів за допомогою підстановки Ейлера, як правило, досить трудомістке, а тому ми не приводимо прикладів з їх застосуванням.

Пропонуємо читачу розглянути самостійно такі приклади.

Приклад 3. Обчислити інтеграли:

а) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x^2+2x+2}}$; б) $\int \frac{xdx}{\sqrt{7x-10-x^2}}$.

§ 7. Інтегрування дробово-раціональних функцій

Дробово-раціональні функції $R(x)$, як відомо, записуються у вигляді $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — многочлени відповідно степенів m і n.

Якщо $m > n$, то, виконуючи ділення, дістанемо

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = T(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)}.$$

Тут $T(x)$ — ціла частина — многочлен, $P_1(x)$ — многочлен степеня, меншого за степінь многочлена $Q(x)$, тобто $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильна дробово-раціональна функція.

Інтегрування многочлена $T(x)$ не додає ніяких складностей. Тому задача інтегрування дробово-раціональних функцій фактично зводиться до інтегрування правильних дробово-раціональних функцій, навчившись інтегрувати які можна легко проінтегрувати й довільні дробово-раціональні функції.

Інтегрування правильних дробово-раціональних функцій базується на їх розкладанні на суму простих дробово-раціональних функцій чотирьох типів:

$$1)\ \frac{A}{x-\alpha};\ 2)\ \frac{A}{(x-\alpha)^k};\ 3)\ \frac{Mx+N}{x^2+px+q};\ 4)\ \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k},$$

де A, M, N, α, p, q — дійсні числа; $p^2 - 4q < 0$ (тричлен $x^2 + px + q$ не має дійсних коренів); $k = 2, 3, \ldots$.

У повному курсі вищої алгебри доведено таку теорему.

Теорема. *Будь-який правильний раціональний дріб розкладається на суму найпростіших раціональних дробів, коефіцієнти яких можна знайти методом невизначених коефіцієнтів.*

Отже, інтегрування раціонального дробу зводиться до інтегрування многочлена $T(x)$ та суми найпростіших раціональних дробів. Зазначимо, що вигляд найпростіших дробів визначається коренями знаменника $Q(x)$. Можливі такі випадки.

1. Корені знаменника дійсні і різні, тобто

$$Q(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n).$$

У цьому випадку $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ розкладеться на суму найпростіших дробів першого типу:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_1} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}, \tag{7}$$

невизначені коефіцієнти A_1, A_2, ... A_n знаходять з тотожності (7).

Приклад 1. Обчислити $\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx$.

Оскільки $x^3 + 2x^2 - 8x = x(x + 4)(x - 2)$, то $\frac{x^2-2x+2}{x^3+2x-8x} =$ $= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-2} + \frac{A_3}{x+4}$.

З останньої рівності знайдемо сталі A_1, A_2, A_3. Привівши дроби правої частини до загального знаменника, отримаємо рівність

$$A_1(x - 2)(x + 4) + A_2\,(x + 4)x + A_3\,(x - 2)x = x^2 - 2x + 2,$$

звідки при $x = 0$ маємо $-8A_1 = 2$ і $A_1 = -\frac{1}{4}$. Якщо $x = 2$, то $12\,A_2 = 2$ і $A_2 = \frac{1}{6}$. Якщо $x = -4$, тоді $24\,A_3 = 26$, тобто $A_3 = \frac{13}{12}$.

Перетворивши останню рівність до вигляду $(A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (2A_1 +$ $+ 4A_2 - 2A_3)x - 8A_1 = x^2 - 2x + 2$, зауважимо, що вона можлива лише тоді, коли коефіцієнти при однакових степенях x в обох частинах рівності однакові, тобто

$$\begin{cases} A_1 + A_2 + A_3 = 1 \\ 2A_1 + 4A_2 - 2A_3 = -2 \\ -8A_1 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = -\frac{1}{4} \\ A_2 = \frac{1}{6} \\ A_3 = \frac{13}{12} \end{cases}.$$

Тоді

$$\int \frac{x^2-2x+2}{x^3+2x^2-8x}dx = -\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x} + \frac{13}{12}\int\frac{dx}{x+4} + \frac{1}{6}\int\frac{dx}{x-2} = -\frac{1}{4}\ln|x| +$$

$$+ \frac{13}{12}\ln|x+4| + \frac{1}{6}\ln|x-2| + C.$$

Наведений метод інтегрування називається методом *невизначених коефіцієнтів*.

2. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні, тобто

$$Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^k.$$

Тоді дріб $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів першого та другого типів:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \frac{B_2}{(x-\beta)^2} + \ldots + \frac{B_k}{(x-\beta)^k}, \qquad (8)$$

коефіцієнти A, B_1, B_2, ..., B_k знаходять з тотожності (8).

3. Корені знаменника дійсні, причому деякі з них кратні; крім того, знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники, тобто $Q(x) = (x-\alpha)(x-\beta)^k \cdot (x^2 + px + q)$.

У цьому випадку дріб $\frac{P_1(x)}{Q(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів першого, другого та третього типів:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-\alpha} + \frac{B_1}{x-\beta} + \ldots + \frac{B_k}{(x-\beta)^k} + \frac{Dx+E}{x^2+px+q}, \qquad (9)$$

коефіцієнти A, B_1, B_2, ..., B_k, D та E знаходять з тотожності (9).

Приклад 2. Обчислити $\int \frac{xdx}{x^3 - x^2 + x - 1}$.

Оскільки $x^3 - x^2 + x - 1 = x^2(x-1) + x - 1 = (x^2+1)(x-1)$, то

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{x-1}.$$

За аналогією з попереднім прикладом маємо $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{(Ax+B)(x-1)+C(x^2+1)}{(x^2+1)(x-1)}$. Знаменники в обох частинах рівні, тому і чисельники мають бути рівні, тобто $x = (Ax + B)(x - 1) + C(x^2 + 1)$.

Якщо $x = 1$, то маємо $C = \frac{1}{2}$. Якщо $x = 0$, то $B = \frac{1}{2}$. Якщо $x = -1$, то $A = -\frac{1}{2}$.

Отже, розкладання тепер набуває вигляду

$$\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}{(x^2+1)} + \frac{\frac{1}{2}}{x-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

Інтегруючи цю рівність, дістанемо

$$\int \frac{xdx}{(x^2+1)(x-1)} = -\frac{1}{2}\int \frac{xdx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x-1} = -\frac{1}{4}\ln\left|x^2+1\right| +$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x + \frac{1}{2}\ln|x-1| + C.$$

4. Знаменник містить квадратний тричлен, який не розкладається на множники і має кратність l:

$$Q(x) = (x-\alpha)^k \cdot (x^2+px+q)^l.$$

У цьому випадку дріб $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ розкладається на суму найпростіших дробів чотирьох типів:

$$\frac{P_1(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \ldots + \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{B_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{B_2x+D_2}{\left(x^2+px+q\right)^2} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{B_lx+D_l}{\left(x^2+px+q\right)^l}, \tag{10}$$

коефіцієнти A_1, ..., A_k, B_1, D_1, ..., B_l, D_l знаходять з тотожності (10).

Приклад 3. Обчислити $\displaystyle\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}dx$.

$$\frac{x^3+x^2-4x+1}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Знайдемо коефіцієнти з урахуванням досвіду, набутого в попередніх прикладах. Отримаємо $A = B = 1$, $C = -5$; $D = 0$.

Отже,

$$\int \frac{x^3+x^2-4x+1}{(x^2+1)^2}dx = \int \frac{x+1}{x^2+1}dx - \int \frac{5xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{x^2+1} +$$

$$+\int \frac{dx}{x^2+1} - 5\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right| + \operatorname{arctg}x + \frac{5}{2(x^2+1)} + C.$$

§ 8. Інтегрування ірраціональних функцій

Познайомимося спочатку з поняттям раціональної функції $R(u, v)$ від двох змінних u і v. Цю функцію можна дістати з цих змінних і деяких сталих шляхом додавання, віднімання, множення і ділення над ними. Такою є, наприклад, функція

$$R(u,v) = \frac{4u^2v^3 + 7uv^2}{3u^3 + v^2}.$$

Нехай змінні u і v є функціями змінної x: $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$. Тоді складна функція $R[\varphi(x), \psi(x)]$ називається *раціональною функцією* від φ і ψ.

Розглянемо інтеграли від деяких ірраціональних функцій і покажемо, що вдало підібрані підстановки дають змогу їх звести до інтегралів від раціональних дробів. Відносно таких підстановок кажуть, що вони раціоналізують дані інтеграли.

Інтеграли вигляду $\int R(x, \sqrt[n]{x})\,dx$, де R — раціональна функція від x і $\sqrt[n]{x}$, $n \in N$, раціоналізуються підстановкою $t = \sqrt[n]{x}$. Якщо у підінтегральну функцію входять радикали з різними показниками, то слід застосувати аналогічну заміну змінної, причому n має дорівнювати спільному кратному всіх цих показників.

Приклад 1. Обчислити $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}$.

У підінтегральну функцію входять радикали з показниками 2 і 3. Їх найменше спільне кратне дорівнює 6, а тому інтеграл набуває вигляду $\int R(x, \sqrt[6]{x})\,dx$ і може бути раціоналізований підстановкою $t = \sqrt[6]{x}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} = \left| \begin{matrix} t = \sqrt[6]{x}; x = t^6 \\ dx = 6t^5 dt \end{matrix} \right| = 6\int \frac{t^5}{t^3 + t^2}\,dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}\,dt =$$

$$= 6\int\left(t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt = 6\int t^2 dt - 6\int t dt + 6\int dt - 6\int \frac{dt}{t+1} =$$
$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - 6\ln|t+1| + C = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x} + 6\sqrt[6]{x} - \ln\left|\sqrt[6]{x} + 1\right| + C.$$

Інтеграли вигляду $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$, де R — раціональна функція від x і $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$, $n \in N$, раціоналізуються підстановкою $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

Приклад 2. Обчислити $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x+1}$.

Візьмемо $t=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. Тоді $x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$; $dx=-\frac{4tdt}{(1+t^2)^2}$.

Отже,

$$\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x+1}=-\int t\,\frac{1+t^2}{2}\cdot\frac{4t}{(1+t^2)^2}dt=-2\int\frac{t^2dt}{(1+t^2)}=$$

$$=-2\int dt+2\int\frac{dt}{1+t^2}=-2t+2\operatorname{arctg}t+C=-2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C.$$

§ 9. Інтегрування тригонометричних функцій

Розглянемо інтеграли вигляду

$\int\sin mx\cos nx\,dx$, $\int\sin mx\sin nx\,dx$, $\int\cos mx\cos nx\,dx$ $(m\neq n)$.

Вони легко обчислюються шляхом використання тригонометричних формул, які виражають добуток тригонометричних функцій через відповідні суми і зведенням до інтегралів вигляду $\int\sin kx\,dx$ і $\int\cos kx\,dx$.

Приклад 1. Обчислити $\int\sin 2x\cos 5x\,dx$.

Оскільки $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)]$, то

$$\int\sin 2x\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int[\sin 7x+\sin(-3x)]dx=\frac{1}{2}\int\sin 7xdx-\frac{1}{2}\int\sin 3xdx=$$

$$=-\frac{1}{14}\cos 7x+\frac{1}{6}\cos 3x+C.$$

З а у в а ж е н н я. Для перетворення інших двох інтегралів використовують формули:

$$\sin\alpha\sin\beta=1/2\,[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)];$$
$$\cos\alpha\cos\beta=1/2\,[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)].$$

Інтеграли вигляду $\int\sin^m x\cdot\cos^n xdx$, де $m,n\in N$, легко обчислюються, якщо m і n — парні, через використання тригонометричних формул:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}; \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}; \quad \sin x \cos x = \frac{\sin 2x}{2}.$$

Якщо хоча б один з показників m і n — непарний (наприклад, $n = 2k + 1$), то, враховуючи, що $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, маємо

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x dx = \int \sin^m x \cdot \cos^{2k} x \cdot \cos x dx = \int \sin^m x (1-\sin^2 x)^k \cos x dx.$$

Отже, такі інтеграли легко обчислювати за допомогою підстановки $t = \sin x$.

Приклад 2. Обчислити $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$.

У нашому випадку $m = 2$, $n = 4$. Перетворимо підінтегральну функцію до вигляду

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)^2 \cdot \frac{1+\cos 2x}{2} dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int \sin^2 2x dx + \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{8}\int \frac{1-\cos 4x}{2} dx +$$

$$+ \frac{1}{8}\int \sin^2 2x \cdot \frac{1}{2} d(\sin 2x) = \frac{1}{16}\int dx - \frac{1}{16}\int \cos 4x dx +$$

$$+ \frac{1}{16}\int \sin^2 2x d(\sin 2x) = \frac{1}{16}x - \frac{1}{64}\sin 4x + \frac{1}{48}\sin^3 2x + C.$$

Інтеграли вигляду $\int R(\sin x, \cos x) dx$, де R — раціональна функція від $\sin x$ і $\cos x$, раціоналізуються підстановкою $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$. Справді,

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2};$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2};$$

$$x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2}{1+t^2} dt.$$

Отже, $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt$, де $r(t)$ — раціональна функція від t.

Приклад 3. Обчислити $\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5}$.

$$\int \frac{dx}{4\sin x + 3\cos x + 5} = \left| \begin{array}{l} tg\frac{x}{2} = t, \quad -\pi < x < \pi \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}; dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| =$$

$$= 2\int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{4\cdot\frac{2t}{1+t^2} + 3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 5} = 2\int \frac{dt}{2t^2 + 8t + 8} =$$

$$= \int \frac{dt}{(t+2)^2} = -\frac{1}{t+1} + C = -\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{x}{2} + 2} + C.$$

Підстановка $t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$, $-\pi < x < \pi$, хоча й є універсальною, проте призводить, як правило, до технічно складних викладок. А тому проаналізуємо кілька окремих випадків більш простої раціоналізації інтегралів, розглянутих вище. Нехай підінтегральна функція має одну з таких властивостей:

1) $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
2) $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$;
3) $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$.

Для обчислення інтеграла $R(\sin x, \cos x)dx$ зручно використовувати відповідно такі підстановки: $t = \cos x$; $t = \sin x$; $t = \operatorname{tg} x$.

Приклад 4. Обчислити $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx$.

У нашому випадку $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ діє підстановка $t = \cos x$. Маємо

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}dx = -\int \frac{1-t^2}{t^4}dt = -\int \frac{1}{t^4}dt + \int \frac{1}{t^2}dt = \frac{1}{3t^3} - \frac{1}{t} + C =$$

$$= \frac{1}{3\cos^3 x} - \frac{1}{\cos x} + C.$$

Контрольні запитання і завдання

1. Що таке первісна функція?
2. Дайте означення невизначеного інтеграла.
3. Які основні властивості невизначеного інтеграла?
4. У чому полягає метод інтегрування частинами та метод заміни змінної?

Задачі і вправи для самостійної роботи

Використовуючи безпосереднє інтегрування, знайти інтеграли.

8.1. $\int \frac{\sqrt{x} - x^3 e^x + x^2}{x^3} dx$. **8.2.** $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt[3]{x^4 + 1}}$. **8.3.** $\int \sqrt[5]{(8 - 3x)^6} dx$.

8.4. $\int \frac{x + 2}{2x - 1} dx$. **8.5.** $\int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$.

Методом заміни змінної обчислити інтеграли.

8.6. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x + 1}}$. **8.7.** $\int \frac{x + 1}{x\sqrt{x - 2}} dx$. **8.8.** $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} dx$. **8.9.** $\int \frac{e^{2x} dx}{\sqrt[4]{e^x + 1}}$.

8.10. $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x \ln x} dx$. **8.11.** $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}$. **8.12.** $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx$.

8.13. $\int \frac{1 + x^2}{x^4} dx$.

Методом інтегрування частинами обчислити інтеграли.

8.14. $\int x \cos^2 x dx$. **8.15.** $\int \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx$. **8.16.** $\int x \ln x dx$.

8.17. $\int (x + 1) e^x dx$. **8.18.** $\int \frac{\ln^2 x}{\sqrt{x^5}} dx$. **8.19.** $\int \frac{x \operatorname{arctg} x}{\sqrt{1 + x^2}} dx$.

Обчислити інтеграли від раціональних та ірраціональних дробів з квадратними тричленами у знаменнику.

8.20. $\int \frac{dx}{x^2 + 3x - 10}$. **8.21.** $\int \frac{dx}{x - x^2 - 2{,}5}$. **8.22.** $\int \frac{(3x - 1) dx}{4x^2 - 4x - 17}$.

8.23. $\int \frac{(x-2)dx}{x^2-7x+12}$. **8.24.** $\int \frac{dx}{\sqrt{12x-9x^2-2}}$. **8.25.** $\int \frac{8x-11}{\sqrt{5+2x-x^2}}dx$.

8.26. $\int \frac{(3x-1)dx}{\sqrt{x^2+2x+2}}$. **8.27.** $\int \frac{xdx}{\sqrt{3x^2-11x+2}}$.

Обчислити інтеграли від раціональних функцій.

8.28. $\int \frac{xdx}{(x+1)(2x+1)}$. **8.29.** $\int \frac{xdx}{2x^2-3x-2}$. **8.30.** $\int \frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}$.

8.31. $\int \frac{x^3+1}{x^3-x^2}dx$. **8.32.** $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$. **8.33.** $\int \frac{dx}{1+x^3}$.

8.34. $\int \frac{x^2+2x+6}{(x-1)(x-2)(x-4)}dx$. **8.35.** $\int \frac{x^2+1}{(x-1)^3(x+3)}dx$.

Обчислити інтеграли від ірраціональних функцій.

8.36. $\int \frac{\sqrt[6]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx$. **8.37.** $\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x}-\sqrt[4]{1-2x}}$.

8.38. $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\frac{dx}{x}$. **8.39.** $\int \frac{x^2+\sqrt{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}}dx$.

Обчислити інтеграли від тригонометричних функцій.

8.40. $\int \sin^3 x\cos^2 xdx$. **8.41.** $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx$. **8.42.** $\int \cos^6 xdx$.

8.43. $\int \frac{\sin xdx}{(1-\cos x)^2}$. **8.44.** $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$. **8.45.** $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$.

8.46. $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$. **8.47.** $\int \frac{\sin^2 xdx}{1-\mathrm{tg}x}$.

Обчислити інтеграли.

8.48. $\int \frac{x\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}dx$. **8.49.** $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx$. **8.50.** $\int \frac{dx}{(2x-3)\sqrt{4x-x^2}}$.

8.51. $\int \frac{\arcsin xdx}{x^2}$. **8.52.** $\int \frac{(\ln x-1)dx}{\ln^2 x}$. **8.53.** $\int \frac{xe^x dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

8.54. $\int \sin\sqrt{x}dx$. **8.55.** $\int \frac{dx}{\sin 2x-2\sin x}$.

Відповіді до глави 8

8.1. $C-\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}-e^x+\ln|x|$. **8.2.** $\dfrac{3}{8}\sqrt[3]{\left(x^4+1\right)^2}+C$.

8.3. $C-\dfrac{5}{33}(8-3x)^{\frac{11}{5}}$. **8.4.** $\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{4}\ln|2x-1|+C$.

8.5. $\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$. **8.6.** $\ln\left|\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1}\right|+C$.

8.7. $2\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x-2}{2}}+C$.

8.8. $x+\dfrac{6}{5}\cdot\sqrt[6]{x^5}+\dfrac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+6\sqrt[6]{x}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}-1\right|+C$.

8.9. $\dfrac{4}{21}(3e^x-4)\sqrt[4]{(e^x+1)^3}+C$.

8.10. $2\sqrt{1+\ln x}-\ln|\ln x|+2\ln\left|\sqrt{1+\ln x}-1\right|+C$.

8.11. $C-\dfrac{1}{a}\arcsin\dfrac{a}{|x|}$. **8.12.** $\dfrac{x}{4}\left(x^2-2\right)\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\dfrac{x}{2}+C$.

8.13. $C-\dfrac{\left(1+x^2\right)^3}{3x^3}$. **8.14.** $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{1}{4}x\sin 2x+\dfrac{1}{8}\cos 2x+C$.

8.15. $x\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}+C$. **8.16.** $\dfrac{x^2}{4}(2\ln x-1)+C$.

8.17. xe^x+C. **8.18.** $-\dfrac{8}{27\sqrt{x^3}}\left(\dfrac{9}{4}\ln^2 x+3\ln x+2\right)+C$.

8.19. $\sqrt{1+x^2}\operatorname{arctg}x-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C$. **8.20.** $\dfrac{1}{7}\ln\left|\dfrac{x-2}{x+5}\right|+C$.

8.21. $\dfrac{2}{3}\operatorname{arctg}\dfrac{1-2x}{3}+C$.

8.22. $\dfrac{3}{8}\left[\ln\left(4x^2-4x+17\right)+\dfrac{1}{6}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{4}\right]+C$.

8.23. $\ln\dfrac{(x-4)^2}{|x-3|}+C$. **8.24.** $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x-2}{\sqrt{2}}+C$.

8.25. $-8\sqrt{5+2x-x^2}-3\arcsin\dfrac{x-1}{\sqrt{6}}+C.$

8.26. $3\sqrt{x^2+2x+2}-4\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x+2}\right|+C.$

8.27. $\dfrac{1}{3}\sqrt{3x^2-11x+2}+\dfrac{11}{6\sqrt{3}}\ln\left|x-\dfrac{11}{6}+\sqrt{x^2-\dfrac{11}{3}x+\dfrac{2}{3}}\right|+C.$

8.28. $\ln\dfrac{|x+1|}{\sqrt{2x+1}}+C.$ **8.29.** $\dfrac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\cdot\sqrt{2x+1}\right]+C.$

8.30. $\ln\left|\dfrac{x^2}{x+1}\right|+\dfrac{6}{x+1}+C.$ **8.31.** $x+\dfrac{1}{x}+\ln\dfrac{(x-1)^2}{|x|}+C.$

8.32. $\ln\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C.$ **8.33.** $\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

8.34. $3\ln|x-1|-7\ln|x-2|+5\ln|x-4|+C.$

8.35. $-\dfrac{1}{4(x-1)^2}-\dfrac{3}{8(x-1)}+\dfrac{5}{32}\ln\left|\dfrac{x-1}{x+3}\right|+C.$

8.36. $\dfrac{6}{5}\sqrt[6]{x^5}-2\sqrt{x}+6\sqrt[6]{x}-6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x}+C.$

8.37. $-\sqrt{1-2x}-2\sqrt[4]{1-2x}-2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x}-1\right|+C.$

8.38. $\ln\left|\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}\right|+2\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}+C.$

8.39. $6\sqrt[3]{(1+x)^2}\left[\dfrac{(1+x)^2}{16}-\dfrac{1+x}{5}+\dfrac{\sqrt{1+x}}{7}+\dfrac{1}{4}\right]+C.$

8.40. $\dfrac{1}{15}\cos^3 x\left(3\cos^2 x-5\right)+C.$ **8.41.** $\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{4}\sin 2x-\dfrac{3}{2}x+C.$

8.42. $\dfrac{5}{16}x+\dfrac{1}{12}\sin 2x\left(\cos^4 x+\dfrac{5}{4}\cos^2 x+\dfrac{15}{8}\right)+C.$

8.43. $\dfrac{1}{\cos x-1}+C.$ **8.44.** $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right)+C.$

8.45. $\frac{2}{3}\operatorname{arctg}\frac{5\operatorname{tg}\frac{x}{2}+4}{3}+C.$ **8.46.** $\frac{1}{2-\operatorname{tg}\frac{x}{2}}+C.$

8.47. $\frac{\cos x(\cos x-\sin x)}{4}-\frac{1}{4}\ln|\cos x-\sin x|+C.$

8.48. $\frac{1}{2}\arcsin x-\frac{x+2}{2}\sqrt{1-x^2}+C.$ **8.49.** $3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2\right)+C.$

8.50. $-\frac{1}{\sqrt{15}}\ln\left|\frac{x+6+\sqrt{60x-15x^2}}{2x-3}\right|+C.$

8.51. $\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\right|-\frac{\arcsin x}{x}+C.$ **8.52.** $\frac{x}{\ln x}+C.$

8.53. $2x\sqrt{1+e^x}-4\sqrt{1+e^x}-2\ln\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}+C.$

8.54. $2\left(\sin\sqrt{x}-\sqrt{x}\cos\sqrt{x}\right)+C.$ **8.55.** $-\frac{1}{4}\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+\frac{1}{8\sin^2\frac{x}{2}}+C.$

Глава 9. Визначені та невласні інтеграли

§ 1. Поняття визначеного інтеграла, його геометричний та фізичний зміст

Визначений інтеграл є одним з основних понять математичного аналізу і широко використовується в різних галузях науки і техніки та в економічних дослідженнях. До поняття визначеного інтеграла приводять багато задач. Ось деякі з них.

Обчислення площі криволінійної трапеції. Нехай на відрізку $[a,b]$ визначена неперервна функція $y = f(x)$; вважатимемо, що $f(x) \geq 0$ для будь-якого $x \in [a,b]$. Фігуру, обмежену кривою $y = f(x)$, відрізком $[a,b]$ осі Ox, прямими $x = a$ та $x = b$, називають *криволінійною трапецією* (рис. 62).

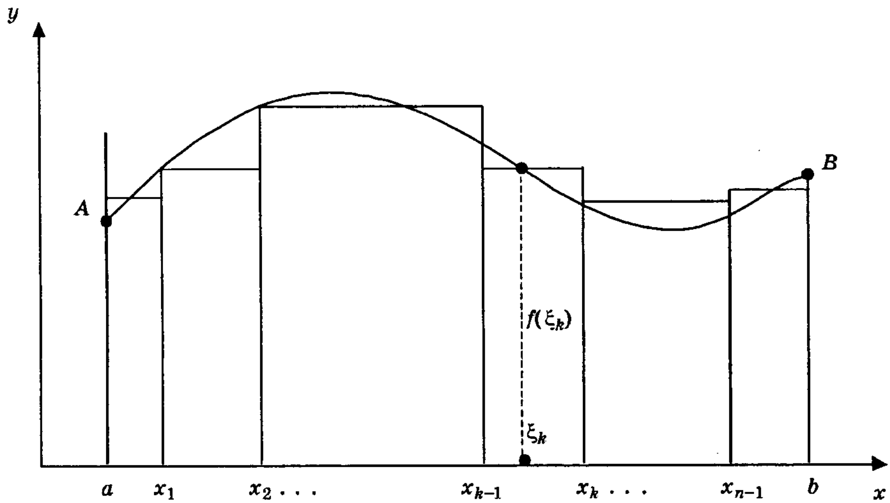

Рис. 62

Для обчислення площі F цієї криволінійної трапеції поділимо відрізок $[a, b]$ довільно на n частин точками $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ за умови $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{k-1} < x_k < \ldots < x_n = b$. Нехай $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, де $k = 1, 2, \ldots, n$ — довжина цих частин, а найбільшу із цих різниць у подальшому позначатимемо λ, тобто $\lambda = \max|\Delta x_k|$.

Через кожну точку ділення проведемо пряму, паралельну осі ординат, до перетину з кривою $y = f(x)$.

Ці прямі розділять площу трапеції на n елементарних частин (вузьких криволінійних трапецій). Замінимо кожну елементарну трапецію прямокутником з основою Δx_k та висотою $f(\xi_k)$, де ξ_k — будь-яке число з проміжку $[x_{k-1}, x_k]$, тобто $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$. Площа кожного такого прямокутника дорівнює $f(\xi_k)\Delta x_k$.

Сума площ всіх цих прямокутників

$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k;$$

її можна розглядати як наближену величину площі криволінійної трапеції, тобто

$$F \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Ця формула буде тим точнішою, чим менша величина Δx_k. Щоб дістати точну формулу для обчислення площі F криволінійної трапеції, потрібно в записаному наближенні перейти до границі, коли λ прямує до 0. Отже,

$$F = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{1}$$

Обчислення роботи змінної сили. Нехай потрібно визначити роботу A, яку виконує змінна сили $P = f(x)$ при переміщенні матеріальної точки вздовж прямої Ox від $x = a$ до $x = b$, причому напрям сили збігається з напрямом руху. Як і в попередньому прикладі, поділимо цілком довільно шлях $b—a$ на n частин, позначивши точки поділу $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Шлях розіб'ється на n ділянок $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \ldots, [x_{k-1}, x_k] \ldots [x_{n-1}, x_n]$. Припустимо, що вказані ділянки достатньо малі і при пересуванні точки M у межах кожного проміжку сила P зазнає незначних змін і дорівнює (далі міркування ведеться для k-ї ділянки, де $k = 1, 2, \ldots, n$) $P = f(\xi_k)$, де ξ_k — одна з точок проміжку $[x_{k-1}, x_k]$. Згідно з таким припущенням робота на k-й ділянці шляху $\Delta A_k \approx f(\xi_k)\,\Delta x_k$.

Провівши такі міркування для всіх n ділянок, дістанемо наближену величину роботи: $A \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$, або

$$A \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Якщо $\lambda \to 0$ ($\lambda = \max|\Delta x_k|$), тоді змінна сила P на проміжку Δx_k мало відрізняється від сталої. Тому обчислення дійсного значення роботи змінної сили зводиться до обчислення границі цієї суми при $\lambda \to 0$, тобто

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{2}$$

§ 2. Означення визначеного інтеграла та його економічний зміст

Границю суми типу (1) називають *визначеним інтегралом.*

До розгляду приведених сум зводяться не тільки задачі на обчислення площі та роботи змінної сили, наведені вище, а й інші численні задачі сучасного природознавства.

У зв'язку з цим потрібно дати суто аналітичне означення визначеного інтеграла, абстрагуючись від конкретних фізичних чи геометричних задач. Нехай $f(x)$ — неперервна функція на замкненому проміжку $[a, b]$. Розіб'ємо проміжок $[a, b]$ цілком довільно на n частин точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. У кожному проміжку $[x_{k-1}, x_k]$ довжиною $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ оберемо довільну точку ξ_k і обчислимо відповідне значення функції $f(\xi_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$:

$$x_{k-1} \le \xi_k \le x_k.$$

Нарешті утворимо суму $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, яку називають інтегральною сумою для функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Означення. *Якщо існує скінченна границя інтегральної суми при λ, що прямує до нуля, незалежно від способу поділу відрізка $[a, b]$ на частини та добору точок ξ_k, то ця границя називається визначеним інтегралом від функції $f(x)$ на проміжку $[a, b]$ і позначається* $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Отже,

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \int_a^b f(x)dx. \tag{3}$$

У цьому випадку функція $f(x)$ зветься інтегровною на проміжку $[a, b]$. Числа a та b —відповідно нижня та верхня межа інтегрування; $f(x)$ — підінтегральна функція; $f(x)dx$ — підінтегральний вираз; відрізок $[a, b]$ — проміжок інтегрування; x — змінна інтегрування.

Чи існує границя інтегральної суми, коли $\lambda \to 0$? І якщо існує, то коли?

Для неперервних функцій на проміжку $[a, b]$ відповідь позитивна. Справедлива така **теорема**. *Якщо функція* $f(x)$ *неперервна на відрізку* $[a, b]$ *або обмежена і має скінченну кількість точок розриву на цьому відрізку, то границя інтегральної суми існує, тобто функція* $f(x)$ *інтегровна на* $[a, b]$.

Доведення сформульованої теореми читач може знайти в більш детальних курсах математичного аналізу. Розглядаючи властивості визначеного інтеграла, будемо спиратися на згадану теорему як на безсумнівну істину.

Згідно з цим означенням рівності (1) та (2) можна записати у вигляді

$$F = \int_a^b f(x)dx; \quad A = \int_a^b f(x)dx. \tag{4}$$

Визначений інтеграл допускає різне фізичне тлумачення. Наприклад, це робота змінної сили.

Визначений інтеграл допускає різне геометричне тлумачення, одне з них — площа криволінійної трапеції.

Визначений інтеграл допускає різне економічне тлумачення, одне з яких наведено нижче.

Економічний зміст інтеграла. Нехай функція $y = f(x)$ описує зміну продуктивності деякого виробництва протягом часу. Знайдемо обсяг продукції U, вироблений за проміжок часу $[0; T]$.

Зазначимо, що коли продуктивність не змінюється протягом часу ($f(t)$ — стала функція), то обсяг продукції ΔU, виробленої за деякий проміжок часу $[t, t + \Delta t]$ задається формулою $\Delta U = f(t)\,\Delta t$. У загальному випадку справедлива наближена рівність $\Delta U \approx f(\xi)\,\Delta t$, де $\xi \in [t, t + \Delta t]$, яка буде тим точніша, чим менше Δt.

Розіб'ємо відрізок $[0; T]$ на проміжки часу точками:

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = T.$$

Для обсягу продукції ΔU_k, виробленої за проміжок часу $[t_{k-1}, t_k]$, маємо

$$\Delta U_k \approx f(\xi_k)\,\Delta t_k, \text{ де } \xi_k \in [t_{k-1}, t_k],\ \Delta t_k = t_k - t_{k-1},\ k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Отже, $\quad U \approx \sum_{k=1}^{n} \Delta U_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta t_k.$

Якщо $\lambda \to 0$ ($\lambda = \max \Delta t_k$), кожна з використаних наближених рівностей стає більш точною, отже

$$U = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta t_k.$$

Враховуючи означення визначеного інтеграла, дістанемо

$$U = \int_0^T f(t)dt. \tag{5}$$

Тобто якщо $f(t)$ — продуктивність праці в момент t, то $\int_0^T f(t)dt$ — обсяг виробленої продукції за проміжок $[0; T]$, що чисельно дорівнює площі під графіком функції $y = f(t)$, яка описує зміну продуктивності праці з часом протягом $[0; T]$, оскільки одержаний інтеграл визначає площу криволінійної трапеції.

§ 3. Основні властивості визначеного інтеграла та його обчислення

З означення визначеного інтеграла та основних теорем про границі випливають такі властивості.

1. Визначений інтеграл від одиничної функції дорівнює довжині проміжку інтегрування:

$$\int_a^b dx = b - a. \tag{6}$$

Дійсно, якщо $f(x) \equiv 1$ на $[a, b]$, то $\sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = b - a$ і границя сталої дорівнює цій сталій.

2. Якщо функція $f(x)$ інтегровна на $[a, b]$, то для будь-якого числа α

$$\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx. \tag{7}$$

Оскільки сталий множник можна винести за знак границі, то, переходячи до границі при $\lambda \to 0$ у рівності $\sum_{k=1}^{n} \alpha f(\xi_k)\Delta x_k = \alpha \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$, дістанемо формулу (7).

3. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровні на $[a, b]$, то $f(x) + g(x)$ також інтегровні на $[a, b]$ і

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \tag{8}$$

4. $\int_a^a f(x)dx = 0.$ (9)

5. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$ (10)

6. Якщо $\int\limits_a^c f(x)dx$ і $\int\limits_c^b f(x)dx$ існують, то

$$\int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx\,. \tag{11}$$

7. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ інтегровані на $[a, b]$ і $f(x) \le g(x)$ для всіх $x \in [a, b]$, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b g(x)dx\,. \tag{12}$$

8. ***Теорема про середнє значення інтеграла.*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то для певної точки $c \in [a, b]$ справджується рівність

$$\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a). \tag{13}$$

Нехай m — найменше, а M — найбільше значення функції $f(x)$ на $[a, b]$. Тоді $m \le f(x) \le M$ для всіх $x \in [a, b]$, а тому за властивостями 1, 2, 7 $m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a)$. Звідси маємо $m \le \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le M$. Неперервна на $[a, b]$ функція $f(x)$ набуває всіх проміжних значень між m і M, а тому знайдеться така точка $c \in [a, b]$, що $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$.

9. Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$ і $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$, то $F'(x) = f(x)$ для всіх $x \in [a, b]$.

Для доведення застосуємо визначення похідної.

Передусім функція $f(x)$ неперервна на $[a, x]$, якщо $x \in [a, b]$. Нехай Δx — приріст аргументу x. Тоді $\Delta F = F(x+\Delta x) - F(x) = \int\limits_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int\limits_a^x f(t)dt = \int\limits_x^{x+\Delta x} f(t)dt$ (згідно з властивостю 6).

Застосувавши властивість 8, дістаємо

$$\Delta F = f(c)((x+\Delta x) - x) = f(c)\Delta x,$$

причому c лежить між x і $x+\Delta x$. Тепер маємо

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(c).$$

Оскільки у точці x функція $f(x)$ неперервна, то $\lim\limits_{c \to x} f(c) = f(x)$. Нарешті, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c)$, оскільки c лежить між x і $x+\Delta x$.

10. ***Основна формула інтегрального числення.*** Якщо функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то справджується формула Ньютона — Лейбніца

$$\int_a^b f(x)dx = \varphi(b) - \varphi(a), \tag{14}$$

де $\varphi(x)$ — довільна первісна функції $f(x)$.

Справді, за властивістю 9 функція $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ первісна для функції $f(x)$. Тому $\varphi(x) = F(x) + C$, де $C \in R$ — довільна первісна функції $f(x)$. Звідси

$$\varphi(b) - \varphi(a) = (C + \int_a^b f(t)dt) - (C + \int_a^a f(t)dt) = \int_a^b f(t)dt.$$

Примітка. Різницю $\varphi(b) - \varphi(a)$ часто позначають символом $\varphi(x)\Big|_a^b$.

Приклад 1. Обчислити $\int_0^\pi \sin x dx$.

Маємо $\int_0^\pi \sin x dx = -\cos x\Big|_0^\pi = -(\cos\pi - \cos 0) = 2$.

11. ***Формула інтегрування частинами.*** Якщо функції $U(x)$ і $V(x)$ неперервні на $[a, b]$ і мають неперервні похідні, то

$$\int_a^b U(x)V'(x)dx = U(x)V(x)\Big|_a^b - \int_a^b U'(x)V(x)dx. \tag{15}$$

Справді, оскільки $(U(x)V(x))' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$, то за формулою Ньютона — Лейбніца $\int_a^b (U'(x)V(x) + U(x)V'(x))dx = U(x)V(x)\Big|_a^b$.

Далі до лівої частини слід застосувати властивість 3.

Приклад 2. Обчислити $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

$$\int_1^e x^2 \ln x dx = \begin{vmatrix} U = \ln x; & dV = x^2 dx \\ dU = \dfrac{dx}{x}; & V = \dfrac{x^3}{3} \end{vmatrix} =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3}\ln x\right)\Bigg|_1^e - \frac{1}{3}\int_1^e x^3 \frac{dx}{x} = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{x^3}{9}\right)\Bigg|_1^e = \frac{1}{9}(2e^3 + 1).$$

12. ***Формула заміни змінної у визначеному інтегралі.*** Якщо: а) функція $x = \varphi(t)$ неперервна на проміжку $[\alpha, \beta]$ і має на цьому проміжку неперервну похідну; б) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$ і $\varphi(t) \in [\alpha, \beta]$ за умови $t \in [\alpha, \beta]$; с) функція $f(x)$ неперервна на $[a, b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt. \quad (16)$$

Нехай $F(x)$ — первісна функції $f(x)$ на $[a, b]$ (вона існує за властивістю 9).

Тоді $F(\varphi(t))$ — первісна функції $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ на $[\alpha, \beta]$.

Справді,

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

Застосувавши двічі формулу Ньютона — Лейбніца, дістанемо

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Приклад 3. Обчислити $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1 + x^2}dx$.

Застосуємо властивість 12.

Позначивши $\sqrt{1 + x^2} = t$, знайдемо $x = \sqrt{t^2 - 1}$, $dx = \dfrac{tdt}{\sqrt{t^2 - 1}}$.

Визначаємо нові межі. З рівності $t = \sqrt{x^2 + 1}$ маємо $t = 1$ при $x = 0$; $t = 2$ при $x = \sqrt{3}$.

Отже,

$$I = \int_1^2 \sqrt{t^2 - 1}\; t \frac{tdt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \int_1^2 t^2 dt = \frac{t^3}{3}\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

§ 4. Наближене обчислення визначених інтегралів

Для деяких неперервних підінтегральних функцій $f(x)$ не завжди можна знайти первісну, виражену через елементарні функції. У цих випадках обчислення визначеного інтеграла за формулою Ньютона — Лейбніца неможливе. В усіх цих випадках застосовують різноманітні методи наближеного інтегрування, які дають змогу використовувати сучасну обчислювальну техніку. Формули, що їх зараз подамо, базуються на тлумаченні визначеного інтеграла як площі криволінійної трапеції та наближеним його представленням інтегральною сумою:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k. \tag{17}$$

Ідея такого методу геометрично базується на тому, що графік $f(x)$ заміняється близькою до цього графіка лінією. В одному випадку (при виводі формули прямокутників) графік $f(x)$ заміняється ступінчастою ламаною (рис. 63). В іншому випадку (при виводі формули трапецій) графік $f(x)$ заміняється ламаною, вписаною в цей графік (рис. 64). При виводі формули Сімпсона ланки згадуваної ламаної заміняються дугами парабол другого степеня. Нижче використовується позначення $y_k = f(x_k)$.

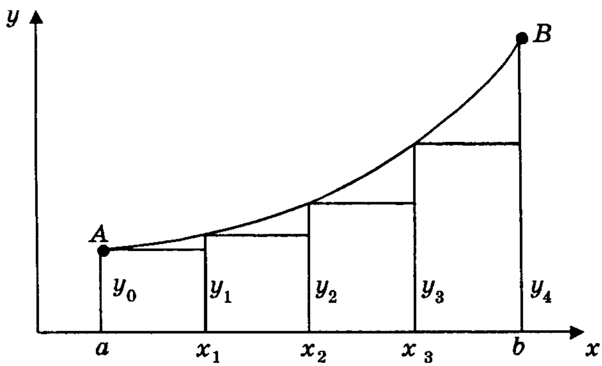

Рис. 63

1. Складемо інтегральну суму, яка відповідає подрібненню $[a,b]$ на n рівних частин і вибору точок $\xi_k = x_k$:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k = \Delta x(y_1 + y_2 + \ldots + y_n).$$

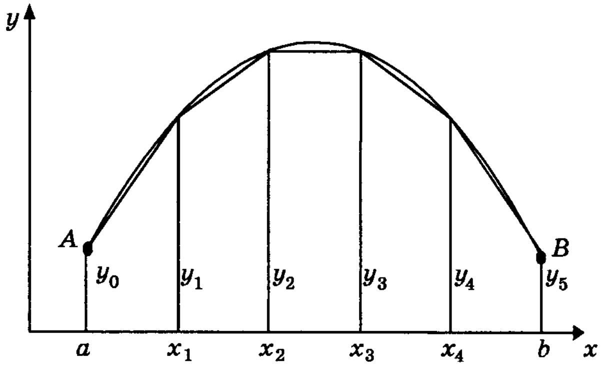

Рис. 64

Звідси визначений інтеграл можна обчислювати за формулою

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(y_1 + y_2 + \ldots + y_n), \tag{18}$$

яку називають *формулою прямокутників*. Чим більше буде n, тим меншим буде крок $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ і права частина записаного наближення буде давати більш точне значення інтеграла.

2. Розіб'ємо проміжок $[a, b]$ так, як і в попередньому випадку, і впишемо в криву AB ламану (рис. 64). Внаслідок такої побудови дістанемо n трапецій, сума площ яких наближено дає значення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0 + y_1}{2}\Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2}\Delta x + \ldots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2}\Delta x,$$

або

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1}\right), \tag{19}$$

останній вираз називають *формулою трапецій*.

3. Якщо відрізок інтегрування $[a, b]$ поділити на парну кількість рівних частин (тобто $2n$) і позначити $y_k = f(x_k)$, де $x_k = a + \Delta x \cdot k$ — точки поділу, $k = 0, 1, 2, \ldots, 2n$, тоді визначений інтеграл можна обчислити за формулою

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6n}[y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \ldots + y_{2n-1})], \quad (20)$$

яку називають *формулою Сімпсона*.

Ця формула дає більш точне значення визначеного інтеграла тому, що для її доведення використовують метод парабол, за яким на кожному відрізку $[x_{k-1}, x_k]$ три значення функції $f(x)$ входять до інтегральної суми.

На прикладі формули трапеції розглянемо питання про оцінку похибки від її застосування, оскільки без цього формула буде мати лише якісний характер.

Позначимо через σ_n вираз, який стоїть у правій частині формули трапеції. Тоді $\Delta = \left|\int_a^b f(x)dx - \sigma_n\right|$ — абсолютна похибка від застосування формули трапеції. Позначимо через M максимальне значення модуля другої похідної $f''(x)$ підінтегральної функції $y = f(x)$ на $[a,b]$, тобто $M = \max\limits_{x\in[a,b]}|f''(x)|$.

У більш детальних курсах вищої математики доведено, що

$$\Delta \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}M.$$

Приклад 1. Обчислити інтеграл $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx$, точне значення якого дорівнює одиниці.

Згідно з формулами:

1) *прямокутників* при $n = 3$ дістанемо

$$I \approx \frac{\pi}{6}(y_1 + y_2 + y_3) = \frac{\pi}{6}\left(\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{2}\right) \approx 1{,}237;$$

2) *трапецій* при $n = 3$ одержимо

$$I \approx \frac{\pi}{6}\left(\frac{y_0 + y_3}{2} + y_1 + y_2\right) = \frac{\pi}{2}\left(2 + \sqrt{3}\right) \approx 0{,}967;$$

3) *парабол* при $n = 2$ маємо

$$I \approx \frac{\pi}{12}[y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)] \approx 0{,}99951.$$

Зауважимо, що всі три формули тим точніші, чим більше n, і їх абсолютна похибка при $n \to \infty$ прямує до нуля відповідно до означення поняття визначеного інтеграла.

§ 5. Невласні інтеграли

Згідно з теоремою існування визначеного інтеграла, цей інтеграл існує, якщо виконано умови:

1) відрізок інтегрування $[a,b]$ скінченний;

2) підінтегральна функція $f(x)$ неперервна або обмежена і має скінченну кількість точок розриву.

Якщо хоча б одна з умов не виконується, то визначений інтеграл називають *невласним.*

Якщо не виконується перша умова, тобто $b=\infty$ або $a=-\infty$, або $a=-\infty$ та $b=\infty$, то інтеграли називаються *невласними інтегралами з нескінченними межами.*

Якщо не виконується лише друга умова, то підінтегральна функція $f(x)$ має точку розриву другого роду на відрізку інтегрування $[a,b]$. У цьому випадку $\int_a^b f(x)dx$ називають *невласним інтегралом від розривної функції або від функції, необмеженої в точках відрізку інтегрування.*

1. ***Нескінченний проміжок.*** Нехай функція $f(x)$ неперервна для всіх вартостей x з проміжку $[a,\infty)$, тоді визначений інтеграл

$$I(b)=\int_a^b f(x)dx,$$

яке б не було $b \ge a$, існує.

Якщо існує границя інтеграла $I(b)$, коли $b\to\infty$, то її звуть *невласним інтегралом* від функції $f(x)$ у межах від a до ∞ і позначають символом $\int_a^\infty f(x)dx$. Отже, за означенням

$$\int_a^\infty f(x)dx=\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx. \tag{21}$$

Якщо границя існує, то інтеграл $\int_a^\infty f(x)dx$ зветься *збіжним*, якщо ні — *розбіжним*. Крім цього, в першому випадку говорять також, що інтеграл як невласний має зміст, в другому — що інтеграл не має змісту (йому не можна приписати якусь числову величину).

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\int_0^\infty e^{-x}dx$.

Маємо

$$\int_0^{\infty} e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b\to\infty}[1-e^{-b}] = 1.$$

У цьому випадку невласний інтеграл збіжний. Його можна вважати за величину площі фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $y = 0$ і $y = e^{-x}$.

Невласні інтеграли для інших нескінченних проміжків визначають так само:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)dx. \tag{22}$$

2. ***Необмежена функція.*** Нехай функція $f(x)$ неперервна, а отже, й інтегровна на проміжку $[a, b-\beta]$, де β — будь-яке як завгодно мале додатне число, але необмежена на проміжку $(b-\beta, b)$. Тоді, якщо існує границя інтеграла $\int_a^{b-\beta} f(x)dx$ при $\beta \to +0$ $(\beta > 0)$, то її називають *невласним інтегралом* від необмеженої функції і позначають

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\beta\to+0}\int_a^{b-\beta} f(x)dx. \tag{23}$$

Інтеграл зветься *збіжним* чи *розбіжним* залежно від того, існує чи ні границя правої частини останньої рівності.

Приклад 2. Обчислити інтеграл $\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

В околі $x = 1$ підінтегральна функція необмежена. Отже,

$$\int_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\beta\to+0}\int_{1/2}^{1-\beta}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= \lim_{\beta\to+0}\arcsin x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1-\beta} = \lim_{\beta\to+0}\left[\arcsin(1-\beta) - \arcsin\frac{1}{2}\right] =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Якщо функція $f(x)$ необмежена в околі точки a і на проміжку $a < x \le b$ неперервна, то згідно з означенням

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha\to+0}\int_{a+\alpha}^{b} f(x)dx.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

В околі $x = 0$ підінтегральна функція необмежена. Отже,

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\alpha\to+0} \int\limits_\alpha^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\lim_{\alpha\to+0}(1-\sqrt{\alpha}) = 2,$$

інтеграл збіжний.

§ 6. Застосування визначених інтегралів

Обчислення площ. Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x) \geq 0$, то згідно з формулою (3) обчислення площі криволінійної трапеції, зображеної на рис. 62, можна знайти за формулою

$$F = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{24}$$

Якщо на відрізку $[a,b]$ функція $f(x) \leq 0$, то криволінійна трапеція, обмежена кривою $f(x)$, відрізком $[a,b]$ та прямими $x = a$ і $x = b$, буде розміщена нижче осі Ox. У цьому разі визначений інтеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ буде ≤ 0. Проте площа є невід'ємною величиною, тому площу криволінійної трапеції, розміщеної нижче осі Ox, треба знаходити за формулою

$$F = -\int\limits_a^b f(x)dx, \ (f(x) \leq 0), \text{ або } F = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|. \tag{25}$$

Якщо $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ кілька разів змінює свій знак, то інтеграл на відрізку $[a,b]$ треба розбити на суму інтегралів за частковими відрізками. Інтеграл буде додатним на тих відрізках, де $f(x) \geq 0$, та від'ємним там, де $f(x) < 0$. Інтеграл по відрізку $[a,b]$ дає різницю площ, що лежать вище та нижче осі Ox.

Отже, щоб одержати суму площ (без врахування розміщення відносно осі Ox), треба знайти суму абсолютних величин інтегралів за частковими відрізками або обчислити інтеграл від абсолютного значення функції, тобто

$$F = \int\limits_a^b |f(x)|dx. \tag{26}$$

Якщо треба обчислити площу фігури, обмеженої кривими $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ та прямими $x = a$, $x = b$ (рис. 65), то при $f_2(x) \geq f_1(x)$ її можна знайти за формулою

$$F = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx. \quad (27)$$

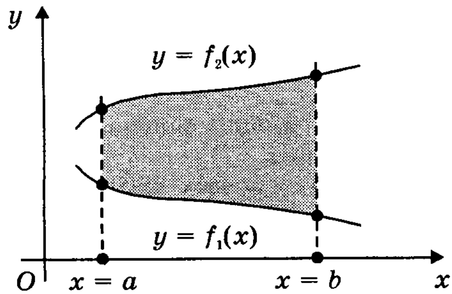

Рис. 65

Приклад 1. Обчислити площу фігури, обмеженої графіком функції $y = \sin x$ і віссю абсцис $y = 0$ за умови $0 \leq x \leq 2\pi$.

Маємо $y \geq 0$, якщо $0 \leq x \leq \pi$, і $y \leq 0$, якщо $\pi \leq x \leq 2\pi$.

Отже,

$$F = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} + \cos x\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4.$$

Приклад 2. Обчислити площу області, обмеженої лініями $y = \sin x$ та $y = \frac{2}{\pi}x$ (рис. 66).

Задані лінії перетинаються в точках з абсцисами $x_1 = 0$ та $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Отже, згідно з формулою (27), маємо

$$F = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \frac{2}{\pi}x) dx = (-\cos x - \frac{x^2}{\pi})\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

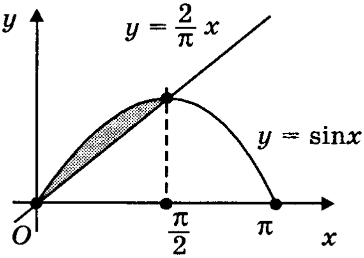

Рис. 66

Приклад 3. Обчислити площу фігури, обмеженої графіками функцій $y = 2 - x^2$; $y = x$ (рис. 67).

Знайдемо точки перетину заданих ліній. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x, \\ y = 2 - x^2, \end{cases}$$

звідки $x_1 = -2$; $x_2 = 1$.

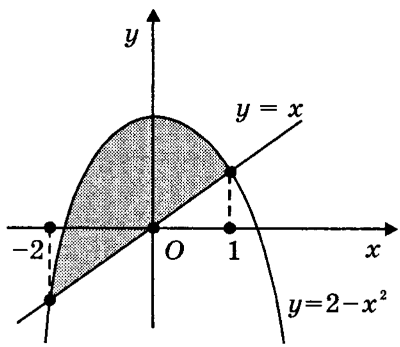

Рис. 67

Площу знайдемо згідно з формулою (27)

$$F = \int_{-2}^{1} \left[(2 - x^2) - x\right] dx = \left(2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \frac{9}{2}.$$

Довжина дуги кривої. *Довжиною дуги* називається границя довжини вписаної ламаної лінії при необмеженому зменшенні довжини її ланок.

Знайти довжину L дуги $y = y(x)$, $a \le x \le b$, де $y(x)$ — неперервна диференційовна функція на $[a,b]$.

Розіб'ємо $[a,b]$ на частини точками поділу x_k (рис. 68). Впишемо в дугу кривої $a \le x \le b$ ламану лінію так, щоб абсциси її вершин були x_k. Довжина однієї ланки ламаної (згідно з теоремою Піфагора і формулою Лагранжа)

$$M_kM_{k+1} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2} = \Delta x_k\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2} = \Delta x_k\sqrt{1 + y'^2(\xi_k)}.$$

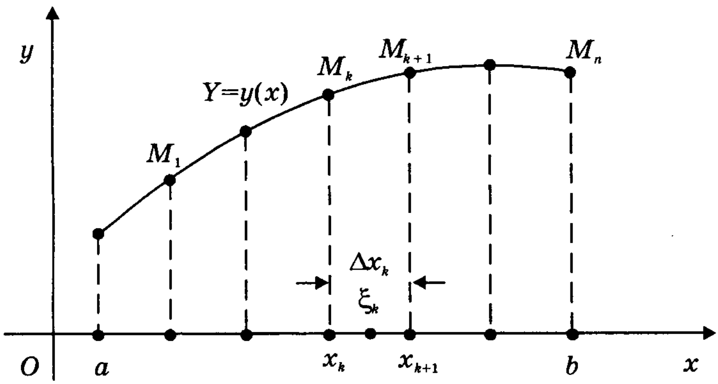

Рис. 68

Довжина ламаної $M_0M_1M_2...M_n = \sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + y'^2(\xi_k)}\Delta x_k$.

Отже,

$$L = \lim_{\lambda \to 0}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{1 + y'^2(\xi_k)}\Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx, \tag{28}$$

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n}|\Delta x_k|.$$

Наслідок. Якщо дуга задана параметрично $x = x(t)$, $y = y(t)$, $\alpha \le t \le \beta$, то її довжину знаходять за формулою

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,dt. \tag{29}$$

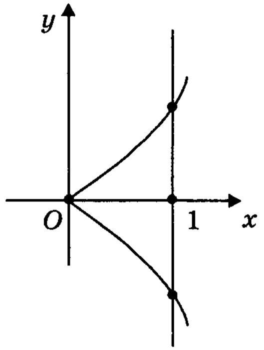

Рис. 69

Приклад 4. Обчислити довжину дуги кривої $y^2 = x^3$, якщо $0 \le x \le 1$ (рис. 69).

З рівняння $y^2 = x^3$ знаходимо $y = \pm\sqrt{x^3} = \pm x^{\frac{3}{2}}$ ("плюс" — верхня ланка, "мінус" — нижня) Обчислимо довжину однієї частини і помножимо її на 2. Отже,

$$L = 2\int_0^1 \sqrt{1+y'^2}dx = 2\int_0^1 \sqrt{1+\frac{9x}{4}}dx = \frac{16}{27}(1+\frac{9}{4}x)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 = \frac{2}{27}(13\sqrt{13}-8).$$

Приклад 5. Обчислити довжину дуги однієї арки циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1-\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$ (рис. 70).

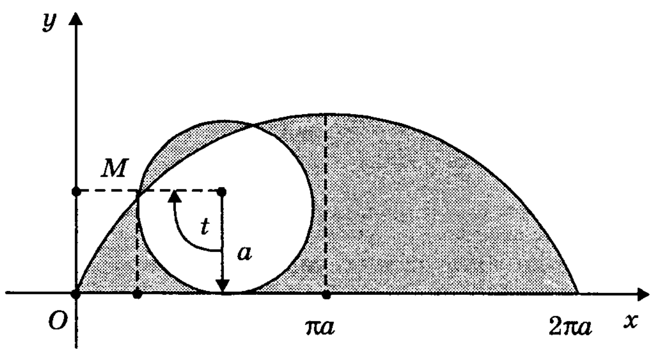

Рис. 70

З рівняння циклоїди знаходимо $x'(t) = a(1-\cos t)$, $y' = a\sin t$. Якщо x пробігає відрізок $[0; 2\pi a]$, параметр t пробігає відрізок $[0; 2\pi]$. Отже, довжина дуги

$$L=\int_0^{2\pi a}\sqrt{1+y'^2(x)}dx=\int_0^{2\pi}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt=a\int_0^{2\pi}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2 t}dt=$$

$$=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt=-4a\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi}=8a.$$

Об'єми тіл. Нехай найменша і найбільша абсциси точок тіла будуть a і b. Припустимо, що $S(x)$ — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі Ox, яка перетинає її в точці з абсцисою x (рис. 71).

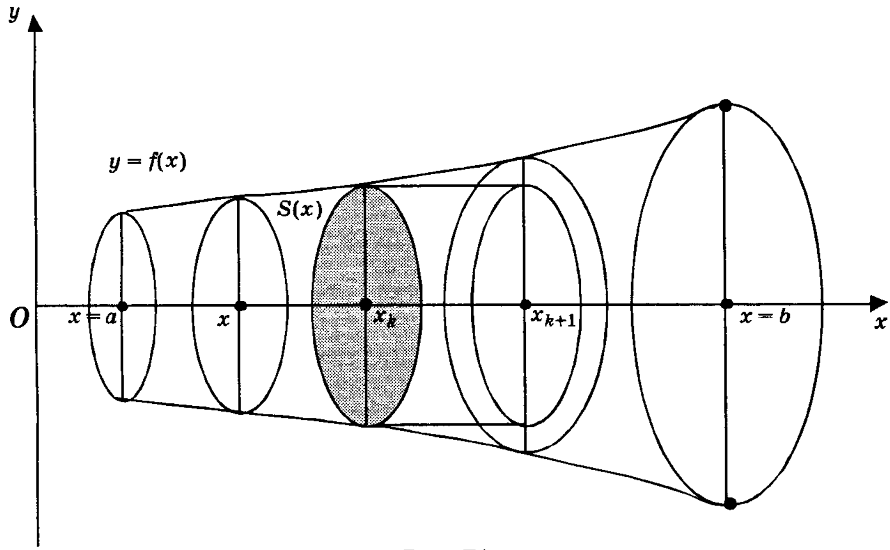

Рис. 71

Розіб'ємо $[a,b]$ на частини точками поділу x_k і проведемо площини $x=x_k$. Побудуємо циліндри з основами $S(x_k)$ і висотами $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k$. Об'єм такого циліндра — $S(x_k)\Delta x_k$ (рис. 71).

Отже, об'єм тіла

$$V=\lim_{\substack{\max|\Delta x_k|\to 0\\ 1\le k\le n}}\sum_{k=1}^{n}S(x_k)\Delta x_k=\int_a^b S(x)dx;\quad V=\int_a^b S(x)dx. \qquad (30)$$

З а у в а ж е н н я. Якщо тіло обмежене поверхнею, одержаною від обертання кривої $y=y(x)$ навколо осі Ox, і площинами $x=a; x=b$ (рис. 71), тоді переріз його площиною, перпендикулярною до осі, перетинає цю вісь в точці з абсцисою x і є кругом радіуса $y(x)$, а тому $S(x)=\pi y^2(x)$. Отже, згідно з формулою (30), об'єм тіла обертання можна знайти так:

$$V = \pi\int_a^b y^2 dx, \tag{31}$$

а площу поверхні обертання —

$$F_{пов} = 2\pi\int_a^b y\sqrt{1 + y'^2(x)}dx. \tag{32}$$

Приклад 6. Обчислити об'єм кулі радіусом R.

Помістивши центр кулі на початок координат, ми зможемо розглядати його як тіло, обмежене поверхнею, одержаною від обертання півкола $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ на $[-R, R]$ навколо осі Ox. Отже,

$$V = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - x^2)dx = 2\pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Приклад 7. Обчислити площу поясу, утвореного обертанням півкола $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R < a \le x \le b < R$, навколо осі Ox.

Тут $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$; $1 + y'^2 = \dfrac{R^2}{R^2 - x^2}$.

Тоді $F_{пов} = 2\pi R\int_a^b dx = 2\pi R(b - a)$.

Приклад 8. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням фігури, обмеженої кривими $y = 2x - x^2$, $y = 0$: а) навколо осі Ox; б) навколо осі Oy.

Крива $y = 2x - x^2$ перетинає вісь Ox у точках $x = 0; x = 2$, отже,

$$V_x = \pi\int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi\left(\frac{4}{3}x^3 - x^4 + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{16}{15}\pi;$$

$$V_y = \pi\int_0^1\left[\left(1 + \sqrt{1-y}\right)^2 - \left(1 - \sqrt{1-y}\right)^2\right]dy =$$

$$= 4\pi\int_0^1\sqrt{1-y}\,dy = -4\pi\int_0^1(1-y)^{\frac{1}{2}}d(1-y) = -4\pi\frac{\sqrt{(1-y)^3}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^1 =$$

$$= -\frac{8}{3}\pi\sqrt{(1-y)^3}\Big|_0^1 = \frac{8}{3}\pi.$$

З а у в а ж е н н я. Для обчислення V_y використано формулу $V_y = \pi\int_c^d [x_2^2(y) - x_1^2(y)]dy$; c, d — межі інтегрування за змінною y, де x_1 та x_2 отримано з $y = 2x - x^2$; $y = 1-(x-1)^2$; $x = 1 \pm \sqrt{1-y}$. Отже, $x_1 = 1 - \sqrt{1-y}$; $x_2 = 1 + \sqrt{1-y}$.

§ 7. Використання визначеного інтеграла в економіці

Раніше ми розглядали економічний зміст визначеного інтеграла, який виражає обсяг виробленої продукції при відомій функції продуктивності праці. Наведемо інші приклади використання інтеграла в економіці.

Якщо у функції Кобба — Дугласа (див. гл. 10) покласти, що витрати праці є лінійною залежністю від часу, а витрати капіталу незмінні, тоді вона набере вигляду $r(t) = (At + B)e^{Ct}$. Обсяг випущеної продукції за T років

$$R = \int_0^T (At + B)e^{Ct}dt. \qquad (33)$$

Приклад 1. Знайти обсяг продукції, виробленої за три роки, якщо функція Кобба — Дугласа має вигляд $r(t) = (1+2t)e^{4t}$.

Згідно з формулою (33) обсяг виробленої продукції

$$R = \int_0^3 (1+2t)e^{4t}dt.$$

Використаємо метод інтегрування частинами. Нехай $U = 1 + 2t$; $dV = e^{4t}dt$. Тоді $dU = 2dt$, $V = \int e^{4t}dt = \frac{1}{4}e^{4t}$.

Отже,

$$R = (1+2t)\frac{1}{4}e^{4t}\Big|_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{4}e^{4t}\cdot 2dt = \frac{1}{4}(7e^{12}-1) - \frac{1}{8}e^{4t}\Big|_0^3 =$$

$$= \frac{1}{4}(7e^{12}-1) - \frac{1}{8}(e^{12}-1) = \frac{1}{8}(13e^{12}-1).$$

Досліджуючи *криву Лоренца* — залежність процента доходів від процента населення, що має їх (крива OBA, рис. 72), ми можемо оцінити ступінь нерівності в розподілі доходів населення. При рівномірному розподілі доходів крива Лоренца вироджується в пряму — бісектрису OA, а тому площа фігури OAB між бісектрисою OA і кривою Лоренца, віднесена до площі трикутника OAC (коефіцієнт Джіні), характеризує ступінь нерівності в розподілі доходів населення.

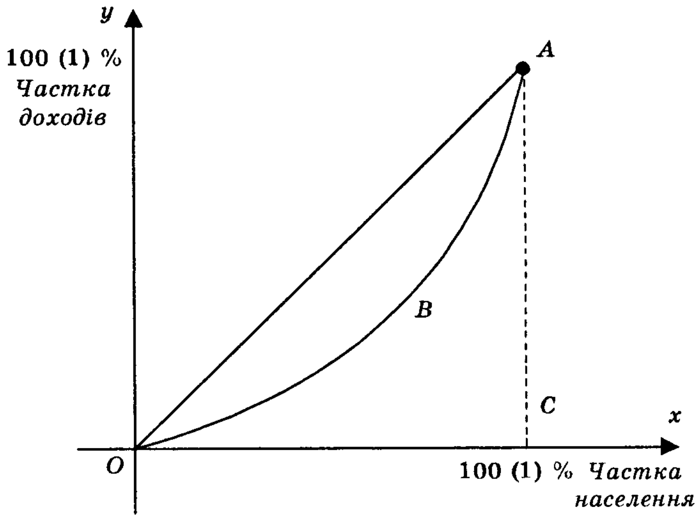

Рис. 72

Приклад 2. За даними дослідження в розподілі доходів в одній з держав крива Лоренца OBA (рис. 72) може бути описана рівнянням $y = 1 - \sqrt{1 - x^2}$, де x — частка населення, y — частка доходів населення. Обчислити коефіцієнт Джіні.

Очевидно, коефіцієнт Джіні (рис. 72) $K = \dfrac{S_{OAB}}{S_{OAC}} = 1 - \dfrac{S_{OBAC}}{S_{\Delta OAC}} =$

$= 1 - 2S_{OBAC}$, оскільки $S_{\Delta OAC} = \dfrac{1}{2}$,

$$S_{OBAC} = \int_0^1 (1 - \sqrt{1 - x^2})dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx = 1 - \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = \sin t \\ dx = \cos t\,dt \end{matrix} \right| = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t}\,\cos t\,dt = 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2}\,dt =$$

$$= 1 - \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = 1 - \frac{\pi}{4}.$$

Звідси $K = 1 - 2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right) = 1 - 2 + \frac{\pi}{2} \approx 0{,}57.$

Достатньо високе значення k показує суттєво нерівномірний розподіл доходів серед населення в державі.

Визначення початкової суми за її кінцевою величиною, одержаною через час t (років) при річному проценті (процентній ставці) p, називається *дисконтуванням*.

Задачі такого типу зустрічаються при визначенні економічної ефективності капітальних вкладень.

Нехай K_n — кінцева сума, одержана за n років, і K_0 — сума, що дисконтується (початкова сума), яку у фінансовому аналізі називають *теперішньою вартістю* очікуваних в майбутньому грошових надходжень. Якщо проценти прості (застосовуються до капітальних вкладень в межах лише одного фінансового року), то $K_n = K_0(1 + \frac{p}{100})$, де $\frac{p}{100}$ — номінальна річна процентна ставка, виражена в десяткових дробах. Звідси $K_0 = \dfrac{K_n}{(1 + \frac{p}{100})}$.

У випадку складних процентів $K_n = K_0(1 + \frac{p}{100m})^{mn}$, а тому $K_0 = \dfrac{K_n}{(1 + \frac{p}{100m})^{mn}}$, де m — число розрахункових періодів у році.

Нехай щорічний дохід, що надходить, змінюється з часом і описується функцією $f(n)$ і при відповідній процентній ставці $\frac{p}{100}$ проценти нараховуються неперервно. Враховуючи раніше наведений приклад (розділ II, гл. 5, §5), можна показати, що в цьому випадку дисконтований дохід K_0 за час N обчислюється за формулою

$$K_0 = \int_0^N f(n)e^{-\frac{Pn}{100}}dn. \qquad (34)$$

Приклад 3. Знайти дисконтований дохід за три роки при процентній ставці 6 %, якщо початкові (базові) капіталовкладення становили 10 млн грн і планується щорічно збільшувати капіталовкладення на 1 млн гривень.

Очевидно, що капіталовкладення задаються функцією $f(n) = 10 + 1 \cdot n = 10 + n$. Тоді згідно з формулою (34) дисконтована сума вкладень буде

$$K_0 = \int_0^3 (10 + n)e^{-0{,}06n}dn.$$

Інтегруючи, дістанемо $K_0 \approx 32$ млн грн.

Це означає, що для нарахування однакової суми, що утворилася через три роки, щорічні капіталовкладення від 10 до 13 млн грн рівнозначні одночасному початковому вкладу 32 млн грн при тій самій процентній ставці, що нараховується неперервно.

Нехай відома функція $t = t(x)$, яка описує затрати часу на виготовлення продукту (виробу) залежно від степені освоєння виробництва, де x — порядковий номер виробу в партії. Тоді середній час $t_{\text{сер}}$, витрачений на виготовлення одного виробу в період освоєння від x_1 до x_2 виробів, обчислюється за теоремою про середнє за формулою (13):

$$t_{\text{сер}} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int_{x_1}^{x_2} t(x)dx. \qquad (35)$$

Що стосується функції зміни витрат часу на виготовлення виробу $t = t(x)$, то часто вона має вигляд

$$t = ax^{-b}. \qquad (36)$$

де a — витрати на перший виріб; b — показник виробничого процесу.

Приклад 4. Знайти середній час, витрачений на освоєння однієї деталі в період освоєння від $x_1 = 10$ до $x_2 = 21$ деталей, прийнявши у формулі (36) $a = 60$ (хв), $b = 0,5$.

Використовуючи формулу (36), дістанемо

$$t_{\text{сер}} = \frac{1}{21-10}\int_{10}^{21} 60x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{60}{11}2\sqrt{x}\Big|_{10}^{21} \approx \frac{120}{11}\left(\sqrt{21} - \sqrt{10}\right) =$$

$$= 10{,}9(4{,}58 - 3{,}16) = 10{,}9 \cdot 1{,}42 \approx 15{,}48 \text{ (хв)}.$$

З фінансового аналізу відомо: якщо прийняти, що доходи і витрати здійснюються неперервно протягом n років і якщо $(P_t - C_t)\Delta t$ (різниця доходів і затрат) знаходяться в інтервалі $(t, t + \Delta t)$, тоді теперішня вартість $TB = (P_t - C_t)\Delta t e^{-\frac{p}{100}t}$, де $e^{-\frac{p}{100}}$ — коефіцієнт дисконтування, t — кількість років життя проекту.

Початкова вартість при неперервній капіталізації

$$\lim_{t \to 0} \sum (P_t - C_t)\Delta t e^{-\frac{p}{100}t} = \int_0^n (P_t - C_t)e^{-\frac{p}{100}t}dt.$$

У випадку, якщо $\frac{p}{100}$ — стала, теперішня вартість

$$TB = \int_0^n (P_t - C_t)e^{-\frac{p}{100}t}dt.$$

Якщо $P_t - C_t = q = \text{const}$, тоді

$$TB = q\int_0^{\pi} e^{-\frac{p}{100}t}dt = -\frac{q}{\frac{p}{100}}\left(e^{-\frac{p}{100}n} - 1\right).$$

Отже,

$$TB = \frac{q}{\frac{p}{100}}\left(1 - e^{-\frac{p}{100}n}\right).$$

У загальному випадку інвестиції будуть вигідні, якщо $TB > C_0$, тобто якщо приведена вартість інвестицій більше початкових капітальних вкладень.

Отже, теперішня вартість залежить від трьох факторів: різниці річних доходів і витрат q; терміну життя проекту n і величини процентної ставки $\frac{p}{100}$:

$$TB = f(q, n, \frac{p}{100}).$$

Контрольні запитання і завдання

1. Сформулюйте означення визначеного інтеграла.
2. У чому полягає геометричний та економічний зміст визначеного інтеграла?
3. Які основні властивості визначеного інтеграла?
4. Що можна сказати про застосування визначеного інтеграла?

Приклади розв'язування задач

9.1. Обчислити:

а) $\int_1^9 x\sqrt[3]{1-x}dx$; б) $\int_0^a x^2\sqrt{a^2 - x^2}dx$;

в) $\int_0^{\sqrt{3}} x \cdot \text{arctg}x \cdot dx$; г) $\int_0^3 (x-2)^2 dx$.

а) Виконаємо заміну $t = \sqrt[3]{1-x}$. Тоді $x = 1 - t^3$, $dx = -3t^2dt$; якщо $x = 1$, то $t = 0$; якщо $x = 9$, то $t = -2$.

Отже, $\int\limits_1^9 x\sqrt[3]{1-x}\cdot dx = \int\limits_0^{-2}(1-t^3)\cdot t\cdot(-3t^2)dt = 3\int\limits_{-2}^{0}(1-t^3)t^3dt =$

$$= 3\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^7}{7}\right)\Bigg|_{-2}^{0} = -66\frac{6}{7}.$$

б) Візьмемо $x = a\sin t$, $0 \le t \le \frac{\pi}{2}$. Оскільки $\sqrt{a^2-x^2} = a\cos t$, $dx = a\cos t dt$, то

$$\int\limits_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}dx = a^4\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cos^2 t dt = \frac{a^4}{4}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t dt =$$

$$= \frac{a^4}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)dt = \frac{a^4}{8}\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi a^4}{16}.$$

в) Застосуємо формулу інтегрування частинами

$$\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\cdot\mathrm{arctg}x\cdot dx = \left|\begin{matrix} U = \mathrm{arctg}x; dV = xdx \\ dU = \dfrac{dx}{1+x^2}; V = \dfrac{x^2}{2}\end{matrix}\right| = \frac{x^2}{2}\mathrm{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{x^2}{1+x^2}dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}dx + \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{arctg}x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

г) Формальне застосування підстановки $t = (x-2)^2$ на всьому відрізку [0; 3] призведе до неправильного результату, оскільки обернена функція $x = \varphi(t)$ двозначна: $x = 2 \pm \sqrt{t}$, тобто функція x має дві ланки, $x_1 = 2-\sqrt{t}$; $x_2 = 2+\sqrt{t}$. Перша не може набувати значення $x > 2$, а друга — значення $x < 2$. Щоб здобути правильний результат, потрібно розбити даний інтеграл так:

$$\int\limits_0^3 (x-2)^2 dx = \int\limits_0^2 (x-2)^2 dx + \int\limits_2^3 (x-2)^2 dx$$

і в першому інтегралі покласти $x = 2-\sqrt{t}$, а в другому $x = 2+\sqrt{t}$. Тоді дістанемо

$$I_1 = \int\limits_0^2 (x-2)^2 dx = -\int\limits_4^0 t\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int\limits_0^4\sqrt{t}dt = \frac{8}{3};$$

$$I_2 = \int_2^3 (x-2)^2 dx = \int_6^1 t\frac{dt}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{t}\cdot dt = \frac{1}{3}.$$

Отже, $I = \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = 3$. Цей результат правильний, у чому можна впевнитись, якщо обчислити інтеграл безпосередньо:

$$\int_0^3 (x-2)^2 dx = \left.\frac{(x-2)^3}{3}\right|_0^3 = \frac{1}{3} + \frac{8}{3} = 3.$$

Отже, зробимо таке зауваження. Спосіб підстановки може призвести до помилки, якщо не виконано умову 12 (§ 3).

9.2. Обчислити площу фігури, обмежену лініями $x=0$, $x=2$, $y=2^x$, $y=2x-x^2$ (рис. 73).

Оскільки максимум функції $y=2x-x^2$ досягається в точці $x=1$ і дорівнює 1, а функція $y=2^x \geq 1$ на відрізку [0; 2], то

$$F = \int_0^2 \left[2^x - \left(2x-x^2\right)\right] dx = \left.\frac{2^x}{\ln 2}\right|_0^2 - \left.\left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\right|_0^2 = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3}.$$

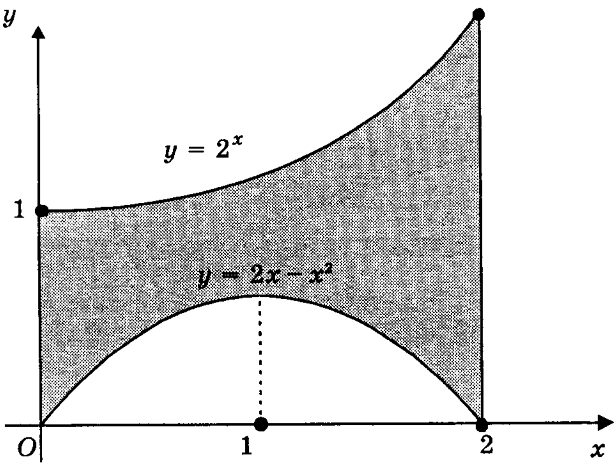

Рис. 73

9.3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями $x+y=0$, $y=2x-x^2$ (рис. 74).

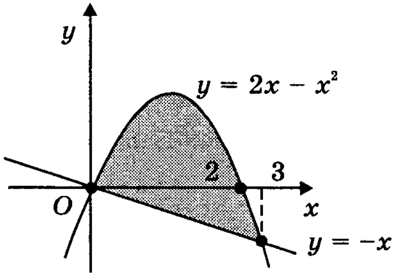

Рис. 74

Знайдемо абсциси точок перетину параболи $y = 2x - x^2$ і прямої $y = -x$. Розв'язуємо рівняння $2x - x^2 = -x$, знаходимо $x_1 = 0; x_2 = 3$. Отже,

$$F = \int_0^3 (2x - x^2 + x)dx = \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^3 = \frac{27}{6} = 4{,}5.$$

9.4. Знайти площу фігури, обмежену лініями $x = -2y^2; x = 1 - 3y^2$ (рис. 75).

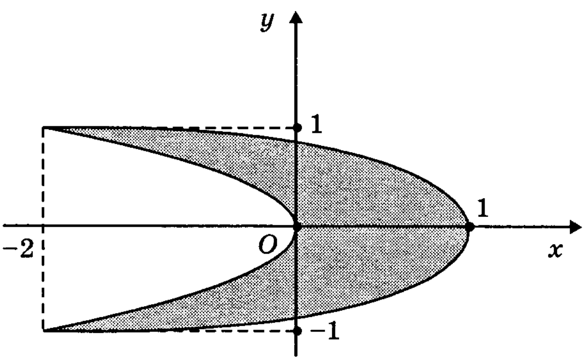

Рис. 75

Розв'яжемо систему рівнянь $\begin{cases} x = -2y^2, \\ x = 1 - 3y^2 \end{cases}$ і знайдемо ординати точок перетину кривих $y_1 = -1; y_2 = 1$.

Оскільки $1 - 3y^2 \geq -2y^2$ при $-1 \leq y \leq 1$, то

$$F = \int_{-1}^{1} \left[\left(1 - 3y^2\right) - \left(-2y^2\right)\right]dy = 2\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}.$$

9.5. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox фігури, обмеженої кривою $y^2 = (x-1)^3$ і прямою $x = 3$ (рис. 76).

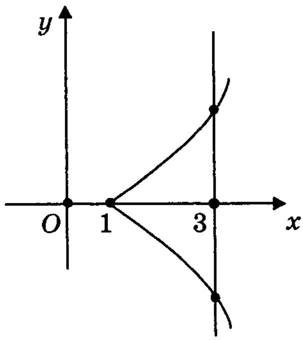

Рис. 76

$$V = \pi\int_1^3 y^2 dx = \pi\int_1^3 (x-1)^3 dx = \frac{1}{4}\pi(x-1)^4\Big|_1^3 = 4\pi.$$

9.6. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням дуги кубічної параболи $y = x^3$ навколо осі Ox від початку координат до точки $x = 1$.

У цьому випадку $y' = 3x^2$; $\sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+9x^4}$. Отже,

$$F_{\text{пов}} = 2\pi\int_0^1 x^3\sqrt{1+9x^4}\,dx = \frac{\pi}{27}(10\sqrt{10}-1).$$

Задачі і вправи для самостійної роботи

Обчислити визначені інтеграли.

а) безпосереднє застосування формули Ньютона — Лейбніца:

9.7. $\int_0^1 \sqrt{1+x}\,dx$. **9.8.** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

9.9. $\int_2^{-13} \frac{dx}{\sqrt[5]{(3-x)^4}}$. **9.10.** $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}}$.

б) заміна змінної у визначеному інтегралі:

9.11. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}-1}$. **9.12.** $\int_0^1 \frac{x\,dx}{1+\sqrt{x}}$.

9.13. $\int_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{1+x}}$. **9.14.** $\int_{0}^{1} \frac{\sqrt{e^x}dx}{\sqrt{e^x+e^{-x}}}$.

9.15. $\int_{0}^{R} x^3\sqrt{R^2-x^2}dx$; $(R>0)$. **9.16.** $\int_{1}^{3} x^3\sqrt{x^2-1}dx$.

9.17. $\int_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}dx$. **9.18.** $\int_{0}^{1} \frac{xdx}{1+x^4}$.

Інтегруванням частинами обчислити інтеграл.

9.19. $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\cos x dx$. **9.20.** $\int_{0}^{e-1} \ln(x+1)dx$.

9.21. $\int_{0}^{a\sqrt{7}} \frac{x^3dx}{\sqrt[3]{a^2+x^2}}$. **9.22.** $\int_{0}^{\pi} x^3\sin x\cdot dx$.

9.23. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} x\cdot dx$. **9.24.** $\int_{0}^{1} x^2e^{-x}dx$.

Обчислити невласні інтеграли.

9.25. $\int_{1}^{\infty} \frac{dx}{x^4}$. **9.26.** $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2xdx}{x^2+1}$.

9.27. $\int_{0}^{1} x\ln x dx$. **9.28.** $\int_{0}^{2} \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

Обчислити площу фігури, обмежену лініями.

9.29. $y=x^2; y=2-x^2$. **9.30.** $xy=5; x+y=6$.

9.31. $y=3x-x^2$; $y=x^2-x$. **9.32.** $y=0; y=\sin x; y=\cos x$.

9.33. $y=x^2; y=\frac{x^3}{3}$. **9.34.** $y^2=2x+1; x-y-1=0$.

9.35. $y=\frac{1}{1+x^2}; y=\frac{x^2}{2}$. **9.36.** $y=e^x; y=e^{-x}; x=1$.

Обчислити об'єми тіл, утворених обертанням фігури, обмеженої лініями.

9.37. $y=4-x^2, y=0, x=0$, де $x\geq 0$, навколо: а) осі x; б) осі y.

9.38. $y=e^x; x=0; x=1; y=0$ навколо: а) осі x; б) осі y.

9.39. $y=x^3; y=1; x=0$ навколо: а) осі x; б) осі y.

9.40. $y=\frac{4}{x}; x=1; x=4; y=0$ навколо: а) осі x; б) осі y.

9.41. $y = \ln x; y = 0; x = e$ навколо: а) осі x; б) осі y.

9.42. $y = \dfrac{1}{1+x^2}; x = 1; x = -1; y = 0$ навколо: а) осі x; б) осі y.

Обчислити довжину дуги лінії.

9.43. $y = \ln x$ від $x_1 = \sqrt{3}$ до $x_2 = \sqrt{8}$.

9.44. $y = \dfrac{x^2}{2}$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 1$.

9.45. $y^2 = (x+1)^3$ від $x_1 = 0$ до $x_2 = 4$.

9.46. $x = \dfrac{t^3}{3} - t; y = t^2 + 2$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = 3$.

9.47. $x = (t^2 - 2)\sin t + 2t\cos t, y = (2 - t^2)\cos t + 2t\sin t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

Обчислити площі поверхонь, утворених обертанням навколо осі Ox дуг кривих.

9.48. $y = x^3$ від $x = 0$ до $x = \dfrac{1}{2}$.

9.49. $y^2 = 4ax$ від $x = 0$ до $x = 3a$.

Відповіді до глави 9

9.7. $\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{8} - 1\right)$. **9.8.** $\dfrac{1}{4}$. **9.9.** $-5(\sqrt[5]{16} - 1)$. **9.10.** $\dfrac{\pi}{2}$. **9.11.** $7 + 2\ln 2$.

9.12. $\dfrac{5}{3} - 2\ln 2$. **9.13.** $\dfrac{32}{3}$. **9.14.** $\ln\dfrac{e + \sqrt{1+e^2}}{1+\sqrt{2}}$. **9.15.** $\dfrac{2}{15}R^5$.

9.16. $464\dfrac{\sqrt{2}}{15}$. **9.17.** $\dfrac{1}{3}$. **9.18.** $\dfrac{\pi}{8}$. **9.19.** $\dfrac{\pi}{2} - 1$. **9.20.** 1.

9.21. $\dfrac{141a^3\sqrt[3]{a}}{20}$. **9.22.** $\pi^3 - 6\pi$. **9.23.** $\dfrac{\pi}{\sqrt{3}} - \ln 2$. **9.24.** $\dfrac{2e-5}{e}$.

9.25. $\dfrac{1}{3}$. **9.26.** Розбіжний. **9.27.** $-\dfrac{1}{4}$. **9.28.** Розбіжний. **9.29.** $\dfrac{8}{3}$.

9.30. $12 - 5\ln 5$. **9.31.** $\dfrac{8}{3}$. **9.32.** $2 - \sqrt{2}$. **9.33.** $2\dfrac{1}{4}$. **9.34.** $\dfrac{16}{3}$.

9.35. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{3}$. **9.36.** $e + \dfrac{1}{e} - 2$. **9.37.** $\dfrac{256}{15}\pi; 8\pi$. **9.38.** $\dfrac{\pi(e^2 - 1)}{2}; 2\pi$.

9.39. $\dfrac{6\pi}{7}; \dfrac{3\pi}{5}$. **9.40.** $12\pi; 24\pi$. **9.41.** $\dfrac{\pi(e^2 + 1)}{2}; \pi(e - 2)$.

9.42. $\frac{\pi(\pi+2)}{2}$; $\pi \ln 2$. **9.43.** $1+\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$. **9.44.** $0{,}5[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]$.

9.45. $\frac{670}{27}$. **9.46.** 12. **9.47.** $\frac{\pi^3}{3}$. **9.48.** $\frac{61\pi}{1728}$ (кв. од.).

9.49. $\frac{56}{3}\pi a^2$.

Розділ V
ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ. РЯДИ. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Глава 10. Функції багатьох змінних

§ 1. Означення, границя та неперервність функції

Практичні застосування математики вимагають вивчення функції двох і більше незалежних змінних.

Розглянемо деякі приклади функцій багатьох змінних.

1. Функція $Z = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + b$, де $a_1, \ldots, a_n, b$ — сталі числа, називається *лінійною*. Її можна розглядати як суму n лінійних функцій відносно змінних $x_1, \ldots, x_n$.

2. Функція $Z = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j$ (b_{ij} — сталі числа) називається *квадратичною*.

На відміну від лінійної квадратична функція не розкладається на суму функцій однієї змінної.

3. Раніше була визначена функція корисності — одне з базових понять економічної теорії. Багатовимірний її аналог — це функція $Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яка виражає корисність від n добутих товарів. Частіше всього зустрічаються такі її види:

а) $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i \ln(x_i - c_i)$, де $a_i > 0$, $x_i > c_i \geq 0$, — логарифмічна функція;

б) $Z = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{1 - b_i}(x_i - c_i)^{1-b_i}$, де $a_i > 0$, $0 < b_i < 1$, $x_i > c_i \geq 0$.

Така функція називається *функцією сталої еластичності*.

4. Також на випадок n змінних узагальнюється поняття виробничої функції, що виражає результат виробничої діяльності залежно від факторів $x_1, x_2, \ldots, x_n$, які його обумовлюють.

Наведемо види виробничих функцій, які найчастіше зустрічаються (Z — величина суспільного продукту; x_1 — затрати праці; x_2 — обсяг виробничих фондів), взявши для простоти $n = 2$:

а) функція *Кобба — Дугласа:*

$$Z = b_0 x_1^{b_1} x_2^{b_2}\,; \tag{1}$$

б) функція *зі сталою еластичністю* заміщення:

$$Z = e_0 \left[e_1 x_1^{-\beta} + e_2 x_2^{-\beta} \right]^{-\frac{k}{\beta}}. \tag{2}$$

У цій главі будемо вести викладки переважно для функцій двох змінних ($n = 2$), при цьому практично всі поняття і теореми, сформульовані для $n = 2$, легко переносяться і на випадок $n > 2$. Однак розгляд випадку двох змінних дає змогу використовувати наочну геометричну ілюстрацію основних понять даної глави.

Означення 1. *Змінна z зветься функцією незалежних змінних x та y, якщо кожній парі (x, y) з деякої області їх зміни відповідає певне значення величини z.*

Символічно функція двох змінних позначається $z = f(x,y)$ або $z = F(x,y)$. Сукупність пар (x, y) величин x та y, для яких визначена функція $z = f(x,y)$, зветься *областю існування функції.* Якщо для функції однієї змінної областю існування був один чи кілька проміжків, то для функції двох змінних області існування, як далі побачимо, можуть мати найрізноманітніші форми.

Приклад 1. Визначити область існування функції $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Очевидно, z набуватиме дійсних значень лише тоді, коли $1 - x^2 - y^2 \ge 0$, тобто коли $x^2 + y^2 \le 1$.

Цю нерівність задовольняють координати всіх точок, що лежать на полі круга з радіусом 1, включаючи і точки його контуру, тобто точки кола:

$$x^2 + y^2 = 1\,.$$

Приклад 2. Визначити область існування $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.

Шуканою областю буде прямокутник (рис. 77). Справді, з нерівностей $4 - x^2 \ge 0$ та $1 - y^2 \ge 0$ маємо

$$x^2 \le 4, \qquad y^2 \le 1,$$

або

$$-2 \le x \le 2, \qquad -1 \le y \le 1\,.$$

Отже, до області визначення функції належать всі точки, що знаходяться на полі прямокутника, включаючи точки контуру (прямокутника).

Графіком функції двох змінних $z = f(xy)$ є деяка поверхня.

Наприклад, графіком функції

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

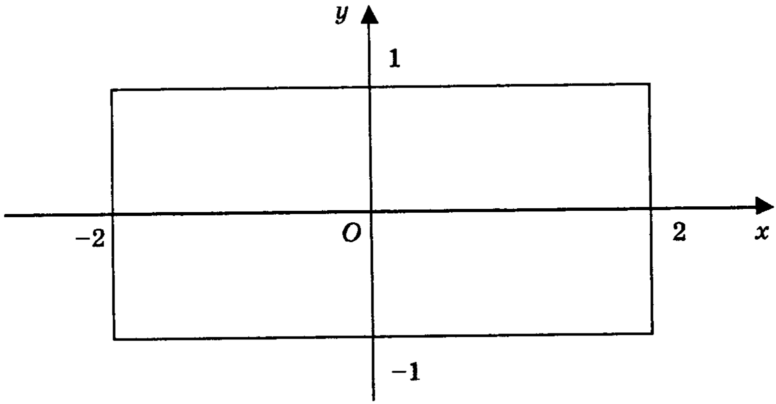

Рис. 77

є півсфера з радіусом 1, розміщена над площиною xOy (рис. 78). Якщо спроектувати всі точки цієї поверхні на площину xOy, дістанемо круг з радіусом 1 і з центром на початку координат. А це якраз і є областю визначення функції

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}\ .$$

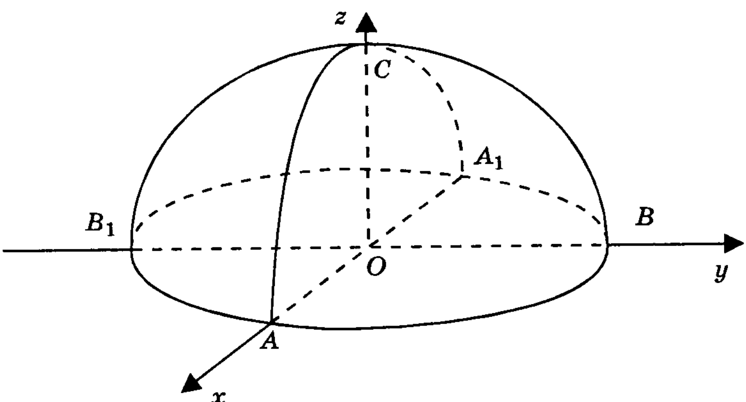

Рис. 78

Поверхня, яка відповідає рівнянню $z = f(x, y)$, буде проектуватися на площину xOy в область визначення функції $z = f(x, y)$.

Як бачимо, графік функції двох змінних — значно складніший об'єкт, ніж графік функції однієї змінної. Тому існує спосіб зображення функції двох змінних, який полягає в перетині поверхні

$z = f(x, y)$ площинами $z = C$ (C — довільне число), паралельними площині xOy.

Означення 2. *Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається множина точок (x, y) площини xOy, в яких функція набуває одного й того самого значення C і визначається співвідношенням $f(x, y) = C$.*

При різних C дістанемо різні лінії рівня для даної функції. Вони утворюють топографічну карту графіка функції f. Якщо вибрати числа $C_1, C_2, \ldots, C_n$ так, щоб вони утворювали арифметичну прогресію з різницею d, то отримаємо ряд ліній рівня, по взаємному розміщенню яких можна судити про графік функції. Там, де лінії розміщуються густіше, функція змінюється швидше, а де рідше — функція змінюється повільніше (поверхня пологіша).

Приклад 3. Побудувати графік функції $z = x^2 + y^2 + 1$.

Візьмемо: $z = 1$, тоді $x^2 + y^2 + 1 = 1$, тобто $x^2 + y^2 = 0$ — це точки (0; 0); $z = 2$, тоді $x^2 + y^2 = 1$ — це коло з центром на початку координат і радіусом 1.

Сім'ю знайдених ліній рівня зображено на рис. 79. Якщо тепер кожну з ліній розмістити у відповідній площині, то дістанемо зображення графіка функції $z = x^2 + y^2 + 1$ (рис. 80).

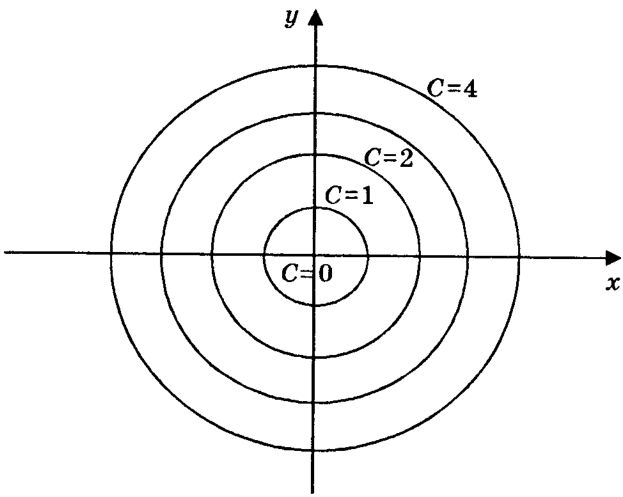

Рис. 79

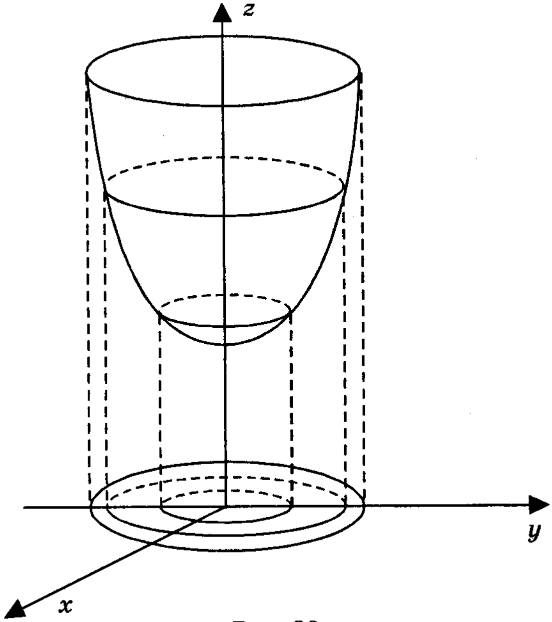

Рис. 80

Функції трьох і більше незалежних змінних зобразити графічно в просторі неможливо.

Кожній парі x_0, y_0 аргументів функції $f(x, y)$ відповідає на площині певна точка M з координатами x_0, y_0, а тому замість того, щоб говорити про значення функції $f(x, y)$ при величинах $x = x_0$ та $y = y_0$, можна казати про значення функції в точці $M(x_0, y_0)$.

Припустимо тепер, що функція $f(x, y)$ визначена в деякій області, яка містить точку $M(x_0, y_0)$, за винятком, можливо, самої цієї точки.

Означення 3. *Стала b зветься границею функції $f(x, y)$ при $x \to x_0, y \to y_0$, якщо для будь-якої послідовності точок (з області визначення функції) $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n), \dots$, відмінних від $M(x_0, y_0)$ і які прямують до точки $M(x_0, y_0)$, відповідна послідовність $f(x_1, y_1), f(x_2, y_2), f(x_3, y_3), \dots, f(x_n, y_n), \dots$ значень функції завжди прямує до b.*

Коротко це записують так:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = b\,. \qquad (3)$$

Для функції двох змінних, як і для функції однієї змінної, запроваджують поняття неперервності функції.

Означення 4. Функція $f(x,y)$ зветься неперервною в точці $M(x_0,y_0)$, якщо вона визначена в області, що містить точку M_0, та в самій точці M_0 і $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0)$.

Функція зветься *неперервною в деякій області*, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

Для функції двох змінних справедливі теореми про границю суми, добутку та частки, встановлені раніш для функції однієї змінної. Справедливими для неперервних функцій (за певних умов) є також теореми про найбільшу та найменшу величину, про проміжні значення та ін. На їх формулюванні й доведенні спинятися не будемо, бо це виходить за межі даного підручника.

Увівши поняття приросту функції, можна дати означення неперервності функції в іншій формі.

Нехай x_0 та y_0 — початкові вартості змінних x та y. Надамо цим змінним прирости Δx та Δy, тобто покладемо $x=x_0+\Delta x$, $y=y_0+\Delta y$. Тоді

$$\Delta z = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0),$$

що є *повним приростом функції* $f(x,y)$.

Якщо надається приріст, приміром, лише змінній x, а y залишається незмінною величиною, то

$$\Delta_x z = f(x_0+\Delta x, y) - f(x_0,y_0),$$

що є *частинним приростом функції $f(x,y)$ за змінною x.*

Так само

$$\Delta_y z = f(x_0 y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

— частинний приріст функції $f(x,y)$ за змінною y.

Означення 5. Функція $f(x,y)$ зветься неперервною в точці $M(x_0,y_0)$, якщо нескінченно малим приростам змінних x та y відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)] = 0.$$

§ 2. Частинні похідні

Нехай $z = f(x, y)$ є функцією від двох незалежних змінних x та y. Утворимо частинний приріст функції $f(x, y)$ за змінною x:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$$

(припустимо, що y залишається незмінним) і розглянемо відношення

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Якщо існує границя цього відношення, коли Δx прямує до нуля, то вона зветься частинною похідною функції $z = f(x, y)$ за змінною x у точці (x, y) і позначається символом $f'_x(x, y)$, або $\frac{\partial z}{\partial x}$.

Отже,

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогічне означення частинної похідної за y:

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Отже, *частинною похідною за x від функції $z = f(x, y)$ зветься похідна за x, обчислена з припущенням, що y — стала.*

Частинною похідною за y від функції $z = f(x, y)$ зветься похідна за y, обчислена з припущенням, що x — стала.

Приклад 1. Знайти частинні похідні функції

$$z = x^2 - 3xy - 5y^2 - x + 4y + 3.$$

Розглядаючи y як сталу величину, дістанемо $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3y - 1$.

Аналогічно, якщо x — стала, маємо $\frac{\partial z}{\partial y} = -3x - 10y + 4$.

Приклад 2. Знайти частинні похідні функції $z = 3^{x^4 y^3}$.

Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3^{x^4 y^3} \ln 3 \cdot 4x^3 y^3; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 3^{x^4 y^3} \ln 3 \cdot 3x^4 y^2.$$

Частинні похідні функції двох змінних мають просте геометричне тлумачення. Нехай рівняння поверхні, зображеної на рис. 81, є

$$z = f(x, y).$$

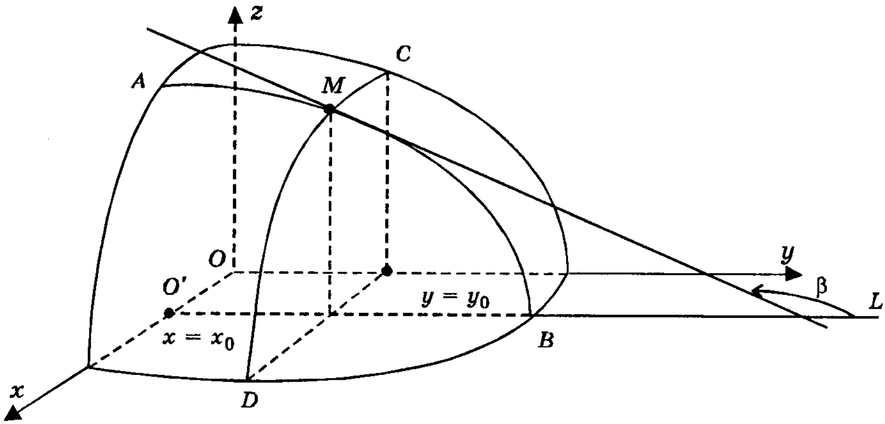

Рис. 81

Побудуємо площину $x = x_0$. Вона перетне поверхню по деякій кривій AB. Візьмемо на цій кривій довільну точку M і побудуємо в ній дотичну до AB. Позначимо через β кут, який дотична утворює з віссю $O'L$, паралельною осі Oy.

Якщо шукаємо частинну похідну по x, то припускаємо, що $y = \text{const}$, скажімо $y = y_0$; якщо беремо частинну похідну по y, то припускаємо, що $x = \text{const}$, скажімо, $x = x_0$. При зміні y пересуваємося у площині $x = x_0$ по кривій AB, роль ординати відіграє z. Оскільки $\frac{\partial z}{\partial y} = \left[\frac{dz}{dy}\right] x = x_0$, а звичайна похідна $\frac{dz}{dy} = \operatorname{tg}\beta$, приходимо до висновку, що $\frac{\partial z}{\partial y} = \operatorname{tg}\beta$. Аналогічно можна показати, що $\frac{\partial z}{\partial x} = \operatorname{tg}\alpha$, де α — кут, утворений дотичною до кривої CD з віссю, паралельною осі Ox.

§ 3. Повний приріст і повний диференціал

Нехай маємо функцію двох змінних

$$z = f(x, y).$$

Якщо x та y дістають одночасно прирости Δx і Δy, то різницю $f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ звуть, як було зазначено в § 2, повним приростом функції і позначають символом Δz.

Припустимо, що в розглядуваній точці (x, y) функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні. Повний приріст функції $z = f(x, y)$ можна записати у вигляді

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) + f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\,, \qquad (4)$$

додавши до правої частини і віднявши $f(x, y+\Delta y)$.

Вираз

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y)$$

є різницею між двома вартостями функції змінної x (другий аргумент $y+\Delta y$ є незмінним). Застосовуючи формулу Лагранжа, дістанемо

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y+\Delta y) = \Delta x f'_x(\bar{x}, y+\Delta y)\,, \qquad (5)$$

де $\bar{x}$ — проміжна вартість аргументу, що знаходиться між x та $x+\Delta x$.

Так само вираз

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y)\,,$$

який можна розглядати як різницю двох вартостей функції однієї змінної y (при сталому x), на підставі тієї самої формули Лагранжа набере вигляду

$$f(x, y+\Delta y) - f(x,y) = \Delta y f'_y(x, \bar{y})\,, \qquad (6)$$

де $\bar{y}$ — проміжна вартість аргументу між y та $y+\Delta y$.

Беручи до уваги рівності (5) та (6), можна записати:

$$\Delta z = \Delta x f'_x(\bar{x}, y+\Delta y) + \Delta y f'_y(x, \bar{y})\,. \qquad (7)$$

За припущенням частинні похідні неперервні, отже,

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,,\quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \qquad (8)$$

($\bar{x}$ та $\bar{y}$ знаходяться відповідно між x та $x+\Delta x$, y та $y+\Delta y$, а тому коли $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, то вони прямують відповідно до x та y).

Якщо змінна має границю, то її можна подати як суму цієї границі та нескінченно малої величини, отже рівності (8) можемо записати у вигляді

$$\frac{\partial f(\bar{x}, y+\Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + \alpha\,,\quad \frac{\partial f(x,\bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} + \beta, \qquad (9)$$

де α й β — величини, що прямують до нуля, коли $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$.

На підставі рівностей (9) рівність (7) набуває вигляду

$$\Delta z = f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y\,. \qquad (10)$$

Візьмемо для зручності

$$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\,.$$

Очевидно, $\dfrac{|\Delta x|}{\rho} = \dfrac{|\Delta x|}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}} \le 1$ і $\dfrac{|\Delta y|}{\rho} \le 1$. Якщо $\Delta x \to 0$ і $\Delta y \to 0$, то й $\rho \to 0$. Справедливе й обернене твердження.

Сума перших двох доданків правої частини рівності (10) є головною частиною приросту функції, яка відрізняється від Δz на нескінченно малу вищого порядку порівняно з ρ (припускається, звичайно, що $f'_x(x, y) \ne 0$ і $f'_y(x, y) \ne 0$). Справді, відношення $\dfrac{\alpha \Delta x}{\rho}$ прямує до нуля при $\rho \to 0$, бо α нескінченно мала, а $\dfrac{\Delta x}{\rho}$ — величина обмежена (менше або дорівнює одиниці).

Так само переконуємося, що й $\dfrac{\beta \Delta y}{\rho} \to 0$.

Означення 1. *Головна частина повного приросту функції $f(x, y)$, тобто вираз $f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y$, зветься повним диференціалом функції і позначається символом dz.*

Отже, за означенням,

$$dz = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y . \tag{11}$$

Означення 2. *Якщо повний приріст функції $f(x, y)$ можна подати у вигляді рівності (10), то функція зветься диференційовною в точці (x, y).*

Як видно з попереднього, функція буде диференційовною в точці $M(x, y)$, якщо її частинні похідні $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ та $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ у цій точці є неперервними. Прирости незалежних змінних Δx та Δy звуть диференціалами незалежних змінних x та y і позначають відповідно через dx та dy. Тому повний диференціал набуває вигляду

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy, \tag{12}$$

або

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy. \tag{12'}$$

Якби ми мали функцію $u = f(x, y, z)$ з неперервними частинними похідними $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial z}$, то її повний диференціал мав би вигляд

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz. \tag{13}$$

Зважаючи на рівність (11), рівність (10) можна подати у вигляді

$$\Delta z = dz + \alpha \Delta x + \beta \Delta y. \tag{14}$$

Звідси бачимо, що для достатньо малих Δx та Δy буде справедливою наближена рівність

$$\Delta z \approx dz. \tag{15}$$

Приклад 1. Знайти повний диференціал функції

$$z = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{x-y}.$$

Знайдемо частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{-2y}{(x-y)^2} = -\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2}\cdot\frac{2x}{(x-y)^2} = \frac{x}{x^2+y^2}.$$

Отже,

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}.$$

Приклад 2. Знайти повний диференціал функції

$$U = 2y\sqrt{x} + 3y^2\sqrt[3]{z^2}.$$

Маємо $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 2y\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; $\dfrac{\partial U}{\partial y} = 2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2}$; $\dfrac{\partial U}{\partial z} = 3y^2\cdot\dfrac{2}{3}z^{-\frac{1}{3}}$.

Отже,

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = \frac{y}{\sqrt{x}}dx + (2\sqrt{x} + 6y\sqrt[3]{z^2})dy + \frac{2y^2}{\sqrt[3]{z}}dz.$$

Приклад 3. Обчислити наближено зміну функції

$$z = \frac{x+3y}{y-3x}$$

при зміні x від $x_0 = 2$ до $x_0 + \Delta x = 2{,}5$ та y від $y_0 = 4$ до $y_0 + \Delta y = 3{,}5$. Згідно з умовами задачі $\Delta x = 0{,}5$; $\Delta y = -0{,}5$.

Знайдемо частинні похідні даної функції. Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1(y-3x)-(-3)(x+3y)}{(y-3x)^2} = \frac{10y}{(y-3x)^2}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{10x}{(y-3x)^2};$$

тому

$$dz = \frac{10ydx}{(y-3x)^2} - \frac{10xdy}{(y-3x)^2}.$$

Обчислимо dz в точці $M(x_0 y_0) = M(2, 4)$:

$$dz\Big|_M = \frac{10 \cdot 4}{(-2)^2} \cdot 0{,}5 - \frac{10 \cdot 2}{(-2)^2} \cdot (-0{,}5) = 7{,}5.$$

Отже, згідно з формулою (15), матимемо $\Delta z \approx 7{,}5$.

§ 4. Повна похідна

Нехай $z = f(x, y)$ — функція двох аргументів x та y, причому $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ — диференційовні функції по t. Якщо у вираз функції z підставимо вирази x та y через t, дістанемо функцію однієї змінної t:

$$z = f[\varphi(t), \quad \psi(t)] = F(t).$$

Поставимо собі завдання знайти похідну від z по t: $\dfrac{dz}{dt}$. Ця похідна і зветься *повною похідною.*

Припустимо, що $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в розглядуваній точці. Якщо надамо приріст Δt аргументу t, то x, y та z дістануть відповідні прирости Δx, Δy та Δz. Згідно з формулою (10) можемо написати

$$\Delta z = f'_x(x, y)\Delta x + f'_y(x, y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y.$$

Поділивши обидві частини цієї рівності на Δt, матимемо

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = f'_x(x, y)\frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y(x, y)\frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta\frac{\Delta y}{\Delta t}. \qquad (16)$$

За припущенням функції $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — диференційовні, отже,

$$\lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t} = \varphi'(t) = \frac{dx}{dt}; \quad \lim_{\Delta t \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = \psi'(t) = \frac{dy}{dt};$$

$$\lim_{\Delta t \to 0}\alpha\frac{\Delta x}{\Delta t} = 0; \quad \lim_{\Delta t \to 0}\beta\frac{\Delta y}{\Delta t} = 0,$$

бо α й β прямують до нуля, коли Δx і Δy прямують до нуля. Останнє не викликає сумніву, бо з існування похідних $\varphi'(t)$ та $\psi'(t)$ випливає неперервність x і y як функцій від t. Отже,

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta t}=\frac{dz}{dt}=f'_x(x,y)\frac{dx}{dt}+f'_y(x,y)\frac{dy}{dt}. \qquad (17)$$

Останню рівність можна записати ще й так:

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (17')$$

У тому випадку, коли $x=t$ і, отже, $y=\psi(x)$, формула (17) набуває вигляду

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dx}. \qquad (18)$$

Якщо $z=f(x,y)$, де $x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, тоді частинні похідні

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u};\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (18')$$

Приклад 1. Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z=3^{x^2+y^2}$, де $x=a\cos t$, $y=a\sin t$.

Маємо

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=3^{x^2+y^2}\ln 3\cdot 2x\cdot(-a\sin t)+$$

$$+3^{x^2+y^2}\ln 3\cdot 2y(a\cos t)=2a\ln 3\cdot 3^{x^2+y^2}(y\cos t-x\sin t).$$

Виразимо x і y через t, дістанемо

$$\frac{dz}{dt}=2a\ln 3\cdot 3^{a^2}(a\sin t\cos t-a\cos t\sin t)=0.$$

Приклад 2. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{dz}{dx}$, якщо $z=\ln(x^2-y^2)$, де $y=e^x$.

Маємо $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2-y^2}$. Використовуючи формулу повної похідної, маємо

$$\frac{dz}{dx}=\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx}=\frac{2x}{x^2-y^2}-\frac{2ye^x}{x^2-y^2}=\frac{2(x-ye^x)}{x^2-y^2}.$$

Приклад 3. Знайти $\frac{\partial z}{\partial u};\frac{\partial z}{\partial v}$, якщо $z=x^2+y^2$, де $x=u+v$, $y=u-v$.

Згідно з формулою (18′) маємо

$$\frac{\partial z}{\partial u} = 2x \cdot 1 + 2y \cdot (1) = 2(u+v) + 2(u-v) = 4u;$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} = 2x \cdot 1 + 2y \cdot (-1) = 2(u+v) - 2(u-v) = 4v.$$

§ 5. Похідна за даним напрямом. Градієнт

Частинні похідні дають "швидкість зміни" функції $f(x,y)$ в напрямах, паралельних координатним осям. Проте часто буває, що потрібно знати швидкість зміни $f(x,y)$ в будь-якому напрямі. Як побачимо далі, диференційовна функція має похідну в довільному напрямі.

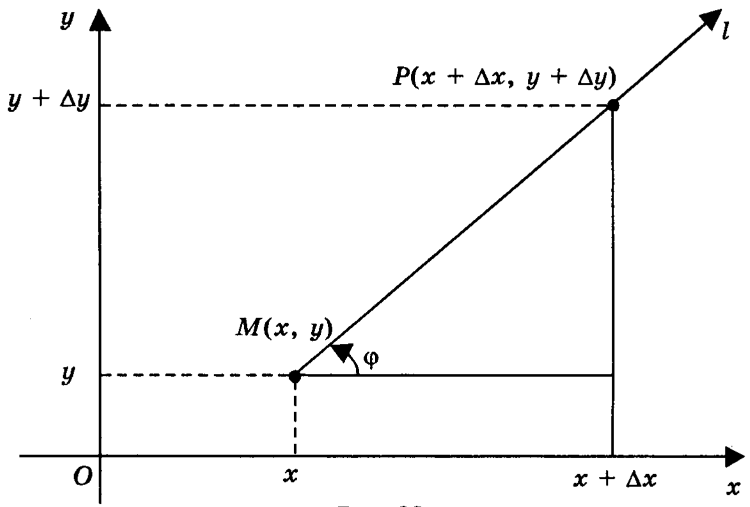

Рис. 82

На довільній осі l візьмемо фіксовану точку $M(x,y)$ і змінну точку $P(x+\Delta x,\ \ y+\Delta y)$. Позначимо через φ кут, що його утворює вісь l з віссю Ox, а через ρ — відстань точки P від точки M (рис. 82). Утворимо відношення

$$\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho}.$$

Якщо існує

$$\lim_{P \to M} \frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho}, \tag{19}$$

коли точка P по осі l наближається до M, то цю границю звуть *похідною від функції* $f(x,y)$ *в точці* M *за напрямом* l і позначають символом $\frac{\partial f}{\partial l}$.

Нехай $f(x,y)$ має неперервні частинні похідні $\frac{\partial f}{\partial x}$ та $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Точка P наближається до M по прямій l, отже

$$\Delta x = \rho\cos\varphi,$$
$$\Delta y = \rho\sin\varphi.$$

Таким чином,

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\rho} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{f'_x(x,y)\Delta x + f'_y(x,y)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y}{\rho} =$$
$$= \lim_{\rho\to 0}\frac{f'_x(x,y)\rho\cos\varphi + f'_y(x,y)\rho\sin\varphi + \alpha\rho\cos\varphi + \beta\rho\sin\varphi}{\rho} =$$
$$= f'_x(x,y)\cos\varphi + f'_y(x,y)\sin\varphi.$$

Як бачимо, за тих умов, які накладено на частинні похідні функції $f(x,y)$, границя (19) існує, а тому остаточно

$$\frac{\partial f}{\partial l} = f'_x(x,y)\cos\varphi + f'_y(x,y)\sin\varphi,$$

або

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi. \tag{20}$$

Це і є шуканим виразом похідної за даним напрямом.

Якщо $\varphi = 0$, то $\cos\varphi = 1$, $\sin\varphi = 0$ і $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}$. Якщо $\varphi = \frac{\pi}{2}$, то $\cos\varphi = 0$, $\sin\varphi = 1$ і $\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial y}$. Отже, частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ є похідними за додатними напрямами осей Ox та Oy.

У фіксованій точці похідна є функцією кута φ. Постає питання: в якому ж напрямі похідна має найбільшу величину? Інакше кажучи, в якому напрямі функція $f(x,y)$ найшвидше зростає? На це питання неважко відповісти.

Розглянемо вектор $\vec{g}$, який має за проекції на координатних осях величини $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ і $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ (частинні похідні функції $f(x,y)$, обчислені в точці $M(x,y)$).

Довжина, чи модуль, цього вектора буде

$$\left|\vec{g}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Праву частину рівності (20) помножимо й поділимо на $\left|\vec{g}\right|$. Дістанемо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \left|\vec{g}\right| \cdot \left\{ \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \cos\varphi + \frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} \sin\varphi \right\}. \qquad (21)$$

Очевидно, дріб

$$\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\sqrt{\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)^2}} = \frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\left|\vec{g}\right|}$$

дорівнює косинусові кута (позначимо цей кут через λ), що його утворює вектор $\left|\vec{g}\right|$ з віссю Ox, а дріб $\dfrac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\left|\vec{g}\right|}$ дає величину синуса цього самого кута.

Отже,

$$\frac{\dfrac{\partial z}{\partial x}}{\left|\vec{g}\right|} = \cos\lambda; \qquad \frac{\dfrac{\partial z}{\partial y}}{\left|\vec{g}\right|} = \sin\lambda\,.$$

Підставляючи ці вирази в рівність (21), матимемо

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \left|\vec{g}\right|(\cos\lambda\cos\varphi + \sin\lambda\sin\varphi) = \left|\vec{g}\right|\cos(\lambda - \varphi)\,. \qquad (22)$$

З рівності (22) бачимо, що найбільшу величину похідна $\frac{\partial z}{\partial l}$ матиме тоді, коли $\cos(\lambda - \varphi) = 1$, тобто тоді, коли вісь l збігається з вектором $\left|\vec{g}\right|$.

Вектор $\left|\vec{g}\right|$, який має за проекції на координатних осях $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ і вказує напрям найшвидшого зростання функції $f(x, y)$, зветься *градієнтом функції* в точці M і позначається символом

$$\vec{g} = \operatorname{grad} f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}. \tag{23}$$

Якщо б ми розглядали функцію від трьох змінних $u = f(x, y, z)$, то для похідної за напрямом l дістали б

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma, \tag{24}$$

де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — напрямні косинуси l, а для градієнта мали б вираз

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial u}{dz}\vec{k}. \tag{25}$$

Приклад 1. Знайти похідну функції $u = xy^2z^3$ у точці M (3; 2; 1) у напрямку вектора $\overline{MN}$, де N (5; 4; 2).

Знайдемо вектор MN і його напрямні косинуси:

$$\overline{MN} = \bar{l} = (5-3)\bar{i} + (4-2)\bar{j} + (2-1)\bar{k} = 2\bar{i} + 2\bar{j} + \bar{k};$$

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}; \quad \cos\beta = \frac{2}{3}; \quad \cos\gamma = \frac{1}{3}.$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці M:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2z^3; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2xyz^3; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3xy^2z^2;$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M = 4; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M = 12; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_M = 36.$$

Отже, $\frac{\partial u}{\partial l} = 4 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{2}{3} + 36 \cdot \frac{1}{3} = 22\frac{2}{3}$.

Приклад 2. Знайти кут між градієнтами функцій $z_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ і $z_2 = x - 3y + \sqrt{3xy}$ в точці $M(3;\ 4)$.

Маємо $\dfrac{\partial z_1}{\partial x} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial z_1}{\partial y} = \dfrac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$.

У точці M $\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right)_M = \dfrac{3}{5}$; $\left(\dfrac{\partial z_1}{\partial y}\right)_M = \dfrac{4}{5}$.

Отже, $\operatorname{grad} z_1 = \dfrac{3}{5}\bar{i} + \dfrac{4}{5}\bar{j}$.

Аналогічно

$$\frac{\partial z_2}{\partial x} = 1 + \frac{3y}{2\sqrt{3xy}}; \qquad \frac{\partial z_2}{\partial y} = -3 + \frac{3x}{2\sqrt{3xy}};$$

$$\left(\frac{\partial z_2}{\partial x}\right)_M = 1 + \frac{3\cdot 4}{2\sqrt{3\cdot 3\cdot 4}} = 2; \quad \left(\frac{\partial z_2}{\partial y}\right)_M = -3 + \frac{3\cdot 3}{2\sqrt{3\cdot 3\cdot 4}} = -\frac{9}{4};$$

$$\operatorname{grad} z_2 = 2\bar{i} - \frac{9}{4}\bar{j}.$$

Оскільки

$$|\operatorname{grad} z_1| = \sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = 1;$$

$$|\operatorname{grad} z_2| = \sqrt{4 + \frac{81}{16}} = \frac{\sqrt{145}}{4};$$

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot\frac{3}{5} - \frac{4}{5}\cdot\frac{9}{4}}{\frac{\sqrt{145}}{4}} \approx -0{,}199.$$

§ 6. Поняття про частинні похідні різних порядків

Нехай $z = f(x, y)$ — функція від двох змінних x та y. Її частинні похідні $f'_x(x, y)$ та $f'_y(x, y)$ — надалі їх називатимемо *частинними похідними першого порядку* — в загальному випадку є функціями від x та y, і ми можемо шукати від них частинні похідні. Дістанемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y); \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y).$$

Йдучи далі, можна визначити похідні третього порядку, четвертого і т.д.

Природно постає питання: чи залежить результат диференціювання функції кількох змінних від порядку диференціювання за різними змінними? Тобто, наприклад, похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ тотожні чи ні?

Справедлива **теорема** (сформулюємо її без доведення): *якщо частинні похідні* $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *і* $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ *неперервні в даній точці, то вони напевно рівні між собою:*

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

Приклад. Знайти частинні похідні другого порядку від функції $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$.

Маємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + y^2 - 5y^3; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy - 15xy^2 + 5y^4;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x - 30xy + 20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y - 15y^2; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y - 15y^2.$$

Як бачимо, $f''_{xy}(x,y) = f''_{yx}(x,y)$.

Для функції $z = f(x,y)$, диференційовної у точці $M(x,y)$, було введено поняття диференціала й одержана формула (12)

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy.$$

Називатимемо вираз dz диференціалом першого порядку. Домовимося позначати диференціал літерами d та δ.

Нехай функції $f'_x(x,y)$ та $f'_y(x,y)$ диференційовні в точці M. Розглядатимемо dx та dy як сталі множники. Тоді функція dz буде функцією двох змінних x та y, диференційовною в точці $M(x,y)$. Її диференціал має вигляд

$$\delta(dz) = \delta\left[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right] = \left[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right]'_x \delta x +$$
$$+\left[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right]'_y \delta y.$$

Диференціал $\delta(dz)$ від диференціала dz у точці M, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається *диференціалом другого порядку функції* $z = f(M)$ у точці M і позначається d^2z. Отже, $\delta(dz)\Big|_{\substack{\delta x = dx \\ \delta y = dy}} = d^2z$;

$$d^2z = \left(f_x'dx + f_y'dy\right)_x' dx + \left(f_x'dx + f_y'dy\right)_y' dy = f_{xx}''(dx)^2 + f_{xy}''\,dxdy +$$
$$+ f_{yx}''\,dxdy + f_{yy}''(dy)^2 = f_{xx}''(dx)^2 + 2f_{xy}''\,dxdy + f_{yy}''(dy)^2.$$

Аналогічно диференціал $\delta(d^2z)$ від d^2z, взятий при $\delta x = dx$, $\delta y = dy$, називається *диференціалом третього порядку функції* $z = f(M)$ і позначається d^3z і т.д. Тоді

$$d^3z = f_{x^3}'''(dx)^3 + 3f_{x^2y}'''(dx)^2dy + 3f_{xy^2}'''dx(dy)^2 + f_{y^3}'''(dy)^3.$$

Формула для d^nz нагадує розклад двочлена в n-му степені за формулою Ньютона. Тому її можна записати символічно

$$d^nz = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x, y).$$

Наприклад: знайти d^2z для функції $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$.

$$f_x' = \frac{y}{x^2 + y^2};\ f_y' = \frac{-x}{x^2 + y^2};\ f_{xy}'' = \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2} = \frac{x^2 - y^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$f_{x^2}'' = -\frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2};\ f_{y^2}'' = \frac{2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2};$$

$$d^2z = \frac{-2xy(dx)^2 + \left(x^2 - y^2\right)dxdy + 2xy(dy)^2}{\left(x^2 + y^2\right)^2}.$$

§ 7. Максимуми та мінімуми функцій від двох змінних

Означення. *Максимумом функції $f(x, y)$ зветься така величина $f(x_0, y_0)$ цієї функції, яка більша за всі значення, що їх набуває дана функція в будь-яких точках, достатньо близьких до точки $M(x_0, y_0)$.*

Інакше кажучи, функція $f(x, y)$ має в точці $M(x_0, y_0)$ максимум, якщо

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) < f(x_0 y_0),$$

або

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 y_0) < 0 , \qquad (26)$$

для достатньо малих Δx і Δy за абсолютною величиною (рис. 83).

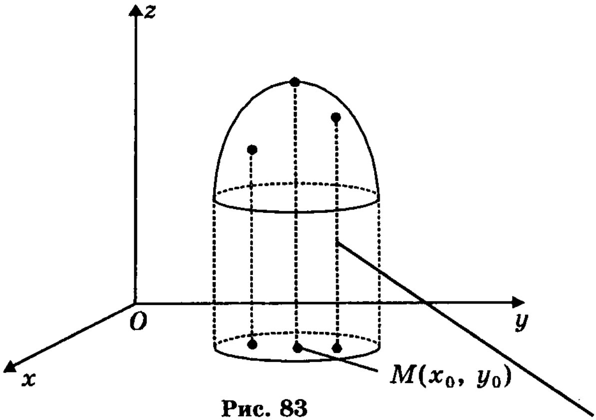

Рис. 83

Так само говорять, що $f(x,y)$ має мінімум у точці $M(x_0,y_0)$, якщо

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) > f(x_0 y_0) \qquad (27)$$

для достатньо малих Δx і Δy за абсолютною величиною (рис. 84).

Максимуми і мінімуми функції двох чи більше змінних звуться (як і для функції однієї змінної) *екстремумами функції.*

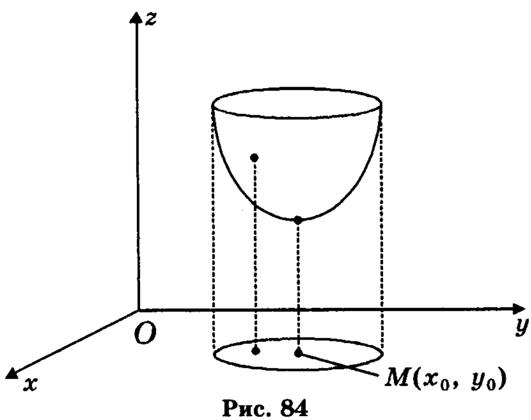

Рис. 84

Іноді будова функції дає змогу без додаткових досліджень визначити її екстремальні точки. Наприклад, функція $z = x^2 + y^2$ має очевидний мінімум “нуль” у точці $M(0;0)$ — на початку координат, а функція $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ має очевидний максимум (він дорівнює одиниці) в тій самій точці. На жаль, такі функції є винятком, і тому постає питання про встановлення необхідних і достатніх умов екстремуму функції.

Нехай функція $f(x, y)$ в точці $M(x_0, y_0)$ має максимум, тобто для достатньо малих за абсолютною величиною Δx і Δy:

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) < 0.$$

Припускаємо, що $f(x, y)$ має неперервні частинні похідні першого порядку.

Якщо ми вважатимемо y за сталу, поклавши, наприклад, $y = y_0$, то все одно виконуватиметься нерівність

$$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) < 0$$

для достатньо малих Δx за абсолютною величиною. А це означає, що функція однієї змінної $f(x, y_0)$ має максимум при $x = x_0$, і тому похідна її, в даному разі частинна похідна по x — $f'_x(x_0, y_0)$, має дорівнювати нулеві в точці M.

Аналогічно доводиться, що і $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Висновок. Якщо диференційовна функція $f(x, y)$ має екстремум у точці M, то в цій точці виконуються рівності

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0. \tag{28}$$

Точки, для яких виконуються рівності (28), звуться *критичними*, або *стаціонарними, точками*. Коли б ми мали диференційовну функцію від трьох змінних $u = f(x, y, z)$, то неважко було б довести, що в точці екстремуму

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \tag{29}$$

Умови (28) чи (29) є тільки необхідними.

Наприклад, функція $z = xy$ має частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x} = y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = x$, які дорівнюють нулю в точці $M(0; 0)$, але неважко пересвідчитися, що ця точка не є екстремальною. Справді, якщо будемо надавати x і y достатньо малі відмінні від нуля значення одного знака, z буде додатним, якщо різних знаків — від'ємним. Отже, нерівність (26) чи (27) не виконується. Точка $M(0; 0)$ не є екстремальною.

Достатні умови екстремуму для функції багатьох змінних мають значно більш складний характер, ніж для функції однієї змінної, а тому приведемо ці умови без доведення і лише для функції двох змінних.

Нехай функція $z = f(x,y)$ неперервна разом зі своїми частинними похідними першого і другого порядків і точка $M_0(x_0, y_0)$ є стаціонарною точкою цієї функції, тобто

$$z'_x(x_0, y_0) = 0; \quad z'_y(x_0, y_0) = 0.$$

Обчислимо в точці M_0 значення інших частинних похідних функції $f(x,y)$ і позначимо їх літерами A, B, C:

$$A = z''_{xx}(M_0); \quad B = z''_{xy}(M_0); \quad C = z''_{yy}(M_0).$$

Якщо $AC - B^2 > 0$, то функція $f(x,y)$ має в точці $M_0(x_0, y_0)$ екстремум; максимум, якщо $A < 0$, і мінімум, якщо $A > 0$ (з умови $AC - B^2 > 0$ випливає, що A і C обов'язково мають однакові знаки).

Якщо $AC - B^2 < 0$, то точка M_0 не є точкою екстремуму. Якщо $AC - B^2 = 0$, то ніякого висновку про характер стаціонарної точки зробить неможна і потрібні додаткові дослідження.

Приклад. Дослідити функцію на екстремум: $z = 2x^3 + xy^2 + 5x^2 + y^2$.

Знайдемо стаціонарні точки функції. Система рівнянь (28) має вигляд $6x^2 + y^2 + 10x = 0$; $2xy + 2y = 0$. З другого рівняння $y = 0$ або $x = -1$. Підставляючи по черзі ці значення в перше рівняння, знайдемо чотири стаціонарні точки: $M_1(0; 0)$; $M_2(-\frac{5}{3}; 0)$; $M_3(-1; 2)$; $M_4(-1; -2)$.

Другі частинні похідні даної функції:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x + 10; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x + 2.$$

У точці M_1 маємо $A = 10$; $B = 0$; $C = 2$. Тут $AC - B^2 = 20 > 0$; отже, точка M_1 є точкою екстремуму, а оскільки A і C додатні, то і точкою мінімуму. У точці M_2 відповідно буде $A = -10$; $B = 0$; $C = -\frac{4}{3}$; це точка максимуму. Якщо перевірити точки M_3 і M_4, то вони не є точками екстремуму (в них $AC - B^2 < 0$).

§ 8. Найбільше і найменше значення функції

Для того щоб знайти найбільше або найменше значення неперервної функції $z = f(x,y)$ в обмеженій замкнутій області, потрібно знайти всі максимуми або мінімуми функції, які досягаються в середині цієї області, а також найбільше або найменше значення функції на межі області. Найбільше з усіх цих чисел і буде шуканим найбільшим значенням, а найменше — найменшим.

Приклад 1. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^2 + 2y^2 + 4$ в крузі $x^2 + y^2 \le 4$.

Знайдемо критичні точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4y, \quad \Rightarrow \quad x = 0, \qquad y = 0.$$

Критична точка $O(0; 0)$. Значення функції в критичній точці $z_0 = z(0; 0) = 4$.

Тепер дослідимо поведінку функції на границі області $x^2 + y^2 = 4$. Звідси $x^2 = 4 - y^2$, $y \in [-2; 2]$. Підставимо значення x^2 у вираз для z. Одержимо функцію однієї змінної $z = 8 + y^2$, $y \in [-2; 2]$. Тепер функція z є функцією одного аргументу y, і ми шукаємо найбільше і найменше значення цієї функції на відрізку $[-2; 2]$:

$$z'_y = 2y.$$

Отже, $z'_y = 0$, якщо $y = 0$. Відповідне значення z: $z = 8$. Знайдемо тепер значення функції z на кінцях відрізка. При $y = \pm 2$ $z = 8 + 4 = 12$. Порівнюючи здобуті значення $z = 4$, $z = 8$, $z = 12$, бачимо, що найбільше значення функції $z_{\text{найб}} = 12$ досягається в точках $M_1(0; -2)$, $M_2(0; 2)$, а найменше значення функції $z_{\text{найм}} = 4$ досягається в точці $O(0; 0)$.

Приклад 2. Знайти найбільше та найменше значення функції $z = x^3 + y^3 - 3xy$ в області $0 \le x \le 2$, $-1 \le y \le 2$.

Задана область — прямокутник.

1. Знайдемо частинні похідні першого порядку і складемо систему рівнянь виду

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3(x^2 - y) = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3(y^2 - x) = 0,$$

або

$$\begin{cases} x^2 - y = 0, \\ y^2 - x = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи систему рівнянь, знайдемо стаціонарні точки $P_1(0; 0)$, $P_2(1; 1)$. Значення функції в цих точках: $z_1 = 0$, $z_2 = -1$.

2. Дослідимо функцію на межі області:

а) при $x = 0$ маємо $z = y^3$; ця функція монотонно зростає і на кінцях відрізка $[-1; 2]$ набуває значення $z\big|_{y=-1} = -1$; $z\big|_{y=2} = 8$;

б) при $x = 2$ маємо $z = 8 + y^3 - 6y$; знайдемо значення цієї функції в стаціонарній точці і на кінцях відрізка $[-1, 2]$. Маємо $z' = 3y^2 - 6$; $z' = 0$ при $y^2 = 2$ або в даній області при $y = \sqrt{2}$ $z\big|_{y=\sqrt{2}} = 8 - 4\sqrt{2}$; $z\big|_{y=-1} = 13$; $z\big|_{y=2} = 4$;

в) при $y=-1$ маємо $z=x^3-1+3x$ і $z'=3x^2+3>0$; функція монотонно зростає від $z|_{x=0}=-1$ до $z|_{x=2}=13$;

г) при $y=2$ маємо $z=x^3+8-6x$; $z'=3x^2-6$; $z'=0$; при $x=\sqrt{2}$ $z|_{x=\sqrt{2}}=8-4\sqrt{2}$; $z|_{x=0}=8$; $z|_{x=2}=4$.

3. Порівняємо всі знайдені значення функції: $z_{\text{найб}}=13$ у точці (2; −1); $z_{\text{найм}}=-1$ у точках (1; 1) і (0; −1).

Задача знаходження максимумів та мінімумів функцій багатьох змінних значно складніше аналогічної задачі для функції однієї змінної. Задачі знаходження подібних екстремумів присвячений спеціальний розділ математики — варіаційне числення, а також комплексна дисципліна — дослідження операцій. Вона присвячена пошуку оптимальних розв'язків у різних, у тому числі й економічних задачах, в яких досліджувана цільова функція кількох змінних набуває найбільшого або найменшого значення.

§ 9. Про деякі застосування функцій багатьох змінних в економічній теорії

Отримання об'єктивної і достовірної оцінки інвестиційного проекту передбачає ретельний фінансово-економічний аналіз вкладення коштів. Одним з варіантів такого аналізу є оцінка чутливості інвестиційного проекту, тобто схильність проекту до різних факторів. Основний підхід до аналізу чутливості полягає в розрахунку прибутковості проекту в умовах найбільш ймовірного прогнозу зміни основних параметрів виробництва. Завдання цього аналізу полягає в тому, щоб, вибравши найбільш суттєві параметри, визначити їх вплив на вартість проекту при зміні величин цих параметрів.

Формальне визначення чутливості:

$$S_{x_i}^{y}=\frac{x_i}{y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x_i}, \tag{30}$$

де y — початковий параметр проекту (його окремо взятий або інтегральний показник ефективності); x_i $(i=1,2,\ldots)$ — внутрішні змінні параметри проекту.

Часткова похідна $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ є функцією чутливості або коефіцієнтом впливу параметра x_i на показник проекту. Відношення $\frac{x_i}{y}$ вводиться для нормування і дає змогу здобути величину $S_{x_i}^{y}$ у відносних одиницях.

Аналізу чутливості передує фінансова оцінка інвестиційного проекту, в ході якої розраховуються такі показники: сума експлуатаційних витрат, виручка від реалізації продукції, прибуток і податки, чиста приведена вартість (*ЧПВ*), внутрішня норма рентабельності, термін окупності. Чутливість проекту можна оцінювати за кожним з цих показників.

Найбільш узагальнюючим показником доцільності реалізації того чи іншого інвестиційного проекту є чиста приведена вартість:

$$ЧПВ = \sum_{t=0}^{T} \frac{C_t}{(1+r)^t}, \tag{31}$$

де C_t — чистий грошовий потік наприкінці періоду t; T — життєвий цикл інвестиційного проекту; r — ставка дисконтування.

Чистий грошовий потік визначається як різниця між доходами і витратами від реалізації інвестиційного проекту і включає як доходи — прибуток від виробничої діяльності (P) і амортизаційні відрахування (Am), як витрати — інвестиції в капітальне виробництво, тобто відтворення основних фондів, які вибувають за цей період (I). Отже чистий грошовий потік визначається за формулою

$$C_t = P + Am - I. \tag{32}$$

Чистий прибуток у загальному вигляді визначається так:

$$P = \left[X \cdot C - (A + b \cdot X) + L\right] \cdot \left(1 - \frac{N_p}{100\%}\right), \tag{33}$$

де X — обсяг виробництва продукції в натуральному вираженні; C — ціна продукції; A — умовно-постійні витрати на випуск продукції; b — умовно-змінні витрати на одиницю продукції; L — ліквідаційна виручка від продажу об'єкта; N_p — діюча ставка оподаткування прибутку підприємств (30 %).

Підставимо формулу (33) у формулу (32) і спростимо вираз:

$$C_t = 0{,}7 \cdot X \cdot (C - b) + 0{,}7 \cdot (L - A) + Am - I. \tag{34}$$

Найбільш суттєвий вплив на величину грошового потоку, а отже і на *ЧВП*, здійснюють обсяг виробництва продукції в натуральному вираженні і ціна продукції.

Введемо позначення:

$$B = 0{,}7 \cdot (L - A) + Am - I. \tag{35}$$

Тоді

$$ЧПВ = \sum_{t=0}^{T} \frac{0{,}7 \cdot X \cdot (C-b) + B}{(1+r)^t}, \qquad (36)$$

Виходячи з виразу (36), можна визначити чутливість *ЧПВ* проекту до зміни обсягу виробництва продукції в натуральному вираженні, зміни ціни продукції і вибору величини ставки дисконтування. Для цього знайдемо часткові похідні:

$$\frac{\partial ЧПВ}{\partial X} = \sum_{t=1}^{T} \frac{0{,}7(C-b)}{(1+r)^t}, \qquad (37)$$

$$\frac{\partial ЧПВ}{\partial C} = \sum_{t=1}^{T} \frac{0{,}7 \cdot X}{(1+r)^t}, \qquad (38)$$

$$\frac{\partial ЧПВ}{\partial r} = \sum_{t=1}^{T} (-t) \frac{0{,}7 \cdot X \cdot (C-b) + B}{(1+r)^{t+1}}. \qquad (39)$$

Усі ці параметри можуть змінюватись як кожен окремо, так і одночасно. В першому випадку достатньо використати відповідну похідну для знаходження чутливості відповідно до формули (30). У другому, коли одночасно змінюються всі три параметри, потрібно використати чутливість за трьома змінними, яка відповідає градієнту:

$$\mathrm{grad}(ЧПВ) = \left\{ \frac{\partial ЧПВ}{\partial X}, \frac{\partial ЧПВ}{\partial C}, \frac{\partial ЧПВ}{\partial r} \right\}. \qquad (40)$$

Тоді відносну зміну *ЧПВ*, зумовлену невеликими і незалежними абсолютними відхиленнями параметрів X, C, r ($\Delta X, \Delta C, \Delta r$ відповідно), можна визначити так:

$$K_{\text{чпв}} = \frac{1}{ЧПВ} \cdot \left[\frac{\partial ЧПВ}{\partial X} \cdot \Delta X + \frac{\partial ЧПВ}{\partial C} \cdot \Delta C + \frac{\partial ЧПВ}{\partial r} \cdot \Delta r \right], \qquad (41)$$

Величина $K_{\text{чпв}} = \dfrac{\Delta ЧПВ}{ЧПВ}$ є коефіцієнтом чутливості інвестиційного проекту за критерієм чистої приведеної вартості. Він показує, в якій мірі відхилення вибраних параметрів впливають на зміну *ЧПВ*, що дає змогу вибрати один або кілька проектів з багатьох можливих.

Розглянемо приклад розрахунку чутливості інвестиційних проектів за критерієм *ЧПВ* (табл. 1).

Таблиця 1

Показники	Одиниця вимірювання	Проекти		
		A	B	C
Чиста приведена вартість (*ЧПВ*)	тис. грн	91,3	2439,4	860,1
Термін функціонування виробничих потужностей (*T*)	роки	3	4	6
Обсяг виробництва (*X*)	тис. шт.	47	45	15
Умовно-змінні витрати на одиницю продукції (*b*)	грн/шт.	30	180	90
Ціна продукції (*C*)	грн/шт.	65	380	90
Ставка дисконтування (*r*)	%	20	23	25
Можливі зміни параметрів	1 %			
X		+	−	+
C		−	+	−
r		−	+	−

Розрахуємо коефіцієнт чутливості за критерієм *ЧПВ* для кожного інвестиційного проекту. Результати розрахунків запишемо в табличній формі (табл. 2).

Таблиця 2

Проекти	ΔX, шт.	ΔC, тис. грн	Δr, %	$\frac{\partial ЧПВ}{\partial X}$, тис. грн/шт.	$\frac{\partial ЧПВ}{\partial C}$, шт.	$\frac{\partial ЧПВ}{\partial r}$, тис. грн	$K_{чпв}$
A	470	−0,00065	−0,01	0,05	69287,4	−313,90	0,20
B	−450	0,0038	0,01	0,34	77112,0	−4610,75	0,04
C	150	−0,0018	−0,01	0,18	30985,5	−2294,60	0,007

Можливі зміни параметрів проекту визначаються на основі експертних оцінок. При цьому завдання експертів зводяться до таких двох напрямків:

1) визначити найбільш суттєві параметри, що впливають на *ЧПВ*;

2) визначити найбільш ймовірні напрямки зміни цих параметрів.

У розрахунках за формулою (41) для зіставлення результатів відносні зміни параметрів мають бути рівні (наприклад, 1 %).

Знайдене значення $K_{чпв}$ дає змогу оцінити чутливість *ЧПВ* до зміни параметрів X, C, r. Очевидно, найбільшу стійкість має той проект, якому відповідає мінімальне значення модуля $K_{чпв}$ (проект C).

Для підвищення точності розрахунків можливе врахування ймовірності при визначенні напрямків зміни параметрів.

Аналогічно можна врахувати вплив й інших параметрів на *ЧПВ* проекту (наприклад, витрат на випуск продукції, банківського проценту, ставки податку на прибуток та ін.).

§ 10. Умовний екстремум функції двох змінних

До цього часу ми розглядали екстремуми функції, вважаючи, що ті змінні, від яких вона залежить, незалежні між собою. Такі екстремуми називають *абсолютними*. Перейдемо до розгляду того випадку, коли змінні, від яких залежить функція, зв'язані деякими співвідношеннями.

Нехай треба знайти екстремум функції

$$z = f(x, y) \tag{42}$$

за умови, що змінні x, y задовольняють умову зв'язку

$$\varphi(x, y) = 0. \tag{43}$$

Якщо функція (42) за умови (43) має екстремум, то такий екстремум називається *умовним*, або *відносним*.

Геометрично це можна розуміти так: функція $z = f(x, y)$ описує в просторі $Oxyz$ деяку поверхню, а рівняння $\varphi(x, y) = 0$ задає в цьому просторі циліндричну поверхню з твірною, паралельною осі Oz, напрямною якої служить крива, що визначається рівнянням (43) у площині xOy. Якщо лінія перетину цих двох поверхонь має внутрішню точку з найменшою або найбільшою аплікатою, то кажуть, що в цій точці функція $z = f(x, y)$ має відносний, або умовний, екстремум.

Для дослідження функції $z = f(x, y)$ на умовний екстремум можна знайти функцію $y = y(x)$; розв'язавши рівняння (43) відносно y, підставити $y = y(x)$ у рівняння $z = f(x, y)$ і одержану функцію однієї змінної $z = f(x, y(x))$ дослідити на екстремум. Такий спосіб знаходження екстремуму часто досить складний, оскільки потрібно знаходити аналітичний розв'язок рівняння $\varphi(x, y) = 0$. Тому ми розглянемо інший метод знаходження умовних екстремумів — метод множників Лагранжа.

Для дослідження функції (42) на умовний екстремум складемо функцію Лагранжа

$$F(x, y) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{44}$$

де λ — множник Лагранжа.

Необхідні умови екстремуму*. Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — точка умовного екстремуму функції $z = f(x, y)$ за умови $\varphi(x, y) = 0$; існують неперервні похідні $f'_x, f'_y, \varphi'_x, \varphi'_y$ у точці M_0 і деякому її околі, причому $\varphi'_y(x_0, y_0) \neq 0$ або $\varphi'_x(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді існує таке число λ, що трійка чисел (x_0, y_0, λ) є критичною точкою функції Лагранжа $F(x, y)$, тобто задовольняє системі рівнянь:

$$F'_x(x, y) = 0, \quad F'_y(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0, \tag{45}$$

або

$$f'_x(x, y) + \lambda\varphi'_x(x, y) = 0, \quad f'_y(x, y) + \lambda\varphi'_y(x, y) = 0, \quad \varphi(x, y) = 0. \tag{46}$$

Достатні умови екстремуму*. Припустимо, що: 1) $M_0(x_0, y_0)$ — критична точка функції (44) для деякого λ, тобто вона задовольняє необхідні умови; 2) функції $f(x, y)$ та $\varphi(x, y)$ двічі неперервно диференційовні на множині, що містить точку M_0:

$$d^2F(M_0) = A(dx)^2 + 2Bdxdy + C(dy)^2, \tag{47}$$

де $A = \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x^2}$, $B = \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial x \partial y}$, $C = \dfrac{\partial^2 F(M_0)}{\partial y^2}$, dx, dy задовольняють рівняння зв'язку

$$\varphi'_x(x_0, y_0)dx + \varphi'_y(x_0, y_0)dy = 0. \tag{48}$$

Якщо при цьому 1) $d^2F(M_0) > 0$, то функція $z = f(x, y)$ має в точці M_0 умовний мінімум; 2) якщо $d^2F(M_0) < 0$, то в точці M_0 функція має умовний максимум.

Приклад. Знайти екстремум функції $z = xy$ за умови, що $3x + 2y = 1$.

Складемо функцію Лагранжа

$$F(x, y) = xy + \lambda(3x + 2y - 1).$$

Необхідною умовою екстремуму є система рівнянь

$$\frac{\partial F}{\partial x} = y + 3\lambda = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = x + 2\lambda = 0, \quad 3x + 2y = 1,$$

звідки знаходимо $\lambda = -\dfrac{1}{12}$, $x = \dfrac{1}{6}$, $y = \dfrac{1}{4}$. Отже, точка $M_0\left(\dfrac{1}{6}; \dfrac{1}{4}\right)$ є критичною точкою і $F(x, y) = xy - \dfrac{1}{12}(3x + 2y - 1)$.

* Доведення можна знайти в підручниках, де ці питання викладено докладніше.

Для того щоб з'ясувати достатні умови, знаходимо, що $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1$, а dx, dy задовольняють рівняння зв'язку $3dx + 2dy = 0$, тобто $dy = -\frac{3}{2}dx$. Тоді $d^2F(M_0) = -3(dx)^2 < 0$.

Отже, функція $z = xy$ за умови, що $3x + 2y = 1$ досягає в точці $M_0\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{4}\right)$ умовного максимуму $z_{\max} = \frac{1}{24}$.

З а у в а ж е н н я. Метод Лагранжа поширюється на випадок довільного числа змінних і довільних умов зв'язку. Нехай задано функцію $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ і умови зв'язку

$$\varphi_l(x_1, \ldots, x_n) = 0,\ l = 1, 2, \ldots, m;\ m \le n. \tag{49}$$

Тоді функція Лагранжа матиме вигляд

$$F = f + \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2 + \ldots + \lambda_m\varphi_m, \tag{50}$$

а необхідна умова екстремуму буде задана системою рівнянь відносно $n + m$ невідомих $x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m$:

$$\begin{cases} F'_{x_1} = 0, \\ F'_{x_2} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ F'_{x_n} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots \\ F'_{\lambda_m} = 0. \end{cases} \tag{51}$$

§ 11. Метод найменших квадратів

При обробці експериментальних даних виникає потреба аналітично описати результати експериментальних досліджень. Одним із способів одержання таких формул є метод найменших квадратів. Розглянемо його.

Нехай нам треба встановити залежність між двома величинами x та y, для яких з експерименту відомо, що значення x_i відповідають значенням y_i. Ці результати експерименту подано у вигляді таблиці.

x	x_1	x_2	....	x_n	....
y	y_1	y_2	....	y_n	....

Розглянемо (x_i, y_i) як прямокутні координати точок на площині. Припустимо, що точки, взяті з таблиці, розміщено на площині так, як показано на рис. 85. У цьому випадку можна припустити, що між x та y існує лінійна залежність

$$y = ax + b. \tag{52}$$

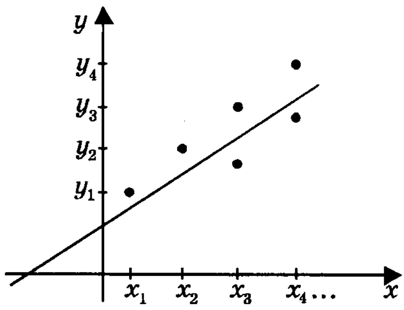

Рис. 85

Оскільки точки $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ не лежать точно на прямій, а лише біля неї, то формула (52) наближена. Тому, підставляючи значення координат точок у вираз $ax + b - y$, дістанемо рівності

$$\begin{cases} ax_1 + b - y_1 = \varepsilon_1, \\ ax_2 + b - y_2 = \varepsilon_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ ax_n + b - y_n = \varepsilon_n, \end{cases} \tag{53}$$

де $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ — числа, що задають величину відхилення відповідної точки від прямої і називаються *похибками*.

Потрібно підібрати коефіцієнти прямої a і b так, щоб ці похибки були якнайменшими за абсолютною величиною. Для цього й використовують метод найменших квадратів.

Позначимо

$$S = \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2. \tag{54}$$

Враховуючи вирази для похибок $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$, задані в (53), дістанемо

$$S = (ax_1 + b - y_1)^2 + \ldots + (ax_n + b - y_n)^2,$$

тобто

$$S = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2. \tag{55}$$

Тут x_i, y_i — задані числа, а коефіцієнти a та b — невідомі, які необхідно знайти, скориставшись умовами мінімуму S. Отже, S можна вважати функцією від змінних a та b і дослідити цю функцію на мінімум.

Маємо

$$\frac{\partial S}{\partial a} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)x_i, \quad \frac{\partial S}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i).$$

Прирівнявши ці частинні похідні до нуля, дістанемо лінійну систему двох рівнянь з двома невідомими a та b:

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{56}$$

Система (56) називається *нормальною системою методу найменших квадратів.*

Розв'язавши систему (56) відносно a та b і підставивши їх у формулу (52), дістанемо рівняння шуканої прямої. Покажемо, що розв'язки (a,b) системи (56) дають мінімум функції S із формули (55). Справді,

$$A = \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad B = \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad C = \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Отже,

$$\Delta = AC - B^2 = 4n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 4\left(\sum_{i-1}^{n} x_i\right)^2 = 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_j) > 0.$$

Оскільки $\Delta > 0$ і $A = \dfrac{\partial^2 S}{\partial a^2} > 0$, то в точці $M(a,b)$ функція S має мінімум.

Приклад. Нехай в результаті експерименту одержані п'ять значень x та відповідних їм значень y.

x	-1	1	3	5	8
y	-1	1	4	5	7

Шукатимемо функціональну залежність між x та y у вигляді $y = ax + b$. Для того щоб записати нормальну систему методу найменших квадратів (56), обчислимо значення сум при $n = 5$:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 16, \quad \sum_{i=1}^{5} y_i = 16, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 100, \quad \sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 95.$$

Тоді система (56) матиме вигляд

$$\begin{cases} 100a + 16b = 95, \\ 16a + 5b = 16. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, знаходимо $a \approx 0{,}897, b \approx 0{,}328$. Отже, рівняння прямої: $y = 0{,}897x + 0{,}328$.

З а у в а ж е н н я. Якщо точки, взяті з таблиці даних, розміщені так, що між x та y можна припустити параболічну залежність $y = ax^2 + bx + c$, то коефіцієнти a, b, c треба шукати з умови мінімуму функції S:

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i\right)^2.$$

Якщо точки з таблиці даних наближаються до гіперболи $y = \frac{a}{x} + b$, тоді функція S матиме вигляд

$$S = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{a}{x_i} + b - y_i\right)^2.$$

Контрольні запитання і завдання

1. Дайте означення функції двох та трьох змінних.
2. Що називається областю визначення функції кількох змінних? Дайте геометричне зображення функції двох або трьох змінних.
3. Що називається лінією рівня, поверхнею рівня?
4. Як визначається границя та неперервність функції двох змінних?
5. Що називається повним, частинним приростом функції кількох змінних?
6. Сформулюйте означення частинної похідної. Який її геометричний зміст?
7. Що називається повним диференціалом функції багатьох змінних? Які застосування має повний диференціал при наближених обчисленнях?
8. Дайте означення похідної від складної функції.
9. Як визначаються частинні похідні вищих порядків?
10. Дайте означення похідної за заданим напрямком.

11. Що таке градієнт функції?

12. Як визначається екстремум функції багатьох змінних та які умови його існування?

13. Як знаходити найбільше та найменше значення функції в замкнутій області?

Задачі і вправи для самостійної роботи

Знайти області визначення функцій.

10.1. $z=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$. **10.2.** $z=\frac{1}{R^2-x^2-y^2}$.

10.3. $z=\ln(y^2-4x+8)$. **10.4.** $U=\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2}$.

Знайти лінії рівня функцій та побудувати їх.

10.5. $z=2x+y$. **10.6.** $z=xy$. **10.7.** $z=\frac{1}{x^2+y^2}$.

Знайти частинні похідні функції.

10.8. $z=(5x^2y-y^3+7)^3$. **10.9.** $z=\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})$.

10.10. $z=x\sqrt{y}+\frac{y}{\sqrt[3]{x}}$. **10.11.** $z=\frac{1}{\operatorname{arctg}\frac{y}{x}}$. **10.12.** $U=x^{\frac{y}{z}}$.

10.13. $U=(\sin x)^{yz}$.

Знайти повні диференціали функцій.

10.14. $z=x^2y^4-x^3y^3+x^4y^2$. **10.15.** $z=\arcsin\frac{x}{y}$.

10.16. $z=\ln\operatorname{tg}\frac{y}{x}$. **10.17.** $U=x^{yz}$.

10.18. Знайти значення повного диференціала функції $z=x+y-\sqrt{x^2+y^2}$, якщо $x=3$; $y=4$; $\Delta x=0{,}1$; $\Delta y=0{,}2$.

10.19. Знайти значення повного диференціала функції $z=\frac{xy}{x^2-y^2}$, якщо $x=2$; $y=1$; $\Delta x=0{,}01$; $\Delta y=0{,}03$.

10.20. $U = e^{x-2y}$, де $x = \sin t$, $y = t^3$, $\frac{dU}{dt} = ?$

10.21. $z = \frac{1}{2}\ln\frac{U}{V}$, де $U = \operatorname{tg}^2 x$, $V = \operatorname{ctg}^2 x$, $\frac{dz}{dx} = ?$

10.22. $z = x^2 y$, де $y = \cos x$, $\frac{\partial z}{\partial x} = ?$, $\frac{dz}{dx} = ?$

10.23. $z = x^2 y - y^2 x$, де $x = U\cos V$, $y = U\sin V$, $\frac{\partial z}{\partial U} = ?$, $\frac{\partial z}{\partial V} = ?$

10.24. $z = x^3 + xy^2 - 5xy^3 + y^5$, показати, що $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Знайти $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ від заданих функцій.

10.25. $z = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2 + y^2)^3}$. **10.26.** $z = y^{\ln x}$.

10.27. $z = \frac{x - y}{x + y}$. **10.28.** $z = \arcsin(xy)$.

10.29. Знайти похідну функції $z = x^3 - 3x^2 y + 3xy^2 + 1$ в точці M (3; 1) у напрямку вектора $\overline{MN}$, де N (6; 5).

10.30. Знайти похідну функції $U = \arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ в точці M (1; 1; 1) у напрямку вектора $\overline{MN}$, де N (3; 2; 3).

10.31. Знайти похідну функції $z = \ln(x^2 + y^2)$ в точці M (3; 4) у напрямку градієнта функції z.

10.32. $z = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. Знайти $\operatorname{grad} z$ у точці (x_0, y_0).

10.33. 1) Знайти точку, в якій градієнт функції $z = \ln(x + \frac{1}{y})$ дорівнює $\bar{i} - \frac{16}{9}\bar{j}$; 2) знайти точки, в яких модуль градієнта функції $z = (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}$ дорівнює 2.

Відповіді до глави 10

10.1. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$. **10.2.** Вся площина за винятком точок кола $x^2+y^2=R^2$. **10.3.** $y^2>4x-8$. **10.4.** Куля $x^2+y^2+z^2\le a^2$. **10.5.** Сім'я паралельних прямих $2x+y=c$. **10.8.** $\frac{\partial z}{\partial x}=30xy(5x^2y-$ $-y^3+7)^2$; $\frac{\partial z}{\partial y}=3(5x^2y-y^3+7)^2(5x^2-3y^2)$. **10.9.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}$. **10.10.** $\frac{\partial z}{\partial x}=\sqrt{y}-\frac{y}{3\sqrt[3]{x^4}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{x}{2\sqrt{y}}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

10.11. $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{y}{(x^2+y^2)(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})^2}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{x}{(x^2+y^2)(\operatorname{arctg}\frac{y}{x})^2}$.

10.12. $\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{y}{z}x^{\frac{y}{z}-1}$; $\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{1}{z}x^{\frac{y}{z}}\ln x$; $\frac{\partial U}{\partial z}=-\frac{y}{z^2}x^{\frac{y}{z}}\ln x$. **10.13.** $\frac{\partial U}{\partial x}=$ $=yz(\sin x)^{yz-1}\cos x$; $\frac{\partial U}{\partial y}=z(\sin x)^{yz}\ln\sin x$; $\frac{\partial U}{\partial z}=y(\sin x)^{yz}\ln\sin x$.

10.14. $dz=xy\left[(2y^3-3xy^2+4x^2y)dx+(4y^2x-3yx^2+2x^3)dy\right]$. **10.15.** $dz=\frac{ydx-xdy}{y\sqrt{y^2-x^2}}$. **10.16.** $dz=\frac{2(xdy-ydx)}{x^2\sin\left(\frac{2y}{x}\right)}$. **10.17.** $dU=x^{zy-1}(yzdx+$ $+zx\ln xdy+xy\ln xdz)$. **10.18.** 0,08. **10.19.** $\frac{1}{36}$. **10.20.** $e^{\sin t-2t^3}(\cos t-$ $-6t^2)$. **10.21.** $\frac{4}{\sin 2x}$. **10.22.** $\frac{\partial z}{\partial x}=2x\cos x$; $\frac{dz}{dx}=x(2\cos x-$ $-x\sin x)$. **10.23.** $\frac{\partial z}{\partial U}=3U^3\sin V\cos V(\cos V-\sin V)$; $\frac{\partial z}{\partial V}=U^3(\sin V+$

$+\cos V)(1-3\sin V\cos V)$. **10.25.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{2x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **10.26.** $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\ln y(\ln y+1)}{x^2}e^{\ln x\ln y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$

$=\dfrac{\ln x(\ln x-1)}{y^2}e^{\ln x\ln y}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{\ln x\cdot\ln y+1}{xy}e^{\ln x\ln y}$.

10.27. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{4y}{(x+y)^3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{4x}{(x+y)^3}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{2(x-y)}{(x+y)^3}$.

10.28. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{xy^3}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{x^3y}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$; $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2y^2)^3}}$.

10.29. 0. **10.30.** $\left(\dfrac{\partial U}{\partial l}\right)_M=\dfrac{1}{6}$. **10.31.** $\dfrac{\partial z}{\partial l}=\dfrac{2}{5}$. **10.32.** $\dfrac{-y_0\bar{i}+x_0\bar{j}}{x_0^2+y_0^2}$.

10.33. 1) $\left(-\dfrac{1}{3};\dfrac{3}{4}\right)$; $\left(\dfrac{7}{3};-\dfrac{3}{4}\right)$; 2) точки, які лежать на колі $x^2+y^2=\dfrac{2}{3}$.

Глава 11. Ряди

§ 1. Основні означення

Припустимо, що нам дана нескінченна послідовність чисел $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$, тоді символ

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots, \text{ або } \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \tag{1}$$

зветься *нескінченним рядом*, або просто *рядом*, а числа $u_1, u_2, u_3, \ldots$ $\ldots, u_n, \ldots$ — членами ряду.

Вираз, що визначає n-й член ряду (1) при будь-якому $n = 1, 2, 3, \ldots$, зветься *загальним членом* ряду і позначається u_n. Так, загальним членом ряду

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots$$

є

$$u_n = \frac{1}{n^2}.$$

Якщо всі члени ряду — числа, ряд зветься *числовим*, а якщо вони функції — *функціональним*. Ми вивчатимемо спочатку числові ряди. Перше природне запитання: що розуміти під *сумою ряду*? Безглуздо було б вважати за суму ряду (1) той результат, що його дістанемо, виконавши вказані операції додавання. Адже цих операцій безліч і виконання їх — річ нездійсненна.

Щоб підійти до означення поняття про суму ряду, утворимо так звані *часткові суми*:

$$\begin{aligned} &s_1 = u_1; \\ &s_2 = u_1 + u_2; \\ &s_3 = u_1 + u_2 + u_3; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n; \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Сума s_n є змінною величиною, що змінюється разом з n. Як змінна величина при необмеженому зростанні n вона може прямувати до певної границі, може необмежено зростати, може, нарешті, коливатися, не прямуючи ні до якої границі. Якщо s_n прямує до певної границі s, коли n необмежено зростає, тобто

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s, \tag{2}$$

то ряд (1) зветься *збіжним*, а число s — його *сумою*.

У цьому і тільки в цьому разі пишуть

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots = s \text{, або } \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s. \tag{3}$$

Якщо s_n не має границі, ряд зветься *розбіжним*.

Різницю між сумою s ряду і сумою s_n перших його членів звуть *залишком* ряду і позначають символом r_n. Отже,

$$s - s_n = r_n, \tag{4}$$

або

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \ldots,$$

r_n — це та похибка, яку зробимо, взявши за наближену величину суми ряду суму s_n перших членів цього ряду.

З поняттям нескінченного ряду ми вже мали справу в елементарній алгебрі при вивченні прогресій. Як приклад розглянемо ряд $(a \neq 0)$

$$a + ag + ag^2 + \ldots + ag^{n-1} + \ldots \tag{5}$$

— геометричну прогресію зі знаменником g.

Суму перших членів цього ряду як суму n перших членів геометричної прогресії можна обчислити за відомою формулою

$$s_n = \frac{a - ag^n}{1 - g}.$$

Припустимо спочатку, що $|g| < 1$, тоді $\lim\limits_{n \to \infty} g^n = 0$ і

$$\lim_{n \to \infty} s_n = \frac{a}{1 - g}.$$

Отже, якщо $|g| < 1$, геометрична прогресія — збіжний ряд і його сума дорівнює $\frac{a}{1-g}$. Якщо $g = 1$, то $s_n = na \to \infty$ при $n \to \infty$ — ряд розбіжний. Якщо $g = -1$, то ряд має вигляд $a - a + a - a + \ldots$ і s_n дорівнює або a, або нулеві, залежно від того, непарне чи парне число n. У цьому випадку s_n є величиною обмеженою, але до певної границі вона не прямує, ряд розбіжний.

З означення суми ряду (1) випливають такі висновки.

Висновок 1. Якщо ряд (1) збігається, то його загальний член u_n прямує до нуля при необмеженому зростанні n.

Справді, якщо $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, то й $\lim\limits_{n\to\infty} s_{n-1} = s$. Проте

$$s_n - s_{n-1} = (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) - (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_{n-1}) = u_n.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}(s_n - s_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} u_n = 0. \tag{6}$$

Прямування до нуля загального члена ряду є *необхідною умовою* збіжності ряду. Якщо u_n не прямує до нуля, то ряд не може бути збіжним, він розбіжний. Водночас умова (6) не є достатньою: вона може виконуватися, а ряд буде розбіжним.

Як приклад розглянемо *гармонійний ряд*

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots. \tag{7}$$

Назва ряду пояснюється тим, що число c зветься *середнім гармонійним* чисел a та b, якщо

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Легко пересвідчитися, що кожен член ряду (7), починаючи з другого, є середнім гармонійним двох сусідніх його членів. Наприклад,

$$\frac{1}{\frac{1}{9}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\frac{1}{8}} + \frac{1}{\frac{1}{10}}\right), \text{ тобто } 9 = \frac{1}{2}(8 + 10).$$

Легко встановити, що ряд (7) розбіжний, хоча

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Це можна довести від супротивного. Візьмемо, що ряд (7) збігається і його сума дорівнює s. Звідси випливає, що

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n} - s_n) = \lim_{n\to\infty} s_{2n} - \lim_{n\to\infty} s_n = s - s = 0 .$$

Така рівність суперечить нерівності

$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{2n} > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} .$$

Отже, гармонійний ряд розбігається.

Спинимося, нарешті, ще на деяких висновках, що випливають з означення суми ряду.

Висновок 2. Якщо ряд (1) збігається і має суму s_3, то й ряд $au_1 + au_2 + au_3 + \ldots + au_n + \ldots$ теж збіжний і має за суму as.

Справді,

$$\sigma_n = au_1 + au_2 + \ldots + au_n = as_n ,$$

отже,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} as_n = a \lim_{n\to\infty} s_n = as.$$

Висновок 3. На збіжність ряду не впливає відкидання (або додавання) на початку кількох його членів.

Справді,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}(u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots + u_n) = u_1 + u_2 + u_3 + \lim_{n\to\infty}(u_4 + \ldots + u_n),$$

отже $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ буде існувати чи ні залежно від того, чи існуватиме $\lim\limits_{n\to\infty}(u_4 + \ldots + u_n)$, бо сума початкових трьох членів як стала величина не впливає на збіжність чи розбіжність ряду.

Приклад 1. Дослідити на збіжність ряд

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots .$$

Через те що $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$, суму n перших членів даного ряду можна записати

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right).$$

Після зведення подібних дістанемо

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1; \quad s = 1.$$

Як бачимо, ряд збіжний і його сума дорівнює 1.

§ 2. Ряди з додатними членами

Питання про збіжність чи розбіжність числового ряду найпростіше розв'язується для рядів з додатними членами. Ці ряди важливі ще й тому, що до них, як побачимо далі, зводяться багато інших типів рядів. Якщо

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots \tag{8}$$

є рядом з додатними членами, то сума його перших членів $s_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ як зростаюча змінна при необмеженому збільшенні n або прямує до певної границі (якщо s_n обмежена), або стає як завгодно великою (ряд розбігається).

Збіжність чи розбіжність ряду з додатними членами найчастіше встановлюють, порівнюючи його з рядом, про який напевне відомо, що він збіжний (або розбіжний).

Теорема про порівняння рядів. Нехай маємо два ряди з додатними членами

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots, \tag{9}$$

$$v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n + \ldots. \tag{10}$$

Якщо, починаючи з деякого n, справджується нерівність

$$v_n \le u_n, \tag{11}$$

то, коли збігається ряд (9), збігається і ряд (10), якщо розбігається ряд (10), то й поготів буде розбігатися ряд (9).

Не обмежуючи загальності, можемо вважати, що нерівність справджується починаючи з $n = 1$. У противному разі можемо відкинути ті перші члени, для яких нерівність (11) не виконується (висновок 3).

Припустимо спочатку, що ряд (9) збіжний. Запровадивши позначення

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n;$$

$$\sigma_n = v_1 + v_2 + v_3 + \ldots + v_n,$$

матимемо на підставі нерівності (11)

$$\sigma_n \le s_n.$$

Проте $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ (за припущенням ряд (9) — збіжний), отже,

$$\sigma_n \le s_n \le s,$$

тобто σ_n є обмеженою зміною. Звідси випливає, що σ_n має границю, ряд (10) збіжний.

Якщо ряд (10) розбіжний, тобто $\sigma_n \to \infty$, то й поготів буде розбіжним ряд (9), бо $s_n \ge \sigma_n$.

Приклад 2. Ряд $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots$ розбігається, бо його члени не менші від членів гармонійного ряду $\left(\frac{1}{n} \le \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, а гармонійний ряд розбіжний.

Приклад 3. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots. \tag{12}$$

Збіжність ряду

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots \tag{13}$$

випливає з того, що його члени менші за (відповідні) члени збіжного ряду

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} + \ldots;$$

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n(n+1)}.$$

А це означає, що збігається і даний ряд (12), бо він відрізняється від ряду (13) лише першим членом.

§ 3. Ознака Д'Аламбера збіжності числового ряду

Нехай маємо ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + u_{n+1} + \ldots \qquad (14)$$

з додатними членами.

Д'Аламберову ознаку найчастіше застосовують в так званій *граничній формі*. Якщо існує

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l, \qquad (15)$$

то при $l < 1$ ряд (14) збіжний, при $l > 1$ — ряд розбіжний. Якщо $l = 1$, то випадок сумнівний, треба вдатися до інших ознак.

Дійсно, спираючись на властивість границі, завжди можна дібрати таке N, що як тільки $n > N$, виконуватиметься нерівність

$$\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} - l \right| < \varepsilon, \qquad (16)$$

звідки

$$l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < l + \varepsilon.$$

Нехай $l < 1$. Взявши $\varepsilon > 0$ таке, щоб $l + \varepsilon < 1$, матимемо

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1.$$

А в такому разі ряд (14) збігається. Число $l + \varepsilon$ відіграє тут роль g.

Нехай тепер $l > 1$. Ми можемо дібрати таке $\varepsilon > 0$, щоб $l - \varepsilon > 1$, тобто $\varepsilon < l - 1$.

Тоді

$$1 < l - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n};$$

ряд розбіжний.

Приклад. Дослідити на збіжність ряд

$$1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^{n-1}} + \ldots . \qquad (17)$$

Тут

$$u_n = \frac{n}{3^{n-1}}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{3^n}.$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)3^{n-1}}{n3^n}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]=\frac{1}{3}<1;$$

ряд збігається.

§ 4. Знакопереміжні ряди. Ознака Лейбніца

Ряд зветься *знакопереміжним*, якщо його члени по черзі то додатні, то від'ємні; таким буде ряд

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\ldots+u_{2n-1}-u_{2n}+\ldots, \tag{18}$$

де всі члени $u_1, u_2, u_3, \ldots$ додатні.

Ознака Лейбніца. *Якщо члени знакопереміжного ряду постійно спадають за абсолютною величиною і прямують до нуля при $n\to\infty$, то ряд збігається.*

Візьмемо суму $2n$ членів ряду (18): $s_{2n}=(u_1-u_2)+(u_3-u_4)+\ldots$ $\ldots+(u_{2n-1}-u_{2n})$. Вона додатна — $s_{2n}>0$, бо, зважаючи на те що $u_1>u_2>u_3>\ldots$, додатною є різниця в кожній дужці і зі збільшенням n сума s_{2n} буде зростати.

Однак, з іншого боку, якщо s_n записати у вигляді

$$s_{2n}=u_1-(u_2-u_3)-(u_4-u_5)-\ldots-(u_{2n-2}-u_{2n-1})-u_{2n},$$

бачимо, що s_{2n} менше u_1 при будь-якому n. Отже, s_{2n} є змінною зростаючою й обмеженою. За відомою ознакою вона має границю $\lim\limits_{n\to\infty}s_{2n}=s$, причому $s<u_1$.

Візьмемо тепер непарну кількість членів $2n+1$. Маємо

$$s_{2n+1}=s_{2n}+u_{2n+1}.$$

За умовою

$$\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=0.$$

Беручи це до уваги, дістанемо

$$\lim_{n\to\infty}s_{2n+1}=\lim_{n\to\infty}s_{2n}+\lim_{n\to\infty}u_{2n+1}=s.$$

Отже, s_n при необмеженому зростанні n прямує до однієї й тієї самої границі, незалежно від того, чи n парне, чи непарне. Ряд (18) збігається.

З щойно доведеної ознаки випливає дуже важливий практичний *висновок*: похибка при обчисленні суми збіжного знакопереміжного ряду не перевищує за абсолютною величиною першого відкинутого члена і має його знак.

Справді, залишок ряду $r_n = \pm(u_{n+1} - u_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots)$ задовольняє всі умови ознаки Лейбніца, якщо їх задовольняє сам ряд:

$$|r_n| = (u_{n+1} - n_{n+2} + u_{n+3} - u_{n+4} + \ldots) < u_{n+1}.$$

Приклад 1. Ряд $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + \ldots$ збіжний за ознакою Лейбніца: члени його постійно спадають і загальний член $(-1)^{n+1}\frac{1}{n} \to 0$, коли $n \to \infty$. Вимога того, щоб члени знакопереміжного ряду постійно (монотонно) спадали, істотна.

Приклад 2. Потрібно обчислити з точністю до 0,01 суму збіжного ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{4^4} + \ldots.$$

Тут $u_3 = \frac{1}{81} > \frac{1}{100}$, але вже $u_4 = \frac{1}{256} < \frac{1}{100}$. Отже, суму нашого ряду представляє S_3 з точністю до 0,01: $S \approx S_3 = 1 - \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} = \frac{1231}{1294}$, причому $S < S_3$, оскільки величина $r_3 = S - S_3 < 0$ має знак четвертого члену ряду.

§ 5. Знакозмінні ряди. Абсолютна та умовна збіжності

Ряд зветься *знакозмінним*, якщо серед його членів є як додатні, так і від'ємні члени.

Нехай маємо знакозмінний ряд

$$u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots. \tag{19}$$

Теорема. *Якщо збігається ряд*

$$|u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n| + \ldots, \tag{20}$$

складений з абсолютних величин членів ряду (19), то збігається і ряд (19).

Візьмемо

$$s_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$$

і

$$\sigma_n = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \ldots + |u_n|.$$

Позначимо через s'_n суму всіх додатних, а через s''_n — суму всіх від'ємних членів серед перших n членів даного ряду, тобто

$$s_n = s'_n - s''_n, \quad \sigma_n = s'_n + s''_n.$$

За припущенням σ_n має границю, отже мають границі s'_n і s''_n. А це означає, що існує границя і для s_n. Теорему доведено. Обернене твердження несправедливе. Даний знакозмінний ряд може бути збіжним, а складений з абсолютних величин його членів — розбіжним.

Означення 1. *Ряд зветься абсолютно збіжним, якщо збігається не тільки він сам, але й ряд, складений з абсолютних величин його членів.*

Означення 2. *Знакозмінний ряд зветься умовно збіжним, якщо сам ряд збігається, а ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбігається.*

Приклад 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ збігається абсолютно, оскільки збігається ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

Приклад 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ збігається за ознакою Лейбніца. Проте ряд, складений з абсолютних величин його членів, розбігається як гармонійний ряд. Отже, даний ряд збігається умовно.

Встановити абсолютну збіжність числового ряду часто-густо вдається за допомогою ознаки Д'Аламбера, розглядаючи границю модуля, тобто

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|. \tag{21}$$

Якщо така границя існує і менша від 1, то ряд (19) абсолютно збіжний.

§ 6. Функціональні ряди

Ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n + \ldots$ зветься *функціональним*, якщо його члени є функціями від x.

Нехай нам дано функціональний ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots, \tag{22}$$

члени якого є функціями від x, визначені на деякому проміжку (a, b). Візьмемо будь-яке значення $x = x_0$ з проміжку (a, b) і обчислимо для нього члени ряду (22). Тоді

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)+\ldots \tag{23}$$

— числовий ряд. Утворимо

$$s_n(x_0)=u_1(x_0)+u_2(x_0)+\ldots+u_n(x_0)\,.$$

Якщо існує $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x_0)$, то кажуть, що ряд (22) збігається в точці $x=x_0$, і позначають його суму через $s(x_0)$. Як бачимо, з функціонального ряду (22) можна утворити безліч числових рядів, фіксуючи ту чи іншу величину x з проміжку $(a,\ b)$.

Сукупність тих числових значень x, для яких функціональний ряд збігається, зветься *областю збіжності* цього ряду.

Очевидно, що область збіжності ряду належить проміжкові, на якому визначені члени функціонального ряду. Сума ряду в області збіжності буде деякою функцією від x, тому її позначають символом $s(x)$.

Приклад 5. Геометрична прогресія $1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}\ldots$ (знаменник прогресії x) збігається для будь-якої величини x, $|x|<1$, тобто коли $-1<x<1$. Отже, областю збіжності ряду є проміжок $(-1;\ 1)$, а сума ряду дорівнює $\dfrac{1}{1-x}$ (див. § 1), так що можна писати

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}+\ldots \tag{24}$$

на проміжку $(-1;\ 1)$. Ззовні цього проміжку функція $\dfrac{1}{1-x}$ звичайно існує, але ряд (права частина рівності) розбіжний для $|x|\ge 1$ і рівність (24) втрачає зміст.

Як і для збіжних числових рядів, у випадку збіжності функціонального ряду позначають

$$s(x)-s_n(x)=r_n(x)\,,$$

або

$$s_n(x)+r_n(x)=s(x)\,,$$

і функцію $r_n(x)=s(x)-s_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+u_{n+3}(x)+\ldots$ називають *залишком ряду*.

§ 7. Степеневі ряди

Окремим, але дуже важливим випадком функціональних рядів є степеневі ряди. *Степеневим рядом* зветься функціональний ряд вигляду

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots . \qquad (25)$$

Сталі $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n \cdots$ — *коефіцієнти степеневого ряду.*

Через те що завжди можна зробити заміну $x - a = x'$, ми будемо надалі майже виключно займатися вивченням степеневих рядів вигляду

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n + \ldots . \qquad (26)$$

При $x = 0$ всі члени ряду (26), крім першого, стають нулями, отже сума ряду існує і дорівнює a_0. Інакше кажучи, будь-який степеневий ряд при $x = 0$ збіжний.

З'ясуємо тепер питання про область збіжності степеневого ряду, який збігається не тільки при $x = 0$, а й при значеннях x, відмінних від нуля.

Теорема Абеля. *Якщо степеневий ряд*

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots$$

збігається при $x = x_0 \neq 0$, *то він абсолютно збігається при всіх значеннях x, для яких*

$$|x| < |x_0|;$$

і навпаки, якщо розбігається при $x = x_0$, *то він розбігатиметься при всіх значеннях x, для яких*

$$|x| > |x_0|.$$

Доведення. Нехай ряд (замість x візьмемо x_0)

$$a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^{\,2} + \ldots + a_nx_0^{\,n} + \ldots \qquad (27)$$

збіжний. Тоді його загальний член $u_n = a_nx_0^n$ прямує до нуля (необхідна умова збіжності, § 1) при $n \to \infty$, отже існує таке додатне число M, що

$$|a_nx_0^n| < M \qquad (28)$$

для всіх n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Справді, коли б такого числа M не можна було вказати, то це означало б, що серед членів ряду є як завгодно великі за абсолютною величиною і вони не прямують до нуля при зростанні n.

Перетворимо ряд (26) до вигляду (множимо і ділимо на x_0^n)

$$a_0 + a_1 x_0\left(\frac{x}{x_0}\right) + a_2 {x_0}^2\left(\frac{x}{x_0}\right)^2 + \ldots + a_n {x_0}^n\left(\frac{x}{x_0}\right)^n + \ldots$$

і розглянемо ряд, складений з абсолютних величин його членів:

$$|a_0| + |a_1 x_0|\left|\frac{x}{x_0}\right| + |a_2 {x_0}^2|\left|\frac{x}{x_0}\right|^2 + \ldots + |a_n {x_0}^n|\left|\frac{x}{x_0}\right|^n + \ldots. \qquad (29)$$

Зважаючи на нерівність (28), члени цього ряду менші від відповідних членів збіжного ряду

$$M + Mg + Mg^2 + \ldots + Mg^n + \ldots,$$

де $g = \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$ (геометрична прогресія із знаменником $g < 1$).

Отже, ряд (26) збігається абсолютно для величин $|x| < |x_0|$, тобто для x з проміжку

$$-|x_0| < x < |x_0|.$$

Переходимо тепер до другої частини теореми. Нехай при $x = x_0$ ряд (26) розбіжний. Тоді він буде розбігатися і при $|x| > |x_0|$, бо якби він збігався при x, що задовольняє нерівність $|x| > |x_0|$, то за першою частиною теореми він був би абсолютно збіжним у точці x_0. А це суперечить умові, що в точці x_0 ряд розбіжний. Отже, ряд розбігається і в точці x.

Спираючись на теорему Абеля, можна зробити висновок: існує таке додатне число R, що при $|x| < R$ маємо точки абсолютної збіжності, а при $|x| > R$ — точки розбіжності степеневого ряду.

Проміжок $(-R, R)$ зветься *інтервалом збіжності*, а число R — *радіусом збіжності* степеневого ряду. Якщо $R = 0$, інтервал вироджується в точку, коли $R = \infty$, інтервалом збіжності є вся числова вісь. У простих випадках радіус збіжності можна визначити, користуючись ознакою Д'Аламбера.

Нехай маємо ряд (26). Розглянемо ряд, складений з абсолютних величин його членів:

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x|^2 + \ldots + |a_n||x|^n + \ldots. \qquad (30)$$

Це ряд з додатними членами; ми маємо право застосувати ознаку Д'Аламбера для встановлення його збіжності. Отже,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}||x|^{n+1}}{|a_n||x|^n} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x|.$$

Припустимо, що границя відношення $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ існує при $n\to\infty$.

Позначаючи її через L, матимемо

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L|x|.$$

За ознакою Д'Аламбера ряд (30) збіжний тоді, коли $L|x| < 1$, тобто коли $|x| < \frac{1}{L}$, і розбіжний, коли $L|x| > 1$, тобто коли $|x| > \frac{1}{L}$. Отже, $\left(-\frac{1}{L},\frac{1}{L}\right)$ є інтервалом збіжності степеневого ряду, а його радіус збіжності

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{31}$$

Питання про збіжність ряду на кінцях проміжку, тобто при $x=-R$ та $x=R$, залишається відкритим. Воно вирішується окремо для кожного конкретного степеневого ряду.

Приклад 1. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{3}\right)^n$ має радіус збіжності $R = \lim_{n\to\infty}\frac{3(n+1)}{n} = 3$. Областю збіжності даного ряду є проміжок $-3 \le x < 3$.

Приклад 2. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n!\,x^n$ збігається лише в точці $x_0 = 0$, оскільки $R = 0$.

Приклад 3. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ збігається при всіх x, оскільки $R=\infty$.

В інтервалі збіжності: 1) *сума степеневого ряду є неперервною функцією*; 2) *степеневий ряд можна почленно інтегрувати*, тобто якщо

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots, \tag{32}$$

то

$$\int f(x)dx = C + a_0x + \frac{a_1x^2}{2} + \frac{a_2x^3}{3} + \ldots + \frac{a_nx^{n+1}}{n+1} + \ldots, \tag{33}$$

де $-R < x < R$; 3) *степеневий ряд можна почленно диференціювати*, тобто коли для x з проміжку $(-R, R)$ справедлива рівність (32), то

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} + \ldots . \tag{34}$$

При цьому інтервал збіжності ряду (33) чи ряду (34) той самий, що й ряду (32).

Доведення щойно сформульованих властивостей степеневих рядів читач може знайти в більш повних курсах математичного аналізу.

Ряди (33) та (34) знову ж таки є степеневими рядами, і тому операції почленного інтегрування чи диференціювання можна застосувати до них повторно.

§ 8. Формула і ряд Тейлора

Формула Тейлора дає змогу подавати наближено функції у вигляді многочлена і, користуючись цим, складати таблиці логарифмів, значень тригонометричних функцій, коренів і т.п.

Формула Тейлора для многочлена. Нехай $f(x)$ — многочлен степеня n:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots + a_nx^n , \tag{35}$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ — сталі.

Поклавши в рівності (35) $x = 0$, дістанемо

$$a_0 = f(0) .$$

Диференціюючи тотожність (35) по x, матимемо

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \ldots + na_nx^{n-1} .$$

Прийнявши тут $x = 0$, дістанемо значення a_1:

$$a_1 = f'(0).$$

Друге диференціювання дає

$$f''(x) = 1 \cdot 2a_2 + 2 \cdot 3a_3x + \ldots + (n-1)na_nx^{n-2} ,$$

і при $x = 0$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{1 \cdot 2} .$$

Продовжуючи послідовно ці операції, знайдемо

$$a_3 = \frac{f'''(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \quad a_4 = \frac{f^{IV}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

і т. д. Похідна n-го порядку буде

$$f^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1)na_n,$$

тобто — величина стала, так що і $f^{(n)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots na_n$. Звідси

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}. \tag{36}$$

Підставляючи знайдені значення коефіцієнтів $a_0, a_1, \ldots, a_n$ у рівність (35), дістанемо

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{1 \cdot 2}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}x^n. \tag{37}$$

Це є окремим випадком формули Тейлора для многочлена.

Формула (37) відрізняється від формули (35) лише способом запису коефіцієнтів. Проте ми бачимо, що коефіцієнти многочлена просто подаються через його значення і значення його похідних у точці $x = 0$.

Можна подати коефіцієнти многочлена через його значення і значення його похідних у будь-якій точці $x=a$, відмінній від нульової.

Наприклад,

$$f(x) = A_0 + A_1(x-a) + A_2(x-a)^2 + \ldots + A_n(x-a)^n. \tag{38}$$

Дістанемо *формулу Тейлора для многочлена:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1 \cdot 2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}(x-a)^n. \tag{39}$$

При $a = 0$ вона перетворюється на формулу (37).

Приклад 1. Розкласти многочлен $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 - 3x + 4$ за степенями двочлена $x - 4$. Тут $a = 4$.

Маємо

$$f(4) = -56; \quad f'(x) = 4x^3 - 15x^2 + 2x - 3; \quad f'(4) = 21;$$

$$f''(x) = 12x^2 - 30x + 2; \quad f''(4) = 74;$$

$$f'''(x) = 24x - 30; \quad f'''(4) = 66;$$

$$f^{IV}(x) = 24; \quad f^{IV}(4) = 24.$$

Підставляючи вирази коефіцієнтів у формулу (39), матимемо

$$f(x) = -56 + 21(x-4) + \frac{74}{1 \cdot 2}(x-4)^2 + \frac{66}{1 \cdot 2 \cdot 3}(x-4)^3 + \frac{24}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}(x-4)^4,$$

або

$$f(x) = (x-4)^4 + 11(x-4)^3 + 37(x-4)^2 + 21(x-4) - 56.$$

Формула Тейлора для довільної функції. Формула (39) справедлива лише для многочлена і до інших функцій не застосовна. Однак для функції, що має похідні до n-го порядку включно в точці $x = a$, можна, звичайно, виписати праву частину рівності (39), тільки здобутий вираз не дорівнюватиме даній функції. Виявляється, що за певних умов цей вираз дає наближену величину функції і похибка наближення піддається строгій оцінці.

Припустимо що функція $f(x)$ має послідовні похідні до $(n + 1)$-го порядку включно в деякому проміжку, що містить точку $x = a$.

Тоді можемо написати

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{1\cdot 2\cdots n} + R_n(x), \quad (40)$$

де доданок $R_n(x)$ — різниця між функцією $f(x)$ та многочленом

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{1\cdot 2}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\cdots n}(x-a)^n. \quad (41)$$

Вираз для функції $R_n(x)$ — її звуть *залишковим членом* — дає величину похибки при заміні функції многочленом (41). Лагранж запропонував залишковий член у вигляді

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}. \quad (42)$$

Підставляючи його у формулу (40), дістанемо рівність

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)(x-a)^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}, \quad (43)$$

яка зветься *формулою Тейлора із залишковим членом у формі Лагранжа.*

Рівність (43) відрізняється від формули (39) тільки останнім членом: він має таку саму форму, як і інші члени, але похідна обчислена не в точці $x = a$, а в проміжній точці c між a та x. Якщо $a = 0$, то дістанемо окремий дуже важливий випадок формули Тейлора:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdots n}x^n + \frac{f^{(n+1)}(c)x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}, \quad (44)$$

де c — число, що знаходиться між нулем та x. Іноді записують в цьому випадку $c = \theta x$, $0 < \theta < 1$.

Приклад 2. Знайти формулу Тейлора при $a = 0$ для функції $f(x) = e^x$.

Маємо

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \ldots, f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n+1)}(x) = e^x.$$

Прийнявши $x = 0$, дістанемо

$$f(0) = e^0 = 1, \quad f'(0) = 1, \quad f''(x) = 1, \ldots, f^{(n)}(0) = 1.$$

Отже, формула Тейлора (44) для функції e^x матиме вигляд

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + \frac{e^{\theta x} x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (n+1)}. \qquad (45)$$

Приклад 3. Знайти формули Тейлора для функцій $f(x)$ при $a = 0$:
а) $f(x) = \sin x$,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (2n-1)} + R_n, \qquad (46)$$

де

$$R_n = \frac{\sin\left[\theta x + 2n\frac{\pi}{2}\right]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (2n-1)\cdot 2n} x^{2n}; \qquad (47)$$

б) $f(x) = (1 + x)^m$, де m — будь-яке дійсне число (відмінне від цілого додатного),

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3} x^3 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} x^n + R_n, \qquad (48)$$

де

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)(m-n)(1+\theta x)^{m-n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)} x^{n+1}; \qquad (49)$$

в) $f(x) = \ln(1 + x)$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots \pm \frac{x^n}{n} + R_n(x), \qquad (50)$$

де

$$R_n(x) = \pm\frac{(1+\theta x)^{-(n+1)}}{n+1} x^{n+1}; \qquad (51)$$

г) $f(x) = \cos x$,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots (2n-1)2n} + R_n(x),$$

де

$$R_n(x) = \frac{\cos\left[\theta x + (2n+1)\frac{\pi}{2}\right]}{(2n+1)!}x^{2n+1}.$$

Приклад 4. Записати функцію $y = \sqrt[3]{x}$ у вигляді многочлена п'ятого степеня відносно двочлена $x-1$.

Обчислимо значення функції $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$ та її похідних до п'ятого порядку включно при $x_0 = 1$:

$$f(1) = 1;\ f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}};\ f'(1) = \frac{1}{3};\ f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}};\ f''(1) = -\frac{2}{9};$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}};\ f'''(1) = \frac{10}{27};\ f^{IV}(x) = -\frac{80}{81}x^{-\frac{11}{3}};\ f^{IV}(1) = -\frac{80}{81};$$

$$f^{V}(x) = \frac{880}{243}x^{-\frac{14}{3}};\ f^{V}(1) = \frac{880}{243}.$$

Отже, за формулою Тейлора дістанемо

$$\sqrt[3]{x} = 1 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{2}{9\cdot 2!}(x-1)^2 + \frac{10}{27\cdot 3!}(x-1)^3 - \frac{80}{81\cdot 4!}(x-1)^4 +$$

$$+\frac{880}{243\cdot 5!}(x-5)^5 + R_5,$$

де $R_5 = \dfrac{f^{VI}(c)}{6!}(x-1)^6 = -\dfrac{12320}{729\cdot 6!}c^{-\frac{17}{3}}(x-1)^6, \quad 1 < c < x.$

Приклад 5. Обчислити з точністю до 10^{-3} наближене значення $\sqrt[3]{29}$.

Запишемо заданий корінь так:

$$\sqrt[3]{29} = \sqrt[3]{27+2} = \sqrt[3]{27\left(1+\frac{2}{27}\right)} = 3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

Використаємо біноміальний розклад (48).

Нехай $x = \dfrac{2}{27}$ і $m = \dfrac{1}{3}$, дістанемо

$$\sqrt[3]{29} = 3\left(1 + \frac{2}{81} - \frac{2\cdot 2}{81\cdot 81} + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3} - \frac{2^4\cdot 5}{81^4} + \ldots + R_n\right).$$

Оцінюючи величини послідовних похибок обчислення $3|R_n|$, знаходимо

$$3|R_1| < \frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2} < 0{,}002, \quad 3|R_2| < \frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3} < 0{,}0003.$$

Отже, для обчислення із заданою точністю достатньо взяти три члени, які передують залишку R_2, тобто $\sqrt[3]{29} \approx 3(1 + 0{,}024 - 0{,}0006) = 3{,}072$.

Ряд Тейлора. Припустимо тепер, що функція $f(x)$ має похідні всіх порядків у деякому проміжку, що містить точку $x = a$. Тоді рівність (43) буде справедлива для будь-якого x з цього проміжку і для будь-якого n.

Позначимо

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(x-a)^n, \qquad (52)$$

отже,

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x).$$

Залишковий член $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$ дає величину похибки, яку робимо, беручи $P_n(x)$ за наближену вартість функції $f(x)$. Якщо величина залишкового члена $R_n(x)$ необмежено прямує до нуля при збільшенні числа n, тобто

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \qquad (53)$$

коли необмежено збільшується кількість членів многочлена $P_n(x)$, що їх беремо для обчислення функції, то це означає, що

$$\lim_{n\to\infty}\left[f(x) - P_n(x)\right] = 0.$$

Отже, функція $f(x)$ є сумою ряду (якщо виконується рівність (53))

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}(x-a)^n + \ldots. \qquad (54)$$

Він має назву *ряду Тейлора для функції* $f(x)$.

Якщо взяти $a = 0$, дістанемо окремий його випадок:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{1\cdot 2} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{1\cdot 2\cdots n} + \cdots. \qquad (55)$$

Як видно з попереднього, ряд Тейлора зображує дану функцію тоді і тільки тоді, коли $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) \neq 0$, то хоч ряд (54) чи (55) може бути й збіжним, проте його сума не дорівнюватиме $f(x)$.

§ 9. Розвинення деяких елементарних функцій в ряд Тейлора та наближені обчислення

1. Треба розвинути в ряд Тейлора $f(x)=e^x$. У § 8 (приклад 2) встановлено формулу (45)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + \frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)},$$

де

$$R_n(x) = \frac{e^{\theta x}x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n(n+1)}.$$

При будь-якій фіксованій величині $x=a$ $e^{\theta x}$ — обмежена величина (менша за e^a при $a>0$ і за одиницю при $a<0$). Через те що ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + \frac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)} + \ldots$$

абсолютно збіжний для всіх x, його загальний член $\dfrac{x^{n+1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}$ прямує до нуля при $n\to\infty$ та будь-якому x. А тому і $R_n(x)$ прямує до нуля при $n\to\infty$ для будь-якого x. Маємо остаточно для будь-якого x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} + \ldots. \tag{56}$$

Якщо у формулі (56) візьмемо $x=1$, дістанемо нескінченний ряд для числа e:

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots.$$

Чим більше візьмемо членів цього ряду, тим точніше буде значення e. При $n=8$, тобто взявши

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}$$

і виконавши відповідні обчислення, матимемо

$$e \approx 2{,}71828.$$

Більш точна величина

$$e \approx 2{,}718281828459045.$$

2. Аналогічно згідно з формулою (46) маємо

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} - \ldots. \tag{57}$$

Як приклад обчислимо $\sin 12^\circ$. У радіанній мірі

$$12^\circ = \frac{\pi}{180}\cdot 12 = \frac{\pi}{15},$$

отже

$$\sin 12^\circ = \sin\frac{\pi}{15} = \frac{\pi}{15} - \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \ldots.$$

Дістали числовий знакопереміжний ряд. Обмежуючись двома членами ряду, знайдемо

$$\sin 12^\circ = 0{,}207910.$$

З якою точністю ми дістали $\sin 12^\circ$, скільки тут правильних знаків? Ряд знакопереміжний, похибка не перевищує за абсолютною величиною першого з відкинутих членів (§ 4)

$$\frac{\left(\frac{\pi}{15}\right)^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \approx 0{,}000003,$$

отже, перші п'ять десяткових знаків правильні.

3. Розвинення згідно з формулою (48)

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \ldots \tag{58}$$

справедливе для значень x, що справджують нерівність $|x| < 1$. Ряд (58) зветься *біномним рядом*. Якщо m є цілим додатним числом, то ряд (58) переривається на члені $n = m$ і перетворюється у відому зі шкільного курсу формулу бінома Ньютона.

За допомогою ряду (58) здобувають корені з будь-якою точністю.

Приклад 1. Припустимо, що треба обчислити $\sqrt[3]{69}$. Запишемо цей корінь у вигляді

$$\sqrt[3]{69} = \sqrt[3]{64+5} = \sqrt[3]{4^3+5} = 4\sqrt[3]{1+\frac{5}{4^3}} = 4\left(1+\frac{5}{4^3}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

У даному випадку $m = \dfrac{1}{3}$, $x = \dfrac{5}{64}$, і тому згідно з формулою (58) матимемо

$$\sqrt[3]{69} = 4\left[1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{64} + \frac{\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-1\right)}{1\cdot 2}\left(\frac{5}{64}\right)^2 + \ldots\right].$$

Обмежившись трьома членами розвинення, дістанемо

$$\sqrt[3]{69} \approx 4{,}10144 .$$

За таблицями із сьома знаками $\sqrt[3]{69} \approx 4{,}1015659$.

4. Для функції $f(x) = \cos x$ маємо ряд

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} - \frac{x^6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6} + \ldots . \qquad (59)$$

Приклад 2. Обчислити з точністю до 10^{-5} $\cos 5^\circ$.

Запишемо розклад функції $f(x) = \cos x$ за формулою (59) і підставимо в неї $x = 5\cdot\dfrac{2\pi}{360} = \dfrac{\pi}{36}$. Матимемо $\cos 5^\circ = \cos\dfrac{\pi}{36} = 1 - \left(\dfrac{\pi}{36}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2!} + \left(\dfrac{\pi}{36}\right)^4\cdot\dfrac{1}{4!} + \ldots$.

Оскільки $\left(\dfrac{\pi}{36}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2!} = 0{,}003808$, $\left(\dfrac{\pi}{36}\right)^4\dfrac{1}{4!} < 2{,}5\cdot 10^{-6}$, обмежимося двома членами розкладу, при цьому похибку можна оцінити так:

$$|R_4| = \left|\frac{\cos\theta x}{4!}\right|x^4 \le \left(\frac{\pi}{36}\right)^4\frac{1}{4!} < \frac{2{,}5}{10^6}.$$

Отже, $\cos 5^\circ \approx 1 - \left(\dfrac{\pi}{36}\right)^2\cdot\dfrac{1}{2} = 1 - 0{,}00381 = 0{,}99619$.

5. Рівність

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \qquad (60)$$

справедлива для всіх x, що відповідають нерівності

$$-1 < x \le 1.$$

Зокрема, при $x = 1$ маємо

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots.$$

§ 10. Деякі застосування степеневих рядів

Інтегрування функцій. Відомо, що не кожна елементарна функція інтегровна в елементарних функціях. Наприклад, функція e^{-x^2} неперервна при всіх x і має первісну, яка не є елементарною функцією.

Приклад 1. Інтеграл $\int\limits_0^x e^{-x^2} dx$ обчислимо через розкладання підінтегральної функції в степеневий ряд і почленне його інтегрування. Якщо в тотожності (56) замінити x на $-x^2$, то дістанемо рівність

$$e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}, \tag{61}$$

яка має місце при всіх x. Інтегруємо його почленно, одержимо формулу

$$\int_0^x e^{-t^2} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^x t^{2n} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1},$$

яка при будь-якому x дає представлення зазначеного інтеграла у вигляді нескінченного степеневого ряду.

Приклад 2. Щоб обчислити в межах від 0 до x інтеграл від $\frac{\sin x}{x}$, розкладемо цю функцію в степеневий ряд.

Діленням ряду (57) на x дістанемо $\frac{\sin x}{x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n+1)!}$.

Почленним інтегруванням знайдемо

$$\int_0^x \frac{\sin t}{t} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)}.$$

Розкриття невизначеностей. Обчислення границі функції за допомогою степеневого ряду ілюструємо прикладом.

Приклад 3. Потрібно обчислити границю $L = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - 1}{e^{3x} - 1 - 3x}$.

Розкладемо в степеневі ряди окремо чисельник і знаменник дробу і виділимо в них загальний множник x^2:

$$\frac{\cos 2x - 1}{e^{3x} - 1 - 3x} = \frac{(1 - \frac{1}{2!}4x^2 + \frac{1}{4!}16x^4 - \ldots) - 1}{(1 + 3x + \frac{9}{2!}x^2 + \ldots) - 1 - 3x} = \frac{x^2(-2 + \frac{2}{3}x^2 - \ldots)}{x^2(\frac{9}{2} + \frac{9}{2}x + \ldots)}.$$

Скоротимо дріб на x^2, потім покладемо в правій частині цієї рівності $x = 0$ і, користуючись неперервністю суми степеневого ряду, дістанемо $L = -\dfrac{4}{9}$.

§ 11. Формули Ейлера

Для дійсних значень x ми встановили таке розвинення (§ 9):

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots .$$

За аналогією з цією рівністю приймемо як означення функції e^{iy} (із суто уявним показником) таку рівність:

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1} + \frac{(iy)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(iy)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{(iy)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{(iy)^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \ldots .$$

(Справедливість її обгрунтовується в теорії рядів з комплексними членами, викладення якої виходить за межі цього підручника.)

Проте

$$i^2 = -1, \quad i^3 = i^2 \cdot i = -i, \quad i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1, \quad i^5 = i^4 \cdot i = i \text{ і т. д.},$$

а тому

$$e^{iy} = 1 + iy - \frac{y^2}{1 \cdot 2} - i\frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + i\frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots ,$$

або

$$e^{iy} = \left(1 - \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \ldots\right) + i\left(y - \frac{y^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{y^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \ldots\right).$$

Зважаючи на рівності (57) та (59), можемо написати

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y. \tag{62}$$

Якщо в цій формулі замінити y на $-y$, знайдемо, враховуючи парність функції $\cos y$ і непарність $\sin y$,

$$e^{-iy} = \cos(-y) + i\sin(-y) = \cos y - i\sin y\,. \tag{63}$$

Формули (62) та (63), які пов'язують показникову функцію з тригонометричними, звуть *формулами Ейлера.* Пізніше ми цими формулами скористаємося.

Контрольні запитання і завдання

1. Що називається числовим рядом?
2. Що називається n-ю частинною сумою числового ряду?
3. Який числовий ряд називається збіжним?
4. Що є необхідною умовою збіжності числового ряду?
5. Назвіть достатні умови збіжності, які базуються на порівнянні рядів.
6. Назвіть ознаку Д'Аламбера збіжності рядів.
7. Які ряди називаються знакопереміжними? Наведіть приклади.
8. Сформулюйте ознаку Лейбніца збіжності знакопереміжних рядів.
9. Які знакопереміжні ряди називаються абсолютно збіжними? Умовно збіжними?
10. Дайте означення степеневого ряду та області його збіжності.
11. Як знайти область збіжності степеневого ряду?
12. Запишіть розкладання в степеневий ряд функцій e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$, $\ln(1+x)$.
13. Як забезпечується необхідна точність при застосуванні степеневих рядів у наближених обчисленнях?

Приклади розв'язування задач

11.1. Написати перші три члени ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n x^n}{n^2 3^n}$, знайти інтервал збіжності ряду і дослідити його збіжність на кінцях інтервалу.

Беручи послідовно $n = 1, 2, 3, \ldots$, запишемо цей ряд у вигляді

$$\frac{5x}{1^2\cdot 3}+\frac{5^2x^2}{2^2\cdot 3^2}+\frac{5^3x^3}{3^2\cdot 3^3}+\ldots+\frac{5^nx^n}{n^2\cdot 3^n}+\ldots.$$

Для знаходження області збіжності ряду застосуємо ознаку Д'Аламбера

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{5^{n+1}x^{n+1}\cdot n^2\cdot 3^n}{(n+1)^2\cdot 3^{n+1}\cdot 5^n x^n}\right| = \frac{5}{3}|x|\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{5}{3}|x|.$$

Даний ряд збігається абсолютно при тих значеннях x, які задовольняють нерівності

$$\frac{5}{3}|x| < 1\text{, або } |x| < \frac{3}{5}\text{, або } -\frac{3}{5} < x < \frac{3}{5}.$$

Дослідимо збіжність ряду на кінцях одержаного інтервалу. При $x = -\frac{3}{5}$ даний ряд набуває вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$.

Останній ряд знакопереміжний; абсолютна величина загального члену прямує до нуля, якщо $n \to \infty$.

Отже, згідно з ознакою Лейбніца збіжності знакопереміжних рядів цей ряд збігається, тобто $x = -\frac{3}{5}$ належить області збіжності даного ряду.

При $x = \frac{3}{5}$ цей ряд набуває вигляду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ і збігається згідно з ознакою порівняння (11).

Отже, $-\frac{3}{5} \le x \le \frac{3}{5}$ — область збіжності даного ряду.

11.2. Обчислити $\int\limits_0^1 \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}\,dx$ з точністю до 0,001.

Запишемо підінтегральну функцію у вигляді степеневого ряду. Замінимо в розкладі функції $\sin x$ на $\sin\sqrt[3]{x}$ маємо

$$\sin\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x} - \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{3!} + \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}{5!} - \frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^7}{7!} + \ldots .$$

Тоді

$$\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x} = x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3!} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!} + \ldots .$$

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}\,dx = \int\limits_0^1 \left(x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3!} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!} + \ldots\right)dx =$$

$$= \left(3x^{\frac{1}{3}} - \frac{x}{3!} + \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5!\cdot 5} - \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7!\cdot 7} + \ldots\right)\Bigg|_0^1 = 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{200} - \frac{1}{11760} + \cdots.$$

Одержаний знакопереміжний ряд задовольняє умови теореми Лейбніца. Оскільки четвертий його член за абсолютною величиною менше ніж 0,001, то для забезпечення заданої точності достатньо вибрати перші три члени. Тоді

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx \approx 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{200} \approx 2{,}834\,.$$

Задачі і вправи для самостійної роботи

Знайти суми рядів, довівши, що вони збігаються.

11.3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$. **11.4.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+5)}$.

Дослідити збіжність рядів за допомогою ознаки порівняння.

11.5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$. **11.6.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n-1}$. **11.7.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

11.8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

Дослідити збіжність рядів за допомогою ознаки Д'Аламбера.

11.9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$. **11.10.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}$. **11.11.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n}$. **11.12.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)!}$.

11.13. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{2^n\cdot n!}$. **11.14.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{3^n\cdot n!}$.

Дослідити, які з вказаних рядів збігаються абсолютно, які умовно, які розбіжні:

11.15. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n-1}$. **11.16.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{2^n}$.

11.17. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$. **11.18.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^3}{2^n}$. **11.19.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n^2}{n!}$.

11.20. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Знайти область збіжності степеневих рядів.

11.21. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$. **11.22.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n\cdot 10^{n-1}}$. **11.23.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{n-1}x^{2(n-1)}$.

11.24. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n-1)3^{n-1}x^{n-1}$. **11.25.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n(n+1)}$. **11.26.** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx)^n$.

11.27. Розкласти многочлен x^3+3x^2-2x+4 за степенями двочлена $x+1$.

11.28. Розкласти многочлен $x^{10}-3x^5+1$ за степенями двочлена $x-1$.

11.29. Написати формулу Тейлора n-го порядку для функції $y=\dfrac{1}{x}$, якщо $x_0=-1$.

11.30. Написати формулу Тейлора n-го порядку для функції $y=\sqrt{x}$, якщо $x_0=4$.

11.31. Розкласти функцію $y=\dfrac{1}{x}$ у ряд Тейлора в околі точки $x=3$.

11.32. Розкласти функцію $y=x^2e^x$ у ряд Тейлора в околі точки $x=0$.

11.33. Знайти перші п'ять членів ряду Тейлора для функції $y=e^{\cos x}$ в околі точки $x=0$.

Розкласти в степеневий ряд за степенями x функції:

11.34. $y=e^{2x}$. **11.35.** $y=e^{-x^2}$.

11.36. $y=\cos^2 x$. **11.37.** $y=\ln(10+x)$.

Обчислити наближено:

11.38. $\dfrac{1}{\sqrt[5]{e}}$ з точністю до 0,00001. **11.39.** $\cos 18^\circ$ з точністю до 0,0001. **11.40.** $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,001. **11.41.** $\ln 1{,}04$ з точністю до 0,0001. **11.42.** $\ln 5$ з точністю до 0,0001.

Обчислити наближено значення визначених інтегралів, взявши вказане число членів розкладу підінтегральної функції; знайти похибку:

11.43. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\dfrac{\cos x}{x}dx$ (3 члени). **11.44.** $\int\limits_{0}^{\frac{1}{4}}e^{-x^2}dx$ (3 члени). **11.45.** $\int\limits_{0{,}1}^{1}\dfrac{e^x}{x}dx$ (6 членів). **11.46.** Обчислити $\int\limits_{0}^{0{,}2}\dfrac{\sin x}{x}dx$ з точністю до 0,0001.

11.47. Обчислити $\int\limits_{0}^{0{,}1}\dfrac{e^x-1}{x}dx$ з точністю до 0,001.

Відповіді до глави 11

11.3. $S_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)$; $S=\frac{1}{2}$. **11.4.** $S_n=\frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{2n+1}-\right.$ $\left.-\frac{1}{2n+3}-\frac{1}{2n+5}\right)$; $S=\frac{23}{90}$. **11.5.** Збіжний. **11.6.** Розбіжний.

11.7. Розбіжний. **11.8.** Збіжний. **11.15.** Збіжний умовно. **11.16.** Збіжний абсолютно. **11.17.** Розбіжний. **11.18.** Збіжний абсолютно. **11.19.** Розбіжний. **11.20.** Збіжний умовно. **11.21.** $-1<x\le 1$. **11.22.** $-10\le x<10$.
11.23. $-\frac{\sqrt{2}}{2}<x<\frac{\sqrt{2}}{2}$. **11.24.** $-\frac{1}{3}<x<\frac{1}{3}$. **11.25.** $-1\le x\le 1$.
11.26. $x=0$. **11.27.** $(x+1)^3-5(x+1)+8$.
11.28. $(x-1)^{10}+10(x-1)^9+45(x-1)^8+120(x-1)^7+210(x-1)^6+$ $+249(x-1)^5+195(x-1)^4+90(x-1)^3+15(x-1)^2-5(x-1)-1$.
11.29. $-1-(x+1)-(x+1)^2-\cdots-(x+1)^n+(-1)^{n+1}\frac{(x+1)^{n+1}}{[-1+\theta(x+1)]^{n+2}}$, де $0<\theta<1$.
11.30. $2+\frac{x-4}{4}-\frac{(x-4)^2}{64}+\frac{(x-4)^3}{512}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!\,(x-4)^n}{n!\,(n-1)!2^{4n-2}}+Rn$,
де $0<\theta<1$. **11.31.** $\frac{1}{3}-\frac{x-3}{9}+\frac{(x-3)^2}{27}-\ldots+(-1)^{n+1}\frac{(x-3)^{n-1}}{3^n}+\ldots$.
11.32. $x^2+\frac{x^3}{1!}+\frac{x^4}{2!}+\ldots+\frac{x^{n+1}}{(n-1)!}+\ldots$. **11.33.** $e\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{6}-\ldots\right)$.
11.34. $1+2x+\frac{(2x)^2}{2!}+\ldots+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots$. **11.35.** $1-x^2+\frac{x^4}{2!}-\ldots$ $\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}+\ldots$. **11.36.** $1-\left[x^2-\frac{(2x)^4}{2\cdot 4!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}+\ldots\right]$.

11.37. $\ln 10 + \left[\frac{x}{10} - \frac{x^2}{2 \cdot 10^2} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n \cdot 10^n} + \ldots\right]$. **11.38.** 0,81873.

11.39. 0,9511. **11.40.** 5,066. **11.41.** 0,0392. **11.42.** 1,60940. **11.43.** 0,3230, похибка 0,0001. **11.44.** 0,24488, похибка 0,00001. **11.45.** 3,518, похибка 0,001. **11.46.** 0,1996. **11.47.** 0,102.

Глава 12. Диференціальні рівняння

§ 1. Основні поняття

При вивченні різних явищ природи дуже рідко вдається знайти закон, який встановлює залежність між шуканими величинами. Проте в багатьох випадках є можливість встановити залежність між величинами та їх похідними або диференціалами.

При цьому одержуються рівняння, в яких шукана функція знаходиться під знаком похідної або диференціала.

Нетотожне співвідношення, в яке невідома функція входить під знаком похідної або диференціала, називається *диференціальним рівнянням.*

Позначимо через x незалежну змінну, через y — невідому функцію і запишемо співвідношення:

1) $\frac{dy}{dx} = x + y;$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha y^2 = 0;$

3) $x^2dy + (x + y)dx = 0;$

4) $\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} - 1 = 0.$

Перші три рівності є диференціальними рівняннями, а четверта — диференціальною тотожністю. Якщо невідома функція, що входить до диференціального рівняння, є функцією більше ніж однієї змінної, то диференціальне рівняння називається *рівнянням у частинних похідних.*

Ось приклади таких рівнянь:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+x\frac{\partial u}{\partial t}=0;\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=a^2\,\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Ми розглядатимемо такі диференціальні рівняння, в яких шукана функція є функцією лише однієї незалежної змінної. Такі рівняння називаються звичайними диференціальними рівняннями. Будь-яке рівняння цього класу має вигляд

$$F(x,y,y',y'',\ldots,y^{(n-1)},y^{(n)})=0. \tag{1}$$

Порядком диференціального рівняння називається порядок найвищої похідної невідомої функції, яка входить в дане рівняння. Отже, рівняння (1) — це звичайне диференціальне рівняння n-го порядку (n — ціле додатне число).

Розв'язком диференціального рівняння (1) називається така n раз диференційовна функція $y(x)$, яка, будучи підставлена в це рівняння, перетворює його в тотожність, тобто

$$F(x,y(x),y'(x),y''(x),\ \ldots,\ y^{(n-1)}(x),y^{(n)}(x))\equiv 0.$$

Наприклад, функція $y=\sin 2x$ є розв'язком рівняння $\dfrac{d^2y}{dx^2}+4y=0.$

Графік розв'язку звичайного диференціального рівняння називається *інтегральною кривою* цього рівняння. Виявляється, що рівняння (1) має безліч розв'язків. Сім'я розв'язків, яка залежить від n довільних параметрів, називається *загальним розв'язком* рівняння (1). Процес знаходження розв'язків рівняння (1) називається інтегруванням цього рівняння. Розв'язок рівняння (1) може бути у явному вигляді $y=y(x)$ або в неявному — $G(x,y(x))=0$. Рівняння $G(x,y(x))=0$, яке визначає розв'язок $y(x)$ рівняння (1), називається інтегралом цього рівняння.

Розглянемо рівняння першого порядку, розв'язане відносно похідної,

$$y'=f(x,y), \tag{2}$$

де функція $f(x,y)$ визначена і неперервна в області D змінних x та y. Нехай $y=\varphi(x)$ є розв'язком цього рівняння на інтервалі $(a,\ b)$.

Геометрична інтерпретація рівняння (2) та його розв'язку $y=\varphi(x)$ полягає у такому. Графік функції $y=\varphi(x)$ має в кожній своїй точці дотичну (бо $y=\varphi(x)$ — диференційовна), кут нахилу якої до додатного напрямку осі Ox позначимо через α. В кожній точці $A\,(x,\ y)$ інтегральної кривої $y=\varphi(x)$ величини $x,\ y$ та $y'=\operatorname{tg}\alpha$ за рівнянням (2) зв'язані співвідношенням

$$\operatorname{tg}\alpha=f(x,y). \tag{3}$$

Отже, диференціальне рівняння (2) встановлює залежність між координатами довільної точки A інтегральної кривої і кутовим коефіцієнтом її дотичної в точці A.

Рівність (3) визначає в кожній точці A $(x,\ y)$ області D вектор (довільної довжини, відмінної від нуля), який утворює напрямок $k = \operatorname{tg}\alpha$ з додатним напрямком осі Ox. Множина всіх таких векторів в області D утворює поле напрямків рівняння (2). Будь-яка інтегральна крива цього рівняння має ту властивість, що напрямок її дотичної збігається з напрямком поля у відповідній точці області D. З геометричної точки зору зінтегрувати рівняння (2) означає таке: потрібно побудувати такі криві, щоб вони дотикалися до векторів поля в кожній своїй точці.

Приклад 1. Розглянемо рівняння $y' = 2x$. Отже, $\operatorname{tg}\alpha = 2x$, при $x = 0$ маємо $\alpha = 0$, при $x = \dfrac{1}{2}$ маємо $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$. Інтегральні криві утворюють сім'ю парабол $y = x^2 + c$. На рис. 86 проведено дотичні до однієї з парабол в точці A.

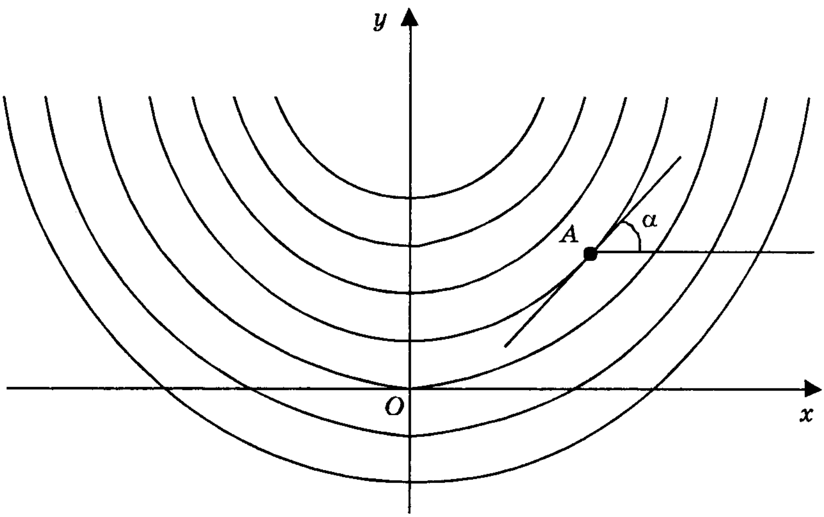

Рис. 86

Задача Коші. Ця задача полягає в тому, щоб знайти розв'язок $y = y(x)$ рівняння (2), який задовольняє умову

$$y(x_0) = y_0. \tag{4}$$

Числа x_0 і y_0 називаються *початковими даними задачі Коші.* Геометрично задача Коші полягає в тому, щоб знайти інтегральну криву рівняння (2), яка проходить через фіксовану точку $A_0(x_0, y_0)$ області D.

У теорії і застосуваннях важливе значення має така проблема: скільки інтегральних кривих рівняння (2) проходить через задану точку $A_0(x_0, y_0)$ області D.

Справедлива така теорема існування та єдиності для розв'язку рівняння (2) з початковою умовою (4).

Теорема. *Нехай маємо рівняння (2) і область D_1, в якій функції $f(x, y)$ і $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ визначені і неперервні. Нехай $A_0(x_0, y_0)$ — довільна точка з області D_1. Тоді існує єдиний розв'язок*

$$y = \varphi(x) \tag{5}$$

рівняння (2), який визначений в деякому околі точки x_0 і задовольняє початкову умову $\varphi(x_0) = y_0$.

Приклад 2. Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}\,. \tag{6}$$

Його права частина $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ неперервна при $y \geq 0$, тобто у верхній півплощині, включаючи вісь Ox (область D_1'). Функція $f' = \frac{1}{\sqrt{y}}$ неперервна при $y > 0$, тобто у верхній півплощині, виключаючи вісь Ox (область D_1). Рівняння (6) має сім'ю розв'язків:

$$\sqrt{y} = x + C, \tag{7}$$

де C — довільна стала. Формула (7) називається загальним розв'язком рівняння (6).

Геометрично розв'язок (7) являє собою сім'ю півпарабол в області D_1 (рис. 87).

Безпосередньою підстановкою переконуємось, що рівняння (6) має розв'язок $y = 0$, який не можна одержати ні при якому значенні довільної сталої C. Розв'язок $y = 0$ називається особливим розв'язком рівняння (6).

Припустимо, що через кожну точку області D_1 проходить єдина інтегральна крива рівняння (2). *Загальним розв'язком* рівняння (2) в області D_1 називається функція

$$y = \varphi(x, C)\,, \tag{8}$$

яка: 1) є розв'язком рівняння (2) при всіх значеннях довільної сталої C; 2) дає розв'язок задачі Коші з довільними початковими даними (x_0, y_0) з області D_1 при відповідному значенні $C = C_0$.

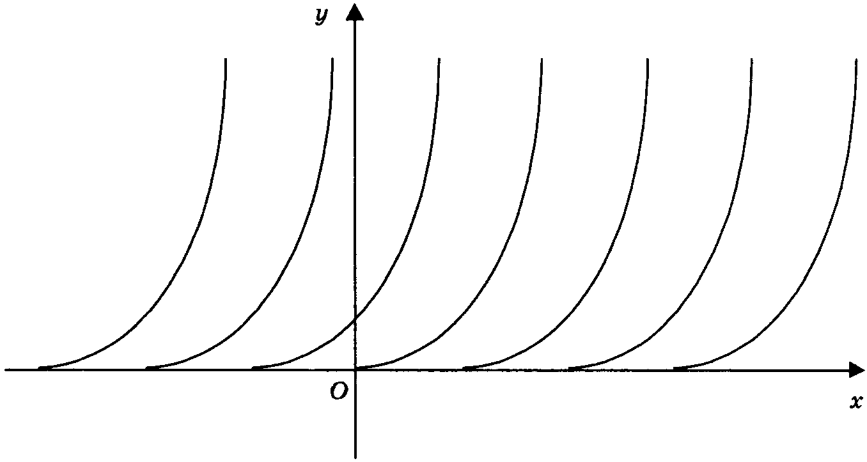

Рис. 87

Частинним розв'язком рівняння (2) називається розв'язок цього рівняння при фіксованому значенні величини C.

Для знаходження частинного розв'язку, який відповідає початковій умові, потрібно підставити x_0 і y_0 у рівняння (8) і визначити $C = C_0$ з рівняння

$$y_0 = \varphi(x_0, C). \tag{9}$$

Шуканий частинний розв'язок матиме вигляд $y = \varphi(x, C_0)$. *Особливим розв'язком* рівняння (2) називається такий його розв'язок, який не може бути одержаним ні при якому значенні C. Отже, виходить, що інтегральна крива, яка відповідає особливому розв'язку, проходить поза областю єдиності задачі Коші.

§ 2. Найпростіші типи рівнянь першого порядку

Рівняння з відокремлюваними змінними.

Так називаються рівняння вигляду

$$a(x)b(y)dx + a_1(x)b_1(y)dy = 0. \tag{10}$$

Помножимо обидві частини цього рівняння на $\dfrac{1}{b(y)a_1(x)}$. Тоді дістанемо рівняння

$$\frac{a(x)}{a_1(x)}dx + \frac{b_1(y)}{b(y)}dy = 0, \tag{11}$$

в якому коефіцієнт біля dx залежить лише від x, а коефіцієнт біля dy — тільки від y. Говорять, що в рівнянні (11) змінні відокремлені.

Рівняння (11) можна переписати в такий спосіб:

$$d\left[\int_{x_0}^{x} \frac{a(x)}{a_1(x)}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{b_1(y)}{b(y)}\,dy\right] = 0,$$

звідки одержуємо

$$\int_{x_0}^{x} \frac{a(x)}{a_1(x)}\,dx + \int_{y_0}^{y} \frac{b_1(y)}{b(y)}\,dy = C, \tag{12}$$

де C — довільна стала.

Формула (12) дає загальний інтеграл рівняння (10).

Приклад 1. Розглянемо рівняння

$$x\sqrt{1+y^2}\,dx + y\sqrt{1+x^2}\,dy = 0,$$

де $a(x) = x$; $b(y) = \sqrt{1+y^2}$; $a_1(x) = \sqrt{1+x^2}$; $b_1(y) = y$.

Після відокремлення змінних матимемо

$$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \frac{y}{\sqrt{1+y^2}}\,dy = 0.$$

Інтегруючи, знаходимо загальний інтеграл

$$\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+y^2} = C.$$

Ми скористались формулою (12), прийнявши $x_0 = y_0 = 0$.

Однорідне рівняння. Рівняння

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{13}$$

називається однорідним, якщо виконується тотожність

$$f(tx, ty) \equiv f(x, y), \tag{14}$$

де t — довільний параметр.

Це рівняння за допомогою підстановки

$$y = ux \tag{15}$$

зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними відносно u і x.

Приклад 2. Розглянемо рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x}. \tag{15'}$$

З (15) знаходимо $\frac{dy}{dx} = u + x\frac{du}{dx}$; $\frac{y}{x} = u$.

Тепер рівняння (15′) набуває вигляду

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \sqrt{u},$$

тобто

$$x\frac{du}{dx} = \sqrt{u}.$$

Ми дістали рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{du}{\sqrt{u}} = \frac{dx}{x}.$$

Після інтегрування матимемо

$$2u^{\frac{1}{2}} = \ln x + \ln C = \ln Cx\ ;\ u^{\frac{1}{2}} = \ln(Cx)^{\frac{1}{2}}\ ;\quad u = \ln^2(Cx)^{\frac{1}{2}}.$$

Повертаючись до старих змінних, остаточно знаходимо $y = x\ln^2(Cx)^{\frac{1}{2}}$. Це і є загальним розв'язком рівняння (15′).

Лінійне рівняння. Рівняння вигляду

$$y' = P(x)y + Q(x) \tag{16}$$

називається лінійним відносно шуканої функції та її похідної.

Якщо $Q(x) = 0$, то рівняння називається лінійним однорідним:

$$y' = P(x)y. \tag{17}$$

Розв'язок рівняння (17) має вигляд

$$\ln\frac{y}{y_0} = \int_{x_0}^{x} P(\zeta)d\zeta. \tag{18}$$

У лінійному однорідному рівнянні змінні відокремлюються.

З формули (18) випливає

$$y = y_0 \cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(\zeta)d\zeta} = C \cdot e^{\int_{x_0}^{x} P(\zeta)d\zeta}. \tag{19}$$

Довільна стала C є значенням y при $x = x_0$.

Будемо тепер інтегрувати неоднорідне лінійне рівняння (16) так званим методом варіації довільної сталої, тобто у вигляді добутку деякої функції $C(x)$ на розв'язок відповідного однорідного рівняння.

Константу C розв'язку (19) однорідного рівняння (17) ми замінимо на функцію $C(x)$ і в такому вигляді шукатимемо розв'язок неоднорідного рівняння (16). Покажемо це на конкретному прикладі.

Приклад 3. Розглянемо рівняння $xy' - 2y = 2x^4$.

Інтегруємо відповідне однорідне рівняння:

$$xy' - 2y = 0; \quad x\frac{dy}{dx} = 2y; \quad \frac{dy}{y} = 2\frac{dx}{x};$$

$$\ln|y| = 2\ln|x| + \ln C; \quad y = Cx^2.$$

Вважаємо C функцією від x. Підставляємо у кінцеве рівняння:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx}x^2 + C(x)2x;$$

$$\frac{dC(x)}{dx}x^3 + C(x)2x^2 - 2C(x)x^2 = 2x^4; \quad dC(x) = 2xdx;$$

$$C(x) = x^2 + C_1; \quad y = x^4 + C_1x^2.$$

До лінійного рівняння зводиться рівняння Бернуллі:

$$y' = P(x)y + Q(x)y^n; \quad n \neq 1. \tag{20}$$

Заміна змінних

$$z = y^{-n+1} \tag{21}$$

приводить рівняння (20) до лінійного відносно z:

$$\frac{1}{-n+1}z' = P(x)z + Q(x). \tag{22}$$

Приклад 4. Розглянемо рівняння $y' + \frac{xy}{1-x^2} = x\sqrt{y}$.

Розділимо обидві частини рівняння на $\sqrt{y}$:

$$\frac{1}{\sqrt{y}}y' + \frac{x}{1-x^2}\sqrt{y} = x.$$

Заміна $z = \sqrt{y}$; $\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\frac{dy}{dx}$ приводить це рівняння до лінійного неоднорідного відносно z:

$$2\frac{dz}{dx} + \frac{x}{1-x^2}\cdot z = x.$$

Розв'язуємо відповідне однорідне рівняння і методом варіації довільної сталої знаходимо розв'язок неоднорідного рівняння.

Рівняння в повних диференціалах. Якщо в рівнянні

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \tag{23}$$

виконується тотожність

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \tag{24}$$

то рівняння (23) називається рівнянням у повних диференціалах. Загальний інтеграл рівняння в повних диференціалах має вигляд

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x_0,y)dy + C. \tag{25}$$

У цій формулі при інтегруванні функції $P(x,y)$ змінна y розглядається як параметр.

Приклад 5. Розглянемо рівняння $(x^2 + 2xy)\,dx + (x^2 + y^3)\,dy = 0$.

Тут маємо $P = x^2 + 2xy$; $Q = x^2 + y^3$.

Отже, $\dfrac{\partial P}{\partial y} = 2x$; $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = 2x$.

Так що умова (24) виконується.

Для одержання загального інтеграла скористаємося формулою (25). Нехай $x_0 = y_0 = 0$, тоді знаходимо

$$u(x,y) = \int_0^x (x^2 + 2xy)dx + \int_0^y y^3 dy = C,$$

або

$$\frac{x^3}{3} + x^2 y + \frac{y^4}{4} = C.$$

Однак вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ не завжди є повним диференціалом. Постає питання, чи можна знайти таку функцію $\mu(x,y)$, щоб, помноживши на неї ліву частину рівності (23), перетворити її в повний диференціал.

Помножимо рівняння (23) на деякий множник $\mu(x,y)$ і вимагатимемо, щоб одержане рівняння було рівнянням у повних диференціалах.

Для цього необхідно задовольнити умову (24), яка для рівняння

$$\mu(x,y)P(x,y)dx + \mu(x,y)Q(x,y)dy = 0 \tag{26}$$

має вигляд

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mu \cdot P) = \frac{\partial}{\partial x}(\mu \cdot Q), \tag{27}$$

або

$$P \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial y} - Q \cdot \frac{\partial \ln \mu}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}. \tag{28}$$

Рівняння (28) є рівнянням у частинних похідних для функції $\mu = \mu(x, y)$, яка називається інтегрувальним множником рівняння (23). Розв'язання рівняння (28) — задача, власне кажучи, не завжди легша, ніж розв'язання рівняння (23). Більше того, один з елементів у процесі розв'язання рівняння (28) є розв'язанням звичайного диференціального рівняння (23). Проте немає загального методу для відшукання інтегрувального множника. В деяких випадках вдається підібрати множник $\mu(x, y)$ так, щоб умову (27) було виконано. Тоді інтегрування рівняння (23) можна провести з допомогою формули (25). Взагалі кажучи, якщо P і Q мають неперервні частинні похідні і не дорівнюють нулеві одночасно, то інтегрувальний множник існує.

У деяких випадках бувають корисними такі прийоми.

Приклад 6. Запишемо який-небудь вираз $z = \varphi(x, y)$, що залежить від x та y (у частинному випадку можна взяти $z = x$, або $z = y$, або $z = xy$ і т. ін.). Можна дізнатися, чи існує інтегрувальний множник, що залежить тільки від z, і якщо існує, знайти його. Для цього потрібно у рівнянні (27) підставити $\mu = \mu(z)$. Якщо в одержаному рівнянні вдається позбутися x та y, тобто привести рівняння до вигляду $U(\mu, \mu'_z, z) = 0$, то інтегрувальний множник, залежний тільки від z, існує і його можна знайти.

Нехай дано рівняння $(2y + xy^3)dx + (x + x^2y^2)dy = 0$.

Чи існує інтегрувальний множник, що залежить тільки від $z = x$? Помножимо рівняння на $\mu = \mu(z)$ і запишемо умову повного диференціала:

$$\left[\mu \cdot (2y + xy^3)\right]'_y = \left[\mu \cdot (x + x^2y^2)\right]'_x.$$

Оскільки

$$\mu'_x = \mu'_z \cdot z'_x = \mu'_z \cdot 1;$$
$$\mu'_y = \mu'_z \cdot z'_y = 0,$$

то після спрощень дістанемо

$$\mu(2 + 3xy^2) = \left[\mu'_z(x + x^2y^2) + \mu(1 + 2xy^2)\right];$$
$$\mu(1 + xy^2) = \mu'_z(1 + xy^2)x.$$

Скорочуючи на $1 + xy^2$ і замінюючи x на z, дістанемо $\mu = \mu'_z \cdot z$; $\mu = Cz$. Стала C — довільна. Взявши $C = 1$, одержимо $\mu = x$ — інтегрувальний множник.

§ 3. Особливі точки і особливі розв'язки рівняння першого порядку

У випадках, коли порушуються умови теореми існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння $y' = f(x, y)$ (функція $f(x, y)$ чи $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ перестає бути неперервною або визначеною в околі деякої точки області D), розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$ називається *особливим,* а точки, в яких порушуються ці умови, — *особливими.* За характерними ознаками ці точки поділяють на такі типи: вузол, сідло, центр, фокус.

Розглянемо однорідне рівняння

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{cx + dy}, \tag{29}$$

де a, b, c, d — дійсні параметри; $\Delta = ad - bc \neq 0$. Точка $x = 0$; $y = 0$ буде особливою для рівняння (29).

За допомогою деяких лінійних перетворень рівняння (29) може бути зведене до найпростіших видів.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \alpha \dfrac{y}{x}$, $\alpha > 0$. (30)

За допомогою підстановки $y = ux$ це рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язком якого є функція $y = C|x|^{\alpha}$. Маємо $y' = \pm\alpha C|x|^{\alpha - 1}$. Якщо $C \neq 0$ і $\alpha < 1$, то $\lim\limits_{x \to 0} y' = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} y = 0$.

Отже, всі інтегральні криві рівняння проходять через особливу точку (0; 0) і мають (за винятком лінії $y = 0$) одну й ту саму дотичну — вісь Oy (рис. 88).

Якщо $\alpha > 1$, то дане рівняння можна переписати у вигляді

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{x}{y},$$

і тоді графічне зображення інтегральних кривих можна отримати поворотом на 90°. Особлива точка (0; 0) у цих випадках називається *вузлом* (рис. 88). Якщо $\alpha = 1$, то загальний розв'язок даного рівняння $y = Cx$. Це в'язка прямих. Кожна інтегральна крива цієї сім'ї (при фіксованому значенні C) проходить через початок координат із своїм кутовим коефіцієнтом. Особлива точка в цьому випадку називається *особливим вузлом.*

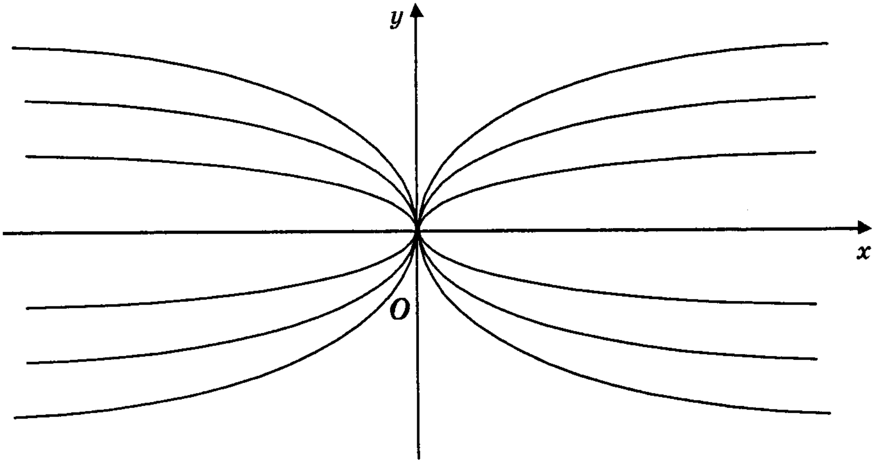

Рис. 88

2. Якщо $\alpha < 0$, то в цьому випадку $\lim\limits_{x \to 0} |y| = \infty$. Отже, всі інтегральні криві, за винятком двох (а саме: лінії $x = 0$; $y = 0$), не проходять через точку (0; 0). Така особлива точка називається *сідлом* (рис. 89).

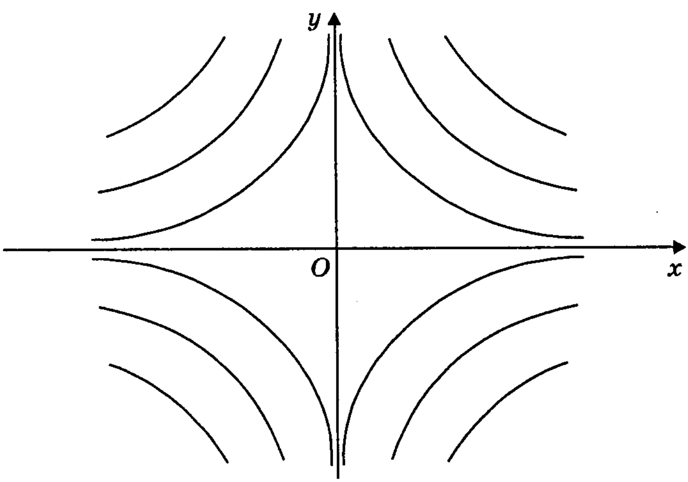

Рис. 89

3. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x}. \qquad (31)$$

За допомогою заміни $y = ux$ рівняння зводиться до рівняння з відокремлюваними змінними, розв'язком якого є $y = x(\ln|x| + C)$. При цьому $\lim\limits_{x\to 0} y = 0$, $\lim\limits_{x\to 0} y' = \lim(1 + C + \ln|x|) = -\infty$. Отже, всі інтегральні криві проходять через початок координат і мають вісь Oy, яка є спільною дотичною. У цьому випадку особлива точка називається *виродженим вузлом.*

4. $$\frac{dy}{dx} = \frac{x+\beta y}{\beta x - y}. \qquad (32)$$

Якщо перейти до полярних координат $x = \rho\cos\theta$; $y = \rho\sin\theta$, то рівняння набуває вигляду

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \beta\rho \Rightarrow \rho = Ce^{\beta\theta}.$$

Інтегральні криві — це логарифмічні спіралі, які накручуються на початок координат. Особлива точка такої структури (випадки $\beta > 0$ і $\beta < 0$) називається *фокусом* (рис. 90).

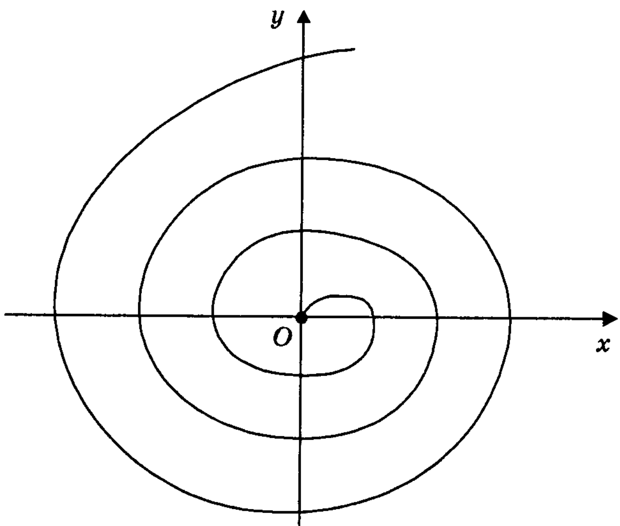

Рис. 90

5. Якщо $\beta = 0$, то дане рівняння матиме вигляд $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, загальним інтегралом якого є функція $x^2 + y^2 = C^2$.

Інтегральні криві в цьому випадку — це однопараметрична сім'я кіл з центром на початку координат, а особлива точка (0; 0) називається *центром* (рис. 91).

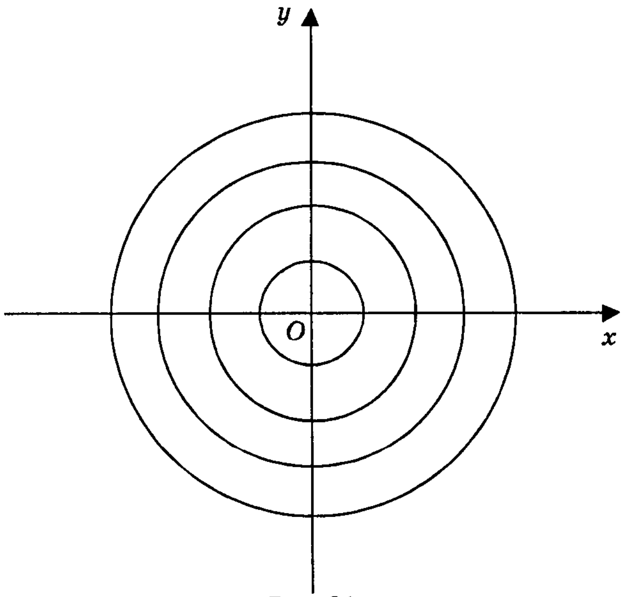

Рис. 91

§ 4. Окремі типи диференціальних рівнянь першого порядку

Деякі найпростіші диференціальні рівняння, до яких похідна y' входить в степені, більшому за одиницю, можуть бути зведені до інтегровних введенням деякого параметра p:

$y = xf(y') + \varphi(y')$ — рівняння Лагранжа; (33)

$y = y'x + \varphi(y')$ — рівняння Клеро (34)

(рівняння (34) є частинним випадком рівняння (33)).

Приклад 1. Розв'язати рівняння $xy'^2 - 2yy' + 4x = 0$.

Розв'язуємо рівняння відносно y: $y = \frac{xy'}{2} + \frac{2x}{y'}$. Нехай $\frac{dy}{dx} = p$, отже $dy = pdx$. Тоді $y = \frac{px}{2} + \frac{2x}{p}$. Диференціюючи за x, після спрощення дістанемо

$$pdx = \frac{1}{2}xdp + \frac{1}{2}pdx + 2p^{-1}dx - 2p^{-2}xdp.$$

Звідси

$$\frac{1}{2}xdp - \frac{1}{2}pdx + \frac{2dx}{p} - \frac{2xdp}{p^2} = 0,$$

або

$$\left(\frac{2}{p} - \frac{p}{2}\right)dx + \frac{x}{2}\left(1 - \frac{4}{p^2}\right)dp = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} - \frac{dp}{p} = 0,$$

розв'язком якого є $x = Cp$, або $p = C_1x$. Отже,

$$y = \frac{C_1x^2}{2} + \frac{2x}{C_1x} \Rightarrow y = Cx^2 + \frac{1}{C}.$$

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y = y'^4 + y' - 3$.

Нехай $y' = \frac{dy}{dx} = p$. Тоді $dx = \frac{dy}{p}$. Підставляючи $y' = p$ у задане рівняння, знайдемо диференціал: $dy = (4p^3 + 1)dp$.

Отже,

$$dx = \left(4p^2 + \frac{1}{p}\right)dp \Rightarrow x = \int\left(4p^2 + \frac{1}{p}\right)dp = \frac{4}{3}p^3 + \ln|p| + C.$$

Таким чином, у параметричній формі розв'язок має вигляд

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3}p^3 + \ln|p| + C, \\ y = p^4 + p - 3, \end{cases}$$

де $p = \frac{dy}{dx}$. За параметри в деяких випадках можна брати тригонометричні функції, наприклад $y' = \mathrm{ctg}\,t$, $y' = \mathrm{tg}\,t$ тощо.

§ 5. Диференціальні рівняння вищих порядків

Найпростіші (інтегровні) типи диференціальних рівнянь вищих порядків. Наведемо приклади окремих типів інтегровних диференціальних рівнянь вищих порядків.

Диференціальне рівняння типу $y^{(n)} = f(x)$. Розв'язок рівняння шукаємо послідовним інтегруванням $y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1$; $y^{(n-2)} = \int\left[f(x)dx + C_1\right]dx + C_2; \ldots$

Приклад 1. Знайти загальний розв'язок рівняння $y''' = \dfrac{5}{x^4} + 2\sin x$.

Інтегруючи послідовно, маємо:

$$y'' = \int\left(\frac{5}{x^4} + 2\sin x\right)dx = -\frac{5}{3x^3} - 2\cos x + C_1;$$

$$y' = \int\left[-\frac{5}{3x^3} - 2\cos x + C_1\right]dx = \frac{5}{6x^2} - 2\sin x + C_1 x + C_2;$$

$$y = \int\left[\frac{5}{6x^2} - 2\sin x + C_1 x + C_2\right]dx = -\frac{5}{6x} + 2\cos x + \frac{C_1 x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Диференціальне рівняння типу $F(x, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0$, або $y^{(n)} = f(x, y^{(n-1)})$. Позначимо $y^{(n-1)} = p(x)$. Тоді $y^{(n)} = (y^{(n-1)})' = p'(x)$. Отже, $F(x, p(x), p'(x)) = 0$ є рівнянням першого порядку відносно $p(x)$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння $y''' = (y'')^2$.

Нехай $y'' = p(x)$. Тоді $y'''(x) = (y'')' = p'(x) = \dfrac{dp}{dx}$. Отже, $\dfrac{dp}{dx} = p^2$.

Розділяючи змінні, запишемо $\dfrac{dp}{p^2} = dx$; $-\dfrac{1}{p} = x + C_1^*$; $p = -\dfrac{1}{x + C_1^*}$,

оскільки $p = y'' = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$, то $\dfrac{dy}{dx} = -\displaystyle\int\frac{dx}{x + C_1^*} = -\ln(x + C_1^*) + C_2^*$,

$$y = \int\left[-\ln(x + C_1^*) + C_2^*\right]dx = -(x + C_1^*)\ln(x + C_1^*) + x + C_1^* + C_2^* x + C_3^*.$$

Позначимо $C_1^* = C_1$; $1 + C_2^* = C_2$; $C_1^* + C_3^* = C_3$. Маємо $y = -(x + C_1)\times$ $\times\ln(x + C_1) + C_2 x + C_3$.

Диференціальне рівняння типу $F(y, y', y'') = 0$. Позначимо $y' = p(y)$. Тоді

$$y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}.$$

Отже, $F(y, p(y), p'(y)) = 0$ — рівняння першого порядку відносно $p(y)$.

Приклад 3. Знайти розв'язок диференціального рівняння $y''y =$ $= (y')^2 - y'$.

Нехай $y' = p(y)$. Тоді $y'' = p\dfrac{dp}{dy}$. Отже, маємо $yp\dfrac{dp}{dy} = p^2 - p$; $p \neq 0$.

Поділяючи змінні, дістанемо $\frac{dp}{p-1}=\frac{dy}{y}$; $\ln(p-1)=\ln C_1^* y$, звідки $p=1+C_1^*y$. Підставляючи замість p його значення, одержимо $\frac{dy}{dx}=1+C_1^*y$. Звідки $\frac{dy}{1+C_1^*y}=dx$, $\ln(1+C_1^*y)=C_1^*x+C_2^*$. Отже,

$1+C_1^*y=e^{C_2^*+C_1^*x}$. Якщо прийняти $\frac{e^{C_2^*}}{C_1^*}=C_1$; $-\frac{1}{C_1^*}=C_2$, то $y=C_1e^{-\frac{1}{C_2}x}+C_2$.

Лінійні однорідні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Рівняння

$$a_0y+a_1y'+a_2y''+\ldots+a_ny^{(n)}=0, \tag{35}$$

де a_0, a_1, a_2, ... a_n — дійсні числа, називається *лінійним однорідним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами.*

Теорема 1. *Якщо y_1, y_2, y_3, ..., y_n — лінійно незалежні частинні розв'язки рівняння (35), то $y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n$ — загальний розв'язок цього рівняння (C_i — довільні сталі).*

Частинні розв'язки шукаємо у вигляді $y=e^{kx}$.

Для визначення коефіцієнтів k маємо характеристичне рівняння

$$a_0+a_1k+a_2k^2+\ldots+a_nk^n=0. \tag{36}$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння (35) будується залежно від характеру коренів рівняння (36). Можливі такі випадки.

1. Усі корені рівняння (36) дійсні й різні; тоді розв'язком рівняння є сума всіх частинних розв'язків, а саме: $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+C_ne^{k_nx}$.

Приклад 4. Знайти розв'язок рівняння $2y''+5y'+2y=0$. Складемо характеристичне рівняння $2k^2+5k+2=0$, коренями якого є: $k_1=-2$; $k_2=-\frac{1}{2}$.

Тому $y_1=C_1e^{-2x}$, $y_2=C_2e^{-\frac{1}{2}x}$. Отже, загальний розв'язок: $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}$.

2. Серед дійсних коренів характеристичного рівняння трапляються дійсні корені кратності m. Тоді розв'язком диференціального рівняння є $y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}+\ldots+(C_{i1}+C_{i2}x+C_{i3}x^2+\ldots+C_{im}x^{m-1})e^{k_ix}+\ldots+C_ne^{k_nx}$, де кратність i-го кореня дорівнює m.

Приклад 5. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y^{IV}-5y'''+6y''+4y'-8y=0.$$

Характеристичне рівняння для нього буде $k^4-5k^3+6k^2+4k-8=0$. Корені цього рівняння $k_1=-1$, $k_2=k_3=k_4=2$. Отже, загальний розв'язок диференціального рівняння — $y=C_1e^{-x}+C_2e^{2x}+C_3xe^{2x}+C_4x^2e^{2x}$.

3. Серед коренів характеристичного рівняння трапляються прості комплексні корені. Частинний розв'язок для такого кореня має вигляд

$$y = (C_{m1}\cos\beta_m x + C_{m2}\sin\beta_m x)e^{\alpha_m x},$$

де α_m і β_m — коефіцієнти комплексного кореня $k_m = \alpha_m + i\beta_m$.

Приклад 6. Знайти розв'язок диференціального рівняння

$$y'' + 6y + 13 = 0.$$

Корені характеристичного рівняння $k^2 + 6k + 13 = 0$ — комплексно спряжені числа $k_1 = -3 + 2i$, $k_2 = -3 - 2i$. Отже,

$$y = (C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)e^{-3x}.$$

4. Серед коренів характеристичного рівняння є кратні комплексні корені. Розв'язок такого рівняння розглянемо на прикладі.

Приклад 7. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y^V - y^{IV} + + 8y''' - 8y'' + 16y' - 16y = 0.$$

Маємо характеристичне рівняння $k^5 - k^4 + 8k^3 - 8k^2 + 16k - 16 = 0$. Корінь $k = 1$ — очевидний, отже $(k - 1)(k^4 + 8k^2 + 16) = 0$, або $(k - 1)(k^2 + 4)^2 = 0$. Звідси $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = 2i$, $k_4 = k_5 = -2i$.

Частинні розв'язки: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2ix}$, $y_3(x) = xe^{2ix}$, $y_4(x) = e^{-2ix}$, $y_5(x) = xe^{-2ix}$, або $y_1(x) = e^x$, $y_2 = \cos 2x$, $y_3 = x\cos 2x$, $y_4 = \sin 2x$, $y_5 = x\sin 2x$. Тому $y = C_1e^x + C_2\cos 2x + C_3x\cos 2x + C_4\sin 2x + C_5x\sin 2x = (C_2 + C_3x)\cos 2x + (C_4 + C_5x)\sin 2x + C_1e^x$.

Неоднорідні лінійні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами. Рівняння

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_ny = f(x) \qquad (37)$$

називається *неоднорідним лінійним диференціальним рівнянням зі сталими коефіцієнтами, якщо* $f(x) \neq 0$.

Теорема 2. *Якщо* $\tilde{y}(x)$ *— довільний частинний розв'язок неоднорідного рівняння,* $y_0(x)$ *— загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, то загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння має вигляд*

$$y = y_0(x) + \tilde{y}(x). \qquad (38)$$

Розглянемо кілька випадків.

1. Права частина $f(x)$ є поліномом степеня m, тобто $f(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_mx^m$.

У цьому випадку частинний розв'язок шукають у вигляді $\tilde{y}(x) = x^r(A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m)$, де r — показник кратності кореня $k = 0$ у характеристичному рівнянні; A_i — невизначені коефіцієнти, які знаходяться із системи рівнянь. Утворення її розглянемо на прикладі.

Приклад 8. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 13y = x^2$.

Характеристичним рівнянням відповідного однорідного рівняння є $k^2 - 4k + 13 = 0$, корені якого $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$. Отже, загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння $y_0(x) = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

Для відшукання частинного розв'язку неоднорідного рівняння праву частину можна подати у вигляді $f(x) = 0 + 0 \cdot x + x^2$. Отже, якщо $\tilde{y}(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2$, то $\tilde{y}'(x) = A_1 + 2A_2x$, $\tilde{y}''(x) = 2A_2$.

Підставляючи замість $\tilde{y}(x)$ та її похідної відповідні значення в ліву частину диференціального рівняння, маємо $2A_2 - 4(A_1 + 2A_2x) + 13(A_0 + A_1x + A_2x^2) = 0 + 0 \cdot x + x^2$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x правої та лівої частин, після деяких спрощень отримаємо

$$\begin{cases} 2A_2 - 4A_1 + 13A_0 = 0, \\ 13A_1 - 8A_2 = 0, \\ 13A_2 = 1, \end{cases}$$

звідки $A_2 = \dfrac{1}{13}$, $A_1 = \dfrac{8}{169}$, $A_0 = -\dfrac{6}{2197}$. Отже, частинний розв'язок має вигляд $\tilde{y}(x) = -\dfrac{6}{2197} + \dfrac{8x}{169} + \dfrac{x^2}{13}$; загальний розв'язок даного рівняння запишемо так:

$$y(x) = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \frac{1}{13}x^2 + \frac{8}{169}x - \frac{6}{2197}.$$

2. Права частина $f(x)$ є функцією e^{mx}, тобто $f(x) = b_1e^{m_1x} + b_2e^{m_2x} + \ldots + b_ne^{m_nx}$.

У цьому випадку частинний розв'язок шукається у вигляді $\tilde{y}(x) = A_0 + A_1e^{m_1x} + A_2e^{m_2x} + \ldots + A_ne^{m_nx}$, де коефіцієнти A_i визначаються за таким самим методом, як і в попередньому випадку, якщо серед коренів характеристичного рівняння немає кратних коренів і всі корені дійсні. Так само розв'язується рівняння і у випадку, коли права частина залежить від $\sin x$ і $\cos x$.

Приклад 9. Розв'язати рівняння $y'' - 5y' + 6y = 4\sin 2x$.

Відповідне характеристичне рівняння має корені $k_1 = 2$ і $k_2 = 3$. Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. Оскільки характеристичне рівняння не має комплексного кореня $2i$, то частинний розв'язок шукатимемо у вигляді $\tilde{y}(x) = A_1\cos 2x + B_1\sin 2x$. Підставляючи $\tilde{y}$ у дане рівняння, матимемо $(2A_1 - 10B_1)\cos 2x - (16A_1 - 4B_1)\sin 2x = 4\sin 2x$. Звідки

$$\begin{cases} 2A_1 - 10B_1 = 0, \\ 16A_1 - 4B_1 = 4. \end{cases}$$

Отже, $A_1 = \frac{5}{19}$; $B_1 = \frac{1}{19}$.

Таким чином, $\tilde{y}(x) = \frac{5}{19}\cos 2x + \frac{1}{19}\sin 2x$; рівняння має такий загальний розв'язок:

$$y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x} + \frac{5}{19}\cos 2x + \frac{1}{19}\sin 2x.$$

3. Права частина $f(x)$ — це сума або добуток полінома і функції $e^{(\alpha+i\beta)x}$ або $e^{\alpha x}(a\cos\beta x + b\sin\beta x)$. У цьому випадку частинний розв'язок має такий самий вигляд, як і $f(x)$, відрізняючись тільки коефіцієнтами, якщо $k = \alpha + i\beta$ не є коренем характеристичного рівняння.

Приклад 10. Розв'язати рівняння $y'' + 4y' + 3 = 65x\cos 2x$.

Відповідне характеристичне рівняння має корені $k_1 = -1$ і $k_2 = -3$. Отже, загальним розв'язком однорідного рівняння є: $y_0 = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$. Частинний розв'язок шукаємо у такому вигляді: $\tilde{y}(x) = (Ax + B)\cos 2x + (Cx + D)\sin 2x$. Тоді $\tilde{y}' = (A - 2Cx - 2D)\sin 2x + (C + 2Ax + 2B)\cos 2x$; $\tilde{y}'' = (-4C - 4B - 4Ax)\sin 2x + (4A - 4D - 4Cx)\cos 2x$.

Підставляючи замість $\tilde{y}$ та її похідних значення в задане рівняння, після деяких спрощень матимемо: $[-(A + 8C)x + (4A - B - 4C - 8D)]\sin 2x + [(8A - C)x + (4A + 8B + 4C - D)]\cos 2x = 65x\cos 2x$.

Прирівнюючи коефіцієнти правої та лівої частин при відповідних тригонометричних функціях $\sin 2x$ і $\cos 2x$, дістанемо

$$\begin{cases} -(A + 8C)x + (4A - B - 4C - 8D) = 0, \\ (8A - C)x + (4A + 8B + 4C - D) = 65x, \end{cases}$$

звідки, прирівнюючи коефіцієнти правої та лівої частин при однакових степенях x, отримаємо

$$\begin{cases} A + 8C = 0, \\ 4A - B - 4C - 8D = 0, \\ 8A - C = 65, \\ 4A + 8B + 4C - D = 0. \end{cases}$$

Отже, $A = 8$, $B = \frac{188}{65}$, $C = -1$, $D = \frac{315}{65}$.

Таким чином, загальним розв'язком неоднорідного лінійного рівняння буде

$$y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x} + \left(8x + \frac{188}{65}\right)\cos 2x + \left(-x + \frac{315}{65}\right)\sin 2x.$$

4. У випадку, коли серед коренів характеристичного рівняння є корені $k = \alpha + i\beta$ кратності r, а права частина має вигляд $f(x) = e^{\alpha x}[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x)]$, частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\tilde{y}(x) = x^r e^{\alpha x} \cdot [P_k(x)\cos\beta x + Q_k(x)\sin\beta x]$ (тут $P_k(x)$, $Q_k(x)$ — многочлени степеня $k = \max(n, m)$ з невизначеними коефіцієнтами).

Приклад 11. Розв'язати рівняння $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$.

Відповідне характеристичне рівняння має корені $k_1 = 0 + 2i$, $k_2 = 0 - 2i$. Отже, загальним розв'язком однорідного рівняння буде: $y_0 = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукатимемо у вигляді $\tilde{y} = (A\cos 2x + B\sin 2x)x$ (домножуємо на x, оскільки корені характеристичного рівняння $\pm 2i$ збігаються з коефіцієнтом α у функціях $\sin\alpha x$, $\cos\alpha x$ правої частини).

Підставляючи в дане рівняння значення $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$, маємо $-4A\sin 2x + 4B\cos 2x = 4\sin 2x + 4\cos 2x$, звідки $A = -1$, $B = 1$. Отже, $y = x(\sin 2x - \cos 2x)$. Таким чином, загальний розв'язок $y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + x(\sin 2x - \cos 2x)$.

Приклад 12. Знайти розв'язок рівняння $y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$.

Корені відповідного характеристичного рівняння $k_1 = k_2 = 2$. Отже, загальний розв'язок однорідного рівняння: $y_0 = (C_1 + C_2x)e^{2x}$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння подамо у вигляді $y = x^2(A_0 + A_1x)e^{2x}$ (домножимо на x^2, оскільки показник експоненти $\alpha = 2$ у правій частині збігається з коренем характеристичного рівняння кратності $m = 2$). Підставляючи замість $\tilde{y}$, $\tilde{y}'$, $\tilde{y}''$ відповідні значення у задане диференціальне рівняння і скорочуючи на e^{2x} обидві частини, дістанемо $A_0 = 0$, $A_1 = \frac{1}{6}$. Отже, $\tilde{y} = \frac{1}{6}x^3e^{2x}$. Таким чином,

$$y = (C_1 + C_2x)e^{2x} + \frac{1}{6}x^3e^{2x}.$$

5. У більш загальному випадку застосовується метод варіації довільних сталих, або метод Лагранжа, суть якого полягає у тому, що в розв'язку відповідного однорідного рівняння $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ коефіцієнти C_i беруться як залежні від x. Для знаходження C_i складемо систему

$$\begin{cases} y_1\dfrac{dC_1}{dx} + y_2\dfrac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n\dfrac{dC_n}{dx} = 0, \\ y_1'\dfrac{dC_1}{dx} + y_2'\dfrac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n'\dfrac{dC_n}{dx} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_1^{(n-1)}\dfrac{dC_1}{dx} + y_2^{(n-1)}\dfrac{dC_2}{dx} + \ldots + y_n^{(n-1)}\dfrac{dC_n}{dx} = f(x), \end{cases}$$

з якої спочатку визначають $\frac{dC_i}{dx}$, а потім після інтегрування — $C_i(x)$.

Приклад 13. Знайти розв'язок рівняння $y'' + y = \mathrm{tg}^2 x$.

Відповідне однорідне рівняння має такий розв'язок: $y = C_1^* y_1 + C_2^* y_2 = C_1^* \cos x + C_2^* \sin x$. Використовуючи метод Лагранжа, запишемо: $y = C_1^*(x)\cos x + C_2^*(x)\sin x$. Для знаходження $C_1^*(x)$, $C_2^*(x)$ маємо

$$\begin{cases} (C_1^*)'\cos x + (C_2^*)'\sin x = 0, \\ -(C_1^*)'\sin x + (C_2^*)'\cos x = \mathrm{tg}^2 x, \end{cases}$$

звідки $(C_1^*)' = -\mathrm{tg}^2 x \sin x$, $(C_2^*)' = \mathrm{tg}^2 x \cos x$, або після інтегрування

$$C_1^* = -\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1; \quad C_2^* = \ln \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x + C_2.$$

Отже, загальним розв'язком рівняння буде

$$y = \left(-\frac{1}{\cos x} - \cos x + C_1\right)\cos x + \left[\ln \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - \sin x + C_2\right]\sin x =$$

$$= C_1 \cos x + C_2 \sin x + \sin x \ln \mathrm{tg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 2.$$

§ 6. Задачі на складання диференціальних рівнянь економічного змісту

Модель оптимізації ставки податку. Задача оптимізації ставки податку виникає на основі багатофакторного аналізу з урахуванням різних умов, в яких мають діяти підприємства. Це і якість обладнання, і кваліфікація робітників, і транспортні та інші умови роботи.

Нехай x — змінна питомих витрат виробника продукції, $x \in [x_0, x_1]$; $Ц$ — питома ціна продукції, $x_0 < x_1 < Ц$; $k(x)$ — ставка податку на прибуток, $0 < k(x) < 1$.

Частка питомого прибутку (прибутку з одиниці продукції), яка залишається у розпорядженні підприємства, становить

$$Д(x) = (1 - k(x))\,(Ц - x).$$

Зробимо два припущення: 1) ставка податку зменшується за фактором збільшення витрат: $k'(x) < 0$; 2) дохід зменшується за фактором збільшення витрат: $Д'(x) < 0$.

Економічний зміст цих рівнянь: чим вищі питомі витрати, тим менші податок і частка доходу, що залишається підприємству.

Нехай $y(x) = 1 - k(x)$, тоді з урахуванням припущень маємо

$$0 < \frac{dy}{dx} < \frac{y}{Ц - x}.$$

Нехай $U = U(x)$ — деяка функція управління ($0 < U(x) < 1$); тоді останнє співвідношення може бути представлене у формі рівняння з відокремлюваними змінними

$$\frac{dy}{dx} = \frac{U(x)}{Ц - x} y,$$

яке може застосовуватися при моделюванні ставок податку.

Нехай $U(x) = U = \text{const}$; тоді після відокремлювання змінних маємо

$$\frac{dy}{y} = \frac{U}{Ц - x} dx.$$

Звідси

$$\ln y = -U \ln(Ц - x) + \ln C$$

або

$$y = C(Ц - x)^{-U}, \ 0 < U < 1.$$

Якщо $U \to 0$, ставка податку зменшується, збільшується частка прибутку в розпорядженні підприємства і навпаки — якщо $U \to 1$, ставка податку збільшується, інтенсивніше наповнюється бюджет (рис. 92).

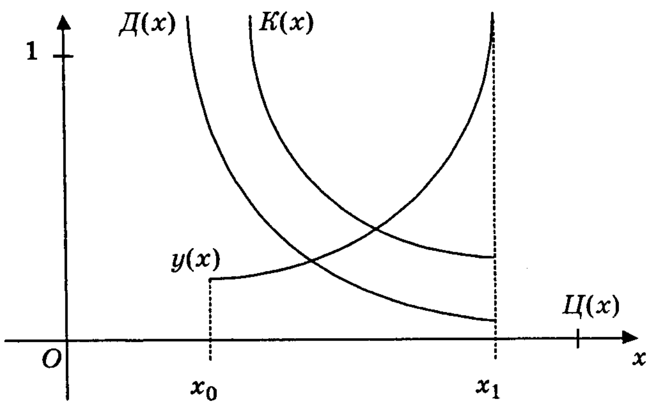

Рис. 92

Попит і пропозиція. Як відомо, попит і пропозиція — економічні категорії товарного виробництва, які виникають і функціонують на ринку, у сфері товарного обміну. При цьому попит — представлена на ринку потреба в товарах, а пропозиція — продукт, який є на ринку або може бути доставлений до нього. Одним з економічних законів товарного виробництва є закон попиту і пропозиції, який полягає в єдності попиту і пропозиції та їх об'єктивному приведенню до відповідності.

Розглянемо таку задачу. Нехай протягом деякого (достатньо довгого) часу селянин продає на ринку фрукти (наприклад, яблука), причому продає їх після збору врожаю, з тижневими перервами. Тоді при відповідних запасах фруктів у селянина тижнева пропозиція буде залежати як від очікуваної ціни наступного тижня, так і від передбачуваної зміни ціни наступного тижня.

Якщо наступного тижня передбачається, що ціна впаде, а в подальшому підніметься, то пропозиція буде стримуватися за умови перевищення очікуваного підвищення цін над витратами зберігання.

При цьому пропозиції товару найближчого тижня тим менші, чим більшими очікуються в подальшому підвищення цін. І навпаки, якщо наступного тижня ціна буде високою, а потім очікується її спад, то пропозиція збільшиться тим більше, чим більше очікується зниження цін у подальшому.

Якщо позначити через P ціну на фрукти наступного тижня, а через P' — так звану тенденцію формування ціни (похідну ціни з часом), то як попит, так і пропозиція будуть функціями цих величин. При цьому, як показує практика, залежно від різних факторів попит і пропозиція можуть бути різними функціями ціни і тенденції формування ціни.

В окремому випадку одна з таких функцій задається лінійною залежністю, математично записаною співвідношенням $y = ap' + bp + C$, де a, b, C — деякі дійсні сталі. Тоді якщо, наприклад, у даній задачі ціна на фрукти спочатку становила 1 грн за 1 кг, через t тижнів вона була уже $p(t)$ грн за 1 кг, а попит q і пропозиція s визначались відповідно співвідношеннями

$$q = 4p' - 2p + 39, \quad s = 44p' + 2p - 1.$$

Для того щоб попит відповідав пропозиції, потрібно виконання рівності

$$4p' - 2p + 39 = 44p' + 2p - 1.$$

Звідси приходимо до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними: $\dfrac{dp}{p-10} = -\dfrac{1}{10}dt.$

Інтегруючи, знаходимо, що

$$\int \frac{dp}{p-10} = -\frac{1}{10}\int dt + \ln c;$$

$$\ln|p-10| = -\frac{1}{10}t + \ln c;$$

$$p - 10 = ce^{-\frac{t}{10}};\ p = ce^{-\frac{t}{10}} + 10.$$

Якщо врахувати початкові умови $p = 1$, при $t = 0$ дістанемо $1 - 10 = Ce^{-\frac{1}{10}\cdot 0}$; $C = -9$.

Отже, $p = -9e^{-\frac{t}{10}} + 10$.

Таким чином, якщо вимагати, щоб між попитом і пропозицією весь час зберігалась рівновага, потрібно, щоб ціна змінювалась відповідно до одержаної формули.

Ефективність реклами. Припустимо, що торговельними підприємствами реалізується продукція B, про яку в момент часу t із числа потенційних покупців N знає лише x покупців. Припустимо далі, що для прискорення збуту продукції B були дані рекламні об'яви по радіо і телебаченню. Надалі інформація про продукцію розповсюджується серед покупців за допомогою спілкування один з одним.

З великим ступенем достовірності можна вважати, що після рекламних об'яв швидкість зміни кількості знаючих про продукцію B пропорційна як кількості знаючих про товар покупців, так і кількості покупців, які про нього ще не знали.

Якщо припустити, що час відраховується після рекламних об'яв, коли про товар інформовані $\frac{N}{\gamma}$ чоловік, то приходимо до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними:

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x)$$

з початковими умовами $x = \frac{N}{\gamma}$, якщо $t = 0$.

У рівнянні коефіцієнт k — це коефіцієнт пропорційності. Рівняння можна переписати в такий спосіб:

$$\frac{dx}{x(N-x)} = kdt,$$

одержуємо

$$\int\frac{dx}{x(N-x)} = k\int dt + C,$$

або

$$\frac{1}{N}\int\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}\right)dx = k\int dt + C.$$

Після інтегрування матимемо

$$\frac{1}{N}\left(\ln|x| - \ln|N - x|\right) = kt + C;$$

$$\frac{1}{N}\ln\frac{x}{N - x} = kt + C.$$

Прийнявши $NC = C_1$, приходимо до рівності $\frac{x}{N - x} = Ae^{Nkt}$, де $A = e^{C_1}$.

Якщо останнє рівняння розв'язати відносно x, то дістанемо співвідношення $x = N\frac{Ae^{Nkt}}{Ae^{Nkt}+1} = \frac{N}{1+Pe^{-Nkt}}$, де $P = \frac{1}{A}$.

В економічній літературі таке рівняння називають *рівнянням логістичної кривої*.

Якщо врахувати тепер початкові умови, то рівняння перепишеться у вигляді

$$\frac{N}{\gamma} = \frac{N}{1+Pe^{-Nk\cdot 0}}, \text{ де } P = \gamma - 1, \text{ або } x = \frac{N}{1+(\gamma-1)e^{-Nkt}}.$$

Зазначимо, що до аналогічного рівняння зводиться в окремому випадку задача про поширення технологічних новинок.

Задачі і вправи для самостійної роботи

Зінтегрувати диференціальні рівняння.

12.1. $\sin x\cos y dx + \cos x\sin y dy = 0$. **12.2.** $(1 + y^2)dx + xydy = 0$. **12.3.** $xy(1 + x^2)y' = 1 + y^2$. **12.4.** $(1 + y^2)\,dx = xdy$. **12.5.** $y' = x/y$. **12.6.** $dy = y\,\mathrm{tg}x dx$. **12.7.** $(1 + y^2)xdx + (1 + x^2)dy = 0$.

Знайти загальний і частинний розв'язки.

12.8. $2y'\sqrt{x} = y$; $x = 4$, $y = 1$. **12.9.** $(1 + e^x)yy' = e^x$; $x = 1$, $y = 1$.

12.10. $y' = y\cos x$; $x = 0$, $y = 1$. **12.11.** $y'\sqrt{1-x^2} = 1$; $M\left(1;\frac{\pi}{2}\right)$.

Розв'язати диференціальні рівняння.

12.12. $y' = \frac{y}{x} + \cos\frac{y}{x}$. **12.13.** $y' = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$. **12.14.** $x\frac{dy}{dx} = y\ln\frac{y}{x}$.

12.15. $xdy - (y + \sqrt{x^2 + y^2})dx = 0$. **12.16.** $(2x^3 + 3xy^2)dx + y^3dy = 0$.

12.17. $(x + y)dx - (x - y)dy = 0$. **12.18.** $(3x^2 + 6xy + 3y^2)dx + (2x^2 + 3xy)dy = 0$. **12.19.** $xydx + (x^2 + y^2)dy = 0$. **12.20.** $y^2dx + x(x - y)dy = 0$.

Знайти частинний інтеграл за початкових умов, де вони вказані.

12.21. $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$, $M(1; -1)$.

12.22. $xy' = y\ln\frac{y}{x}$; $M(1; 1)$. **12.23.** $\left(y + \sqrt{x^2 + y^2}\right)dx - xdy = 0$; $M(1; 0)$.

12.24. $x^2y' = 2xy - 3$; $M(-1; 1)$.

Знайти загальний інтеграл, а у випадках, де задано початкові умови, частинний інтеграл.

12.25. $y' + \frac{1}{x}y = 3x$. **12.26.** $y'\cos^2 x + y = \mathrm{tg}x$; $x = 0$, $y = 0$.

12.27. $xy' - 2y = 2x^4$. **12.28.** $xy' + 3y = x^2$. **12.29.** $y' + y\cos x = \sin x\cos x$; $x = 0$, $y = 1$.

Розв'язати рівняння.

12.30. $(2x + y)dx + (x + 2y)dy = 0$. **12.31.** $(3x^2 + 6xy - 2y^2)dx + (3x^2 - 4xy - 3y^2)dy = 0$.

Розв'язати рівняння та знайти частинний розв'язок, якщо вказано початкові умови.

12.32. $y'' = \ln x$. **12.33.** $y''' = 1/x$. **12.34.** $y^{IV} = x^2 + 3\sin x$. **12.35.** $y''' - y''^2 = 0$. **12.36.** $y'' = y' + x$. **12.37.** $x^2y''' = (y'')^2$.

Розв'язати рівняння та знайти частинні розв'язки, коли задано початкові умови.

12.38. $y'' + 3y' + 2y = 0$. **12.39.** $y'' + 4y' + 13y = 0$. **12.40.** $y^{IV} - 5y'' + 4y = 0$. **12.41.** $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$. **12.42.** $y''' - 2y'' = 0$.

Розв'язати рівняння.

12.43. $y'' + 3y' = 9x$. **12.44.** $y'' - 3y' + 2y = e^x$. **12.45.** $y'' - 7y' + 6y = \sin x$. **12.46.** $y'' + y = \mathrm{ctg}x$. **12.47.** $y^{IV} + y'' = x^2 + x$.

Відповіді до глави 12

12.1. $\cos x\cos y = C$. **12.2.** $x^2(1 + y^2) = C$. **12.3.** $(1 + x^2)(1 + y^2) = Cx^2$. **12.4.** $y = \mathrm{tg}\ln Cx$. **12.5.** $y^2 - x^2 = C$. **12.6.** $y\cos x = C$. **12.7.** $\mathrm{arctg}y \pm \frac{1}{2}\ln(1 + x^2) = C$. **12.8.** $y = Ce^{\sqrt{x}}$; $y = e^{\sqrt{x}-2}$. **12.9.** $y^2 - 1 = 2\ln\frac{e^x + 1}{e + 1}$. **12.10.** $y = Ce^{\sin x}$, $y = e^{\sin x}$. **12.11.** $y = \arcsin x + C$; $y = \arcsin x$. **12.12.** $y = x(2\,\mathrm{arctg}\,Cx + \frac{\pi}{2} + \pi(2n - 1))$; $y = x(\frac{\pi}{2} + \pi n)$.

12.13. $y = \pm x\sqrt{2\ln|x| + C}$. **12.14.** $y = xe^{Cx+1}$. **12.15.** $Cx^2 = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

12.16. $2x^2 + y^2 = C\sqrt{x^2 + y^2}$. **12.17.** $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2 + y^2} + C$.

12.18. $3x^4 + 8x^3y + 6x^2y^2 = C$. **12.19.** $y^2(2x^2 + y^2) = C^2$. **12.20.** $y = Ce^{\frac{y}{x}}$.

12.21. $x + y = 0$. **12.22.** $y = xe^{1-x}$. **12.23.** $y = \dfrac{1}{2}(x^2 - 1)$. **12.24.** $y = Cx^2 + \dfrac{1}{x}$; $y = 2x^2 + \dfrac{1}{x}$. **12.25.** $y = \dfrac{C}{x} + x^2$. **12.26.** $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$.

12.27. $y = x^4 + C_1x^2$. **12.28.** $y = \dfrac{1}{5}x^5 + \dfrac{C}{x^3}$. **12.29.** $y = 2e^{-\sin x} + \sin x - 1$.

12.30. $x^2 + xy + y^2 = C$. **12.31.** $x^3 + 3x^2y - 2xy^2 - y^3 = C$.

12.32. $y = \dfrac{x^2}{2}[\ln x - \dfrac{3}{2}] + C_1x + C_2$. **12.33.** $y = x^2\ln\sqrt{x} + C_1x^2 + C_2x + C_3$.

12.34. $y = \dfrac{x^6}{360} + 3\sin x + \dfrac{C_1}{6}x^3 + \dfrac{C_2}{2}x^2 + C_3x + C_4$. **12.35.** $y = -x\ln(x + C_1) + \ln(x + C_1) + C_2x + C_3$. Покласти $y'' = z$. Тоді $y''' = \dfrac{dz}{dx}$.

12.36. $y = C_1e^x + C_2 - x - \dfrac{x^2}{2}$. **12.37.** $y = C_1\dfrac{x^2}{2} + C_2x + C_3 - C_1^{\,2}(x + C_1)\ln|x + C_1|$. **12.38.** $y = Ce^{-x} + C_1e^{-2x}$. **12.39.** $y = e^{-2x}(C\cos 3x + C_1\sin 3x)$. **12.40.** $y = C_1e^x + C_2e^{-x} + C_3e^{2x} + C_4e^{-2x}$. **12.41.** $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{2x} + C_3e^{-2x}$. **12.42.** $y = C_1 + C_2x + C_3e^{2x}$. **12.43.** $y = C_1 + C_2e^{-3y}$.

12.44. $y = C_1e^{2x} + (C_2 - x)e^x$. **12.45.** $y = \dfrac{1}{74}(5x + 7\cos x) + C_1e^x + C_2e^{6x}$.

12.46. $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \sin x\cos x + \dfrac{\sin x}{2}\cdot\ln\left|\dfrac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| - \cos^2 x$.

12.47. $y = C_1 + C_2x + C_3\cos x + C_4\sin x + \dfrac{x^2}{12}(x \quad + 2x - 12)$.

Глава 13. Кратні інтеграли

§ 1. Подвійний інтеграл

Задача про об'єм циліндричного бруса. Нехай потрібно знайти об'єм тіла B, обмеженого поверхнями $z = 0$, $z = f(x, y)$ та циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі Oz, напрямними яких є межа l області A, в якій неперервна й додатна функція $z = f(x, y)$ (рис. 93).

За допомогою сітки кусково-гладких кривих область A розбиваємо на скінченне число частин $\Delta A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ з площинами ΔF_k (розбиття δ_k); нехай λ_n — найбільший з діаметрів областей A_k, які одержуються при розбитті δ_k. Під діаметром області тут і далі розумітимемо найбільшу відстань між граничними точками цієї області. Побудуємо циліндричні поверхні, напрямними яких є лінії поділу області A; при цьому твірні паралельні осі аплікат. Так циліндричні поверхні розбивають циліндричний брус B на n елементарних частин ΔB_k. Замінимо кожний з елементів $\Delta B_1, \ldots, \Delta B_n$ циліндром з плоскими основами, паралельними площині Oxy. Висота циліндра дорівнює одній з аплікат відповідного елемента нижньої основи циліндра. Об'єм k-го циліндра дорівнюватиме $f(N_k)\Delta F_k$, де N_k — довільна фіксована точка ΔA_k. Сума об'ємів таких циліндрів визначить об'єм ступінчастого тіла:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta F_k .$$

Під об'ємом циліндричного бруса B розумітимемо границю суми об'ємів циліндрів σ_n при $\lambda_n \to 0$:

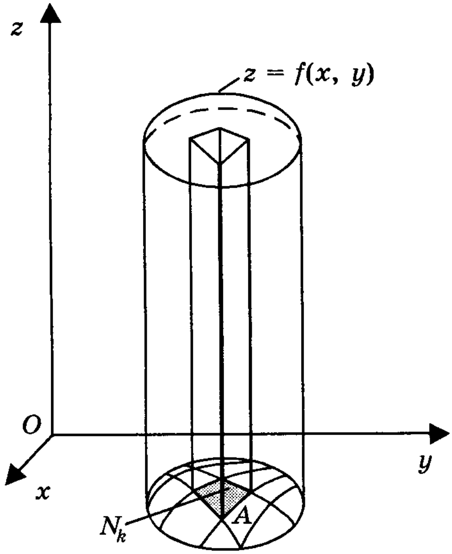

Рис. 93

$$V = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(N_k)\Delta F_k = \iint_A f(M)dF,$$

де $\lambda_n = \max_{1 \le k \le n} d_k, \quad d_k = \operatorname{diam} \Delta A_k \ (k = 1, 2, \ldots, n)$.

Границі такого роду називають *подвійними інтегралами* і позначають так, як показано в правій частині рівності.

Визначення подвійного інтеграла, його елементарні властивості й обчислення в декартових прямокутних координатах. Нехай A — обмежена область площини x, y з кусково-гладкою межею, а функція $f(x, y)$ визначена й обмежена на A. За допомогою сітки кусково-гладких кривих область A розбиваємо на скінченне число частин $\Delta A_k (k = 1, 2, \ldots, n)$ з площами ΔF_k (розбиття δ_n); нехай λ_n — найбільший з діаметрів областей ΔA_k, які одержуються при розбитті δ_n. В кожній з областей вибирається довільна точка $N_k(x_k, y_k)$ (рис. 94).

Число $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta F_k$ ставиться у відповідність кожному розбиттю δ_n і називається *інтегральною сумою розбиття* δ_n.

Якщо існує границя послідовності інтегральних сум σ_n при $\lambda_n \to 0$, що не залежить від способу розбиття області A на елементарні підобласті ΔA_k і від вибору точок $N_k(x_k, y_k) \in \Delta A_k$, то вона називається *подвійним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по області A і позначається через $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$.

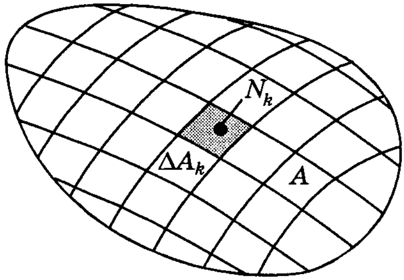

Рис. 94

Отже,

$$\iint\limits_A f(x,y)dxdy = \lim_{\lambda_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k)\Delta F_k,$$

де $\lambda_n = \max d_k$, $d_k = \operatorname{diam} \Delta A_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots, n)$.

Нехай спочатку потрібно обчислити подвійний інтеграл $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$, де A — прямокутник:

$$A = \{(x,y) : a \le x \le b,\ c \le y \le d\}.$$

Припустимо, що $f(x,y)$ неперервна, а отже, й інтегровна в цьому прямокутнику та набуває в ньому невід'ємних значень.

Тоді з урахуванням формули (30) гл. 9

$$V = \int_a^b S(x)dx,$$

де $S(x)$ — площа перерізу тіла площиною, перпендикулярною до осі O_x, що проходить через точку x (рис. 95); V — об'єм тіла з основою A, обмежений зверху поверхнею $z = f(x,y)$, а з боків — площинами $x = a$, $x = b$, $y = c$, $y = d$.

Оскільки цей переріз є криволінійною трапецією, обмеженою зверху графіком функції $z = f(x,y)$ (x — фіксоване), $c \le y \le d$, то маємо

$$S(x) = \int_c^d f(x,y)dy.$$

Отже, остаточно

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)dy.$$

Формула, звичайно, зберігається і у випадку, коли функція $f(x,y)$ в A знакозмінна.

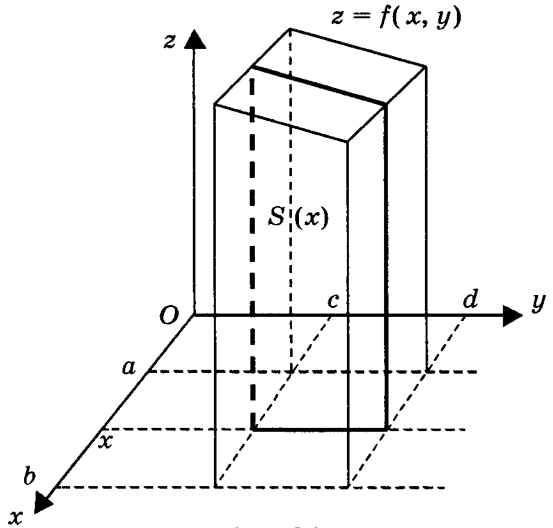

Рис. 95

Обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення повторних інтегралів: якщо $A = \{(x,y) \,|a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\}$ (рис. 96), тоді

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \tag{1}$$

тобто подвійний інтеграл може бути обчислений в результаті двох послідовно проведених простих інтегрувань. Причому спочатку обчислюється внутрішній інтеграл за змінною y (x — параметр), а одержаний результат інтегрується за x.

Аналогічна формула має місце, якщо область $A = \{(x,y) \,|x_1(y) \le x \le$ $\le x \le x_2(y),\ c \le y \le d\}$ (рис. 97):

$$\iint_A f(x,y)dxdy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \tag{2}$$

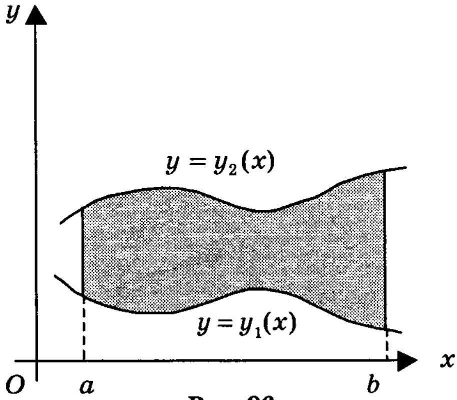

Рис. 96

Отже, обчислення подвійного інтеграла зводиться до обчислення відповідного повторного інтеграла (1) або (2).

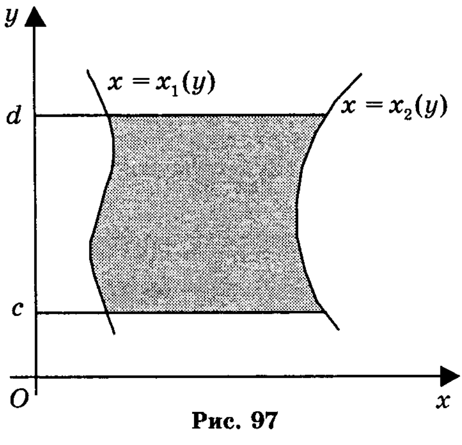

Рис. 97

Приклад 1. Обчислити інтеграл $\iint\limits_A (6x^2y + 8xy^3)dxdy$, поширений на прямокутник A: $1 \le x \le 2$; $3 \le y \le 4$.

Цей інтеграл дорівнює

$$\iint\limits_A (6x^2y + 8xy^3)dxdy = \int\limits_3^4 dy \int\limits_1^2 (6x^2y + 8xy^3)dx.$$

Для функції $6x^2y + 8xy^3$, яка розглядається як функція від x при постійному y, первісною буде функція $2x^3y + 4x^2y^3$. Тому

$$\int_1^2 (6x^2y + 8xy^3)dx = (2x^3y + 4x^2y^3)\Big|_{x=1}^{x=2} = 14y + 12y^3$$

і наш подвійний інтеграл

$$\int_3^4 (14y + 12y^3)dy = (7y^2 + 3y^4)\Big|_{y=3}^{y=4} = 574.$$

Ми інтегрували спочатку за x, а потім — за y, тобто користувалися формулою (2). Проте можна було б інтегрувати спочатку за y, а потім за x, тобто використати формулу (1). У цьому випадку

$$\int_1^2 dx\int_3^4 (6x^2y + 8xy^3)dy = \int_1^2 (3x^2y^2 + 2xy^4)\Big|_3^4 dx = \int_1^2 (21x^2 + 350x)dx = 574,$$

тобто отримуємо той самий результат.

Приклад 2. Розставити межі інтегрування двома способами й обчислити подвійний інтеграл $I = \iint\limits_A \sin y dxdy$, якщо область інтегрування обмежена лініями $y = 2x$, $2y = x$, $x = \pi$ (рис. 98).

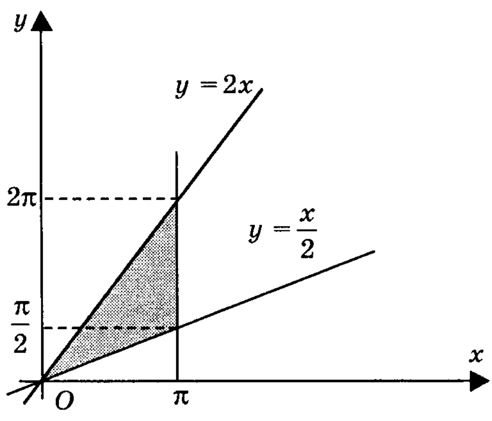

Рис. 98

Для обчислення заданого інтеграла скористаємося формулою (1)

$$I = \iint\limits_A \sin y dxdy = \int_0^\pi dx\int_{\frac{x}{2}}^{2x} \sin y dy = \int_0^\pi (-\cos y)\Big|_{\frac{x}{2}}^{2x} dx =$$

$$= \int_0^{\pi}\left(\cos\frac{x}{2} - \cos 2x\right)dx = \left(2\sin\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin 2x\right)\Big|_0^{\pi} = 2\sin\frac{\pi}{2} = 2.$$

Якщо для обчислення даного інтеграла скористатися формулою (2), то $x = \frac{y}{2}$ і $x = 2y$ при $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$, $x = \pi$ і $x = \frac{y}{2}$ при $\frac{\pi}{2} \le y \le 2\pi$. Отже, область A треба розбити на дві області, після чого маємо

$$\iint\limits_A \sin y dxdy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{\frac{y}{2}}^{2y} \sin y dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} dy \int_{\frac{y}{2}}^{\pi} \sin y dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y(x)\Big|_{\frac{y}{2}}^{2y} dy +$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} (x)\Big|_{\frac{y}{2}}^{\pi} \sin y dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2y - \frac{y}{2}\right)\sin y dy + \int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi}\left(\pi - \frac{y}{2}\right)\sin y dy =$$

$$= \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin y dy - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} y \sin y dy + \pi\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \sin y dy =$$

$$= -\pi(\cos y)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} + \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sin y dy - \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} y \sin y dy.$$

Останній інтеграл проінтегруємо за частинами $u = y$; $dV = \sin y dy$; $du = dy$; $V = -\cos y$. Тому

$$\iint\limits_A \sin y dxdy = -\pi - \frac{3}{2}(y\cos y)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y dy + \frac{1}{2}(y\cos y)\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} -$$

$$- \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{2\pi} \cos y dy = -\pi + \frac{3}{2} + \pi + \frac{1}{2} = 2,$$

тобто ми дістали той самий результат, що й раніше.

Приклад 3. Обчислити подвійний інтеграл $I = \iint\limits_A \sqrt{x} y dxdy$, якщо область A обмежена кривими $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $x = 0$.

Область інтегрування зображено на рис. 99. Для обчислення заданого інтеграла, як бачимо з попереднього прикладу, краще скористатися формулою (1):

$$\iint\limits_A \sqrt{x}y\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{2-x^2} \sqrt{x}y\,dy = \int\limits_0^1 \sqrt{x}\left(\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_{x^2}^{2-x^2} dx = \int\limits_0^1 \frac{\sqrt{x}}{2}\left[(2-x^2)^2 - x^4\right]dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(\sqrt{x}2 - 2x^2\sqrt{x}\right)dx = \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{7}x^{\frac{7}{2}}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{16}{21}.$$

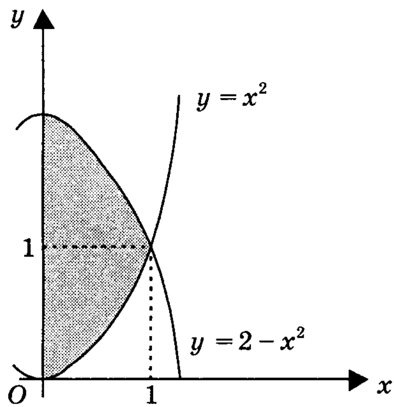

Рис. 99

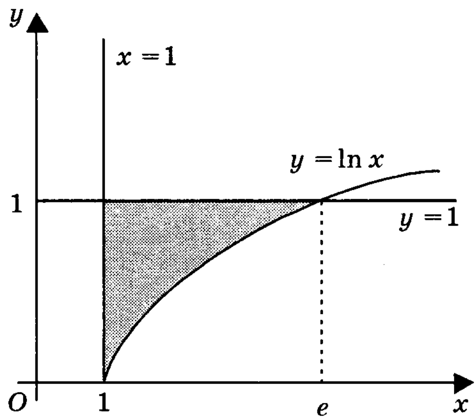

Рис. 100

Приклад 4. Змініть порядок інтегрування. $I = \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)dy.$

Спочатку побудуємо область інтегрування A. Визначимо криві, якими обмежена ця область: $x = 1$, $y = 1$, $y = \ln x$ або $x = e^y$ (рис. 100).

Межі інтегрування вибираємо за змінною y, для цього спроектуємо область A на відрізок [1, 0] осі Oy. Абсциса x у цих межах змінюється від 1 до $x = e^y$. Отже, змінивши порядок інтегрування, матимемо

$$\int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_1^{e^y} f(x,y)dx.$$

Приклад 5. Змініть порядок інтегрування.

$$I = \int\limits_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy + \int\limits_{-1}^0 dx \int\limits_0^{x^2} f(x,y)dy.$$

Побудуємо область інтегрування A, яка обмежена кривими $y=\sqrt{2-x^2}$, $y=x^2$ та віссю Ox (рис. 101). Межі інтегрування вибираємо за змінною y. Спроектуємо область A на відрізок $[0;\,1]$ осі Oy, на якому x змінюється від $-\sqrt{2-y^2}$ до $-\sqrt{y}$. Отже, $I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{2-y^2}}^{-\sqrt{y}} f(x,y)dx$.

Приклад 6. Змінити порядок інтегрування й обчислити подвійний інтеграл

$$I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_0^{2x}(x^2+y)dy+\int\limits_1^3 dx\int\limits_0^{3-x}(x^2+y)dy.$$

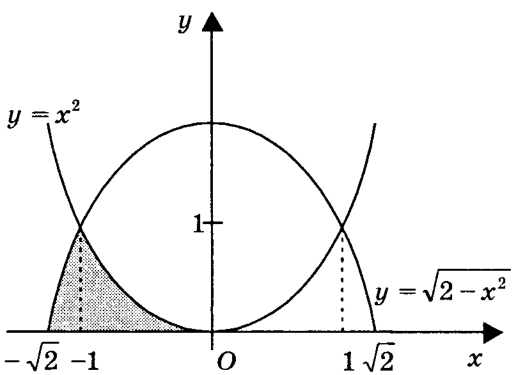

Рис. 101

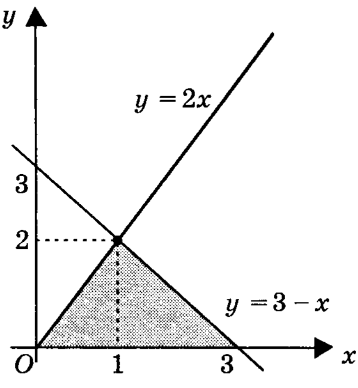

Рис. 102

Побудуємо область інтегрування A, яка обмежена кривими $y=2x$, $y=3-x$ та віссю Ox (рис. 102). Спроектуємо область A на відрізок $[0;\,2]$ осі Oy, на якому x змінюється від $\frac{y}{2}$ до $3-y$.

Отже,

$$I=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{\frac{y}{2}}^{3-y}(x^2+y)dx=\int\limits_0^2\left(\frac{x^3}{3}+yx\right)\Bigg|_{x=\frac{y}{2}}^{x=3-y}dy=$$

$$=\int\limits_0^2\left[\frac{(3-y)^3}{3}-\frac{y^3}{24}+3y-y^2-\frac{y^2}{2}\right]dy=\left[-\frac{(3-y)^4}{12}-\frac{y^4}{96}+\frac{3}{2}y^2-\frac{y^3}{2}\right]\Bigg|_0^2=\frac{51}{6}.$$

§ 2. Деякі застосування подвійних інтегралів

Об'єм тіла. Раніше (§ 1) було розглянуто задачу про об'єм циліндричного тіла. Здобуту формулу

$$V = \iint_A f(x, y)\,dxdxy \qquad (3)$$

застосовують до обчислення об'єму циліндричного тіла, твірні якого паралельні осі Oz і яке обмежене знизу областю A площини Oxy, а зверху — поверхнею $z = f(x, y) > 0$, де функція $f(x, y)$ неперервна в області A (рис. 103).

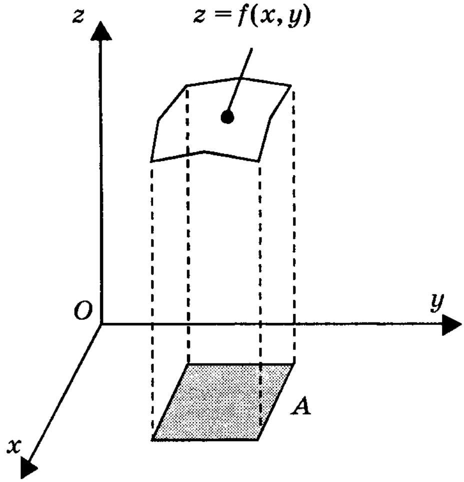

Рис. 103

Приклад 1. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2$, $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$ і $y = 6 - x$. Задане тіло обмежене зверху частиною параболоїда обертання $z = x^2 + y^2$, а знизу — частиною площини Oxy, вміщеною між прямими $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

За формулою (3)

$$V = \iint_A \left(x^2 + y^2\right)dxdy.$$

Розставляючи межі інтегрування в подвійному інтегралі, дістаємо

$$V = \int_1^4 dy \int_{\frac{y}{2}}^{6-y} \left(x^2 + y^2\right)\, dx = \int_1^4 \left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right)\Bigg|_{\frac{y}{2}}^{6-y} dy =$$

$$= \int_1^4 \left[\frac{(6-y)^3}{3} + y^2(6-y) - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right] dy = 78\frac{15}{32}.$$

Площа плоскої фігури. Якщо $f(x,y) \equiv 1$, $(x,y) \in A$, то циліндричне тіло, об'єм якого обчислюється за формулою (3), перетворюється в прямий циліндр з висотою, яка дорівнює 1. Об'єм такого циліндра чисельно дорівнює площі його основи:

$$F_A = \iint_A dxdy. \tag{4}$$

Приклад 2. Обчислити площу області A, обмежену лініями $xy = 4$ і $x + y = 5$.

Область являє собою фігуру, обмежену знизу гіперболою $xy = 4$, зверху — прямою $y = 5 - x$. Розв'язуючи сумісно рівняння гіперболи й прямої, знаходимо точки їх перетину: $M_1(1; 4)$, $M_2(4; 1)$. Маємо

$$F = \iint_A dxdy = \int_1^4 dx \int_{\frac{4}{x}}^{5-x} dy = \int_1^4 \left(5 - x - \frac{4}{x}\right) dx = \frac{1}{2}(15 - 16\ln 2).$$

§ 3. Потрійний інтеграл

Потрійний інтеграл та його обчислення в декартових прямокутних координатах. Нехай задана обмежена просторова область B, межа якої є кусково-гладкою поверхнею. Припустимо, що функція $f(x,y,z)$ визначена й обмежена в області. За допомогою вибору сітки кусково-гладких поверхонь будується деяке розбиття області B на скінченне число частин ΔB_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ з об'ємами $\Delta\tau_k$.

Потрійним інтегралом від неперервної функції $f(x,y,z)$ по обмеженій замкненій просторовій області B називається границя послідовності відповідних інтегральних сум при прямуванні до нуля найбільшого з діаметрів d_k областей ΔB_k, якщо ця границя не залежить від способу розбиття B на підобласті ΔB_k і вибору проміжних точок N_k:

$$\iiint_B f(x,y,z)dxdydz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x_k, y_k, z_k)\Delta\tau_k, \tag{5}$$

де $N_k(x_k, y_k, z_k) \in \Delta B_k$, $\lambda = \max d_k$; $d_k = \operatorname{diam} \Delta B_k$ $(k = 1, \ldots, n)$.

Властивості потрійних інтегралів аналогічні властивостям подвійних інтегралів.

Нехай B — циліндричне тіло, проекція якого на площину xy є областю A й яке обмежене знизу поверхнею $z = z_1(x, y)$, а зверху — $z = z_2(x, y)$ (рис. 104), тоді

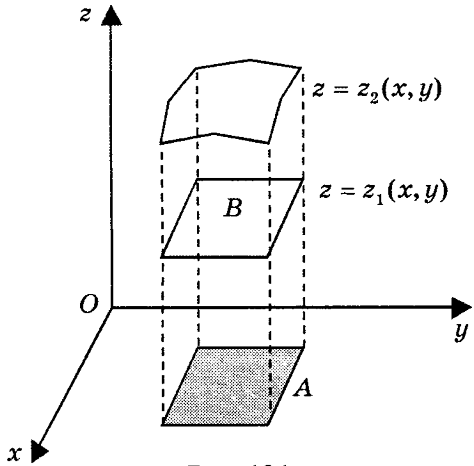

Рис. 104

$$\iiint_B f(x, y, z)dxdydz = \iint_A dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{6}$$

Інтегруванням по z потрійний інтеграл зводиться до подвійного інтеграла з області A. Якщо область $A = \{(x, y) | a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(x)\} = \{(x, y) | c \le y \le d,\ x_1(y) \le x \le x_2(y)\}$, то

$$\iiint_B f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz =$$

$$= \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz. \tag{7}$$

Приклад 1. Обчислити $\iiint_B (x + y + z)dxdydz$, якщо область B обмежена площинами $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Маємо

$$\iiint\limits_B (x+y+z)dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} (x+y+z)dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left(xz + yz + \frac{z^2}{2} \right)\Bigg|_{z=0}^{z=1-x-y} dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} \left[(x+y) - (x+y)^2 + \frac{(1-x-y)^2}{2} \right] dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\frac{(x+y)^2}{2} - \frac{(x+y)^3}{3} - \frac{(1-x-y)^3}{6} \right]\Bigg|_0^{1-x} dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{(1-x)^3}{6} \right] dx = \left(\frac{1}{6}x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} - \frac{(1-x)^4}{24} \right)\Bigg|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \iiint\limits_B zdxdydz$, поширений на півкулю радіуса R $(z \geq 0)$.

Область A є кругом $x^2 + y^2 \leq R^2$, тому $a = -R$, $b = R$, $y_1(x) = -\sqrt{R^2 - x^2}$, $y_2(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$. Апліката нижньої і верхньої границі півкулі буде $z_1(x, y) = 0$, $z_2(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$. За формулою (7) знаходимо

$$I = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} zdz = \int\limits_{-R}^{R} dx \int\limits_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{R^2 - x^2 - y^2}{2} dy =$$

$$= \frac{1}{2} \int\limits_{-R}^{R} \left[(R^2 - x^2)y - \frac{y^3}{3} \right]\Bigg|_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dx = \frac{2}{3} \int\limits_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx =$$

$$= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{4} x(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{8} R^2 x (R^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{3}{8} R^4 \arcsin\frac{x}{R} \right]\Bigg|_{-R}^{R} = \frac{\pi R^4}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $\iiint\limits_B ze^x d\tau$, якщо область обмежена поверхнями $x = 1$, $x = 2$, $y^2 + z^2 = 1$, $z = 0$ $(z > 0)$.

За формулою (6) маємо

$$\iiint\limits_B ze^x dxdydz = \iint\limits_A e^x dxdy \int\limits_0^{\sqrt{1-y^2}} zdz = \frac{1}{2} \int\limits_1^2 e^x dx \int\limits_{-1}^{1} (1 - y^2) dy =$$

$$= \frac{1}{2}(e^2 - e^1) \int\limits_{-1}^{1} (1 - y^2) dy = \frac{1}{2}(e^2 - e)\left(y - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_{-1}^{1} =$$

$$=\frac{1}{2}e(e-1)\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+1-\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{2}e(e-1)\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{2}{3}e(e-1).$$

Задачі і вправи для самостійної роботи

13.1. Використовуючи визначення подвійного інтеграла, довести справедливість його властивостей:

а) лінійності: $\iint\limits_A [f(x,y)\pm g(x,y)]dxdy=\iint\limits_A f(x,y)dxdy\pm\iint\limits_A g(x,y)dxdy$;

$\iint\limits_A cf(x,y)dxdy=c\iint\limits_A f(x,y)dxdy\ (c\in R)$;

б) адитивності: $\iint\limits_A f(x,y)dxdy=\iint\limits_{A_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{A_2} f(x,y)dxdy$, якщо $A=A_1\cup A_2$.

Обчислити повторні інтеграли.

13.2. $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^4 (x+y^2)dy$. **13.3.** $\int\limits_0^1 dy\int\limits_y^{\sqrt{2y}}\frac{ydx}{x^2+y^2}$. **13.4.** $\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\int\limits_0^a r^2\sin^2\varphi dr$.

13.5. $\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{\ln y} e^x dx$. **13.6.** $\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} yxdy$.

Написати рівняння кривих, які обмежують області інтегрування даних повторних інтегралів, і побудувати ці області.

13.7. $\int\limits_{-1}^0 dx\int\limits_{-\sqrt{1-x^2}}^{1} f(x,y)dy$. **13.8.** $\int\limits_0^{\frac{2}{3}} dx\int\limits_{\sqrt{1-x^2}}^{-x+\sqrt{3}} f(x,y)dy$. **13.9.** $\int\limits_1^2 dx\int\limits_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy$.

13.10. $\int\limits_0^2 dx^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\int\limits_0^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy$. **13.11.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_{2x}^{6-x} f(x,y)dy$.

13.12. $\int\limits_{-1}^0 dy\int\limits_{-1-2y}^{y^2} f(x,y)dx$.

Звести подвійний інтеграл $\iint\limits_A f(x,y)dxdy$ до повторного двома способами.

13.13. A — трикутник зі сторонами $x=0$, $y=0$, $x+y=3$.

13.14. A — круг $x^2+y^2\le 2y$.

13.15. A — трикутник зі сторонами $y=x$, $y=2x$, $x+y=4$.

13.16. A — паралелограм зі сторонами $y=2x$, $y=x+4$, $y=$ $=-2x+1$, $y=-2x+6$.

13.17. A — область, обмежена кривими $y = 3x^2$, $y = 6 - 3x$.

Змінити порядок інтегрування в таких повторних інтегралах.

13.18. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_{1-x^2}^1 f(x,y)dy + \int\limits_1^e dx \int\limits_{\ln x}^1 f(x,y)dy$.

13.19. $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{\sqrt{x}} f(x,y)dy + \int\limits_1^2 dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x}} f(x,y)dy$.

13.20. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)dx$.

13.21. $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{y} f(x,y)dx + \int\limits_1^{\sqrt{2}} dy \int\limits_0^{\sqrt{2-y^2}} f(x,y)dx$.

Обчислити подвійні інтеграли.

13.22. $\iint\limits_A (x^2 + y^2)dxdy$, якщо A — паралелограм зі сторонами $y = x$, $y = x + a$, $y = a$, $y = 3a$.

13.23. $\iint\limits_A xydxdy$, якщо A — область, обмежена кривою $y = \sin x$ і відрізком $0 \le x \le \pi$.

13.24. $\iint\limits_A x\sqrt{y}dxdy$, якщо A — область, обмежена двома параболами $y = x^2$, $y = -x^2 + 1$.

Обчислити подвійним інтегруванням площі областей.

13.25. Області обмеженої кривими $y = 5x$, $y = x$, $x = 1$.

13.26. Області обмеженої лініями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$.

Обчислити подвійним інтегруванням об'єми тіл, обмежених даними поверхнями (параметри, які входять в умови задач, вважаємо додатними):

13.27. Площинами $y = 0$, $z = 0$, $3x + y = 6$, $3x + 2y = 12$, $x + y + z = 6$.

13.28. Циліндрами $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$ і площинами $z = 0$, $x + z = 6$.

13.29. Циліндром $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ і площинами $z = 12 - 3x - 4y$, $z = 1$.

Розставити межі інтегрування в потрійному інтегралі $\iiint\limits_B f(x,y,z)dxdydz$ для областей B.

13.30. Область B — тетраедр, обмежений площинами $x + 2y + 3z = 6$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$.

13.31. Область B обмежена поверхнями $x^2+y^2=z$, $z=4$.

13.32. Область B обмежена поверхнями $\frac{x^2}{4}+y^2=1$, $z=12-3x-$ $-4y$, $z=1$.

13.33. Область B обмежена параболоїдами $z=x^2+y^2$, $z=2x^2+2y^2$, циліндром $y=x^2$ і площиною $y=x$.

Обчислити інтеграли.

13.34. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^b dy\int\limits_0^c x^3yzdz$. **13.35.** $\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^{3x} dy\int\limits_0^{xy} zdz$.

13.36. $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{x^2} dy\int\limits_0^{y} xyzdz$. **13.37.** $\int\limits_0^a dx\int\limits_0^{\sqrt{ax}} ydy\int\limits_{a-x}^{2(a-x)} dz$.

У задачах обчислити потрійним інтегруванням об'єми тіл, обмежених даними поверхнями.

13.38. Площинами $x=0$, $y=0$, $z=0$, $6x+4y+3z=12$.

13.39. Вирізаним з кулі $x^2+y^2+z^2\le 36$ циліндром $x^2+y^2\le 9$.

Відповіді до глави 13

13.2. $\frac{152}{3}$. **13.4.** $\frac{\pi a^2}{3}$. **13.5.** $\frac{1}{2}$. **13.6.** $\frac{1}{24}$.

13.7. $y=-\sqrt{1-x^2}$; $y=1$; $x=-1$; $x=0$.

13.8. $x+y=\sqrt{3}$; $y=\sqrt{1-x^2}$; $x=\frac{2}{3}$; $x=0$.

13.9. $y=2-x$; $y=\sqrt{2x-x^2}$.

13.10. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}$; $x=0$; $y=0$.

13.11. $y=6-x$; $y=2x$; $x=0$.

13.12. $x=y^2$; $x=-1-2y$; $y=0$; $y=-1$.

13.13. $\int\limits_0^3 dx\int\limits_0^{3-x} f(x,y)dy=\int\limits_0^3 dy\int\limits_0^{3-y} f(x,y)dx$.

13.14. $\int\limits_{-1}^1 dx\int\limits_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy=\int\limits_0^2 dy\int\limits_{-\sqrt{2y-y^2}}^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)dx$.

13.15. $\int\limits_0^{\frac{4}{3}} dx \int\limits_x^{2x} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{4}{3}}^{2} dx \int\limits_x^{4-x} f(x,y)dy = \int\limits_0^{2} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{y} f(x,y)dx + \int\limits_2^{\frac{8}{3}} dy \int\limits_{\frac{y}{2}}^{4-y} f(x,y)dx$. **13.16.** $\int\limits_{-1}^{\frac{1}{4}} dx \int\limits_{-2x+1}^{x+4} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{1}{4}}^{\frac{2}{3}} dx \int\limits_{2x}^{x+4} f(x,y)dy + \int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{3}{2}} dx \int\limits_{2x}^{-2x+6} f(x,y)dy = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{3} dy \int\limits_{\frac{1-y}{2}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)dx + \int\limits_3^{\frac{14}{3}} dy \int\limits_{y-4}^{\frac{6-y}{2}} f(x,y)dx$.

13.17. $\int\limits_{-2}^{1} dx \int\limits_{3x^2}^{6-3x} f(x,y)dy = \int\limits_0^{3} dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{3}}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y)dx + \int\limits_3^{12} dy \int\limits_{-\sqrt{\frac{y}{3}}}^{\frac{6-y}{3}} f(x,y)dx$.

13.18. $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_{\sqrt{1-y}}^{e^y} f(x,y)dx$. **13.19.** $\int\limits_0^{1} dy \int\limits_{y^2}^{2-y^2} f(x,y)dx$.

13.20. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{x^3}^{2-x} f(x,y)dy$. **13.21.** $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_0^{\sqrt{2-x^2}} f(x,y)dy$. **13.22.** $14a^4$.

13.23. $\frac{\pi^2}{2}$. **13.24.** $\frac{1}{15\sqrt{2}}$. **13.25.** 2. **13.26.** $\frac{16}{3}$. **13.27.** 12.

13.28. $\frac{48}{5}\sqrt{6}$. **13.29.** 22π. **13.30.** $\int\limits_0^{6} dx \int\limits_0^{\frac{6-x}{2}} dy \int\limits_0^{\frac{1}{3}(6-x-2y)} f(x,y,z)dz$.

13.31. $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{4} f(x,y,z)dz$. **13.32.** $\int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}} dy \int\limits_1^{12-3x-4y} f(x,y,z)dz$.

13.33. $\int\limits_0^{1} dx \int\limits_{x^2}^{x} dy \int\limits_{x^2+y^2}^{2x^2+2y^2} f(x,y,z)dz$. **13.34.** $\frac{1}{16}a^4b^2c^2$.

13.35. 48. **13.36.** $\frac{a^{10}}{80}$. **13.37.** $\frac{a^4}{12}$.

Навчальне видання

ВАСИЛЬЧЕНКО Іван Петрович

ВИЩА МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ

Підручник

Підп. до друку 24.10.2006. Формат 60×84 1/16
Папір офс. Друк офс. Гарнітура шкільна.
Ум. друк. арк. 26,5. Обл.-вид. арк. 33,5. Зам № 6-617.

Видавництво "Знання"
01034, Київ-34, вул. Стрілецька, 28
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру
видавців, виготівників і розповсюджувачів
видавничої продукції
ДК № 1591 від 03.12.2003
Тел. (044) 234-80-43, 234-23-36
E-mail: sales@znannia.com.ua
http://www.znannia.com.ua

ISBN 966-346-226-4
9789663462264

Віддруковано на ВАТ „Білоцерківська книжкова фабрика",
09117, м. Біла Церква, вул. Леся Курбаса, 4.

В Україні книгу можна придбати за адресами:

- м. Київ, вул. М. Грушевського, 4, маг. "Наукова думка", тел. (044) 278-06-96;
- м. Київ, вул. Л. Толстого, 11/61, маг. "Книги", тел. (044) 230-25-74;
- м. Київ, вул. Хрещатик, 44, маг. "Знання", тел. (044) 234-22-91;
- м. Київ, вул. Стрілецька, 13, маг. "Абзац", тел. (044) 581-15-68;
- м. Вінниця, вул. Привокзальна, 2/1, маг. "Кобзар", тел. (0432) 61-77-44;
- м. Донецьк, вул. Артема, 147А, "Будинок книги", тел. (062) 343-89-00;
- м. Дніпропетровськ, Театральний б-р, 3, маг. "Книжковий супермаркет", тел. (056) 372-80-18;
- м. Житомир, вул. Київська, 17/1, маг. "Знання", тел. (0412) 47-27-52;
- м. Запоріжжя, просп. Леніна, 147, маг. "Буква-Запоріжжя", тел. (0612) 49-00-08;
- м. Запоріжжя, просп. Леніна, 142, маг. "Спеціальна книга", тел. (0612) 13-85-53;
- м. Івано-Франківськ, Вічовий майдан, 3, маг. "Сучасна українська книга", тел. (03422) 3-04-60;
- м. Кіровоград, вул. Набережна, 13, маг. "Книжковий світ", тел. (0522) 24-94-64;
- м. Кривий Ріг, пл. Визволення, 1, маг. "Букініст", тел. (0564) 92-37-32;
- м. Луганськ, вул. Совєтська, 58, маг. "Глобус-книга", тел. (0642) 53-62-30;
- м. Луцьк, просп. Волі, 41, маг. "Знання", тел. (03322) 4-23-98;
- м. Львів, вул. Шевська, 6/2, маг. "Літера", тел. (0322) 94-82-08;
- м. Львів, просп. Шевченка, 16, маг. "Ноти", тел. (0322) 72-67-96;
- м. Львів, просп. Шевченка, 8, маг. "Українська книгарня", тел. (0322) 79-85-80;
- м. Одеса, вул. Буніна, 33, маг. "Будинок книги", тел. (0482) 32-17-97;
- м. Одеса, вул. Дерибасівська, 27, маг. "Дім книги", тел. (048) 728-40-13;
- м. Рівне, вул. Соборна, 57, маг. "Слово", тел. (0362) 26-94-17;
- м. Тернопіль, вул. Миру, 3А, маг. "Знання", тел. (0352) 53-21-22;
- м. Харків, вул. Сумська, 51, маг. "Books", тел. (057) 714-04-70, 714-04-71;
- м. Херсон, вул. Леніна, 14/16, маг. "Книжковий ряд", тел. (0552) 22-14-56;
- м. Хмельницький, вул. Подільська, 25, маг. "Книжковий світ", тел. (03822) 6-60-73;
- м. Черкаси, вул. Б. Вишневецького, 38, маг. "Світоч", тел. (0472) 47-92-20;
- м. Чернігів, просп. Миру, 45, маг. "Будинок книги", тел. (04622) 7-30-03.

Книготорговельним організаціям та оптовим покупцям звертатися за тел.: (044) 537-63-61, 537-63-62; факс: 235-00-44.
E-mail: sales@znannia.com.ua